السهم الذهبي في الرياضيات










الصف الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

55137938

- لكل عدد حقيقي موجب، جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.
  أي أن إذا كان $A^2 = x \leq$ فإن، $A = \pm\sqrt{x}\ ,\ x > 0$.
- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي حقيقي واحد.

$$(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مثال 1

أوجد الجذر التكعيبي لكل مما يلي دون استخدام الالة الحاسبة: -

① -8

② 125

③ $-\frac{375}{24}$

④ 0.064

حاول ان تحل

أوجد الجذر التكعيبي لكل مما يلي دون استخدام الالة الحاسبة: -

a -27

b 64

c -0.008

d $\frac{343}{216}$

تبسيط الجذور

حتى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر.
  فمثلاً $\sqrt{8a^6b^7}$ ليس في أبسط صورة.
- ألا يكون المقام جذراً. مثل: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ليس في أبسط صورة.
- ألا يكون المجذور كسراً. مثل: $\sqrt{\frac{4}{7}}$ ليس في أبسط صورة.
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن.
  مثال: $\sqrt[10]{32}$ ليس في أبسط صورة.



أستاذ نادر الصباغ
55137938

مثال 2 بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية لكل عدد حقيقي x :

① $\sqrt{4x^6}$

تذكر:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

② $\sqrt[3]{8x^3} + 3x$

حاول ان تحل بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية حيث x ، y عددان حقيقيان:

1 $\sqrt{9\,x^2\,y^4}$

2 $\sqrt[3]{-27x^6} + 3x^2$

3 $\sqrt{x^8\,y^6}$

جمع وطرح التعبيرات الجذرية



- لجمع التعبيرات الجذرية وطرحها، يجب أن تكون متشابهة
- يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.
- يجب وضع التعبيرات الجذرية في أبسط صورة مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

مثال 4 أوجد الناتج في أبسط صورة :

1 $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$

أستاذ نادر الصباغ

التركيز يحول العلم لحقيقة

2 $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$ إمتحان final

3 $\sqrt{75}-4\sqrt{18}+2\sqrt{32}$ إمتحان final كراسة التمارين

4 $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}$

حاول ان تحل

أوجد الناتج في أبسط صورة :

1 $8\sqrt[3]{8}+2\sqrt[3]{128}$



(2) $2\sqrt{75} - \sqrt{48}$

(3) $\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27}$

(4) $\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

أستاذ نادر الصباغ

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$	$\sqrt[3]{x^3} = x$
$(\sqrt{x})^2 = x$	$(\sqrt[3]{x})^3 = x$
$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	$\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$
$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, y \neq 0$

مثال 5

بسط كل من التعبيرات الجذرية الاتية

1) $\sqrt{72\,x^3}$, $x \geq 0$

2) $\sqrt[3]{80\,n^5}$

أستاذ نادر الصباغ

حاول ان تحل

بسط كل من التعبيرات الجذرية التالية

1) $\sqrt{50\,x^4}$

2) $\sqrt[3]{18\,x^3}$

مثال 6

بسط كل من التعبيرات الجذرية التالية

1) $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40\,x} \quad , \; x \geq 0$

2) $\sqrt[3]{5\,x^3\,y^4} \times \sqrt[3]{64\,x^2\,y^3}$

أستاذ نادر الصباغ

حاول ان تحل

بسط كل من التعبيرات الجذرية التالية

1) $3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3 y^2}$, $x \geq 0$

2) $4\sqrt[3]{x^4 y} \times 3\sqrt[3]{x^2 y}$

حاول ان تحل

بسط كل من التعبيرات الجذرية التالية

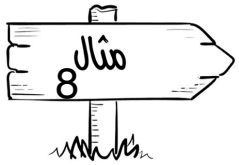
1) $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$

2) $\frac{\sqrt{12\,x^4}}{\sqrt{3\,x}}$, $x > 0$

أستاذ نادر الصباغ

3 $\dfrac{\sqrt[3]{128\,x^{15}}}{\sqrt[3]{2\,x^{2}}}$ ، $x \neq 0$

بسط التعبيرات الجذرية الاتية





1 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذرًا

إذا كان x, y تعبيرين جذريين يمثلان أعددًا غير نسبية وكان ناتج ضرب x في y عددًا نسبيًّا فإن x, y مترافقان.

فمثلًا: $\sqrt{2}$ مرافق $\sqrt{2}$، لأن: $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ حيث الناتج 2 عددًا نسبيًّا.

وكذلك $(3+\sqrt{2})$ مرافق $(3-\sqrt{2})$، لأن: $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$ حيث الناتج 7 عددًا نسبيًّا.

وأيضًا $\sqrt[3]{5^2}$ مرافق لِـ $\sqrt[3]{5}$ لأنّ: $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{5^3}=5$ حيث الناتج 5 عددًا نسبيًّا.

2 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$

أستاذ نادر الصباغ

حاول ان تحل

بسط التعبيرات الجذرية الاتية

1) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2) $\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

أستاذ نادر الصباغ

كراسة التمارين

بسط التعبيرات الجذرية الآتية

$$\frac{5+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$$

$$\frac{4}{3\sqrt{3}-2}$$

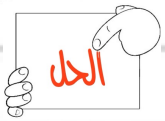
$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

أستاذ نادر الصباغ

أوجد قيمة التعبير : $x^2 - 6$ ، إذا كان $x = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$



أوجد قيمة التعبير : $x^2 - x + 1$ ، إذا كان $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



أستاذ نادر الصباغ

الصورة الأسية.	الصورة الجذرية
$25^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{27}$
$64^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{64}$



مثال 1

بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

a $125^{\frac{1}{3}}$ b $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$ c $10^{\frac{1}{3}} \times 100^{\frac{1}{3}}$

الحل

حاول ان تحل

بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

1 a $64^{\frac{1}{3}}$ b $(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$ c $(8^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$

الحل

حاول ان تحل

2 اكتب العدد $64^{\frac{4}{3}}$ بالصورة الجذرية.

حاول ان تحل

3 a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من:

1 $x^{0.4}$ 2 $y^{\frac{3}{8}}$, $\forall\, y \geq 0$

أستاذ نادر الصباغ

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من:

1 $\sqrt[3]{x^2}$

2 $(\sqrt{y})^3 \ , \ \forall\, y \geq 0$

قوانين الأسس النسبية

ليكن m , n عددين نسبيين، a , b عددين حقيقيين حيث b^m , b^n , a^n أعدادًا حقيقية.

القانون	المثال
$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$	$8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$
$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$	$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\left(\frac{1}{2} \times 4\right)} = 5^2 = 25$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}}$
$b^{-n} = \frac{1}{b^n} \ , \ b \neq 0$	$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$
$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \ , \ b \neq 0$	$\frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)} = 9^{\frac{2}{2}} = 9^1 = 9$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ , \ b \neq 0$	$\left(\frac{-125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = -\frac{5}{3}$

قوانين الجذور النونية

إذا كان: $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين، فإن:

1 $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

2 $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \ , \ y \neq 0$

3 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot n]{x} \quad , \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \in \mathbb{R}$

مثال 5

بسّط كلًّا مما يلي مستخدمًا قوانين الأسس:

a $(-32)^{\frac{3}{5}}$

b $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}} \ , \quad x > 0$

الحل

حاول ان تحل

5 بسّط كلًّا من الأعداد التالية مستخدمًا قوانين الأسس:

a $25^{-\frac{3}{2}}$

c $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}} \ , \ x \geq 0 \ , \ y > 0$

الحل

أستاذ نادر الصباغ

حاول ان تحل 6 بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{27}$

b $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}}$

c $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

d $(\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{y^3})^{-12}, x, y \in \mathbb{Q}^+$

أستاذ نادر الصباغ

التركيز
يحول الحلم لحقيقة

إمتحان final

$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5}$ a b

$16^{\frac{-3}{4}} = 32^{\frac{-3}{5}}$ a b

المقدار : $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ يساوى $\sqrt[3]{5}$ a b

$(x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{3}}) = x^{-\frac{1}{6}}$ حيث $x > 0$ a b

$\sqrt[4]{\sqrt{x}} = x \ , x > 0$ a b

لكل عدد حقيقي m , $|m| \times \sqrt{m^2} = m^2$ a b

إذا كان $n > 0$ فإن التعبير الذي لا يكافئ $\sqrt[4]{4n^2}$ هو :

ⓐ $(4n^2)^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $2n^{\frac{1}{2}}$ ⓒ $(2n)^{\frac{1}{2}}$ ⓓ $\sqrt{2n}$

$\left(\sqrt[4]{x^{-2}y^4}\right)^{-2} =$: $x \neq 0, y \neq 0$

ⓐ $|x^{-1}|y^2$ ⓑ $|x|y^{-2}$ ⓒ xy^2 ⓓ $x^{-2}y^2$

إذا كان $x > 0$ ، فإن التعبير $\frac{(x^{\frac{5}{3}})(40^{\frac{1}{3}})}{(5x^2)^{\frac{1}{3}}}$ يساوي :

ⓐ $8x$ ⓑ $\frac{8}{5}x$ ⓒ $2x$ ⓓ $\frac{1}{5}x$

إذا كان $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فإن :

(a) $\varphi^2 + \varphi = 1$ (b) $\varphi^2 + 1 = \varphi$

(c) $\varphi + \varphi^2 + 1 = 0$ (d) $\varphi^2 = \varphi + 1$

أستاذ نادر الصباغ

رجاءً رج المخ جيداً قبل الحل
Please Shake The Brain Well Before Solving.

كراسة التمارين

$(3-2\sqrt{2})^{27}\times(3+2\sqrt{2})^{27}=1$ (a) (b)

إذا كان $x+y=2$, $x^2-xy+y^2=4$ فإن $\sqrt[6]{x^3+y^3}$ يساوي:

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt[3]{6}$ (d) 2

إن قيمة التعبير $x>0$, $\frac{\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[4]{x^5}}{x^3\cdot\sqrt[8]{x^2}}$ تساوي:

(a) x (b) $\frac{1}{x}$ (c) 1 (d) $\sqrt{x}$

إذا كان $x\in\mathbb{R}^-$ فإن $\frac{1}{x}\cdot|x|$ يساوي:

(a) -1 (b) $-x$ (c) 1 (d) x

لوضع التعبير الجذري $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$ في أبسط صورة نضرب كلًّا من البسط والمقام في:

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) 2 (d) 4

التعبير الجذري الذي في أبسط صورة هو:

(a) $\sqrt[3]{216}$ (b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ (c) $\sqrt[3]{9}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

أستاذ نادر الصباغ
التركيز يحول الحلم لحقيقة

اولاً: المعادلات الجذرية

لحل معادلة جذرية اتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: أفصل الجذر إلى أحد طرفي المعادلة.

الخطوة الثانية: حدد شرط الحل

— إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا فإن قيمة ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وكلًّا من طرفي المعادلة أكبر من أو يساوي الصفر أيضًا.

— إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًا فإن قيمة ما تحت الجذر ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

الخطوة الثالثة: ارفع طرفي المعادلة إلى أس مناسب يحذف الجذر.

الخطوة الرابعة: تأكد من أن الحل يحقق الشرط.

انتبه

معادلة جذرية	$3+\sqrt{x}=10$
معادلة جذرية	$(x-2)^{\frac{1}{2}}=1$
ليست معادلة جذرية	$\sqrt{3}+x=1$

مثال 1

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الاتية

a $2+\sqrt{3x-2}=6$

إمتحان final

الحل

لاحظ أنّ

المعادلات تحتوي على x

إمتحان final

$2\sqrt{x-3}-3=9$

$2+\sqrt{3x+6}=8$

b $6+\sqrt{x-1}=3$

الحل

أستاذ نادر الصباغ

حاول ان تحل أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

a $\sqrt{5x+4}-7=0$

الحل

كراسة التمارين

حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $3\sqrt{x}+3=15$

الحل

امتحان final

$\sqrt{x+3}-5=0$

أستاذ نادر الصباغ

(e) $\sqrt{3-4x}-2=0$



مثال 3

إمتحان final

أوجد مجموعة الحل: $5+\sqrt{x-3}=x$



المعادلات تحتوي على x في الطرفين



إمتحان final

$\sqrt{x+2}=x$



حاول ان تحل

أوجد مجموعة الحل: $\sqrt{5x-1}+3=x$



كراسة التمارين

حل كلًّا من المعادلات التالية:



(a) $\sqrt{11x+3}-2x=0$







أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:



المعادلات تحتوي على جذرين

a $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$

b $\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$



حاول ان تحل

إمتحان final

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

a $\sqrt{5x} - \sqrt{2x+9} = 0$

الحل

b $\sqrt{x-7} + \sqrt{3x-21} = 0$

الحل

أستاذ نادر الصباغ

كراسة التمارين

(f) $\sqrt{10x}-2\sqrt{5x-25}=0$ الحل

إذا كان m عددًا زوجيًّا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}=|x|$ يوجد قيمة مطلقة ولايوجد شرط حل

إذا كان m عددًا فرديًّا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}=x$ يوجد شرط حل ولا يوجد قيمة مطلقة

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

انتبه

مثال 2

أوجد مجموعة الحل: $2(x-2)^{\frac{2}{3}}=50$ الحل

حاول ان تحل

a) أوجد مجموعة الحل: $2(x+3)^{\frac{3}{2}}=54$ الحل

b $(1-x)^{\frac{2}{5}}-4=0$



كراسة التمارين

حل كلًّا من المعادلات التالية:

(d) $(x+1)^{\frac{3}{2}}-2=25$



(j) $2(x-1)^{\frac{4}{3}}+4=36$



أستاذ نادر الصباغ

إمتحان final

$3(x-5)^{\frac{4}{3}} = 48$



إمتحان final

$2(x-4)^{\frac{2}{5}} - 8 = 0$



ثانيا: المعادلات الأسية

ليكن a عدد حقيقي حيث $a \notin \{-1, 0, 1\}$

m, m عددان صحيحان

إذا كان $a^m = a^n$، فإن $m = n$

تذكر:

إذا كان $ab = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$.

تذكر:

$a^0 = 1$ حيث $a \neq 0$

حاول ان تحل

حل كلًّا من المعادلات التالية:

a) $3^x = 243$ الحل

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$ الحل

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$ الحل

مثال

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a) $3^{x^2-1} = 27$ إمتحان final

b) $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$ الحل

c) $6^{2x-8} = 1$

أستاذ نادر الصباغ

حاول ان تحل

حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $5^{x^2-4} = 1$

b $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$

final إمتحان

c $2^{x^2-4} = 32$

الحل

final إمتحان

أوجد مجموعة حل المعادلة الاتية:-

$6^{x^2-3x} = 1$

$2^{(x^2-6)} = \frac{1}{32}$

كراسة التمارين

حل كلا من المعادلات الأسية التالية :-

(i) $(3^x - 27)(2^x - 1) = 0$

(d) $3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$

(j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^x$

(g) $5^x = 125\sqrt{5}$

مجموعة حل $(\sqrt{x^{20}})^{\frac{1}{5}} - x^2 = 0$ هـي : (final إمتحان)

ⓐ $\{0\}$ ⓑ $\mathbb{R}$ ⓒ $\mathbb{R}^+$ ⓓ $\mathbb{R}^-$

مجموعة حل : $\sqrt[3]{x-2} = \sqrt{x-2}$ هي :

ⓐ $\{2\}$ ⓑ $\{1,2\}$ ⓒ $\{1,2,3\}$ ⓓ $\{2,3\}$

مجموعة حل $7^{3-x} = 1$ هي $\{3\}$

ⓐ ⓑ

2-1 مجال الدالة

أ : نادر الصباغ



تساعدنا القواعد التالية على تحديد مجال الدالة:

1. مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعلد الحقيقية $\mathbb{R}$.
2. مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعدد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام.
3. مجال الدالة $f(x)=|x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
4. مجال الدالة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x)\geq 0$.
5. مجال الدالة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g.
6. مجال الدالة $f(x)=g(x)\pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.
   أي أن مجال f = مجال g ∩ مجال h.
7. مجال الدالة $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.
   أي أن مجال f = مجال g ∩ مجال h.
8. مجال الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g عدا أصفار المقام $(h(x)\neq 0)$.
   أي أن مجال f = (مجال g ∩ مجال h)/مجموعة أصفار المقام.

مثال 2

أوجد مجال كل دالة مماليلي:-

a $f(x)=2x^3-4x-\sqrt{2x-6}$

الحل

b $f(x)=(2x^2+x)\sqrt{8-2x}$

الحل

أستاذ نادر الصباغ

c $h(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$ الحل

d $u(x)=\dfrac{4}{\sqrt{-x}}$ الحل

حاول ان تحل

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f_1(x)=\dfrac{2x+5}{x-4}$ الحل

b $f_2(x)=x^3-4x^2-4+\sqrt{x-9}$ الحل

c $f_3(x)=\dfrac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

الحل

d $f_4(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-5x}{x}}$

الحل

إمتحان final

أوجد مجال الدالة:-

$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{7-5x}}{x+2}$

الحل

أستاذ نادر الصباغ

إمتحان final

$$h(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$$



إمتحان final

$$g(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-4}$$



إمتحان final

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$$





إمتحان final

الحل

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x}}{2x+6}$$

في التمارين (1–5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

إمتحان final

(1) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

(2) مجال الدالة $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-6}}$ هو $[3,\infty)$ (a) (b)

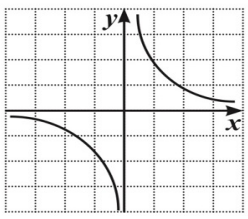
(3) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{-x}$ هو $(-\infty,0]$ (a) (b)

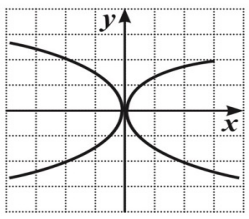
(4) مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}\sqrt{x+3}$ هو $[-3,\infty)$ (a) (b)

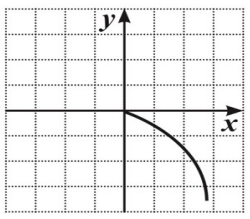
(5) مجال الدالة $f(x) = |x| - 2$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

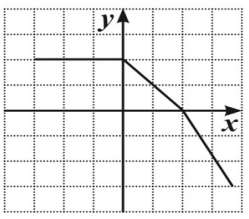
في التمارين (6–11)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) أيًّا مما يلي لا يمثل بيان دالة:

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(7) مجال الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}/\{1\}$ (c) $\mathbb{R}/\{-1,1\}$ (d) $\mathbb{R}/\{-1\}$

(8) مجال الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ هو:

(a) $\mathbb{R}/\{0\}$ (b) $[0,\infty)$ (c) $(-\infty,0)$ (d) $(0,\infty)$

(9) مجال الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}$ هو:

(a) $\mathbb{R}/\{1\}$ (b) $\mathbb{R}/\{0,1\}$ (c) $\mathbb{R}-\{0\}$ (d) $(0,\infty)/\{1\}$

(10) مجال الدالة $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ هو:

(a) $(0,\infty)$ (b) $[1,\infty)$ (c) $(-1,\infty)$ (d) $[-1,\infty)/\{0\}$

(11) لتكن $g:[-2,2]\to\mathbb{R}, g(x)=x^2$. $f(x)=x\sqrt{x}$. فإن مجال الدالة $f\circ g$ هو:

(a) $[-2,2]$ (b) $[0,2]$

(c) $(0,2)$ (d) ليس أيًّا مما سبق صحيحًا

الدالة الخطيّة تكون من الدرجة الاولى

تعريف الدالة الخطية:

الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$f(x)=ax+b$

أو $y=ax+b$

حيث $a\in\mathbb{R}$ ، $a\neq 0$

و $b\in\mathbb{R}$ تسمى دالة خطية وبيانها خط مستقيم.

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:

$$f(x)=ax^2+bx+c,\quad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a: حد من الدرجة الثانية — b: حد من الدرجة الأولى — c: حد مطلق (ثابت)

حاول ان تحل

حدّد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية.

(a) $f(x)=2x(x-3)$

(b) $f(x)=(x-2)(2x+1)$

(c) $f(x)=(2x+3)^2-4x^2-7x$

(d) $f(x)=3(x^2-4x)-3x^2+4$

كراسة التمارين

في التمارين (1—5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $f(x)=kx^2+x-3$, $k\in\mathbb{Z}$ يمكن أن تكون دالة خطية. (a) (b)

(2) الدالة $f(x)=x+\frac{|x|}{x}$ هي دالة خطية. (a) (b)

(3) النقطة $A(1,6)$ تنتمي إلى منحنى الدالة: $f(x)=(3x)(2x)+6$ (a) (b)

(4) الدالة $y=x(1-x)-(1-x^2)$ هي دالة خطية. (a) (b)

(5) الدالة $f(x)=\pi^2-x$ هي دالة تربيعية. (a) (b)



في التمارين (6—10)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) الدالة التربيعية التي حدها الثابت يساوي -3 فيما يلي هي:

(a) $y=(3x+1)(-x-3)$ (b) $y=x^2-3x+3$

(c) $f(x)=(x-3)(x-3)$ (d) $y=-3x^2+3x+9$

(7) أي دالة مما يلي <u>ليست</u> دالة تربيعية:

(a) $y=(x-1)(x-2)$ (b) $y=x^2+2x-3$

(c) $y=3x-x^2$ (d) $y=-x^2+x(x-3)$

(8) أي نقطة مما يلي تنتمي إلى منحنى دالة $f(x)=3x^2-5x+1$ ؟

(a) $(3,12)$ (b) $(-1,-1)$ (c) $(2,3)$ (d) $(-2,22)$

(9) تكون الدالة $f(x)=(a^2-4)x^2-(a-2)x+5$ دالة تربيعية لكل a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ (c) $\mathbb{R}-\{2\}$ (d) $\mathbb{R}-\{-2\}$



معادلة الدالة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0, 0)$ هي: $y = ax^2$

لإيجاد قيمة a، استخدم إحداثيات نقطة على المنحنى غير نقطة الرأس

معادلة محور تماثل هذا القطع المكافئ هي $x = 0$

حاول ان تحل

كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a $E(4, 2)$



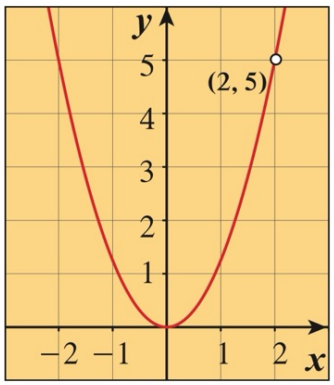
b $D(1, -5)$



حاول ان تحل

2 البيان المقابل يمثل دالة: $y = ax^2$

أوجد معادلة هذه الدالة.





أستاذ نادر الصباغ

معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها

معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h, k)

تكون على صورة $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0,\ h, k \in \mathbb{R}$

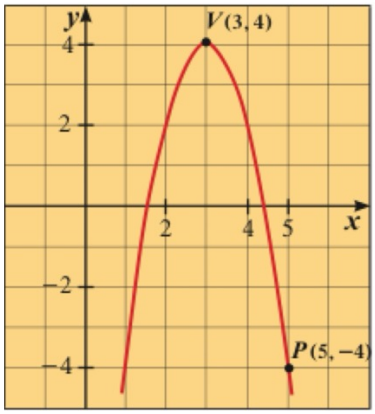
بعض خواص القطوع المكافئة

المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:

- رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$
- تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.
- إذا كان $|a| < 1$، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$
- إذا كان $|a| > 1$، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$

مثال 3

في الشكل المقابل اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3, 4)$ ويمر بالنقطة $P(5, -4)$

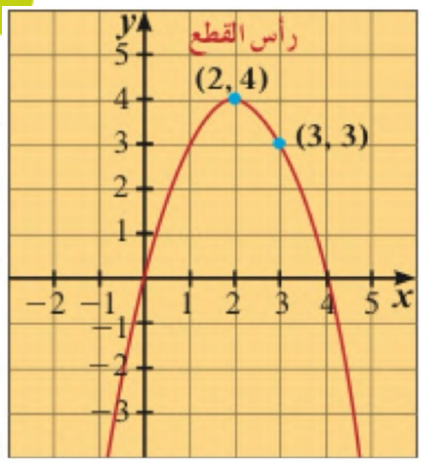


الحل

إمتحان final

حاول ان تحل

3 أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل



الحل

إمتحان final

أكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(-3\ ,4)$ ويمر بالنقطة $P(-1\ ,0)$

الحل

أستاذ نادر الصباغ

يمكن استخدام خصائص القطوع المكافئة لرسم بيان الدالة التربيعية

خطوات الرسم

- نوجد راس القطع (h,k)
- نوجد معادلة محور التماثل. X =h
- نحدد فتحة القطع لاعلى أم لاسفل
- نوجد نقطة على القطع بوضع x=0 ونوجد قيمة y
- نوجد انعكاس هذة النقطة على محور التماثل

مثال 4 ارسم منحنى الدالة: $y = 2(x+1)^2 - 2$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.

الحل

حاول ان تحل

4 ارسم منحنى الدالة: $y = (x+3)^2 + 1$.

الحل

مثال 5 ارسم منحنى الدالة : $y = -0.5(x-2)^2+3$ مستخدماً خواص القطوع المكافئة

إمتحان final

الحل

حاول ان تحل

5 ارسم منحنى الدالة: $y = -2(x-3)^2-1$

الحل

أستاذ نادر الصباغ

- إذا كانت النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان دالة فإن النقطة (b, a) تنتمي إلى بيان معكوس هذه الدالة. ولكي ترسم معكوس الدالة بيانيًا اعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة.

- معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية ايضاً
- مدى العلاقة r هو مجال معكوس هذه العلاقة ومجال r هو مدى معكوسها
- المستقيم $y = x$ هو خط انعكاس لبيان S وبيان معكوسها.

مثال 1 ارسم بيان الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ ومعكوسها ثم اكتب معادلة المعكوس.

الحل

حاول ان تحل

1 ارسم الدالة $y = -3x + 5$ ومعكوسها، ثم اكتب معادلة المعكوس

الحل



طريقة أخرى لإيجاد معكوس الدالة جبريًا وهي التبديل بين متغيرات الدالة y ,x ثم الحل بالنسبة إلى y
إذا كانت الدالة تستخدم الرمز $f(x)$ عوّض عن $f(x)$ بـ y



أوجد معكوس الدالة $y = 5x - 4$



حاول ان تحل

a $y = \frac{2x-1}{3}$

أوجد معكوس الدالة



b $y = 2(x+1) - 3$



أوجد معكوس الدالة $f(x) = (x+3)^2 - 4$





كراسة التمارين

(7) $y = \dfrac{x+5}{3}$ اكتب معادلة المعكوس

الحل

إمتحان final

أوجد معكوس الدالة:

$y = \sqrt[5]{x+3}$

الحل

مثال 3

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = x^2 + 3$

الحل

إمتحان final

أوجد معكوس الدالة $y = 5x + 15$

أستاذ نادر الصباغ

دوال الجذر التربيعي

المعادلة $y = \sqrt{x}$ دالة جذر تربيعي. مجالها $[0, \infty)$. والمدى هو $[0, \infty)$ لأن $y \geq 0$

التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $y = \sqrt{x - h} + k$

ينتج من إزاحة لبيان دالة المرجع $y = \sqrt{x}$ كالتالي:

- عندما تكون k, h موجبتين فإن الإزاحة تكون بعدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى.
- وعندما تكون h سالبة يزاح البيان إلى اليسار.
- وعندما تكون k سالبة يزاح البيان إلى الأسفل.

التركيز يحوّل العلم لحقيقة

مثال 4

ارسم الدالة: $y = \sqrt{x - 4} - 2$ ، وعيّن المجال والمدى للدالة.

الحل

حاول ان تحل 4 a

ارسم بيانيًا: $y = \sqrt{x - 2} + 1$

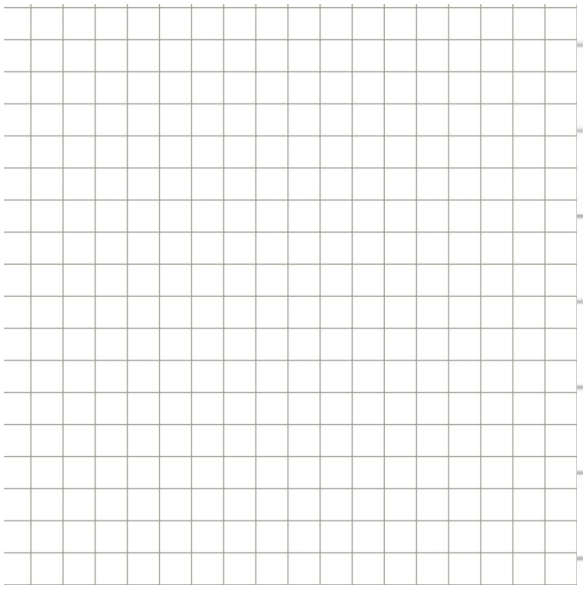
عيّن المجال والمدى للدالة.

الحل

كراسة التمارين ارسم كل دالة جذر تربيعي. ثم اذكر المجال والمدى.

(14) $y = -\sqrt{x+3} - 2$

الحل



التركيز
يحول العلم لحقيقة

في التمارين (5–1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت النقطة $M(x, y)$ تنتمي لبيان الدالة f فإن النقطة $N(y, x)$ تنتمي لبيان معكوس هذه الدالة. (a) (b)

(2) إذا كانت $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$ فإن الدالتين كل منهما معكوس للأخرى. (a) (b)

(3) المستقيم $y = x$ هو خط انعكاس لبيان دالة f وبيان معكوسها. (a) (b)

(4) إذا مر بيان دالة بنقطة الأصل فإن بيان معكوسها يمر أيضًا بنقطة الأصل. (a) (b)

(5) لا يتغير مجال دالة الجذر التربيعي بعد إزاحة بيانها 3 وحدات يمينًا. (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة:

(6) إذا انتمت النقطة $A(2, 3)$ إلى بيان دالة فإن النقطة التي تنتمي إلى بيان معكوس تلك الدالة هي:

(a) $(-2, 3)$ (b) $(2, -3)$ (c) $(3, -2)$ (d) $(3, 2)$

(7) بيان الدالة $y = \sqrt{x+2} - 2$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = \sqrt{x}$:

(a) وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأعلى (b) وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأسفل

(c) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأعلى (d) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأسفل

(9) معكوس الدالة $y = 5x - 1$ هو:

(a) $y = 5x + 1$ (b) $y = \frac{x+1}{5}$

(c) $y = \frac{x}{5} + 1$ (d) $y = \frac{x}{5} - 1$

(10) مجال معكوس الدالة $y = \sqrt{x+3} - 1$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $(-1, \infty)$

(c) $(-\infty, 1)$ (d) $[-1, \infty)$



مثال 1 أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 - x - 6 < 0$.



حاول ان تحل

إمتحان final

1 أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

الحل

إمتحان final

أوجد مجموعة حل المتباينة : $x^2 + 4x + 3 < 0$

مثال 2 أوجد مجموعة حل المتباينة: $-x^2 + 7x - 10 \leq 0$

الحل

إمتحان final $-x^2 + 5x - 6 > 0$

حاول ان تحل 2 أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المتباينة: $-2x^2 + 5x - 3 > 0$

الحل

إمتحان final أوجد مجموعة حل المتباينة : $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$

أستاذ نادر الصباغ

إمتحان final

أوجد مجموعة حل المتباينة : $x^2 - 4 \geq 0$



إمتحان final

أوجد مجموعة حل المتباينة

$x^2 - 7x - 3 \leq 5$



إمتحان final

أوجد مجموعة حل المتباينة :

الحل

$$(x-3)(2x+5)>0$$

مثال4

أوجد مجال كل دالة مما يلي

الحل

تطبيق على مجال الدالة

a $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

إمتحان final

b $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

الحل

حاول ان تحل

4 b أوجد مجال كل دالة مما يلي:

1 $h(x)=\sqrt{x^2-x}$

الحل

2 $q(x)=\sqrt{9-x^2}$



مثال 5 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$



نادر الصباغ

حاول ان تحل

5 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

الحل

حاول ان تحل

6 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2+5x}{x+3} > -2$.

الحل

نادر الصباغ

مثال 7 أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{x^2-5x+6}{x-3} > 0$

الحل

حاول ان تحل

7 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-49}{x+7} \leq 0$.

الحل

إمتحان final

أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{2x+6}{x+2} \geq 0$

الحل

إمتحان final

$\frac{x+3}{x+2} \geqslant 0$

إمتحان final

أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{3x+7}{x+2} \geq 0$

الحل

تكون دوال القوى على الشكل:

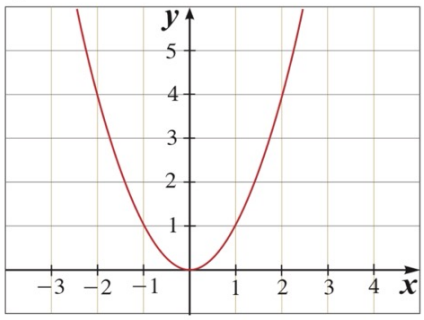
$y = ax^n \;,\; a \neq 0 \;,\; n \in \mathbb{Z}^+$

(1) $y = \sqrt{x^4}$ دالة قوى (b) (a)

(2) $y = x\sqrt{x}$ دالة زوجية (b) (a)

إمتحان final

الدالة الزوجية والدالة الفردية



تعريف

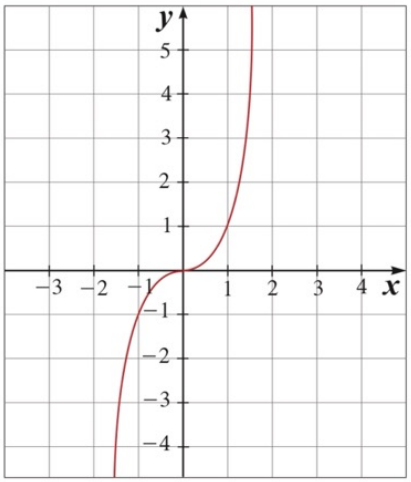
تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:

1 $\forall x \in D \;,\; -x \in D$

2 $f(-x) = f(x)$

في مستوى الإحداثيات، المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية.

فمثلاً: $\forall x \in \mathbb{R}$ $h(x) = x^4 \;, f(x) = x^2$، هما دالتان زوجيتان مجال كل منهما $\mathbb{R}$.



تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة فردية

إذا وفقط إذا كان:

1 $\forall x \in D \;,\; -x \in D$

2 $f(-x) = -f(x)$

في مستوى الإحداثيات نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.

فمثلاً: $\forall x \in \mathbb{R}$، الدالة: $f(x) = x^3$ هي دالة فردية.

مثال 3 بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f(x) = 2x^7$

b $y = -x^8$

c $y = (x+2)^2$

d $h(x) = 4$

أستاذ نادر الصباغ

حاول ان تحل

3 بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f_1(x) = x^5$

b $f_2(x) = x$

c $f_3(x) = 2x^4$

d $f_4(x) = (x+3)^3$

معكوس العلاقة (r^{-1})

- إذا كانت علاقة r تربط عنصرًا a من المجال بعنصر b من المدى، فمعكوس العلاقة يربط العنصر b بالعنصر a.
- إذا كان (a, b) عنصرًا من العلاقة r فإن (b, a) هو عنصر من معكوس العلاقة r^{-1}.
- مجال معكوس العلاقة (r^{-1}) هو مدى العلاقة r.
- المستقيم الذي معادلته $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.



- المستقيم الذي معادلته $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.

ⓐ ⓑ

- **إذا انتمت النقطة $A(2, 3)$ الى بيان دالة فإن النقطة التي تنتمي الى بيان معكوس تلك الدالة هي**

إمتحان final

ⓐ $(-2, 3)$ ⓑ $(2, -3)$ ⓒ $(3, -2)$ ⓓ $(3, 2)$

إمتحان final

مثال 5

أوجد معكوس الدالة: $y = 2x^4$

إمتحان final

5 أوجد معكوس الدالة: $y = 5x^3$



مثال6 أوجد معكوس الدالة: $f(x)=\sqrt{x+2}$

6 أوجد معكوس الدالة: $f(x)=\sqrt{x-4}$

3-2 الدوال الحدودية

دالة كثيرة حدود

$P(x)=\boxed{2}x^3-5x^2-2x-5$

المعامل الرئيسي | حد تكعيبي | حد تربيعي | حد خطي | حد ثابت

انتبه

تكون الدالة كثيرة الحدود فى الصورة العامة

عندما تكون الحدود مرتبة تنازلى حسب درجة كل حد فيها

مثال1 اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

a $-7x+5x^4$ b $5x^3-(4x^2+5x^3)+2x^2$ c $(2l-5)(l^2-1)$

الحل

1 اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

حاول ان تحل

a $4x-6x+5$ b $3x^3+x^2-(4x+2x^3)$ c $6-2x^5$

مثال اكتب التعبير: $(x+5)(x+2)(x+1)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

الحل

حاول ان تحل 1 اكتب التعبير: $(x-2)(x+1)(x+1)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

الحل

حاول ان تحل 2 حلّل كثيرة الحدود: $12x^3 - 12x^2 + 3x$ إلى عوامل

الحل

نظرية العامل

المقدار $(x-a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود.

مثال 5 اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: 3 , 3 , -2 في الصورة العامة

الحل

نادر الصباغ

حاول ان تحل 5

c اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكرر مرتين و 1− صفر بسيط.

الحل

3-4 قسمة كثيرات الحدود

القسمة المطولة

مثال 1

اقسم:

a x^2+6x+8 على $(x+4)$

الحل

حاول ان تحل

b $x-8 \overline{)\,2x^2-19x+24}$

الحل

مثال 2

تحقق ما إذا كان $(x+4)$ عامل من عوامل كثيرة حدود باستخدام القسمة المطولة

b x^3+64

الحل

حاول ان تحل

2 تحقق ما إذا كان كل مقسوم عليه هو من عوامل المقسوم.

b $(x^3-x+1)\div(x+1)$

الحل

نادر الصباغ

القسمة التركيبية

إمتحان final

مثال 3

استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3-3x^2-6x+8 على $(x+2)$ ثم أوجد باقي العوامل.

الحل

حاول ان تحل

3 a استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3-2x^2-5x+6 على $(x+2)$

b استخدم الإجابة في a لتحليل x^3-2x^2-5x+6 إلى عوامل.

الحل

حاول ان تحل

4 استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3+4x^2+x-6 على $(x+1)$

الحل

نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x-a)$ حيث a ثابت، فإن باقي القسمة هو $f(a)$

مثال 7

باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة $f(x)=x^4-5x^2+4x+12$ على $(x+4)$

ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

إمتحان final

الحل

حاول ان تحل

7 استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x)=2x^4+6x^3-5x^2-60$ على $(x+1)$، ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

الحل

نادر الصباغ

عن طريق

التحليل | التحليل بالتقسيم | الاصفار النسبية الممكنة

حل المعادلات بالتحليل

مثال 1 أوجد مجموعة حل المعادلة $3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$ بالتحليل

الحل

حاول ان تحل

1 a أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ بالتحليل.

الحل

حاول ان تحل

2 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

a $2x^3 = 3x - 5x^2$

الحل

b $x^3 - x^2 - 3x = 0$

الحل



التحليل بالتقسيم

إمتحان final

مثال 3 أوجد مجموعة حل المعادلة:

a $x^3 + 3x^2 = x + 3$

الحل

b $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

الحل

حاول ان تحل

إمتحان final

3 أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

الحل

إمتحان final كراسة التمارين

(11) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ **أوجد مجموعة حل المعادلة**



الاصفار النسبية الممكنة

تظهر أهمية هذه النظرية إذا أردنا معرفة أصفار حدودية ولا يمكننا استخدام طريقة التحليل أو التقسيم.

إمتحان final

a أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$



إمتحان final

b $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$



حاول ان تحل

4 أوجد مجموعة حل المعادلة:

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ 1

الحل

إمتحان final

إمتحان final كراسة التمارين

استخدم الأصفار النسبية الممكنة لايجاد مجموعة حل المعادلة :

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

الحل

إمتحان final كراسة التمارين

أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

الحل

إمتحان final

حل المعادلة : $x^3+2x^2-x-2=0$ باستخدم نظرية الاصفار النسبية الممكنة

الحل

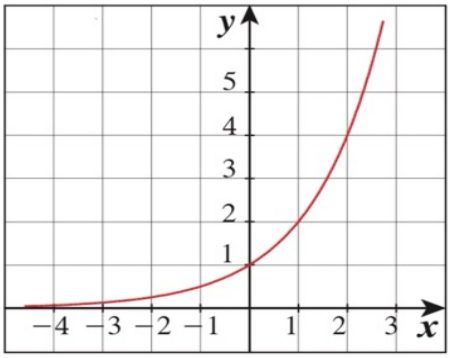
نادر الصباغ
التركيز يحول العلم لحقيقة

الدالة: $y = ab^x$ (عدد ثابت)
(الأساس)

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
$$a \in \mathbb{R}^*$$
$$b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

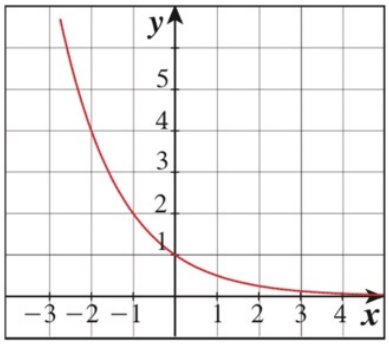
تسمى دالة أسية.

نمو أسي



عندما تكون $b > 1$، فإن الدالة تمثل نموًّا أسيًّا، وتكون b هي عامل النمو.

تضاؤل أسي



عندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا، وتكون b هي عامل التضاؤل.

مثال 1

مثل بيانيا الدالة: $y = 2^x$. ثم بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاولاً أسياً وحدد العامل.

الحل



حاول ان تحل

1 مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية، ثم بيّن ما إذا كانت تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

a $y = 4(2)^x$

b $y = 3^x$

مثال2

مثل بيانيا الدالة: $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$.ثم بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاولاً أسياً وحدد العامل.

الحل

حاول ان تحل 2 مثّل بيانيًّا ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

a $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

الحل

مثال4 اكتب دالة أسية: $y = a\,b^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $Q(3\,,16)$ ، $P(2\,,4)$

الحل

حاول ان تحل 4 اكتب دالة أسية بالصورة $y=ab^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $S(3,16)$ ، $H(2,4)$

الحل

استاذ نادر الصباغ

التمثيل البياني للدوال الأسية

نلاحظ أن بيان الدالة $y = b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور الصادي.

بيان الدالة $y = -b^x$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور السيني.



في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) جميع الدوال الأسية على الصورة: $y = ab^x \quad a \neq 0 \ , \ b > 0, \ b \neq 1$ متقاطعة. (a) (b)

(2) بيان الدالة $y = -2^x$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة $y = 2^x$ (a) (b)

(3) بيان الدالة $y = -(3)^x$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة $y = -(3)^{-x}$ (a) (b)

(4) بيان الدالة $y = 3(5)^{x-2}$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = 3(5)^x$ بمقدار وحدتين جهة اليمين. (a) (b)

(5) بيان الدالة $y = 3(2)^x$ يقطع جزءًا من محور الصادات قدره 3. (a) (b)

التمثيل البياني للدوال الأسية

مثال 4 مثّل بيانيًّا كل من: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

الحل



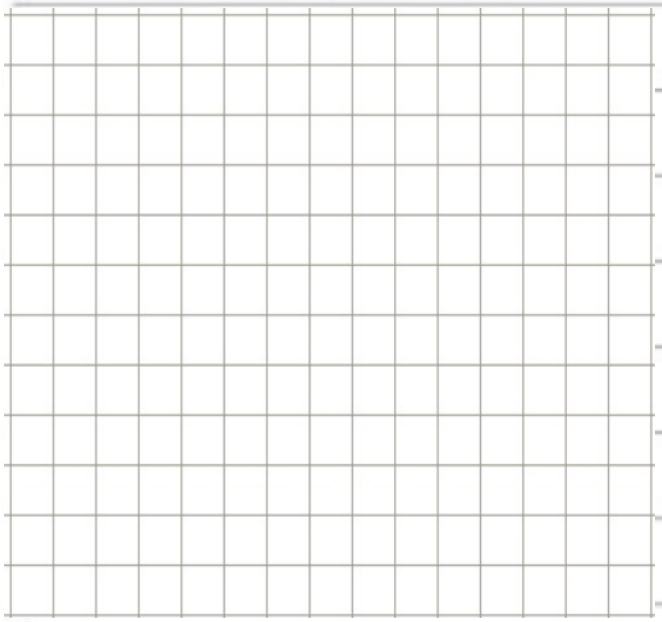


حاول ان تحل

2 a مثّل بيانيًّا في نفس المستوى الإحداثي.

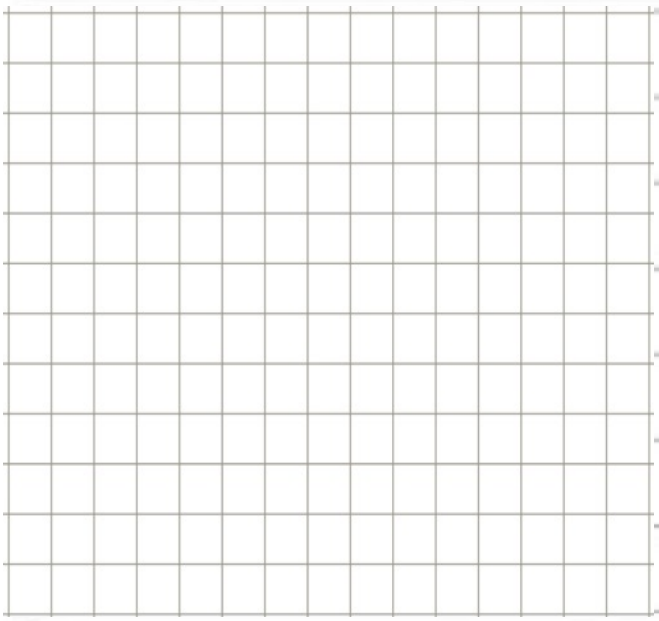
1 $y=-4(2)^x$ 2 $y=4(2)^x$

الحل



مثال3 مثل بيانيا الدالة: $y_1=8\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ومنها مثل بيانيا الدالة: $y_2=8\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$

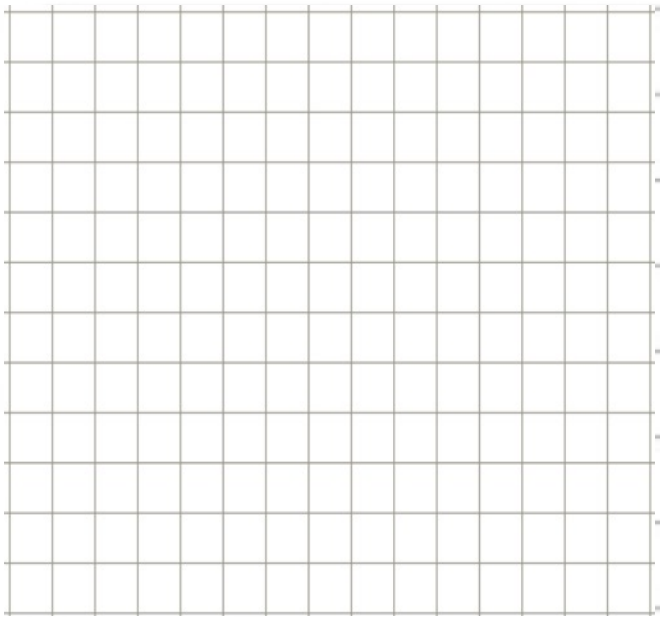
الحل



إمتحان final

مثل بيانيا الداله: $y_1 = 2^x$ ومنها مثل بيانيا الداله: $y_2 = (2)^{x+3} - 2$

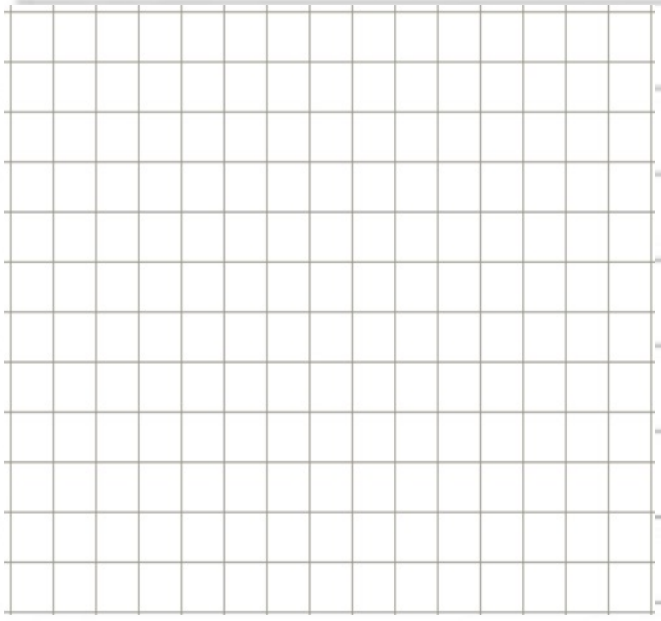
الحل



إمتحان final

مستخدما دالة المرجع مثل بيانيا الدالة : $y = (3)^{x-3} + 1$

الحل



إمتحان final

مثل بيانياً الدالة : $y = 2^{x-1} + 2$ مستخدماً دالة المرجع

الحل

إمتحان final

مستخدماً دالة المرجع مثل بيانياً الدالة الأسية التالية : $y = 3^{x+4}$

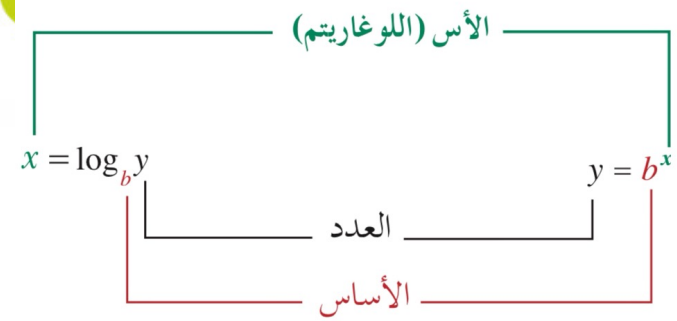
الحل

تعريف

يتعين عدد حقيقي x بحيث يكون:

$\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$y = b^x \iff \log_b y = x$



تدريب

أكمل الجدول التالي:

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$10^3 = 1\,000$	$\log_{10} \dots = \dots$
$3^5 = 243$	$\log_3 \dots = \dots$
$4^{\dots} = \dots$	$\log_4 2 = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	
...	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$
$12^0 = 1$	...

ملاحظة:

$\log x$ هو اللوغاريتم المعتاد ذو الأساس 10 أي: $\log_{10} x$ تكتب $\log x$

فمثلاً: $\log_{10} 4 = \log 4$

الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.

التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية



كل من المنحنيين المرسومين انعكاس للآخر في الخط المستقيم $y = x$.

تعريف: الدالة اللوغاريتمية

$\forall x > 0 \ , \ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = \log_b x$

فإن الدالة:

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b



مثال 4 أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a $y = \log_5 (6x)$

b $f(x) = \log(3 - x)$

c $g(x) = \log_2 (x^2)$

d $h(x) = 4\log_3 (5 - 3x)$



حاول ان تحل **4** أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a $y = 2 + \log_5(x-2)$

b $f(x) = \log_4(x^2+1)$

c $g(x) = \log_7(1-x)$

كراسة التمارين

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 3^x$ فإن $x = \log y$ (a) (b)

(2) إذا كانت $\log_2(-y) = x$ فإن $y = 2^{-x}$ (a) (b)

(3) إذا كانت $4^x = 5$ فإن $2x = \log_2 5$. (a) (b)

(4) مجال الدالة $f(x) = \log(x^2)$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

(5) بيان الدالة $y = \log_3 x$ هو انعكاس في المستقيم $y - x = 0$ لبيان الدالة $y = 3^x$ (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس الدالة $y = \log_2 x$ هو:

(a) $y = \log_x 2$ (b) $y = x^2$ (c) $y = 2^x$ (d) $y = \log 2^x$

(7) مجال الدالة $y = \log|x-1|$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $(1,\infty)$ (d) $\mathbb{R}/\{1\}$

(8) مجال الدالة $y = \log(x^2+1)$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $[1,\infty)$ (d) $(1,\infty)$

أستاذ نادر الصباغ

مثال 5 استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_2 x$ ومعكوسها.

الحل

حاول ان تحل

5 استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_3 x$ ومعكوسها.

الحل

استاذ نادر الصباغ



التمثيل البياني للدالة: $y = \log_b (x-h)+k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع: $y = \log_b x$، h وحدة أفقيًا، k وحدة رأسيًا.

مثال

ارسم بيان الدالة: $y = \log_6 (x+2) - 3$ مستخدمًا دالة المرجع.

إمتحان final

الحل

حاول ان تحل

6 ارسم بيان الدالة: $y = \log_3 (x-3) + 1$ مستخدمًا دالة المرجع.

الحل



خواص اللوغاريتمات

$\forall m, n, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

خاصية الضرب: $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة: $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى: $\log_b m^k = k \log_b m \ , \ k \in \mathbb{R}$

ملاحظات:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b b^m = m$

حيث b , m عددان حقيقيان موجبان $b \neq 1$

حاول ان تحل

1 a أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد.

1. $\log_5 2 + \log_5 6$
2. $3\log_b 4 - 3\log_b 2$
3. $4\log_3 2 - \log_3 5 + \log_3 10$

مثال 2 أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث x , y عددان حقيقيان موجبان.

a $\log_5\left(\frac{x}{y}\right)$

b $\log(3x^4)$

c $\log\sqrt{\frac{25}{x}}$

حل معادلات أسية

لحل معادلات أسية يمكننا أخذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ , m \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$
$$a = b \iff \log_m a = \log_m b$$

مثال 1 حل المعادلة التالية، ثم تحقق: $7^{3x} = 20$

الحل

حاول ان تحل

1 حل كل معادلة مما يلي مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من ألف:

a $3^x = 4$

b $6^x = 21$

c $3^{x+4} = 101$

حاول ان تحل

a $t^{\frac{7}{2}} = 128 , \ t > 0$

الحل

b $\sqrt[3]{u^4} - 5 = 11 , \ u > 0$

نادر الصباغ

لحساب اللوغاريتم لأي أساس موجب لا يساوي الواحد، يمكنك استخدام خاصية تغيير الأساس.

قاعدة تغيير الأساس

$$\forall m, b, c \in \mathbb{R}^+,\ b \neq 1,\ c \neq 1$$
$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

مثال 3

استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة $\log_3 15$ ثم حوّل $\log_3 15$ إلى لوغاريتم للأساس 2

الحل

حاول ان تحل

3 a أوجد قيمة $\log_3 400$ ثم حوّلها إلى لوغاريتم للأساس 8

الحل

حاول ان تحل 4 استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة: $7^{5x} = 3000$

الحل

حل معادلات لوغاريتمية

كل معادلة تتضمن تعبيرًا تعبيرًا لوغاريتميًّا تسمى معادلة لوغاريتمية ووضعها على الصورة:

$\log_b y = x \qquad \forall\, y, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

ويكون حلها بما يحقق هذه الشروط لذا يتوجب إيجاد مجال التعريف (شرط الحل) أو التحقق من القيم الناتجة.

مثال 5 حل المعادلة: $\log(3x+1) = 5$

الحل

حاول ان تحل 5 حل المعادلة: $\log(7-2x) = -1$

الحل

استاذ نادر الصباغ

في بعض الحالات، عليك استخدام خواص اللوغاريتمات لتبسيط التعابير قبل حل المعادلة.

مثال 6 إمتحان final

حل المعادلة: $2\log x - \log 3 = 2$

الحل

حل المعادلة : $\log x^2 - \log 3 = 2 \quad , \quad x \in (0, \infty)$

حاول ان تحل

6 حل المعادلة: $\log 6 - \log 3x = -2$

الحل

مثال 7 إمتحان final

حل المعادلة: $x \in (1, \infty)$, $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$ b

الحل

نادر الصباغ

c $\log_{x+1} 32 = 5 \ , \ x \in (0, \infty)$

الحل

حاول ان تحل

7 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

إمتحان final

a $\log x^2 - \log(x^2 - x) = 1 \ , \ x \in (1, \infty)$

الحل

b $\log_4(x+6) - \log_4 12 = \log_4 2 - \log_4(x-4), \quad x \in (4, \infty)$

الحل

كراسة التمارين

حل المعادلة : $log_{(2x-1)}\ 49 = 2 \quad , \quad x \in (1, \infty)$

الحل

إمتحان final

حل المعادلة : $log_{2x-1} 49 = 2 \ , \ x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right) / \{1\}$

إمتحان final

أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$log(x) + log(x-3) = log\ 4, \quad x \in (3, \infty)$$

إمتحان final

أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$log(x+21) + logx = 2 \quad , x \in (0, \infty)$$

الحل

كراسة التمارين

إمتحان final

أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$\log(2x) + \log(x-3) = \log 8 \quad , \quad x \in (3, \infty)$$

الحل

إمتحان final

حل المعادلة التالية : $\log x - \log(x-1) = 1$

الحل



تدريب

أكمل ما يلي حيث $k, m, n \in \mathbb{R}^+$.

1. $\ln(mn) =$ ..... (..... خاصية)
2. $\ln \frac{m}{n} =$ ..... (..... خاصية)
3. $\ln m^k =$ ..... (..... خاصية)
4. $\ln e =$ .....
5. $\ln e^k =$ .....
6. $e^{\ln k} =$ .....

مثال 1 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $8e^{2x} = 20$

الحل

حاول ان تحل 1 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $e^{4(x+1)} = 32$.

الحل



مثال 3 حل المعادلة: $ln(3x+5)=4$

الحل

حاول ان تحل

3 حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $e^{\frac{2x}{5}}+7.2=9.1$

الحل

b $5+ln\left(\frac{x+2}{3}\right)=7$

الحل

مثال 4 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل $7e^{2x} + 2.5 = 13$

الحل

حاول ان تحل

4 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المعادلتين التاليتين:

a $e^{x+1} = 30$

الحل

b $2^{2x-3} + 4 = 7$

الحل

إمتحان final

كراسة التمارين

إمتحان final

حل المعادلة التالية :

(20) $ln(4x-1)=36$

الحل

إمتحان final

حل المعادلة :

$ln\ (4x-1)=3$

الحل

إمتحان final

حل المعادلة : $ln\ (4x-1)=5$

كراسة التمارين

إمتحان final

حل المعادلة :

$\frac{1}{2}ln\ x+ln\ 2-ln\ 3=3 \quad ,x\in(0,\infty)$

الحل

نادر الصباغ

كراسة التمارين

إمتحان final

حل المعادلة : $2e^{(3x-2)} + 4 = 16$

الحل

إمتحان final

حل المعادلة: $9\,e^{2x} - 3 = 24$

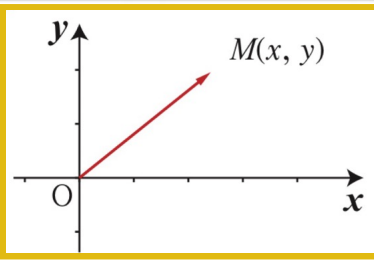
الحل

كراسة التمارين

حل المعادلة: $ln(x-1)^2 = 3$

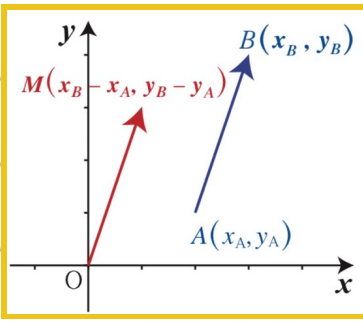
الحل

متجه الموضع



تعريف

القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها $M(x\ ,y)$ تسمى «متجه الموضع» ويمثّلها الزوج المرتب $(x\ ,y)$



تعريف

$\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي

حيث $A(x_A, y_A)\ ,\ B(x_B, y_B)$

متجه الموضع لهذه القطعة هو القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$

حيث $M(x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A)$

مثال 1

1 ليكن: $A(1,-3),\ B(2,2),\ C(2,3),\ D(-2,-1)$

a عيّن الزوج المرتب الذي يمثّل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BD}$

b متجه الموضع $\overrightarrow{DC}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{KD}$. أوجد إحداثيات K

الحل

تكافؤ قطعتين موجهتين تكون القطعتان الموجهتان متكافئتان إذا كان لهم نفس الطول ونفس الاتجاه

إذا كان $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع حيث (x_M, y_M) ، فيرمز لهذا المتجه بالرمز $\vec{M}$
ويكتب على الصورة $\vec{M} = \langle x_M, y_M \rangle$ وتسمى x_M, y_M مركبتي المتجه $\vec{M}$
x_M المركبة الأفقية (السينية)، y_M المركبة الرأسية (الصادية) للمتجه $\vec{M}$

حاول ان تحل

2 إذا كانت $F(5, 13), E(3, 11), D(-2, -7)$

فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية: $< \overrightarrow{DE} >$, $< \overrightarrow{ED} >$, $< \overrightarrow{EF} >$

الحل

طول (معيار) متجه واتجاهه

تعريف

لكل متجه $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع حيث، فيرمز للسنجان، والفيثي متبو $M(x_M, y_M)$ فيرمز $\vec{M}$ وكتب مركبتي $\vec{U}$ x_M ، y_M

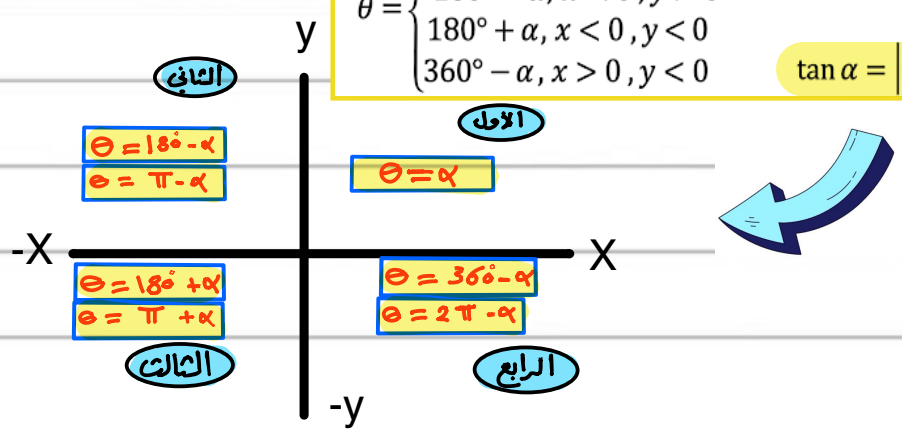
لكل متجه $\vec{U}$ x, y = معيار (طول) $\vec{U}$، $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ويعطى بالعلاقة:

يحدد اتجاه المتجه $\vec{U}$ بالزاوية الموجبة θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث $360° \leq \theta < 360°$.

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha, & x > 0, y > 0 \\ 180° - \alpha, & x < 0, y > 0 \\ 180° + \alpha, & x < 0, y < 0 \\ 360° - \alpha, & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

وتحدد زاوية الإسناد α بالعلاقة: $\tan \alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$



نادر الصباغ
التركيز يحول الحلم لحقيقة

حاول ان تحل 3 أوجد معيار المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

a $\vec{m} = < 2, 2 >$

الحل

b $\vec{n} = < -1, -2 >$

c $\vec{p} = < -2, 3 >$

الحل

d $\vec{q} = < 1, -4 >$

إذا كان المتجه $\overrightarrow{t} = \langle -1 , -3 \rangle$ أوجد:

إمتحان final

(i) طول المتجه $\overrightarrow{t}$

(ii) قياس الزاوية θ التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{t}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

متجه الوحدة

تعريف

المتجه $\vec{U} = < x,y >$ هو متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الوحدة أي أن:

$$\| \vec{U} \| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$



- فمثلًا $< 1,0 >$ ، $< 0,1 >$ ، $< -1,0 >$ ، $< \frac{4}{5}, \frac{3}{5} >$ متجهات وحدة.
- المتجه $< 0,0 >$ هو متجه معياره صفر وليس له اتجاه معلوم ويرمز له بالرمز $\vec{0}$.
- لكل نقطة A في المستوى يكون $\overrightarrow{AA}$ متجها صفريًا.

مثال 4 إذا كان $\vec{u} = < \frac{2}{\sqrt{5}}, y >$ فأوجد قيمة y بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

الحل

حاول ان تحل

4 إذا كان $\vec{v} = < x \ , \ \frac{12}{13} >$. فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{v}$ متجه وحدة.

الحل

استاذ نادر الصباغ

كراسة التمارين

ليكن $\vec{u} = \langle x, 4 \rangle , \vec{v} = \langle 2, -3 \rangle$ اوجد قيمة x بحيث يكون $\|\vec{u}\| = 5$ units

إمتحان final

الحل

تساوي متجهين

ليكن: $\overrightarrow{A} = < x_A , y_A > , B = < x_B , y_B >$

$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \iff x_A = x_B \ , \ y_A = y_B$

حاول ان تحل

5 إذا كانت $A(0,1), B(1,3), C(3,6), D(4,8)$ في المستوى الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$

الحل

حاول ان تحل

6 ليكن المتجهان $\overrightarrow{B} = < -1, 3 > , \overrightarrow{A} = < -2x + 3, 4y - 1 >$، حيث y , x عددان حقيقيان.

أوجد قيمتا y , x اللتين تحققان $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$.

الحل



خواص

1. يكون للمتجهين غير الصفريين $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ الاتجاه نفسه إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k يحقق $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$
2. يكون للمتجهين غير الصفريين $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ اتجاهين متعاكسين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي سالب k يحقق $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$
3. تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير صفري k يحقق $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

- المتجه $\overrightarrow{BA}$ هو متجه معاكس للمتجه $\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

حاول ان تحل

9 باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $M(-2,-5)$, $L(2,3)$, $K(0,-1)$ على استقامة واحدة.

الحل

5-2 جمع المتجهات وطرحها

جمع المتجهات هندسيا

لأي ثلاث نقاط في المستوى العلاقة: $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{LN}$ علاقة شال.

مثال 3

ABC مثلث. أوجد:

الحل

a $\vec{L}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$

b $\vec{K}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$

حاول ان تحل

3 $ABCD$ مضلع. أوجد:

a $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CD}>+<\overrightarrow{BC}>$

b $<\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{DB}>$

مجموع متجهين جبرياً

تعريف

إذا كان $\vec{A}=<x_A,y_A>$, $\vec{B}=<x_B,y_B>$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن مجموع هذين المتجهين هو المتجه $<x_A+x_B,y_A+y_B>$ ويرمز له بالرمز $\vec{A}+\vec{B}$

أي أن: $\vec{A}+\vec{B}=<x_A+x_B,y_A+y_B>$

حاول ان تحل

4 إذا كان $\vec{A}=<4,-2>, \vec{B}=<-7,5>$ فأوجد.

a $\vec{A}+\vec{B}$

b $3\vec{A}+5\vec{B}$

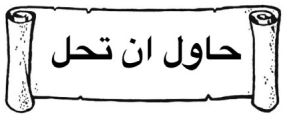


طرح المتجهات

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$



- المتجه $<\overrightarrow{BA}>$ هو متجه معاكس للمتجه $<\overrightarrow{AB}>$
- $<\overrightarrow{AB}>=-<\overrightarrow{BA}>$



5 $ABCD$ مضلع في المستوي. أوجد:

a $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CD}>-<\overrightarrow{AD}>-<\overrightarrow{CB}>$

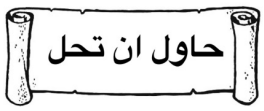
b $<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AD}>$

طرح المتجهات جبرياً

تعريف

إذا كان $\vec{A}=<x_A,y_A>,\vec{B}=<x_B,y_B>$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن:

$$<\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})>=<x_A-x_B\,,\,y_A-y_B>$$



6 إذا كان $\vec{A}=<-3,0>,\vec{B}=<5,-9>$. فأوجد:

a $\vec{A}-\vec{B}$



b $-3\vec{A}+4\vec{B}$



التركيز
يحول الحلم لحقيقة

قانون

إذا كان $\vec{A}=<x_A, y_A>, \vec{B}=<x_B, y_B>$ متجهين في المستوي الإحداثي

فإن $\vec{A}\,.\,\vec{B}=x_A.x_B+y_A.y_B$

فإذا كان: $\vec{A}=<x_A, y_A>$ فإن $\vec{A}\cdot\vec{A}=x_A^2+y_A^2=\|\vec{A}\|^2$

نتيجة (1)

$\vec{A}\perp\vec{B}\Leftrightarrow\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ حيث $\vec{A}\neq\vec{0}\ ,\ \vec{B}\neq\vec{0}$

مثال 3

إمتحان final

إذا كانت $A(-2,-3), B(1,1), C(-3,-1)$ هي رؤوس المثلث ABC.

a) اكتب كلًّا من المتجهين $<\overrightarrow{CB}>\ ,\ <\overrightarrow{CA}>$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{j}\ ,\ \vec{i}$.

b) أوجد قيمة $<\overrightarrow{CB}>\cdot<\overrightarrow{CA}>$

c) أثبت أن المثلث ABC قائم في $\hat{C}$

الحل

حاول ان تحل

إمتحان final

3 إذا كانت النقاط $A(6,-1), B(3,2), C(2,1)$

a اكتب كلًّا من المتجهين $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{i}$, $\vec{j}$

b أوجد قيمة $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

c أثبت أن المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

الحل

مثال 4

إذا كان $\vec{A}=<-2,3>, \vec{B}=<1,y>$ وكان $\vec{A} \perp \vec{B}$ فأوجد قيمة y

الحل

حاول ان تحل

4 إذا كان $\vec{A} = < 3, -1 >, \vec{B} = < x, -2 >$ وكان $\vec{A} \perp \vec{B}$ فأوجد قيمة x

الحل

نتيجة (2)

$\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$ حيث $\vec{A} \,//\, \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} = k\vec{B}$

ملاحظة:

$\vec{A} \,//\, \vec{B} \Leftrightarrow x_A \cdot y_B - x_B\, y_A$

حيث: $\vec{A} \neq \vec{0}, \vec{B} \neq \vec{0}$, $\vec{A} = x_A, y_A >, \vec{B} = < x_B, y_B >$

مثال 5

a أثبت أن: $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ حيث $\vec{A} = <-7,5 >$, $\vec{B} = < 14, -10 >$

b إذا كان $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ حيث $\vec{A} = < 6, -8 >$, $\vec{B} = < 2, y >$ فأوجد قيمة y

الحل

حاول ان تحل

5 **a** أثبت أن: $\vec{A} // \vec{B}$ حيث $\vec{A} = < 3, -2 > , \vec{B} = < 6, -4 >$

b إذا كان $\vec{A} // \vec{B}$ ، $\vec{A} = < \frac{7}{3}, \frac{2}{3} > , \vec{B} = < x, \frac{4}{5} >$ فأوجد x

الحل

حاول ان تحل

6 $\vec{A} , \vec{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\| \vec{A} \| = 3 , \| \vec{B} \| = 4 , \vec{A} \cdot \vec{B} = 5$

أوجد قيمة $(3\vec{A} - 2\vec{B}) \cdot (-\vec{A} + 3\vec{B})$

الحل

قياس الزاوية بين متجهين

قانون

إذا كان $\vec{A}, \vec{B}$ متجهين وكان $\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$ فإن:

$$\cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|} \quad , 0^\circ \leq m(\vec{A},\vec{B}) \leq 180^\circ$$

مثال 7

إذا كان $\|\vec{A}\| = 5, \|\vec{B}\| = 6, \vec{A}\cdot\vec{B} = 15$

فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A}, \vec{B})$

الحل

حاول ان تحل

7 إذا كان $\|\vec{A}\| = 3, \|\vec{B}\| = 2, \vec{A}\cdot\vec{B} = -3\sqrt{3}$

فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A}, \vec{B})$

الحل

مثال 8

أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\vec{A} = <2, 2\sqrt{3}>, \vec{B} = <-4, 4\sqrt{3}>$

الحل

حاول ان تحل

8 أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\vec{A} =< 6,3 >, \vec{B} =< 3,-1 >$

الحل

إمتحان final

إمتحان final

اذا كان $\overrightarrow{u} = \langle 2 , 4 \rangle$, $\overrightarrow{v} = \langle x , -3 \rangle$ أوجد:

قيمة x بحيث يكون $\overrightarrow{v}$ متعامد مع $\overrightarrow{u}$

الحل

أستاذ نادر الصباغ

إمتحان final

إذا كان المتجه $\vec{t} = \langle -1 , -3 \rangle$ أوجد:

(i) طول المتجه $\vec{t}$

(ii) قياس الزاوية θ التي يصنعها المتجه $\vec{t}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

إمتحان final

أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين :

$\vec{A} = \langle 2 , 2\sqrt{3} \rangle$, $\vec{B} = \langle -4 , 4\sqrt{3} \rangle$

الحل

إمتحان final

إذا كان : $\vec{u} = < 0 , 2 >, \vec{v} = < 2 , 2 >$

فأوجد : (1) $\|\vec{u}\|$ (2) $\|\vec{v}\|$ (3) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (4) قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{u}, \vec{v}$

الحل

إمتحان final

إذا كان $\vec{B} = < -1, 2 >$ ، $\vec{A} = < 2 ، 3 >$

فأوجد : (1) $2\vec{A} + 3\vec{B}$ (2) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (3) $\| \vec{A} \|$

الحل

أستاذ نادر الصباغ

إمتحان final

إذا كان : $\overrightarrow{A}=<-3\ ,\ 4>$ ، $\overrightarrow{B}=<0\ ,\ 3>$

(1) أوجد $2\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$ (2) أوجد الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}$

الحل

كراسة التمارين

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$، فإن $\vec{u}\perp\vec{v}$ (a) (b)

(2) إذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$, $\vec{u}=<-2,x>,\vec{v}=<5,1>$، فإن $x=-10$ (a) (b)

(3) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{w}=-5,\vec{v}\cdot\vec{w}=3$، فإن $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}=-8$ (a) (b)

(4) إذا كانت $A(-1,2),B(2,3),C(-4,5)$، فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$ (a) (b)

(5) إذا كانت $L(-3,4),M(0,5)$، فإن $\|\overrightarrow{LM}\|=10$ (a) (b)

(6) $\vec{A},\vec{B}$ متجهان في المستوى حيث $\vec{A}=<2,-3>,\vec{B}=<1,0>$ (a) (b)

$$\therefore\ \cos(\vec{A},\vec{B})=2\frac{\sqrt{13}}{13}$$

في التمارين (14–7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(7) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $\vec{u}=<2,-2>,\vec{v}=<-1,m>$، فإن m تساوي:

(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

أستاذ نادر الصباغ

6-1 المجتمع الاحصائي والمعاينة

أ : نادر الصباغ

علم الإحصاء

علم يهتم بجمع البيانات وفرزها وتنظيمها وتصنيفها وعرضها جدولياً أو بيانيًّا وتحليلها واستقراء النتائج بهدف اتخاذ قرارات مناسبة مبنية على استنتاجات.

مراحل البحث الإحصائي هي:

١) جمع البيانات ٢) عرض البيانات "جدولي وبياني" ٣) وصف البيانات وتحليلها ٤) تفسير النتائج واتخاذ قرارات

مثال 1 في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.

a) طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت.

b) الطيور على سطح الأرض.

حاول ان تحل

1) في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.

a) لاعبو فرق كرة السلة في دولة الكويت.

b) مجتمع الأسماك في مياه الخليج العربي.

أساليب جمع البيانات

١) الحصر الشامل: هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة

٢) المعاينة: هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدر اسة.

مثال 2 هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ اذكر السبب.

a) دراسة كمية الدهون الموجودة في الدم.

b) دراسة نسبة عدد الطلاب الذين لون عيونهم أزرق إلى عدد طلاب صفك.

أنواع البيانات

أنواع البيانات	الصفات	أمثلة
بيانات كيفية	اسمية	لون العيون – لون الشعر
	مرتبة	المستوى العلمي – الدرجات التقديرية
بيانات كمية	متقطعة	عدد طلاب الفصل – نقاط مباراة كرة السلة
	مستمرة	أطوال القامات – الأوزان – درجات الحرارة

مثال 3 حدّد نوع البيانات لكل مما يلي:

a عدد أهداف الدوري العام لكرة القدم في أحد المواسم.

b ترتيب الدول بحسب الميداليات التي حصلت عليها في دورة من دورات الألعاب الأولمبية.

c درجات الحرارة في شهر سبتمبر في مطار الكويت.

d لون سيارات معلمي مدرسة ما.

حاول ان تحل

3 حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:

a عدد أعضاء فريق كرة القدم.

b الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر، مدرس، ...)

c أطوال قامات طلاب الصف الحادي عشر.

d تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.

طرق جمع البيانات

- المشاهدة والملاحظة
- الاستبانة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- المقابلة الشخصية
- الوثائق والسجلات
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- قواعد البيانات
- مواقع التواصل الإجتماعي

6-2 العينات

العينة العشوائية هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائيًا بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل

1- العينة العشوائية البسيطة

مثال عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفًا مرقمين من 1 إلى 90. يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

استاذ نادر الصباغ

في إحدى المؤسسات التعليمية يوجد 80 طالبًا مرقمين من 1 إلى 80.
المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها 7 طلاب لدراسة بعض الأمور في المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الأول والعمود الثاني.

2 - العينة العشوائية الطبقية

$$\frac{m}{n} = \text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}$$

حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

مثال2

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة عند الموظفين في إحدى المؤسسات، تم سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 80 فردًا من أصل 1 600 موظف موزعين كما يبين الجدول التالي:

إمتحان final

المجموع	عمال ومستخدمون	تقنيون وفنيون	إداريون
1600	1200	300	100

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

الحل

حاول ان تحل

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفا كما يبين الجدول التالي:

إمتحان final

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

الحل

حاول ان تحل

3 في إحدى المستشفيات يوجد 80 إداريًا مرقمين من 1 إلى 80 ، 140 طبيبًا مرقمين من 81 إلى 220 ، 240 ممرضًا مرقمين من 221 إلى 460، 40 عاملًا مرقمين من 461 إلى 500.

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فردًا لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

الحل

3- العينة العشوائية المنتظمة

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

مثال 5

إمتحان final

يبلغ عدد طلاب إحدى مدارس الكويت 700 طالب مرقمين من 1 إلى 700. أراد مدير المدرسة إرسال 10 طلاب لحضور ندوة حول «حماية الحيوانات المهددة بالانقراض». المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 10 باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث.

الحل

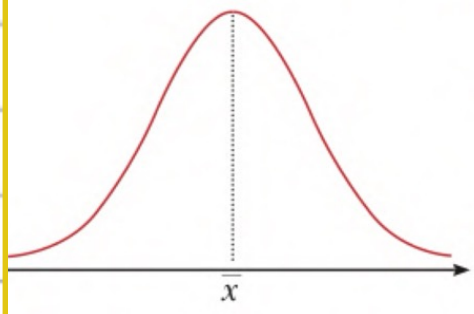
حاول ان تحل

5 يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالبًا مرقمين من 1 إلى 140. المطلوب سحب عيّنة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.

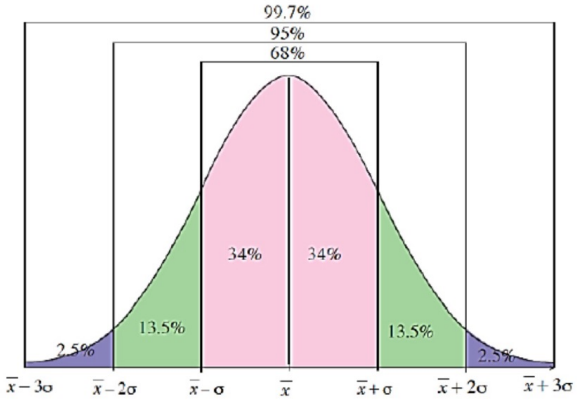
الحل

من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

- أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.
- أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- أن ينحدر طرفاه تدريجيًّا ويمتدان إلى ما لانهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبدًا.



القاعدة التجريبية



حوالي **68%** من البيانات تقع على الفترة $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$

حوالي **95%** من البيانات تقع على الفترة $[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$

حوالي **99.7%** من البيانات تقع على الفترة $[\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma]$

مثال1 إمتحان final

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة 350 دينارًا والانحراف المعياري 110 والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

a) طبق القاعدة التجريبية.

b) هل وصلت أرباح الشركة إلى 690 دينارًا؟ فسّر ذلك.

الحل

أستاذ نادر الصباغ

حاول ان تحل

إمتحان final

1 لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 دينارًا بانحراف معياري 115 دينارًا.

a طبق القاعدة التجريبية.

b هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 750 دينارًا؟ فسّر ذلك.

الحل

مثال 2

يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (A) هو 60 شهرًا بانحراف معياري 10 أشهر. على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

a طبق القاعدة التجريبية.

b أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 50 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

c أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) والتي يقل عمرها عن 40 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

الحل

نادر الصباغ

حاول ان تحل

2 يعلن مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (A) هو 700h بانحراف معياري 100h على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح الكهربائية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

a طبق القاعدة التجريبية.

b أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 500h

الحل

إمتحان final

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى المؤسسات الصناعية 1250 دينار والانحراف المعياري 225 دينار والمنحنى التكراري لهذه الأرباح هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي)

1) طبق القاعدة التجريبية

2) هل وصلت أرباح هذه المؤسسة إلى 2000 دينار ؟

الحل

القيمة المعيارية $= \dfrac{\text{قيمة المفردة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

مثال 1

في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة 16 من 20 في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 5 ونال أيضًا 16 من 20 في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 4. ما القيمة المعيارية للدرجة 16مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

الحل

حاول ان تحل

1 جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء 15 حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 3.8 وفي مادة الكيمياء 15 حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 7.8

ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

الحل

مثال 2

إمتحان final

في نتيجة نهاية العام الدراسي حصلت الطالبة مو ضي على 64 درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي 69 والانحراف المعياري 8. وحصلت على 48 درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي 56 والانحراف المعياري 10

في أي المادتين كانت موضي أفضل؟

الحل

إمتحان final

في نتيجة نهاية العام الدراسي نال أحد الطلاب على 15 درجه في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي للدرجات 13 والإنحراف المعياري 2.5 ، ونال أيضا على 13 درجه في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي للدرجات 11.5 والانحراف المعياري 2.4

الحل

جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	28138	28596	04819	50138	12598	96878	55684	01488	58963	25896	36987	47856	20150	18965
2	01055	53625	47739	51063	08445	33254	22542	50954	73949	11945	29947	86107	35420	77076
3	79603	31075	71532	38497	08236	78411	18237	48743	81472	31761	49582	70411	64708	59416
4	79261	96010	82558	15977	15827	55768	29668	73188	65198	24483	16219	63827	05092	47495
5	00005	37153	07206	78041	09457	97003	49739	75180	74018	90951	96161	31749	23314	55471
6	59282	86004	13259	59537	75702	66287	77941	27095	46176	67215	93007	84125	89302	92843
7	20119	41234	01600	61772	57765	43965	60952	86606	47653	71502	85121	56804	03494	98302
8	67205	41113	34514	03273	95516	68365	79855	50202	66262	31348	37260	56557	15116	38645
9	06244	02595	08941	24615	92256	43007	05022	48195	91554	42525	30499	92203	70717	92685
10	46210	35683	67486	77091	58196	08010	54826	97006	76740	76343	93982	66126	91164	53560
11	80851	80252	02993	92649	12421	00480	53258	45140	57226	10428	36478	24600	01401	29179
12	74684	98726	87312	70956	49731	45504	70689	57849	77383	53581	05100	07629	04450	54826
13	82136	32120	31733	10371	01132	25110	67123	59517	89996	58905	75260	21509	87839	68376
14	73419	88893	89748	44745	46390	54781	31307	62656	69777	24494	91659	29133	46122	75769
15	66082	76594	77480	38397	64521	18712	50625	39027	39168	07835	13446	17758	19166	86050
16	72300	93912	87548	69024	17509	52647	64335	84663	79524	34618	72718	51651	10486	81509
17	46805	82648	27550	65291	27181	92637	13539	87601	15442	70131	62278	99491	41647	11029
18	59068	93270	15829	34926	46252	90487	92734	04850	90175	84906	46435	91518	86972	25705
19	63089	93954	30250	80347	81506	53768	75611	62054	89867	16083	45585	39555	96236	37875
20	54384	64888	28929	46575	08301	86288	52656	19225	65019	74795	25915	71637	49063	17695
21	41219	63211	39429	15290	78067	66741	08485	64653	87698	04983	47255	72768	90770	82930
22	20939	02271	71831	53134	73002	86087	98213	24484	08574	34915	03881	26259	83583	55337
23	66587	02998	73357	00128	97188	71660	47602	52022	28157	21602	30212	53762	94149	66526
24	71255	04641	38419	79552	62599	76281	10226	60287	16627	85028	41218	20667	63917	49254
25	08584	91510	57892	75011	49221	69960	90413	62400	23239	76854	66983	15964	70808	41341
26	31552	70340	48274	81006	74831	19177	49160	50762	89666	93535	12381	29770	33895	90381
27	02779	92197	83606	60964	65448	64964	19444	31357	16774	68021	46076	43831	09372	71527
28	22739	38348	29275	50087	91312	68984	37018	03447	05352	00798	61243	86397	98949	07622
29	21255	64526	97920	04791	77315	49905	74232	67222	89562	14683	81533	60057	31164	21824
30	95796	88317	77167	07879	03499	00804	27377	18693	75652	32509	38279	28588	16753	86119
31	75902	33821	35579	75020	78575	43912	99570	79216	04682	53316	95976	11938	56490	43868
32	36028	73731	05339	82203	22856	72459	00237	17627	50326	98629	71967	48402	61549	83717
33	06836	03795	80497	34107	29215	17117	69538	63274	96690	78884	38149	84592	67096	84551
34	35984	71052	01657	19690	99783	13513	37517	96508	49098	86592	10874	18125	00876	14549
35	87635	49443	55077	18157	20552	27316	12591	68157	34316	20447	53989	40096	69123	74210
36	41484	58832	43633	92072	54522	60783	05639	78371	20340	90174	90549	60250	80858	97632
37	65736	34031	37846	47294	50168	96397	50329	17390	04554	96190	02594	44229	24198	03064
38	16118	88260	28975	20036	77353	96179	08143	29222	57871	01292	52420	07130	11896	94088
39	62064	36947	31193	72328	10262	75428	50450	31620	17855	27018	75910	60965	39988	73389
40	23472	61332	48829	99113	90538	74066	38628	09270	72856	71411	78860	50745	42966	27424
41	05654	41781	99888	60787	56313	83221	82631	91989	32577	68175	24897	23456	16419	41727
42	83428	17512	78322	01942	42061	60659	32746	95367	20551	99885	79334	03732	97058	80356
43	65126	87369	56266	48697	33094	07522	92724	05676	91022	64262	24239	60242	01049	42945
44	28042	84729	34846	05880	34188	27048	30623	23204	05034	93136	19192	91674	47022	48523
45	53148	70847	48117	16103	83773	13224	76143	39148	06742	08298	52014	61711	79466	78334

تابع جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
46	13560	38973	76536	54464	57626	10247	67051	83850	93002	30930	83842	09990	39203	85693
47	74560	04842	75720	98173	35124	18019	70681	73624	86300	76894	55504	20022	27144	03239
48	27449	10887	55047	76702	62587	20131	63452	96127	15802	65271	74663	37237	95812	19427
49	44413	47571	63342	67062	19900	42511	71024	44364	02775	41081	33177	09580	71047	33820
50	64512	50481	41107	21553	86471	16380	45959	16065	75195	31120	33822	43200	82566	43078
51	00095	29635	33618	55201	12075	97285	80296	92250	92579	69296	68423	91353	35553	77036
52	09638	68500	84152	55279	29481	48723	87785	06304	53198	79425	41344	87395	54720	72911
53	08589	28972	20500	26761	61852	87387	17967	50345	20479	37841	16337	88163	38585	02798
54	54883	36854	75468	31821	08464	13393	24322	56872	39507	16845	92039	13209	47035	57686
55	15444	18858	69256	81949	85766	20284	15914	76382	25665	84484	36409	87271	14949	12069
56	71565	25235	48604	04697	60513	89675	34337	06619	67509	03365	67431	43725	60359	33823
57	92871	06972	97272	98081	58945	98039	47815	55173	93203	03385	58309	47970	27985	73782
58	68849	33525	22034	44200	90628	39212	75363	00247	96303	51838	99956	34321	85809	87275
59	98827	81751	86350	27162	56861	00566	32360	52560	05152	97370	29229	98503	44100	59854
60	66803	20412	23097	36884	14158	51578	82839	04323	01877	91180	22403	31175	67942	14508
61	41516	62122	37492	78385	08100	01107	49028	80607	92813	75169	25796	12643	75026	04170
62	12162	72695	70213	28844	94220	04677	63128	96254	60006	42148	63974	24739	46064	93416
63	13274	51517	40925	25926	47062	06867	80018	43394	68316	19197	74832	95805	26126	29623
64	52918	26336	17452	70092	22425	68294	14624	12683	60030	18091	76824	45533	29768	59678
65	30361	58894	77995	22650	20266	21791	25773	37748	38058	73835	57440	33610	24749	56691
66	46377	07121	20251	41301	07635	66029	80470	25523	16429	40640	40041	79302	98712	95368
67	27423	28968	39623	90457	26780	14540	15082	90327	56459	77107	60727	26328	59556	93557
68	73886	44934	65197	86001	51613	92940	24998	35378	35732	05469	05791	07309	23107	37543
69	70336	30279	09961	58625	11044	73699	32481	85490	58333	12277	98355	86413	87883	23945
70	97903	34498	31282	11249	13179	41489	87962	89071	61922	02704	83626	67269	26568	09110
71	86205	97851	61543	40666	78098	05621	86072	21202	84985	65253	09306	56791	86227	73343
72	70718	31353	96295	21718	03495	83149	48733	21496	68430	91459	18409	86552	53261	30280
73	79073	05288	57087	27201	29661	08888	42984	96272	93656	50805	32057	36231	03532	64408
74	37479	85240	68508	36333	90080	46063	78129	96854	65844	71369	15432	66145	29223	87139
75	56009	81470	06181	98341	92406	61704	57770	28984	92858	88178	80042	83674	23736	64497
76	97012	75201	16764	31720	59414	81005	63959	15445	12347	71939	23651	29846	20962	77463
77	89839	94534	78223	94989	54376	61163	21914	19430	86856	38116	83201	10117	77879	04504
78	81048	37891	24924	18757	54550	54788	72430	24611	18643	55647	11806	78567	76679	58222
79	96743	96838	50696	57648	15325	72557	77193	50894	33206	44420	37986	84257	02031	65384
80	87649	00751	47483	48564	13103	20941	49793	68972	27994	75845	84616	37040	97110	95953
81	18173	87553	45854	18750	16506	57202	60428	61710	35887	19879	49893	04512	62556	63742
82	27613	72032	94334	38239	00395	05486	96365	01758	99314	41866	25760	74573	72169	25744
83	67517	04195	89100	21434	52923	90818	09206	19493	00233	62413	39127	76457	39419	35023
84	23574	88907	08133	85126	84643	94128	89259	18791	71035	84179	82500	92193	31383	34150
85	98721	90145	05695	14882	11827	56881	14143	68069	88481	08328	58607	81737	11660	96892
86	85556	83652	92934	55451	94792	45056	50732	83305	46303	37510	15539	52534	47250	75231
87	63282	48334	46961	05993	16605	63422	23375	44298	16226	10617	96722	42776	53376	94366
88	34033	36344	41107	77495	73985	79352	14844	44334	30781	16339	38031	28104	60054	05725
89	75567	31423	72507	48162	30150	44912	76250	12017	12136	47687	90279	67127	83889	87957
90	45101	69475	96924	76548	57756	14741	26052	42807	52824	61981	87866	35512	23771	43130

