الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

العام الدراسي
٢٠٢٣/٢٠٢٤م

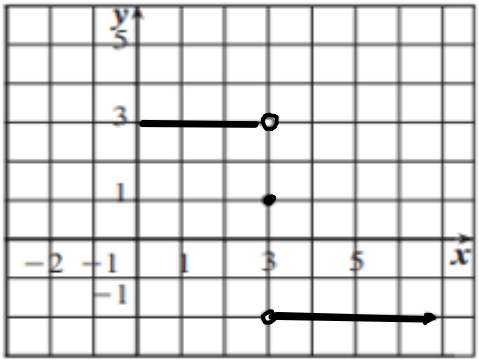
إعداد
أ/وليد دخيل

الوحدة الاولي: النهايات والاتصال

موضوعي بند (1-1) النهايات

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) (a)



السبب:

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -2$ ، $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3$

(2) $\lim_{y\to 2} \frac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ (b)

السبب:

بالتعويض عن y بـ 2 بسطاً ومقاماً

$= \frac{2^2+5(2)+6}{2+2} = 5$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ (a)

السبب:

بالتعويض عن x بـ 0 بسطاً ومقاماً نحصل على $\frac{0}{0}$ حينئذ غير معينة.

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(5x+8)}{x^2(3x^2-16)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x+8}{3x^2-16} = \frac{5(0)+8}{3(0)^2-16} = -\frac{1}{2}$

نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 0}(3x^2-16)$

$= 3(0)^2-16$

$= -16 \neq 0$

(4) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$

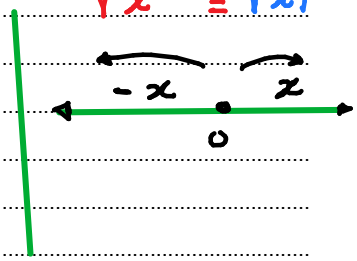
(a) (b)

السبب:

$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{x}$

$= \lim_{x\to 0^-} (-2) = -2$

$\sqrt{x^2} = |x|$



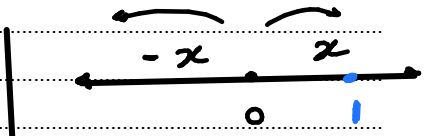
(5) $\lim_{x\to 1^+} (2x-|x|+2) = 3$

(a) (b)

السبب:

$\lim_{x\to 1^+} (2x - x + 2) = \lim_{x\to 1^+} (x+2)$

$= 1 + 2 = 3$

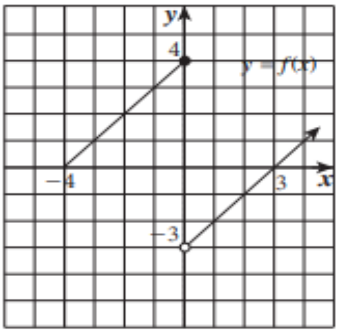


$\because x \to 1^+$

$\therefore |x| = x$

في التمارين (6—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة f.



العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$

(c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$

(d) $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$

السبب:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

كثيرة حدود

(7) $\lim_{x\to -2}(x^3+3x^2-2x-17)=$

(a) 17 (b) −17 (c) 9 (d) −9

السبب:

$= (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) - 17 = -9$

(8) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=$

(a) 1 (b) 0 (d) غير موجودة

$\frac{1}{2}$

السبب:

بالتعويض عن x بـ 1 بسطاً ومقاماً نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2 \neq 0$

(9) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}=$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

السبب:

بالتعويض عن x بـ 2 بسطاً ومقاماً نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{2x-1}$$

$$= \frac{2-1}{2(2)-1} = \frac{1}{3}$$

نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 2}(2x-1) = 2(2)-1 = 3 \neq 0$

(10) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

يحلل فرق بين مربعين

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

السبب: نهاية المقام لما $x\to 1$

$\lim_{x\to 1} x = 1 > 0$

نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)$

$=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1}1$

$=\sqrt{\lim_{x\to 1}x}+\lim_{x\to 1}1$

$=\sqrt{1}+1=2\neq 0$

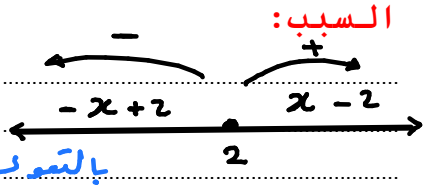
(11) $\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x^2-4}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2-4}$$

بالتعويض عن x بـ 2 نجد ومباشرة نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

السبب:



$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 2^+}(x+2)$

$=2+2=4\neq 0$

توحيد المقامات

(12) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}=$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2-(2+x)}{2(2+x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2-2-x}{2(2+x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{2(2+x)}}{\frac{x}{1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2(2+x)}\times\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4+2x}$$

$$=\frac{-1}{4}$$

السبب:

نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 0}(4+2x)$

$=4+2(0)$

$=4\neq 0$

(13) $\lim_{x\to -8} \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$ يحل فرضه بيد وكعبين

(a) 12 (b) −12 (c) 4 (d) −4

السبب:

بالتعويض عن x بـ −8 نجد أولاً ومباشرة نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x\to -8} \frac{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}+2} = \lim_{x\to -8} (\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)$$

$$= \lim_{x\to -8} \sqrt[3]{x^2} - 2\lim_{x\to -8} \sqrt[3]{x} + \lim_{x\to -8} 4$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to -8} x^2} - 2\sqrt[3]{\lim_{x\to -8} x} + \lim_{x\to -8} 4$$

$$= \sqrt[3]{(-8)^2} - 2\sqrt[3]{-8} + 4 = 12$$

(14) $\lim_{x\to -3} \frac{2x^3+9x^2+9x}{x+3} =$

(a) 9 (b) 0 (c) −3 (d) −9

السبب:

بالتعويض عن x بـ −3 نجد أولاً ومباشرة نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة.

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x(2x^2+9x+9)}{x+3}$$ mode 53 a = 2 b = 9 c = 9

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x(2x+3)(x+3)}{x+3}$$

$$= \lim_{x\to -3} x(2x+3)$$

$$= -3(2(-3)+3) = 9$$

موضوعي (2-1) نهايات تشتمل علي ∞.−∞

في التمارين (5−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{|x|-3}=2$ (b)

السبب:

∵ $x \to \infty \Rightarrow |x| = x$

∴ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{|x|-3} = \frac{2}{1} = 2$ [درجة البسط = درجة المقام]

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|-3}{x+3}=-1$ (b)

السبب:

∵ $x \to -\infty \Rightarrow |x| = -x$

∴ $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-3}{|x|+3} = \frac{-1}{1} = -1$ [درجة البسط = درجة المقام]

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{2x^2-5x-3}=-\infty$ (a)

السبب:

$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{2x^2-5x-3} = 0$ [درجة البسط أقل من درجة المقام]

(5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|2x-3|}=\frac{1}{2}$

(a) (b) (c) (d)

السبب:

$\because x \to -\infty \Rightarrow |2x-3| = -2x+3$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1x}{-2x+3} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$ [درجة البسط = درجة المقام]

في التمارين (13 – 6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{|x|+1}=$

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) $\frac{1}{2}$

السبب:

$\because x \to \infty \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1} = 1$ [درجة البسط = درجة المقام]

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (b) 1 (d) 0

السبب:

$\lim_{x\to\infty}\frac{1x}{1x+3} = \frac{1}{1} = 1$ [درجة البسط = درجة المقام]

(8) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=$

(a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) $-\infty$

توصيل مقامات

السبب:

$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+x}{x}\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+1x}{1x}\right) \times \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2-1}{1x^2}\right)$

$= \frac{1}{1} \times \frac{5}{1} = 5$

[نأخذ النهايتين درجة البسط = درجة المقام]

(9) $\lim_{x\to\infty}\frac{-|x+3|}{2x}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

السبب:

$\because x \to \infty \Rightarrow |x+3| = x+3$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{-(x+3)}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1x-3}{2x} = \frac{-1}{2}$

[درجة البسط = درجة المقام]

موضوعي (1-3) صيغ غير معينة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$ (b)

السبب:

زوجي

$\lim_{x\to\infty}(3x^2) = \infty$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$ (a)

السبب:

فردي

$\lim_{x\to-\infty}(-x^3) = -x-\infty = \infty$

(3) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$ (b)

السبب:

زوجي

$\lim_{x\to-\infty}(-x^2) = -x\infty = -\infty$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$ (b)

السبب:

[$\because$ درجة البسط < درجة المقام]

$\therefore$ النهاية $= 0$

(5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4}=2$ (b)

السبب:

∵ درجة البسط = درجة المقام ∴ النهاية = $\frac{4}{2}$ = 2

(6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\frac{3}{2}$ (a)

السبب:

النهاية = $-\frac{3}{\sqrt{4}}$ = $-\frac{3}{2}$

في التمارين (12–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2}=$

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$ 0 (d) $-\infty$

السبب:

∵ درجة البسط < درجة المقام ∴ النهاية = 0

(8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 3 -3

السبب:

النهاية = $-\frac{3}{\sqrt{1}}$ = -3

(9) $\lim_{x\to\infty} \frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}} =$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

السبب:

النهاية $= + \frac{-5}{\sqrt{9}} = \frac{-5}{3}$

(10) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (b) 1

السبب:

النهاية $= - \frac{(-2)}{\sqrt{4}} = 1$

(11) إذا كان: $\lim_{x\to\infty} \frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}} = -2$ فإن قيم m , n هي:

(b) $m=0$, $n=-2$ (b) $m=0$, $n=2$ (c) $m=1$, $n=-1$ (d) $m=1$, $n=1$

السبب:

$mx^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

$\therefore \frac{n}{\sqrt{1}} = -2 \Rightarrow + \frac{n}{1} = \times \frac{-2}{1} \Rightarrow n = -2$

(12) إذا كانت: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4} = 1$ فإن قيم m , n هي:

(b) $m=0$, $n=-2$ (b) $m=0$, $n=2$ (c) $m=0$, $n=4$ (d) $m=0$, $n=-4$

السبب:

$mx^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

$- \frac{\sqrt{4}}{n} = 1 \Rightarrow \frac{-2}{n} = \times \frac{1}{1} \Rightarrow n = -2$

$x \to -\infty$

موضوعي (4-1) نهايات بعض الدوال المثلثية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=0$ (a) ✓

السبب:

نهاية المقام ≠ 0

$\lim_{x\to 0}\cos^2 x = (\lim_{x\to 0}\cos x)^2 = (1)^2 = 1 \neq 0$

$= \frac{\lim_{x\to 0}(1-\sin x)}{\lim_{x\to 0}\cos^2 x} = \frac{1-0}{1} = 1$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$ (b) ✓

السبب:

نهاية المقام ≠ 0

$\lim_{x\to 0} 2\cos 2x = 2\lim_{x\to 0}\cos 2x = 2\times 1 = 2 \neq 0$

$= \frac{\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)}{\lim_{x\to 0} 2\cos 2x} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

في التمارين (10—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x} =$

(a) 2 ✓ (b) −2 (c) 0 (d) ∞

السبب:

* لقسمة البسط والمقام على x

$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$

(9) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2}=$

(a) 3 (b) 9 (c) 0 (d) ∞

السبب:

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x^2}{3x^2}+\frac{5\sin^2 x}{3x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}(1)^2=3$$

موضوعي (1-5) الاتصال

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}+1$ متصلة عند $x=-2$ (a) (b)

السبب:

$(-2+2)^2=0$

∴ f ليست متصلة عند $x=-2$ [المقام = 0 عند $x=-2$]

(2) الدالة: $y=\frac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ (a) (b)

السبب:

$x^2+1\neq 0$ دائمًا موجب لكل $x\in R$

∴ y متصلة لكل $x\in R$

(3) الدالة: $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x=-1$ (b)

السبب:

بفرض أن $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}=\frac{g(x)}{h(x)}$

g : دالة ثابتة متصلة عند $x=-1$

h : بفرض أن $h(x)=x+2$ متصلة عند $x=-1$

$h(-1)=-1+2=1>0$ ∴

∴ h متصلة عند $x=-1$

* المقام $\neq 0$ عند $x=-1$

∴ y متصلة عند $x=-1$

(4) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-1$ وكان $\lim_{x\to -1}(f(x)-2)=-1$ فإنّ $f(-1)=1$ (b)

السبب:

$\lim_{x\to -1} f(x) - \lim_{x\to -1}(2) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) - 2 = -1$

$\therefore \lim_{x\to -1} f(x) = -1+2 = 1$

∴ f متصلة عند $x=-1$ [اتصال عند نقطة]

$\therefore f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = 1$

في التمارين (5–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=2$ فإنّ $f(x)$ يمكن أن تكون:

(a) $\frac{1}{|x-2|}$ (b) $\sqrt{x-2}$ (c) $\frac{|x-2|}{x-2}$ (d) $\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & : x>2\\ 3x-5 & : x\leq 2\end{cases}$

السبب:

بالنظر:

$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x^2-3}=1$

$\lim_{x\to 2^-}(3x-5)=1$

$f(1)=3\times 2-5=1$

f متصلة عند $x=2$

عند $x=2$ المقام $=0$

شرط حاسبة الجذر ≥ 0

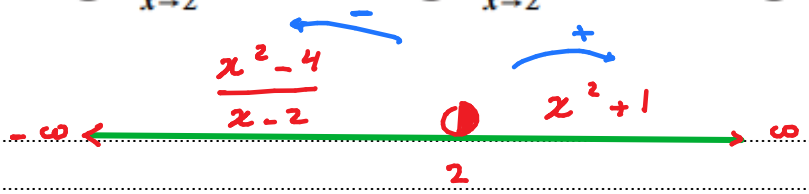
$2-2=0>0$

عند $x=2$ المقام $=0$

(9) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x\geq 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2} & : x<2 \end{cases}$ فإن:

(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=4$ (b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$ (c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة (d) f متصلة عند $x=2$

السبب:



$f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 2+2 = 4$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x=2$

(11) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim_{x\to -2}(x^2+f(x))=7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

(a) 3 (b) 5

(c) 9 (d) 11

السبب:

$\lim_{x\to -2} x^2 + \lim_{x\to -2} f(x) = 7 \Rightarrow (-2)^2 + \lim_{x\to -2} f(x) = 7$

$4 + \lim_{x\to -2} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x) = 7-4 = 3$

$\therefore f$ متصلة عند $x=-2$ [تصال عند نقطة i]

$\therefore f(-2) = \lim_{x\to -2} f(x) = 3$

(12) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x=1$ وكانت النقطة $(1\ ,\ -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي:

(a) -6 (b) -3

(c) 1 (d) 9

السبب:

$\therefore g(1) = -3$

$\lim_{x\to 1}(g(x))^2 = (\lim_{x\to 1} g(x))^2 = (-3)^2 = 9$

موضوعي(6-1) نظريات الاتصال

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $f: f(x) = x^2 + |x-1|$ متصلة عند $x=3$ (b)

السبب:

كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

دالة وطلوه متصلة عند $x=3$

$\therefore$ دالة مجموع متصلة عند $x=3$

(2) الدالة $f: f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x=0$ (a)

السبب:

حدودية نسبية متصلة عند $x=0$ [المقام $\neq 0$ عند $x=0$]

حدودية نسبية متصلة على $\mathbb{R}/\{0\}$ [المقام $=0$ عند $x=0$]

$\therefore$ ليست متصلة عند $x=0$

(3) الدالة f : $f(x)=\frac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x=0$

(a) (b)

السبب:

البسط كثيرة حدود متصلة عند $x=0$

المقام: مجموع دالتين، $|x|$ دالة مطلقه متصلة عند $x=0$ ، 1 دالة ثابتة متصلة عند $x=0$ ∴ المقام متصل عند $x=0$

∴ المقام $\neq 0$ عند $x=0$

∴ f دالة قسمة [البسط متصل، المقام متصل، المقام $\neq 0$] ∴ f متصلة عند $x=0$

(4) الدالة f : $f(x)=\frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x=3$

(a) (b)

السبب:

البسط: دالة جذر تكعيبي كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

المقام: كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

المقام $\neq 0$ عند $x=3$

∴ f دالة قسمة: [البسط متصل، المقام متصل، المقام $\neq 0$] عند $x=3$

∴ f متصلة عند $x=3$

(5) الدالة f : $f(x)=\sqrt{\underbrace{-x^2+5x-4}_{g(x)}}$ متصلة عند $x=2$

(a) (b)

السبب:

بفرض أن $g(x)=-x^2+5x-4$

g متصلة عند $x=2$

$g(2)=-(2)^2+5(2)-4=2>0$ ، موجبة

∴ f متصلة عند $x=2$

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة f : $f(x)=\frac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

(a) $x=3$ (b) $x=-3$

(c) $x=2$ (d) لا يوجد نقاط انفصال

السبب:

نقاط الانفصال تكون عند أصفار المقام

$x^2+9\neq 0$

دائمًا موجب

∴ لا توجد نقاط انفصال

(7) نقاط انفصال الدالة f : $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي:

(a) 1 , -1 (b) 2 , -2 (c) 1 , 2 (d) -1 , -2

السبب:

نقاط إنفصال عند أصفار المقام:

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

(8) لتكن الدالة f : $f(x)=x^2+3, x\neq 0$ ، الدالة g : $g(x)=\frac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g\circ f)(x)$ تساوي:

(a) $\frac{4x^2-18x+27}{(x-3)^2}$ (b) $\frac{x^2}{x^2-3}$ (c) $\frac{x^2+3}{x^2}$ (d) $\frac{x^2}{x^2+3}$

السبب:

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+3)$

$=\frac{x^2+3}{x^2+3-3}=\frac{x^2+3}{x^2}$

(9) لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة g : $g(x)=x^2+3, x\neq 0$ ، فإن: $(f\circ g)(x)$ تساوي:

(a) $\frac{x^2}{x-3}+3$ (b) $\frac{x}{\sqrt{x-3}}+3$ (c) $\frac{-(x^2+3)}{x}$ (d) $\frac{x^2+3}{|x|}$

السبب:

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+3)$

$=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3-3}}=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2}}=\frac{x^2+3}{|x|}$

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، $g(x)=x^2-3$: g فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4 (b) -4

(c) 1 (d) -1

السبب:

$(f\circ g)(0) = f(g(0)) = f(-3)$ $\quad g(0)=0^2-3=-3$

$=\sqrt{(-3)^2+7}=4$

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\sqrt{g(x)}$ (b) $\frac{1}{g(x)}$

(c) $\frac{g(x)}{x-2}$ (d) $|g(x)|$

السبب:

(a) $\sqrt{g(x)}$ [$x=2$ غير متصلة عند] لم يذكر أن $g(2)>0$

(b) $\frac{1}{g(x)}$ [$x=2$ غير متصلة عند] لم يذكر أن $g(2)\neq 0$

(c) $\frac{g(x)}{x-2}$ [$x=2$ غير متصلة عند] المقام $=0$ عند $x=2$

(d) $|g(x)|$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ وبالتالي عند $x=2$

(12) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن a يمكن أن تساوي:

شرط داخل الجذر ≥ 0

(a) 4 (b) 9

(c) 16 (d) 25

السبب:

(a) $3^2-4=5>0$ [تحقق]

(b) $3^2-9=0$ [تحقق]

(c) $3^2-16=-7$ [لا تحقق]

(d) $3^2-25=-16$ [لا تحقق]

موضوعي (1-7) الاتصال على فترة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[3 , 5]$, $[1 , 3)$ فإن f متصلة على $[1 , 5]$

(a) (b)

السبب:

f متصلة عند $x=3$ جهة اليمين f ليست متصلة عند $x=3$ جهة اليسار.

$\therefore f$ ليست متصلة على $[1,5]$

(2) الدالة $f : f(x) = x^2 - |x|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$

(a) (b)

السبب:

كثيرة حدود متصلة لكل $x \in R$

دالة قيمة مطلقة متصلة لكل $x \in R$

$\therefore f$ دالة ناتج دالتين كل منهما متصلة لكل $x \in R$ $\therefore f$ متصلة لكل $x \in R$

(3) الدالة $f : f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ متصلة على $[-2 , 2]$

(a) (b)

السبب:

نضع $x^2 - 4 \geq 0$

* المعادلة المناظرة: $x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$

* بيت الإشارة

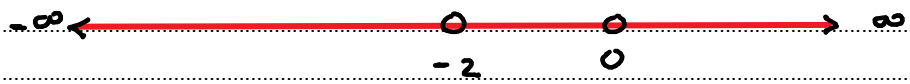
$D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty) = R / (-2, 2)$

$\therefore f$ ليست متصلة على $[-2,2]$

(4) الدالة $f : f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ متصلة على $(-\infty , 0)$

(a) (b)

السبب: $\therefore f$ كثيرة حدود نسبية متصلة على $R / \{-2\}$



$-2 \in (0, \infty)$

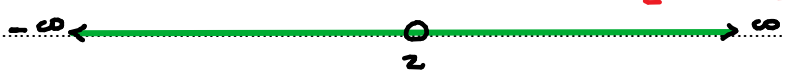
$\therefore f$ ليست متصلة على $(-\infty, 0)$

(5) الدالة $f: f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty, 2)$ فقط

(a) (b)

السبب:

ℝ/{2} مجموعة نسبية متصلة على ∴



∴ متصلة على $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن الدالة $f: f(x)=\frac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f:

(a) لها نقطتي انفصال عند كل من $x=4$, $x=-1$

(b) متصلة على $(-\infty, 4]$

(c) متصلة على كلٍ من $(-\infty, 4)$, $(4, \infty)$

(d) ليس أي مما سبق

السبب:

ℝ/{4} مجموعة نسبية متصلة على ∴

∴ متصلة على $(-\infty, 4)$, $(4, \infty)$

(8) الدالة $f: f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

(a) $(-\infty, \frac{1}{2}]$

(b) $(5, \infty)$

(c) $\mathbb{R}$

(d) $(-5, 5)$

السبب:

المجال: أصغر من الصفر

$x^2-25 \geq 0$

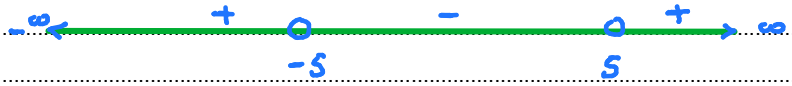
* المعادلة المناظرة:

$x^2-25=0$

$x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$

$\sqrt{x^2-25}=0$

$x=\pm 5$



∴ متصلة على $(-\infty, -5)$, $(5, \infty)$

(11) الدالة g: $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & : x>1\\ 3x & : x\le 1\end{cases}$ متصلة على:

(a) $(-\infty,1],(1,\infty)$ (b) $(-\infty,1),[1,\infty)$

(c) $(-\infty,\infty)$ (d) $(-\infty,3]$

f متصلة على $(-\infty,1]$ بالنظريات

f متصلة على $(1,\infty)$ بالنظريات

السبب:

$D_f=(-\infty,1]\cup(1,\infty)=\mathbb{R}$

هنالك احتمالين أن g متصلة على $\mathbb{R}$ أو g غير متصلة عند الفصل $(x=1)$

$f(1)=3(1)=3$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=1+1=2$

$\therefore f(1)\neq\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ← نهاية اليمين

$\therefore$ f ليست متصلة عند $x=1$

$\therefore$ f متصلة على $(1,\infty)$ و $(-\infty,1]$

الوحدة الثانية (الاشتقاق)

موضوعي (2-1) معدلات التغير وخطوط المماس

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة $(c\ ,\ f(c))$ هو $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

ميل القاطع

(a) ■

السبب:

ميل المماس $=m=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

(3) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x)=x^2$ عند $x=-2$ هو 4

(a) ■

السبب:

ميل المماس $=m=\frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=-2}$ بالمباشرة $=-4$

(4) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x)=|x|$ عند $x=-2$ هو 2

(a) ■

السبب:

ميل المماس $=m=\frac{d}{dx}(|x|)\Big|_{x=-2}$ بالمباشرة $=-1$

(5) يكون مماس منحنى الدالة f : $f(x) = 4$ عند النقطة $(-1, 4)$ موازيًا لمحور السينات. (b) ✗

السبب:

المماس موازي محور السينات ⇐ الميل = 0

ميل المماس = $m = \frac{d}{dx}(4)\Big|_{x=-1} = 0$

مباشرة

في التمرينين (6–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x) = 9 - x^2$ عند $x = 2$ هو:

(a) -5 (b) -4 ✓ (c) 4 (d) 5

السبب:

ميل المماس $= m = \frac{d}{dx}(9 - x^2)\Big|_{x=2} = -4$

مباشرة

(7) ليكن منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ فإن النقطة التي يكون مماس المنحنى عندها أفقيًا هي: أي ميل المماس = 0

(a) $(3, 0)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(2, -1)$ ✓ (d) $(-1, 2)$

السبب:

ميل المماس $= m = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 3)\Big|_{x=3} = 2$ ✗

ميل المماس $= m = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 3)\Big|_{x=1} = -2$ ✗

ميل المماس $= m = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 3)\Big|_{x=2} = 0$ ✓

ميل المماس $= m = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 3)\Big|_{x=-1} = -6$ ✗

موضوعي (2-2) المشتقة

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f: $f(x)=3x-12$ فإن $f'(x)=3$.

(b)

السبب:

قواعد إيجاد المشتقة $\bar{f}(x) = 3$

بند (2-3)

(2) الدالة f: $f(x)=x|x|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x\in\mathbb{R}$.

(a)

السبب:

$|x| = \begin{cases} x & ; x\geq 0 \\ -x & ; x<0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} x(x) = x^2 & ; x\geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & ; x<0 \end{cases}$

$\bar{f}(0) = 0$

$$\bar{f}_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$ (إيجد وجدت)

$$\bar{f}_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$ (إيجد وجدت)

$\therefore \bar{f}_+(0) = \bar{f}_-(0) \Rightarrow \bar{f}(0) = 0 \Rightarrow f$ قابلة للاشتقاق

(3) إن الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4x-5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط.

(a)

السبب:

f غير قابلة للاشتقاق عند أصفار المقام

أصفار المقام: $x^2-4x-5=0$ (mode 53)

$x=5$ or $x=-1$

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=5, x=-1$

(4) الدالة f: $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & : x<4 \\ x^2-9 & : x>4 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=4$.

(a)

لم يضع = لـ f غير معرفة عند $x=4$

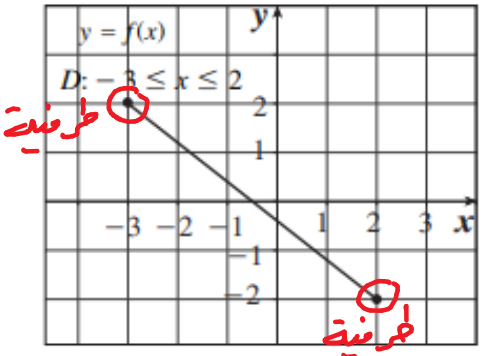
السبب:

f غير معرفة عند $x=4$

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=4$

(5) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه قابلة للاشتقاق على الفترة $[-3\ ,\ 2]$.

(a) (b)



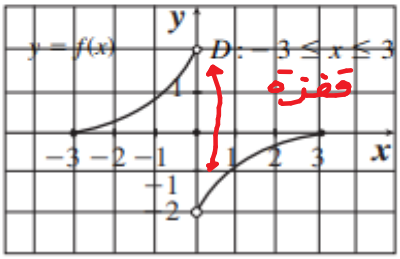
السبب:

f غير قابلة للاشتقاق عند النقاط الطرفية أي الفترات المغلقة.

(6) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه هي متصلة على الفترة $[-3\ ,\ 3]$

ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

(a) (b)



السبب:

f غير متصلة عند $x=0$ حدث قفزة في الدالة

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$

في التمارين (7—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إن الدالة f: $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ والسبب هو:

$|x|$

(a) ناب

(b) ركن

(c) مماس عمودي

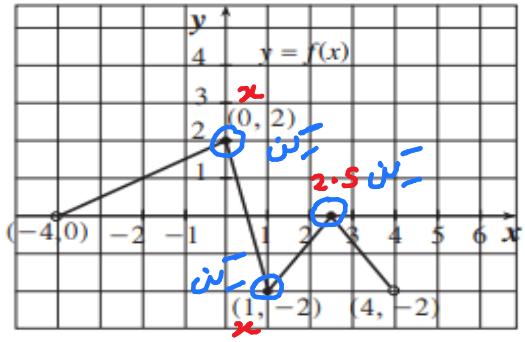
(d) غير متصلة

السبب:

$f(x) = x + |x| + 2$

لها ركن

(8) تكون الدالة f ذات الرسم البياني أدناه غير قابلة للاشتقاق عند كل ... $x =$



(a) $0 \ , \ 1 \ , \ 2\frac{1}{2}$ (b) $-2 \ , \ +2$

(c) $-4 \ , \ 0 \ , \ 1 \ , \ 4$ (d) $1 \ , \ 4$

السبب:

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند ركن [يصنع زاوية حادة]

(9) الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x = 3$ فيما يلي هي:

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ (b) $\sqrt{3-x}$

(c) $\begin{cases} 3x-1 & : \ x \leqslant 3 \\ 1 & : \ x > 3 \end{cases}$ (d) $\sqrt[3]{x+2}$

السبب:

(a) $\dfrac{x+1}{x-3}$ [غير متصلة عند $x=3$ حيث المقام $= 0$ عند $x=3$]

(b) $\sqrt{3-x}$ [المجال $(-\infty, 3]$ طرفية لأنه لم يتحقق شرط صورة داخل الجذر ≥ 0]

$x=3$ عند متصلة غير له

(c) $\begin{cases} 3x-1 & ; \ x \leq 3 \\ 1 & ; \ x > 3 \end{cases}$

بالنظر: غير متصلة عند $x=3$

[اتصال عند نقطة]

(d) $\sqrt[3]{x+2}$ دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود متصلة على R

$\therefore$ متصلة عند $x=3$ وقابلة للاشتقاق عند $x=3$

(10) إذا كانت $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ فإن مجال f' هو:

(a) $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ (b) $\mathbb{R}-\{-2\}$

(c) $\mathbb{R}-\{2\}$ (d) $\mathbb{R}-(-2,2)$

$x^2-4=0$

$x=\pm 2$

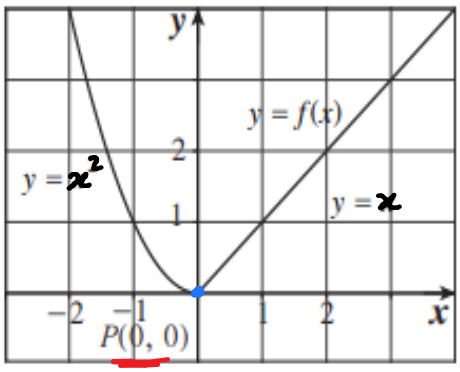
السبب:

$D_{\bar{f}} \subseteq D_f$

مجال f: أضيفا طقام $D_f = \mathbb{R}/\{2,-2\}$

$\therefore D_{\bar{f}} = \mathbb{R}/\{2,-2\}$

(11) في الشكل المقابل، عند النقطة P:



(a) المشتقة جهة اليسار موجبة. اليمين

(b) المشتقة جهة اليمين سالبة. موجبة

(c) الدالة قابلة للإشتقاق.

(d) ليس أيّ مما سبق.

السبب:

$\bar{f}_+(0) = \frac{d}{dx}(x)\Big|_{x=0} = 1$

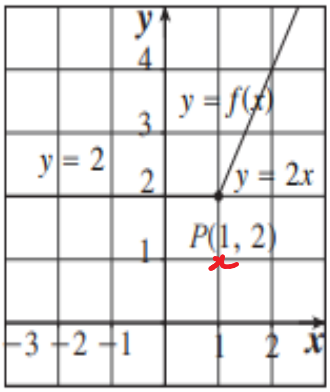
$\bar{f}_-(0) = \frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=0} = 0$

$\bar{f}_+(0) \neq \bar{f}_-(0)$

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق

عند $x=0$

(12) في الشكل المقابل، عند النقطة P :



(a) $f'_+(1) = 1$

(b) $f'_-(1) = 0$

(c) $f'_-(1) = 2$

(d) f قابلة للاشتقاق

السبب:

* نبحث الاشتقاق عند $x=1$ لأنها نقطة تقاطع

$$f'_+(1) = \frac{d}{dx}(2x)\Big|_{x=1} = 2$$

$$f'_-(1) = \frac{d}{dx}(2)\Big|_{x=1} = 0$$

موضوعي (2-3) قواعد الاشتقاق

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = -x^2 + 3$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2$

(a) (b)

السبب:

$$\frac{dy}{dx} = -2x$$

(2) إذا كانت $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} + x$ فإن $\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

(a) (b)

السبب:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2) + \frac{1}{3}(2x) + 1 = x^2 + \frac{2}{3}x + 1$$

(3) إذا كانت $y=\frac{2x+5}{3x-2}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{12x+11}{(3x-2)^2}$

(a)

السبب:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x-2)(2)-(2x+5)(3)}{(3x-2)^2}=\frac{6x-4-6x-15}{(3x-2)^2}$$

$$=\frac{-19}{(3x-2)^2}$$

(4) إذا كانت $y=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x^4}$

(b)

السبب:

$$y=\frac{x^3-1}{x^3}=\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}=1-x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx}=-(-3x^{-4})=3x^{-4}=\frac{3}{x^4}$$

في التمارين (5–16)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y=1-x+x^2-x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-1+2x-3x^2$ (b) $2-3x$ (c) $-6x+2$ (d) $1-x$

السبب:

$$\frac{dy}{dx}=-1+2x-3x^2$$

(6) إذا كانت $f(x)=5x^3-3x^5$ فإن $f'(x)$ تساوي:

(a) $20x+60x^3$ (b) $15x^2-15x^4$ (c) $30x-30x^4$ (d) $30x-60x^3$

السبب:

$$f'(x)=15x^2-15x^4$$

(7) إذا كانت $y=\frac{x^2+5x-1}{x^2}$ فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ تساوي:

(a) $\frac{-7}{2}$ (b) -3 (c) 3 (d) $\frac{7}{2}$

السبب:

بالمشتقة $\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+5x-1}{x^2}\right)\right|_{x=1} = -3$

(8) ميل مماس منحنى $y=x^2+5x$ عند $x=3$ يساوي:

(a) 24 (b) $-\frac{5}{2}$ (c) 11 (d) 8

السبب:

ميل المماس $m = \left.\frac{d}{dx}(x^2+5x)\right|_{x=3} = 11$ بالمشتقة

(9) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x)=\frac{2}{x}$ عند $x=-2$ هو:

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

السبب:

ميل المماس $m = \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right)\right|_{x=-2} = \frac{-1}{2}$ بالمشتقة

(10) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x)=\frac{-1}{x-1}$ عند $x=0$ هو:

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

السبب:

ميل المماس $m = \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x-1}\right)\right|_{x=0} = 1$ بالمشتقة

(11) للدالة f : $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته:

(a) $x=0$ (b) $y=0$ (c) $x=1$ (d) $y=1$

السبب:

مماس رأسي ← ما تحت الجذر التكعيبي = 0

$x-1=0$

$x=1$

(12) ميل الناظم لمنحنى الدالة $y=x^3-3x+1$ عند النقطة $(2,3)$ هي:

(a) 9 (b) 3 (c) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{-1}{9}$

السبب:

ميل المماس $m=\frac{d}{dx}(x^3-3x+1)\Big|_{x=2}=9$

ميل الناظم العمودي $=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{9}$

(13) النقاط على منحنى الدالة $y=2x^3-3x^2-12x+20$ التي يكون المماس عندها موازيًا لمحور السينات هي:

(a) $(-1,27)$ (b) $(2,0)$

(c) $(2,0),(-1,27)$ (d) $(-1,27),(0,20)$

السبب:

ميل المماس = 0

$\frac{dy}{dx}=6x^2-6x-12$

$\frac{dy}{dx}=0$ نضع

$6x^2-6x-12=0$ mode 53

$x=2$ or $x=-1$

(14) لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & : \ x \geqslant 1 \\ 4x-1 & : \ x<1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو:

(a) $\{1\}$ (b) $\mathbb{R}-\{1\}$

(c) $[1,\infty)$ (d) $\mathbb{R}$

السبب: حاسبة

$\bar{f}_+(1)=\frac{d}{dx}(x^2+2x)\Big|_{x=1}=4$

$\bar{f}_-(1)=\frac{d}{dx}(4x-1)\Big|_{x=1}=4$

$\therefore \bar{f}_+(1)=\bar{f}_-(1)=4$

$\therefore f$ قابلة للاشتقاق عند 1

$-\infty \longleftarrow 4x-1 \quad | \quad x^2+2x \longrightarrow \infty$

1

$D_f=(-\infty,1)\cup[1,\infty)=\mathbb{R}$

$D_{f'} \subseteq D_f \Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}$

(15) إن معادلة المماس لمنحنى الدالة f : $f(x)=2x^2-13x+2$ عند $x=3$ هي:

(a) $y=x-16$ $\quad y=3-16=-13 \neq -19$

(b) $y=-x+16$ $\quad y=-3+16=13 \neq -19$

(c) $y=-x-13$ $\quad y=-3-13=-16 \neq -19$

(d) $y=-x-16$ $\quad y=-3-16=-19$ ✓

حل آخر

$f(3)=-19$

بالتعويض عن $x=3$ في كل الاختيارات

السبب:

ميل المماس $=m=\frac{d}{dx}(2x^2-13x+12)\Big|_{x=3}=-1$ (بالحاسبة)

$f(3)=2(3)^2-13(3)+2=-19$

$x_1 \quad y_1$

النقطة $(3,-19)$

* معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-(-19)=-(x-3)$

$y+19=-x+3$

$y=-x+3-19$

$y=-x-16$

(16) إذا كانت $f(2)=3$ ، $f'(2)=5$ عند النقطة P على منحنى الدالة f فإن:

$y=5x+2+7=17\neq 3$

(a) معادلة خط المماس: $y=5x+7$

$y=-\frac{1}{5}x+2+7=\frac{33}{5}\neq 3$

(b) معادلة الخط العمودي (الناظم): $y=-\frac{1}{5}x+7$

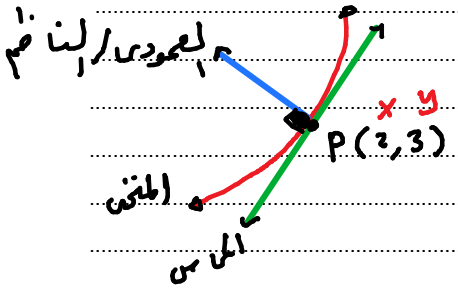
$y=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}=3$ تحقق

(c) معادلة الخط العمودي (الناظم): $y=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$

(d) معادلة خط المماس: $y=5x+3$

$y=5x+2+3=13\neq 3$

السبب:



موضوعي (2-4) مشتقات الدوال المثلثية

في التمارين (5-1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y=1+x-\cos x$ فإن $\frac{dy}{dx}=1+\sin x$ (b)

السبب:

$\frac{dy}{dx}=1-(-\sin x)=1+\sin x$

(2) إذا كانت $y=\frac{4}{\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{\cos^2 x}$ (a) قسمة بالمقام

السبب:

$y'=\frac{\cos x(0)-4(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{4\sin x}{\cos^2 x}$

(3) ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$ هو 1

(a) ✓

السبب: بالراديان rad

ميل المماس = $m = \frac{d}{dx}(\sin x + 3)\Big|_{x=\pi} = -1$

في التمارين (9–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$ (b) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(c) ✓ $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ (d) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

السبب:

$y = \frac{1}{x} + 5\sin x = x^{-1} + 5\sin x$

$y' = -x^{-2} + 5\cos x$

$= -\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(6) إذا كانت $f(x) = 3x + x\tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي: (مضروب ① ② عند x)

(a) -3 (b) 0 (c) 1 (d) ✓ 3

السبب:

$f'(x) = 3 + x\sec x + \tan x$ (1)

$= 3 + x\sec x + \tan x$

$f'(0) = 3 + 0\sec 0 + \tan 0 = 3$

(7) إذا كانت $y = \frac{x}{1+\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(b) $\frac{1+\cos x - x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(c) $\frac{1+\cos x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$

(d) $\frac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

قسمة بالبسيط

السبب:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x)(1) - x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

(8) معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ هي: (x_1 y_1)

(a) $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

(b) $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

(c) $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

(d) $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

السبب:

$$\frac{dy}{dx} = 2(-\sin x) = -2\sin x \quad \text{Rad}$$

ميل المماس $= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2 \Rightarrow$ ميل العمودي $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

* معادلة المستقيم العمودي / الناظم: $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$$y - 0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$$

(9) إذا كانت $y = \frac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي:

(a) $\cot x \cdot \csc x$

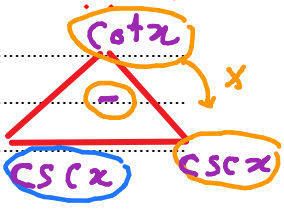
(b) $\cos x$

(c) $-\cot x \cdot \csc x$

(d) $-\cos x$

السبب:

$$y = \frac{1}{\sin x} = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cdot \cot x$$



موضوعي (5-2) قاعدة السلسلة

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = \cos(\sqrt{3}x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$

(a) (b)

السبب: مشتقة الزاوية

$\frac{dy}{dx} = -\sin(\sqrt{3}x)(\sqrt{3}x)'$

$= -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$

(2) إذا كانت $y = 5\cot\left(\frac{2}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2}\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$

(a) (b)

السبب: مشتقة الزاوية

$\frac{dy}{dx} = 5\left(-\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)\right)\left(\frac{2}{x}\right)'$

$= 5\left(\frac{-2}{x^2}\right)\left(-\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)\right)$

$= \frac{10}{x^2}\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$

$\left(\frac{2}{x}\right)' = (2x^{-1})' = -2x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$

(3) إذا كانت $y = (x+\sqrt{x})^{-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2(x+\sqrt{x})^{-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

(a) (b)

السبب: مشتقة ما بداخل القوس

$\frac{dy}{dx} = -2(x+\sqrt{x})^{-3}(x+\sqrt{x})'$

$= -2(x+\sqrt{x})^{-3}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(4) إذا كانت $s = \cos\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$ فإن $\frac{ds}{dt} = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$

(a) (b)

السبب: مشتقة الزاوية

$\frac{ds}{dt} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)'$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)(-3)$

$= 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$

في التمارين (9–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = \sin^{-5}x - \cos^{3}x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $5\sin^{-6}x\cos x - 3\cos^{2}x\sin x$

(b) $5\sin^{-6}x\cos x + 3\cos^{2}x\sin x$

(c) $-5\sin^{-6}x\cos x - 3\cos^{2}x\sin x$

(d) $-5\sin^{-6}x\cos x + 3\cos^{2}x\sin x$

السبب:

$\frac{dy}{dx} = -5\sin^{-6}x(\sin x)^{-} - 3\cos^{2}x(\cos x)^{-}$

$= -5\sin^{-6}x\cos x - 3\cos^{2}x(-\sin x)$

$= -5\sin^{-6}x\cos x + 3\cos^{2}x\sin x$

(6) إذا كانت $y = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

(b) $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

(c) $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

(d) $3(2x+1)^{-1}$

السبب:

$y = \frac{3}{\sqrt{2x+2}} = \frac{3}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = 3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = 3 \times \frac{-1}{2}(2x+1)^{\frac{-3}{2}}(2x+1)^{-}$

$= \frac{-3}{2}(2x+1)^{\frac{-3}{2}}(2)$

$= -3(2x+1)^{\frac{-3}{2}}$

(7) إذا كانت $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$ فإن $\frac{ds}{dt}$ تساوي:

(a) $\frac{4}{\pi}\sin 3t - \frac{4}{\pi}\cos 5t$

(b) $\frac{4}{\pi}\cos 3t + \frac{4}{\pi}\sin 5t$

(c) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 3t$

(d) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 5t$

السبب:

$\frac{ds}{dt} = \frac{4}{3\pi}\cos 3t\,(3t)' + \frac{4}{5\pi}(-\sin 5t)(5t)'$

$= \frac{4}{3\pi}\cos 3t\,(3) - \frac{4}{5\pi}\sin 5t\,(5)$

$= \frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 5t$

(8) إذا كانت $r = \tan(2-\theta)$ فإن $\frac{dr}{d\theta}$ تساوي:

(a) $\sec^2(2-\theta)$

(b) $-\sec^2(2-\theta)$

(c) $\sec^2(\theta+2)$

(d) $\sec(2-\theta)$

السبب:

$\frac{dr}{d\theta} = \sec^2(2-\theta)(2-\theta)'$

$= \sec^2(2-\theta)(-1)$

$= -\sec^2(2-\theta)$

موضوعي (6-2) المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان: $y = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ فإن: $\frac{d^2y}{dx^2} = -2x$

(a) (b)

السبب:

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{3}(3x^2) + \frac{1}{2}(2x) + 1 = -x^2 + x + 1$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2x + 1$

(2) إذا كان: $y=\frac{-3x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+4x$ فإن: $\frac{d^3y}{dx^3}=-18x$ (b)

السبب:

$\frac{dy}{dx}=\frac{-3}{4}(4x^3)-\frac{3}{2}(2x)+4=-3x^3-3x+4$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-9x^2-3$

$\frac{d^3y}{dx^3}=-18x$ ضرب ليشبه ①②

(3) معادلة المماس لمنحنى: $x^2-y^2-x^2y=7$ عند النقطة $(2,-1)$ هي: $y=4x-9$ (b)

x_1, y_1 استقاء ضمني

السبب:

$2x-2y\bar{y}-(x^2\cdot\bar{y}+y(2x))=0$

$2x-2y\bar{y}-x^2\bar{y}-2xy=0$

$-2y\bar{y}-x^2\bar{y}=-2x+2xy$

$\bar{y}(-2y-x^2)=-2x+2xy \Rightarrow \bar{y}=\frac{-2x+2xy}{-2y-x^2}$

ميل المماس $=\bar{y}|_{(2,-1)}=\frac{-2(2)+2(2)(-1)}{-2(-1)-(2)^2}=4$

* معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-(-1)=4(x-2) \Rightarrow y+1=4x-8$

$y=4x-8-1 \Rightarrow y=4x-9$

في التمارين (7–4)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(4) إذا كانت: $f(x)=(1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن: $f''(x)$ تساوي:

(a) $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(b) $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

$-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(d) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

السبب:

$f'(x)=\frac{2}{3}(1+6x)^{-\frac{1}{3}}(6)=4(1+6x)^{-\frac{1}{3}}$

$f''(x)=4\times\frac{-1}{3}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}(6)=-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

ضرب وتبسيط ①②

(6) ميل الخطّ العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3\ ,\ 2)$ على منحنى: $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو:

اشتقاق ضمني

(a) -5 ✓ (b) $-\frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{5}$ (d) 5

السبب:

$$2x - 2y\bar{y} - 2(x\cdot\bar{y} + y(1)) = 0$$

$$2x - 2y\bar{y} - 2x\bar{y} - 2y = 0$$

$$-2y\bar{y} - 2x\bar{y} = -2x + 2y$$

$$\bar{y}(-2y - 2x) = -2x + 2y$$

$$\bar{y} = \frac{-2x + 2y}{-2y - 2x}$$

ميل المماس $= m = \bar{y}\Big|_{(3,2)}^{x\ y} = \frac{-2(3) + 2(2)}{-2(2) - 2(3)} = \frac{1}{5}$

ميل العمودي / الناظم $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{1}{5}} = -5$

ضرب وتبسيط ①② $x\ y$

(7) ميل المماس عند النقطة $A(1\ ,\ 1)$ على منحنى: $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي:

لها اشتقاق ضمني

(a) -1 (b) 0 ✓

(c) 1 (d) 2

السبب:

$$2x - 6y\bar{y} + 2(x\cdot\bar{y} + y(1)) = 0$$

$$2x - 6y\bar{y} + 2x\bar{y} + 2y = 0$$

$$-6y\bar{y} + 2x\bar{y} = -2x - 2y$$

$$\bar{y}(-6y + 2x) = -2x - 2y$$

$$\bar{y} = \frac{-2x - 2y}{-6y + 2x}$$

ميل المماس $m = \bar{y}\Big|_{(1,1)}^{x\ y} = \frac{-2(1) - 2(1)}{-6(1) + 2(1)} = 1$

الوحدة الثالثة (تطبيقات على الاشتقاق)

موضوعي (1-3) القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على (a, b) فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

(a) ✓ لا بد أنه تكون الفترة مغلقة

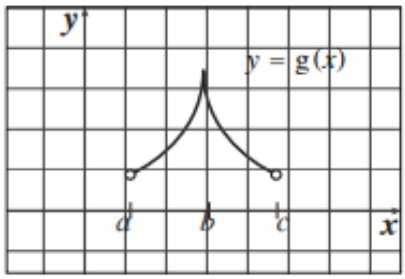
السبب:

نظرية (١)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ فإنه f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

(2) في الشكل التالي، للدالة g قيمة قصوى محلية عند $x = c$.

(a) ✗



السبب:

لا توجد قيم قصوى محلية عند النقاط الطرفية $[x=c]$ فرضت

كما أنه توجد القيم القصوى عند النقاط الحرجة (داخلية)

(3) الدالة g : $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ لها قيمة عظمى في مجالها.

(b) ✓ توجد لها أدق

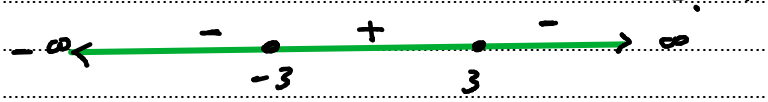
السبب:

نضع: $9 - x^2 \geq 0$

* المعادلة المناظرة: $9 - x^2 = 0$

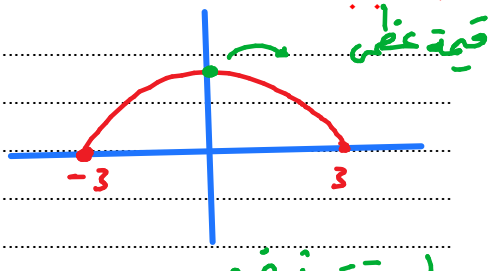
$x = \pm 3$

* بيت دشارت



$D_f = [-3, 3]$

f متصلة على $[-3,3]$ ∴ توجد قيم قصوى حسب نظرية (١)



طريقة أخرى

(4) الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ لها قيمة عظمى في مجالها. (a) توجد إجابة أخرى

السبب:

نضع $x^2-1 \geq 0$

* المعادلة المناظرة: $x^2-1=0$

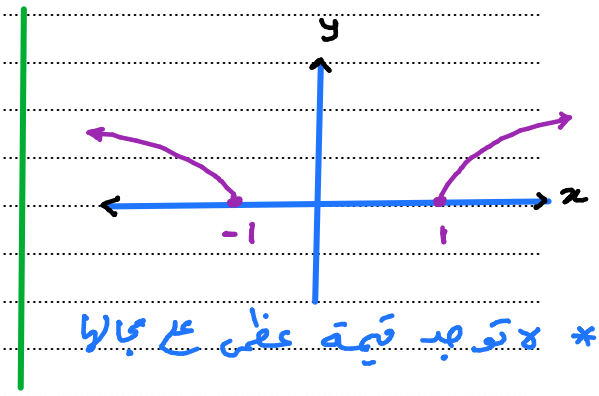
$x=\pm 1$

* جدول الإشارة:

$-\infty$		-1		1		∞
	+	0	−	0	+	

* المجال $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

* غير متصلة على فترة مغلقة مما يخلعد خلل في نظرية (1)



* لا توجد قيمة عظمى على مجالها

في التمارين (9–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) عدد النقاط الحرجة للدالة: $y=3x^3-9x-4$ على الفترة $(0, 2)$ هو:

(a) 3 (b) 2 (1) 1 (d) 0

السبب:

$y' = 9x^2 - 9$

نضع $y'=0$

$9x^2-9=0$ mode 53

$x=1$ أو $x=-1$

$\in (0,2)$ $\notin (0,2)$

$\therefore$ توجد نقطة حرجة واحدة عند $x=1$

(9) إذا كانت $f(x)=ax^2-25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x=\frac{5}{2}$، فإنّ a تساوي:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (5) 5

السبب:

$\therefore$ يوجد قيمة قصوى محلية عند $x=\frac{5}{2}$ $\leftarrow$ $\therefore$ توجد نقطة حرجة عند $x=\frac{5}{2}$

$f'(x) = 2ax - 25$

نضع $f'(x)=0$ والتعويض عن $x=\frac{5}{2}$

$2a\left(\frac{5}{2}\right) - 25 = 0 \Rightarrow 5a - 25 = 0$

$5a = 25 \Rightarrow a = 5$

موضوعي (2-3) تزايد وتناقص الدوال

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $g: g(x)=x^2-x-3$ متزايدة على $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ (a)

السبب:

$g'(x) = 2x - 1$

نضع $g'(x) = 0$

$2x - 1 = 0$

$2x = 1 \quad \div 2$

$x = \frac{1}{2}$

اشارة g'

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		∞
g'		−	0	+	
سلوك g		↘		↗	

* g متزايدة على $(\frac{1}{2}, \infty)$

* g متناقصة على $(-\infty, \frac{1}{2})$

(2) الدالة $f: f(x)=x^4-10x^2+9$ متناقصة على كل من الفترة $(-\infty, -\sqrt{5})$ والفترة $(\sqrt{5}, \infty)$ (a)

السبب:

$f'(x) = 4x^3 - 20x$

$f'(x) = 0$ نضع

$4x^3 - 20x = 0$

$4x(x^2 - 5) = 0$

$4x = 0$ or $x^2 - 5 = 0$

$x = 0$ | $x^2 = 5$

$x = \pm\sqrt{5}$

اشارة f'

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		∞
f'		−	0	+	0	−	0	+	
سلوك f		↘		↗		↘		↗	

* f متزايدة على $(-\sqrt{5}, 0)$ و $(\sqrt{5}, \infty)$

* f متناقصة على $(-\infty, -\sqrt{5})$ و $(0, \sqrt{5})$

(3) الدالة $f: f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0, 1]$ (b)

السبب:

إذا كانت f دالة

(1) f متصلة على $[a,b]$

(2) f قابلة للاشتقاق على (a,b)

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة تحققت

∴ يوجد على الأقل $c \in (a,b)$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

نعطي نائب

f غير قابلة للاشتقاق عند جذورها تحت الجذر

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

∴ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

f قابلة للاشتقاق على $(0,1)$ ← $x = 0 \notin (0,1)$

$f'(0)$ غير موجودة لوجود نائب

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة تحققت.

في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) تكون الدالة k : $k(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

* $\mathbb{R} / \{\pm 2\}$ المجال

(a) متزايدة على كل فترة من مجال تعريفها.

(b) متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها.

(c) متناقصة على الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(-2, 2)$ ومتزايدة على الفترة $(2, \infty)$

(d) ليس أيّ مما سبق.

السبب:

$$k'(x) = \frac{(x^2-4)(1) - x(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

المقام $= 0$

$(x^2-4)^2 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2 \notin D_f$ ∴ لا توجد نقاط حرجة

البسط $= 0$

$-x^2 - 4 = 0$

$-x^2 = 4$

$x^2 = -4$

∴ لا توجد نقاط حرجة

البسط دائماً سالب

المقام دائماً موجب

الدالة f متناقصة على مجال تعريفها

(7) إذا كانت $f'(x) = -x^2$ ، فإنّ الدالة f :

(a) متزايدة على مجال تعريفها.

(b) متناقصة على مجال تعريفها.

(c) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ فقط

(d) متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ فقط

السبب:

نضع $f'(x) = 0$

$-x^2 = 0$ ÷ -1

$x^2 = 0$

$x = 0$

اشارة f'

$-\infty$ 0 ∞

$-$ $-$

سلوك f

$\therefore f$ متناقصة على مجال تعريفها

(8) إذا كانت $f'(x) = -3x$ ، فإنّ الدالة f :

(a) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$

(b) متناقصة على الفترة $(-\infty, 0]$

(c) متزايدة على مجال تعريفها.

(d) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ ومتناقصة على الفترة $(0, \infty)$

السبب:

نضع $f'(x) = 0$

$-3x = 0$ ÷ -3

$x = 0$

اشارة f'

$-\infty$ 0 ∞

$+$ $-$

سلوك f

* f متزايدة على $(-\infty, 0)$

* f متناقصة على $(0, \infty)$

موضوعي (3-3) ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f بمنحني الدالة

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 5$ على الفترة $(0 , 3)$ مقعّرة لأسفل. (a)

السبب:

$y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

نضع $y'' = 0$

$6x - 6 = 0$

$6x = 6 \quad \div 6$

$x = 1$

إشارة y''

$-\infty$		1		∞
التقعر	$-$ ∩	0	$+$ ∪	

* منحنى y مقعر لأعلى على $(1, \infty)$
* " " " لأسفل على $(-\infty, 1)$

(3) إذا كانت $f''(c) = 0$، فإنّ لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c , f(c))$. (a)

السبب:

شروط نقطة الانعطاف

(1) المشتقة الثانية $= 0$ (محققة)

(2) الدالة تغير من تقعرها (لم نذكرها)

(4) إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c , f(c))$ فإن $f''(c) = 0$. (a)

السبب:

إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c, f(c))$ فإنه

$f''(c)$ غير موجودة $f''(c) = 0$

لم تذكرنا السؤال

(5) يمكن أن تكون النقطة الحرجة نقطة انعطاف. (b)

السبب:

مثال: $f(x) = x^3$

النقطة الحرجة = نقطة الانعطاف = (0,0)

(6) منحنى الدالة $y = -3x^8$ مقعّرة للأعلى. (a)

السبب:

$y' = -24x^7 \Rightarrow y'' = -168x^6$

نضع $y'' = 0$

$-168x^6 = 0 \Rightarrow x = 0$

إشارة y''

لتقعر

* منحنى الدالة مقعر لأسفل.

في التمارين (12–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

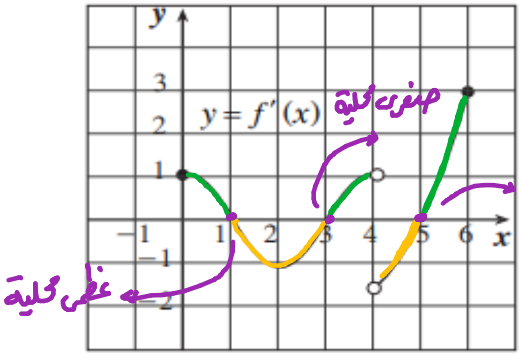
(7) إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان دالة المشتقة (f') فإن الدالة f تكون:

(a) متزايدة على كل من $(4, 5)$, $(1, 3)$.

(b) متناقصة على كل من $(4, 5)$, $(1, 3)$.

(c) لها قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ فقط.

(d) لها نقطة انعطاف عند كل من $x = 2$, $x = 4$.



السبب:

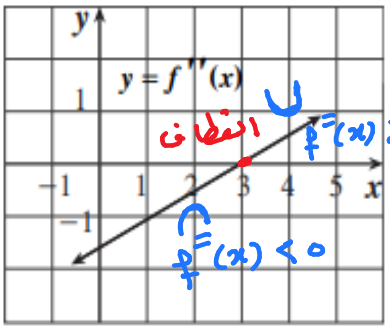
* الدالة f متزايدة على $(5,6)$ و $(3,4)$ و $(0,1)$

* الدالة f متناقصة على $(4,5)$, $(1,3)$

نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات تمثل النقاط الحرجة $(x=1, x=3, x=5)$

[أعلى محور السينات المنحنى تزايد]

[أسفل محور السينات المنحنى تناقص]



(8) إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرًا للأسفل في الفترة:

(a) $(-\infty , 3)$ (b) $(3 , \infty)$

(c) $(-1 , 4]$ (d) $(3 , 5)$

السبب:

* منحنى f مقعر لأسفل على $(-\infty, 3)$
* " " " لأعلى على $(3, \infty)$

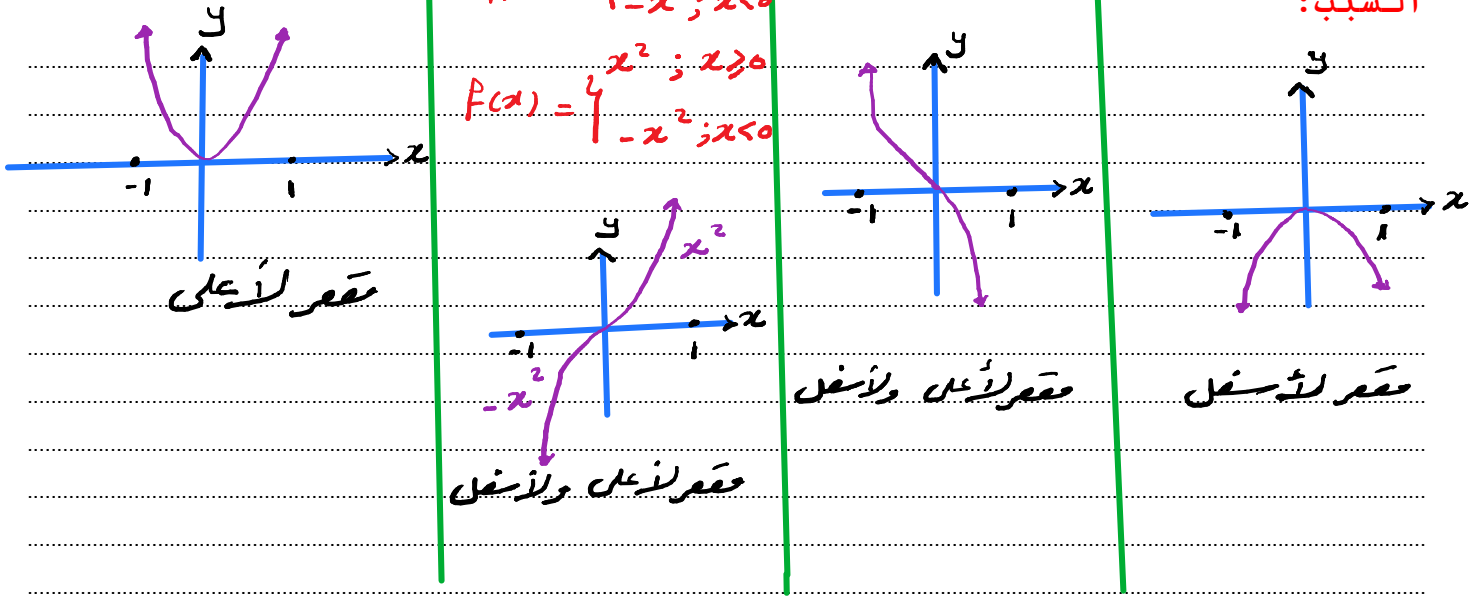
(9) أي من منحنيات الدوال التالية يكون مقعرًا لأسفل في $(-1 , 1)$:

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x|x|$ (c) $f(x) = -x^3$ (d) $f(x) = -x^2$

السبب:

$|x| = \begin{cases} x ; x \geq 0 \\ -x ; x < 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} x^2 ; x \geq 0 \\ -x^2 ; x < 0 \end{cases}$



(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود، $(c , f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

(a) $f''(c) = 0$ (b) $f'(c) = 0$ (c) $f(c) = 0$ (d) غير موجودة $f''(c)$

السبب:

إذا كانت f كثيرة حدود $(c , f(c))$ نقطة انعطاف

فإن $f''(c) = 0$

(11) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف:

(a) $f(x)=x^3+5x$ (b) $f(x)=4x^2-2x^4$ (c) $f(x)=x^3$ (d) $f(x)=(x-2)^4$

السبب:

* كل دالة من الدرجة الثالثة لها نقطة انعطاف (a , c)

* المنحنيات من الدرجة الرابعة حالتين

لها نقطة انعطاف ليس لها نقطة انعطاف

$f(x)=(x-2)^4$ ← دالة المرجع $f(x)=x^4$

الاستنتاج: أنسحاب دالة المرجع وحدتين لليمين

ليس لها نقطة انعطاف و المنحنى مقعر لأعلى على مجالها.

(12) للدالة f : $f(x)=(x^2-3)^2$ نقاط انعطاف عددها:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

السبب:

$f(x)=(x^2-3)^2=x^4-6x^2+9$

$f'(x)=4x^3-12x$

$f''(x)=12x^2-12$

$f''(x)=0$ نضع

$12x^2-12=0$ mode 53

$x=1$ or $x=-1$

∴ توجد نقطتا انعطاف للدالة f.

موضوعي (3-4) رسم بيان دوال كثيرات الحدود

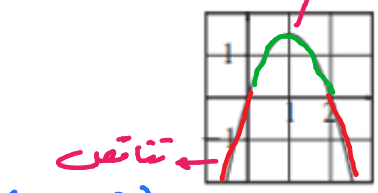
في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لتكن f : $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+2$ و (C) منحناها.

(a) (b)

(1) يمر المنحنى (C) بنقطة الأصل.

(2) الشكل المجاور يمثّل منحنى الدالة f'.



السبب:

(1) $f(0)=-\frac{1}{2}(0)^3+\frac{3}{2}(0)^2+2=2\neq 0$

∴ المنحنى C يمر بنقطة الأصل إذا كان $d=0$

(2) $f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x$

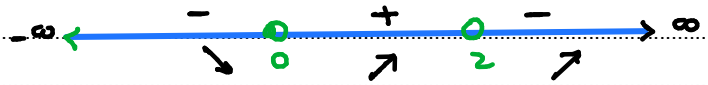
نضع $f'(x)=0$

$-\frac{3}{2}x^2+3x=0$ mode 5 3

$x=2$ or $x=0$

اشارة f'

سلوك f



(3) المماس عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي 2 موازٍ لمحور السينات. (a) (b)

$f'(2)=0$ تتقعر

السبب:

$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x \Rightarrow f'(2)=-\frac{3}{2}(2)^2+3(0)=0$

∴ المماس عند $x=2$ يوازي محور السينات.

(4) 4 هي قيمة عظمى محلية. (a) (b)

السبب:

من السؤال الثاني: $x=0$, $x=2$

$f(2)=-\frac{1}{2}(2)^3+\frac{3}{2}(2)^2+2=4$, $\therefore f(0)=2$

لـ 4 قيمة عظمى محلية عند $x=2$

لـ قيمة صغرى محلية عند $x=0$

(5) المنحنى (C) مقعر لأعلى على الفترة $(1 , -\infty)$.

(b)

السبب:

$f(x) = -3x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = -3x + 3$

$f'(x) = 0$ نضع

$-3x + 3 = 0$

$-3x = -3 \Rightarrow x = 1$

إشارة f' : $+$ على $(-\infty, 1)$ ، $-$ على $(1, \infty)$

التقعر: $\cup$ على $(-\infty, 1)$ ، $\cap$ على $(1, \infty)$

* المنحنى C مقعر لأعلى $(-\infty, 1)$

* " " لأسفل $(1, \infty)$

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

في التمارين (8–6)، الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها:

x	$-\infty$		-1		5		∞
			عظمى محلية				
$f(x)$	∞	تناقص		تزايد	3	تناقص	$-\infty$
			صغرى محلية				

$(-\infty, -1)$ $(-1, 5)$ $(5, \infty)$

للمقارنة بين أي قيمتين لابد أن تحتويهم فترة واحدة

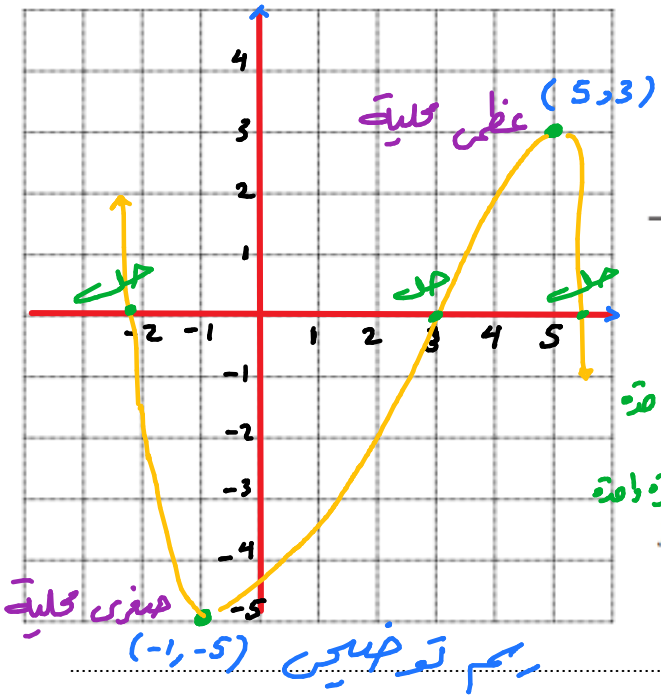
(6) العبارة الصحيحة فيما يلي هي:

(a) $f(-2) > f(0)$ — لا تحتويهم فترة واحدة

(b) $f(0) < f(6)$ — لا تحتويهم فترة واحدة

(c) $f(-9) > f(-2)$ — تحتويهم فترة واحدة

(d) $f(-1) > f(8)$ — لا تحتويهم فترة واحدة



السبب:

من الرسم $f(-9) > f(-2)$

(7) للمعادلة $f(x) = 0$:

(a) حل واحد

(b) حلّان

(c) ثلاثة حلول

(d) لا حل لها.

السبب:

المنحنى f يقطع محور السينات في 3 نقاط

(8) جدول تغير الدالة f يوضّح أن:

(a) 5- قيمة صغرى مطلقة. المنحنى محتمل لأسفل

(b) 3 قيمة عظمى مطلقة. المنحنى محتمل لأعلى

(c) 5- قيمة صغرى محلية، 3 قيمة عظمى محلية.

(d) 1- قيمة صغرى محلية، 5 قيمة عظمى محلية. غير موجودين بجدول التغير مستبعدين .

السبب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(9) لتكن الدالة f : $f(x) = -x^2 + 7x + 1$

(a) لمنحنى f قيمة عظمى محلية.

(b) لمنحنى f نقطة انعطاف.

(c) منحنى f مقعر لأعلى.

(d) لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

السبب:

معامل x^2 سالب (1) توجد قيمة عظمى محلية

(2) لا توجد نقطة انعطاف

(3) المنحنى مقعر لأسفل

.....

.....

.....

.....

(10) لتكن f : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. لمنحنى f دائمًا:

(a) قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية. = الدوال من الدرجة الثالثة ليس لها قيم عظمى محلية أو صغرى محلية مثل $f(x) = x^3$

(b) نقطة انعطاف.

(c) تقعُّر لأسفل ثم تقعُّر لأعلى.

(d) لا تمر بنقطة الأصل.

السبب:

(b) الدوال من الدرجة الثالثة لها نقاط انعطاف

(c) وقد تكون المنحنى تقعر لأعلى ثم تقعر لأسفل

(d) قد تمر بنقطة الأصل إذا كان $d = 0$

.....

.....

.....

.....

موضوعي (5-3) تطبيقات على القيم القصوى

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\,cm^2$ هو $16\,cm$ (b)

السبب:

نفرض إن أبعاد : x و y

نفرض x طول

المساحة $= x \cdot y = 16$

$y = \frac{16}{x}$ ← بالتعويض

المحيط $= f(x) = 2(x + y)$

$= 2\left(x + \frac{16}{x}\right)$

$= 2x + \frac{32}{x}$

$= 2x + 32x^{-1}$

$f'(x) = 2 - 32x^{-2}$

$= 2 - \frac{32}{x^2}$

نضع $f'(x) = 0$

$2 - \frac{32}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{32}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{32}{2}$

$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

$x = 4$ or $x = -4$

مقبول — مرفوض [لا يوجد طول بالسالب]

منها

* اختبار المشتقة الثانية:

$f''(x) = 64x^{-3}$

$f''(4) = 64(4)^{-3} = 1 > 0$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 4$

$\therefore$ أصغر محيط عند $x = 4$

الأبعاد $x = 4$ ، $y = \frac{16}{4} = 4$

المحيط $= 2(4 + 4) = 16$ cm

في التمارين (6–3)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(3) مستطيل مساحته $36\,cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

حل آخر: بإيجاد محيط كل الاختيارات

(a) 9 cm , 4 cm $= 2(9+4) = 26$

(b) 12 cm , 3 cm $= 2(12+3) = 30$

(c) 6 cm , 6 cm $= 2(6+6) = 24$ ← أصغر محيط

(d) 18 cm , 2 cm $= 2(18+2) = 40$

السبب:

نفرض أن الأبعاد x, y

المساحة $= x \cdot y = 36$

$y = \frac{36}{x}$

المحيط $= f(x) = 2(x+y)$

$= 2\left(x + \frac{36}{x}\right)$

$= 2x + \frac{72}{x} = 2x + 72x^{-1}$

$f'(x) = 2 - 72x^{-2} = 2 - \frac{72}{x^2}$

نضع $f'(x) = 0$

$2 - \frac{72}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{72}{x^2} = \frac{2}{1}$

$x^2 = \frac{72}{2} = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

$x = 6$ مقبولة أو $x = -6$ مرفوضة [لا يوجد طول بالسالب]

* اختبار المشتقة الثانية:

$f''(x) = 144x^{-3}$

$f''(6) = 144(6)^{-3} = \frac{2}{3} > 0$

∴ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 6$

∴ أصغر محيط عند $x = 6$

الأبعاد $x = 6$, $y = \frac{36}{6} = 6$

(5) أردت التخطيط لصنع صندوق على هيئة شبه مكعب بدون غطاء من قطعة ورق مقوى مستطيلة أبعادها 10 cm, 16 cm، وذلك بقطع 4 مربّعات متطابقة عند الرؤوس، ثمّ طيّ الأجزاء البارزة.

أبعاد الصندوق الذي له أكبر حجم يمكن صنعه على أساسها هي:

(a) 2 cm, 6 cm, 12 cm

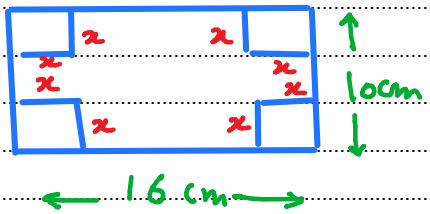
(b) 3 cm, 4 cm, 12 cm

(c) 2 cm, 8 cm, 12 cm

(d) 3 cm, 6 cm, 8 cm

السبب:

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع



$V(x) = (16-2x)(10-2x)x$

$= (160 - 52x + 4x^2)x$

$= 160x - 52x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 160 - 104x + 12x^2$

mode 53

المجال تكوين للعرض

$0 < 2x < 10 \quad \div 2$

$0 < x < 5$

$x = 2$ or $x = \frac{20}{3} \approx 6.7$

$2 \in (0,5)$ مقبول

$\frac{20}{3} \notin (0,5)$ مرفوض

$x \in (0,5)$

* اختبار المشتقة الثانية

$V''(x) = -104 + 24x$

$V''(2) = -104 + 24(2) = -56 < 0$

∴ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2$

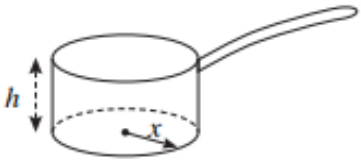
∴ أكبر حجم للصندوق عند $x = 2$

الأبعاد: الطول $= 16 - 2x = 16 - 2 \times 2 = 12$ cm

العرض $= 10 - 2x = 10 - 2(2) = 6$ cm

الارتفاع $x = 2$

(6) تعطى المساحة الكلية لوعاء أسطواني الشكل بالمعادلة $s = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$، حيث x طول نصف قطر قاعدته وV حجمه. (**تذكر:** $V = \pi x^2 h$).



إذا كان حجم الوعاء ثابتًا فإن القيمة الدنيا لمساحته هي عندما:

(a) $x > h$ (b) $x = h$ (c) $x < h$ (d) ليس أيّ مما سبق

السبب:

$S(x) = \pi x^2 + \frac{2V}{x}$

$S(x) = \pi x^2 + 2V x^{-1}$

$S'(x) = 2\pi x - 2V x^{-2}$

$= 2\pi x - \frac{2V}{x^2} = \frac{2\pi x^3 - 2V}{x^2}$

نضع $S'(x) = 0$

$\frac{2\pi x^3 - 2V}{x^2} = \frac{0}{1}$

$\therefore 2\pi x^3 - 2V = 0$

$2\pi x^3 = 2V$

$2\pi x^3 = 2\pi x^2 h$

$x = h$

المشتقة غير موجودة عند أصفار المقام أي عند $x = 0$

$\frac{x^3}{x^2} = x$

الوحدة الرابعة(الإحصاء)

موضوعي (4-1) التقدير

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(2) إذا أخذنا عينة من 225 هاتفًا، ووجدنا أنّ متوسط صلاحية استخدامها $\bar{x}$ هو 1.7 سنة، والانحراف المعياري $S = 0.5$، ودرجة الثقة 95% فنجد أن فترة الثقة هي: $2.63 < \mu < 2.76$ (a)

السبب:

∴ مستوى الثقة 95% ← القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$n = 225$

$\bar{x} = 1.7$

$S = 0.5$

هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{36}} \approx 0.16$

فترة الثقة: $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

$= (1.7 - 0.16, 1.7 + 0.16) = (1.54, 1.86)$ حدد خطأ

$\bar{x} = \frac{2.63 + 2.76}{2} = 2.695 \neq 1.7$

في التمارين (8—3)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(3) إنّ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

(a) 2.12 (b) 2.17 (c) 21.2 (d) 21%

السبب:

∴ مستوى الثقة 96.6%

$1 - \alpha = 0.966 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.966}{2} = 0.4830$

من جدول Z

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.1 + 0.02 = 2.12$

(4) المتوسط الحسابي لدرجات 9 طلاب هو $\bar{x} = 2.76$ حيث النهاية العظمى 4 درجات والانحراف المعياري $S = 0.87$. إنّ فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي عند درجة ثقة 95% هي:

(a) (2.1916 , 3.3284)
(b) (1.6232 , 3.8968)
(c) (2.1916 , 3.8968)
(d) (2.0913 , 3.4287)

السبب:

$n = 9$
$\bar{x} = 2.76$
$s = 0.87$

σ غير معلومة ، $n \leq 30$ ← نستخدم توزيع t

درجة الحرية $= n - 1 = 9 - 1 = 8$

مستوى الثقة 95% ∴

$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.306$

هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.306 \times \frac{0.87}{\sqrt{9}} = 0.66874$

فترة الثقة $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

$= (2.76 - 0.66874 , 2.76 + 0.66874)$
$= (2.09126 , 3.42874)$

(5) لنفترض أن متوسط مجتمع إحصائي يقع ضمن الفترة $62.84 < \mu < 69.46$ فمتوسط هذه العينة يساوي:

(a) 56.34
(b) 62.96
(c) 6.62
(d) 66.15

السبب:

$\bar{x} = \frac{62.84 + 69.46}{2} = 66.15$

(6) إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين، ومستوى ثقة 95%، وانحراف معياري للمجتمع $\sigma = 8$ يساوي:

(a) 65
(b) 62
(c) 8
(d) 26

السبب:

$n = ?$
$E = 2$
$\sigma = 8$

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$2 = 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}}$ بالآلة الحاسبة calc

$n \approx 61.5 = 62$

(8) تتقارب قيمتي t , Z المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

(a) 29 (b) 28 (c) 27 (d) 26

السبب:

29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675

موضوعي (2-4) اختبارات الفروض الإحصائية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في مجتمع إحصائي إذا كان المتوسط الحسابي $\mu = 860$ وعينة من هذا المجتمع حجمها $n = 25$ والمتوسط الحسابي $\bar{x} = 900$ والانحراف المعياري $S = 125$. فإن المقياس الإحصائي هو: $t = 1.6$ (b)

السبب:

σ غير معلومة و $n \leq 30$ ← نستخدم مقياس t

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{900 - 860}{\frac{125}{\sqrt{25}}} = 1.6$$

(2) متوسط العمر لعينة من 100 مصباح كهربائيّ بالساعات في أحد المصانع هو $\bar{x} = 1600$ بانحراف معياري $S = 125$. يقول صاحب المصنع أن متوسط عمر المصابيح بالساعات هو $\mu = 1640$. إن المقياس الإحصائي هو $Z = 3.2$ (a)

$n = 100$

السبب:

σ غير معلومة و $n > 30$ ← نستخدم المقياس الإحصائي Z

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{1600 - 1640}{\frac{125}{\sqrt{100}}} = -3.2$$

(3) متوسط عمر الإطارات في أحد المصانع $\mu = 25000$، في دراسة لعينة عشوائية تبيّن أن المتوسط الحسابي هو $\bar{x} = 27000$ مع انحراف معياري $S = 5000$.

إذا كان المقياس الإحصائي $t = 2$ فإنّ حجم العينة: $n = 25$ (b)

السبب:

$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \Rightarrow 2 = \frac{27000 - 25000}{\frac{5000}{\sqrt{n}}}$ بالحل نجد

$n = 25$

(4) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 81$ مع متوسط حسابي $\bar{x} = 3.6$ وانحراف معياري $S = 1.8$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -1.5$ فإن المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu = 3.3$ (a)

السبب:

$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \Rightarrow -1.5 = \frac{3.6 - \mu}{\frac{1.8}{\sqrt{81}}}$ بالحل نجد

$\mu = 3.6$

في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة $(-1.96 , 1.96)$ فإن قيمة الاختبار Z ممكن أن تكون:

(a) $1.5 \in (-1.96, 1.96)$ منطقة القبول

(b) $-2.5 \notin (-1.96, 1.96)$ منطقة القبول

(c) $1.87 \in (-1.96, 1.96)$

(d) $-1.5 \in (-1.96, 1.96)$

السبب:

(7) في دراسة حول متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة هو (دينارًا) $\mu = 320$ وقد تبيّن أن المتوسط الحسابي لعينة حجمها $n = 25$ منزلًا من هذه المدينة هو (دينارًا) $\bar{x} = 310$ مع انحراف معياري $S = 40$. إن المقياس الإحصائي هو:

(a) 1.25 (b) −1.25
(c) 0.8 (d) −0.8

السبب:

σ غير معلومة $\leftarrow n < 30$ نستخدم خصائص t

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{310 - 320}{\frac{40}{\sqrt{25}}} = -1.25$$

(8) في دراسة على عينة أسلاك معدنية حجمها $n = 64$ تبيّن أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل السلك $\bar{x} = 360$ kg مع انحراف معياري $S = 50$ kg إذا كان المقياس الإحصائي لقوة تحمل كافة الأسلاك المعدنية المصنعة $Z = -2.4$ فإنّ المتوسط الحسابي μ هو:

(a) 346 (b) 396 (c) 376 (d) 326

السبب:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \Rightarrow -2.4 = \frac{360 - \mu}{\frac{50}{\sqrt{64}}}$$

الآلة الحاسبة

$\mu = 375$ ← الأقرب لأحد الاختيارات 376

(9) هدف إحدى الشركات الكبرى هو ربح صاف متوسطه الحسابي (دينار) $\mu = 200000$ في كل فرع من فروعها المنتشرة في عدد من الدول. في دراسة لعينة من عدد لهذه الفروع أعطت متوسطًا حسابيًا (دينارًا) $\bar{x} = 195000$ مع انحراف معياري (دينارًا) $S = 80000$ إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -0.625$ فإنّ حجم العينة n هو:

(a) 100 (b) 125 (c) 90 (d) 110

السبب:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \Rightarrow -0.625 = \frac{195000 - 200000}{\frac{80000}{\sqrt{n}}}$$

الآلة الحاسبة

$n = 100$

(10) في دراسة لمجتمع إحصائي تبيّن أنّ متوسطه الحسابي $\mu = 125$ أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبيّن أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 130$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = 3.125$ فإنّ الانحراف المعياري σ هو:

(a) -9.6 (b) 6.9 (c) 9.6 (d) -6.9

السبب:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow 3.125 = \frac{130 - 125}{\frac{\sigma}{\sqrt{36}}}$$

Clac
حاسبة

$$\sigma = 9.6$$

Statistics الإحصاء

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$; $-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (القيمة الحرجة)

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (الخطأ المعياري للمجتمع)

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (هامش الخطأ – توزيع طبيعي)

$(\bar{x} - E \ , \ \bar{x} + E)$ فترة الثقة للمتوسط الحسابي

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (التوزيع t)

$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ (هامش الخطأ – توزيع t الانحراف المعياري σ غير معاوم)

$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي)

$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي – الانحراف المعياري σ غير معلوم)

$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الاحصائي – توزيع t – الانحراف المعياري σ غير معاوم)

جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

ملاحظة: استخدم 0.4999 عندما تزيد قيمة Z عن 3.09

جدول التوزيع t

درجات الحرية $(n-1)$	$\frac{\alpha}{2}$ 0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675