وزارة التربية
الإدارة العامة لمنطقة الجهراء التعليمية
التوجيه الفني للرياضيات

المجال الدراسي : الرياضيات
الزمن : ساعتان وخمس واربعون
عدد الصفحات : 11

نموذج امتحان الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي
العام الدراسي 2023 / 2024 م

15

القسم الأول – أسئلة المقال

أجب عن جميع أسئلة المقال موضحاً خطوات الحل

السؤال الأول : (15 درجة)

(a) لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $(x \neq 0)$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة : $(f \circ g)'(1)$

(8 درجات)

الحل :

تابع السؤال الأول :

(b) أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

(7 درجات)

الحل :

السؤال الثاني : (15 درجة)

15

(a) بين أن الدالة f : $f(x) = x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة علي الفترة [0,2] ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك .

(9 درجات)

الحل :

تابع السؤال الثاني :

(b) يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري علي الطعام في منازل مدينةمعينة يساوي 290 ديناراً كويتياً .

فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبين أن متوسطها الحسابي (دينارا) $\overline{x} = 283$ وانحرافها المعياري (ديناراً) $S = 32$.

فهل يمكن الاعتماد علي هذه العينة لتأكيد ما افترضه ؟

استخدم مستوى الثقة 95% (علماً بأن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً)

(6 درجات)

الحل :

السؤال الثالث : (15 درجة)

15

(a) أوجد معادلة المماس والناظم عند النقطة ($1, \frac{2}{3}$) لمنحنى الدالة f حيث

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$$

(8 درجات)

الحل :

تابع السؤال الثالث :

(b) ادرس اتصال الدالة f علي [1,3] حيث

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : \ x = 1 \\ x^2 - 3 & : \ 1 < x < 3 \\ 6 & : \ x = 3 \end{cases}$$

(7 درجات)

الحل :

السؤال الرابع : (15 درجة)

15

(a) أوجد: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$ **(8 درجات)**

الحل :

تابع السؤال الرابع :

(b) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 + 12\,x - 5$

أوجد كلا مما يلي :

(a) النقاط الحرجة للدالة .

(b) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها .

(c) القيم القصوى المحلية .

(7 درجات)

الحل :

القسم الثاني: البنود الموضوعية

أولا : في البنود (1) إلى (3) عبارات ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ،

وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1 إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-1$ وكان $\lim_{x\to-1}(f(x)-2)=-1$ فإنّ $f(-1)=1$ (a) (b)

2 الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$ (a) (b)

3 الدالة f : $f(x)=x|x|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x\in\mathbb{R}$. (a) (b)

ثانيا : في البنود من (4) إلى (10) لكل بند من البنود التالية أربع اختيارات ، واحدة فقط منها صحيح ، ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

4 (7) $\lim_{x\to-2}(x^3+3x^2-2x-17)=$

(a) 17 (b) -17 (c) 9 (d) -9

5 لتكن الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g : $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4 (b) -4

(c) 1 (d) -1

6 للدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته:

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

7 ميل المماس عند النقطة $A(1\ ,\ 1)$ على منحنى: $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي:

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

8 **(10)** إذا كانت f دالة كثيرة حدود، $(c\ ,\ f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

(a) $f''(c) = 0$ (b) $f'(c) = 0$ (c) $f(c) = 0$ (d) $f''(c)$ غير موجودة

9 إنّ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

(a) 2.12 (b) 2.17 (c) 21.2 (d) 21%

10 تتقارب قيمتي t , Z المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

(a) 29 (b) 28 (c) 27 (d) 26

انتهت الأسئلة

السؤال	الاجابة			
(1)	ⓐ	ⓑ		
(2)	ⓐ	ⓑ		
(3)	ⓐ	ⓑ		
(4)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(5)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(6)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(7)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(8)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(9)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(10)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ

لكل بند درجة واحدة فقط

10

نموذج الاجابة

15

القسم الأول – أسئلة المقال

تراعى جميع الحلول الأخرى

السؤال الأول : (15 درجة)

(a) لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $(x \neq 0)$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة : $(f \circ g)'(1)$

(8 درجات)

الحل :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{2x - (2x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \quad , \quad g'(x) = 2x$$

$$f'(g(x)) = f'(x^2+1) = \frac{-1}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore (f \circ g)'(x) = \frac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$(f \circ g)'(1) = \frac{-2(1)}{(1^2+1)^2} = \frac{-1}{2}$$

تابع السؤال الأول :

(b) أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$ **(7 درجات)**

الحل :

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$|x| = x$ عندما $x > 0$

$$= \frac{\cancel{x}^{1}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}^{1}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$$= 1+0-0 = 1 \quad , \quad 1 > 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}$$

$$= 1-0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

السؤال الثاني : (15 درجة)

15

(a) بين أن الدالة f : $f(x)=x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة علي الفترة [0,2] ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك .

(9 درجات)

الحل :

الدّالة f : $f(x)=x^2$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[0,2]$، وقابلة للاشتقاق على $(0,2)$.

$\therefore$ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة $[0,2]$.

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (0,2)$ بحيث:

نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$\because$ $f(0)=(0)^2=0$, $f(2)=2^2=4$

$f'(x)=2x$, $f'(c)=2c$

$$\therefore 2c=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$2c=\frac{4-0}{2-0}$$

$$2c=2$$

$$c=1 \in (0,2)$$

التفسير:

يوجد مماس لمنحنى الدالّة f عند $x=1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(2,4)$, $(0,0)$

تابع السؤال الثاني :

(b) يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري علي الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 ديناراً كويتياً .

فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبين أن متوسطها الحسابي (دينارا) $\overline{x} = 283$ وانحرافها المعياري (ديناراً) $S = 32$.

فهل يمكن الاعتماد علي هذه العينة لتأكيد ما افترضه ؟

استخدم مستوى الثقة 95% (علماً بأن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً) (6 درجات)

الحل :

$n = 10 \quad , \quad \overline{x} = 283 \quad , \quad S = 32$

1 صياغة الفروض

$H_0 : \mu = 290$ مقابل $H_1 : \mu \neq 290$

2 σ غير معلومة ، $10 < 30$, $n = 10$

∴ نستخدم المقياس الإحصائي t :

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}}$$

$$t \approx -0.6917$$

3 $n = 10$ ∵ درجات الحرية: $n - 1 = 10 - 1 = 9$

مستوى الثقة 95% $1 - \alpha = 0.95$

$$\alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول توزيع t ∴ $t_{0.025} = 2.262$

4 منطقة القبول هي $(-2.262 \ , \ 2.262)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي: ∵ $-0.6917 \in (-2.262 \ , \ 2.262)$

∴ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 290$

السؤال الثالث : (15 درجة)

15

(a) أوجد معادلة المماس والناظم عند النقطة $(1, \frac{2}{3})$ لمنحنى الدالة f حيث

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$$

(8 درجات)

الحل :

نوجد أولًا مشتقة الدالة f بتطبيق قاعدة القسمة

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(x^3+1)' - (x^3+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(3x^2) - (x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

ومنه الميل: $f'(1) = \frac{(1^2+2)(3(1)^2) - (1^3+1)(2(1))}{(1^2+2)^2} = \frac{5}{9}$

معادلة خط المماس: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x-a)$

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$$

$$\therefore \quad y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x-1)$$

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{9}$$

لإيجاد معادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ على المنحنى نستخدم المعادلة:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

ميل الناظم: $\frac{-1}{f'(a)} = -\frac{9}{5}$

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{9}{5}(x-1)$$

$$y = -\frac{9}{5}x + \frac{37}{15}$$

تابع السؤال الثالث :

(b) ادرس اتصال الدالة f علي [1,3] حيث

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

(7 درجات)

الحل :

$$f(x)=x^2-3 \quad : \quad x\in(1,3)$$

$$\forall c\in(1,3)$$

$$f(c)=c^2-3$$

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}(x^2-3)=c^2-3$$

$$\therefore \lim_{x\to c} f(x)=f(c) \qquad \forall c\in(1,3)$$

∴ الدالة f متصلة على $(1,3)$ (1)

ندرس اتصال الدالة f عند $x=1$ من جهة اليمين.

$$f(1)=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-3)=-2$$

$$\because \ f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

∴ الدالة f متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين. (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x=3$ من جهة اليسار.

$$f(3)=6$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-3)=6$$

$$\therefore \ f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)$$

∴ الدالة f متصلة عند $x=3$ من جهة اليسار. (3)

من (1), (2), (3)

∴ الدالة f متصلة على $[1,3]$

السؤال الرابع : (15 درجة)

15

(a) أوجد: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$ **(8 درجات)**

الحل :

اضرب البسط والمقام في $1+\cos x$

$$\frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)} \cdot (1+\cos x) \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{1-\cos^2 x} \cdot (1+\cos x) \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot (1+\cos x) \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot (1+\cos x) \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} (1+\cos x)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0} (1) + \lim_{x\to 0} \cos x \right)$$

$$= (1)^2 \times (1+1)$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

تابع السؤال الرابع :

(b) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 + 12\,x - 5$

أوجد كلا مما يلي :

(a) النقاط الحرجة للدالة .
(b) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها .
(c) القيم القصوى المحلية .

(7 درجات)

الحل :

a $\because f$ دالة كثيرة حدود.

$\therefore f$ متّصلة وقابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$،

نوجد النقاط الحرجة فقط عند أصفار مشتقّة الدالّة f'. $f'(x) = 3x^2 - 12$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = -2 \quad , \quad x = 2$$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي: $(-2, f(-2)) = (-2, 11)$

$(2, f(2)) = (2, -21)$

b نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' :

	$-\infty$	-2	2	∞
الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$	
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$	
سلوك الدالّة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗	

نلاحظ من الجدول: الدالّة متزايدة على الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(2, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-2, 2)$.

c نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنّه توجد قيمة عظمى محليّة عند $x = -2$، وقيمة صغرى محليّة عند $x = 2$.

القيمة العظمى المحليّة هي $f(-2) = 11$، والقيمة الصغرى المحليّة هي $f(2) = -21$.

القسم الثاني: البنود الموضوعية

أولا : في البنود (1) إلى (3) عبارات ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ،

وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1 إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-1$ وكان $\lim_{x\to-1}(f(x)-2)=-1$ فإنّ $f(-1)=1$

(a) (b)

2 الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$

(a) (b)

3 الدالة f : $f(x)=x|x|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x\in\mathbb{R}$.

(a) (b)

ثانيا : في البنود من (4) إلى (10) لكل بند من البنود التالية أربع اختيارات ، واحدة فقط منها صحيح ، ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

4 (7) $\lim_{x\to-2}(x^3+3x^2-2x-17)=$

(a) 17 (b) -17 (c) 9 (d) -9

5 لتكن الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g : $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4 (b) -4

(c) 1 (d) -1

6 للدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته:

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

7 ميل المماس عند النقطة $A(1\ ,\ 1)$ على منحنى: $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي:

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

8 **(10)** إذا كانت f دالة كثيرة حدود، $(c\ ,\ f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

(a) $f''(c) = 0$ (b) $f'(c) = 0$ (c) $f(c) = 0$ (d) $f''(c)$ غير موجودة

9 إنّ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

(a) 2.12 (b) 2.17 (c) 21.2 (d) 21%

10 تتقارب قيمتي t , Z المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

(a) 29 (b) 28 (c) 27 (d) 26

انتهت الأسئلة

السؤال	الاجابة			
(1)		ⓑ		
(2)	ⓐ			
(3)	ⓐ			
(4)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	
(5)		ⓑ	ⓒ	ⓓ
(6)	ⓐ	ⓑ		ⓓ
(7)	ⓐ	ⓑ		ⓓ
(8)		ⓑ	ⓒ	ⓓ
(9)		ⓑ	ⓒ	ⓓ
(10)		ⓑ	ⓒ	ⓓ

لكل بند درجة واحدة فقط

10