وزارة التربية
الإدارة العامة لمنطقة حولي التعليمية
مدرسة مارية القبطية الثانوية بنات

شعبة الرياضيات

مارية القبطية مفتاح كل نجاح

مذكرة مراجعة
مادة الرياضيات للصف الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الأول

إعداد المعلمات :
منى المحاسنة
رشا عبدالوهاب
إيمان الملا

رئيسة القسم :
مريم الأحمد

مديرة المدرسة :
منال المطيري

الرياضيات مهارة نكتسبها مع كثرة الحل و التمرين

هذه المراجعة لا تغني عن كتاب الطالب و كراسة التمارين

شعبة الرياضيات

وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة حولي التعليمية

مدرسة مارية القبطية الثانوية بنات

محتوى مراجعة

مادة الرياضيات للصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

االوحدة الاولى : النهايات و الاتصال

الوحدة الثانية : الاشتقاق

الوحدة الثالثة : تطبيقات على الاشتقاق

االوحدة الرابعة : الاحصاء

نماذج اختبارات توجيه حولي

الرياضيات مهارة نكتسبها مع كثرة الحل و التمرين

هذه المراجعة لا تغني عن كتاب الطالب و كراسة التمارين

بند (١-١) البنود المعلقة

المجال	الدرس	الملاحظات و المعلق	
الأنماط و الجبر و الدوال	(١ – ١) النهايات	كتاب الطالب	
		كراسة التمارين	مقالى يعلق (16-20-21-22)

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

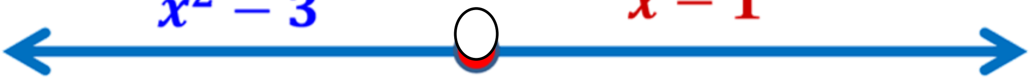
حاول ان تحل ٥ صـ ١٩

إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & : x<2 \\ x-1 & : x>2 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

الحل



النهاية من جهة اليمين	النهاية من جهة اليسار
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)=$ $=2-1=1$	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-3)$ $=2^2-3=1$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=1$$

حاول ان تحل (7) صـ ٢٢

أوجد

$$\lim_{x\to 4}\left(x+\sqrt{x}\ \right)^4$$

الحل:

نتحقق ان ما تحت الجذر > 0

نظرية (6) $\quad x \to 4\ ;\ 4 > 0$

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{x\to 4}\left(x+\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to 4} x + \lim_{x\to 4}\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 4}\left(x+\sqrt{x}\right) = 4 + 2 = 6$$

$$[\lim_{x\to 4}\left(x+\sqrt{x}\right)]^4 = (\ 6\ )^4 = 1296$$

حاول ان تحل (7) صـ ٢٢

أوجد $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

الحل:

نتحقق ان نهاية المقام ≠ 0

$$\lim_{x\to -1}(x-2) = -1-2 = -3 \neq 0$$

$$\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^3-4x+5)} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2} = \frac{\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{\lim_{x\to -1}(x-2)} = \frac{-2}{3}$$

حاول ان تحل (7) صـ 22ــــ

أوجد $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-5}$

الحل:

نتحقق ان نهاية ما تحت الجذر > 0

$$\lim_{x\to 5}(x^2-5) = (5)^2-5 = 20$$

$, 20 > 0$

$$\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-5} = \sqrt{\lim_{x\to 5}(x^2-5)} = \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

حاول ان تحل 8صـ ٣2

أوجد إن امكن $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

الحل:

عند التعويض المباشر عن x بـ 2- في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

∴ $(x+2)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

حلل إلى عوامل وبسط

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}=\frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-2)}=\frac{x+1}{x-2}\quad , \; x\neq-2$$

نتحقق ان المقام ≠ 0

$$\lim_{x\to-2}(x-2)=-2-2=-4 \quad , \quad -4\neq0$$

استخدم الصيغة المبسطة

عوض عن x بـ (2-)

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{x+1}{x-2}$$

$$=\frac{-2+1}{-2-2}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

حاول ان تحل 8صـ ٣2ـــــ

أوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

الحل:

عند التعويض المباشر عن x بـ 7- في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

حل فرق بين مربعين

$$\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \frac{(x+4+3)\ (x+4-3)}{x\ (x+7)}$$

$$= \frac{(x+7)\ (x+1)}{x\ (x+7)}$$

$(x+7)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$= \frac{x+1}{x}$$

$x \neq -7$

$$\lim_{x\to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \lim_{x\to -7} \frac{x+1}{x}$$

نتحقق ان المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to -7} x = -7 \ , \quad -7 \neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x\to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \lim_{x\to -7} \frac{x+1}{x}$$

عوض عن x بـ 7-

$$= \frac{-7+1}{-7} = \frac{6}{7}$$

كراسة التمارين صـ ١٠

الحل

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4+x)^2-16}{x}$$

أوجد إن أمكن

الحـــل

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4+x)^2-16}{x}$$

بالتعويض المباشر عن $x = 0$ تنتج صيغة غير معينة

$$= \lim_{x\to 0}\frac{16+8x+x^2-16}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x+x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(8+x)}{x} = \lim_{x\to 0}(8+x) = 8$$

مثال ٨ صـ ٢٣

اوجدي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$$

الحل

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\cancel{2}+\cancel{x}-\cancel{2}][(2+x)^2+2(2+x)+4]}{\cancel{x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}[(2+x)^2+2(2+x)+4]=$$

$$\lim_{x\to 0}[(2+x)^2+4+2x+4]=$$

$$(\lim_{x\to 0}(2+x))^2+(\lim_{x\to 0}(8+2x))=$$

$$(2+0)^2+(8+2(0))=12$$

حاول ان تحل ٩ صـ ٢٣

أوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

الحل: عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$\therefore$ $(x-2)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

اضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x(x-2)}\times\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$=\frac{x^2+5-9}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{x^2-4}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}^{1}}{x\cancel{(x-2)}_{1}(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{(x+2)}{x\sqrt{x^2+5}+3}\qquad \boxed{,\ x\neq 2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x\sqrt{x^2+5}+3}$$

نتحقق أن نهاية ما تحت الجذر أكبر من 0

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5)=9\quad ;\quad 9>0$$

$$\lim_{x\to 2}(x\sqrt{x^2+5}+3)=\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}+\lim_{x\to 2}3$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to 2}x\cdot\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+5)}+\lim_{x\to 2}3=2\times(3+3)=12$$

$\boxed{12\neq 0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{4}{12}$$

مثال ٩ صـ ٢٣

أوجدي :

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$$

الحل

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}=\lim_{x\to2}\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}=\lim_{x\to2}\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x-3}+1)}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}=$$

$$\frac{\lim_{x\to2}2}{\lim_{x\to2}\sqrt{2x-3}+1}=\frac{2}{2}=1$$

نتحقق أن نهاية ما تحت الجذر التربيعي > 0

$$\lim_{x\to2}(2x-3)=2(2)-3=1,\ 1>0$$

نتحقق أن نهاية المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to2}\left(\sqrt{2x-3}+1\right)=$$

$$\lim_{x\to2}\left(\sqrt{2x-3}\right)+\lim_{x\to2}1=$$

$$\sqrt{\lim_{x\to2}(2x-3)}+\lim_{x\to2}1=\sqrt{1}+1=2,\ 2\neq0$$

حاول ان تحل ٩صـ ٢٣

اوجدي : $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

الحل

عند التعويض المباشر عن x بـ 9 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}} = \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{\overset{-1}{\cancel{(x-9)}}(3+\sqrt{x})}{\cancel{9-x}}$$

اوجدي :

$$= \lim_{x \to 9} (-3-\sqrt{x})$$

نهاية الجذر التربيعي لـ x

$\because 9 > 0$

$\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3$

$$= \lim_{x \to 9} (-3) - \sqrt{\lim_{x \to 9} x}$$

$$= (-3) - 3 = -6$$

حاول ان تحل ١٠ صـ٢٦ ــــــ

أوجد إن امكن

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}$$

الحل: **عند التعويض عن x بـ 3 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة**

نقسم البسط على المقام ونوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

3	1	-2	-4	3
		3	3	-3
	1	1	-1	0

الناتج x^2+x-1 والباقي 0

$$\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3} = x^2+x-1 \quad , x \neq 3$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x^2+x-1)$$

نظرية

$$= (3)^2 + (3) - 1 = 11$$

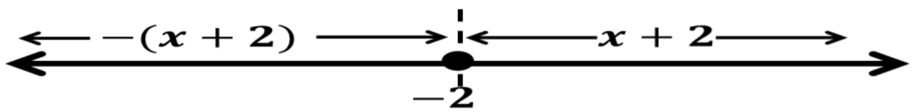
حاول ان تحل ٩ صـ ٢٣ ـــــ

اوجدي :

$$\lim_{x\to -2} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$$

الحل

عند التعويض المباشر عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+2)}{(x+2)(x+1)} & : x>-2\\[2ex] \dfrac{-(x+2)}{(x+2)(x+1)} & : x<-2\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)} & : x>-2\\[2ex] \dfrac{-1}{(x+1)} & : x<-2\end{cases}$$

$: x \notin \{-1 \text{ و } -2\}$

النهاية من جهة اليمين

نتحقق ان المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to -2^+}(x+1)=-2+1=-1\neq 0$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{(x+1)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to -2^-}(1)}{\lim_{x\to -2^-}(x+1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

النهاية من جهة اليسار

نتحقق ان المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to -2^-}(x+1)=-2+1=-1\neq 0$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{-1}{(x+1)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to -2^-}(-1)}{\lim_{x\to -2^-}(x+1)}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to -2^-} f(x)\neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

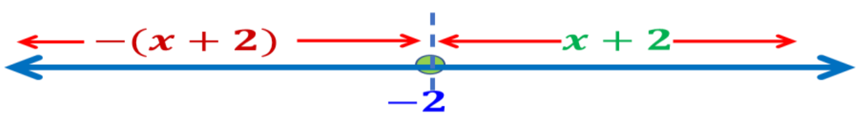
$\therefore \lim_{x\to -2} f(x)$ غير موجودة

حاول ان تحل ٩ صـ ٢٣

اوجدي : $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x+2|-7}{x^2-25}$

الحل

عند التعويض المباشر عن x بـ 5 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة



$x+2=0 \longrightarrow x=-2$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+2)-7}{(x-5)(x+5)} & : x\geq -2, x\neq 5\\[2ex] \dfrac{-(x+2)-7}{(x-5)(x+5)} & : x<-2, x\neq -5\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x+2-7}{(x-5)(x+5)} & : x\geq -2, x\neq 5\\[2ex] \dfrac{-x-2-7}{(x-5)(x+5)} & : x<-2, x\neq -5\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cancel{x-5}}{(\cancel{x-5})(x+5)} & : x\geq -2, x\neq \pm 5\\[2ex] \dfrac{-x-9}{(x-5)(x+5)} & : x<-2, x\neq \pm 5\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+5)} & : x\geq -2, x\neq \pm 5\\[2ex] \dfrac{-x-9}{(x-5)(x+5)} & : x<-2, x\neq \pm 5\end{cases}$$

$\because 5>-2$

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$$

تحقق أن نهاية المقام $\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 5}(x+5)=5+5=10$

$10\neq 0,$

بند (٢-١) البنود المعلقة

(١ – ٢) نهايات تشمل على ∞ ، $-\infty$	كتاب الطالب	مقالى يعلق(من ثانيا صفحة 5-12)
	كراسة التمارين	مقالى يعلق5 الى 12 موضوعى (1-10-11-12-13)

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ١ صـ ٣٠

(2) استخدم النظرية السابقة في حساب كل من :

$$(a)\lim_{\chi\to\infty}\frac{-3\chi^2+5\chi+1}{6\chi^2-\chi+1}\qquad (b)\lim_{\chi\to-\infty}\frac{2\chi+1}{4\chi^3-2\chi+3}$$

الحل :

$$(a)\lim_{\chi\to\infty}\frac{-3\chi^2+5\chi+1}{6\chi^2-\chi+1}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$$

درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

n = m = 2

$$(b)\lim_{\chi\to-\infty}\frac{2\chi+1}{4\chi^3-2\chi+3}=0$$

درجة حدودية البسط أصغر من درجة حدودية المقام

n = 1 , m = 3 , n < m

بند (٣-١) التمارين المعلقة

(١ – ٣) صيغ غير معينة	كتاب الطالب	
	كراسة التمارين	مقالى يعلق13

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ٣صـ ٤٠ـــــــ

(3)أوجد قيمة كل من الثابتين a , b إذا كانت

$$\lim_{\chi \to \infty} \frac{\chi - 2}{a\chi^2 + b\chi - 3} = -1$$

الحل

$\because$ النهاية تساوى (-1) ثابت

$\therefore$ درجة الحدودية في البسط يجب إن تساوى درجة الحدودية في المقام
أي إن درجة الحدودية في المقام يجب إن تكون من الدرجة الأولى

نظرية m = n = 1

$$\therefore a\chi^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\lim_{\chi \to \infty} \frac{\chi - 2}{a\chi^2 + b\chi - 3} = \lim_{\chi \to \infty} \frac{\chi - 2}{b\chi - 3} = \frac{1}{b}$$

$$\because \frac{1}{b} = -1 \Rightarrow b = -1$$

حاول ان تحل ٤ صـ ٤١ ـــــ

(3) أوجد: $(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$

الحل:

$$(a)\ f(x)=\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2(2-\frac{1}{x})}}{x(1+\frac{1}{x})}=\frac{|x|\sqrt{(2-\frac{1}{x})}}{x(1+\frac{1}{x})}$$

عندما :

$x>0 \quad |x|=x$

$$=\frac{\cancel{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}=\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{(1+\frac{1}{x})}$$

$x\neq 0$

شرط المقام

$$\because \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1+0=1 \qquad ,1\neq 0$$

$$(a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$$

شرط الجذر

$$\because \lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=2-0=2 \qquad ,2>0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x})}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

(3) أوجد:

$$(b)\lim_{\chi\to-\infty}\frac{3\chi-5}{\sqrt{\chi^2-9}}$$

الحل

$$(b)\ f(\chi)=\frac{3\chi-5}{\sqrt{\chi^2-9}}=\frac{\chi(3-\frac{5}{\chi})}{\sqrt{\chi^2(1-\frac{9}{\chi^2})}}=\frac{\chi(3-\frac{5}{\chi})}{|\chi|\sqrt{1-\frac{9}{\chi^2}}}$$

عندما $\chi<0 \quad , |\chi|=-\chi$

$$=\frac{\chi(3-\frac{5}{\chi})}{-\chi\sqrt{1-\frac{9}{\chi^2}}}=\frac{\frac{5}{\chi}-3}{\sqrt{1-\frac{9}{\chi^2}}} \quad ,\chi\neq0$$

شرط الجذر

$$\because \lim_{\chi\to-\infty}(1-\frac{9}{\chi^2})=\lim_{\chi\to-\infty}1-\lim_{\chi\to-\infty}\frac{9}{\chi^2}=1-0=1 \quad ,1>0$$

شرط المقام

$$\therefore \lim_{\chi\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{\chi^2}}=\sqrt{\lim_{\chi\to-\infty}(1-\frac{9}{\chi^2})}=\sqrt{1}=1 \quad ,1\neq0$$

$$(b)\lim_{\chi\to-\infty}\frac{3\chi-5}{\sqrt{\chi^2-9}}$$

$$\because \lim_{\chi\to-\infty}(\frac{5}{\chi}-3)=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{5}{\chi}-\lim_{\chi\to-\infty}3=0-3=-3$$

$$\therefore \lim_{\chi\to-\infty}f(\chi)=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{(\frac{5}{\chi}-3)}{\sqrt{1-\frac{9}{\chi^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{\chi\to-\infty}(\frac{5}{\chi}-3)}{\lim_{\chi\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{\chi^2}}}=\frac{-3}{1}=-3$$

بند (٤-١) التمارين المعلقة

(١ – ٤) نهايات بعض الدوال المثلثية	كتاب الطالب	يعلق من نظرية الإحاطة صفحة 45-47
	كراسة التمارين	مقالي يعلق(6 ،7، 13 ،14، 15) موضوعي(1، 2، 5، 7، 8، 10)

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول أن تحل رقم 2 صفحة 44

اوجدي :

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{3\tan x + x^2\cos x}{5x}$$

الحل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x + x^2\cos x}{5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\tan x}{5x}+\frac{x^2\cos x}{5x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\tan x}{5x} + \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}^{\,x}\cos x}{5\cancel{x}\,1}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 0} 5 \neq 0$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{5}$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} + \frac{\lim_{x\to 0} x \times \lim_{x\to 0}\cos x}{\lim_{x\to 0} 5}$$

بسّط $x \neq 0$

$$= \frac{3}{5} + 0 = \frac{3}{5}$$

حاول ان تحل ١ صـ٤٣

اوجدي :

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\cos x-1}$

الحل بضرب كل من البسط والمقام بمرافق المقام $\cos x+1$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{\cos x-1}\times\frac{\cos x+1}{\cos x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x\sin x(\cos x+1)}{1-\cos^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x\cancel{\sin x}(\cos x+1)}{\cancel{\sin^2 x}}\right)$$

$\sin x$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x(\cos x+1)}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}(\cos x+1)$$

بسّط $x\neq 0$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\cos x+\lim_{x\to 0}1\right)$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{x}{\sin x}\right)=-1$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

$$=-1\times 2$$

$$=-2$$

حاول ان تحل ١ صـ٤٣

اوجدي :

a $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{3x^2}$

الحل

بقسمة البسط على المقام

بسط : $x \neq 0$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{x}^{1}\sin x}{3\cancel{x^2}_{x}} - \frac{\cancel{x^2}^{1}}{3\cancel{x^2}_{1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\times 1 - \frac{1}{3}$$

$$= 0$$

حاول ان تحل ٢ صـ٣٤ـــــ

أوجد:

b $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$

الحل :

بقسمة البسط على المقام

بسط : $x \neq 0$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x \tan x}{3x} - \frac{\cancel{2x}^{1} \cos x}{\cancel{3x}_{1}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3} \cos x \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{2}{3} \cos x$$

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$= \frac{1}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1 = -\frac{1}{3}$$

بند (٥-١) التمارين المعلقة

(١ – ٥) الاتصال	كتاب الطالب	مقالي يعلق من الملاحظة صفحة 51الى نهاية صفحة 53
	كراسة التمارين	مقالي يعلق(4 ، 11، 12 ، 13، 14، 15، 16) موضوعي (5، 6، 7، 10)

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ٣صـ٥٢ـــ

أبحث أتصال الدالة f عند x=-1

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x &, x\neq -1\\ -2 &, x=1\end{cases}$$

الحل

$$x+1=0 \longrightarrow x=-1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x+1}-2x & : x>-1\\ 2 & : x=-1\\ \dfrac{-(x+1)}{x+1}-2x & : x<-1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1-2x & : x>-1\\ 2 & : x=-1\\ -1-2x & : x<-1\end{cases}$$

الصورة

$f(-1)=2$ ✓ 1

النهاية

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1-2x)=1-2(-1)=3$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-1-2x)=-1-2(-1)=1$$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$ ✓ 2

✓ من 1,2 $\therefore$ f ليست متصلة عند $x=-1$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1} & : x\neq -1\\ -1 & : x=-1\end{cases}$$

أبحث أتصال الدالة h عند $x=-1$

الحل

الصورة $h(-1)=-1$ 1

النهاية

$$\lim_{x\to -1} h(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-4)(x+1)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-4)=-1-4=-5$$ 2

$$h(-1)\neq \lim_{x\to -1} h(x)$$ من 1,2

$\therefore$ h ليست متصلة عند $x=-1$

بند (٦-١) التمارين المعلقة

(٦.١) نظريات الاتصال	كتاب الطالب	لا يوجد
	كراسة التمارين	لا يوجد

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ٤ صـ٥٨

اذا كانت g , f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي

أوجد :

$$f(x) = 2x+3 \quad , \quad g(x) = x^2+3$$

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(-1)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(-1)$

الحل:

a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 3 = (2x+3)^2+3$

$= 4x^2 + 12x + 12$

b $(g \circ f)(-1) = 4(-1)^2 + 12(-1) + 12 = 4$

c $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(x^2+3)+3 = 2x^2 + 9$

d $(f \circ g)(-1) = 2(-1)^2+9 = 11$

حاول ان تحل ص٥٨

لتكن $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$ ، $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ أوجد :

a $(f \circ g)(x)$ b $(g \circ f)(\sqrt{x})$

الحل:

a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1+(g(x))^2}$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{3}{x^2+4}\right)^2}$$

b $(g \circ f)(\sqrt{3}) = g(f(\sqrt{3})) = \frac{3}{(f(\sqrt{3}))^2+4}$

$$= \frac{3}{2^2+4} = \frac{3}{8}$$

حاول ان تحل ٧صـــ٦٠ـــــ

لتكن $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الحل:

نفرض أن : $g(x) = |x|$, $h(x) = x^2 - 3x + 2$

فنجد أن : $f(x) = (g \circ h)(x)$

$$g(h(x)) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$$

h دالة متصلة عند $x = 0$ (1)

$$h(0) = 0 - 0 + 2 = 2$$

g دالة متصلة عند $x = 2$

أي أن g دالة متصلة عند $x = h(0)$ (2)

من $(1), (2)$ $g \circ h$ متصلة عند $x = 0$

أي أن f متصلة عند $x = 2$

بند (٧-١) التمارين المعلقة

(١ – ٧) الاتصال على فترة	كتاب الطالب	مقالي يعلق حاول أن تحل 3
	كراسة التمارين	مقالي يعلق(8، 9، 10، 11) موضوعي (7، 9 ، 10)

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ٧ صـ٦٠

ادرس اتصال الدالة f على $[1 , 5]$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : x = 1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \quad 1 < x < 5 \\ \dfrac{26}{5} & : x = 5 \end{cases}$$

الحل

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x} \quad : x \in (1 ,5)$$

$$\forall c \in (1,5)$$

$$f(c)=\frac{c^2+1}{c}$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{c^2+1}{c} \qquad x = c \;, c \neq 0 \;, \forall x \in (1,5)$$

$$\therefore \lim_{x\to c} f(x) = f(c) \qquad \forall c \in (1,5)$$

$\therefore$ f متصلة على $(1, 5)$ (1)

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : x = 1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \quad 1 < x < 5 \\ \dfrac{26}{5} & : x = 5 \end{cases}$$

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 1$ من جهة اليمين

$$f(1)= 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 2$$

$$\therefore \; f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$\therefore$ **الدالة f متصلة عند $x = 1$ من جهة اليمين** (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 5$ من جهة اليسار

$$f(5)=\frac{26}{5}$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{26}{5}$$

$$\therefore f(5) = \lim_{x\to 5^-} f(x)$$

$\therefore$ **الدالة f متصلة عند $x = 5$ من جهة اليسار** (3)

من (1) , (2) , (3) نجد : $\therefore$ f متصلة على $[1, 5]$

حاول ان تحل ٧ صـ٦٠ـــ

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

الحل

مجال الدالة f هو: $D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها.

نفرض: $g(x)=x+3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because\ f(x)=g(x) \quad \forall x\in(-\infty,-1]$

$\therefore$ f دالة متصلة على $(-\infty\ ,-1]$ $\quad(1)$

نفرض: $h(x)=\dfrac{4}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$

$\because\ f(x)=h(x) \quad \forall\, x\in(-1\ ,\ \infty)$

$\therefore$ f متصلة على $(-1\ ,\ \infty)$ $\quad(2)$

ندرس اتصال الدالة f عند $x=-1$ من جهة اليمين.

حيث نهاية المقام $\neq 0$ $\quad f(-1)=2$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{4}{x+3}=2$$

$\because\ f(-1)=\lim_{x\to-1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=-1$ من جهة اليمين. $\quad(3)$

من $(1),(2),(3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على الفترة $(-\infty,\infty)$

$\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$

حاول ان تحل ٤صـ٦٥ــــــ

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} 5 & : x=1 \\ ax+b & : 1<x<4 \\ b+8 & : x=4 \end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$ أوجد قيمة الثابتين a,b

الحل:

f دالة متصلة على $[1,4]$ $\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من اليمين

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (ax+b) = a+b$$

$$\therefore \quad a+b=5$$

f دالة متصلة على $[1,4]$ $\therefore$ f متصلة عند $x=4$ من اليسار

$$\lim_{x\to4^-} f(x) = f(4)$$

$$\lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-} (ax+b) = 4a+b$$

$$\therefore 4a+b=b+8 \Longrightarrow a=2$$

$$\therefore \quad b=3$$

حاول ان تحل ٥ صـ٦٦ ـــــ

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6 , 10]$.

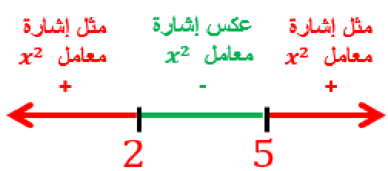
الحل نفرض : $g(x) = x^2 - 7x + 10$ ، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$$\therefore \quad D_f = \{ x : \ g(x) \geq 0 \}$$

$$x^2 - 7x + 10 \geq 0$$

المعادلة المناظرة : $x^2 - 7x + 10 = 0$

$x = 5$, $x = 2$



$\therefore$ مجال الدالة f هو : $\mathbb{R} - (2 , 5)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[6 , 10]$.حيث $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

$$g(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} - (2 , 5)$$

$\because$ $[6 , 10]$.مجموعة جزئية من $\mathbb{R} - (2 , 5)$

$$\therefore g(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [6 , 10] \qquad (1)$$

$\because$ الدالة g : $g(x) = x^2 - 7x + 10$ دالة متصلة على $[6 , 10]$. $\quad (2)$

من (2) , (1) نجد :

f دالة متصلة على $[6 , 10]$

حاول ان تحل ٥ صـ٦٦ــــ

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$

الحل:

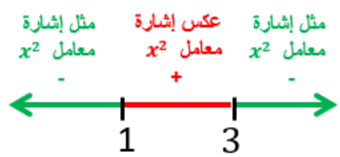
نفرض : $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ ، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$$\therefore \quad D_f = \{\, x : \ g(x) \geq 0 \}$$

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0$$

المعادلة المناظرة : $-x^2 + 4x - 3 = 0$

$x = 1 \quad , \quad x = 3$



$\therefore$ مجال الدالة f هو : $[1, 3]$

لدراسة اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

(1) $\quad g(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [1, 3]$

(2) $\because$ الدالة g : $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ دالة متصلة على $[1, 3]$

من (1) , (2) نجد : **f دالة متصلة على $[1, 3]$**

بند (١-٢) التمارين المعلقة

(٢ - ١) معدلات التغير وخطوط المماس	كتاب الطالب	
	كراسة التمارين	b5مقالى يعلق موضوعى (2)

حاول ان تحل ١ صـ٨٠

1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

الحل

$$f'(a) = \lim_{h\to0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$x = -2 \to a = -2$$

$$f(-2) = 3(-2)^2 = 12$$

$$f(-2+h) = 3(-2+h)^2$$

$$= 3(4 - 4h + h^2)$$

$$= 12 - 12h + 3h^2$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to0} \frac{12 - 12h + 3h^2 - 12}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{-12h + 3h^2}{h} = \lim_{h\to0} \frac{3h(-4+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} 3(-4+h) = 3(-4+0) = -12$$

مشتقة الدالة f عند $x = -2$ $\quad f'(-2) = -12$

مثال ٢ صـ٨٠ـــــ

باستخدام التعريف البديل أوجد مشتقة الدالة: $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a$ حيث $a>0$

الحل

عند النقطة $x=a$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ (إن وجدت)

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

ضرب البسط والمقام بالمرافق $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

يمكننا الآن إيجاد النهاية

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}^{1}}{\cancel{(x-a)}_{1}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \qquad =\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}1}{\lim\limits_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

حاول ان تحل ٢ صـ٨١ـــــ

أوجد مشتقة الدالة f باستخدام التعريف:

الحل $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $x = b\ , b \neq 0$

عند النقطة $x = b$ (إن وجدت)

$$f'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

$$= \lim_{x \to b} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{b}}{x - b}$$

$$= \lim_{x \to b} \frac{\frac{\overset{-1}{\cancel{b - x}}}{xb}}{\underset{1}{\cancel{x - b}}}$$

$$= \lim_{x \to b} \frac{-1}{xb} = \frac{-1}{b^2}$$

$\lim_{x \to b} xb = b^2$, $b^2 \neq 0$

بند (٢-٢) التمارين المعلقة

(٢ - ٢) المشتقة	كتاب الطالب	مقالي يعلق (مثال 4، 7، 8+ حاول أن تحل 4 ، 7،8)
	كراسة التمارين	يعلق مقال (12، 14)

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ٣صـ٨٢ـــــ

3 لتكن f : $f(x)=|x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x=2$.

الحل

$$f(x)=|x-2| \qquad x=2$$

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & : x\ge 2 \\ 2-x & : x<2 \end{cases}$$

$$f'_+(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)-2-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2+h-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

$$f'_+(2)=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2-h+2-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}$$

$$f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}-1=-1$$

$$f'_-(2)=-1$$

$$f'_+(2)\ne f'_-(2)$$

$f'(2)$ ليست موجوده

أي أن الدالة ليس لها مشتقة عند $X=2$

حاول ان تحل ٦ صـ٨٦ـــــ

6 لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & , \quad x\le 2 \\ 3x-2 & , \quad x>2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

الحل

نبحث اتصال الدالة

$$f(2)=2^2-4=0$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2-4)=0$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-}(3x-2)=4$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)\ne \lim_{x\to 2+} f(x)$$

بالتالي f ليست متصلة عند X=2

وبناءأ عليه تكون غير قابلة للاشتقاق عند X=2

حاول ان تحل ٩ صـ٨٩ـــــ

الحل

لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & : \quad x > 2 \\ 0 & : \quad x = 2 \\ 2-x & : \quad x < 2 \end{cases}$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{+}} \frac{2+h-2-0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{+}} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^{+}} (1) = 1$$

$$f'_{-}(2) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{-}} \frac{2-2-h-0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{-}} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^{-}} (-1) = -1$$

$\because f'_{-}(2) \neq f'_{+}(2) \rightarrow \quad \therefore f'(2)$ غير موجودة

بند (٣-٢) التمارين المعلقة

(٢ – ٣) قواعد الاشتقاق	كتاب الطالب	
	كراسة التمارين	يعلق مقال : (12،14)

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ٤ صـ٩٦ـــــ

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

الحل :

$$f'(x)=\frac{(x+2)\bullet(x-1)'-(x-1)\bullet(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+2)\bullet(1)-(x-1)\bullet(1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x+2-x+1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}$$

$$f'(1)=\frac{3}{(1+2)^2}$$

$$m=f'(1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$f'(1)=\frac{1}{3}$ النقطة $(1,0)$

معادلة الناظم

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$$

$$y-0=-\frac{1}{\frac{1}{3}}(x-1)$$

$$y-0=-3(x-1)$$

$$\therefore y=-3x+3$$

معادلة خط المماس

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

حاول ان تحل ٨صـ٩٩

أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : \quad x\leqslant 2\\ 4x-3 & : \quad x>2\end{cases}$$

الحل

مجال الدالة : $D_f=(-\infty,2]\cup(2,\infty)=R$

$$f'(X)=\begin{cases}2x & : \quad x<2\\ \text{تبحث} & : \quad x=2\\ 4 & : \quad x>2\end{cases}$$

$f(2)=(2)^2+1=\ 5$

إن وجدت $f'_+(2)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

إن وجدت $f'_-(2)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$f'(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{4x-8}{x-2}$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{4x-3-5}{x-2}$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{4(x-2)}{x-2}$$

$$f'_+(2)=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2+1-5}{x-2}$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}(x+2)\ :x\neq2$$

$$f'_-(2)=2+2=4$$

$$f'(2)=\ 4 \qquad f'_-(2)=f'_+(2)=4$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & : \quad x<2\\ 4 & : \quad x\geq 2\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}2x & : \quad x<2\\ 4 & : \quad x=2\\ 4 & : \quad x>2\end{cases}$$

بند (٤-٢) البنود المعلقة

(٢ – ٤) مشتقات الدوال المثلثية	كتاب الطالب	
	كراسة التمارين	يعلق موضوعي 4

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ١ صـ١٠٤

لتكن : $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(1)$

الحل

$$f'(x)=\frac{(2x)(x^2+4)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$=\frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2}=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$g'(x)=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2} \qquad g(x)=\sqrt{x}$$

$$f'(g(x))=\frac{16\sqrt{x}}{((\sqrt{x})^2+4)^2}=\frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2} \qquad g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x)).g'(x)$$

$$=\frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{8}{(x+4)^2}$$

$$(f\circ g)'(1)=\frac{8}{(1+4)^2}=\frac{8}{25}$$

بند (٦-٢) البنود المعلقة

(٢ - ٦) المشتقات ذات الرتب العليا و الاشتقاق الضمنى	كتاب الطالب	يعلق (مثال9 + حاول أن تحل 9)
	كراسة التمارين	يعلق مقال (13، 16) موضوعى 5

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ١ صـ١٠٩ــــ

إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

الحل

$$y = 4x^5 - 5x^3 + 7$$

$$y' = 20x^4 - 15x^2$$

$$y'' = 80x^3 - 30x$$

$$y^{(3)} = y''' = 240x^2 - 30$$

حاول ان تحل ٨صـ١٠٩ــــــ

لتكن الدالة: $y = \cos x$.

بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

الحل

$$y = \cos x$$
$$y' = -\sin x$$
$$y'' = -\cos x$$
$$y^{(3)} = y''' = \sin x$$
$$y^{(4)} = y'''' = \cos x = y$$

$$L.H.S. = y^{(4)} + y''$$
$$= \cos x + (-\cos x)$$
$$= 0$$
$$= R.H.S.$$

حاول ان تحل ٣صـ١١٠ـــــ

حاول أن تحل (3)

أوجد y'' حيث $y = \dfrac{1}{\sin x}$

الحل

$$y = \frac{1}{\sin x} = \csc x$$

$$y' = -\csc x \cot x$$

$$y'' = (-\csc x)'(\cot x) + (-\csc x)(\cot x)'$$

$$= \csc x \cot x \cdot \cot x + \csc x \cdot \csc^2 x$$

$$= \csc x \cot^2 x + \csc^3 x$$

حاول ان تحل ٤صـ١١٢ـــــ

لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

الحل

$$(y^2)' = (x^2 - 2x)'$$

$$2y \cdot y' = 2x - 2$$

$$y' = \frac{2x - 2}{2y}$$

$$y' = \frac{x - 1}{y}$$

حاول ان تحل ٥ صـ١١٢

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

الحل

$$(x^2 - y^2 + xy - 1)' = (0)'$$

$$2x - 2y \cdot y' + y + xy' + 0 = 0$$

$$2x - 2yy' + y + xy' = 0$$

بالتعويض بالنقطة $(1,1)$

$$2(1) - 2(1)y' + (1) + (1)y' = 0$$

$$2 - 2y' + 1 + y' = 0$$

$$3 - y' = 0$$

$$y' = 3$$

ميل المماس يساوي 3

حاول ان تحل ٦ صـ١١٣ــــــ

الحل

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2+y^2-2xy=1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,1)$

$$(x^2+y^2-2xy)' = (1)'$$

$$2x+2y\cdot y'-2y-2xy'=0$$

$$2x+2yy'-2y-2xy'=0$$

بالتعويض بالنقطة $(2,1)$

$$2(2)+2(1)y'-2(1)-2(2)y'=0$$

$$4+2y'-2-4y'=0$$

$$2-2y'=0$$

$$2y'=2$$

$$y'=1$$

ميل المماس يساوي 1

طريقة أخرى

$$x^2+y^2-2xy=1$$

$$(x-y)^2=1$$

$$\left((x-y)^2\right)'=(1)'$$

$$2(x-y)\cdot(x-y)'=0$$

$$2(x-y)\cdot(1-y')=0$$

بالتعويض بالنقطة $(2,1)$

$$2\left((2)-(1)\right)\cdot(1-y')=0$$

$$2\cdot(1-y')=0$$

$$1-y'=0$$

$$y'=1$$

ميل المماس يساوي 1

حاول ان تحل ٧صـ١١٤ـــــ

للمنحنى الذي معادلته: $y^2+\sqrt{y}+x^2=3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1\,,1)$

الحل

$$(y^2+\sqrt{y}+x^2)'=(3)'$$

$$2yy'+\frac{2y'}{\sqrt{y}}-2x=0$$

$$2yy'+\frac{2y'}{\sqrt{y}}=2x$$

$$y'\left(2y+\frac{2}{\sqrt{y}}\right)=2x$$

$$y'=\frac{2x}{2y+\frac{2}{\sqrt{y}}}=\frac{2x\sqrt{y}}{2y\sqrt{y}+2}$$

بالتعويض بالنقطة $(1,1)$

$$y'=\frac{2(1)\sqrt{(1)}}{2(1)\sqrt{(1)}+2}=\frac{1}{2}$$

ميل المماس يساوي $\frac{1}{2}$

حاول ان تحل ٧صـ١١٤

إذا كانت $y = x\sin x$

فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

الحل

$$y = x\sin x$$

$$y' = (x)'(\sin x) + (x)(\sin x)'$$

$$y' = \sin x + x\cos x$$

$$(y')' = (\sin x + x\cos x)'$$

$$y'' = (\sin x)' + (x)'(\cos x) + (x)(\cos x)'$$

$$y'' = \cos x + \cos x - x\sin x$$

$$y'' = 2\cos x - y$$

$$(y'')' = (2\cos x - y)'$$

$$y''' = -2\sin x - y'$$

$$y''' + y' + 2\sin x = 0$$

بند (١-٣) البنود المعلقة

(١ – ٣) القيم القصوى (العظمى / الصغرى) للدوال	كتاب الطالب	يعلق (مثال b، 2،5 حاول أن تحل b 2،5
	كراسة التمارين	يعلق مقال: 8، 9، 12، 13، 14) يعلق (موضوعي : 5، 6، 8)

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ٣ صـ١٢٨ـــــ

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة f :-

$$f(x)= x^3 - 3x +1$$

في الفترة $[-2 , 1]$

الحل:

نوجد قيم الدالة عند الأطراف

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$3(x^2 - 1) = 0$

$3(x - 1)(x + 1) = 0$

$x = 1 \in (-2, 1)$

أو $x = -1 \in (-2, 1)$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$

النقطة الحرجة هي :- $(-1, 3)$

x	-2	-1	1
$f(x)$	-1	3	-1

للدالة قيمة عظمى مطلقة = 3 عند $x = -1$

وللدالة قيمة صغرى مطلقة = -1 عند $x = 1$
و $x = -2$

بند (٢-٣) البنود المعلقة

(٣ – ٢) تزايد و تناقص الدوال	كتاب الطالب	لا يوجد
	كراسة التمارين	لا يوجد

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ١ صـ١٣٥

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

الحل

دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathcal{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathcal{R}$

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

نوجد مشتقة الدالة f

$f'(x) = -2x + 4$

نضع $f'(x) = 0$

$-2x + 4 = 0$

$x = 2$

نكون الجدول لدراسة اشارة f'

$-\infty$ $f'(0) = -2(0) + 4 = 4$ 2 $f'(3) = -2(3) + 4 = -2$ ∞

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
اشارة f'	++++	----
سلوك الدالة f	↗ تزايد	↘ تناقص

من الجدول:

الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, 2)$

الدالة متناقصة على الفترة $(2, \infty)$

حاول ان تحل ١ صـ١٣٣ــــ

1 بيّن أن الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3, 1]$، ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل

دالة كثيرة حدود متصلة على R $\quad F(X) = X^2 + 2X$

إذن فهى متصلة على الفترة $[-3, 1]$

وقابلة للإشتقاق على الفترة $(-3, 1)$

إذن شروط القيمة المتوسطة متحققة على الفترة $[-3, 1]$

إذن يوجد على الأقل $C \in (-3, 1)$ بحيث

$F(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 3$

$F(1) = (1)^2 + 2(1) = 3$

$F'(X) = 2X + 2$

$F'(C) = 2C + 2$

نظرية القيمة المتوسطة

$$F'(C) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

$$2C + 2 = \frac{3 - 3}{-3 - 1} = 0$$

$C = -1$

$-1 \in (-3, 1)$

التفسير :-

أنه يوجد مماس لمنحنى الدالة F عند $X = -1$ ويوازى القاطع المار بالنقطتين $(1, 3), (-3, 3)$

بند (٣-٣) البنود المعلقة

(٣ – ٣) ربط المشتقة الأولى و المشتقة الثانية بمنحنى الدالة	كتاب الطالب	يعلق مثال 2+حاول ان تحل 2
	كراسة التمارين	يعلق مقال (5، 6، 9، 13، 14 موضوعي2

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل ١ صـ١٤٠

لتكن الدالة f $\quad f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ أوجد كلاً مما يلي:

a) النقاط الحرجة للدالة.

b) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c) القيم القصوى المحلية.

الحل

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$$

f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathcal{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathcal{R}$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

نضع $f'(x) = 0$

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \ , \quad x = 2$$

$$f(0) = -(0)^3 + 3(0)^2 - 4 = -4$$

$$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 - 4 = 0$$

النقاط الحرجة للدالة هي $(0, -4), (2, 0)$

$-\infty \quad 0 \quad 2 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	----	+++	----
سلوك الدالة f	تناقص ↘	تزايد ↗	تناقص ↘

f متزايدة على الفترة $(0, 2)$

f متناقصة على الفترة $(-\infty, 0), (2, \infty)$

للدالة قيمة عظمى محلية = 0 عند $x = 2$

للدالة قيمة صغرى محلية = -4 عند $x = 0$

حاول ان تحل ٢ صـ١٤٤ـــ

أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

الحل:

$\because$ f دالة كثيرة حدود.

f متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(x) = 0 \qquad 6x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

نكون الجدول لدراسة إشارة f'' :

$-\infty$ $\quad -\frac{1}{2} \quad$ ∞

الفترات	$\left(-\infty , -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2} ,\infty\right)$
إشارة f''	- -	++
بيان الدالة f	$\cap$ مقعّر لأسفل	$\cup$ مقعّر لأعلى

نلاحظ من الجدول: بيان الدالة f مقعّر لأسفل على الفترة $\left(-\infty , -\frac{1}{2}\right)$

بيان الدالة f مقعّر لأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2} ,\infty\right)$

لإيجاد نقطة الانعطاف:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

النقطة $\left(-\frac{1}{2} , -\frac{1}{2}\right)$ I هي نقطة انعطاف لمنحنى f

بند (٤-٣) البنود المعلقة

(٣ – ٤) رسم بيان دوال كثيرات الحدود	كتاب الطالب	يعلق مثال 3، 4+ حاول أن تحل 3،4
	كراسة التمارين	مقال :1، 2، 4، 5، 7، 8، 9 موضوعى 11

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول ان تحل 1صـ١٤٤ـــ

الحل

1 ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

f دالة كثيرة حدود مجالها R

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x^3) = -\infty$$

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} (x^3) = \infty$$

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها

$$F'(X) = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X^2 - 4X + 3) = 3(X-1)(X-3)$$

نضع $f'(x) = 0$

$$3(x-1)(x-3) = 0$$

$$X = 1 \quad , x = 3$$

∴ النقطتان $(1 , 0)$ و $(3 , -4)$ نقطتان حرجتان

نكون جدول لدراسة إشارة f'

الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1 , 3)$	$(3 , \infty)$
إشارة f'	+ + +	- - -	+ + +
سلوك الدالة f	متزايدة	متناقصة	متزايدة

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(3 , \infty)$, والفترة $(-\infty , 1)$ ومتناقصة على الفترة $(1 , 3)$

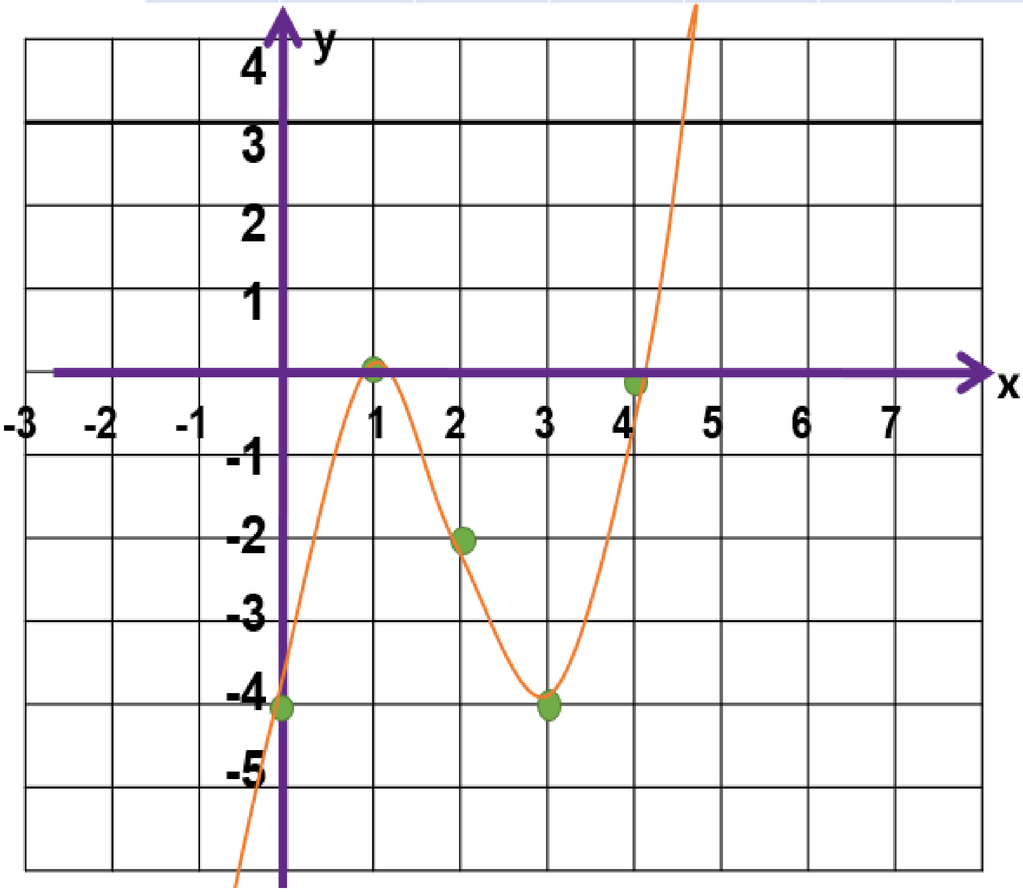
نكون جدول لدراسة المشتقة الثانية : $f''(x) = 6x - 12$

نضع $f''(x) = 0$ $x = 2$ و $f(2) = -2$

الفترات	$(-\infty , 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f''	- - -	+++
التقعر	مقعر لأسفل	مقعر لأعلى

النقطة $(2 , -2)$ نقطة انعطاف

X	-1	0	1	2	3	4	5
F(x)	-20	-4	0	-2	-4	0	16
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية	نقطة إضافية



بيان الدالة f

بند (٥-٣) البنود المعلقة

(٣ – ٥) تطبيقات على القيم القصوى	كتاب الطالب	يعلق مثال 5، 4+ حاول أن تحل 4،5
	كراسة التمارين	يعلق مقال 1 b ، 2، 4، 6، 7، 9، 10) موضوعي : 2، 4

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول أن تحل ١ ص١٥٦

أوجد عددين مجموعهما 14 و ناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل

نفرض أن أحد العددين x حيث $0 < x < 14$

فيكون العدد الأخر هو $14 - x$

ناتج ضربهما هو $P(x) = x.(14 - x) = 14x - x^2$

$P'(x) = 14 - 2x$

نضع $P'(x) = 0$

$14 - 2x = 0 \Rightarrow x = 7$

توجد نقطة حرجة $(7, p(7))$

$P''(x) = -2 \quad , -2 < 0$

$P(7)$ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 7$

العدد الأول هو : $x = 7$ العدد الثاني هو : $14 - x = 14 - 7 = 7$

العددان هما : $7 , 7$

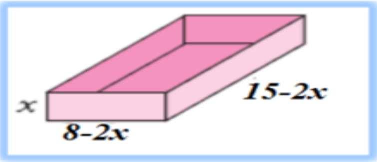
خطوات حل مسألة تطبيقات القيم القصوى

1. فهم المسألة.
2. تكوين نموذج رياضي للمسألة.
3. تحديد النقاط الحرجة .
4. حل النموذج الرياضي .
5. تفسير الحل و أخذ القرار .

حاول أن تحل ٢ ص ١٥٧

يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $8cm$, $15cm$ وثني جوانبها إلى أعلى .

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن , وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة .



الحل

x (ارتفاع الصندوق) والبعدان الآخران هما $(8-2x)$, $(15-2x)$

$2x$ لا يمكن أن تزيد على 8 , $0 < 2x < 8$

أي أن $0 < x < 4$:

حجم الصندوق هو :

$$V(x) = x(8-2x)(15-2x)$$
$$V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$$
$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120$$

نضع $V'(x) = 0$

$$12x^2 - 92x + 120 = 0$$
$$4(x-6)(3x-5) = 0$$

حلا المعادلة التربيعية هما : $x = 6$, $x = \frac{5}{3}$

و حيث $6 \notin (0,4)$ فيتم استبعادها

$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120$$
$$V''(x) = 24x - 92$$
$$V''\left(\frac{5}{3}\right) = 24 \times \frac{5}{3} - 92 = -52 \quad , -52 < 0$$

لذلك يكون الصندوق أكبر ما يمكن عند $x = \frac{5}{3}$

حجم أكبر صندوق :

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 4\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 46\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 120\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2450}{27}\ cm^3$$

طول ضلع كل مربع من أركان طبقة صفيح $\frac{5}{3}\ cm$ ليعطي أكبر سعة للصندوق ، ويكون أكبر حجم $\frac{2450}{27}\ cm^3$

حاول أن تحل ٣ ص ١٥٨

3 تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

الحل

$$v(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$$
$$v'(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$$
$$v'(h) = 0$$
$$2\pi(-3h^2 + 36) = 0$$
$$-3h^2 + 36 = 0$$
$$-3h^2 = -36$$
$$3h^2 = 36$$
$$h^2 = 12$$
$$h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$v''(h) = 2\pi(-6h)$$
$$v''(\sqrt{12}) = 2\pi(-6\sqrt{12})$$
$$= -24\pi\sqrt{3} < 0$$

قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2\sqrt{3}$

و يكون أكبر حجم للأسطوانه عند $x = 2\sqrt{3}$

$$v(2\sqrt{3}) = 2\pi(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3}))$$
$$= 2\pi(48\sqrt{3}) \approx 522.37\ cm^3$$

بند (١-٤) البنود المعلقة

(٤ – ١) التقدير	كتاب الطالب	
	كراسة التمارين	يعلق مقالى 1 b 2، 4، 6، 7، 9، 10، يعلق موضوعى 2،4 ،

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول أن تحل ١ ص ١٧١

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 97%
بإستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري

الحـــل : مستوى الثقة هو 97%

$$1-\alpha = 0.95 \longrightarrow \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.97}{2} = 0.485$$

نأخذ جدول التوزيع الطبيعي المعيارى (z)

نبحث فى الجدول عن 0. 4850 نجد أن :

جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.1 + 0.07 \longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

حاول أن تحل ٢ ص ١٧٣

من المثال (2) إذا اجريت الدراسة على عينة أخري من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث 3.6 = σ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 18.4$
باستخدام مستوى ثقة 95 %
(1) أوجد هامش الخطأ.
(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ
(3) فسّر فترة الثقة.

الحــــــل :

(1) مستوى الثقة 95 % القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \quad \therefore$

σ معلوم

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{3.6}{\sqrt{25}} \approx 1.4112$$

E هامش الخطأ هو ≈ 1.4112

(2) فترة الثقة هي $(\overline{X} - E \, , \overline{X} + E)$

$$= (18.4 - 1.4112 \, , 18.4 + 1.4112)$$

$$= (16.9888 \, , 19.8112)$$

(3) التفسير : عند اختيار 100عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 25)$وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ

حاول أن تحل ٣ ص ١٧٤

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها n = 81 ، ومتوسطها المتوسط $\bar{x} = 50$ ،
وانحرافها المعياري S = 9 باستخدام مستوى ثقة % 95

(1) أوجد هامش الخطأ.

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ

(3) فسّر فترة الثقة.

الحـــــــل : حجم العينة: n = 81, المتوسط الحسابي $\bar{x} = 50$ ، الانحراف المعياري : S = 9

(1) مستوى الثقة 95 % القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \quad \therefore$

σ^2 غيرمعلوم ، $n > 30$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{9}{\sqrt{8}} \approx 1.96$$

هامش الخطأ هو ≈ 1.96

(2) فترة الثقة هى $(\bar{X} - E , \bar{X} + E)$

$$= (50 - 1.96 , 50 + 1.96)$$

$$= (48.04 , 51.96)$$

(3) التفسير : عند اختيار 100عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n = 50) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة .تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ

حاول أن تحل ٤ ص ١٧٦

(3) عينة عشوائية حجمها $n = 13$ اعطت $\overline{X} = 30$, $\sigma = 3.5$
أوجدي فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع المجهولة علماً بأن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً .
هل تتضمن هذه الفترة المتوسط الحسابي μ ؟

حجم العينة : $n = 13$, المتوسط الحسابي $\overline{x} = 30$ ، الانحراف المعياري : $\sigma = 3.5$

الحـــــل :

(1)

مستوى الثقة 95 %

القيمة الحرجة: $\therefore\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ^2 معلوم

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{3.5}{\sqrt{13}} \approx 1.90262$$

هامش الخطأ هو ≈ 1.9026

(2)

فترة الثقة هي $(\overline{X} - E , \overline{X} + E)$

$$= (30 - 1.9026 ,\ 30 + 1.9026)$$

$$= (28.0974 , 31.9026)$$

(3) التفسير : عند اختيار 100عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n=13)وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن 95 فترة .تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ

بند (٢-٤) البنود المعلقة

(٤ – ٢) اختبارات الفروض الاحصائية	كتاب الطالب	
	كراسة التمارين	bيعلق مثال 1 يعلق موضوعي 6

الفهرس الالكتروني للتوجيه الفني

حاول أن تحل ١ ص ١٧٩

بينت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$ kg ويؤكد الاخصائيون في المصنع المنتج لهذه الأسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة الأسلاك ، وتأكيداً على ذلك تم اختيار عينة 40 سلكا فتبين أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1840 kg هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوي معنوية $\alpha = 0.05$

الحـــــل:

1 - صياغة الفروض: $H_0 : \mu = 1800$ مقابل $H_1 : \mu \neq 1800$

2 - $\sigma = 150$ (معلومة) نستخدم المقياس الإحصائي Z:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1840-1800}{\frac{150}{\sqrt{40}}} \approx 1.6865$$

المعطيات :
$\mu = 1800$
$n = 40$
$\bar{x} = 1840$
$\sigma = 150$
مستوي المعنوية
$\alpha = 0.05$

3– مستوى الثقة 95%

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

(4) منطقة القبول (1.96 , 1.96 -)

5- اتخاذ القرار الإحصائي :

$$1.6865 \in (-1.96 \ , \ 1.96)$$

القرار نقبل فرض العدم $\mu = 1800$

حاول أن تحل ٢ ص ١٨٠

متوسط العمر بالساعات لعينة 100مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x}$ = 1570 بانحراف معياري S = 120 يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات μ = 1600 للمصابيح المصنعة في المصنع
اختبر صحة الفرض μ = 1600 مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha=0.05$

الحـــــــل:

1 - صياغة الفروض:

$H_0 : \mu = 1600$ مقابل $H_1 : \mu \neq 1600$

2 - σغير معلومة ، $n > 30$

نستخدم المقياس الإحصائي Z:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2.5$$

3– تحديد مستوى المعنوية α:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

(4) منطقة القبول (1.96 , -1.96)

5 - اتخاذ القرار الإحصائي :

$$-2.5 \notin (-1.96 \ , \ 1.96)$$

القرار : رفض فرض العدم $\mu = 1600$ وقبول الفرض البديل $\mu \neq 1600$

حاول أن تحل ٣ ص ١٨١

إذا كانت $S = 32$, $\bar{x} = 283$, $n = 10$

اختبر الفرض بأن $\mu = 290$ عند مستوى ثقة 95%

الحــــــل:

1 - صياغة الفروض: $H_0 : \mu = 290$ مقابل $H_1 : \mu \neq 290$

2 - σ غير معلومة ، $n < 30$

نستخدم المقياس الإحصائي t:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} \approx -0.6917$$

3-تحديد مستوى المعنوية α:

$n = 10$ درجات الحرية : $n-1 = 10 - 1 = 9$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول توزيع t $t_{0.025} = 2.262$

(4) منطقة القبول $(2.262 , -2.262)$

5 - اتخاذ القرار الإحصائي : $-0.6917 \in (-2.262 , 2.262)$

القرار : قبول فرض العدم $\mu = 290$