نماذج أجابة أمتحان تقييمى ثانى

2023 / 2024 فصل أول

عمل / أ . أحمد نصار

النموذج الأول

1-

الدالتان f, g معرفتان كما يلي: $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=x^2+4$ أوجد:

(a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(f \circ g)(2)$ (c) $(g \circ f)(x)$ (d) $(g \circ f)(2)$

أوجد : $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+4$

a $(f \circ g)(x)$ b $(f \circ g)(2)$ c $(g \circ f)(x)$ d $(g \circ f)(2)$

الحل:

a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2+4}$

b $(f \circ g)(2) = \sqrt{(2)^2+4} = \sqrt{8}$

c $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(f(x)\right)^2 + 4 = (\sqrt{x})^2 + 4 = x+4$

d $(g \circ f)(2) = 2+4 = 6$

2-

لتكن: $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f\circ g$ عند $x=1$

الحل

(I) $g(x)=2x+3$

g دالة متصلة عند $x=1$

(II) $g(1)=2(1)+3=5$

(III) $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$

بفرض: $f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

(1) $f_1(x)=|x|$

f_1 دالة مطلق x متصلة عند $x=5$

(2) $f_2(x)=x+2$

f_2 دالة متصلة عند $x=5$

شرط المقام:

(3) $f_2(5)=5+2=7\neq 0$

من 1، 2، 3 نستنتج أن

$f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ متصلة عند $x=5$

من I، II، III نستنتج أن

$f\circ g$ متصلة عند $x=1$

النموذج الثانى

1-

ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \left| \sqrt{x} - 3 \right|$ عند $x = 4$

الحل

بفرض : $f_2(x) = |x|$ و $f_1(x) = \sqrt{x} - 3$

$\therefore f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$

(I) $f_1(x) = \sqrt{x} - 3$

بفرض : $f_1(x) = g(x) - h(x)$

(1) $g(x) = \sqrt{x}$

و دالة مستمرة عند $x = 4 \in R^+$

دالة جذرية ($n = 2$ زوجى)

(2) $h(x) = -3$

h دالة مستمرة عند $x = 4$

دالة ثابتة

من 1 ، 2 ينتج أن

$f_1(x) = g(x) - h(x)$ مستمرة عند $x = 4$

(II) $f_1(4) = \sqrt{4} - 3 = -1$

(III) $f_2(x) = |x|$

f_2 دالة مستمرة عند $x = -1$

من I ، II ، III ينتج أن

$f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ مستمرة عند $x = 4$

2-

ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : \ x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \ 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : \ x=5 \end{cases}$$

الحل

نفرض : $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

g دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x\in R-\{0\}$

$g(x)=f(x) \qquad \forall x\in(1,5)$

∴ f متصلة على $(1,5)$ ← I

دراسة اتصال f عند $x=1$ من اليمين

① $f(1)=2$

② $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=\dfrac{1+1}{1}=2$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to 1^+} x=1\neq 0$

من 1، 2 ينتج أن

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

∴ f متصلة عند $x=1$ من اليمين II

دراسة اتصال f عند $x=5$ من اليسار

① $f(5)=\dfrac{26}{5}$

② $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=\dfrac{(5)^2+1}{5}=\dfrac{26}{5}$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to 5^-} x=5\neq 0$

من 1، 2 ينتج

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=f(5)$

∴ f متصلة عند $x=5$ من اليسار III

من I ، II ، III ينتج

f متصلة على $[1,5]$

النموذج الثالث

1-

ابحث اتصال الدالة g : $g(x)=\sqrt{x^2+1}-|x-3|$ عند $x=3$

الحل

نفرض أن : $g(x)=h(x)-f(x)$

(I) $h(x)=\sqrt{x^2+1}$

نفرض : $h(x)=\sqrt{a(x)}$

(1) $a(x)=x^2+1$

a دالة متصلة عند $x=3$

(2) $a(3)=(3)^2+1=10>0$

من 1 و 2 ينتج أن

الدالة h متصلة عند $x=3$

(II) $f(x)=|x-3|$

نفرض :

$f_2(x)=|x|$ و $f_1(x)=x-3$

$\therefore f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$

(1) $f_1(x)=x-3$

f_1 دالة متصلة عند $x=3$

(2) $f_1(3)=3-3=0$

(3) $f_2(x)=|x|$

f_2 دالة متصلة عند $x=0$

من 1 و 2 و 3 ينتج

f متصلة عند $x=3$

$\therefore$ من I و II ينتج

$g(x)=h(x)-f(x)$ متصلة عند $x=3$

2-

$$f(x)=\begin{cases} -x+4 & : x \le 7 \\ \dfrac{9}{-x+4} & : x > 7 \end{cases}$$

الحل:

مجال الدالة f هو : $D_f = (-\infty, 7] \cup (7, \infty) = \mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها

نفرض : $g(x) = -x + 4$

g دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$\forall x \in (-\infty, 7]$ $\quad f(x) = g(x)$ $\quad$ e

E f دالة متصلة على $(-\infty, 7]$ $\quad$ (1)

$$f(x)=\begin{cases} -x+4 & : x \le 7 \\ \dfrac{9}{-x+4} & : x > 7 \end{cases}$$

تابع للحل

نفرض : $h(x) = \dfrac{9}{-x+4}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{4\}$

$\forall x \in (7, \infty)$ $\quad f(x) = h(x)$ $\quad$ E

E f دالة متصلة على $(7, \infty)$ $\quad$ (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 7$ من جهة اليمين

$f(7) = -3$

$$\lim_{x\to 7^+} f(x) = \lim_{x\to 7^+} \left(\frac{9}{-x+4}\right) = -3$$

$$\text{E}\quad f(7) = \lim_{x\to 7^+} f(x)$$

E الدالة f متصلة عند $x = 7$ من جهة اليمين $\quad$ (3)

من (3) , (2) , (1) نجد : f دالة متصلة على $(-\infty, \infty)$

(شرط نهايه المقام : 3- = 4+7- لا يساوى صفر)

النموذج الرابع

1-

لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-1 , 1]$

الحل :

نفرض أن

$g(x) = x^2 - 7x + 10$ ، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$D_f = \{ x : g(x) \geq 0 \}$

$x^2 - 7x + 10 \geq 0$

المعادلة المناظرة :

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0$

$x = 2 \quad , x = 5$

$++$	0	$---$	0	$++$	
	2		5		

$\therefore$ مجال الدالة f هو $(-\infty , 2] \cup [5 , \infty)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-1 , 1]$

$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty , 2] \cup [5 , \infty)$

$\because$ $[-1 , 1]$ مجموعة جزئية من D_f

$\therefore g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1 , 1]$ (1)

(2) الدالة g : $g(x) = x^2 - 7x + 10$ متصلة على $[-1 , 1]$

من (1) و (2)

f متصلة على $[-1 , 1]$

2-

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+9} & : x \le 0 \\ \frac{6}{x+3} & : x > 0\end{cases}$$

الحل:

مجال الدالة f هو : $D_f = (-\infty, 0] \cup (0, \infty) = \mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها

نفرض : $g(x) = \sqrt{x^2+9}$

الدالة $g_1(x) = x^2+9$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$x^2+9 \ge 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

g دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$f(x) = g(x) \quad \forall\ x \in (-\infty, 0]$ e

E f دالة متصلة على $(-\infty, 0]$ (1)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+9} & : x \le 0 \\ \frac{6}{x+3} & : x > 0\end{cases}$$

تابع للحل

نفرض : $h(x) = \dfrac{6}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$f(x) = h(x) \quad \forall\ x \in (0, \infty)$ E

E f دالة متصلة على $(0, \infty)$ (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 0$ من جهة اليمين

$f(0) = 3$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{6}{x+3}\right) = 2$$

E $f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

E الدالة f ليست متصلة عند $x = 0$ من جهة اليمين (3)

من (3) , (2) , (1) نجد : f دالة متصلة على $(-\infty, 0], (0, \infty)$

(شرط نهايه المقام : 3 = 3+0 لا يساوى صفر)

النموذج الخامس

1-

$$F(x)=\sqrt{8-2x^2}$$

نفرض أن $\Leftarrow$ $F(x)=\sqrt{g(x)}$

$$,\ g(x)=8-2x^2$$

$$\therefore D_f=\{X : g(x)\geq 0\}$$

$$\boxed{8-2x^2\geq 0}$$

$$4-x^2\geq 0$$

المعادلة المناظرة $\Leftarrow$ $4-x^2=0$

$$(x-2)(x+2)=0$$

$$X=2\ ,\ X=-2$$

مثل   عكس أشارة معامل x^2 مثل

$-\infty$ $-$ (-2) $+$ (2) $-$ ∞

$\therefore$ مجال الدالة $F(x)$ هو: $[-2,2]$

لدراسة أتصال الدالة $F(x)$ على مجالها $[-2,2]$

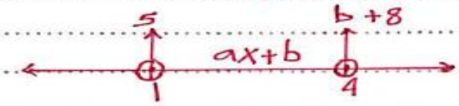
$$\because g(x)\geq 0\ \forall\ x\in[-2,2]$$

$\because g(x)=8-2x^2 \rightarrow$ متصلة على $[-2,2]$

$\therefore F(x)=\sqrt{8-2x^2} \rightarrow$ متصلة على $[-2,2]$

2-

الحل



$\because$ f متصلة على $[1 , 4]$

$\because$ f متصلة عند $x = 1$ من اليمين

$\therefore \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \to 1^+} (ax + b) = 5$

$a(1) + b = 5$

$a + b = 5$

$2 + b = 5$

$\boxed{b = 3}$

$\because$ f متصلة عند $x = 4$ من اليسار

$\therefore \lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$

$\lim_{x \to 4^-} (ax + b) = b + 8$

$a(4) + \cancel{b} = \cancel{b} + 8$

$\frac{4a}{4} = \frac{8}{4}$

$\boxed{a = 2}$

بالتعويض

النموذج السادس

1-

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

الحـــــــل

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$x = -2 \rightarrow a = -2 , f(-2) = 3(-2)^2 = 12$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{3(-2+h)^2 - 12}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{12 + 3h^2 - 12h - 12}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3h + 12)}{\cancel{h}}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} 3h - 12 = -12$$

2-

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a$ حيث $a>0$

الحل:

عند النقطة $x=a$ ، (إن وجدت)

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\boxed{\lim_{h\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}}\qquad \boxed{\lim_{h\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}$$

$$\boxed{\lim_{h\to a}\frac{(x-a)}{x-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}$$

$$\boxed{\lim_{h\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}$$

أختبار الجذر

$$\lim_{x\to a}x=a\,,\quad a>0$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{\lim_{x\to a}x}=\sqrt{a}$$

أختبار المقام

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\sqrt{a}$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\lim_{x\to a}\sqrt{a}\qquad \Bigg|\qquad \sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}\quad ,2\sqrt{a}\neq 0$$

يمكننا الآن إيجاد النهاية

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

النموذج السابع

1-

لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 + 2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ إن وجدت

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{2} - \cancel{x^2} - \cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \quad : h \neq 0$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

2-

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & : x\leqslant -1 \\ x^2-x-2 & : x>-1 \end{cases}$$
أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

(ان وجدت)

$$f_-'(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$
$$f_-'(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x^2+x)-(0)}{x+1}$$
$$f_-'(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x(x\ \ +1)}{x+1}$$
$$f_-'(-1)=\lim_{x\to -1^-}x=-1$$

(ان وجدت)

$$f_+'(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$
$$f_+'(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x^2-x-2)-(0)}{x+1}$$
$$f_+'(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$
$$f_+'(-1)=\lim_{x\to -1^+}(x-2)=-3$$
$$f_+'(-1)\neq f'_-(-1)$$

$f'(-1)$ غير موجود

النموذج الثامن

1-

لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : \quad x\le 2 \\ 3x-2 & : \quad x>2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

الحل

$f(2) = (2)^2-4=0 \rightarrow (1)$

اليسار:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-4) = (2)^2-4=0$

اليمين:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x-2) = 3(2)-2=4$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غيرموجودة $\rightarrow (2)$

من 1، 2 ينتج أن f غيرمتصلة عند $x=2$

$\therefore$ f غيرقابلة للاشتقاق عند $x=2$

2-

لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

الحل

اعادة تعريف :

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & : x \geq 2 \\ -(x-2) & : x < 2 \end{cases}$$

f دالة متصلة عند $x = 2$

الاشتقاق :

$-(x-2)$ ← 2 → $x-2$

$$\boxed{f(2) = (2) - 2 = 0}$$

اليمين :

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} (1) = 1$$

اليسار :

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} (-1) = -1$$

$\therefore f'_-(2) \neq f'_+(2)$

$\therefore f'(2)$ غير موجودة

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$