الفصل الدراسي الأول

مذكرة الفلاح

الصف الثاني عشر علمي

أ / محمد نوري الفلاح

المحتوَياتُ

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال

1 – 1 النهايات

1 – 2 نهايات تشتمل على ∞، $-\infty$

1 – 3 صيغ غيرمعينة

1 – 4 نهايات بعض الدوال المثلثية

1 – 5 الاتصال

1 – 6 نظريات الاتصال

1 – 7 الاتصال على فترة

الوحدة الثانية: الاشتقاق

2 – 1 معدلات التغير وخطوط المماس

2 – 2 المشتقة

2 – 3 قواعد الاشتقاق

2 – 4 مشتقات الدوال المثلثية

2 – 5 قاعدة السلسلة

2 – 6 المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

الوحدة الثالثة: تطبيقات على الاشتقاق

3 – 1 القيم القصوى (العظمى/ الصغرى) للدوال

3 – 2 تزايد وتناقص الدوال

3 – 3 ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

3 – 4 رسم بيان دوال كثيرات الحدود

3 – 5 تطبيقات على القيم القصوى

الوحدة الرابعة: الإحصاء

4 – 1 التقدير

4 – 2 اختبارات الفروض الإحصائية

4 – 3 الارتباط والانحدار

الفترة المفتوحة $(c-a\ ,\ c+a)$ تسمّى جوارًا للعدد c وفقًا للمعيار a حيث $a > 0$.

فمثلًا: الفترة المفتوحة $(3,\ 5)$ هي جوار للعدد 4 وفقًا للمعيار 1.

والفترة $\left(2\frac{1}{4}\ ,\ 1\frac{3}{4}\right)$ هي جوار للعدد 2 وفقًا للمعيار $\frac{1}{4}$.

تعريف (1)

لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًّا.

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

نشاط

أولًا: لتكن الدالة f: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

a) أوجد مجال الدالة f.

b) هل يمكن إيجاد $f(2)$ ؟

c) أكمل الجدول التالي:

x	...	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$							غير معرّف						

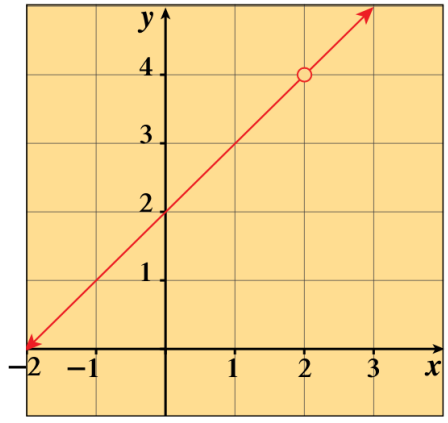
d) ماذا تلاحظ على قيم x؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

e) ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$ ؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

الشكل المقابل يمثل بيان f



ثانيًا:

a) هل يمكن تبسيط الدالة السابقة f ؟ كيف؟

b) ارسم بيان الدالة g حيث $g(x)=x+2$

ثالثًا: قارن بين الدالتين $f\ ,\ g$.

تعريف (2)

ليكن L , c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

نكتب: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.

نظرية (1)

يفرض أن L , c عددين حقيقيين

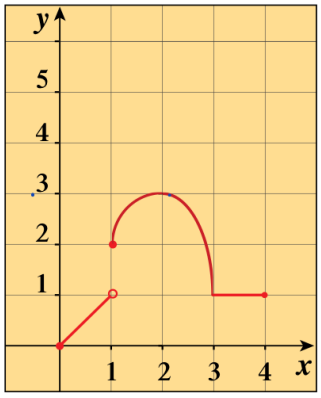
يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$

تدريب (1)

الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة: $f:[0,4]\to\mathbb{R}$

أكمل ما يلي:



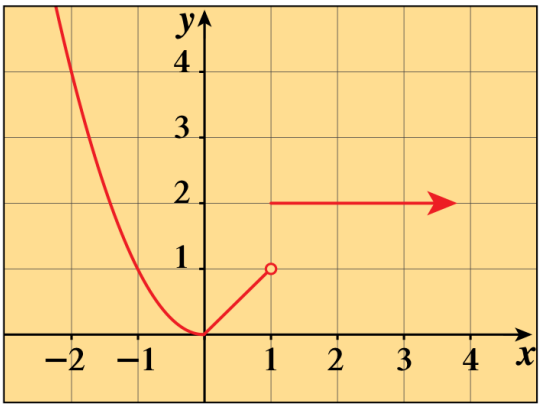
1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ldots$ 2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ldots$ 3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ldots$

4) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\ldots$ 5) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ldots$ 6) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\ldots$

7) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\ldots$ 8) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\ldots$ 9) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\ldots$

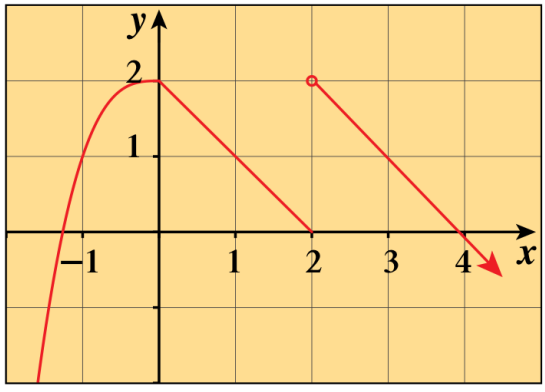
10) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ldots$ 11) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\ldots$

مثال(1) صـ 15: الشكل المقابل ، يمثل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:



1) $\lim_{x\to 0} f(x)$
2) $\lim_{x\to 1} f(x)$
3) $\lim_{x\to 2} f(x)$
4) $\lim_{x\to -2} f(x)$

حاول(1) صـ 15: الشكل المقابل ، يمثل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:

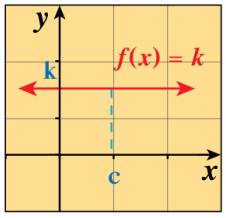


1) $\lim_{x\to -1} f(x)$
2) $\lim_{x\to 0} f(x)$
3) $\lim_{x\to 2} f(x)$
4) $\lim_{x\to 3} f(x)$

نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x)=k$ وكانا c , k عددان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} k=k$$

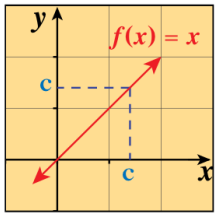


شكل (2)

نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x)=x$ وكان c عددًا حقيقيًّا فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} x=c$$



شكل (3)

نظرية (4)

إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim_{x\to c} g(x)=M$, $\lim_{x\to c} f(x)=L$ فإن:

a قاعدة الجمع: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)=L+M$

b قاعدة الطرح: $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)=L-M$

c قاعدة الضرب: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x)=L\cdot M$

d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x))=k\cdot\lim_{x\to c} f(x)=k\cdot L$

e قاعدة القسمة: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}=\frac{L}{M}$, $M\neq 0$

مثال(2) صـ 17: بفرض أن: $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$ أوجد:

1) $\lim_{x\to 1} (f(x) - g(x))$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{2f(x)}{g(x)}$

3) $\lim_{x\to 1} \frac{g(x)+4}{f(x).g(x)}$

حاول(2) صـ 17: بفرض أن: $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ أوجد:

1) $\lim_{x\to 2} (f(x) + g(x))$ 2) $\lim_{x\to 2} f(x).g(x)$ 3) $\lim_{x\to 2} (\frac{8f(x).g(x)}{f(x)+g(x)})$

نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبيّة

Polynomial and Rational Functions

a إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0$$

b إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad , \quad g(c) \neq 0$$

مثال (3) صـ 18: أوجد:

1) $\lim\limits_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

3) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2(2 - x))$

حاول(3) صـ 18: أوجد:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

مثال (4) صـ 19: إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : \ x<1\\ 5 & : x=1\\ \frac{5}{x} & : \ x>1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

حاول(4) صـ 19: إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : \quad x<2\\ x-1 & : \quad x>2\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

مثال (5) صـ 19: إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & : \quad x\le 0 \\ 1-2x & : \quad x>0 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

حاول(5) صـ 19: إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : \quad x>1 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & : \quad x\le 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

مثال(6) صـ 20: لتكن الدالة f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

1) اكتب $f(x)$ دون استخدام القيمة المطلقة.
2) أوجد: $\lim_{x \to -2^-} f(x)$, $\lim_{x \to -2^+} f(x)$
3) هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

نظرية (6)

بفرض أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a) $\lim_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$

b) $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن يكون $c > 0$)

c) $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن تكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$)

مثال (7) صـ 21: أوجد:

1) $\lim_{x\to -1}(x^2 - 3x - 1)^5$

2) $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{x-3}$

3) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

حاول(7) صـ 22: أوجد:

1) $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-5}$

2) $\lim_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$

3) $\lim_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

إلغاء العامل الصفري في المقام

ملاحظات:

1. عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط والمقام وحصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى **صيغة غير معينة (Indeterminate Form)**.
2. يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة.

مثال+حاول 8 صـ 22-23: أوجد:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

مثال+حاول 8 صـ 22-23: أوجد:

1) $\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{(4+x)^2 - 16}{x}$

مثال+حاول 8 صـ 22-23: أوجد:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{(3+x)^3 - 27}{x}$

مثال+حاول 8 صـ 22-23: أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

كراسة صـ 10 رقم 14 : أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to -2} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$$

حاول 8 صـ 23: أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25}$$

مثال+حاول 9 صـ 24-25: أوجد:

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

2) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

مثال+حاول 9 صـ 24-25: أوجد:

1) $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

2) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

مثال 9 صـ 24: أوجد:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$$

حاول 9 صـ 25: أوجد:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

كراسة صـ 10:(15)

$$\lim_{x\to 3}\ \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

مثال 10 صـ 25: أوجد إن أمكن: $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

مثال 10 صـ 25: أوجد إن أمكن: $\lim_{x\to -2} \frac{x^5+32}{x+2}$

حاول 10 صـ 26: أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}$$

حاول 10 صـ 26: أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$$

نظرية (7)

لتكن f : $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

نظرية (8)

لتكن f : $k\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $f(x)=\frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^n}=0$$

فمثلاً: $\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x^3}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^4}=0$, ...

حاول 1 صـ 30: أوجد إن أمكن:

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^2+9}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+1}{x^3+5}$

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال صيغ غير معينة (1 – 3)

مثال+حاول 1 صـ 37: أوجد:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-3x+1)$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^2+2x-4)$

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

فإن: $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a_n}{b_m}$: $n=m$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$: $n<m$

مثال+حاول 2 صـ 39: استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x^3}{2x^3+5}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{4x^3-2x+3}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-1}{7-2x^4}$

مثال 3 صـ 39: إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{a\,x^2+b\,x+3}{2x+5} = 3$ فأوجد قيمة كل من الثابتين $a\ ,b$

حاول 3 صـ 40: أوجد قيمة كل من الثابتين $a\ ,b$ إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{a\,x^2+b\,x-3} = 3$

مثال 4 صـ 40: أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

حاول 4 صـ 41: أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$

حاول 4 صـ 41: أوجد $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال

نهايات بعض الدوال المثلثية (1 – 4)

نظرية (12)

حيث x بالراديان ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

نتيجة (1)

إذا كان a ، b عددين حقيقيين، $a\neq 0$ ، $b\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$$

فمثلاً:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\cos x=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\tan x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\cos ax=1 \quad , \quad a\in R$$

مثال+حاول 1 صـ 43: أوجد:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{2x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}$

مثال+حاول 1 صـ 43: أوجد:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x-3}{\cos x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

مثال+حاول 1 صـ 43: أوجد:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

كراسة صـ 17 : أوجد:

8) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

9) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

مثال + حاول 2 صـ 44 : أوجد:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \tan x}$

مثال + حاول 3 صـ 44 : أوجد:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{5x + \sin x}{x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$

مثال 2 + مثال 3 صـ 44 : أوجد:

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5\tan x - 3\sin x}{4\,x}$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3\tan x + x^2\cos x}{5\,x}$

مثال + حاول 3 صـ 44 : أوجد:

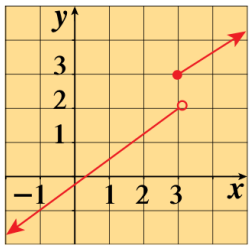
1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3\ x}$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5\ x}$

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال الاتصال (1 – 5)

تدريب

1

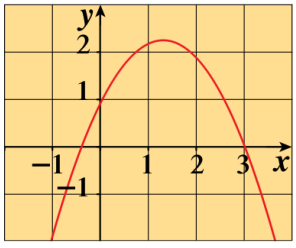


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

2

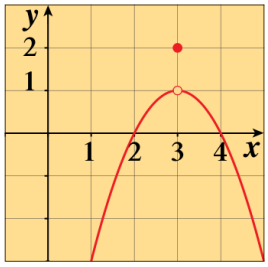


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

3

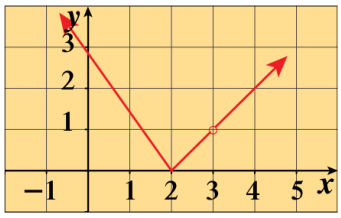


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

4



$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x=c$ في مجالها إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط **الثلاثة** التالية:

1. الدالة f **معرّفة** عند $x=c$ أي $f(c)$ موجودة.
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ **موجودة**
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f **منفصلة (ليست متصلة) عند** $x=c$.

مثال 1 صـ 49: لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : \ x \geq 1 \\ 5x-1 & : \ x<1 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

حاول1 صـ 50: لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^3+x & : \ x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : \ x > 0 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

حاول2 صـ 50: لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}2x+1 & : x<2\\ 1 & : x=2\\ x^2+1 & : x>2\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

مثال 2 صـ 50: لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & : \quad x>3\\ 7 & : \quad x\leq 3\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$

كراسة صـ 17: (9) لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : \quad x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & : \quad x=1\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

كراسة صـ 17: (8) لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{|x|} & : \ x>3 \\ 7 & : \ x\leq 3\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$

مثال 3 صـ 51: لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{|x-2|} & : \quad x \neq 2 \\ 1 & : \quad x=2\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

حاول 3 صـ 51: لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}-2x & : \ x\neq -1 \\ 2 & : \ x=-1\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$

كراسة صـ 20: (10) أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : \ x < 3 \\ 2ax & : \ x \geq 3 \end{cases}$$

نظرية (14): خواصّ الدوالّ المتّصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f, g دالتين متّصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x = c$

1	$f+g$		الجمع:
2	$f-g$		الطرح:
3	$k \cdot f$,	$k \in \mathbb{R}$	الضرب في ثابت:
4	$f \cdot g$		الضرب:
5	$\frac{f}{g}$,	$g(c) \neq 0$	القسمة:

دوال متّصلة Continuous Functions

1. الدالة $f : f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة $f : f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

مثال + حاول 1 صـ 55 : ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

1) $f(x) = x^2 + |x|$, $c = -1$ 2) $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$, $c = 3$

مثال + حاول 1 صـ 55 : ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

1) $f(x) = \sin x - \cos x \quad , \quad c = \frac{\pi}{2}$

2) $f(x) = \frac{\tan x}{x+1} \quad , \quad c = \frac{\pi}{4}$

مثال 2 صـ 55 : ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\frac{x-2}{x^2+9}-\frac{1}{x}$ عند $x=3$

حاول 2 صـ 55 : ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{2x}{x-2}$ عند $x=1$

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a) الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c:c\in\mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،

ومتصلة عند كل $x=c:c\in\mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b) إذا كانت g دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $g(c)>0$

فإن الدالة: $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=c$

مثال 3 صـ 56 : لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

حاول 3 صـ 56 : لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=-2$

امتحان سابق: لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x+3}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$

حاول 3 صـ 56 : لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = -2$

حاول 4 صـ 58 : إذا كانت f , g معرفتان على R كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$ ، $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

1) $(g \circ f)(x)$ 2) $(g \circ f)(-1)$ 3) $(f \circ g)(x)$ 4) $(f \circ g)(-1)$

حاول 5 صـ 59 : لتكن: $f(x)=\sqrt{1+x^2},\ g(x)=\frac{3}{x^2+4}$ أوجد:

1) $(f\circ g)(x)$

2) $(g\circ f)(\sqrt{3})$

اتصال الدوال المركبة عند نقطة

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متّصلة عند c ، و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متّصلة عند c.

مثال 6 صـ 59: لتكن الدالة $f : f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

كراسة صـ 20: (10) لتكن الدالة $f : f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = \sqrt{x+4}$

ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

حاول 6 صـ 60: لتكن الدالة $f : \frac{|x|}{x+2}$ ، $g(x) = 2x + 3$ ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

مثال 7 صـ 60: لتكن الدالة f : $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

حاول 7 صـ 60: لتكن الدالة f : $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الاتصال على فترة

تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $(a\ ,\ b)$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\ ,\ b)$ إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)
2. الدالة f متّصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متّصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

مثال 1 صـ62: ادرس اتصال الدالة f على $[1\ ,\ 3]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : \quad x = 1 \\ x^2 - 3 & : \quad 1 < x < 3 \\ 6 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

كراسة صـ 26: (5) ادرس اتصال الدالة f على $[-3\ ,4]$ حيث: $f(x)=\begin{cases}-5 & : \quad x=-3\\ -x^2+4 & : \ -3<x<4\\ -10 & : \quad x=4\end{cases}$

حاول 1 صـ62: ادرس اتصال الدالة f على $[1\ ,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}2 & : \quad x=1\\ \frac{x^2+1}{x} & : \quad 1<x<5\\ \frac{26}{5} & : \quad x=5\end{cases}$$

مثال 2 صـ 63 : ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $[-1\,,5]$ 2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$, $[0\,,5]$

حاول 2 صـ 63 : ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$, $[0\,,3]$ 2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $[0\,,2]$

مثال 3 صـ 63 : ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث: $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \ x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & : \ x > -1 \end{cases}$

كراسة صـ 26: (6) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-x+4 & : \ x \leq 7 \\ \frac{9}{-x+4} & : \ x > 7\end{cases}$$

مثال 4 صـ 64 : لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$ متصلة على مجالها R

أوجد قيمة الثابتين $a\ ,b$

حاول 4 صـ 65 : لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}5 & : \quad x=1\\ ax+b & : \quad 1<x<4\\ b+8 & : \quad x=4\end{cases}$ متصلة على $[1\,,4]$

أوجد قيم الثابتين $a\,,b$

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال 5 صـ 65: لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5\ ,\ 0]$

حاول 5 صـ 66: لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$ أوجد D_f (مجال الدالة f)

ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6\ ,10]$

مثال 6 صـ 66: لتكن f: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ادرس اتصال الدالة f على $[-3\ ,3]$

كراسة صـ 27: (13) لتكن f: $f(x)=\sqrt{8-2x^2}$ أوجد D_f ثم ادرس اتصال الدالة f على مجالها

حاول 6 صـ 66: لتكن f: $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ ادرس اتصال الدالة f على $[1\ ,3]$

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال 7 صـ 67: لتكن f: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$. ادرس اتصال الدالة f على R

حاول 7 صـ 67: لتكن f: $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$. ادرس اتصال الدالة f على R

كراسة صـ 27:(16) لتكن f: $f(x)=|3x^2+4x-1|$. ادرس اتصال الدالة f على R

نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a\,,f(a))$ بالقيمة m إن وجد:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حاول 1 صـ 78: أوجد ميل المماس للقطع المكافىء $y=(x-2)^2+2$ عند النقطة $A(1\,,3)$

تعريف: المشتقّة عند نقطة **Derivative at a Point**

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

مثال 1 صـ 80: باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

حاول 1 صـ 80: باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

كراسة صـ 35:(1) باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = \frac{3}{x}$ عند $x = 3$

حاول 2 صـ 81: باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $x=b \quad , \quad b\neq 0$

مثال 2 صـ 80: باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a \quad , \quad a>0$

حاول 5 صـ 84: لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

مثال 5 صـ 83: لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

كراسة صـ 35:(2) باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 2x^3$ عند $x = 1$

المشتقة من جهة واحدة

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال 3 صـ 81: بين أن الدالة التالية لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 0$ ،

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \leq 0 \\ 2x & : \quad x > 0 \end{cases}$$

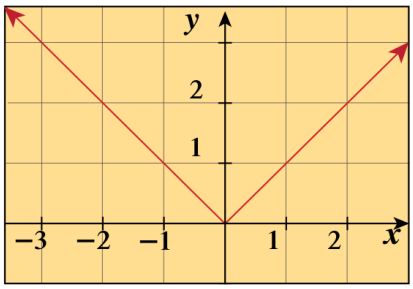
لكن ليس لها مشتقة عند $x = 0$

حاول 3 صـ 82: لتكن f : $f(x) = |x - 2|$. ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة

a **ركنًا (Corner):** تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.

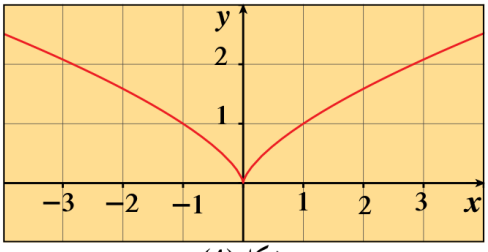
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

b **نابًا (Cusp):** يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

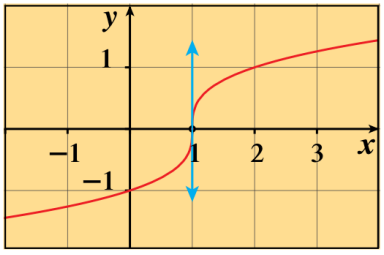


شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c **مماسًا رأسيًّا:** يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًّا.

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

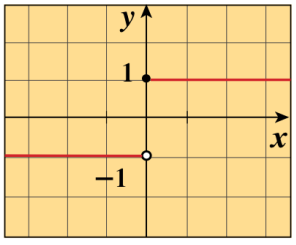


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$، $f'(1)$ غير موجودة

d **عدم اتصال:** تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$



شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a\ ,\ f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

مثال 6 صـ 85: لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2 & : \quad x<2 \\ 2x-1 & : \quad x\geq 2 \end{cases}$. ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$

حاول 6صـ 85: لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : \quad x\leq 2 \\ 3x-2 & : \quad x>2 \end{cases}$.ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$

نظريّة الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدّالة f لها مشتقّة عند نقطة، فإنّها تكون متّصلة عند هذه النقطة.

معكوس النظريّة ليس صحيحًا دائمًا كما رأينا سابقًا:
فالدالّة المتّصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماسّ رأسيّ، ومن ثمّ لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معيّنة.

مثال 9 صـ 89: لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x+5 & : \ x \le 3 \\ x^2-1 & : \ x>3 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(3)$

حاول 9 صـ 89: لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2+x & : \ x\leq -1 \\ x^2-x-2 & : \ x>-1 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(-1)$

كراسة صـ 35:(8) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2 & : \ x \leq 2 \\ 4x-4 & : \ x>2 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(2)$

كراسة صـ 35: (7) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & : \ x\leq 0\\ 2x+1 & : \ x>0\end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(0)$

الوحدة الثانية : الاشتقاق قواعد الاشتقاق (2 – 3)

قاعدة (1): مشتقة أي دالة ثابتة تساوي الصفر

قاعدة (2): إذا كان $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$

قاعدة (3): إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = n\,x^{n-1}$

تدريب صـ 91: أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

1) $f(x) = x^4$ 2) $g(x) = x^{10}$ 3) $f(x) = x^{12}$

قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت : $(k\,f(x))' = kf'(x)$

قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح: $(f(x) \mp g(x))' = f'(x) \mp g'(x)$

حاول 1 صـ 92: أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

قاعدة (6): اشتقاق ضرب دالتين: $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

حاول 2 صـ 93: أوجد $f'(x)$ إذا كان: $f(x) = (2x+1)(3x-2)$

مثال + حاول 2 صـ 93 : أوجد $f'(x)$ إذا كان:

1) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ 2) $f(x) = 4x^2(x + 6)$ 3) $f(x) = (x^3 - 4)^2$

قاعدة (7): اشتقاق قسمة دالتين: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$

مثال 3 صـ 94: أوجد مشتقة $f(x) = \frac{x^3-1}{5x^2+1}$

مثال 3 صـ 95 : أوجد مشتقة $f(x) = \frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$ أو $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

معادلة الناظم(العمودي): $y - f(a) = \frac{1}{f'(a)}(x - a)$ أو $y - y_1 = \frac{-1}{m}\,(x - x_1)$

كراسة صـ 38: (11) أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة $(1,2)$

حاول 4 صـ 96: أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

مثال 4 صـ 95: أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$

نتيجة: إذا كانت g قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عدداً ثابتاً فإن: $\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k.g'(x)}{(g(x))^2}$

مثال 5 صـ 96: أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

حاول 5 صـ 96: أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$

كراسة صـ 38:(13) أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2,1)$

قاعدة (8): قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة: $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

مثال 6 صـ 97: لتكن $y = \frac{x^2+3}{2x}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

حاول 6 صـ 98: لتكن $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

قاعدة (9):

$$(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}(x)^{\frac{m}{n}-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال 7 صـ 98: أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x > 0$

حاول 7 صـ 98: أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

مثال 8 صـ 98: لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : \ x\leq 1 \\ 2x+1 & : \ x>1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

حاول 8 صـ 99: (a) أوجد المشتقة إن أمكن للدلة المتصلة التالية: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \ x \leq 2 \\ 4x - 3 & : \ x > 2 \end{cases}$

حاول 8 صـ 99: (b) أوجد المشتقة إن أمكن للدلة المتصلة التالية: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \ x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : \ x \geq 1 \end{cases}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$
$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \tan x$$

مثال + حاول 1 صـ 100 : أوجد المشتقات للدوال التالية:

1) $y = x^2 \sin x$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $g(x) = \cos^2 x$

مثال + حاول 1 صـ 100 : أوجد المشتقات للدوال التالية:

1) $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

حاول 1 صـ 100 : إذا كانت $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ أثبت أن $y' = (y.csc\, x)^2$

مثال + حاول 2 صـ 102 : أوجد مشتقات الدوال التالية:

1) $f(x) = \tan x + \cot x$

2) $g(x) = \sec x + \csc x$

مثال 2 صـ 102 : أوجد مشتقات الدوال التالية:

3) $f(x) = sec\, x \,.(1 + \sin x)$

4) $g(x) = csc\, x + \sin x \,.\tan x$

حاول 2 صـ 102 : أوجد مشتقات الدوال التالية:

1) $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{\tan x}$

2) $g(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

كراسة صـ 41: (4+ 3) أوجد مشتقات الدوال التالية:

3) $f(x) = \dfrac{\cot x}{1 + \cot x}$

4) $g(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

مثال 3 صـ 102 : أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P(\frac{\pi}{4}, 1)$

حاول 3 صـ 102 : أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $P(\frac{\pi}{3}, 2)$

قاعدة السلسلة (التسلسل) Chain Rule

إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركّبة

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال 1 صـ 104 : لتكن: $g(x) = x^{10}$, $f(x) = 3x^2 + 1$

أوجد 1) باستخدام قاعدة السلسة $(f \circ g)'(x)$

2) $(f \circ g)'(-1)$

حاول 1 صـ 104 : لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$

أوجد 1) باستخدام قاعدة السلسة $(g \circ f)'(x)$

2) $(f \circ g)'(0)$

مثال 2 صـ 104 : لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ $(x \neq 0)$

أوجد 1) باستخدام قاعدة السلسة $(f \circ g)'(x)$

2) $(f \circ g)'(1)$

حاول 2 صـ 105 : لتكن: $g(x)=\sqrt{x}$ ، $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسة $(f\circ g)'(1)$

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $y = f(u)$, $u = g(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

مثال 3 صـ 105 : إذا كانت: $y = u^3 - 3u + 1$, $u = 5x^2 + 2$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

حاول 3 صـ 105 : إذا كانت: $y = u^2 + 4u - 3$, $u = 2x^3 + x$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

$$\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = (-\sin f(x)).f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin f(x)) = (-\cos f(x)).f'(x)$$

حاول 4 صـ 106 : أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًّا فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثال 6 صـ 106 :

لتكن $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$ أوجد y'

حاول 6 صـ 106 :

لتكن $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ أوجد y'

مثال 7 صـ 107 : أوجد ميل مماس المنحنى $y = sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

حاول 7 صـ 107 : بين أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائماً يكون موجباً $x = \frac{\pi}{3}$

كراسة صـ 43: (16) أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sqrt{x^2 + 5}$ عند النقطة $P(2\ ,3)$

مثال 1 صـ 109: أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x.

حاول 1 صـ 109: أوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة للدالة $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ بدلالة المتغير x.

مثال 2 صـ 109: إذا كانت $y = \sin x$. بين أن $y^{(4)} = y$

حاول 2 صـ 109: لتكن الدالة $y = \cos x$. بين أن $y^{(4)} + y'' = 0$

مثال 3 صـ 110: أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$

حاول 3 صـ 110: أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

الاشتقاق الضمني

مثال 4 صـ 111: (a) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث $y^2 + x\,y = 7x$

مثال 4 صـ 111: (b) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث $y = x + x^2y^5$

حاول 4 صـ 112: أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث $y^2 = x^2 - 2x$

مثال 5 صـ 112: أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$

حاول 4 صـ 111: أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

حاول 6 صـ 113: أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$

حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,1)$

مثال 6 صـ 113: أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$للمنحنى الذي معادلته:$2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $\left(2\sqrt{\pi}, 2\pi\right)$

مثال 7 صـ 113: للمنحنى الذي معادلته: $2\sqrt{y}+y=x$ أوجد y'

ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$

حاول 7 صـ 114: للمنحنى الذي معادلته: $y^2+\sqrt{y}+x^2=3$ أوجد y'

ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

مثال 8 صـ 114: إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

حاول 8 صـ 114: إذا كانت $y = x \sin x$ فأثبت أن: $y'' + y' + 2\,sin\,x = 0$

امتحان سابق: إذا كانت $y = x \sin x$ فأثبت أن: $y'' + y' + 2\sin x = 0$

كراسة صـ 45: (15) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

الوحدة الثالثة : تطبيقات على الاشتقاق

القيم القصوى (العظمى – الصغرى) للدوال (1 – 3)

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

إذا كانت f دالّة مجالها D، $c \in D$، فإن $f(c)$ تسمى:

a قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \geqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

b قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما:

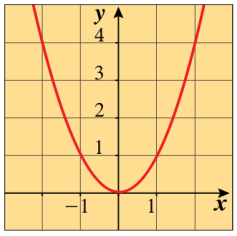
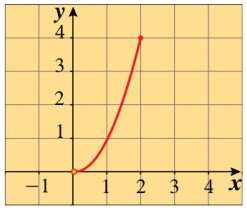
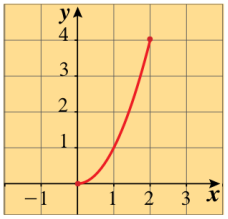
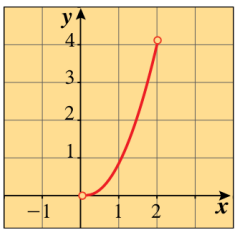
$$f(c) \leqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

مثال (1)

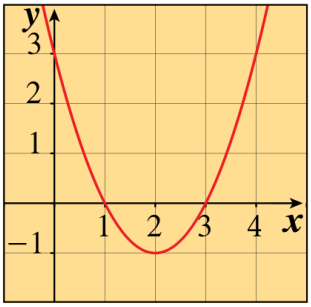
لتكن الدالة: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة f مع رسم بيانها عندما:

a $D = (-\infty, \infty)$ b $D = (0, 2]$ c $D = [0, 2]$ d $D = (0, 2)$

الحل:

القيم القصوى المطلقة للدالة f على D	المجال D	بيان الدالة: $f(x) = x^2$
a لا توجد قيمة عظمى مطلقة. توجد قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$	$(-\infty, \infty)$	$y = x^2$ 
b توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ لا توجد قيمة صغرى مطلقة.	$(0, 2]$	$y = x^2$ 
c توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$	$[0, 2]$	$y = x^2$ 
d لا توجد قيم قصوى مطلقة.	$(0, 2)$	$y = x^2$ 

حاول 1 صـ 124: الشكل يمثل بيان: $y = x^2 - 4x + 3$.أوجد القيم القصوى للدالة على المجالات التالية:



1) $(-\infty, \infty)$ 2) $[2\,,3]$ 3) $(1\,,3)$ 4) $[3\,,4)$

نظريّة (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a\,,b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

ملاحظة: لتكن الدالة f معرفة على $[a\,,b]$ ، $c \in (a\,,b)$ فإننا نسمي:

1. $(b\,,f(b))$ ، $(a\,,f(a))$ **نقاط طرفية.**
2. $(c\,,f(c))$ **نقطة داخلية.**

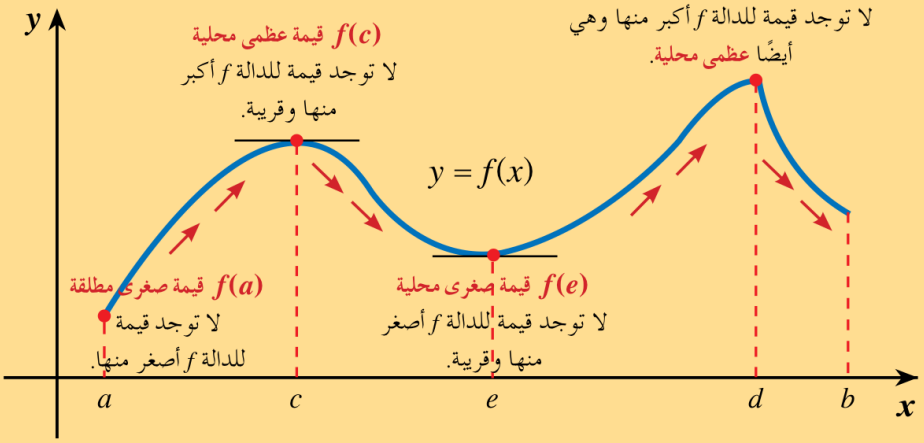
القيم القصوى المحلية

تعريف (2): القيم القصوى المحليّة

لتكن $(c\,,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$, $f(c) \geqslant f(x)$

b قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$, $f(c) \leqslant f(x)$



تعريف (3): النقطة الحرجة **Critical Point**

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c\,,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

مثال 2 صـ 125: أوجد النقاط الحرجة للدالة المتصلة f: $f(x)=x^3-3x^2+5$

حاول 2 صـ 127: أوجد النقاط الحرجة للدالة المتصلة f: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

نظريّة (2): القيم القصوى المحليّة (Fermat's Theorem)

إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c\ ,\ f(c))$ نقطة حرجة.

إذا كانت $(c\ ,\ f(c))$ نقطة حرجة للدالة f فليس بالضرورة أن تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية

فمثلًا الدالة $f(x) = x^3$ لها نقطة حرجة عند $x = 0$ ولكن $f(0)$ ليست قيمة قصوى محلية.

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f المتصلة على الفترة $[a\ ,b]$

تعلمت كيفية إيجاد النقاط القصوى المطلقة للدالة f من خلال التمثيل البياني لها وتطبيق تعريف (1) عليها.

والآن سنعرض خطوات إيجادها جبريًّا على $[a\ ,b]$:

1. إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = b$, $x = a$
2. إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة $(a\ ,\ b)$ إن وجدت.
3. أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 2 , 1 هي قيمة عظمى مطلقة في $[a\ ,\ b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a\ ,\ b]$.

مثال 3 صـ 128: أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f: f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0\ ,3]$

حاول 3 صـ 128: أوجدالقيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f: f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2 , 1]$

مثال 4 صـ 129: أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2\ ,\ 3]$

حاول 4 صـ 129: أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة $f: f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1 , 3]$

نظريّة (3): نظريّة القيمة المتوسّطة

إذا كانت f دالة:

1. متّصلة على الفترة $[a\,,b]$
2. قابلة للاشتقاق على الفترة $(a\,,b)$

فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a\,,b)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

مثال 1 صـ 133: بين أن الدالة f: $f(x) = x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0\,,2]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

حاول 1 صـ 133: بين أن الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3\ ,\ 1]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

مثال 2 صـ 133: بين أن الدالة f: $f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3\ ,\ 3]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

حاول 2 صـ 133: بين أن الدالة f: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0\ ,4]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

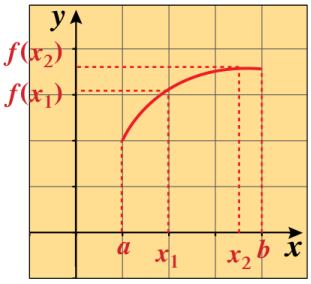
تزايد وتناقص الدوال

تعريف (4): تزايد وتناقص الدوال

لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I . نقول إن:

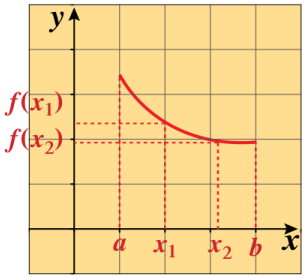
1. f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1 , x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
2. f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1 , x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $\forall x_1 , x_2 \in I$, $f(x_1) = f(x_2)$



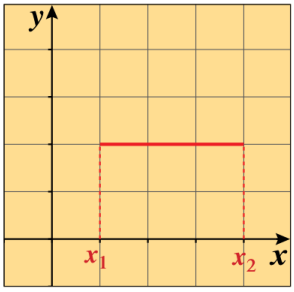
شكل (7)

دالة متزايدة



شكل (8)

دالة متناقصة



شكل (9)

دالة ثابتة

الدالّة المطّردة **Monotonic Function**

الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.

نظرية (4): الدوالّ المتزايدة والدوالّ المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على (a , b).

1. إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتزايد على (a , b).
2. إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتناقص على (a , b).
3. إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ الدالة f ثابتة على (a , b).

مثال 3 صـ 135: أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

حاول 3 صـ 135: أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

مثال 4 صـ 136: لتكن f: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f

حاول 4 صـ 136: لتكن f: $f(x) = x^3 - 6x$ ، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f

مثال 5 صـ 137: لتكن f: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ ، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f

حاول 5 صـ 137: لتكن f: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$ ، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f

نظريّة (5): اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحليّة

لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c\,,f(c))$ نقطة حرجة.

1. إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x=c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
2. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x=c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.
3. إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x=c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

مثال 1 صـ 139: لتكن الدالة f: $f(x)=x^3-12x-5$ أوجد كلا مايلي ما يلي:

1) النقاط الحرجة للدالة
2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.
3) القيم القصوى المحلية.

حاول1 صـ 140: لتكن الدالة f: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ أوجد كلا مايلي ما يلي:

1) النقاط الحرجة للدالة
2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.
3) القيم القصوى المحلية.

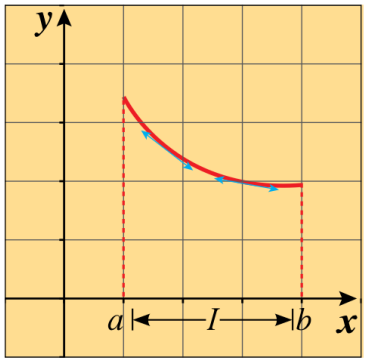
التقعر

تعريف (5): التقعّر

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأعلى على I .

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأسفل على I .

الشكلان التاليان يوضّحان التقعر:



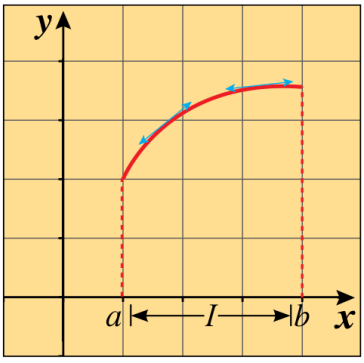
شكل (1)

في الفترة $(a\ ,\ b)$ نلاحظ أن:

جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)

تقع أعلى المماسات.

لذلك نقول **المنحنى مقعر لأعلى.**



شكل (2)

في الفترة $(a\ ,\ b)$ نلاحظ أن:

جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)

تقع أسفل المماسات.

لذلك نقول **المنحنى مقعر لأسفل.**

اختبار التقعّر

a **إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I**

.

b **إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I .**

نقطة الانعطاف

تعريف (6): نقطة الانعطاف

تسمّى النقطة $(c\ ,\ f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت $(c\ ,f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c)=0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

مثال 3 صـ 143: أوجد فترات التقعر ونقط الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x)=2x^3+3\,x^2-1$

حاول 3 صـ 144: أوجد فترات التقعر ونقط الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحليّة

1. إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$
2. إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

حاول 4 صـ 146:

استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x) = 4x^3 - 12\,x^2$

الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

1. **عيّن مجال الدالة f.**

مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحيانًا على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.

2. **أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.**
3. **عيّن النقاط الحرجة للدالة f.**
4. **كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.**
5. **كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.**
6. **أوجد نقاطًا إضافية.**

تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

7. **ارسم بيان الدالة f.** استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

مثال 1 صـ 148: ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

حاول 1 صـ 149: ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

مثال 2 صـ 149: ادرس تغير الدالة f: $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

حاول 2 صـ 150: ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x - 2\,x^3$ وارسم بيانها.

الوحدة الثالثة : تطبيقات على الاشتقاق تطبيقات على القيم القصوى (5 – 3)

مثال 1 صـ 155: عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيها أصغر ما يمكن، ما العددان؟

امتحان سابق: أوجد عددين موجبين مجموعهما 20 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

كراسة صـ 63:(3) أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها 8 m، واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا.

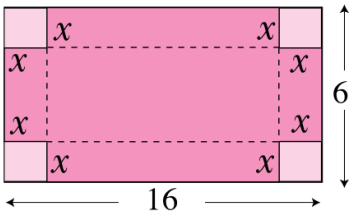
حاول 3 صـ 158: تعطى الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36\,h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

1) أوجد الارتفاع $h\ (cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

2) ما قيمة هذا الحجم ؟

كراسة صـ 63:(5) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم . يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى ، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله $800\ m$ ؟ وما أبعادها؟

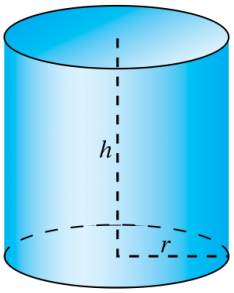
مثال 2 صـ 156:



يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $16\,cm$, $6\,cm$ وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟

مثال 3 صـ 157:



طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائريّة قائمة (كما في الشكل المقابل).
ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

المعلمة (Parameter): هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

الإحصاءة (Statistic Function): هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\bar{x}$ أو الانحراف المعياري S.

تقدير المعلمة (Parameter Estimate): هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككلّ وتوزيعه.

التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.

فترة الثقة Confidence Interval

هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

التقدير بفترة الثقة

هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معيّن.

مثال 1 صـ 171:

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\propto}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

حاول 1 صـ 171:

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\propto}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال 2 صـ 173: أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$.باستخدام مستوى ثقة 95%

1) أوجد هامش الخطأ
2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3) فسر فترة الثقة.

حاول 2 صـ 173: أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 25$

والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1) أوجد هامش الخطأ
2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3) فسر فترة الثقة.

مثال 3 صـ 174:

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16 ، باستخدام مستوى ثقة 95% .

1) أوجد هامش الخطأ
2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3) فسر فترة الثقة.

حاول 31 صـ 174: أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$، ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ وانحرافها المعياري $S = 9$ باستخدام مستوى ثقة 95 % .

1)أوجد هامش الخطأ
2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3) فسر فترة الثقة.

مثال 4 صـ 176: أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$، فإذا كان الانحراف المعياري $S = 10$ ومتوسطهاالحسابي $\bar{x} = 15$ ، باستخدام مستوى ثقة 95% .

1) أوجد هامش الخطأ 2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

حاول 4 صـ 176: أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علما أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13$, $S = 0.3$, $\bar{x} = 8.4$

الوحدة الرابعة : الإحصاء

اختبارات الفروض الإحصائية (2 – 4)

تعريف: الفرض الإحصائي **Statistic Hypothesis**

هو ادعاء معيّن مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

تعريف: المقياس الإحصائي

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

تعريف: اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية)

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

مثال 1 صـ 179: تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3950 دينارا كويتيا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 125$
وضح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

حاول 1 صـ 179: بينت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800\ kg$ مع انحراف معياري $\sigma = 150\ kg$. ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الأسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك ، وتأكيداً على ذللك تم اختيار عينة من 40 سلكاً فتبين أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي $1840\ kg$. هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

مثال 2 صـ 180: إذا كانت $S = 1.79$, $\bar{x} = 37.2$, $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

حاول 2 صـ 180: متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري $S = 120$. يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع .

اختبرصحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

مثال 3 صـ 181: يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة 290 ديناراً كويتياً .فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل

وتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ دينار وانحرافها المعياري $S = 32$
فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟ باستخدام مستوى ثقة 95%
(علما بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

حاول 3 صـ 181: يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة 290 ديناراً كويتياً .فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل

وتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 296$ دينار وانحرافها المعياري $S = 5$
فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟ باستخدام مستوى ثقة 95%
(علما بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)