



احرس معنا بذكاء ... نضمن لك الارتقاء

المادة: الرياضيات

الصف: التاسع

الفصل الدراسي الأول

القسم الأول + القسم الثاني



50245099



Shottarkw

فهرس القسم الأول

الوحدة التعليمية الأولى

الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

رقم الصفحة

- (١-١) الجنور التربيعية والأعداد غير النسبية 4
- (٢-١) الاعداد الحقيقية (مقلنة - قوتيب) 6
- (٣-١) العمليات على الأعداد الحقيقية 8
- (٤-١) القيمة المطلقة 10
- (٥-١) حل متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد 12
- (٦-١) الصورة العلمية باستخدام الأسس الصحيحة 14

الوحدة التعليمية الثانية

التحليل والمعادلات

رقم الصفحة

- (١-٢) تحليل الفرق بين مكعبين أو مجموعهما 17
- (٢-٢) تحليل الحدودية الثلاثية: $س^٢ + ب س + ج$ 19
- (٣-٢) تحليل الحدودية الثلاثية: $س^٢ + ب س + ج، أ \neq ٠$ 20
- (٤-٢) تحليل المربع الكامل 23
- (٥-٢) تحليل الحدودية الرباعية 25
- (٦-٢) حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد 26

فهرس القسم الثاني

الوحدة التعليمية الثالثة

الحدوديات النسبية - الهندسة الإحداثية

رقم الصفحة

- (١-٣) [الحدوديات النسبية وتبسيطها](#) 29
- (٢-٣) [ضرب الحدوديات النسبية](#) 31
- (٣-٣) [قسمة الحدوديات النسبية](#) 33
- (٤-٣) [جمع الحدوديات النسبية وطرحها](#) 35
- (٥-٣) [المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي](#) 43
- (٦-٣) [إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي](#) 46

الوحدة التعليمية الرابعة

هندسة التحويلات - الإحصاء والاحتمال

رقم الصفحة

- (١-٤) [الدوران في المستوى](#) 49
- (٢-٤) [التكبير](#) 52
- (٣-٤) [الموج التكراري](#) 55
- (٤-٤) [المضاع التكراري](#) 57
- (٥-٤) [مخطط الصندوق ذي العرضتين](#) 59
- (٦-٤) [التوزيع والعدالة - الاحتمال](#) 61

الأعداد الحقيقية (ح)



مجموعة الأعداد الحقيقية: هي اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية، ونرمز لها بالرمز ح.
كل عدد على خط الأعداد هو عدد حقيقي.

الوحدة التعليمية الأولى

الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

(١-١) الجذور التربيعية والأعداد غير النسبية

مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

الأعداد النسبية يمكن كتابتها في صورة أعداد عشرية منتهية مثل ٣,٢٥ ، ٠,٤٨٧ أو بصورة أعداد عشرية دورية مثل ٢,١٦ ، ٠,٣

مجموعة الأعداد غير النسبية $\overline{N}$:

الجزر التربيعي لأي عدد ليس مربعا كاملا مثل $\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{7}$ هو عدد غير نسبي
الأعداد العشرية التي أرقامها العشرية لا تنتهي ولا تتكرر مثل $\pi \approx 3,14159000$
كسور عشرية ذات نمط في كتابتها مثل $0,02022022202222000$

مثال: قدر کلا مما یلی :

$$\sqrt{35}$$

نبحث عن عددين مربعين كاملين متتالين يقع بينهما

العدد ٣٥

$$\sqrt{36} > 30 > \sqrt{25}$$

$$\sqrt{36} > 30 > \sqrt{25}$$

$$7 > 30 > 0$$

٣٥ أقرب إلى العدد ٣٦

$$0,7 \approx \sqrt{30}$$

$\sqrt{71}$

نبحث عن عددين مربعين كاملين متتالين يقع بينهما

العدد ٦٨

$$\sqrt{11} > 7.8 > \sqrt{43}$$

$$\sqrt{11}v > 78 > \sqrt{14}v$$

$$9 > 7\lambda > \lambda$$

٦٨ أقرب إلى العدد ٦٤

$$1,3 \approx \sqrt{18}$$

من خواص الجذور التريعية : أ ، ب عددين نسبيين موجبين

$$j = \sqrt{j} \times \sqrt{j}$$

$$\frac{\sqrt{j}}{\sqrt{j}} = \sqrt{\frac{j}{j}}$$

$$\sqrt{b} \times \sqrt{a} = \sqrt{b \times a}$$

مثال: أوجد ناتج كل مما يلي موظفا خواص الجذور التربيعية :

$$= \sqrt{\uparrow \uparrow} \times \sqrt{\uparrow \uparrow}$$

$$= \sqrt{5} \times \sqrt{3}$$

$$\dots = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\dots}$$

$$\dots = \frac{\sqrt{27}}{3} \sqrt{}$$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{7}$$

$$= \sqrt{18} \times \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{49 \times 4}$$

.....

$$= \sqrt{,64}$$

(٢-١) الأعداد الحقيقية (مقارنة - ترتيب)

ن U ن $\bar{}$ = ح مجموعة الأعداد الحقيقية

مثال: رتب تنازليا الأعداد التالية :

$$15\sqrt{\quad}, \quad 3,37 - , \quad 3\frac{3}{8}$$

.....

.....

.....

.....

مثال: رتب تصاعديا الأعداد التالية :

$$6,5\bar{\quad}, \quad 2\sqrt{\quad}, \quad \pi^2$$

.....

.....

.....

.....

الفترة: مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

الفترة المحدودة: * المغلقة [أ ، ب] مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي أ

وأصغر من أو تساوي ب $أ \geq س \geq ب$

* المفتوحة (أ ، ب) مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أ

وأصغر من ب $أ > س > ب$

* نصف المفتوحة أو نصف المغلقة (أ ، ب] مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أ

وأصغر من أو تساوي ب $أ > س \geq ب$

* نصف المفتوحة أو نصف المغلقة [أ ، ب) مجموعة الأعداد الحقيقية

الأكبر من أو تساوي أ وأصغر من ب $أ \leq س < ب$

مثال: مثل كلا من الفترات الآتية على خط الأعداد :

$$(٢ , ١ -]$$

$$[٣ , ٢)$$

$$(٣ , ٢ -)$$

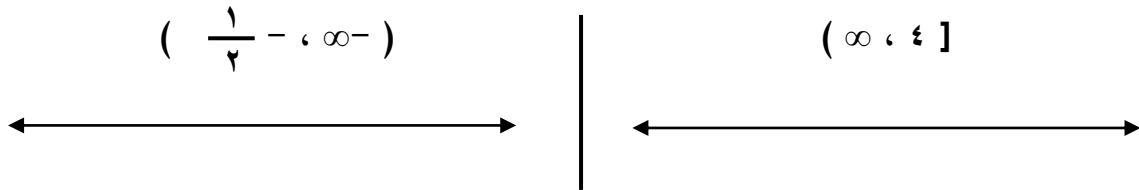
$$[١ , ٣ -]$$



الفترات غير المحدودة:

- * نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى $(-\infty, a]$
مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي a $s \leq a$
- * نصف مفتوحة وغير محدودة من أعلى $(-\infty, a)$
مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من a $s < a$
- * نصف مغلقة وغير محدودة من أسفل $[a, \infty)$
مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي a $s \geq a$
- * نصف مفتوحة وغير محدودة من أسفل (a, ∞)
مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من a $s > a$

مثال: مثل كلا من الفترات الآتية على خط الأعداد :



(٣-١) العمليات على الأعداد الحقيقية

ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

(٢) الأسس والجذور والأعداد الدورية

(١) ما داخل الأقواس

(٤) الجمع والطرح من جهة اليمين

(٣) الضرب والقسمة من جهة اليمين

مثال: أوجد ناتج كل يلي في أبسط صورة :

$$6 \times 9 - 0,7 \div \sqrt[4]{9} \times 6$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$9 \times 4 + 0,6 \div \sqrt[2]{5} \times 8$$

$$9 \times 4 + \frac{6}{9} \div 5 \times 8 =$$

$$9 \times 4 + \frac{2}{3} \div 40 =$$

$$9 \times 4 + \frac{3}{2} \times 40 =$$

$$36 + 60 =$$

$$96 =$$

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[2]{2}} - \frac{3}{8} \times 2$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{2}} - \dots$$

.....

.....

.....

.....

$$\frac{18}{\sqrt{2}} \times 0,7 + \sqrt[3]{3} \times \sqrt[2]{2} =$$

$$\dots \times \sqrt[2]{2} =$$

.....

.....

.....

.....

$$(2 -) + \frac{(2 + 9)3 -}{11 -}$$

.....

.....

.....

.....

$$25 - 8 \times \sqrt{\frac{100}{16}}$$

$$\sqrt{\frac{100}{16}} =$$

.....

.....

.....

موضوعي :

$= \frac{27\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 8$			
(أ) 9	(ب) 3	(ج) $1 \frac{1}{2}$	(د) $1 \frac{1}{2}$

(٤-١) القيمة المطلقة

القيمة المطلقة لعدد حقيقي : البعد على خط الأعداد بين هذا العدد والصفر.

مثال: من خواص القيمة المطلقة: لكل s ، $s \neq 0$

$$|s| \times |s| = |s \times s| \quad |s| \times |s| = |s| \times |s| \quad \left| \frac{s}{s} \right| = \left| \frac{s}{s} \right| \quad |s - s| = |s - s|$$

مثال: أوجد قيمة كل مما يلي:

$ s - 5 + -2, 3 $ إذا كانت $s = -4$	$ 6s + 4 $ إذا كانت $s = 11$
.....	
.....	
.....	

حل معادلة تتضمن قيمة مطلقة:

(١) إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فإن المعادلة $|s| = a$ لها حلان $s = a$ أو $s = -a$ م . ح = $\{a, -a\}$

(٢) إذا كان a عدداً حقيقياً سالباً فإن المعادلة $|s| = a$ ليس لها حل م . ح = $\emptyset$

(٣) إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة $|s| = a$ لها حل وحيد هو $s = 0$ م . ح = $\{0\}$

مثال: أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ح:

$ 9s - 2 = 1$ $\Phi = \text{م . ح}$	$ 3s + 7 = 0$ $3s + 7 = 0$ $3s = -7$ $\frac{3s}{3} = \frac{-7}{3}$ $s = \frac{-7}{3}$ $\text{م . ح} = \left\{ \frac{-7}{3} \right\}$	$ 5s - 3 = 8$ $5s - 3 = 8$ أو $5s - 3 = -8$ $5s = 11$ أو $5s = -5$ $s = \frac{11}{5}$ أو $s = -1$ $\text{م . ح} = \left\{ \frac{11}{5}, -1 \right\}$
---	--	---

مثال: أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ح:

$$3 = 1 - |س|$$

$$1 + 3 = |س|$$

$$4 = |س|$$

$$4 = |1 - ص|$$

$$4 = |1 - ص|$$

.....

.....

.....

$$0 = 9 - |1 + س|$$

$$9 = |1 + س|$$

$$\frac{9}{3} = |1 + س|$$

$$3 = |1 + س|$$

$$\frac{1}{2} = |س - 3|$$

$$2 \times 10 = |س - 3|$$

$$20 = |س - 3|$$

.....

.....

.....

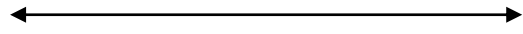
.....

موضوعي :

ب	أ	مجموعة حل المعادلة $ س = 3 -$ في ح ، هي $\{3, -3\}$	١
ب	أ	إذا كانت $س = 4$ ، فإن قيمة $ س - 4 + 7$ هي ٧	٢

(٥-١) حل متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد

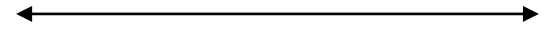
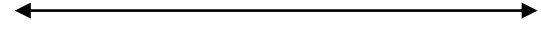
مثال: أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية في ح ، ومثلها على خط الأعداد الحقيقية .

$ \begin{aligned} 11 &\geq 3 + 2x \geq 1 \\ 3 - 11 &\geq 2x \geq 3 - 1 \\ 8 &\geq 2x \geq 2 - \\ \frac{8}{2} &\geq x \geq \frac{2-}{2} \\ 4 &\geq x \geq 1 - \\ \text{م. ح} &= [1 - , 4] \end{aligned} $ 	$ \begin{aligned} 8 &\geq 5 - s \\ 8 &\geq 3 + 5 - \\ 3 - 8 &\geq 5 - \\ 5 &\geq 5 - \\ \frac{5-}{5-} &\leq s \leq \frac{5-}{5-} \\ 1 - &\leq s \\ \text{م. ح} &= [1 - , \infty) \end{aligned} $ 
--	--

حل متباينة تتضمن قيمة مطلقة :

$$|s| \geq a \leftrightarrow -a \leq s \leq a \text{ حيث } s \in \mathbb{R}, a \geq 0$$

مثال: أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية في ح ، ومثلها على خط الأعداد الحقيقية .

$ \begin{aligned} 11 &\geq 1 + 4 - 3s \\ 1 - 11 &\geq 4 - 3s \\ 10 &\geq 4 - 3s \end{aligned} $ 	$ \begin{aligned} 5 &> 7 + s \\ 5 &> 7 + s & 5 > 7 + s \\ 7 - 5 &> s & 7 - 5 > s \\ 2 - &> s & 2 - > s \\ \text{م. ح} &= (-2 , 2) \end{aligned} $ 
--	---

$$|س| \leq أ \leftrightarrow س \leq أ \text{ أو } س \geq -أ \text{ حيث } س \in ح , أ \in ح +$$

مثال: أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية في ح ، ومثلها على خط الأعداد الحقيقية .

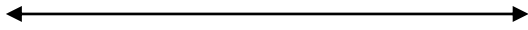
$$س + ١ < ٦$$

.....

.....

.....

.....



$$٣ - ٢س \leq ٩$$

$$٩ \leq ٣ - ٢س$$

$$٩ \leq ٣ - ٢س \text{ أو } ٣ - ٢س \geq ٩$$

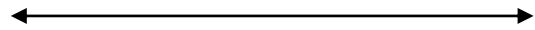
$$٢س \leq ٣ - ٩ \text{ أو } ٢س \geq ٣ - ٩$$

$$٢س \leq -٦ \text{ أو } ٢س \geq ٦$$

$$\frac{٢}{٢}س \leq \frac{-٦}{٢} \text{ أو } \frac{٢}{٢}س \geq \frac{٦}{٢}$$

$$س \leq -٣ \text{ أو } س \geq ٣$$

$$م . ح = (-\infty, -٣] \cup [٣, \infty)$$



$$٥ - |س| < ٢$$

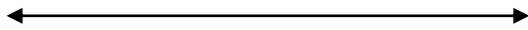
$$- |س| < ٢ - ٥$$

$$- |س| < ٧$$

$$|س| > ٧$$

.....

.....



$$٢ - |س| < ٣$$

$$٢ - |س| < ٣$$

$$٢ - |س| < ٣$$

$$\frac{٢}{٢} - |س| < \frac{٣}{٢}$$

$$١ - |س| < ١.٥$$

.....

.....



موضوعي :

١	مجموعة حل المتباينة $ س + ١ \geq ٣$ في ح ، هي $[-٤, ٢]$	أ	ب
٢	مجموعة حل المتباينة $ ٢س - ١ < ٣$ في ح هي:		
(أ) $(٢, \infty)$	(ب) $(١, \infty) \cup (-\infty, ٢]$	(ج) $(١, \infty) \cup (-\infty, ٢)$	(د) $(١, ٢)$

(٦-١) الصورة العلمية باستخدام الأسس الصحيحة

الصورة العلمية (القياسية) للعدد: $أ \times ١٠^٥$ حيث $١ \leq |أ| < ١٠$ ، ٥ ص

مثال: اكتب الصورة العلمية كلاً مما يلي :

- ٢٣١ ملياراً $= ٢٣١٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٢,٣١ \times ١٠^{١١}$
- ٤٣ جزءاً من مليون $= ٠,٠٠٤٣ = ٤,٣ \times ١٠^{-٣}$
- ١١٨٠ مليوناً $= ١١٨٠٠٠٠٠٠٠ = ١,١٨ \times \dots$
- ٤٥٠ جزءاً من مئة ألف $= ٠,٠٠٤٥٠ = ٤,٥ \times \dots$
- ٣٤١ تريليوناً $= \dots = \dots$
- ٦٣٠ جزءاً من عشرة آلاف $= \dots = \dots$

مثال: اكتب كلا مما يلي بالشكل النظامي :

$٠,٠٠٣٤ = ٣,٤ \times ١٠^{-٣}$ $\dots = ٢ \times ١٠^{-٧}$	$٣١٤٠٠٠ = ٣,١٤ \times ١٠^٥$ $\dots = ٥ \times ١٠^٧$
---	--

مثال: قارن بوضع $<$ أو $>$ أو $=$ في كل مما يلي لتحصل على عبارة صحيحة :

- $٤,٤ \times ١٠^{-٣} \dots ٤,٤ \times ١٠^{-٥}$
- $٣,٥ \times ١٠^٧ \dots ٧,٢ \times ١٠^٧$
- $٢,٧ \times ١٠^{-٦} \dots ٤,٧ \times ١٠^{-٤}$
- $٩,٩ \times ١٠^٧ \dots ١,١ \times ١٠^٨$
- $٣,٥٤ \times ١٠^{-١} \dots ٣٥٤$ جزءاً من ألف

مثال: أوجد ناتج كل مما يلي بالصورة العلمية :

$٩,٨ \times ١٠^٤ - ٢,٧ \times ١٠^٤$ $= (٩,٨ - ٢,٧) \times ١٠^٤$ $= ٧,١ \times ١٠^٤$	$٢,٥ \times ١٠^٦ + ٣,٢ \times ١٠^٦$ $= (٢,٥ + ٣,٢) \times ١٠^٦$ $= ٥,٧ \times ١٠^٦$
---	---

$$\begin{aligned}
 & ({}^2 10 \times 7) \div ({}^4 10 \times 6,3) \\
 & ({}^2 10 \div {}^4 10) \times (7 \div 6,3) = \\
 & \text{ليس بالصورة العلمية} \quad {}^6 10 \times 0,9 = \\
 & \quad \quad \quad {}^7 10 \times 9 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ({}^4 10 \times 5) \times ({}^2 10 \times 4,3) \\
 & ({}^4 10 \times {}^2 10) \times (5 \times 4,3) = \\
 & \text{ليس بالصورة العلمية} \quad {}^2 10 \times 17 = \\
 & \quad \quad \quad {}^1 10 \times 1,7 =
 \end{aligned}$$

مع + ب ب + ج

(أ) د + ١١ د + ٤٤

$$9 = \boxed{9} \times \boxed{1}$$

$$10 = \boxed{9} + \boxed{1}$$

✓

(د + ٣)(د + ٨)

٩ + ١٠ + ١١ + ١٢

٩ + ١٠ + ١١ + ١٢

(٩ + ١٠)(١١ + ١٢)

الوحدة التعليمية الثانية التحليل والمعادلات

(١-٢) تحليل الفرق بين مكعبين أو مجموعهما

$$\begin{aligned}
 & \text{س}^3 - \text{ص}^3 = (\text{س} - \text{ص}) (\text{س}^2 + \text{س}\text{ص} + \text{ص}^2) \quad \text{تحليل الفرق بين مكعبين} \\
 & \text{س}^3 + \text{ص}^3 = (\text{س} + \text{ص}) (\text{س}^2 - \text{س}\text{ص} + \text{ص}^2) \quad \text{تحليل مجموع مكعبين}
 \end{aligned}$$

مثال : حل كلا مما يلي تحليلًا تامًا :

$$\begin{aligned}
 & \text{س}^3 - ٦٤ = (\text{س} - ٤) (\text{س}^2 + ٤\text{س} + ١٦) \\
 & ٨\text{ل}^3 + ٢٧\text{م}^3 = (\text{ل}^2 + ٣\text{ل}\text{م} + \text{م}^2) (٨\text{ل} + ٢٧\text{م}) \\
 & \text{س}^3 - ٠,١٢٥ = (\text{س} - ٠,٥) (\text{س}^2 + ٠,٥\text{س} + ٠,٢٥) \\
 & ٢٧\text{ن}^3 + ٢٧ = (\text{ن}^2 + ٣\text{ن} + ٩) (\text{ن} + ٣) \\
 & ١٢٥\text{س}^3 - ٦٤\text{ص}^3 = (\text{س} - ٤\text{ص}) (\text{س}^2 + ٤\text{س}\text{ص} + ١٦\text{ص}^2) \\
 & \frac{١}{٦} = \frac{٢}{١٢} \left(\frac{١}{١٦}\text{ب} + \frac{١}{٦}\text{أ} + \frac{٤}{٩} \right) \left(\frac{١}{٤}\text{ب} + \frac{٢}{٣}\text{أ} \right) = \frac{١}{٦٤}\text{ب}^3 + \frac{٨}{٢٧}\text{أ}^3
 \end{aligned}$$

مثال : حل كلا مما يلي تحليلًا تامًا :

$$٣^3 - ٨١ = ٣ (٣^2 - ٢٧)$$

$$=$$

$$٢\text{س}^٢ + ١٦\text{س} = ٢\text{س} (\text{س}^٢ + ٨)$$

$$=$$

$$٥ - ٤٠\text{م}^٣ = ٥ (.....)$$

$$=$$

$$٥٤\text{ب}^٢ - ٢ = ... =$$

$$=$$

$$١٦\text{س}^٤ + ٥٤\text{س}\text{ص}^٣ = ... =$$

$$=$$

موضوعي :

١	$(٠,٠١ + أ٠,١ - ٢أ) (أ + ٠,١) = ٣أ + ٠,٠١$			أ	ب
٢	إذا كان $س - ص = ٥$ ، $س + ص = ٦$ ، فإن $س - ص = ٣٠$			أ	ب
٣	إذا كان $أ = ١٠$ ، $ب = ٢$ ، فإن $(أ + ب) (أ - ب - ب) =$				
(أ) ٨ -	(ب) ٨	(ج) ١٢	(د) ٢٠		
٤	إذا كان $ل + م = ٣$ ، $ل + م = ٥١$ ، فإن $ل - م + م =$				
(أ) ١٧	(ب) ٤٨	(ج) ٥٤	(د) ١٥٣		

(٢-٢) تحليل الحدودية الثلاثية : س^٢ + ب س + ج

ابحث عن عددين م ، ن حيث ج = م ن ، ب = م + ن
 فيكون س^٢ + ب س + ج = (س + م) (س + ن)

مثال : حل كلا مما يلي تحليلًا تامًا :

- س^٢ + ٨ س + ٧ = (س + ٧) (س + ١) نبحث عن عددين حاصل ضربهما ٧ وناتج جمعهما ٨
 س^٢ - ٩ س + ١٨ = (س - ٦) (س - ٣) نبحث عن عددين حاصل ضربهما ١٨ وناتج جمعهما -٩
 = ٣ + س + س^٢
 = ٨ + س - س^٢
 = ٢٠ + س - س^٢
- س^٢ + ٢ س - ٣ = (س + ٣) (س - ١) نبحث عن عددين حاصل ضربهما -٣ وناتج جمعهما ٢
 س^٢ - ٤٢ س - ٤٢ = (س - ٧) (س + ٦) نبحث عن عددين حاصل ضربهما -٤٢ وناتج جمعهما ١-
 = ٣٠ - س + س^٢
 = ٦ - س - س^٢
 = ٥٦ - س - س^٢
- س^٢ - ١٠ س ص + ١٦ ص^٢ = (س - ٨ ص) (س - ٢ ص)
 عددين حاصل ضربهما ١٦ وناتج جمعهما -١٠
 س^٢ + ٧ س ص - ١٨ ص^٢ = (س + ٩ ص) (س - ٢ ص)
 عددين حاصل ضربهما -١٨ وناتج جمعهما ٧
 س^٢ + ١٢ س ص + ٣٢ ص^٢ = ...
- ٥ ص^٢ + ١٥ ص - ٢٠ = (٥ ص + ٤) (ص - ٤)
 =
 = ١٢ - س + ٧ س - (١٢ + س)
 =
 = ٤ + س + ٢ س^٢ -
 =

(٣-٢) تحليل الحدودية الثلاثية : أ س^٢ + ب س + ج ، أ ≠ ٠

مثال : حل تحليلًا تامًا :

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad ٥ س^٢ + ٨ س + ٣ = \overbrace{٥ س^٢ + ٨ س + ٣}^{\times} \\
 & = (٣ + س) (٥ + س) = \\
 & = (س + \frac{٥}{٥}) (س + \frac{٣}{٥}) = \\
 & = \overbrace{(س + ١) (س + \frac{٣}{٥})}^{س \quad ٣} \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{س \quad ٥}
 \end{aligned}$$

التحقق: ٣ س + ٥ س = ٨ س الحد الأوسط

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad ٣ س^٢ + ٧ س - ٦ = ٣ س^٢ + ٧ س - ٦ \\
 & = (٩ + س) (٢ - س) = \\
 & = (س + \frac{٩}{٣}) (س - \frac{٢}{٣}) = \\
 & = \overbrace{(س + ٣) (س - \frac{٢}{٣})}^{س \quad ٢-} \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{س \quad ٩}
 \end{aligned}$$

التحقق: ٢- س + ٩ س = ٧ س الحد الأوسط

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad ٢٥ س^٢ + ١٠ س - ١٥ = ٥ (٥ س^٢ + ٢ س - ٣) = \\
 & = ٥ (٥ س^٢ + ٢ س - ٣) = \\
 & = ٥ (س + ٥) (س - ٣) = \\
 & = ٥ (س + \frac{٥}{٥}) (س - \frac{٣}{٥}) = \\
 & = \overbrace{٥ (س + ١) (س - ٣)}^{س \quad ٣-} \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{س \quad ٥}
 \end{aligned}$$

التحقق: ٣- س + ٥ س = ٢ س الحد الأوسط

$$\begin{aligned}
 & \bullet 8س^2 + 10س ص - 3ص^2 = 10س ص + 2س^2 - 24ص^2 \\
 & = (س + 12ص) (س - 2ص) \\
 & = (س + \frac{1}{8}ص) (س - \frac{2}{8}ص) \\
 & = (س + \frac{3}{2}ص) (س - \frac{1}{4}ص) \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{c} \text{2- س ص} \\ \hline (س + 3ص) (س - \frac{1}{4}ص) \\ \hline \text{12 س ص} \end{array}
 \end{aligned}$$

التحقق : $2س ص + 12س ص = 10س ص$ الحد الأوسط

مثال : حل كلا مما يأتي تحليلًا تامًا :

$$\bullet 3س^2 + 16س + 5 = \dots\dots\dots$$

.....

$$\bullet 4س^2 - 4س - 3 = \dots\dots\dots$$

.....

• $6س^2 - 5سص - ص^2 = \dots\dots\dots$

.....

.....

.....

.....

.....

موضوعي :

ب	أ	١ إذا كان $2س^2 - س - 10 = ل (س + 2) (س - 5)$	
		٢ إذا كان $2س^2 + س - 7 = م (س - 1) (س + 7)$ ، فإن م =	
(د) ١٥		(ج) ١٤	(ب) ١٣ (أ) ١٣-

(٤-٢) تحليل المربع الكامل

$$٢(ب - أ) = ٢ب + ٢أ - ٢(ب - أ)$$

$$٢(ب + أ) = ٢ب + ٢أ + ٢(ب + أ)$$

مثال : حل كلا مما يلي تحليلًا تاماً :

$$س٢ + ٨س + ١٦ = (س + ٤)٢$$

$س٢ + ٨س + ١٦$ مربع كامل وجذره التربيعي الموجب = س	١٦ مربع كامل وجذره التربيعي الموجب = ٤
$٨ = ٤ \times ٢$ الحد الأوسط	

$$١٦س٢ - ٢٤س + ٩ = (٤س - ٣)٢$$

$١٦س٢ - ٢٤س + ٩$ مربع كامل وجذره التربيعي الموجب = ٤س	٩ مربع كامل وجذره التربيعي الموجب = ٣
$٢٤ = ٣ \times ٨$ الحد الأوسط	

مثال : حل كلا مما يلي تحليلًا تاماً :

$$٢٠س٢ - ٢٠س + ٥ = (.....)٢$$

$$٥ = (.....)٢$$

$$٢٠س٢ - ٢٠س + ٩ = (.....)٢$$

$$..... =$$

مثال : وظف مفهوم المربع الكامل لإيجاد قيمة كل مما يلي :

$٢(١ - ٦٠) = ٢(٥٩)$ $٢(.....) + ... \times \times ٢ - ٢(.....) =$ $..... =$ $..... =$	$٢(١٠٣) = ٢(٣ + ١٠٠)$ $٢(٣) + ٣ \times ١٠٠ \times ٢ + ٢(١٠٠) =$ $٩ + ٦٠٠ + ١٠٠٠٠ =$ $١٠٦٠٩ =$
--	--

مثال : أوجد قيمة ج التي تجعل كلا من الحدوديات الثلاثية الآتية مربعا كاملا :

$$\begin{aligned} & ٤س^٢ - جس + ٩ص^٢ \\ & \text{الجزر التربيعي الموجب للحد الأول} = \dots\dots\dots \\ & \text{الجزر التربيعي الموجب للحد الثالث} = \dots\dots\dots \\ & \text{الحد الأوسط} = \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ & ج = \dots\dots\dots \text{ أو } ج = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ٨١ + جس + ٢س^٢ \\ & \text{الجزر التربيعي الموجب للحد الأول} = س \\ & \text{الجزر التربيعي الموجب للحد الثالث} = ٩ \\ & \text{الحد الأوسط} = ٢س \times ٩ = ١٨س \\ & جس = ١٨س \quad \text{أو} \quad ج = ١٨ - ١٨ = ٠ \end{aligned}$$

مثال : أكمل $١٤س + ٢س^٢$ إلى مربع كامل .

$$\begin{aligned} & \text{مربع نصف معامل س} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ (٧)^٢ = ٤٩ \\ & ٢س^٢ + ١٤س + ٤٩ = (٧ + س)^٢ \end{aligned}$$

مثال : حل كلا مما يلي بطريقة إكمال المربع :

$$\begin{aligned} & ٢س^٢ - ٨س - ٢٤ = (٢س^٢ - ٨س + ١٢ - ٣٦) \\ & \text{مربع نصف معامل س} = \dots\dots\dots \\ & ٢س^٢ - ٨س - ٢٤ = ٢س^٢ - ٨س + ١٢ - ٣٦ \\ & \dots\dots\dots - (٣ - ٦) = \dots\dots\dots \\ & (٣ - ٦) (٣ - ٦) = \dots\dots\dots \\ & (٣ - ٦) (٣ - ٦) = \dots\dots\dots \\ & ٢س^٢ - ٨س - ٢٤ = (٣ - ٦)^٢ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ٧ + ٦س - ٩س^٢ \\ & \text{مربع نصف معامل س} = \left(-\frac{٦}{٩}\right)^٢ (٣)^٢ = ٩ \\ & ٧ + ٦س - ٩س^٢ = ٧ + ٦س - ٩س^٢ + ٩ - ٩ \\ & \dots\dots\dots = ١٦ - (٣ + س)^٢ \\ & (٤ + ٣ + س) (٤ - ٣ + س) = \dots\dots\dots \\ & (٧ + س) (١ - س) = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

موضوعي :

١	المقدار الثلاثي $٢س + س + \frac{١}{٤}$ مربع كامل	أ	ب
٢	$٢س^٢ + س + ١ = (س + ١)^٢$	أ	ب
٣	$(س + ص)^٢ = ٢س^٢ + ٢ص$	أ	ب
٤	إذا كان $٤ص^٢ + جص + ٩$ مربعا كاملا ، فإن إحدى قيم ج هي ١٢	أ	ب
١	قيمة ج التي تجعل الحديدية الثلاثية $٢س^٢ - ٦س + ج$ مربعا كاملا هي :		
(أ) ٩ -	(ب) ٣	(ج) ٩	(د) ٣٦

(٥-٢) تحليل الحدودية الرباعية

مثال : حل كلاً مما يلي تحليلًا تاماً :

$$\begin{aligned}
 & \text{س}^2 - 3\text{س} - \text{س} + 3 \\
 & = (\text{س}^2 - 3\text{س}) + (-\text{س} + 3) \\
 & = \text{س}(\text{س} - 3) - (\text{س} - 3) \\
 & = (\text{س} - 3)(\text{س} - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\text{أ}^2\text{س} + 2\text{س}^2\text{ب} + \text{أ}^2\text{ص} + \text{ب}^2\text{ص} \\
 & = (2\text{أ}^2\text{س} + 2\text{س}^2\text{ب}) + (\text{أ}^2\text{ص} + \text{ب}^2\text{ص}) \\
 & = 2\text{س}(\text{أ} + \text{ب}) + \text{ص}(\text{أ}^2 + \text{ب}^2) \\
 & = (\text{أ} + \text{ب})(2\text{س} + \text{ص})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3\text{ص}^2 + 4\text{ص}^2 - 9\text{ص} - 36 \\
 & = (3\text{ص}^2 + 4\text{ص}^2) + (-9\text{ص} - 36) \\
 & = \text{ص}^2(3 + 4) - 9(1 + 4) \\
 & = \text{ص}^2(7) - 9(5) \\
 & = (7\text{ص}^2 - 45)(1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3\text{س}^3 - 3\text{س}^2 - 4\text{س} + 12 \\
 & = (3\text{س}^3 - 3\text{س}^2) + (-4\text{س} + 12) \\
 & = 3\text{س}^2(\text{س} - 1) - 4(\text{س} - 3) \\
 & = (\text{س} - 1)(3\text{س}^2 - 4) \\
 & = (\text{س} - 1)(3\text{س} - 2)(\text{س} + 2)
 \end{aligned}$$

$$20\text{س}^2\text{ص} + 10\text{ب}^2\text{س}^2 - 4\text{أ}^2\text{ص} - 2\text{أ}^2\text{ب}$$

$$= (10\text{س}^2\text{ص} + 5\text{ب}^2\text{س}^2 - 2\text{أ}^2\text{ص} - 2\text{أ}^2\text{ب})$$

$$= [(10\text{س}^2\text{ص} + 5\text{ب}^2\text{س}^2) - 2\text{أ}^2(\text{ص} + \text{ب})]$$

$$= [5\text{س}^2(2\text{ص} + \text{ب}) - 2\text{أ}^2(\text{ص} + \text{ب})]$$

$$= (5\text{س}^2 - 2\text{أ}^2)(2\text{ص} + \text{ب})$$

(٦-٢) حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

خاصية الضرب الصفري : $أ \times ب = أ \leftarrow أ = أ$ أو $ب = ب$

مثال: أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ح :

$$س(س - ٣)(س + ٢) = ٠$$

$$س - ٣ = ٠ \quad \text{أو} \quad س + ٢ = ٠$$

$$س = ٣ \quad \text{أو} \quad س = -٢$$

$$م. ح = \{٣, -٢\}$$

$$ص^٢ - ٣٦ = ٠$$

$$(ص - ٦)(ص + ٦) = ٠$$

$$ص - ٦ = ٠ \quad \text{أو} \quad ص + ٦ = ٠$$

$$ص = ٦ \quad \text{أو} \quad ص = -٦$$

$$م. ح = \{٦, -٦\}$$

$$ل^٢ - ٧ = ٠$$

$$ل^٢ = ٧$$

$$ل = \sqrt{٧} \quad \text{أو} \quad ل = -\sqrt{٧}$$

$$ل = \sqrt{٧} \quad \text{أو} \quad ل = -\sqrt{٧}$$

$$ل = \sqrt{٧}$$

$$م. ح = \{\sqrt{٧}, -\sqrt{٧}\}$$

$$س(س + ٣) - ٤٩ = ٠$$

$$س(س + ٣) = ٤٩$$

$$س(س + ٣) = ٤٩$$

$$س = ٤ - س \quad \text{أو} \quad س = ١٠ + س$$

$$س = ٤ \quad \text{أو} \quad س = ١٠$$

$$م. ح = \{٤, ١٠\}$$

$$ك^٢ + ٧ك + ١٢ = ٠$$

$$(ك + ٤)(ك + ٣) = ٠$$

$$ص^٢ - ١٠ص - ١١ = ٠$$

$$(ص - ١١)(ص + ١) = ٠$$

$$ن^٢ - ٦ن + ٩ = ٠$$

$$(ن - ٣)(ن - ٣) = ٠$$

$$٣ن^٢ + ١٠ن - ١٠ = ٠$$

$$(٣ن - ٥)(ن + ٢) = ٠$$

مثال: أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ح :

$$\begin{aligned} 2 &= (1 + s) s \\ s^2 &+ s - 2 = 0 \\ 0 &= (s - 1) (s + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s^2 &= 15s - 18 \\ 2s^2 &- 15s + 18 = 0 \\ 0 &= (3 - s) (2s - 6) \end{aligned}$$

.....
.....
.....

.....
.....
.....

$$\begin{aligned} 7s^2 - 12s - 8 &= 5s^2 - 6s \\ 7s^2 - 12s - 8 &- 5s^2 + 6s = 0 \\ 0 &= (7s^2 - 5s^2) + (-12s + 6s) + (-8) \\ 0 &= 2s^2 - 6s - 8 \\ 0 &= (2s^2 - 4s - 2s - 8) \\ 0 &= (2s - 4) (s - 2) \end{aligned}$$

.....
.....
.....

مثال: أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية بإكمال المربع : $s^2 - 2s - 4 = 0$

الحل: $s^2 - 2s + 1 - 1 - 4 = 0$ مربع نصف معامل $s = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$ $1 = 1 - 4$

$$\begin{aligned} 0 &= (s - 1)^2 - 5 \\ 0 &= (s - 1 - \sqrt{5}) (s - 1 + \sqrt{5}) \\ s &= 1 - \sqrt{5} \quad \text{أو} \quad s = 1 + \sqrt{5} \\ s &= 1 - \sqrt{5} \quad \text{أو} \quad s = 1 + \sqrt{5} \\ \text{م. ح} &= \{1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\} \end{aligned}$$

موضوعي:

١	مجموعة حل المعادلة $s^2 + 3s = 0$ ، $s \in \{0, 3\}$ هي	أ	ب
٢	مجموعة حل المعادلة $s (s - 12) = 13$ في ح هي :		
(أ) $\{12, -13\}$	(ب) $\{1, -13\}$	(ج) $\{-12, 0\}$	(د) $\{-1, 13\}$

$$\begin{aligned}
 & 2 \text{ ص} - 10 \text{ ص} + 18 = 0 \\
 & (2 \text{ ص} - 6) (3 \text{ ص} - 3) = 0 \\
 & (2 \text{ ص} - 6) (3 \text{ ص} - 3) = 0 \\
 & 2 \text{ ص} - 6 = 0 \quad \text{أو} \quad 3 \text{ ص} - 3 = 0 \\
 & 2 \text{ ص} = 6 \quad \text{أو} \quad 3 \text{ ص} = 3 \\
 & \text{ص} = 3 \quad \text{أو} \quad \text{ص} = 1
 \end{aligned}$$

الوحدة التعليمية الثالثة

الحدوديات النسبية - الهندسة الإحداثية

(١-٣) الحدوديات النسبية وتبسيطها

الحدودية النسبية : كلا من البسط والمقام يمثل حدودية ، والمقام $\neq$ صفر .

أمثلة : $\frac{ص^3}{ص^2 س^2}$ ، $\frac{س + 2}{ص}$ ، $\frac{س + 2}{س - 3}$ ، $\frac{س^2 - 6س + 5}{س^2 - 25}$

عند تبسيط الحدودية النسبية نقسم كلا من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) بينهما.

مثال: ضع في أبسط صورة كلا مما يلي:

$$(١) \quad \frac{١٨ س^٥}{٩ س^٢} = ٢ س^٣$$

$$(٢) \quad \frac{٥ س^٣}{٢٥ س^٧} = \frac{١}{٥ س^٤}$$

$$(٣) \quad \frac{٤ س^٢ ص}{١٢ س ص^٣} =$$

$$(٤) \quad \frac{١٥ + أ}{٢٠} =$$

$$= \frac{س}{٣ ص^٢}$$

$$= \frac{(٣ + أ) ٥}{٢٠} = \frac{٣ + أ}{٤}$$

$$(٥) \quad \frac{٢ + ع}{٦ + ع٣} =$$

$$(٦) \quad \frac{٤ س - ٢}{٢ س - ١} =$$

$$= \frac{٢ + ع}{٣ (٢ + ع)}$$

$$= \frac{٢ (٢ س - ١)}{(٢ س - ١) - ٢} = \frac{٢ (٢ س - ١)}{٢ س - ٣}$$

$$(٧) \quad \frac{٤ - س^٢}{٤ - س^٢} =$$

$$(٨) \quad \frac{٢ س^٢ + ٢ س}{٢ س^٢ + ٣ س + ٢} =$$

$$= \frac{٢ (٢ - س)}{(٢ + س) (٢ - س)}$$

$$= \frac{٢ س (١ + س)}{(١ + س) (٢ + س)}$$

$$= \frac{٢}{٢ + س}$$

$$= \frac{٢ س}{٢ + س}$$

$$\frac{\text{س}^2 - 6\text{س} + 5}{\text{س}^2 - 25} \quad (10)$$

$$\frac{(\dots)(\dots)}{(\dots)(\dots)} =$$

$$\frac{\dots}{\dots} =$$

$$\frac{\text{س} - 3}{\text{س}^2 - 6\text{س} + 9} \quad (9)$$

$$\frac{\text{س} - 3}{(\dots)(\dots)} =$$

$$\frac{\dots}{\dots} =$$

$$\frac{\text{س}^2 - 16}{\text{س}^2 - 64} \quad (12)$$

$$\frac{(\dots)(\dots)}{(\dots)(\dots)} =$$

$$\frac{\dots}{\dots} =$$

$$\frac{\text{س}^2 + 27}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 9} \quad (11)$$

$$\frac{(\text{س} + 3)(\text{س}^2 - 3\text{س} + 9)}{(\text{س}^2 - 3\text{س} + 9)} =$$

$$\frac{\dots}{\dots} =$$

$$\frac{4\text{س}^3 + 16\text{س}^2 - 12}{2\text{س}^2 - 14\text{س} + 16} \quad (14)$$

$$\frac{4\text{س}(\dots)}{2\text{س}(\dots)} =$$

$$\frac{4\text{س}(\dots)(\dots)}{2\text{س}(\dots)(\dots)} =$$

$$\frac{\dots}{\dots} =$$

$$\frac{6\text{س}^2 + 17\text{س} - 28}{\text{س}^2 - \text{س} - 20} \quad (13)$$

$$\frac{(\dots)(6\text{س} - 7)}{(\dots)(\text{س} - 5)} =$$

$$\frac{\dots}{\dots} =$$

موضوعي :

١	$\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{ص} - \text{س}} = ١ -$			أ	ب
٢	الحدودية النسبية التي في أبسط صورة هي :				
(أ)	$\frac{\text{ص} + ١}{\text{ص} - ١}$	(ب)	$\frac{٢ \text{ ن} - ١}{\text{ن} + ٤}$	(ج)	$\frac{\text{س} - ٧}{\text{س} - ٧}$
				(د)	$\frac{٣ \text{ م} - ٣}{١ - \text{م}}$

(٢-٣) ضرب الحدوديات النسبية

ضرب الحدود النسبية يشبه ضرب الأعداد النسبية :

إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ تمثل حدوديتين نسبيتين،
فإن : $\frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د} = \frac{أ \times ج}{ب \times د}$

مثال: أوجد ناتج كما يلي في أبسط صورة :

$$(١) \quad \frac{٤}{٥} \times \frac{٢٤}{٣٥}$$

$$= \frac{٧ \times ٢٤}{٢٤ \times ٣٥}$$

$$= \frac{٤}{٥}$$

$$(٢) \quad \frac{٦س}{٤س٢ - ١} \times \frac{١ + ٢س}{٣}$$

$$= \frac{٦س \times (١ + ٢س)}{(٤س٢ - ١) \times ٣}$$

$$= \frac{٦س \times (١ + ٢س)}{(١ - ٢س)(١ + ٢س) \times ٣}$$

$$= \frac{٢س}{١ - ٢س}$$

$$(٣) \quad \frac{٥ - ٢ن}{٣ - ن} \times \frac{١٢ - ن + ٢ن}{٢٠ - ن٣ + ٢ن٢}$$

$$= \frac{(٥ - ٢ن)(١٢ - ن + ٢ن)}{(٣ - ن)(٢٠ - ن٣ + ٢ن٢)}$$

$$= \frac{(٥ - ٢ن)(٣ - ن)(٤ + ن)}{(٣ - ن)(٤ + ن)(٥ - ٢ن)}$$

$$= ١$$

$$(٤) \quad \frac{٤٩ - ٢ص}{٦ - ص - ٢ص} \times \frac{٢ + ص}{٢ص٢ + ١٤ص}$$

$$= \frac{(٤٩ - ٢ص)(٢ + ص)}{(٦ - ص - ٢ص)(٢ص٢ + ١٤ص)}$$

$$= \frac{(٧ + ص)(٧ - ص)(٢ + ص)}{(٢ + ص)(٣ - ص)(٧ + ص) \times ٢ص}$$

$$= \frac{٧ - ص}{٢ص(٣ - ص)}$$

$$(٥) \quad (س + ٣) \times \frac{س^٢ - ٢٧}{س^٢ - ٩} \quad (٦) \quad \frac{٣}{ص - ٥} \times (ص^٢ - ٢٥ ص)$$

$$\frac{(س + ٣)(س^٢ - ٢٧)}{س^٢ - ٩} = \frac{٣(ص^٢ - ٢٥ ص)}{ص - ٥} =$$

$$\frac{٣ ص (ص^٢ - ٢٥ ص)}{ص - ٥} = \frac{(س + ٣) (.....) (.....)}{(.....) (.....)} =$$

$$\frac{٣ ص (.....) (.....)}{ص - ٥} = ... =$$

$$..... =$$

$$(٨) \quad \frac{س^٥}{س^٢ - ١٦} \times \frac{س^٢ - ٦٤}{س^٢ + ٤ س + ١٦}$$

$$\frac{(.....) (.....)}{(.....) (.....)} =$$

$$\frac{(.....) (.....) (.....)}{(.....) (.....) (.....)} =$$

$$..... =$$

$$(٧) \quad \frac{س^٢ - ٣٦}{س + ٦} \times \frac{١}{س - ٦}$$

$$\frac{(.....)}{(.....) (.....)} =$$

$$\frac{(.....) (.....)}{(.....) (.....)} =$$

$$١ - =$$

موضوعي :

$= \frac{س^٢}{س^٢ + ٦} \times \frac{٣ س + ٦}{س}$			
(أ) $\frac{٦}{س}$	(ب) $\frac{س}{٦}$	(ج) $٦ س$	(د) $\frac{٣}{س}$

(٣-٣) قسمة الحدوديات النسبية

إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ تمثل حدوديتين نسبيتين،

فإن: $\frac{أ}{ب} \div \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{ج} = \frac{أ \times د}{ب \times ج}$

مثال: أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة :

(١) $\frac{١٤}{س} \div \frac{س}{٧}$

$\frac{٧}{س} \times \frac{١٤}{س} =$

$٢ = \frac{س \times ١٤}{٧ \times س} =$

(٢) $(٣ + أ) \div \frac{٣ + أ}{٢ - أ}$

$\frac{١}{٣ + أ} \times \frac{٣ + أ}{٢ - أ} =$

$\frac{١}{٢ - أ} = \frac{١ \times (٣ + أ)}{(٣ + أ)(٢ - أ)} =$

(٤) $\frac{س٢ - ٣س + ٩}{١٦ - س٢} \div \frac{س٣ + ٢٧}{س٢ - ٥س - ٢٤}$

$\frac{.....}{.....} \times \frac{س٣ + ٢٧}{س٢ - ٥س - ٢٤} =$

$\frac{.....}{.....} =$

$\frac{.....}{.....} =$

$..... =$

(٣) $\frac{١ - ن}{٦ + ن٤} \div \frac{١ - ن٣}{٣ - ن + ن٢}$

$\frac{٦ + ن٤}{١ - ن} \times \frac{١ - ن٣}{٣ - ن + ن٢} =$

$\frac{(٦ + ن٤)(١ - ن٣)}{(١ - ن)(٣ - ن + ن٢)} =$

$\frac{(٣ + ن٢)٢ \times (١ + ن + ن٢)(١ - ن)}{(١ - ن)(١ - ن)(٣ + ن٢)} =$

$\frac{(١ + ن + ن٢)٢}{(١ - ن)} =$

$$(٦) \quad \frac{٤س٤ - ٣س٤}{١ + س} \div (١ - س)$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \times \frac{٤س٤ - ٣س٤}{١ + س} =$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} =$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} =$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} =$$

$$(٥) \quad \frac{٤٩ + س١٤ - ٢س١٥}{٤٩ - ٢س١٥} \div \frac{١٥ - س١٠ + ٢س٥}{٧ - س٦ + ٢س٥}$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \times \frac{١٥ - س١٠ + ٢س٥}{٧ - س٦ + ٢س٥} =$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} =$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} =$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} =$$

مثال: أوجد ناتج قسمة $\frac{٢س٣ + ٢س٥}{٤س٤}$ على $(٥س٥ + ٥س٥)$ في أبسط صورة .

الحل :
.....
.....
.....
.....

موضوعي :

١	$\frac{٢ + ص}{٣ + ص} = (٢ + ص) \div \frac{١}{٣ + ص}$			أ	ب
٢	$= \frac{٢م}{٢ - م} \div \frac{٣م}{١ - م}$				
(أ)	$\frac{٢ - م}{١ - م}$	(ب)	$\frac{٢م١٨}{(٢ - م)(١ - م)}$	(ج)	$\frac{٢ - م}{(١ - م)٢}$
				(د)	$\frac{١ - م}{(١ - م)٢}$

(٣-٤) جمع الحدوديات النسبية وطرحها

* جمع الحدوديات النسبية

أولاً : جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحدة
إذا كانت $\frac{أ}{ج}$ ، $\frac{ب}{ج}$ تمثل حدوديتين نسبيتين ،
فإن : $\frac{أ + ب}{ج} = \frac{ب}{ج} + \frac{أ}{ج}$

مثال: أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة :

$$(٢) \quad \frac{ص}{س + ٥} + \frac{٣ ص}{س + ٥}$$

$$= \frac{ص + ٣ ص}{س + ٥}$$

$$= \frac{٤ ص}{س + ٥}$$

$$(١) \quad \frac{٣}{س + ٥} + \frac{٤}{س + ٥}$$

$$= \frac{٣ + ٤}{س + ٥}$$

$$= \frac{٧}{س + ٥}$$

$$(٤) \quad \frac{٣}{م + ٢} + \frac{٥}{م + ٢}$$

$$= \frac{٣ + ٥}{م + ٢}$$

$$= \frac{.....}{.....}$$

$$(٣) \quad \frac{٥}{ن + ١} + \frac{٥ ن}{ن + ١}$$

$$= \frac{٥ + ٥ ن}{ن + ١}$$

$$= \frac{٨}{م + ٢} = \frac{(.....) ٥}{(.....)}$$

ثانياً : جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة

مثال: أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة :

(١) $\frac{ب}{٣ + ب} + \frac{٢}{٢ - ب}$ م . م . أ للمقامات هو (ب - ٢) (ب + ٣)

$$\frac{ب (٢ - ب)}{(٢ - ب) (٣ + ب)} + \frac{(٣ + ب) ٢}{(٣ + ب) (٢ - ب)} =$$

$$\frac{ب ٢ - ٢ ب}{(٢ - ب) (٣ + ب)} + \frac{٦ + ب ٢}{(٣ + ب) (٢ - ب)} =$$

$$\frac{ب ٢ - ٢ ب + ٦ + ب ٢}{(٣ + ب) (٢ - ب)} =$$

$$\frac{٦ + ٢ ب}{(٣ + ب) (٢ - ب)} =$$

(٢) $\frac{٣}{٢ + س} + \frac{٤}{س}$ م . م . أ للمقامات هو س (س + ٢)

$$\frac{\dots \times ٣}{\dots \times (٢ + س)} + \frac{(\dots) ٤}{(\dots) س} =$$

$$\frac{\dots}{(\dots) س} + \frac{\dots}{(\dots) س} =$$

$$\frac{\dots}{(\dots) س} =$$

$$(3) \quad \frac{3}{s+2} + \frac{12}{s^2-4}$$

$$= \frac{3}{s+2} + \frac{12}{(s+2)(s-2)} \quad \text{م.م. أ. للمقامات هو } (s+2)(s-2)$$

$$= \frac{3(s-2)}{(s+2)(s-2)} + \frac{12}{(s+2)(s-2)}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{(s+2)(s-2)} + \frac{12}{(s+2)(s-2)}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{(s+2)(s-2)} = \frac{\dots\dots\dots}{(s+2)(s-2)}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{(\dots\dots\dots)^3}{(s+2)(s-2)} =$$

$$(4) \quad \frac{3}{s+2} + \frac{4}{s^2+3s+2}$$

$$= \frac{3}{\dots\dots\dots} + \frac{4}{(\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots)} \quad \text{م.م. أ. للمقامات هو } (\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots)$$

$$= \frac{(\dots\dots\dots)^3}{(\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots)} + \frac{4}{(\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots)}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

م.م. أ للمقامات هو ١٢ س^٢

$$(٥) \quad \frac{3}{4 \text{ س}} + \frac{1}{6 \text{ س}^2}$$

$$\frac{3 \times 3 \text{ س}}{3 \times 4 \text{ س}} + \frac{2 \times 1}{2 \times 6 \text{ س}^2} =$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{12 \text{ س}^2} = \frac{9 \text{ س}}{12} + \frac{2}{12} =$$

$$(٦) \quad \frac{2 \text{ س} + 4}{6 \text{ س}^2 - 6 \text{ س}} + \frac{3 \text{ س} + 9}{9 \text{ س}^2 - 9}$$

$$\frac{(\dots\dots\dots)^2}{(\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots)} + \frac{(3 \text{ س} + 9)}{(\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots)} =$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{2}{\dots\dots\dots} + \frac{1}{\dots\dots\dots} =$$

* طرح الحدوديات النسبية

أولاً : طرح الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحدة
 إذا كانت $\frac{أ}{ج}$ ، $\frac{ب}{ج}$ تمثل حدوديتين نسبيتين ،
 فإن : $\frac{أ}{ج} - \frac{ب}{ج} = \frac{أ - ب}{ج}$

مثال: أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة :

$$(٢) \quad \frac{٢ + هـ}{١ - هـ} - \frac{١ + هـ ٢}{١ - هـ}$$

$$= \frac{(٢ + هـ) - (١ + هـ ٢)}{١ - هـ}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{١ - هـ}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{١ - هـ}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$(٤) \quad \frac{٣}{٢ - ١} - \frac{١}{١ - ب ٢}$$

$$= \frac{٣}{(١ - ب ٢) -} - \frac{١}{١ - ب ٢}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{٣}{١ - ب ٢} + \frac{١}{١ - ب ٢} =$$

$$(١) \quad \frac{م}{١ - م} - \frac{م ٣}{١ - م}$$

$$= \frac{م - م ٣}{١ - م}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$(٣) \quad \frac{٩}{٣ + س} - \frac{س ٢}{٣ + س}$$

$$= \frac{٩ - س ٢}{٣ + س}$$

$$= \frac{(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)}{٣ + س}$$

$$= \dots\dots\dots$$

ثانياً : طرح الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة

مثال: أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة :

(١) $\frac{5}{2+s} - \frac{6}{3-s}$ م.م. أ للمقامات هو (.....) (.....)

$$\frac{(\dots) \times 5}{(\dots)(2+s)} - \frac{(\dots) \times 6}{(\dots)(3-s)} =$$

$$\frac{\dots - 5s}{(2+s)(3-s)} - \frac{6s + \dots}{(2+s)(3-s)} =$$

$$\frac{\dots}{(2+s)(3-s)} = \frac{(\dots - 5s) - (\dots + 6s)}{(2+s)(3-s)} =$$

$$\frac{\dots}{(2+s)(3-s)} =$$

(٢) $\frac{3-n}{9-n^2} - \frac{3+n}{6-n+n^2}$

$$\frac{(3-n)}{(3-n)(3+n)} - \frac{(3+n)}{(2-n)(3+n)} =$$

م.م. أ للمقامات هو (.....) (.....) $\frac{1}{3+n} - \frac{1}{2-n} =$

$$\frac{(\dots) \times 1}{(\dots)(3+n)} - \frac{(\dots) \times 1}{(\dots)(2-n)} =$$

$$\frac{(\dots) - (\dots)}{(3+n)(2-n)} = \frac{\dots}{(3+n)(2-n)} - \frac{\dots}{(3+n)(2-n)} =$$

$$\frac{\dots}{(3+n)(2-n)} = \frac{\dots}{(3+n)(2-n)} =$$

$$(3) \quad \frac{3}{3 + \text{ص}} - \frac{\text{ص} - 6}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} - 18}$$

$$\frac{3}{3 + \text{ص}} - \frac{\text{ص} - 6}{(\dots)(\dots)} =$$

$$\frac{3}{3 + \text{ص}} - \frac{\dots}{\dots} =$$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} =$$

$$(4) \quad \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 6\text{س} + 9} - \frac{\text{س}}{\text{س}^2 - 9}$$

$$\text{م. م. أ للمقامات هو } (3 + \text{س})^2 (3 - \text{س}) \quad \frac{\text{س}}{(3 + \text{س})(3 + \text{س})} - \frac{\text{س}}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})} =$$

$$\frac{\text{س}(3 - \text{س})}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})(3 + \text{س})} - \frac{\text{س}(3 + \text{س})}{(3 + \text{س})(3 - \text{س})(3 + \text{س})} =$$

$$\frac{\dots}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})(3 + \text{س})} - \frac{\dots}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})(3 + \text{س})} =$$

$$\frac{(\dots) - (\dots)}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})(3 + \text{س})} =$$

$$\frac{\dots}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})(3 + \text{س})} = \frac{\dots}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})(3 + \text{س})} =$$

موضوعي :

١	$\frac{٥}{٤ + س٢} = \frac{٣}{٣ + س} + \frac{٢}{١ + س}$			أ	ب
٢	$\frac{س٣}{٢ - س٣} = \frac{س٢}{٢ - س٣} - \frac{س٥}{٢ - س٣}$			أ	ب
٣	$= \frac{٤}{٢ - س} - \frac{س٢}{٢ - س}$				
(أ) س - ٢	(ب) س + ٢	(ج) س - ٢	(د) ١		
٤	$= \frac{٤}{٢ + س} + \frac{س٢}{٢ + س}$				
(أ) $\frac{س٦}{٢ + س}$	(ب) س٢	(ج) ٢	(د) ١		
٥	$= \frac{١}{١ + ص} + \frac{ص}{١ + ص} - \frac{٢ص}{١ + ص}$				
(أ) ص + ٢	(ب) $\frac{١ + ص}{٣ + ص}$	(ج) $\frac{٣ + ص}{١ + ص}$	(د) ١		
٦	$= \frac{١}{س - ١} + \frac{س}{١ - س}$				
(أ) صفر	(ب) ١	(ج) ١ -	(د) $\frac{س + ١}{س - ١}$		

(٥-٣) المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي

البعد بين النقطتين أ (س_١ ، ص_١) ، ب (س_٢ ، ص_٢) هو :

$$أب = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

مثال: أوجد البعد بين النقطتين أ (٦ ، ٣) ، ب (٩ ، ٦) .

الحل: أب = $\sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$

$$= \sqrt{(٦ - ٩)^2 + (٣ - ٦)^2}$$

$$= \sqrt{(٣)^2 + (٣)^2}$$

$$= \sqrt{٩ + ٩}$$

$$= ١٨ \text{ وحدات طول}$$

مثال: إذا كانت أ (١٠ ، -٥) ، ب (٤ ، ٣) ، فأوجد طول أب .

الحل: أب = $\sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$

$$= \sqrt{(..... -)^2 + (..... -)^2}$$

$$= \sqrt{(.....)^2 + (.....)^2}$$

$$= \sqrt{..... + ...}$$

$$= \text{ وحدات طول}$$

مثال: أوجد البعد بين النقطتين ل (٤ ، ٠) ، ن (٠ ، -٢) .

الحل:

.....

.....

.....

.....

إذا كانت القطعة المستقيمة موازية لأحد المحاور ، يمكن إيجاد طولها دون استخدام القانون العام .

أ ب موازية للمحور السيني : $أ ب = |س_٢ - س_١|$

ج د موازية للمحور الصادي : $ج د = |ص_٢ - ص_١|$

مثال: أوجد البعد بين النقطتين ع (٣- ، ٢) ، ك (١- ، ٢) .

الحل: ع ك موازية للمحور السيني

$$ع ك = |س_٢ - س_١| = |١- - ٣-| = |-٣ - -١-| = |-٢| = ٢ \text{ وحدة طول}$$

مثال: ط ل قطر في دائرة ، حيث ط (٠ ، ٢) ، ل (٨ ، ٤-) . أوجد طول نصف قطر الدائرة .

الحل: طول نصف قطر الدائرة = $\frac{1}{2} ط ل = \frac{1}{2} \sqrt{(٢ - ٠)^2 + (٤- - ٨)^2}$

.....

.....

.....

.....

مثال: أوجد طول قطر المستطيل أ ب ج د الذي إحداثيات رؤوسه هي :

أ (٦ ، ٢) ، ب (٦ ، ٨) ، ج (١- ، ٨) ، د (١- ، ٢)

الحل: قطرا المستطيل أ ج ، ب د متطابقان .

$$أ ج = \sqrt{(٦ - ١-)^2 + (٢ - ٨)^2}$$

.....

.....

.....

.....

مثال : المثلث ل م ن إحداثيات رؤوسه هي :

ل (٥ ، ٢) ، م (١ - ، ٤) ، ن (٥ ، ٦)

(١) بيّن نوع المثلث بالنسبة إلى أضلاعه .

(٢) بيّن نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه .

الحل :

ل م =

م ن =

ل ن =

نوع المثلث بالنسبة إلى أضلاعه هو

$$..... = \sqrt{.....} = \sqrt{.....}$$

$$..... = ... + ... = \sqrt{.....} + \sqrt{.....} = \sqrt{.....} + \sqrt{.....}$$

نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه هو

موضوعي :

١	إذا كانت أ (٣ ، ١) ، ب (٥ - ، ١) فإن $\overline{أ ب}$ توازي محور السينات .	أ	ب
٢	إذا كانت ق (٠ ، ٣) ، ك (٠ ، ١) فإن : ق ك = ... وحدة طول .		
(أ) ٤	(ب) ٢	(ج) $\sqrt{٢}$	(د) ٢ -

(٦-٣) إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي

في المستوى الإحداثي إذا كانت أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) ، فإن :

النقطة ج منتصف $\overline{AB}$ هي : ج ($\frac{س١ + س٢}{٢}$ ، $\frac{ص١ + ص٢}{٢}$)

مثال: أوجد النقطة م منتصف $\overline{AB}$ حيث أ (٢- ، ٥) ، ب (٨ ، ٣-).

الحل: إحداثيا نقطة المنتصف م ($\frac{س١ + س٢}{٢}$ ، $\frac{ص١ + ص٢}{٢}$)

$$= (\frac{٢- + ٨}{٢} ، \frac{٥ + ٣-}{٢}) =$$

$$= (\frac{٤}{٢} ، \frac{٦}{٢}) =$$

$$= (٢ ، ٣)$$

مثال: أوجد النقطة ن منتصف $\overline{جـ د}$ حيث ج (٧ ، ٣-) د (٦- ، ٩-).

الحل: إحداثيا نقطة المنتصف ن ($\frac{س١ + س٢}{٢}$ ، $\frac{ص١ + ص٢}{٢}$)

$$= (\frac{..... + ...}{٢} ، \frac{..... + ...}{٢}) =$$

$$= (\frac{.....}{٢} ، \frac{.....}{٢}) =$$

$$= (..... ،) =$$

مثال: أوجد النقطة ع منتصف $\overline{ف ق}$ حيث ف (١١- ، ٨) د (٤ ، ٨).

الحل:

مثال: إذا كانت ك (٣ ، ٩) تتصف $\overline{د ف}$ حيث د (١- ، ٣-) ، فأوجد النقطة ف .

الحل: د (١- ، ٣-) ^{١ ص ١ س} ، ف (٢ ص ٢ س)

$$ك (٣ ، ٩) = (\frac{٢ ص + ١-}{٢} ، \frac{٢ س + ٣-}{٢})$$

$$٣ = \frac{٢ ص + ١-}{٢}$$

$$٦ = ٢ ص + ١-$$

$$١ + ٦ = ٢ ص$$

$$٧ = ٢ ص$$

$$٩ = \frac{٢ س + ٣-}{٢}$$

$$١٨ = ٢ س + ٣-$$

$$٣ + ١٨ = ٢ س$$

$$٢١ = ٢ س$$

ف (٧ ، ٢١)

مثال: إذا كانت م (١- ، ٢-) تتصف $\overline{أ ب}$ حيث أ (٣- ، ٢) ، فأوجد النقطة ب .

الحل:

مثال: $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة التي مركزها م حيث أ (١- ، ٥) ، ب (٧ ، ١-) ، أوجد :
(١) النقطة م مركز الدائرة .

م تمثل نقطة منتصف $\overline{أ ب}$ ← م ($\frac{\dots + \dots}{٢}$ ، $\frac{\dots + \dots}{٢}$)

$$(\dots ، \dots) = (\frac{\dots}{٢} ، \frac{\dots}{٢}) =$$

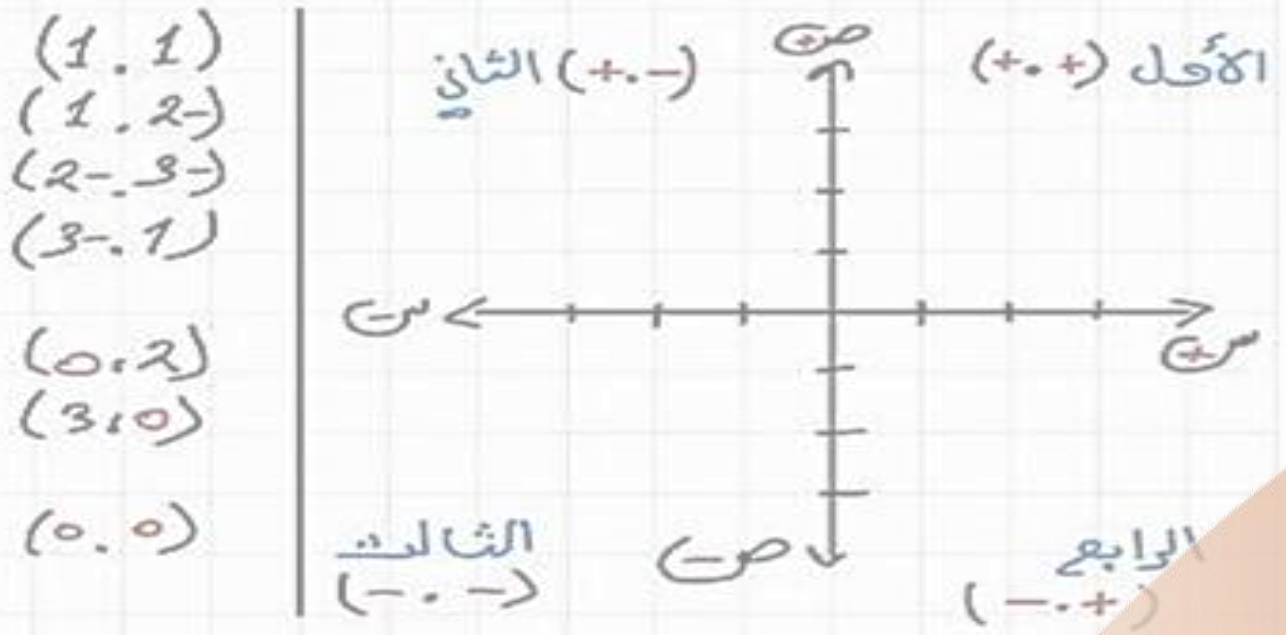
(٢) طول نصف قطر الدائرة .

طول نصف قطر الدائرة يمثل البعد بين النقطتين م ، أ أو م ، ب

$$\begin{aligned} \sqrt{٢(\dots) + ٢(\dots)} &= \sqrt{٢(\dots - \dots) + ٢(\dots - \dots)} = م أ \\ &= \sqrt{\dots + \dots} = \\ &= \sqrt{\dots} = \text{وحدات طول} \end{aligned}$$

موضوعي :

١	إذا كانت ج منتصف $\overline{أ ب}$ وكانت ج (٥ ، ٣) ، أ (٣ ، ١-) فإن ب (٤ ، ١) .	أ	ب
---	--	---	---



الوحدة التعليمية الرابعة

هندسة التحويلات - الإحصاء والاحتمال

(١-٤) الدوران في المستوى

عناصر الدوران الأساسية: (١) مركز الدوران (م) ← نقطة صامدة

(٢) قياس زاوية الدوران (هـ °)

(٣) اتجاه الدوران: (أ) مع اتجاه حركة عقارب الساعة ويكون الدوران سالباً

(ب) عكس اتجاه عقارب الساعة ويكون الدوران موجباً

مثال: أكمل كلا مما يلي :

- (١) د (م ، ٣٠ °) هو: دوران حول في اتجاه حركة عقارب الساعة بزاوية
- (٢) د (م ، ١٢٠ °) هو: دوران حول في اتجاه حركة عقارب الساعة بزاوية

حيث (و) نقطة الأصل

إذا كانت (س ، ص) نقطة في المستوى الإحداثي ، فإن :

$$\begin{array}{l} \text{د (و ، -٩٠ °)} \\ \text{د (و ، ٢٧٠ °)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(ص ، -س)} \\ \text{(ص ، -س)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{د (و ، -١٨٠ °)} \\ \text{د (و ، ١٨٠ °)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(ص ، -س)} \\ \text{(ص ، -س)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{د (و ، ٢٧٠ °)} \\ \text{د (و ، ٩٠ °)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(ص ، -س)} \\ \text{(ص ، -س)} \end{array}$$

مثال: أكمل كلا مما يلي حيث (و) نقطة الأصل :

$$\begin{array}{l} \text{د (و ، ٩٠ °)} \\ \text{د (و ، ٩٠ °)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(٢ ، ٤)} \\ \text{(٣ ، ٥)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{د (و ، ٩٠ °)} \\ \text{د (و ، ٩٠ °)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(٣ ، ٥)} \\ \text{(٣ ، ٥)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{د (و ، ١٨٠ °)} \\ \text{د (و ، ١٨٠ °)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(٣ ، ٠)} \\ \text{(٣ ، ٠)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{د (و ، ١٨٠ °)} \\ \text{د (و ، ١٨٠ °)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(٤- ، ٣-)} \\ \text{(٤- ، ٣-)} \end{array}$$

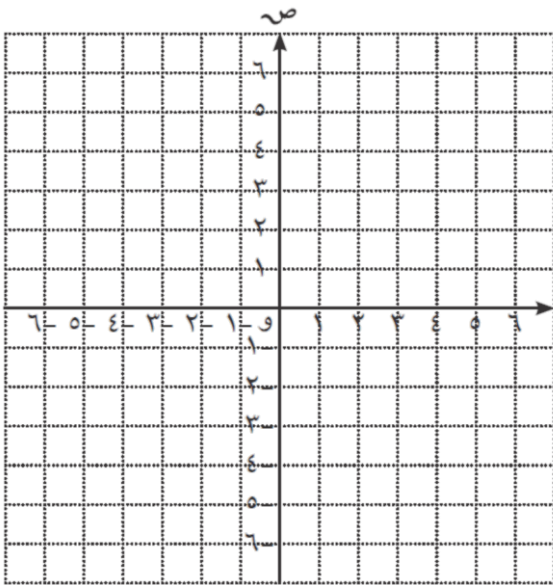
$$\begin{array}{l} \text{د (و ، ٢٧٠ °)} \\ \text{د (و ، ٢٧٠ °)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(٠ ، ٢-)} \\ \text{(٠ ، ٢-)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{د (و ، ٢٧٠ °)} \\ \text{د (و ، ٢٧٠ °)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{(٦- ، ٢)} \\ \text{(٦- ، ٢)} \end{array}$$

خواص الدوران:

الدوران يحافظ على:

- | | | |
|---------------|-------------|----------------------|
| (١) الاستقامة | (٢) البينية | (٣) قياسات الزوايا |
| (٤) التوازي | (٥) الأبعاد | (٦) الاتجاه الدوراني |



مثال: ارسم المثلث ل م ن الذي إحداثيات رؤوسه:

ل (-٢ ، ٠) ، م (٣ ، ٤) ، ن (-٦ ، ٣) ،

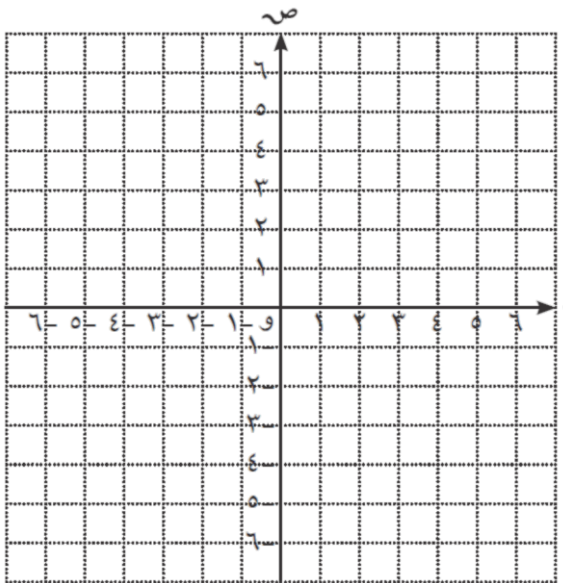
ثم ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها 180° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

الحل: (س ، ص) د (و ، 180°) ← (-س ، -ص)

ل (-٢ ، ٠) ← ل' (..... ،)

م (٣ ، ٤) ← م' (..... ،)

ن (-٦ ، ٣) ← ن' (..... ،)



مثال: ارسم المربع أ ب ج ه الذي إحداثيات رؤوسه :

أ (٢ ، ٢) ، ب (٦ ، ٢) ، ج (٦ ، ٦) ،

ه (٢ ، ٦) ثم ارسم صورته تحت تأثير

د (و ، 270°) حيث و نقطة الأصل .

الحل: (س ، ص) د (و ، 270°) ← (-ص ، س)

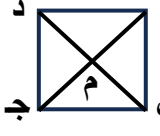
أ (٢ ، ٢) ← أ' (..... ،)

ب (٦ ، ٢) ← ب' (..... ،)

ج (٦ ، ٦) ← ج' (..... ،)

ه (٢ ، ٦) ← ه' (..... ،)

موضوعي :

ب	أ	د (و، - ۳۰°) يكافئ د (و، ۳۳۰°)	۱
د	أ	أ ب ج د مربع تقاطع قطريه في النقطة م ، صورة Δ أ ب م بدوران د (م، - ۲۷۰°) هي :	۲
د	ب		
(أ) Δ ب ج م	(ب) Δ أ ب م	(ج) Δ ج د م	(د) Δ د أ م

(٢-٤) التكبير

إذا كانت (س ، ص) نقطة في المستوى الإحداثي حيث (و) نقطة الأصل، م معامل التكبير، فإن:

(س ، ص) ← ت (و ، م) (م س ، م ص)

إذا كان $م < ١$ فالتحويل يمثل تكبيراً .

وإذا كان صفر $م > ١$ فالتحويل يمثل تصغيراً .

مثال: أكمل كلا مما يلي حيث (و) نقطة الأصل :

- (١ ، ٣) ← ت (و ، ٥) (..... ،)
- (٢- ، ٠) ← ت (و ، ٦) (..... ،)
- (٨ ، ٤) ← ت (و ، $\frac{١}{٤}$) (..... ،)
- (٦ ، ٤-) ← ت (و ، $\frac{١}{٢}$) (..... ،)
- (١٢- ، ١٠-) ← ت (و ، $\frac{٣}{٢}$) (..... ،)
- (٧- ، ٩) ← ت (و ، ١) (..... ،)

خواص التكبير :

(٣) قياسات الزوايا

(٢) البينية

(١) الاستقامة

(٥) الاتجاه الدوراني

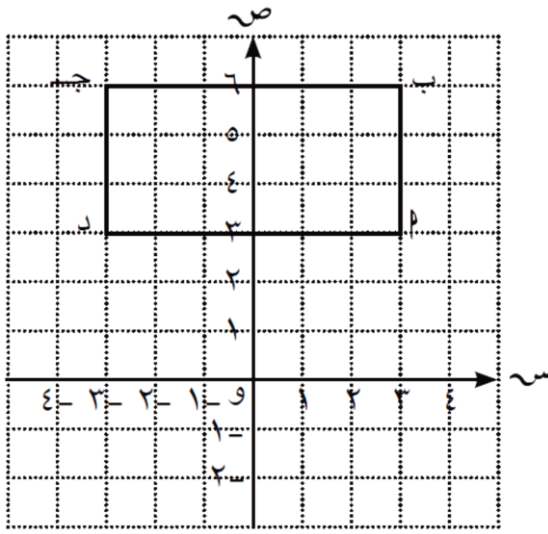
(٤) التوازي

التكبير لا يحافظ على الأبعاد .

مثال: ارسم المثلث أ ب ج حيث

أ (٠ ، ٢) ، ب (٢ ، ٠) ، ج (٢- ، ٢-) ، ثم ارسم صورته تحت تأثير ت (و ، ٣) حيث (و) نقطة الأصل.

- الحل:** (س ، ص) ← ت (و ، ٣) (٣ س ، ٣ ص)
- أ (٠ ، ٢) ← (..... ،) أ
- ب (٢ ، ٠) ← (..... ،) ب
- ج (٢- ، ٢-) ← (..... ،) ج



مثال: اكتب النقاط التي تمثل رؤوس الشكل أ ب ج د ،

ثم ارسم صورة الشكل مستخدماً التصغير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{1}{3}$.

الحل: (س ، ص) ← ت ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}$) ← ($\frac{1}{3}$ س ، $\frac{1}{3}$ ص)

أ (..... ،) ← أ (..... ،)

ب (..... ،) ← ب (..... ،)

ج (..... ،) ← ج (..... ،)

د (..... ،) ← د (..... ،)

نسبة محيط صورة الشكل الهندسي إلى محيطه تساوي معامل التكبير (م) .

نسبة مساحة صورة الشكل الهندسي إلى مساحته تساوي مربع معامل التكبير (م^٢) .

مثال: شكل هندسي مساحته ٢٥ م^٢ ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ما هي ١٠٠ م^٢، أوجد معامل التكبير.

الحل:

$$^2(م) = \frac{\text{مساحة صورة الشكل}}{\text{مساحة الشكل}}$$

$$^2(م) = \frac{100}{25}$$

$$^2م = 4 \leftarrow م = 2$$

مثال: أوجد معامل التكبير أو التصغير (م) في كل من الحالات الآتية حيث النقطة أ صورة النقطة ب ، والنقطة ب صورة النقطة أ .

$$(1) \text{ أ } (2, 1) , \text{ أ } (8, 4)$$

$$م = \frac{8}{4} = \dots \text{ أو } م = \frac{4}{8} = \dots$$

$$(2) \text{ أ } (6, 9) , \text{ أ } (2, 3)$$

$$م = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

(۳) $أب = 6$ سم ، $أب = 30$ سم

$$م = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

مثال: شکل هندسی محیطه ۱۲ م و محیط صورته تحت تأثیر تکبیر ما هي ۴۸ م، أوجد معامل التكبير.

الحل:

.....

.....

.....

مثال: مستطيل بعده ۳ سم ، ۵ سم . أوجد محيط ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ت (۳ ، و) .

الحل:

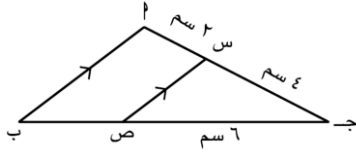
.....

.....

.....

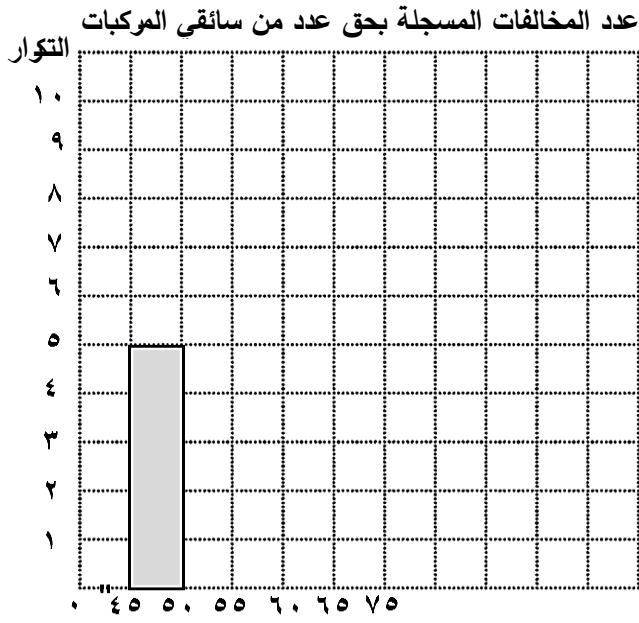
.....

موضوعي :

ب	أ	مثلت أطوال أضلاعه ۵ سم ، ۶ سم ، ۳ سم ، فإن محيط صورته تحت تكبير ت (۲ ، و) هو ۲۸ سم	۱
		في الشكل المقابل : إذا كانت $\overline{س ص}$ صورة $\overline{أ ب}$ بتكبير مركزه ج ، فإن معامله هو :	۲
(أ)	$\frac{2}{3}$	(ب)	$\frac{3}{2}$
(ج)	$\frac{1}{2}$	(د)	۲
۳	إذا كانت النقطة ج (۲ ، ۱) هي صورة النقطة أ بتصغير ت (و ، $\frac{1}{3}$) ، فإن أ هي		
(أ)	$(\frac{2}{3} , \frac{1}{3})$	(ب)	(۳ ، ۱)
(ج)	(۶ ، ۳)	(د)	(۵ ، ۳)
۴	شكل هندسي مساحته ۲ سم ^۲ وساحة صورته تحت تأثير تكبير ما هي ۵۰ سم ^۲ ، فإن معامل التكبير هو :		
(أ)	۲۵	(ب)	۱۲،۵
(ج)	۵	(د)	۱۰۰

(٣-٤) المدرج التكراري

المدرج التكراري : هو تمثيل بياني بالأعمدة المتلاصقة لمجموعة بيانات منظمة في جدول تكراري ذي فئات .



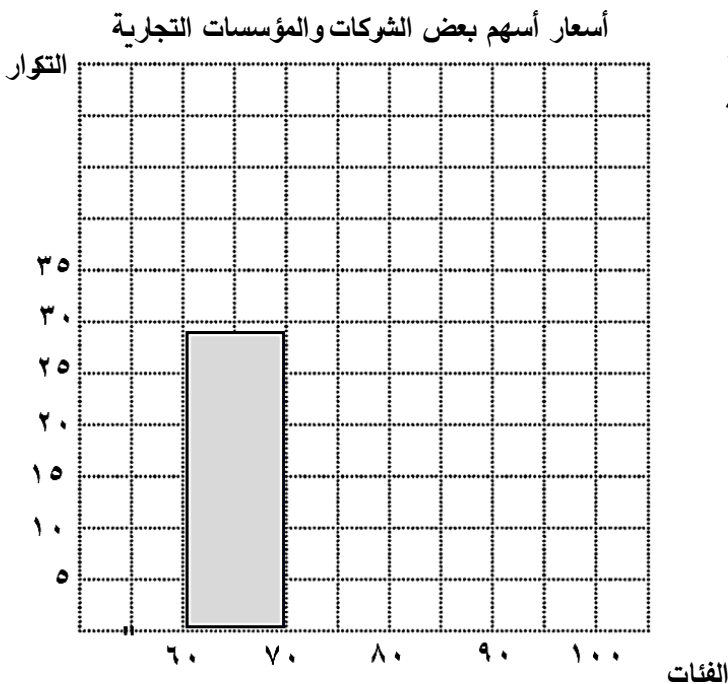
مثال: السرعة القصوى في أحد الشوارع التجارية في مدينة الكويت العاصمة ٤٥ كم / س ، يبين الجدول أدناه عدد المخالفات المسجلة بحق عدد من سائقي المركبات الذين لم يلتزموا بالقانون .

مثل البيانات الواردة في الجدول باستخدام المدرج التكراري ،

الفئات	٤٥ -	٥٠ -	٥٥ -	٦٠ -	٦٥ -
التكرار	٥	٨	١٠	٦	٣

ثم أجب عما يلي :

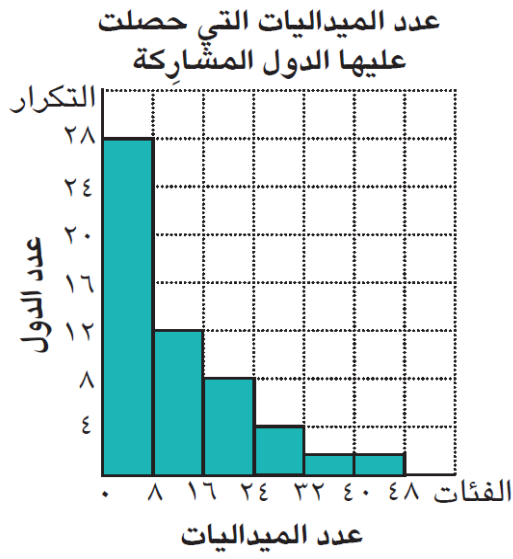
كم عدد مخالفات سائقي المركبات الذين بلغت سرعتهم ٥٥ كم / س فأكثر ؟



مثال: يوضح الجدول التكراري أدناه فئات أسعار أسهم بعض الشركات والمؤسسات التجارية المدرجة في إحدى الأسواق المالية بالدولار الأمريكي .

اصنع مدرجاً تكرارياً لهذه البيانات .

الفئات	٦٠ -	٧٠ -	٨٠ -	٩٠ -
التكرار	٢٨	٣٤	١٦	١٠



مثال: يمثل المدرج التكراري المقابل عدد الميداليات التي حصدها الدول المشاركة في إحدى الدورات الأولمبية .

أجب عما يلي :

(١) ما طول الفئة ؟

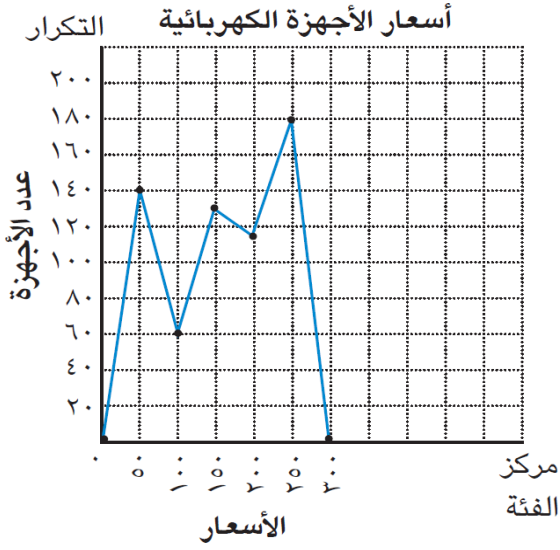
(٢) كم عدد الدول التي حصلت على ٣٢ ميدالية فأكثر؟

.....

(٣) كم عدد الدول التي حصلت على أقل من ٢٤ ميدالية؟

.....

(٤-٤) المضلع التكراري



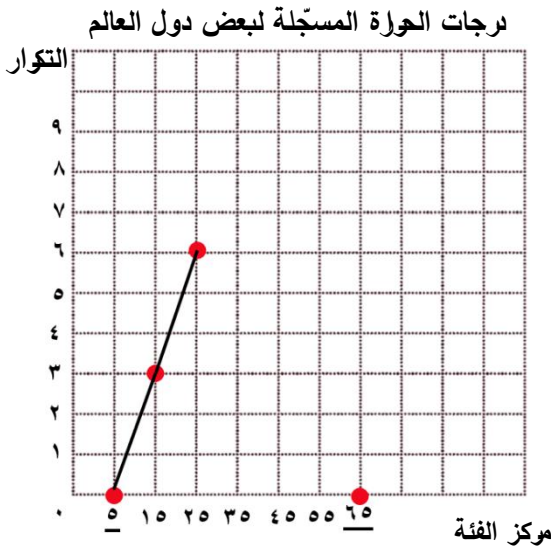
مثال: يمثل الشكل الآتي أسعار الأجهزة الكهربائية التي بيعت خلال شهر في أحد المحلات .

تأمل الشكل ، ثم أجب عما يلي :

(١) ماذا يسمى التمثيل البياني؟ المضلع التكراري

(٢) ما مركز الفئة الأكثر تكراراً؟

(٣) ما التكرار المقابل لمركز الفئة ١٥٠؟



مثال: يوضح الجدول الآتي درجات الحرارة المسجلة لبعض دول العالم خلال أحد الأشهر .

الفئات	- ٥٠	- ٤٠	- ٣٠	- ٢٠	- ١٠
التكرار	٥	٧	٩	٦	٣
مركز الفئة				٢٥	١٥

(١) أكمل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأعلى للفئة} + \text{الحد الأدنى}}{2}$$

$$\text{مركز الفئة الأولى} = \frac{20 + 10}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\text{مركز الفئة الثانية} = \frac{30 + 20}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

(٢) مثل البيانات في الجدول السابق بمضلع تكراري .

مثال: يوضح الجدول الآتي أوزان بعض متعلمي الصف التاسع .

أوزان بعض متعلمي الصف التاسع

التكرار

الفئات	- ٤٥	- ٥٥	- ٦٥	- ٧٥	- ٨٥	- ٩٥
التكرار	٦	٧	٢١	٢٧	١١	٣
مركز الفئة						

(١) تأمل الجدول السابق ، ثم أجب عما يلي :

- ما طول الفئة ؟

طول الفئة = الحد الأعلى للفئة - الحد الأدنى للفئة

مركز الفئة

$$\text{طول الفئة} = ٥٥ - ٤٥ = ١٠$$

- كم عدد المتعلمين الذين يبلغ وزنهم ٦٥ كيلوجراماً فأكثر ؟

(٢) أكمل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

$$\text{مركز الفئة الأولى} = \frac{\dots + \dots}{٢} = \frac{\dots}{٢} = \dots$$

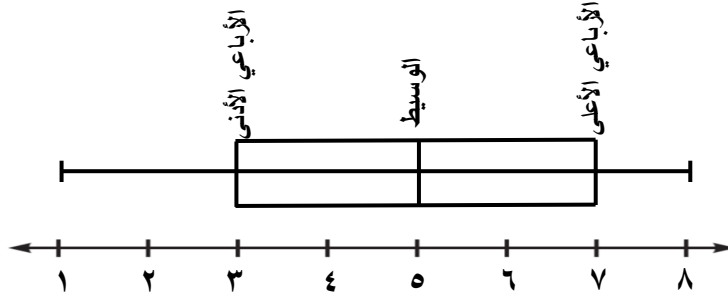
(٣) مثل البيانات في الجدول السابق بمضلع تكراري .

موضوعي :

١	طول الفئة (٩ - ٤) هو ٥			أ	ب
٢	مركز الفئة الثالثة هو				
	الفئات	- ١٤	- ١٨	- ٢٢	- ٢٦
	التكرار	٦	١٨	١٨	١٠
(أ)	١٨	(ب) ٢٠	(ج) ٢٢	(د) ٢٤	
٣	في البيانات الإحصائية ، إذا كان مركزا فئتين متتاليتين هما ١٥ ، ٢٥ على الترتيب ، فإن طول الفئة يساوي :				
(أ) ١٠	(ب) ١٥	(ج) ٢٠	(د) ٢٥		

(٥-٤) مخطط الصندوق ذي العارضتين

- مثال:** في مجموعة البيانات الآتية : ٦ ، ٧ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٤
- (١) أوجد كلا مما يلي : رتب البيانات تصاعدياً : ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨
- القيمة الصغرى للبيانات هي ١
 - القيمة الكبرى للبيانات هي ٨
 - المدى هو $٧ = ٨ - ١$
 - الوسيط هو ٥ ← الأرباعي الأوسط
 - الأرباعي الأدنى هو ٣ ← الوسيط للنصف الأدنى من مجموعة البيانات (١ ، ٣ ، ٤)
 - الأرباعي الأعلى هو ٧ ← الوسيط للنصف الأعلى من مجموعة البيانات (٦ ، ٧ ، ٨)
- (٢) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لهذه المجموعة من البيانات .

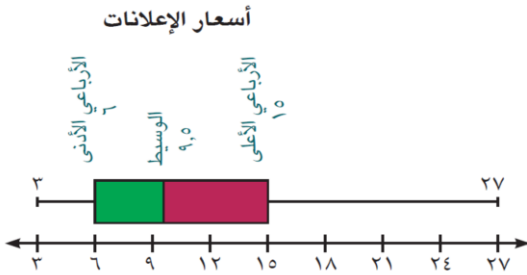


مثال: يتغير سعر الإعلان في الصحف الكبرى وفقاً ليوم الإعلان وعدد أسطره ومساحته ، إليك بعض هذه الأسعار بالدينار :

١٦ ، ٢٧ ، ١٤ ، ١٠ ، ٩ ، ٢٥ ، ٨ ، ١٢ ، ٧ ، ٦ ، ١٥ ، ٣ ، ٤ ، ٥

اصنع مخططاً لصندوق ذي عارضتين لهذه الأسعار .

الحل : رتب القيم تصاعدياً : ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٢٧



$$\text{المدى} = 27 - 3 = 24$$

$$\text{الوسيط} = \frac{10 + 9}{2} = 9,5$$

الأربعي الأدنى = ٦ ← (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩)

الأربعي الأعلى = ١٥ ← (١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٢٧)

مثال: تصفحت حصّة كتيباً دعائياً لأحد متاجر الملابس . سجّلت أسعار الفساتين فيه (بالدينار) كالآتي :

٢٥ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٤ ، ٢٠

ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لمجموعة البيانات السابقة .

الحل : رتب القيم تصاعدياً : ١٦ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٥

المدى = ... - = ...

الوسيط = $\frac{..... + ...}{2}$ = ...

الأربعاء الأدنى = $\frac{..... + ...}{2}$ = ... ← (١٦ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٢)

الأربعاء الأعلى = $\frac{..... + ...}{2}$ = ... ← (٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٥)



مثال: يبين مخطط الصندوق ذي العارضتين أوزان بعض متعلمي الصف التاسع بالكيلوجرامات .

أكمل كلا مما يلي :

(١) القيمة الصغرى للبيانات هي

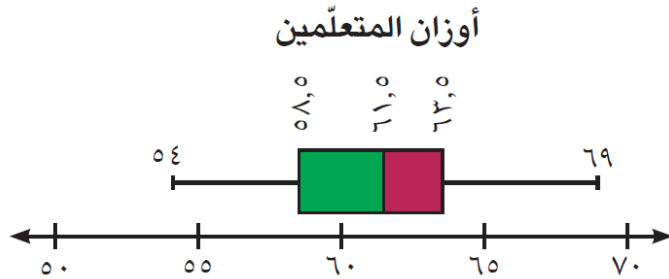
والقيمة الكبرى للبيانات هي

(٢) الأربعاء الأوسط (الوسيط) هو

(٣) الأربعاء الأدنى هو

(٤) الأربعاء الأعلى هو

موضوعي :



ب	أ	في مخطط الصندوق ذي العارضتين المقابل، الأربعاء الأعلى لهذه البيانات هو ٢٠	١
		في مخطط الصندوق ذي العارضتين التالي ، المدى لهذه البيانات هو :	٢
		(أ) ٥٠ (ب) ٤٣ (ج) ٤٠ (د) ٢٠	

(٦-٤) الترجيح والعدالة - الاحتمال

ترجيح حدث ما : هو نسبة عدد نواتج وقوع الحدث إلى عدد نواتج عدم وقوعه .

$$\text{ترجيح حدث ما} = \frac{\text{عدد نواتج وقوع الحدث}}{\text{عدد نواتج عدم وقوع الحدث}}$$

مثال: أوجد ترجيح كل حدث مما يلي :

(١) ظهور صورة عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة .

ف = { ص ، ك }

ترجيح (ظهور صورة) = $\frac{1}{2}$ أو ١ : ١

(٢) ظهور العدد (٢ أو ٥) عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة .

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ترجيح (ظهور صورة) = $\frac{2}{6}$ أو ٢ : ٣

(٣) سحب كرة خضراء من حقيبة تحتوي على ٤ كرات خضراء و ٣ كرات حمراء .

ترجيح (سحب كرة خضراء) = $\frac{4}{7}$ أو ٤ : ٣

اللعبة التي يكون ترجيح الفوز فيها متساوياً لجميع اللاعبين (تكافؤ الفرص) تسمى لعبة عادلة.

مثال: أوجد ترجيح الفوز في كل حالة ، ثم اذكر إذا كانت اللعبة عادلة أم لا .

(١) عند رمي قطعة نقود معدنية ، يحصل سالم على نقطة إذا ظهرت صورة ويحصل سعود على نقطة إذا ظهرت كتابة .

ترجيح فوز سالم = ...

ترجيح فوز سعود = ...

اللعبة

(٢) عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ ، تحصل حصة على نقطة إذا ظهر العدد ١ وتحصل عبير

على نقطة إذا ظهر العدد (٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥) وتحصل هدى على نقطة إذا ظهر العدد ٦ .

ترجيح فوز حصة = ...

ترجيح فوز عبير = ...

ترجيح فوز هدى = ...

اللعبة

لأي تجربة عشوائية ، احتمال وقوع حدث (أ) :

$$L(أ) = \frac{\text{عدد نواتج وقوع الحدث (أ)}}{\text{عدد كل النواتج الممكنة}}$$

مثال: يحوي صندوق بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٠ ، إذا سحبت بطاقة عشوائياً ، فأوجد كلا مما يلي :

(١) ل (ظهور عدد أولي) = $\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$ ← ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

(٢) ل (ظهور عامل من عوامل العدد ٤) = $\frac{3}{10}$ ← ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

(٣) ترجيح (ظهور عامل من عوامل العدد ٤) = ...

(٤) ترجيح (ظهور عدد زوجي) = ...

(٥) ترجيح (ظهور العدد ١٠) = ...

مثال: يمارس ٢٥ متعلماً في الصف التاسع رياضات مختلفة ، منهم ١٠ يمارسون رياضة كرة السلة فقط ،

٨ يمارسون رياضة كرة القدم فقط والباقيون يمارسون رياضة الجري فقط .

اختير متعلم عشوائياً . ما احتمال أن يكون هذا المتعلم :

(١) ممارساً كرة السلة ؟

(٢) لا يمارس رياضة الجري ؟

(٣) ممارساً كرة القدم أو رياضة الجري ؟

مثال: إذا كان ترجيح حدث ما هو ٣ : ٢ ، فما احتمال هذا الحدث ؟

.....

مثال: إذا كان احتمال وقوع حدث ما هو $\frac{5}{9}$ ، فما ترجيح هذا الحدث ؟

.....

موضوعي :

١	عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ ، يفوز عيد بنقطة إذا ظهر عدد أولي ، ويفوز فهد بنقطة إذا ظهر عدد زوجي ، فإن هذه اللعبة عادلة .			أ	ب
٢	إذا كان الترجيح لحدث ما يساوي ٢ : ٣ ، فإن احتمال وقوع هذا الحدث يساوي :				
(أ)	$\frac{2}{5}$	(ب)	$\frac{2}{3}$	(ج)	$\frac{3}{2}$
(د)	$\frac{3}{5}$				
٣	إذا كان احتمال وقوع حدث ما $\frac{5}{13}$ ، فإن ترجيح هذا الحدث هو :				
(أ)	١٣ : ٨	(ب)	١٨ : ٥	(ج)	٥ : ٨
(د)	٨ : ٥				
٤	ترجيح ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة هو :				
(أ)	٣ : ١	(ب)	٢ : ١	(ج)	١ : ٢
(د)	١ : ٣				