يمكنك مراجعه الحلول من خلال المذكرة المحلولة
للتأكد من حلك والتدرب على الحل الصحيح

مذكرة القصير

# الرياضيات

## الصف العاشر

## الفصل الدراسي الأول

"لا تبحث عن الحل الأسرع ... بل عن الفهم الذي لا يُنسى"

للحصول على المذكرة المحلولة اشترك في قناتي اليوتيوب والتيليجرام
وسيصلك كل ما هو جديد

YouTube
اضغط هنا
للاشتراك في قناة اليوتيوب

اضغط هنا
للانضمام لجروب التيليجرام

# 1-2 حل معادلة القيمة المطلقة

## معادلات القيمة المطلقة

### مفهوم أساسي « حل معادلات القيمة المطلقة »

لحل المعادلة $|ax+b|=c$ حيث $c\geq 0$

نحل المعادلتين المرتبطتين بها وهما : $ax+b=-c$ أو $ax+b=c$

### حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=c \ , c\geq 0$

تعلمنا فيما سبق أن حل معادلة القيمة المطلقة :

| 1 $\|x\|=A$ | 2 $\|x\|=0$ | 3 $\|x\|=A$ |
|---|---|---|
| إذا كان $A>0$ ، فإن للمعادلة حلان هما: $x=A \quad or \quad x=-A$ $S=\{-A \ , A\}$ | إذا كان $A=0$ ، فإن للمعادلة حل وحيد وهو: $x=0$ $S=\{0\}$ | إذا كان $A<0$ ، فإن للمعادلة ليس لها حل: $S=\emptyset$ |

### خواص القيمة المطلقة

لكل $a , b\in R$ فإن :

1. $|a|\geq 0$
2. $|a+b|\leq|a|+|b|$
3. $|a\,.b|=|a|.|b|$
4. $|x-a|=|a-x|$
5. $\frac{|a|}{|b|}=|\frac{a}{b}|$ , $b\neq 0$
6. $|x|=|-x|$
7. $|n|^2=n^2$ حيث $n$ عدد زوجي
8. $\sqrt{x^2}=|x|$ لأي عدد حقيقي $x$ يكون

## أولاً : حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=|cx+d|$

**مثال ( 1 )** أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-2|=|2x-1|$

مثال ( 1 ) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|2x-1| = |x-2|$

* الحل الآخر (بتربيع الطرفين)

تحقق من فهمك (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة : $|x-1| = |x+2|$

مثال ( 2 ) أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

ⓐ $|x+4|=|x-3|$

---

ⓐ $|2y+1|=|3y+4|$

تحقق من فهمك (2)

أوجد مجموعة حل كلّ معادلة من المعادلات التالية:

a $|y-4|=|2y-5|$

b $|2x-3|=|x+1|$

c $|3y+1|=|y-2|$

d $|x-4|=|2x-5|$

## ثانيًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=cx+d$

**مثال (3)** أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-3|=3x-1$

**تحقق من فهمك (3)**

أوجد مجموعة حل كلّ معادلة من المعادلات التالية:

a $|2x-1|=x+2$

b $|2x+5|=x+5$

مثال (4) أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

ⓐ $|4x+2|=1-2x$ ⓑ $|x+4|+2x+3=0$

ⓐ $|4x+2|=1-2x$

ⓑ $|x+4|+2x+3=0$

تحقق من فهمك (4)

- أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $|2\ell-3|=|4\ell-1|$

b $|3x-1|+4x-13=0$

# البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-7) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

(1) حل المعادلة $|2x-1|=x+3$ هو

ⓐ $x=1$ ⓑ $x=2$ ⓒ $x=-1$ ⓓ $x=-2/3$

.....

.....

(2) حل المعادلة $|x+2|=x+2$ هو

ⓐ $x=-2$ ⓑ $x\in(-2,\infty)$ ⓒ $x\in[-2,\infty)$ ⓓ $\varnothing$

.....

.....

(3) حل المعادلة $|x-3|=|x+1|$ هو

ⓐ $x=\pm1$ ⓑ $x=-1$ ⓒ $x=1$ ⓓ $x=2$

.....

.....

(4) مجموعة حل المعادلة $|x-3|=|3-x|$ هي

ⓐ $\{3\}$ ⓑ $\{-3,3\}$ ⓒ $\mathbb{R}$ ⓓ $\varnothing$

.....

.....

(5) حل المعادلة $|x-4|=|4-x|$ هو

ⓐ $x=-4$ ⓑ $x=4$ ⓒ $\mathbb{R}$ ⓓ لا يوجد حل

.....

.....

(6) حل المعادلة $|2x-3|=|x+3|$ هو

ⓐ $x=0,\ x=6$ ⓑ $x=-5,\ x=0$ ⓒ $x=5,\ x=6$ ⓓ $x=\pm6$

.....

.....

مجموعة حل المعادلة $|x-2|+x=2$ هي (7)

ⓐ $\varnothing$ ⓑ $(-\infty, 2)$ ⓒ $(-\infty, 2]$ ⓓ $\{2\}$

.....

.....

## مهارات تفكير عليا

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت مجموعة حل المعادلة $|x-a|=b$ هي $\{5,11\}$ فإن $(a,b)=$

ⓐ $(-8,3)$ ⓑ $(-3,8)$ ⓒ $(8,3)$ ⓓ $(3,8)$

.....

.....

# 1-3 حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد "جبرياً وبيانياً"

## مفاهيم أساسية:

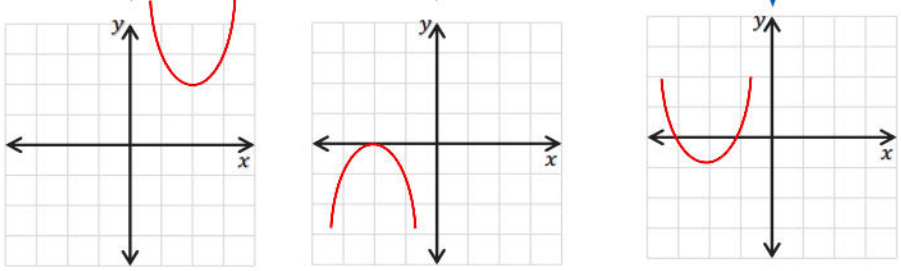
1. الدالة الثابتة : $f(x)=c \quad ,c\in\mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الصفرية)
وتمثيلها البياني يكون خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة $c$ .
2. الدالة الخطية: $a,b\in\mathbb{R} \quad ,a\neq 0 \quad f(x)=ax+b$
(دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني على شكل خط مستقيم.
3. الدالة التربيعية : $a,b,c\in\mathbb{R} \quad ,a\neq 0 \quad f(x)=ax^2+bx+c$ (دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطع مكافئ مفتوحًا للأعلى إذا كانت $a>0$ ، ومفتوحًا للأسفل إذا كانت $a<0$

## * حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانيًّا:

لحل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانياً نتبع الخطوات التالية:

1. ضع المعادلة على الصورة: $ax^2+bx+c=0$
2. أفرض أن : $f(x)=ax^2+bx+c$ ، ثم ارسم منحنى الدالة $f$
3. عين نقاط تقاطع منحنى الدالة $f$ مع محور السينات فتكون الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع هي:

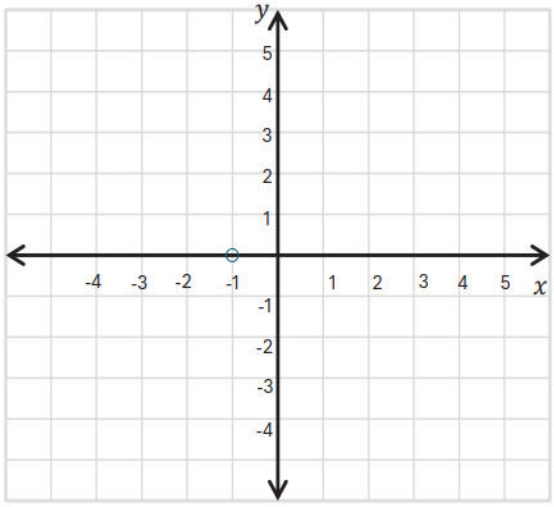
حلول المعادلة $f(x)=0$



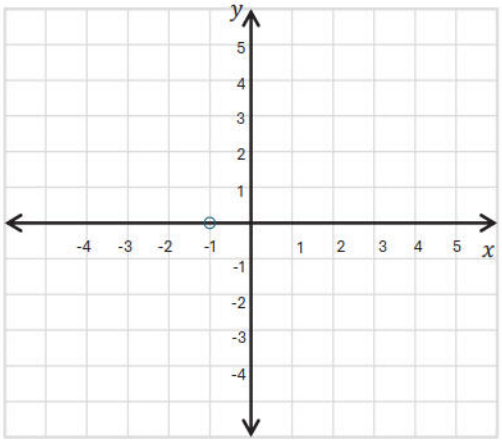

| المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين ، يوجد حلان مختلفان للمعادلة في $\mathbb{R}$ | المنحنى يقطع محور السينات في نقطة واحد، يوجد حلان حقيقيان متساويان للمعادلة في $\mathbb{R}$ | المنحنى لا يقطع محور السينات، لا يوجد حل للمعادلة في $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|
| عدد الحلول = 2 | عدد الحلول = 1 مكرر | عدد الحلول = 0 |

**مثال ( 1 )** أوجد بيانيا مجمّوعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة:

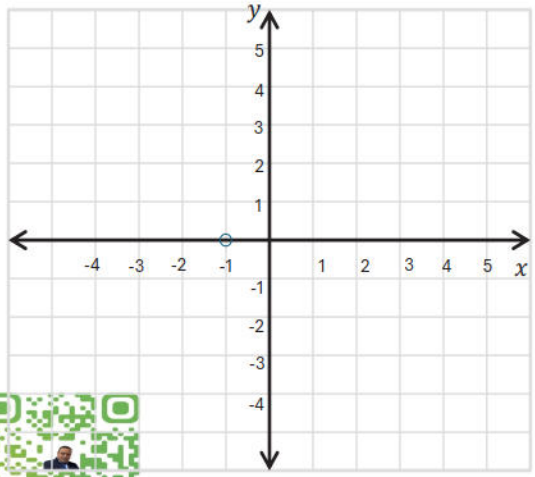
ⓐ $x^2-2x-3=0$ $\quad ,[-2,4]$




ⓑ $-x^2-4x-4=0$ $\quad ,[-4,0]$



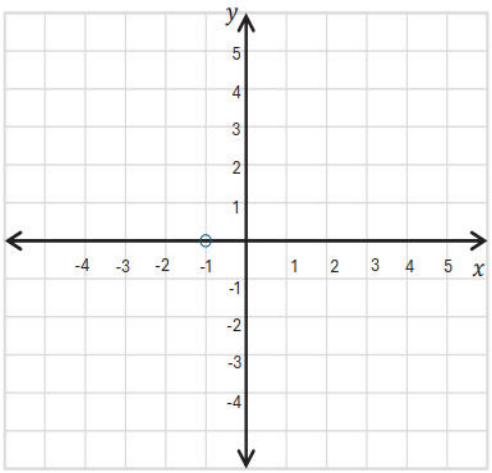

ⓒ $x^2+2=0$ $\quad ,[-2,2]$



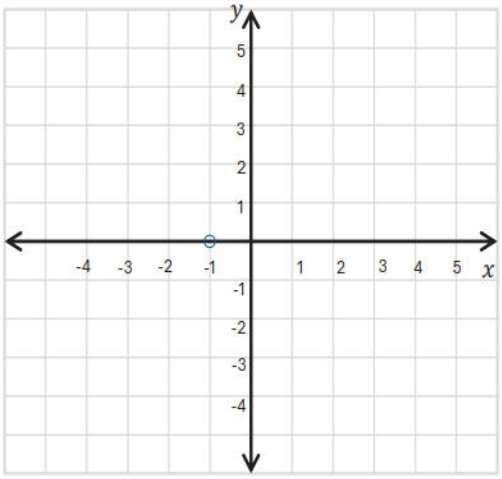
تحقق من فهمك (1)

أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة :

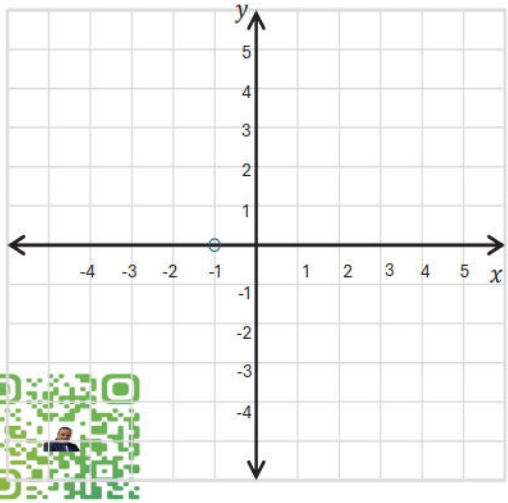
a $x^2-6x+8=0$ ,$[1,5]$




b $x^2+4x+4=0$ ,$[-4,0]$




c $x^2+4x+5=0$ ,$[-4,0]$



## القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد وهو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad b^2-4ac \geq 0 \quad , \quad a,b,c \in \mathbb{R} \quad , \quad a \neq 0$$

يُسمى المقدار $b^2-4ac$ مميّز المعادلة التربيعية ، ويرمز له بالرمز $\Delta$ ويقرأ (دلتا) ، والمميّز هو الذي يميّز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها ، أي أن

$$\Delta = b^2-4ac$$

| $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|
| فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان | فإن للمعادلة جذران حقيقيان متساويان | فإنه لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية |
| عدد الحلول = 2 | عدد الحلول = 1 (مكرر) | عدد الحلول = 0 |

**مثال ( 2 )**

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

(a) $4x^2-4x-3=0$ (b) $2x^2-4x+2=0$

(c) $x^2+2x+3=0$

تحقق من فهمك (2)

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

(a) $2x^2-7x-4=0$ (b) $x^2-10x+25=0$ (c) $3x^2-2x+2=0$

(d) $x^2=15$

(e) $x^2-x=0$

(f) $2x^2-8x+8=0$

مثال (3) أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

(a) $x^2-x-5=0$ (b) $x^2-8=0$

(c) $x^2=x+1$ (d) $x^2-6x+9=0$

(a) $x^2-x-5=0$

(b) $x^2-8=0$

c $x^2=x+1$

d $x^2-6x+9=0$

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a $x^2-4x+2=0$

b $4x^2-5x+1=0$

c $x^2-2x+1=0$

d $x^2-6x+8=0$

مثال (4) حل المعادلة التالية باستخدام القانون : $x^2-3x=0$

تحقق من فهمك (4)

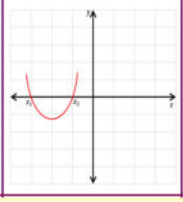
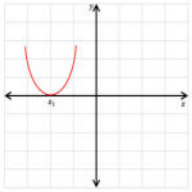
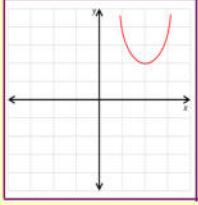
حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون .

a $x^2+7x+10=0$

b $2x^2-5x-52=0$

**تعميم :**

للدالة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ حيث $a,b,c\in\mathbb{R}$ $a\neq 0$

| المميز | $b^2-4ac>0$ موجب | $b^2-4ac=0$ صفر | $b^2-4ac<0$ سالب |
|---|---|---|---|
| عدد الحلول | حلان حقيقان مختلفان | حلان حقيقيان متساويان | لا يوجد حلول حقيقية |
| التمثيل البياني |  |  |  |

**مثال** (5) عددان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما 34 فما العددان؟

تحقق من فهمك (5)

(a) أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100



HOSSAMBAYOUMI199

تحقق من فهمك (5)

(b) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار $3cm$ ومساحته $40cm^2$

# البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(1) جذرا المعادلة $x^2-5x+6=0$ هما جذران حقيقيان متساويان (a) (b)

.....

.....

(2) المعادلة $x^2-4x+4=0$ لها جذران حقيقيان متساويان (a) (b)

.....

.....

(3) جذرا المعادلة $x^2+9=0$ هما $3$ ، $-3$ (a) (b)

.....

.....

■ في البنود من (1-7) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) المعادلة $x^2-6x+9=0$

(b) لها جذران حقيقيان متساويان (a) لها جذران حقيقيان مختلفان

(d) ليس أيًّا مما سبق (c) ليس لها جذور حقيقية

.....

.....

(2) المعادلة $x^2+4x+5=0$

(b) لها جذران حقيقيان متساويان (a) لها جذران حقيقيان مختلفان

(d) ليس أيًّا مما سبق (c) ليس لها جذور حقيقية

.....

.....

(3) جذرا المعادلة $x^2-3x-4=0$ هما:

(a) $-1,4$ (b) $1,4$ (c) $-2,2$ (d) $-1,3$

.....

.....

(4) حل المعادلة $x^2=9$ هو:

ⓐ 3 ⓑ $-3$ ⓒ $\pm 3$ ⓓ لا يوجد حل

.....

.....

(5) جذرا المعادلة $2x^2-7x+3=0$ هما:

ⓐ $\frac{1}{2}$ ,3 ⓑ 1,3 ⓒ 2, 3 ⓓ 1, $\frac{3}{2}$

.....

.....

(6) حل المعادلة $x^2-25=0$ هو:

ⓐ 5 ⓑ $-5$ ⓒ $\pm 5$ ⓓ لا يوجد حل

.....

.....

(7) المعادلة التي مجموع جذريها يساوي 5 فيما يلي:

ⓐ $(x+1)(x+4)=0$ ⓑ $x(x-5)=0$

ⓒ $(x-1)(x+6)=0$ ⓓ $(x-5)(x+1)=0$

.....

.....

## مهارات تفكير عليا

■ اختر الإجابة ⓐ إذا كانت الإجابة صحيحة أو ⓑ إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) إذا كانت المعادلة $x^2-6x-k=0$ لها جذران حقيقيان متساويان فإن قيمة $k$ هي 3 ⓐ ⓑ

.....

.....

■ في البنود من (1 – 5) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) إذا كانت المعادلة $x^2-kx+4=0$ ليس لها جذور حقيقية فإن $k$ تحقق:

(a) $k^2>16$ (b) $k^2=16$ (c) $k^2<16$ (d) $k>16$

.....

.....

(2) مجموعة حل المعادلة $x^2=2-|x|$ هي:

(a) $\{1,-1\}$ (b) $\{2,-2\}$ (c) $\{1,-2\}$ (d) $\{-1,2\}$

.....

.....

(3) مجموعة حل المعادلة $x^2-2|x|=8$ هي:

(a) $\{2,-2\}$ (b) $\{4,-4\}$ (c) $\{2,4\}$ (d) $\varnothing$

.....

.....

(4) إذا كانت $|x|>x$ ، $x^2+2x-3=0$ فإن $2x+4$ تساوي:

(a) $-2$ (b) $2$ (c) $6$ (d) $8$

.....

.....

# 1-5 حل متباينة من الدرجة الثانية

## أولًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام التحليل

«خواص المتباينات في الأعداد الحقيقية» :

1 . عندما : $a.b\geq 0$ فإن : $a\geq 0\ ,b\geq 0 \quad or \quad a\leq 0\ ,b\leq 0$

2 . عندما : $a.b\leq 0$ فإن : $a\geq 0\ ,b\leq 0 \quad or \quad a\leq 0\ ,b\geq 0$

**مثال ( 1 )** حِل كلًا من المتباينات التالية جبريًا ومثل الحل على خط الأعداد :

(a) $x^2-2x-8\geq 0$

.....

(b) $x^2-2x-8\leq 0$

**ملحوظة:**

حل المتباينة: $x^2 - 2x - 8 > 0$ هو

حل المتباينة: $x^2 - 2x - 8 < 0$ هو

**تحقق من فهمك (1)**

حِل كلًّا من المتباينات التالية جبريًا ومثل الحل على خط الأعداد :

(a) $x^2+x-12\leq 0$

.....

(b) $x^2+4x-5\geq 0$

.....

(c) $x^2-x-6<0$

d $(x-3)(2x+5)<0$

.....

e $x^2-2x+1>0$

.....

f $x^2+6x+9<0$

## ثانيًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية بدراسة الإشارة

هناك طرق عديدة لحل متباينة من الدرجة الثانية تعرضنا على طريقة توظيف خواص التباين والآن سنتعرف معًا على حل المتباينة من الدرجة الثانية بالبحث عن إشارة المقدار الثلاثي $ax^2+bx+c$ بإيجاد مجموعة جميع الأعداد الحقيقية $x$ التي تجعل المقدار سالبًا أو موجبًا ، **لنتعرف أولاً على دراسة مقدار من الدرجة الأولى :**

**مثال ( 2 )** ادرس إشارة كل من :

(a) $f(x)=2x-8$

(b) $g(x)=-3x+6$

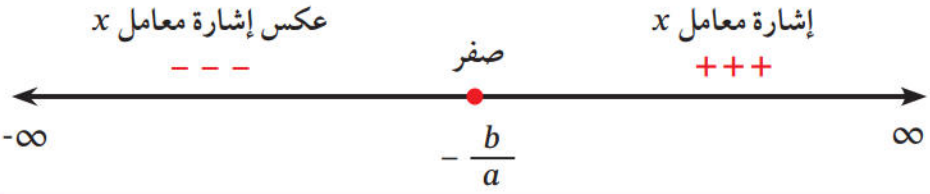
## قاعدة هامة

لدراسة إشارة $g(x)=ax+b$ ، $a\neq 0$ نتبع التالي :

1. نضع $g(x)=0 \Longleftarrow ax+b=0 \Longleftarrow x=-\frac{b}{a}$

2. نحدد العدد $x=-\frac{b}{a}$ على خط الأعداد

3. تكون إشارة $g(x)$ :
   - مماثلة للإشارة $a$ على يمين العدد $-\frac{b}{a}$
   - ومخالفة للإشارة $a$ على يسار العدد $-\frac{b}{a}$




**تحقق من فهمك (2)**

من السؤال السابق أكمل الجدول التالي وحدد الفترات التي تعبر عن حل المتباينات في كل مما يلي :

| $f(x)$ | المتباينة | الفترة | التمثيل على خط الأعداد |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $x^2-4\leq 0$ | | -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 |
| $f(x)$ | $x^2-4>0$ | | |
| $f(x)$ | $x^2-4\geq 0$ | | |

## قاعدة هامة

لدراسة إشارة $f(x)=ax^2+bx+c$ ، $a\neq 0$ نتبع التالي :

1. نوجد المعادلة المناظرة: $f(x)=0$
2. نوجد قيم $x$ التي تجعل $f(x)=0$ إما بالتحليل أو باستخدام المميز عندما يصعب التحليل
3. لدينا ثلاثة احتمالات:

| | | |
|---|---|---|
| للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان مختلفان $x_1<x_2$ | $\Delta>0$ | تبع إشارة $a$ ، تخالف إشارة $a$ ، تبع إشارة $a$ ; $-\infty$ ، $x_1$ ، $x_2$ ، $\infty$ |
| للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان متساويان $x_1=x_2$ | $\Delta=0$ | تبع إشارة $a$ ، تبع إشارة $a$ ; $-\infty$ ، $x_1=x_2$ ، $\infty$ |
| ليس للمعادلة $f(x)=0$ جذور حقيقية | $\Delta<0$ | تبع إشارة $a$ ; $-\infty$ ، $\infty$ |

مثال (3) حل كلاً من المتباينات التالية :

(a) $x^2-2x-8\leq 0$ (b) $x^2-x\leq 5$

(c) $x^2-10x+25>0$ (d) $-3x^2+4x-2\geq 0$

(a) $x^2-2x-8\leq 0$

(b) $x^2-x\leq 5$

ⓒ $x^2-10x+25>0$

(d) $-3x^2+4x-2\geq 0$

لحل المتباينة التربيعية بصورها المختلفة التي على الصورة $a\neq 0$ ، $ax^2+bx+c\geq 0$ يجب ملاحظة إشارة $a\neq 0$ , $f(x)=ax^2+bx+c$ لايجاد قيمة $\Delta$

**تحقق من فهمك (3)**

حِل كل من المتباينات التالية جبريًا ومثل الحل على خط الأعداد :

(a) $2x^2+3x-2<0$

b $-x^2-x+6>0$

c $x^2-6x+9\geq 0$

## حالة خاصة : حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام القيمة المطلقة

**خاصية**

إذا كان $a$ , $b$ عددين حقيقين موجبين فإن: $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

**ملحوظة:**

عند حل المتباينة $x^2<0$ فإننا نلاحظ أنه لا يوجد أي عدد حقيقي بحيث يكون مربعه أصغر من الصفر.

أي إن المتباينة $x^2<0$ ليس لها أي حل ، وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي المجموعة الخالية $\varnothing$ .

وبالمقابل فإن المتباينة $x^2 \geq 0$ صحيحة لأي عدد حقيقي و بالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ .

**بصفة عامة** : إذا كان $a, b, c$ أعداداً حقيقية بحيث $a \neq 0$, $c<0$ فإن :

1 . مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2<c$ هي المجموعة الخالية $\varnothing$

2 . مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2>c$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

3 . مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2<0$ هي $\varnothing$

مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2>0$ هي $\mathbb{R}-\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

**ملحوظة:**

| المتباينة | مجموعة الحل |
|---|---|
| $x^2<0$ | $\varnothing$ |
| $x^2 \leq 0$ | $\{0\}$ |
| $x^2 \geq 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^2>0$ | $\mathbb{R}-\{0\}$ |

**مثال (4)** أوجد مجموعة حل المتباينة ومثّل الحل على خط الأعداد :

(a) $2x^2+5 \geq 23$ (b) $(5x+7)^2+3<2$

**الحل:**

(a) $2x^2+5 \geq 23$

b $(5x+7)^2+3<2$

تحقق من فهمك (4)

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثِّل الحل على خط الأعداد :

a $3x^2-4\leq 8$

b $(4x-3)^2+2>-3$

c $(2-3x)^2<1$

d $(2x+1)^2-3\geq 1$

# البنود الموضوعية:

■ **في البنود من (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:**

(1) مجموعة حل المتباينة $(x+2)(x-5)>0$ هي:

(a) $(-2,5)$ (b) $[-2,5]$

(c) $(-\infty,-2)\cup(5,\infty)$ (d) $\mathbb{R}$

.....

.....

(2) مجموعة حل المتباينة $x^2-2x<0$ هي:

(a) $(0,2)$ (b) $[-\infty,0]$

(c) $(2,\infty)$ (d) $[0,2]$

.....

.....

(3) مجموعة حل المتباينة $x^2+6x+9\leq 0$ هي:

(a) $(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$ (b) $\{-3\}$

(c) $[-3,3]$ (d) $\mathbb{R}$

.....

.....

(4) أي مما يلي ليس حلاً للمتباينة $4x^2-4x-5>0$

(a) 60 (b) -20 (c) 2 (d) 0

.....

.....

(5) أي من المتباينات التالية حلها نفس حل المتباينة $-2x^2+5x-3>0$ :

(a) $x^2-5>2x^2$ (b) $-x^2-x>x^2-4x$

(c) $2x^2+3<5x$ (d) $x^2-3x>2x-x^2$

.....

.....

# 2-1 التناسب

النسبة : هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس ويمكن التعبير عن النسبة بصورة $a$ إلى $b$ ، وتكتب $a:b$ أو $\frac{a}{b}$

التناسب: هو تساوي نسبتين أو أكثر.

إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$
وكانت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
فإن $a,b,c,d$ تسمى أعدادًا متناسبة

ملحوظة :

إذا كان $a,b,c,d$ أعداد متناسبة فإن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ حيث $a,b,c,d \in R^*$

## خواص التناسب

خاصية (1): « الضرب التقاطعي »

إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
فإن : $a.d=c.b$
أي إن : حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه الخاصة «قاعدة الضرب التقاطعي»

مثال ( 1 ) إذا كانت : $2,x,4,6$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة: $x$

تحقق من فهمك (1)

إذا كانت : $3,5,6,x$ أعدادا متناسبة ، أوجد قيمة $x$

**مثال (2)** أوجد الرابع المتناسب للأعداد : $1, 3, 9, \ldots$

تحقق من فهمك (2)

أوجد الثالث المتناسب للأعداد : $35, \ldots\ldots, 4, 7,$

**مثال (3)** أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدّي النسبة $\frac{7}{9}$ أصبحت $\frac{4}{5}$

تحقق من فهمك (3)

أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدّي النسبة $\frac{5}{6}$ أصبحت $\frac{9}{4}$

مثال (4) إذا كان $(5x-1) : (x+4) = 4:5$ أوجد قيمة $x$

تحقق من فهمك (4)

أوجد قيمة $x$ إذا كان : $(2x+3) : (3x-5) = 3 : 4$

خاصية (2): " عكس الخاصية 1 "

إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ وكان $a.d = b.c$

فإن : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال (5) إذا كان $5a = 4b$ فأوجد $\frac{a}{b}$ حيث $a,b \in \mathbb{R}^*$

تحقق من فهمك (5)

إذا كان : $2a = 7b$ ، فأوجد $\frac{a}{b}$

**خاصية (3):** إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فإن : خواص التناسب

(1) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

(2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(3) $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

**مثال (6)** أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $y \neq 0 \ , \ x \neq 0$

(a) $3x = 4y$ (b) $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

**الحل:**

(a) $3x = 4y$

(b) $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

**تحقق من فهمك (6)**

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $y \neq 0 \ , \ x \neq 0$

(a) $5x = 7y$

(b) $\frac{5x-2y}{5x+2y} = \frac{1}{4}$

**خاصية (4):** إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ وكان $k \in \mathbb{R}^*$

حيث $k$ عدد ثابت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

فإن $a = bk, \ c = dk$

مثال (7) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ أوجد $\frac{2a+5b}{3b+2a}$

تحقق من فهمك (7)

إذا كان : $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

خاصية (4): إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{\ell}{s}=\ldots$ وكانت $k_1,k_2,k_3,\ldots\in\mathbb{R}^*$

فإن: إحدى النسب $=\frac{ak_1+ck_2+\ell k_3+\ldots}{bk_1+dk_2+sk_3+\ldots}$


HOSSAMBAYOUMI199

مثال (8) إذا كانت الأعداد $5,6,3$ متناسبة مع $a,b,c$ ،
أوجد قيمة المقدار : $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$

تحقق من فهمك (8)

إذا كان : $\frac{a}{2}=\frac{b}{7}=\frac{c}{5}$ ، أوجد : $\frac{a+2b}{3b+c}$ ( بطريقتين مختلفتين ).

أسئلة المقال

إذا كانت الأعداد 3,5,11 متناسبة مع $a,b,c$ أوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{a+3b}{5b+c}$

## التناسب المتسلسل ( الهندسي )

**تعريف:**

الكميات : $a,b,c$ في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad \text{أو} \quad b^2=ac$$

ويسمى : $a$ الأول المتناسب ، $b$ الوسط المتناسب ، $c$ الثالث المتناسب

حيث : $b=\pm\sqrt{a.c}$

**ملحوظة :** $a,c$ إما أن يكونا موجبين معًا أو سالبين معًا

$$\text{الأول المتناسب} = \frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الثالث المتناسب}} \quad ، \quad \text{الثالث المتناسب} = \frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الأول المتناسب}}$$

**مثال (9)** أوجد الوسط المتناسب بين العددين $9,16$

**تحقق من فهمك (9)**

أوجد الوسط المتناسب بين العددين $-27$ , $-3$

إذا كان $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ , $k$ عدد ثابت لا يساوي الصفر وكان :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$$

فإن : $a=dk^3$ , $b=dk^2$ , $c=dk$

**مثال (10)** إذا كان : $a,b,c$ في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{2a+3b}{2b+3c}=\frac{a}{b}$

تحقق من فهمك (10)

إذا كان : $a,b,c$ في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{a+3b}{b+3c}=\frac{a-2b}{b-2c}$

حيث المقام $\neq$ صفر

مثال (11) إذا كان : $\frac{2a+3b}{2b+3c}=\frac{a+2b}{b+2c}$ أثبت أن : $b$ وسط متناسب بين $a,c$

تحقق من فهمك (11)

إذا كان : $\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}$ أثبت أن $b$ وسط بين $a,c$

تعميم: الكميات: $a,b,c,d,...$ في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=...$

# البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-4) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(1) إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ فإن $ab=3\times4$ (a) (b)

.....

.....

(2) إذا كان $\frac{x}{3}=\frac{14}{23}$ فإن $x=\frac{23}{42}$ (a) (b)

.....

.....

(3) إذا كان $\frac{x-7}{7}=\frac{1}{8}$ فإن $x=\frac{63}{8}$ (a) (b)

.....

.....

(4) زوج النسب التالي: $\frac{4}{5}=\frac{9}{12}$ لا يكون تناسباً (a) (b)

.....

.....

■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) إذا كانت $4x, 2b, 3x, a$ في تناسب فإن $\frac{a}{b}$ تساوي :

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

.....

.....

(2) إذا كان $\frac{x}{y}=7$ فإن $x+7y$ تساوي:

(a) $7x$ (b) $8x$ (c) $2x$ (d) $10x$

.....

.....

(3) إذا كان $2x-5y=0$ فإن $\frac{x}{y}$ تساوي:

ⓐ $\frac{5}{2}$ ⓑ $\frac{2}{5}$ ⓒ $\frac{3}{2}$ ⓓ $\frac{2}{3}$

.....

.....

(4) إذا كان $\frac{x}{2y}=\frac{3}{5}$ فإن $\frac{x+2y}{2x-y}$ تساوي:

ⓐ $\frac{15}{9}$ ⓑ $\frac{16}{7}$ ⓒ $\frac{7}{16}$ ⓓ $\frac{9}{15}$

.....

.....

(5) إذا كان $20, x, 32$ في تناسب متسلسل فإن $x$ تساوي :

ⓐ $\pm 2\sqrt{10}$ ⓑ $\pm 4\sqrt{10}$ ⓒ $\pm 8\sqrt{10}$ ⓓ $\pm\frac{1}{8\sqrt{10}}$

.....

.....

# 2-3 تشابه المثلثات

من خواص التكبير أنه يحافظ على قياسات الزوايا :

**( 1 ) قياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية**

من خواص التكبير أنه يحافظ على تناسب أطوال الأضلاع :

$$\therefore \frac{AB}{LM}=\frac{AC}{LN}=\frac{BC}{MN}=\frac{2}{1}$$ (معامل التكبير)

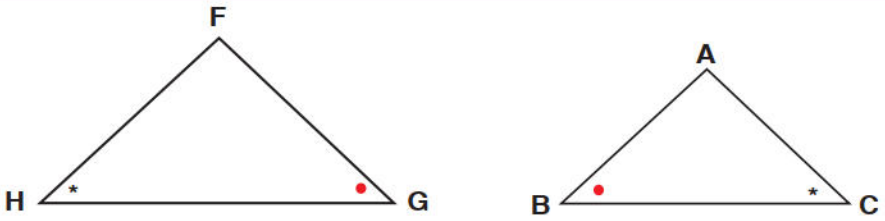
**( 2 ) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة**

**(1، 2) هذان الشرطان أساسيّان لتشابه أي مضلعين.**

ونكتفي بشرط واحد لإثبات تشابه مثلثين حيث إن تشابه المثلثات يعتبر حالة خاصة من تشابه المضلعات .

**نظرية (1)**

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

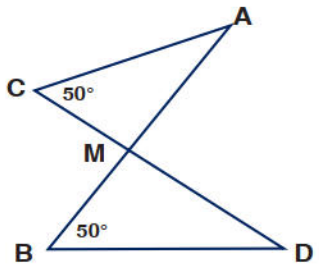



$$m(\hat{H})=m(\hat{C})$$
$$m(\hat{G})=m(\hat{B})$$
$$\Delta FGH \sim \Delta ABC$$

وينتج من التشابه أن :

$$\frac{FG}{AB}=\frac{GH}{BC}=\frac{FH}{AC}$$

**مثال (1)**



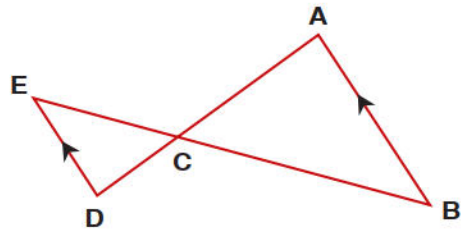

**في الشكل المقابل :**

$m(\hat{C})=m(\hat{B})=50°$

**أثبت أن:** $DBM \sim \Delta ACM \Delta$

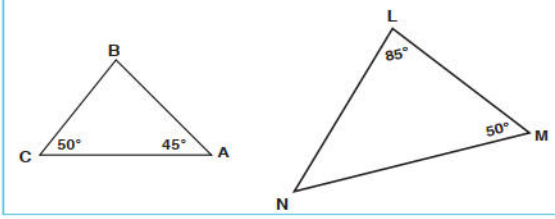
### تحقق من فهمك (1)

في الشكل المقابل :
$\overline{DE}//\overline{BA}$ أثبت أن المثلثين $ABC$ , $DEC$
متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه




### مثال (2)

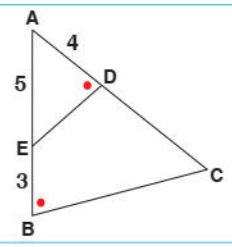
في الشكل المقابل :
$m(\hat{A})=45°, m(\hat{C})=50°$
$m(\hat{L})=85°, m(\hat{M})=50°$
أثبت أن: $\Delta ABC \sim \Delta NLM$




### تحقق من فهمك (2)

المثلث $ABC$ قائم الزاوية في $A$ فيه $m(\hat{B})=55°$ ، والمثلث $NLM$ قائم الزاوية في $L$ فيه $m(\hat{M})=35°$ ، أثبت أن المثلثين متشابهان .

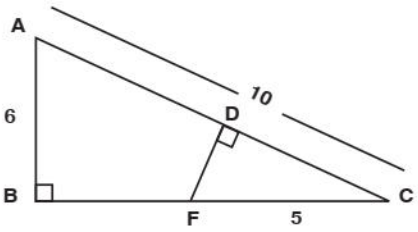
**مثال ( 3 )** في الشكل المقابل :




1. أثبت أن: $\Delta ACB \sim \Delta AED$
2. أوجد طول $\overline{DC}$

**تحقق من فهمك (3)**

في الشكل المقابل :




(1) أثبت أن المثلثين $ABC$ , $FDC$ متشابهان

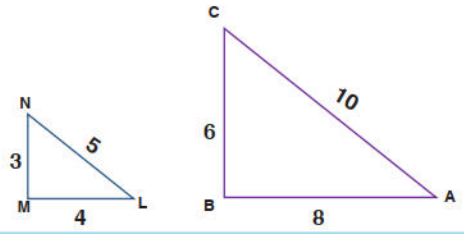
(2) أوجد طول $\overline{FD}$

**نظرية (2)**

يتشابه المثلثان إذا تناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

**مثال (4)**

**في الشكل المقابل :**
**أثبت أن المثلثين $ABC, LMN$ متشابهان.**




**الحل:** $\Delta LMN$ , $\Delta ABC$ وفيهما :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \longrightarrow (1)$$

$$\frac{LN}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \longrightarrow (2)$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \longrightarrow (3)$$

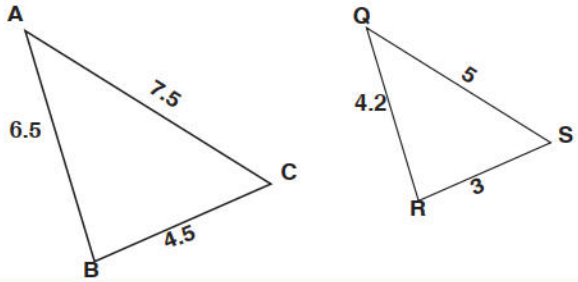
من 1 ، 2 ، 3 ينتج أن :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta NLM$$

**تحقق من فهمك (4)**

a **في الشكل المقابل :**
**أثبت أن المثلثين $ABC, QRS$ متشابهان.**

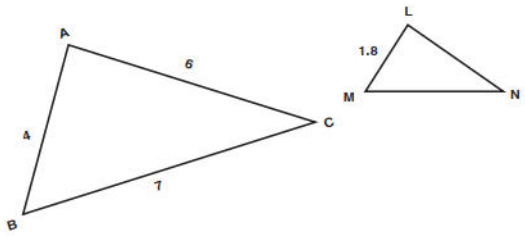


تحقق من فهمك (4)

b في الشكل المقابل :

المثلثان $ABC$ , $LMN$ متشابهان.

أوجد طول كل من $\overline{LN}$ , $\overline{MN}$



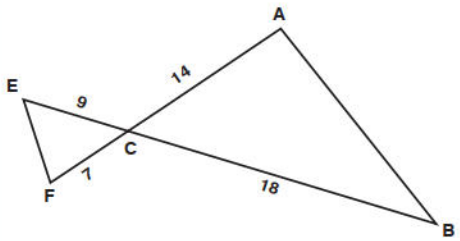

نظرية (3)

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين .

مثال (5) في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين $ABC$ , $FEC$ متشابهان.

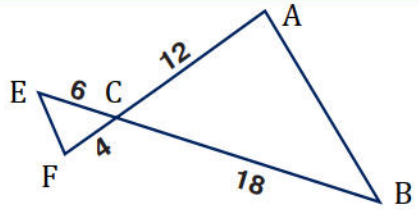
ثم اكتب عبارة التشابه .



**تحقق من فهمك ( 5 )**

في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين متشابهان .

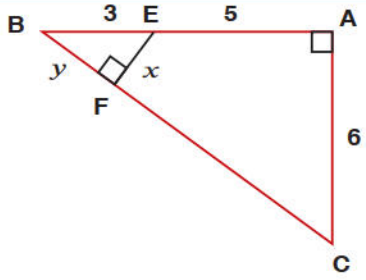



**مثال (6)**

في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين $BFE$ , $BAC$ متشابهان.

ثم أوجد كلا من $x$ , $y$





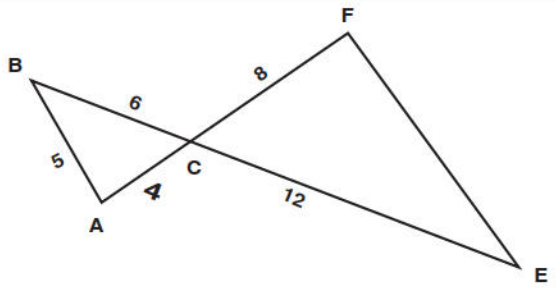

HOSSAMBAYOUMI199

تحقق من فهمك (6)

في الشكل المرسوم :

(a) أثبت أن $\Delta FEC \sim \Delta ABC$

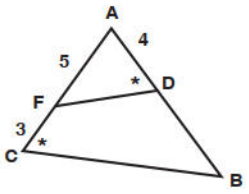
(b) أوجد $\overline{EF}$



# البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(1) في الشكل المقابل :
طول $(\overline{BD})$ يساوي 6

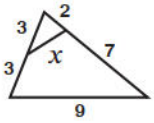



(a) (b)

.....

.....

(2) في الشكل المقابل :
$x$ يساوي 2



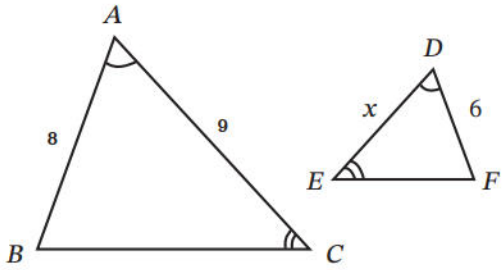

(a) (b)

.....

.....

■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم قيمة $x$ بوحدات الطول تساوي :




(a) 6 (b) $5\frac{1}{3}$

(c) 7 (d) 6.75

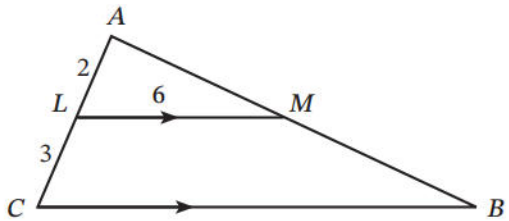
.....

.....

(2) في الشكل المقابل :

$(\overline{LM})//(\overline{BC})$ , $AL=2cm$ , $LC=3cm$

$LM=6cm$ , فإن $BC$ تساوي:



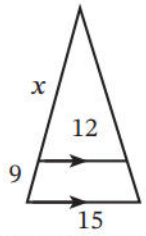

(a) 9 $cm$ (b) 12 $cm$

(c) 15 $cm$ (d) 10 $cm$

.....

.....

(3) في الشكل المقابل : قيمة $x$ تساوي :

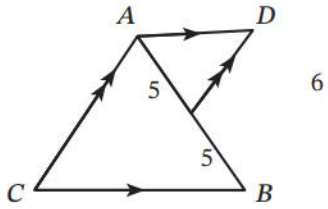



(a) 12 (b) 24
(c) 36 (d) 48

.....

.....

(4) في الشكل المقابل : طول $\overline{AC}$ تساوي :




(a) 6 (b) 9
(c) 12 (d) 15

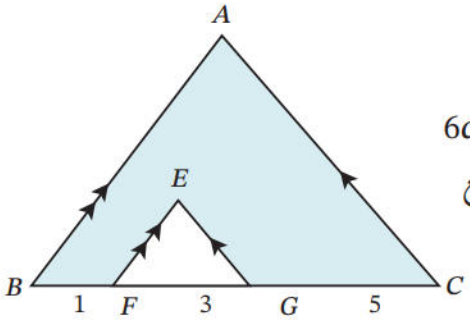
.....

.....

## مهارات تفكير عليا

■ **اختر الإجابة الصحيحة :**

(1) في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث $EFG$ تساوي $6cm^2$ فإن مساحة المنطقة المظللة بالشكل تساوي بالسنتميتر المربع




(a) 27 (b) 36
(c) 48 (d) 54

.....

.....