

يمكنك مراجعه الحلول من خلال المذكرة المحلولة
للتأكد من حلك والتدرب على الحل الصحيح

المذكرة الشاملة

الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول

"لا تبحث عن الحل الأسرع ... بل عن الفهم الذي لا يُنسى"

للحصول على المذكرة المحلولة اشترك في قناتي اليوتيوب والتيليجرام
وسيصلك كل ما هو جديد



اضغط هنا

للاضمام لجروب التيليجرام

YouTube

اضغط هنا

للاشتراك في قناة اليوتيوب



HOSAMBAYOUMI195



رياضيات

إعداد: أ. حسام بيومي

1-1 دالة القيمة المطلقة

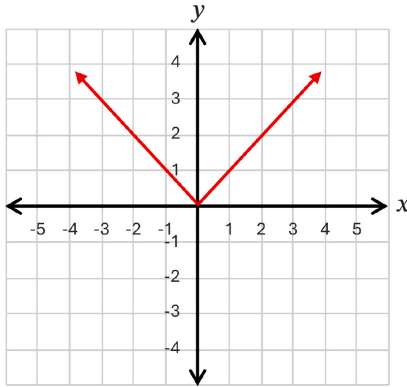
إن القيمة المطلقة لعدد حقيقي تعبر عن بعد هذا العدد عن الصفر على خط الأعداد.

الصورة الأساسية لدالة القيمة المطلقة هي : $f(x) = |x|$ ، $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ ،
(المجال المقابل) (المجال)

والتي مكوناتها هي :

1. المجال $\mathbb{R}$ 2. المجال المقابل $\mathbb{R}$ 3. قاعدة اقترانها $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases} \Rightarrow \therefore f(x) = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$



x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

نستنتج أن :

1. تمثيل الدالة $y = |x|$ بياناً ينتج من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية (رأس المنحنى) وهي نقطة الأصل ويشبهان الحرف V.
2. رأس المنحنى هو (0,0) وعنده توجد أصغر قيمة للدالة.
3. تماثلة حول محور الصادات ($x=0$) نسميها فيما بعد دالة زوجية
4. مدى الدالة هو $[0, \infty)$

ومن التعريف:

- إذا كانت $a \in \mathbb{R}^+$ ، $b, x \in \mathbb{R}$ عددين حقيقيين فإن :
1. $|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$
 2. $|x+a| = \begin{cases} x+a & : x \geq -a \\ -x-a & : x < -a \end{cases}$
 3. $|ax+b| = \begin{cases} ax+b & : x \geq \frac{-b}{a} \\ -ax-b & : x < \frac{-b}{a} \end{cases} , a > 0$

خواص القيمة المطلقة:

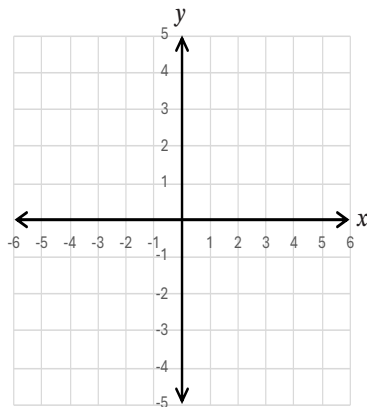
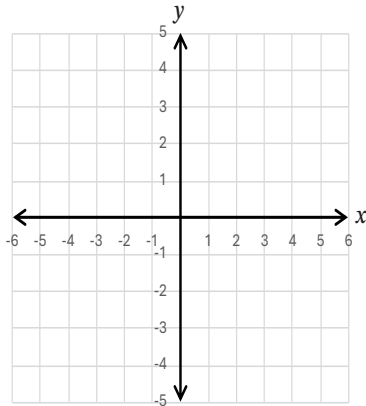
1. $|x| \geq 0$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$

ملحوظات هامة:

1. $|a|^2 = a^2$
2. $x^2 = |x|$



رسم بيان دالة القيمة المطلقة باستخدام رأس المنحنى ومحور التماثل

مثال (1) ارسم بيان الدالة: $f(x) = |2x + 4|$ 

مما سبق نلاحظ :

$$f(x) = |2x + 4| + 0$$

بفرض أن

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 0$$

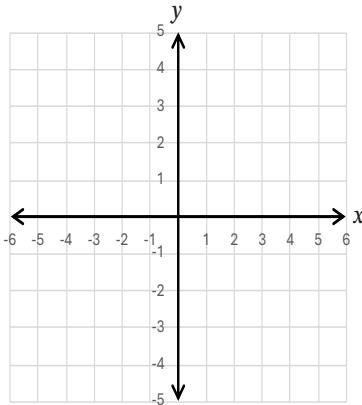
$$1. \text{ رأس المنحنى هو } \left(\frac{-b}{a}, c \right) = (-2, 0)$$

$$2. \text{ معادلة محور التماثل هو } x = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$3. \text{ مدى الدالة هو } [c, \infty) = [0, \infty)$$

تحقق من فهمك (1)

$$f(x) = |3x + 6| \text{ ارسـم بيان الدالة :}$$



تعميم:

الصورة القياسية لدوال القيمة المطلقة:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(المجال) (المجال المقابل)

$$f(x) = |ax + b| + c$$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$ ، ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$

$$1. \text{ رأس المنحنى هو النقطة } \left(\frac{-b}{a}, c \right)$$

$$2. \text{ معادلة محور التماثل هو } x = \frac{-b}{a}$$

$$3. \text{ مدى الدالة هو } [c, \infty)$$

$$4. \text{ مدى الدالة يتغير إذا كانت الدالة على الصورة } f(x) = -|ax + b| + c \text{ ويصبح}$$

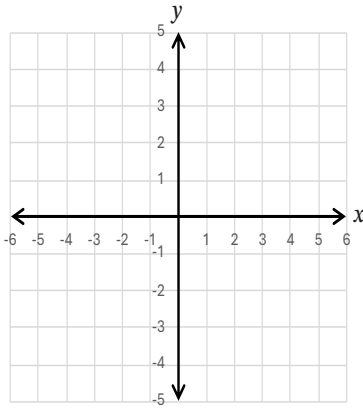
$$[-\infty, c] \text{ حيث منحنى الدالة في هذه الحالة يكون مفتوحاً للأسفل}$$



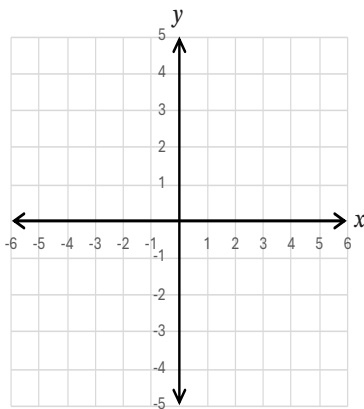
أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال
التالية ثم ارسم بيان كل منها

مثال (2)

a $y = |x - 2| + 1$



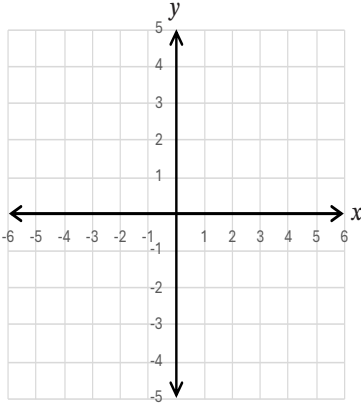
b $y = -|2x + 3|$



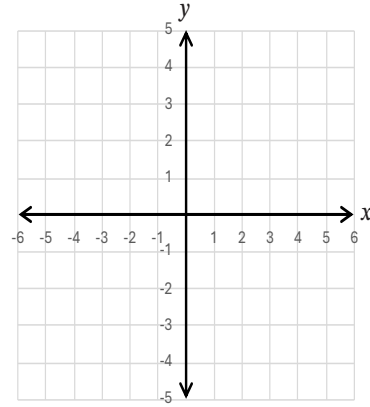
تحقق من فهمك (2)

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية ثم ارسم بيان كل منها

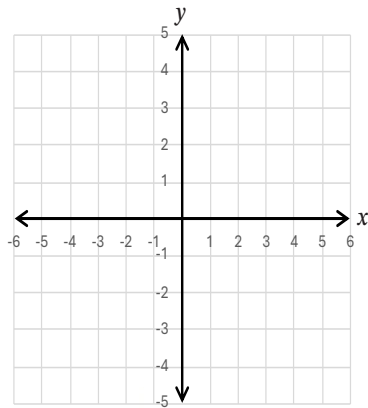
a) $f(x) = |x + 1| + 3$



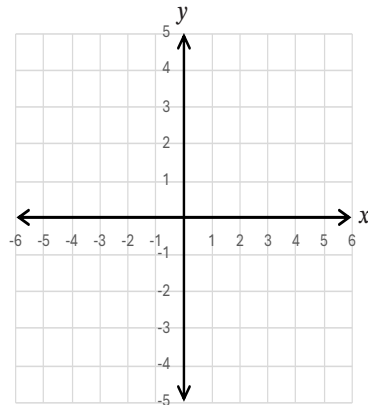
b) $y = -|x + 1|$



c) $g(x) = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right|$

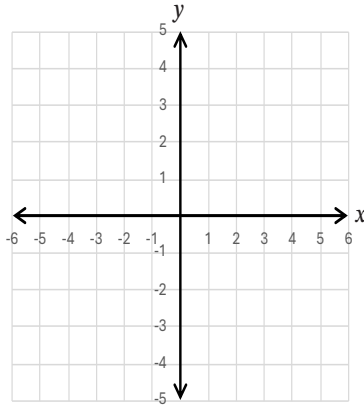
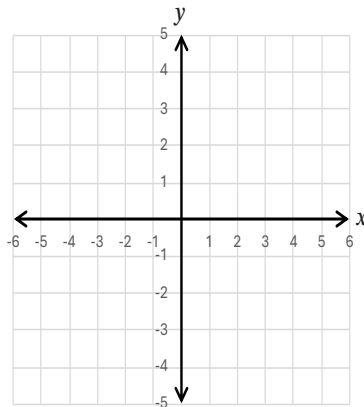


d) $f(x) = 1 - |x - 2|$

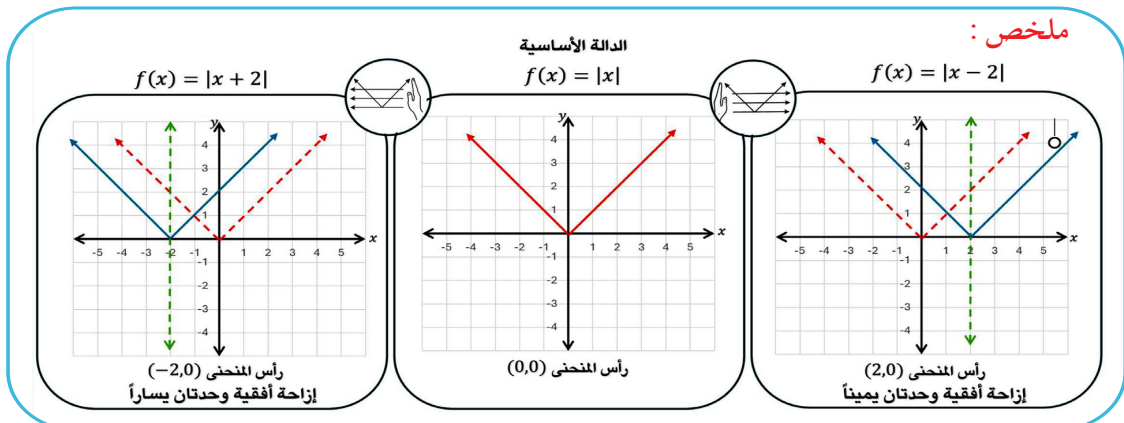


التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

1. الانسحاب في اتجاه محور السينات (إزاحة أفقية)

ارسم بيان الدالة : $f(x) = |x + 3|$ مثال (3) ارسم بيان كل من الدالة $f(x) = |x - 1|$ باستخدام التحويلات الهندسية

ملخص :



تعميم:

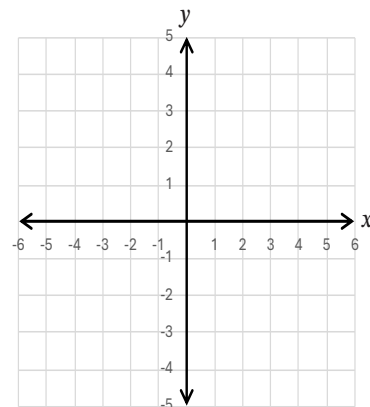
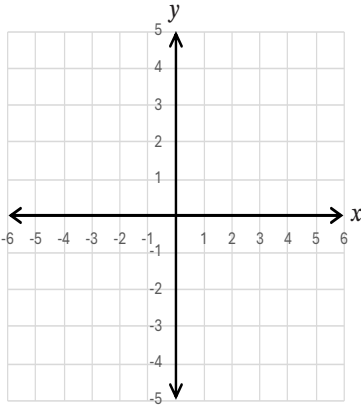
يكون منحنى الدالة $f(x) = |x + a|$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه: 1 - الموجب لمحور السينات (جهة اليمين) عندما $a < 0$
2 - السالب لمحور السينات (جهة اليسار) عندما $a > 0$

تحقق من فهمك (3)

لكل من الدوال التالية حدد مسافة الانسحاب ، ثم ارسم بيان كل منها مستخدماً الإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

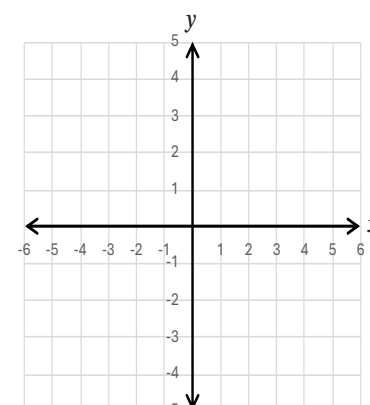
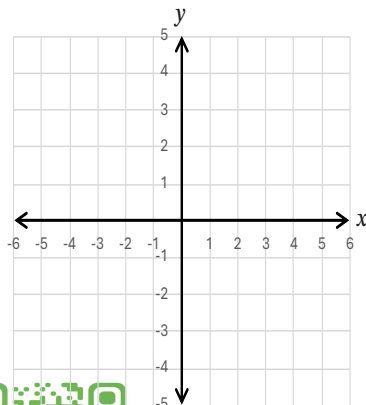
a) $f(x) = |x - 3|$

b) $y = |x + 2|$



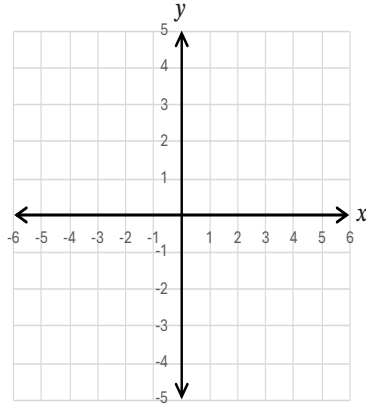
c) $f(x) = |x - 3.5|$

d) $y = |x - 1.5|$

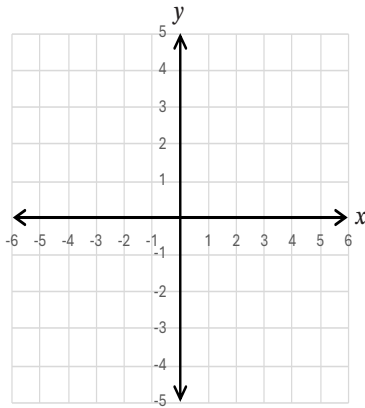


$$f(x) = |x| - 1$$

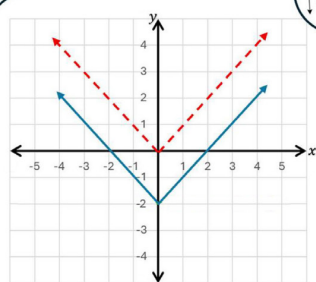
ارسم بيان الدالة :



مثال (4) ارسم بيان الدالة $f(x) = |x| + 2$ باستخدام التحويلات الهندسية



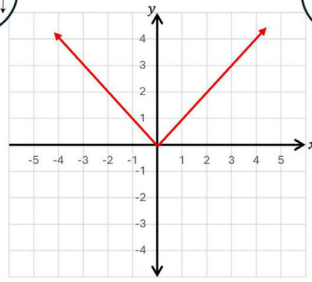
$$f(x) = |x| - 2$$



رأس المنحنى $(0, -2)$
إزاحة رأسية وحدتان لأسفل

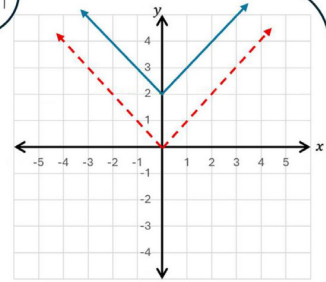
الدالة الأساسية

$$f(x) = |x|$$



رأس المنحنى $(0, 0)$

$$f(x) = |x| + 2$$



رأس المنحنى $(0, 2)$
إزاحة رأسية وحدتان لأعلى



تعميم:

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x| + a$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة رأسية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

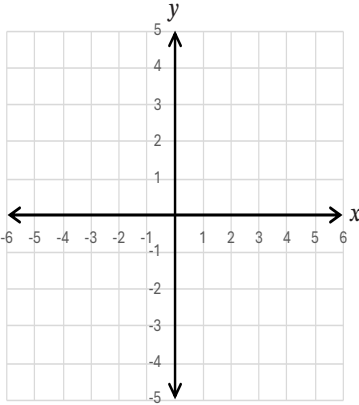
1. الموجب لمحور الصادات (رأسيًا للأعلى) عندما $a > 0$

2. السالب لمحور الصادات (رأسيًا للأسفل) عندما $a < 0$

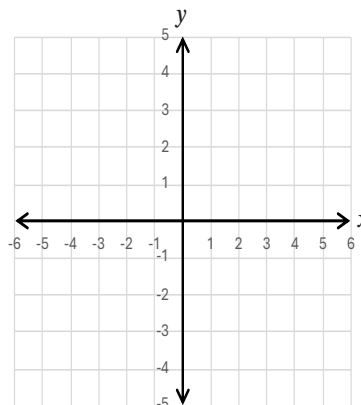
تحقق من فهمك (4)

ارسم بيان كل من الدوال التالية باستخدام التحويلات الهندسية والدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

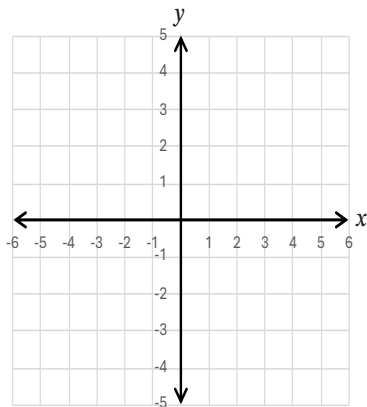
a $f(x) = |x| + 3$



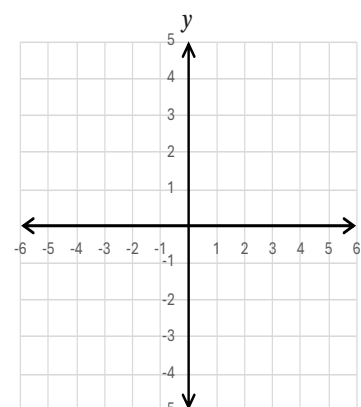
b $y = |x| - 2$



c $f(x) = |x| - 2.5$



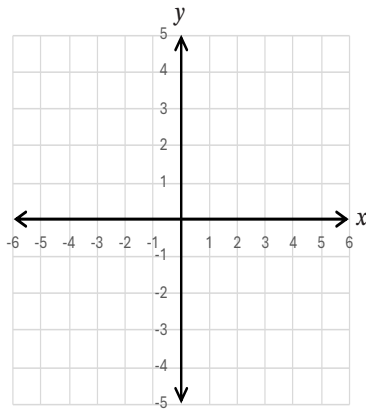
d $y = |x| - 1$



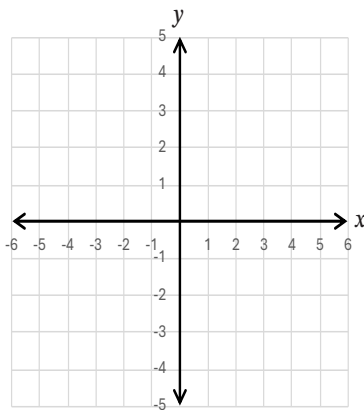
3. الانسحاب المركب: إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية لمنحنى الدالة $f(x) = |x|$

مثال (5) ارسم بيان كل دالة مما يلي باستخدام دالة المرجع والإزاحة:

a $f(x) = |x - 4| + 2$



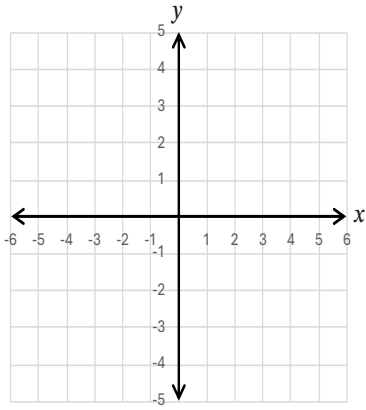
b $f(x) = |x + 3| - 1$



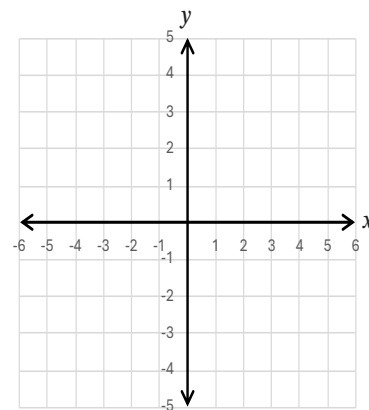
تحقق من فهمك (5)

ارسم بيان الدوال التالية باستخدام دالة المرجع والإزاحة :

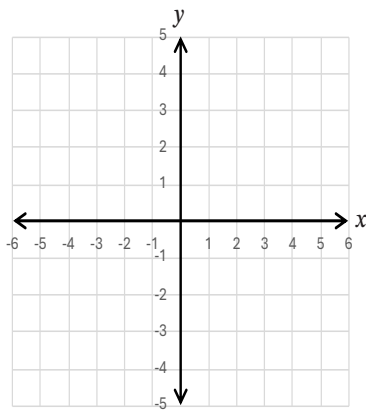
a $f(x) = |x + 3| + 2$



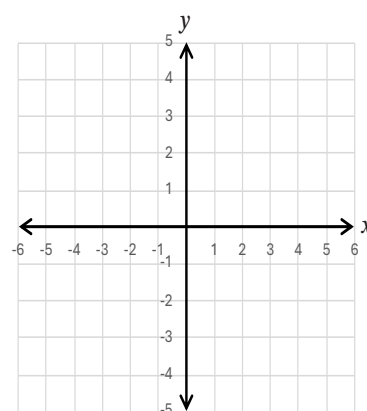
b $y = |x - 2| - 1$



c $f(x) = |x + 2| - 2$



d $y = |x - 1| + 3$



تعميم:

منحنى الدالة $f(x) = |x + a| + b$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة:

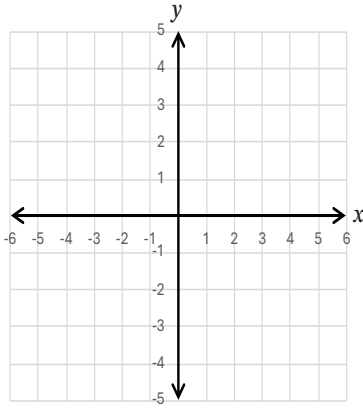
- 1 - أفقية (محور السينات) مقدارها $|a|$ مع مراعاة الاتجاه يميناً أو يساراً.
- 2 - رأسية (محور الصادات) مقدارها $|b|$ مع مراعاة الاتجاه للأعلى أو للأسفل.

الانعكاس في محور السينات للدالة الأساسية $g(x) = |x|$

$$f(x) = -|x|$$

ارسم بيان دالة:

استكشف



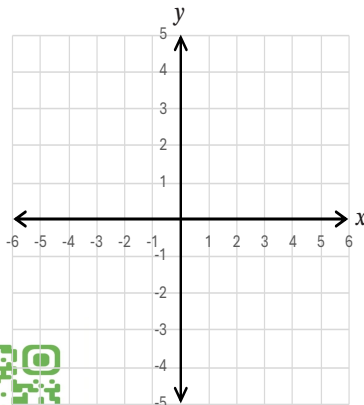
تعميم:

- إذا كانت $g(x) = |x|$ ، $f(x) = -|x+b|$ يجب مراعاة ترتيب التحويلات الهندسية لرسم بيان الدالة $f(x)$:

 - 1 - انعكاس في محور السينات أولاً للدالة الأساسية.
 - 2 - إزاحة أفقية (يميناً أو يساراً).
 - 3 - إزاحة رأسية (للأعلى أو للأسفل).
 - 4 - تحديد الرأس للمنحنى و محور التماثل.

ارسم بياناً لمنحنى الدالة $f(x) = -|x+1| + 2$
مستخدماً منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

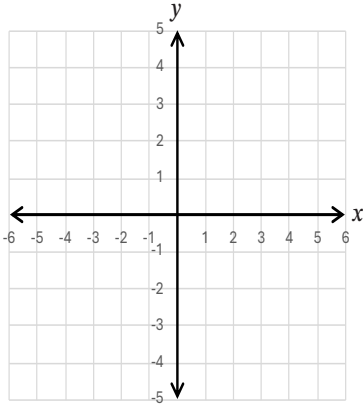
مثال (6)



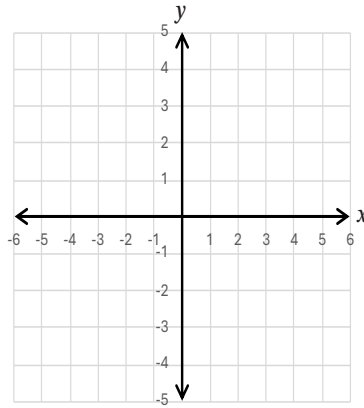
تحقق من فهمك (6)

ارسم بيانيًا كلا من الدوال التالية مستخدمًا بيان منحني الدالة الأساسية $g(x)=|x|$:

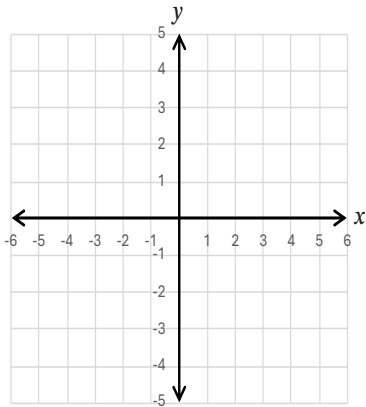
a $f(x) = -|x - 2| + 3$



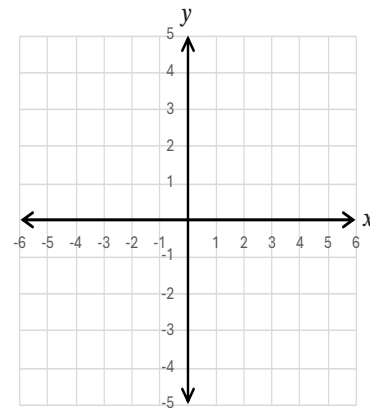
b $f(x) = -|x + 1| - 2$



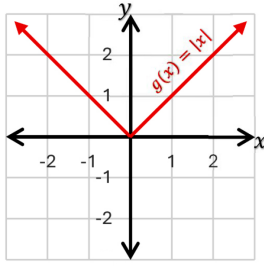
c $f(x) = -|x - 1| - 1$



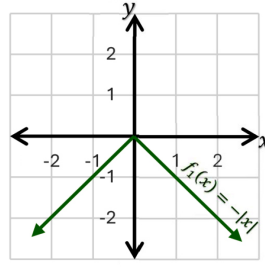
d $f(x) = -|x + 2| + 1$



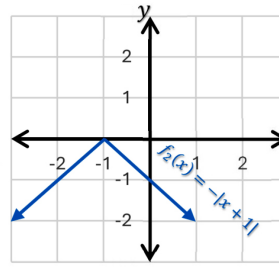
من منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ ونحصل على منحنى الدالة $f(x) = -|x + 1| + 2$ كالتالي :



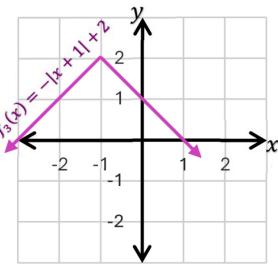
من منحنى الدالة الأساسية
 $g(x) = |x|$



الانعكاس في محور السينات
 $f_1(x) = -|x|$

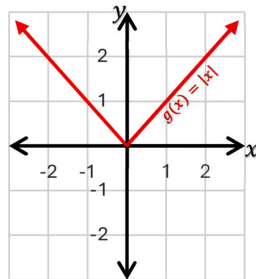


إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليسار
 $f_2(x) = -|x + 1|$

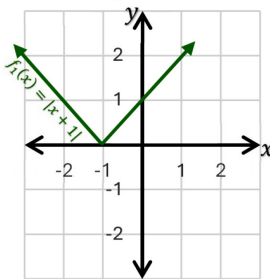


إزاحة رأسية وحدتان للأعلى
 $f_3(x) = -|x + 1| + 2$

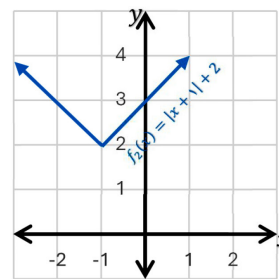
بالطبع لا يمكننا لأننا سوف نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب ، وسيكون على الصورة التالية.



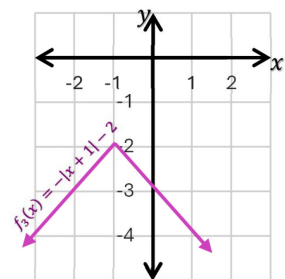
من منحنى الدالة الأساسية
 $g(x) = |x|$



إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليسار
 $f_1(x) = |x + 1|$



إزاحة رأسية وحدتان للأعلى
 $f_2(x) = |x + 1| + 2$



الانعكاس في محور السينات
 $f_3(x) = -|x + 1| + 2$

وهذا المنحنى ستكون معادلته هي $f(x) = -|x + 1| + 2$ ، يمكننا التحقق :

بإعادة تعريف القيمة المطلقة ثم رسم بيان الدالة، أو تحديد الرأس ومحور التماثل وفتحه بيان الدالة.



البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-5) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(a) (b)

(1) بيان الدالة $f(x)=|x|$ ينطبق على بيان الدالة $g(x)=x$

.....

.....

(a) (b)

(2) بيان الدالة $f(x)=|x|$ هو انعكاس لبيان الدالة $g(x)=-|x|$ حول

محور السينات

.....

.....

(a) (b)

(3) بيان الدالة $f(x)=|x-4|+2$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان

الدالة $g(x)=|x|$ في الاتجاه المحدد 4 وحدات جهة اليمين ووحدة واحدة للأعلى

.....

.....

(a) (b)

(4) محور التماثل للدالة $f(x)=|x-3|$ هو $x=3$

.....

.....

(a) (b)

(5) مدى الدالة $f(x)=|x+3|-3$ هو $[-3, \infty)$

.....

.....

■ في البنود من (1-2) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) أي من الدوال التالية رأس مُنَحْنَاهَا $(-3, 2)$:

(a) $y=|x+3|+2$

(b) $y=|x-3|+2$

(c) $y=|x+3|-2$

(d) $y=|x-3|-2$

.....

.....

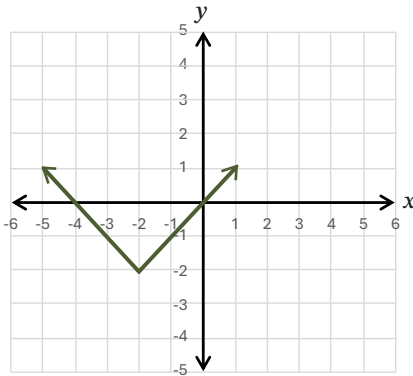


(2) أي من قواعد الدوال التالية تمثل منحنى الدالة المرسوم :

- (a) $y=|x-4|-3$
 (b) $y=|x-4|+3$
 (c) $y=|x+4|+3$
 (d) $y=|x+4|-3$

.....

مهارات تفكير عليا



■ اختر الإجابة الصحيحة:

المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=|x+2|-2$ ومحور السينات تساوي وحدة مربعة

- (a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 4

.....



1-2 حل معادلة القيمة المطلقة

معادلات القيمة المطلقة

مفهوم أساسي « حل معادلات القيمة المطلقة »

لحل المعادلة $|ax+b|=c$ حيث $c \geq 0$
 نحل المعادلتين المرتبطتين بها وهما: $ax+b=-c$ أو $ax+b=c$

حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=c, c \geq 0$

تعلمنا فيما سبق أن حل معادلة القيمة المطلقة:

1 $|x|=A$

إذا كان $A > 0$ ، فإن
 للمعادلة حلان هما:

$$x=A \text{ or } x=-A$$

$$S=\{-A, A\}$$

2 $|x|=0$

إذا كان $A=0$ ، فإن
 للمعادلة حل وحيد وهو:

$$x=0$$

$$S=\{0\}$$

3 $|x|=A$

إذا كان $A < 0$ ، فإن
 للمعادلة ليس لها حل:

$$S=\emptyset$$

خواص القيمة المطلقة

لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن:

1. $|a| \geq 0$

2. $|a+b| \leq |a| + |b|$

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

4. $|x-a| = |a-x|$

5. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

6. $|x| = |-x|$

7. $|n|^2 = n^2$ حيث n عدد زوجي

8. $\sqrt{x^2} = |x|$ لأي عدد حقيقي x يكون

أولاً: حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=|cx+d|$

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-2| = |2x-1|$



مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة : $|x-2| = |2x-1|$

* الحل الآخر (بتربيع الطرفين)

تحقق من فهمك (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة : $|x-1| = |x+2|$



مثال (2) أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

a $|x+4| = |x-3|$

a $|2y+1| = |3y+4|$



تحقق من فهمك (2)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $|y-4| = |2y-5|$

b $2x-3 = |x+1|$

c $|3y+1| = |y-2|$

d $|x-4| = |2x-5|$



ثانيًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=cx+d$

مثال (3) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-3|=3x-1$

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $|2x-1|=x+2$

b $|2x+5|=x+5$



أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

(a) $|4x+2|=1-2x$

(b) $|x+4|+2x+3=0$

مثال (4)

(a) $|4x+2|=1-2x$

(b) $|x+4|+2x+3=0$



تحقق من فهمك (4)

- أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $|2l-3|=|4l-1|$

b $|3x-1|+4x-13=0$



البند الموضوعية:

■ في البند من (1-7) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

(1) حل المعادلة $|2x-1|=x+3$ هو

- (a) $x=1$ (b) $x=2$ (c) $x=-1$ (d) $x=-2/3$

.....

.....

(2) حل المعادلة $|x+2|=x+2$ هو

- (a) $x=-2$ (b) $x \in (-2, \infty)$ (c) $x \in [-2, \infty)$ (d) $\emptyset$

.....

.....

(3) حل المعادلة $|x-3|=|x+1|$ هو

- (a) $x=\pm 1$ (b) $x=-1$ (c) $x=1$ (d) $x=2$

.....

.....

(4) مجموعة حل المعادلة $|x-3|=|3-x|$ هي

- (a) $\{3\}$ (b) $\{-3, 3\}$ (c) $\mathbb{R}$ (d) $\emptyset$

.....

.....

(5) حل المعادلة $|x-4|=|4-x|$ هو

- (a) $x=-4$ (b) $x=4$ (c) $\mathbb{R}$ (d) لا يوجد حل

.....

.....

(6) حل المعادلة $|2x-3|=|x+3|$ هو

- (a) $x=0, x=6$ (b) $x=-5, x=0$ (c) $x=5, x=6$ (d) $x=\pm 6$

.....

.....



مجموعة حل المعادلة $|x-2|+x=2$ هي (7)

(a) $\emptyset$

(b) $(-\infty, 2)$

(c) $(-\infty, 2]$

(d) $\{2\}$

مهارات تفكير عليا

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت مجموعة حل المعادلة $|x-a|=b$ هي $\{5, 11\}$ فإن $(a, b) =$

(a) $(-8, 3)$

(b) $(-3, 8)$

(c) $(8, 3)$

(d) $(3, 8)$



حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد "جبرياً وبيانياً"

1-3

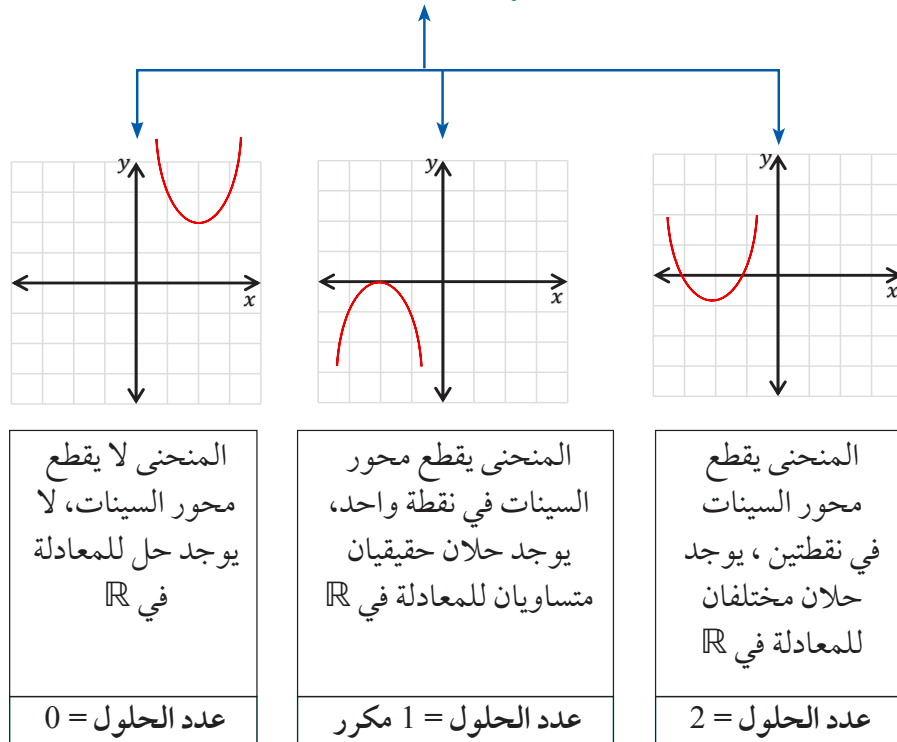
مفاهيم أساسية:

1. الدالة الثابتة: $f(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الصفرية) وتمثيلها البياني يكون خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة c .
2. الدالة الخطية: $f(x)=ax+b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني على شكل خط مستقيم.
3. الدالة التربيعية: $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطع مكافئ مفتوحاً للأعلى إذا كانت $a > 0$ ، ومفتوحاً للأسفل إذا كانت $a < 0$.

* حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانياً:

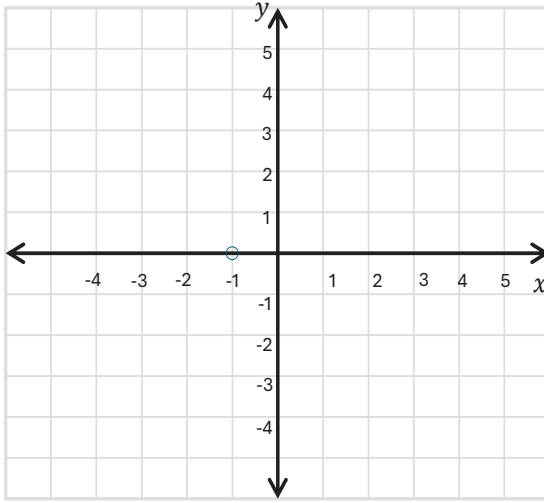
1. ضع المعادلة على الصورة: $ax^2+bx+c=0$
2. افرض أن: $f(x)=ax^2+bx+c$ ، ثم ارسم منحنى الدالة f
3. عين نقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات فتكون الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع هي:

حلول المعادلة $f(x)=0$

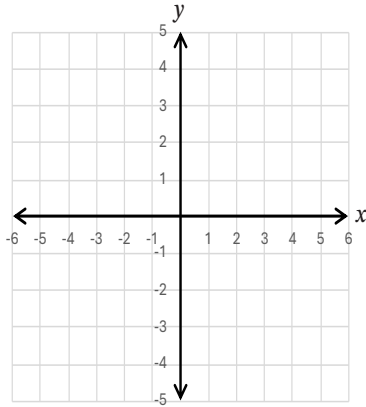


مثال (1) أوجد بيانيا مجمّوعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعيناً بالفترة الموضحة:

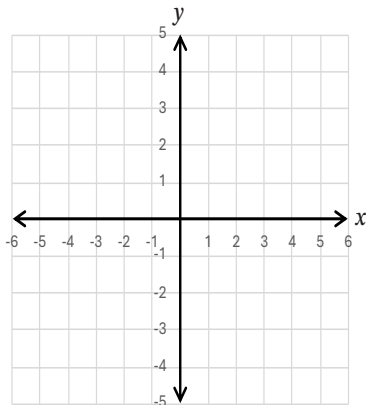
(a) $x^2 - 2x - 3 = 0$, $[-2, 4]$



(b) $-x^2 - 4x - 4 = 0$, $[-4, 0]$



(c) $x^2 + 2 = 0$, $[-2, 2]$

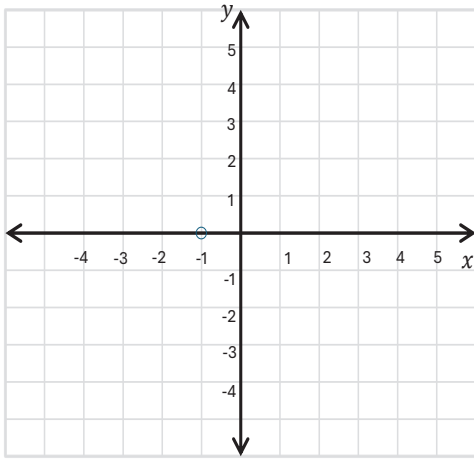


تحقق من فهمك (1)

أوجد بيانياً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعيناً بالفترة الموضحة :

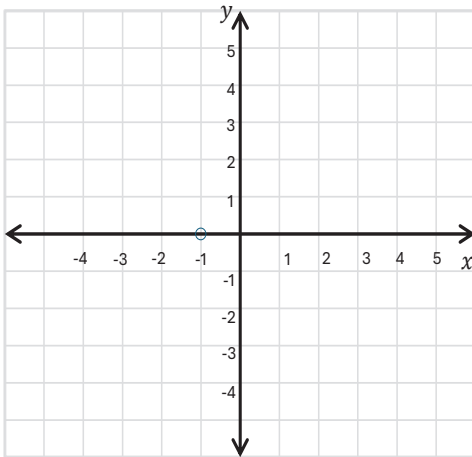
a $x^2 - 6x + 8 = 0$

, [1, 5]



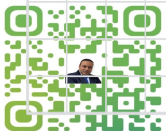
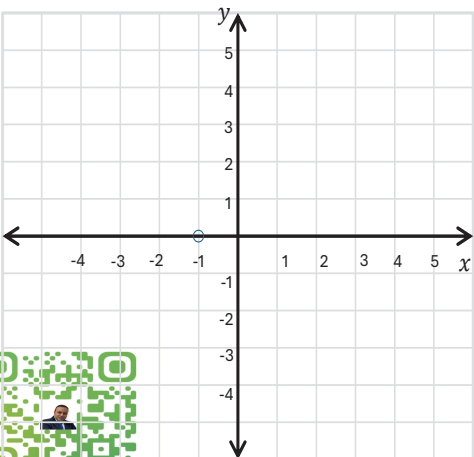
b $x^2 + 4x + 4 = 0$

, [-4, 0]



c $x^2 + 4x + 5 = 0$

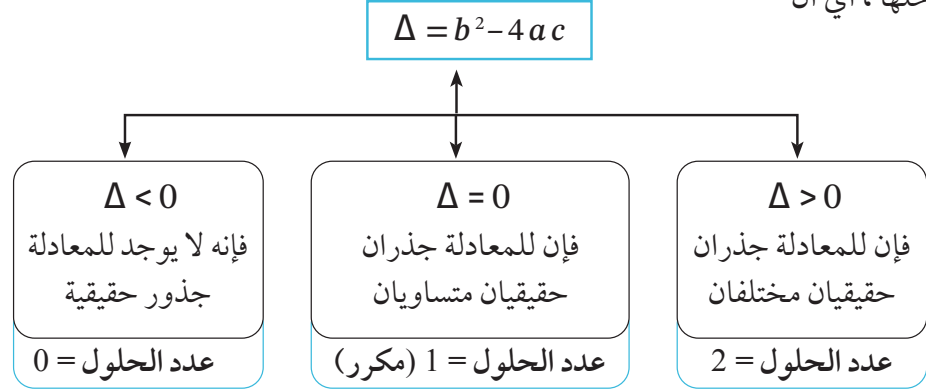
, [-4, 0]



القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد وهو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad b^2 - 4ac \geq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

يُسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميّز المعادلة التربيعية ، ويرمز له بالرمز Δ ويقرأ (دلتا) ، والمميّز هو الذي يميّز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها ، أي أن



حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون

حل المعادلة:

مثال (2)

a $4x^2 - 4x - 3 = 0$

b $2x^2 - 4x + 2 = 0$

c $x^2 + 2x + 3 = 0$

تحقق من فهمك (2)

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

a $2x^2 - 7x - 4 = 0$

b $x^2 - 10x + 25 = 0$

c $3x^2 - 2x + 2 = 0$



d $x^2 = 15$

e $x^2 - x = 0$

f $2x^2 - 8x + 8 = 0$

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a $x^2 - x - 5 = 0$

b $x^2 - 8 = 0$

مثال (3)

c $x^2 = x + 1$

d $x^2 - 6x + 9 = 0$

a $x^2 - x - 5 = 0$

b $x^2 - 8 = 0$



c $x^2 = x + 1$

d $x^2 - 6x + 9 = 0$

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a $x^2 - 4x + 2 = 0$

b $4x^2 - 5x + 1 = 0$



c $x^2 - 2x + 1 = 0$

d $x^2 - 6x + 8 = 0$

حل المعادلة التالية باستخدام القانون : $x^2 - 3x = 0$

مثال (4)

تحقق من فهمك (4)

حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون .

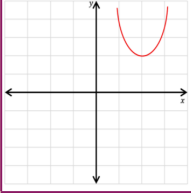
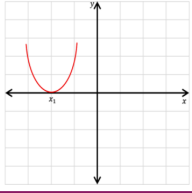
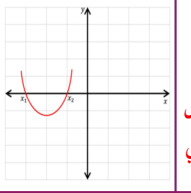
a $x^2 + 7x + 10 = 0$

b $2x^2 - 5x - 52 = 0$



تعميم:

للدالة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

المميز	$b^2 - 4ac < 0$ سالب	$b^2 - 4ac = 0$ صفر	$b^2 - 4ac > 0$ موجب
عدد الحلول	لا يوجد حلول حقيقية	حلان حقيقيان متساويان	حلان حقيقيان مختلفان
التمثيل البياني			

مثال (5) عددان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما 34 فما العددان؟

تحقق من فهمك (5)

a) أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100



تحقق من فهمك (5)

b) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار 3cm ومساحته 40cm^2 

البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هما جذران حقيقيان متساويان

.....

.....

(a) (b)

(2) المعادلة $x^2 - 4x + 4 = 0$ لها جذران حقيقيان متساويان

.....

.....

(a) (b)

(3) جذرا المعادلة $x^2 + 9 = 0$ هما 3 ، -3

.....

.....

■ في البنود من (1-7) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) المعادلة $x^2 - 6x + 9 = 0$

(a) لها جذران حقيقيان مختلفان

(b) لها جذران حقيقيان متساويان

(c) ليس لها جذور حقيقية

(d) ليس أيًا مما سبق

.....

.....

(2) المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$

(a) لها جذران حقيقيان مختلفان

(b) لها جذران حقيقيان متساويان

(c) ليس لها جذور حقيقية

(d) ليس أيًا مما سبق

.....

.....

(3) جذرا المعادلة $x^2 - 3x - 4 = 0$ هما:

(a) -1, 4

(b) 1, 4

(c) -2, 2

(d) -1, 3

.....

.....



(4) حل المعادلة $x^2=9$ هو:

- (a) 3 (b) -3 (c) ± 3 (d) لا يوجد حل

.....

.....

(5) جذرا المعادلة $2x^2-7x+3=0$ هما:

- (a) $\frac{1}{2}, 3$ (b) 1, 3 (c) 2, 3 (d) $1, \frac{3}{2}$

.....

.....

(6) حل المعادلة $x^2-25=0$ هو:

- (a) 5 (b) -5 (c) ± 5 (d) لا يوجد حل

.....

.....

(7) المعادلة التي مجموع جذريها يساوي 5 فيما يلي:

- (a) $(x+1)(x+4)=0$ (b) $x(x-5)=0$
(c) $(x-1)(x+6)=0$ (d) $(x-5)(x+1)=0$

.....

.....

مهارات تفكير عليا

■ اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) إذا كانت المعادلة $x^2-6x-k=0$ لها جذران حقيقيان متساويان

- (a) (b) فإن قيمة k هي 3

.....

.....



■ في البنود من (2 - 5) اختر الإجابة الصحيحة:

(2) إذا كانت المعادلة $x^2 - kx + 4 = 0$ ليس لها جذور حقيقية فإن k تحقق:

- (a) $k^2 > 16$ (b) $k^2 = 16$ (c) $k^2 < 16$ (d) $k > 16$

(3) مجموعة حل المعادلة $x^2 = 2 - |x|$ هي:

- (a) $\{1, -1\}$ (b) $\{2, -2\}$ (c) $\{1, -2\}$ (d) $\{-1, 2\}$

(4) مجموعة حل المعادلة $x^2 - 2|x| = 8$ هي:

- (a) $\{2, -2\}$ (b) $\{4, -4\}$ (c) $\{2, 4\}$ (d) $\emptyset$

(5) إذا كانت $|x| > x$ ، $x^2 + 2x - 3 = 0$ فإن $2x + 4$ تساوي:

- (a) -2 (b) 2 (c) 6 (d) 8



1-4 إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري معادلة تربيعية - تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها

أولاً : إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين للمعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ بدون حلها

∴ جذري المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هما:

$$x_1 = \ell = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = m = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فإن: ① $x_1 + x_2 = \ell + m = \frac{-b}{a}$ ② $x_1 \cdot x_2 = \ell \cdot m = \frac{c}{a}$

③ $x_1 - x_2 = \ell - m = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$

مثال (1) إذا كان حاصل ضرب جذرا المعادلة $2x^2 - 3x + c = 0$ يساوي -1 أوجد قيمة C .

تحقق من فهمك (1)

إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $3x^2 + 10x - c = 0$ يساوي $-\frac{8}{3}$ أوجد قيمة C .



مثال (2) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة: $2x^2 + bx - 5 = 0$ هو $\frac{3}{2}$ ، فأوجد قيمة b .

تحقق من فهمك (2) إذا كان حاصل ضرب جذريّ المعادلة $ax^2 - 5x + 2 = 0$ يساوي $\frac{3}{2}$ أوجد قيمة a ، ثم حل المعادلة.

مثال (3) إذا كان m , l هما جذريّ المعادلة $2x^2 - 8x + 5 = 0$ ، فأوجد القيم العددية لكل مما يلي:

(a) $l^2 + m^2$ (b) $\frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ (c) $l - m$



تحقق من فهمك (3)

إذا علمت أن جذريّ المعادلة $x^2 - 7x + 9 = 0$ هما l, m ، فأوجد قيمة كل من:

a $l + m$

b $l \cdot m$

c $l^2 + m^2$

ثانيًا: إيجاد المعادلة التربيعية إذا عُلم جذراها

تعميم

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (l + m)x + (l \cdot m) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 حاصل ضرب الجذرين مجموع الجذرين

مثال (4) كَوْن معادلة تربيعية في متغير واحد والتي جذراها 4 , -3 بطريقتين مختلفتين.



تحقق من فهمك (4)

أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها معلومان في الحالات التالية :

a $3, 5$

b $4, \frac{-1}{3}$

c $2, -2$

كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها:

مثال (4)

a $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

b $5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$

a $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

b $5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$



تحقق من فهمك (5)

كُونِ المعادلة التربيعية التي جذراها: $-3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$

ثالثاً: تَكْوِينُ معادلةٍ تربيعيةٍ بمعلومية معادلةٍ أُخْرَى

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2 - 3x - 1 = 0$ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $2l, 2m$

مثال (6)

تحقق من فهمك (6)

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2 + 15x - 8 = 0$ كون المعادلة التربيعية التي جذراها: $2l, 2m$



البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-6) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) إذا كان ناتج ضرب جذريّ المعادلة التربيعية $x^2 - 3x + c = 0$ يساوي 2 فإن c يساوي:

- (a) -4 (b) -2 (c) 4 (d) 2

(2) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة $x^2 - ax + 6 = 0$ يساوي 5 فإن a يساوي:

- (a) -6 (b) -5 (c) 5 (d) 6

(3) إذا كان أحد جذريّ المعادلة $x^2 - (m+2)x + 3 = 0$ هو معكوسٌ جمعيّ للآخر فإن m تساوي:

- (a) 3 (b) 2 (c) -2 (d) -3

(4) عدنان حقيقيان مجموعهما 2 و حاصل ضربهما -35 هما:

- (a) 5, 7 (b) -5, -7 (c) -7, 5 (d) 7, -5

(5) حاصل ضرب جذريّ المعادلة $x(2x-3)=7$ يساوي:

- (a) $-\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{7}{2}$ (d) $\frac{7}{2}$

مهارات تفكير عليا

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كان أحد جذريّ المعادلة : $2x^2 + 6x + c = 0$ هو 3 ، فإن c تساوي:

- (a) 18 (b) 36 (c) -6 (d) -36



1-5 حل متباينة من الدرجة الثانية

أولاً: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام التحليل

«خواص المتباينات في الأعداد الحقيقية» :

1. عندما : $a.b \geq 0$ فإن : $a \geq 0, b \geq 0$ or $a \leq 0, b \leq 0$

2. عندما : $a.b \leq 0$ فإن : $a \geq 0, b \leq 0$ or $a \leq 0, b \geq 0$

مثال (1) حل كلاً من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

a $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

b $x^2 - 2x - 8 \leq 0$



ملحوظة:

حل المتباينة: $x^2 - 2x - 8 > 0$ هوحل المتباينة: $x^2 - 2x - 8 < 0$ هو

تحقق من فهمك (1)

حل كلاً من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

a $x^2 + x - 12 \leq 0$

b $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

c $x^2 - x - 6 < 0$



d $(x-3)(2x+5)<0$

e $x^2-2x+1>0$

f $x^2+6x+9<0$



ثانيًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية بدراسة الإشارة

هناك طرق عديدة لحل متباينة من الدرجة الثانية تعرضنا على طريقة توظيف خواص التباين والآن سنتعرف معًا على حل المتباينة من الدرجة الثانية بالبحث عن إشارة المقدار الثلاثي ax^2+bx+c بإيجاد مجموعة جميع الأعداد الحقيقية x التي تجعل المقدار سالبًا أو موجبًا ، **لنتعرف أولاً على دراسة مقدار من الدرجة الأولى :**

ادرس إشارة كل من :

مثال (2)

a $f(x) = 2x - 8$

b $g(x) = -3x + 6$



قاعدة هامة

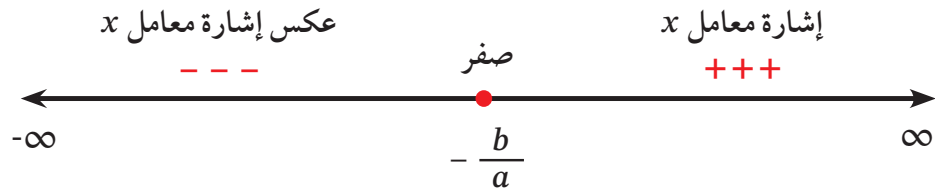
لدراسة إشارة $g(x)=ax+b$, $a \neq 0$ نتبع التالي :

$$1. \text{ نضع } x = -\frac{b}{a} \iff ax+b=0 \iff g(x) = 0$$

2. نحدد العدد $x = -\frac{b}{a}$ على خط الأعداد

3. تكون إشارة $g(x)$: • مماثلة للإشارة a على يمين العدد $-\frac{b}{a}$

• ومخالفة للإشارة a على يسار العدد $-\frac{b}{a}$



تحقق من فهمك (2)

من السؤال السابق أكمل الجدول التالي وحدد الفترات التي تعبر عن حل المتباينات في كل مما يلي :

$f(x)$	المتباينة	الفتره	التمثيل على خط الأعداد
$f(x)$	$x^2-4 \leq 0$		
$f(x)$	$x^2-4 > 0$		
$f(x)$	$x^2-4 \geq 0$		

قاعدة هامة

لدراسة إشارة $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$ نتبع التالي :

1. نوجد المعادلة المناظرة: $f(x)=0$

2. نوجد قيم x التي تجعل $f(x)=0$ إما بالتحليل أو باستخدام المميز عندما يصعب التحليل

3. لدينا ثلاثة احتمالات:

للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان مختلفان $x_1 < x_2$	$\Delta > 0$	
للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان متساويان $x_1 = x_2$	$\Delta = 0$	
ليس للمعادلة $f(x)=0$ جذور حقيقية	$\Delta < 0$	



حل كلاً من المتباينات التالية :

مثال (3)

a $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

b $x^2 - x \leq 5$

c $x^2 - 10x + 25 > 0$

d $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

a $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

b $x^2 - x \leq 5$



c $x^2 - 10x + 25 > 0$



d $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

لحل المتباينة التربيعية بصورها المختلفة التي على الصورة $ax^2 + bx + c \geq 0$ ، $a \neq 0$ يجب ملاحظة إشارة Δ ، $a \neq 0$ ، $f(x) = ax^2 + bx + c$ لايجاد قيمة Δ

تحقق من فهمك (3)

حل كل من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

a $2x^2 + 3x - 2 < 0$



b $-x^2 - x + 6 > 0$

c $x^2 - 6x + 9 \geq 0$



حالة خاصة : حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام القيمة المطلقة

خاصية

إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين فإن: $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

ملحوظة:

عند حل المتباينة $x^2 < 0$ فإننا نلاحظ أنه لا يوجد أي عدد حقيقي بحيث يكون مربعه أصغر من الصفر.
أي إن المتباينة $x^2 < 0$ ليس لها أي حل ، وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي المجموعة الخالية $\emptyset$.
وبالمقابل فإن المتباينة $x^2 \geq 0$ صحيحة لأي عدد حقيقي و بالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

بصفة عامة : إذا كان a, b, c أعداداً حقيقية بحيث $c < 0, a \neq 0$ فإن :

1. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < c$ هي المجموعة الخالية $\emptyset$
2. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > c$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
3. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < 0$ هي $\emptyset$
- مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > 0$ هي $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

ملحوظة:

المتباينة	مجموعة الحل
$x^2 < 0$	$\emptyset$
$x^2 \leq 0$	$\{0\}$
$x^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

مثال (4)

- a) $2x^2 + 5 \geq 23$ b) $(5x+7)^2 + 3 < 2$

الحل:

a) $2x^2 + 5 \geq 23$



b $(5x+7)^2+3<2$

تحقق من فهمك (4)

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

a $3x^2-4\leq 8$

b $(4x-3)^2+2>-3$

c $(2-3x)^2<1$

d $(2x+1)^2-3\geq 1$



البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) مجموعة حل المتباينة $(x+2)(x-5) > 0$ هي:

(a) $(-2,5)$

(b) $[-2,5]$

(c) $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$

(d) $\mathbb{R}$

(2) مجموعة حل المتباينة $x^2 - 2x < 0$ هي:

(a) $(0,2)$

(b) $[-\infty, 0]$

(c) $(2, \infty)$

(d) $[0,2]$

(3) مجموعة حل المتباينة $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ هي:

(a) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

(b) $\{-3\}$

(c) $[-3,3]$

(d) $\mathbb{R}$

(4) أي مما يلي ليس حلاً للمتباينة $4x^2 - 4x - 5 > 0$

(a) 60

(b) -20

(c) 2

(d) 0

(5) أي من المتباينات التالية حلها نفس حل المتباينة $-2x^2 + 5x - 3 > 0$:

(a) $x^2 - 5 > 2x^2$

(b) $-x^2 - x > x^2 - 4x$

(c) $2x^2 + 3 < 5x$

(d) $x^2 - 3x > 2x - x^2$



التناسب

2-1

النسبة : هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس ويمكن

التعبير عن النسبة بصورة a إلى b ، وتكتب $a:b$ أو $\frac{a}{b}$

التناسب: هو تساوي نسبتين أو أكثر.

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

وكانت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن a, b, c, d تسمى أعدادًا متناسبة

ملحوظة :

إذا كان a, b, c, d أعداد متناسبة فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

خواص التناسب

خاصية (1): « الضرب التقاطعي »

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن : $a.d = c.b$

أي إن : حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه الخاصية «قاعدة الضرب التقاطعي»

مثال (1) إذا كانت : $2, x, 4, 6$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة x

تحقق من فهمك (1)

إذا كانت : $3, 5, 6, x$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة x



مثال (2) أوجد الرابع المتناسب للأعداد : 1, 3, 9, ...

تحقق من فهمك (2)

أوجد الثالث المتناسب للأعداد : 4, 7,, 35

مثال (3) أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدّي النسبة $\frac{7}{9}$ أصبحت $\frac{4}{5}$

تحقق من فهمك (3)

أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدّي النسبة $\frac{5}{6}$ أصبحت $\frac{9}{4}$



مثال (4) إذا كان $(x+4) : (5x-1) = 4:5$ أوجد قيمة x

تحقق من فهمك (4)

أوجد قيمة x إذا كان : $(2x+3) : (3x-5) = 3 : 4$

خاصية (2): "عكس الخاصية 1"

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $a.d = b.c$

فإن : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال (5) إذا كان $5a = 4b$ فأوجد $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}^*$

تحقق من فهمك (5)

إذا كان : $2a = 7b$ ، فأوجد $\frac{a}{b}$



خاصية (3): إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فإن :

$$(1) \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$(2) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$(3) \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

خواص التناسب

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $y \neq 0, x \neq 0$

مثال (6)

a $3x = 4y$

b $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

a $3x = 4y$

b $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

الحل:

تحقق من فهمك (6)

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $y \neq 0, x \neq 0$

a $5x = 7y$

b $\frac{5x-2y}{5x+2y} = \frac{1}{4}$

خاصية (4): إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $k \in \mathbb{R}^*$

حيث k عدد ثابت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

فإن $a = bk, c = dk$



مثال (7) إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ أوجد $\frac{2a+5b}{3b+2a}$

تحقق من فهمك (7)

إذا كان : $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

خاصية (4): إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ وكانت $k_1, k_2, k_3, \dots \in \mathbb{R}^*$ فإن: إحدى النسب $\frac{ak_1 + ck_2 + ek_3 + \dots}{bk_1 + dk_2 + fk_3 + \dots}$



مثال (8) إذا كانت الأعداد 5, 6, 3 متناسبة مع a, b, c ،
أوجد قيمة المقدار : $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$



تحقق من فهمك (8)

إذا كان : $\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5}$ ، أوجد : $\frac{a+2b}{3b+c}$ (بطريقتين مختلفتين).

أسئلة المقال

إذا كانت الأعداد 3, 5, 11 متناسبة مع a, b, c أوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{a+3b}{5b+c}$



تعريف:

الكميات : a, b, c في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان :

$$b^2 = ac \quad \text{أو} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

ويسمى : a الأول المتناسب ، b الوسط المتناسب ، c الثالث المتناسب

$$b = \pm \sqrt{a \cdot c} \quad \text{حيث :}$$

ملحوظة : a, c إما أن يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً

$$\frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الأول المتناسب}} = \frac{\text{الثالث المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}} \quad , \quad \frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الثالث المتناسب}} = \frac{\text{الأول المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}}$$

مثال (9) أوجد الوسط المتناسب بين العددين 9, 16

تحقق من فهمك (9)

أوجد الوسط المتناسب بين العددين -27 , -3

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, k عدد ثابت لا يساوي الصفر وكان :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$$

$$\text{فإن : } a = dk^3 , \quad b = dk^2 , \quad c = dk$$

مثال (10) إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$



تحقق من فهمك (10)

إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{a+3b}{b+3c} = \frac{a-2b}{b-2c}$
حيث المقام $\neq$ صفر

مثال (11) إذا كان : $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a+2b}{b+2c}$ أثبت أن : b وسط متناسب بين a, c

تحقق من فهمك (11)

إذا كان : $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$ أثبت أن b وسط بين a, c

تعميم: الكميات : $a, b, c, d, \dots$ في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$



البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-4) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ فإن $ab = 3 \times 4$

(a) (b)

(2) إذا كان $\frac{x}{3} = \frac{14}{23}$ فإن $x = \frac{23}{42}$

(a) (b)

(3) إذا كان $\frac{x-7}{7} = \frac{1}{8}$ فإن $x = \frac{63}{8}$

(a) (b)

(4) زوج النسب التالي: $\frac{9}{12} = \frac{4}{5}$ لا يكون تناسباً

■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) إذا كانت $a, 3x, 2b, 4x$ في تناسب فإن $\frac{a}{b}$ تساوي :

(a) $\frac{3}{2}$

(b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{4}{3}$

(d) $\frac{3}{4}$

(a) $7x$

(b) $8x$

(c) $2x$

(d) $10x$

(2) إذا كان $\frac{x}{y} = 7$ فإن $x + 7y$ تساوي :



(3) إذا كان $2x - 5y = 0$ فإن $\frac{x}{y}$ تساوي:

(a) $\frac{5}{2}$

(b) $\frac{2}{5}$

(c) $\frac{3}{2}$

(d) $\frac{2}{3}$

.....

.....

(4) إذا كان $\frac{x}{2y} = \frac{3}{5}$ فإن $\frac{x+2y}{2x-y}$ تساوي:

(a) $\frac{15}{9}$

(b) $\frac{16}{7}$

(c) $\frac{7}{16}$

(d) $\frac{9}{15}$

.....

.....

(5) إذا كان $20, x, 32$ في تناسب متسلسل فإن x تساوي:

(a) $\pm 2\sqrt{10}$

(b) $\pm 4\sqrt{10}$

(c) $\pm 8\sqrt{10}$

(d) $\pm \frac{1}{8\sqrt{10}}$

.....

.....



تشابه المضلعات

2-2

تعميم (1): يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) انهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معا :

1. قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .
2. أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

«والعكس صحيح»

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه** ، ويستخدم الرمز $(\sim)$ للتعبير عن تشابه المضلعين .

تعميم (2): المضلعان المتطابقان متشابهان.

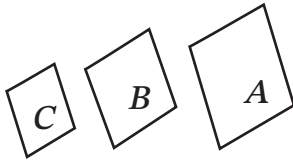
ملحوظة: يراعى ترتيب كتابة الرؤوس المتناظرة للأشكال الهندسية المتشابهة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة .

تعميم (3):

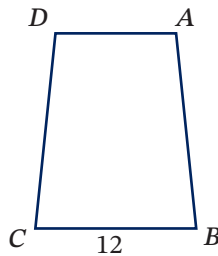
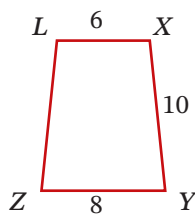
إذا كان المضلع A يشابه المضلع B ، وكان المضلع B يشابه المضلع C

فإن المضلع A يشابه المضلع C

أي أنه : إذا كان $A \sim B, B \sim C$ فإن $A \sim C$



المضلعات المتشابهة يكون لها نفس عدد الأضلاع وليس بالضرورة أن يكون لها نفس القياس بالأطوال .



في الشكل المقابل :

إذا كان: $XYZL \sim ABCD$

أوجد : AB, DA

مثال (1)



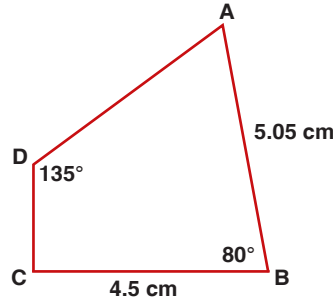
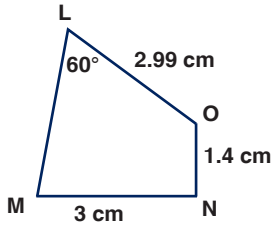
(1) تحقق من فهمك

في الشكل المقابل :

المضلعان $LMNO$, $ABCD$ متشابهان

أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال

الأضلاع المجهولة في كلا من المضلعين



نظرية

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{a}{b}$ فإن :1 . النسبة بين محيطي الشكلين $= \frac{a}{b}$ و هي نسبة التشابه2 . النسبة بين مساحتي الشكلين $= \left(\frac{a}{b}\right)^2$ و هي مربع نسبة التشابهإذا كان المضلع A يشابه المضلع B (كانت k نسبة تشابه المضلع A : المضلع B) :(1) $k > 1$ فإن المضلع A هو تكبير للمضلع B وتسمى K معامل التكبير(2) $0 < k < 1$ فإن المضلع A هو تصغير للمضلع B وتسمى K معامل التصغير(3) $k = 1$ فإن المضلع A يطابق المضلع B 

مثال (2) إذا كانت نسبة التشابه لمضلعين متشابهين تساوي $\frac{5}{6}$ ، وكان محيط المضلع الأصغر يساوي 14.5 cm ، أوجد محيط المضلع الأكبر.

تحقق من فهمك (2)

لدينا شكلان رباعيان متشابهان ونسبة التشابه بينهما $\frac{5}{4}$ ، فإذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر هي 30 cm^2 فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر ؟



البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-3) ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة أو (b) إذا كانت العبارة خاطئة :

(a) (b)

(1) كل مضلعين متطابقين هما مضلعان متشابهان .

(a) (b)

(2) كل مضلعين متشابهين هما مضلعان متطابقان .

(a) (b)

(3) إذا تساوت الزوايا المتناظرة في مضلعين فإن المضلعين متشابهان .

■ في البنود من (1-6) ظل دائرة الإجابة الصحيحة.

(2) المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كانت نسبة التشابه x ، فإن x تساوي:

(a) $x = 1$

(b) $x > 1$

(c) $0 < x < 1$

(d) $x = \frac{1}{2}$

(3) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما 36:25 ، فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

(a) 6 : 5

(b) 5 : 6

(c) 36 : 25

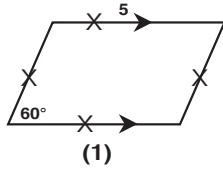
(d) 4 : 5



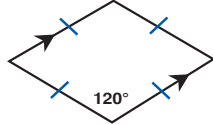
(4) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين $16 : 25$ طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

- (a) $2 : 5$ (b) $4 : 5$
(c) $16 : 25$ (d) $16 : 41$

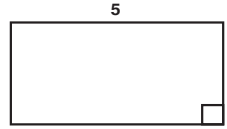
(5) أي من المضلعين التاليين متشابهان؟



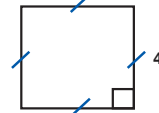
(1)



(2)



(3)



(4)

- (a) المضلعان (1), (2) (b) المضلعان (1), (3)
(c) المضلعان (3), (4) (d) المضلعان (2), (4)

(6) إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta LMN$ ، $AB=3cm$ ، $LM=6cm$ ، $MN=8cm$ فإن BC تساوي:

- (a) $4 cm$ (b) $3 cm$
(c) $2 cm$ (d) $1.5 cm$



تشابه المثلثات

2-3

من خواص التكبير أنه يحافظ على قياسات الزوايا :

(1) قياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية

من خواص التكبير أنه يحافظ على تناسب أطوال الأضلاع :

$$\therefore \frac{AB}{LM} = \frac{AC}{LN} = \frac{BC}{MN} = \frac{2}{1} \quad (\text{معامل التكبير})$$

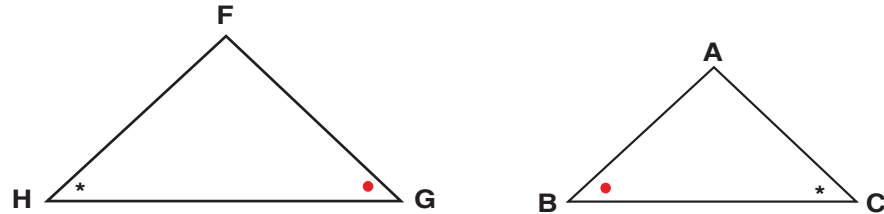
(2) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

(1، 2) هذان الشرطان أساسيان لتشابه أي مضلعين.

ونكتفي بشرط واحد لإثبات تشابه مثلثين حيث إن تشابه المثلثات يعتبر حالة خاصة من تشابه المضلعات .

نظرية (1)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.



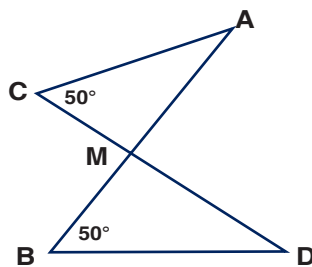
$$m(\hat{H}) = m(\hat{C})$$

$$m(\hat{G}) = m(\hat{B})$$

$$\Delta FGH \sim \Delta ABC$$

وينتج من التشابه أن :

$$\frac{FG}{AB} = \frac{GH}{BC} = \frac{FH}{AC}$$



في الشكل المقابل :

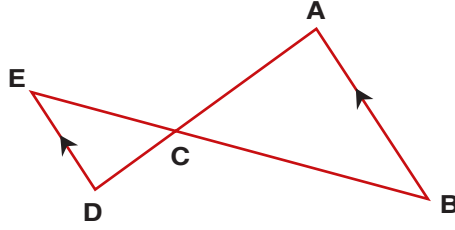
$$m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 50^\circ$$

مثال (1)

أثبت أن: $\Delta DBM \sim \Delta ACM$



تحقق من فهمك (1)



في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين DEC , ABC $\overline{DE} // \overline{BA}$

متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه

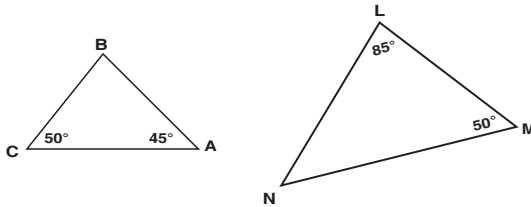
في الشكل المقابل :

$$m(\hat{A})=45^\circ, m(\hat{C})=50^\circ$$

$$m(\hat{L})=85^\circ, m(\hat{M})=50^\circ$$

أثبت أن: $\Delta ABC \sim \Delta NLM$

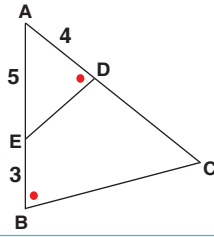
مثال (2)



تحقق من فهمك (2)

المثلث ABC قائم الزاوية في A فيه $m(\hat{B})=55^\circ$ ، والمثلث NLM قائم الزاوية في L فيه $m(\hat{M})=35^\circ$ ، أثبت أن المثلثين متشابهان .

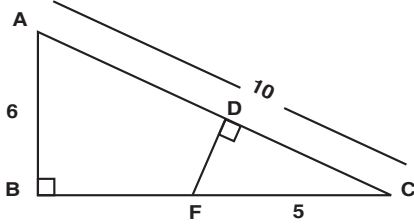




مثال (3) في الشكل المقابل :

1. أثبت أن: $\Delta ACB \sim \Delta AED$

2. أوجد طول $\overline{DC}$



تحقق من فهمك (3)

في الشكل المقابل :

(1) أثبت أن المثلثين ABC , FDC متشابهان

(2) أوجد طول $\overline{FD}$



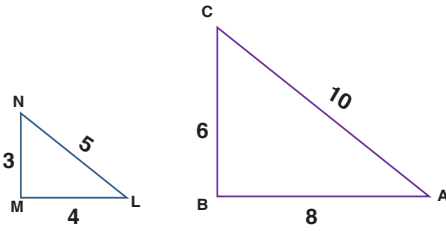
نظرية (2)

يتشابه المثلثان إذا تناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

مثال (4)

في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين ABC, LMN متشابهان.



الحل: $\Delta ABC, \Delta LMN$ وفيهما :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \longrightarrow (1)$$

$$\frac{LN}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \longrightarrow (2)$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \longrightarrow (3)$$

من 1، 2، 3 ينتج أن :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

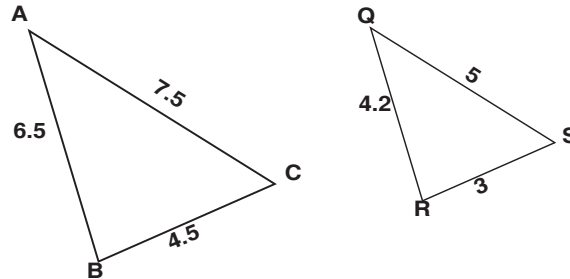
$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta NLM$$

تحقق من فهمك (4)

في الشكل المقابل :

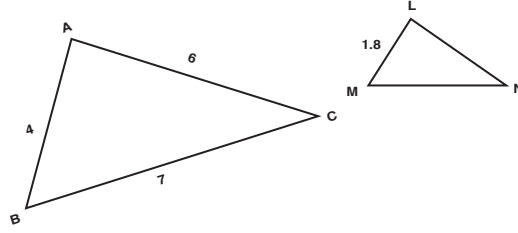
أثبت أن المثلثين

ABC, QRS متشابهان.





تحقق من فهمك (4)

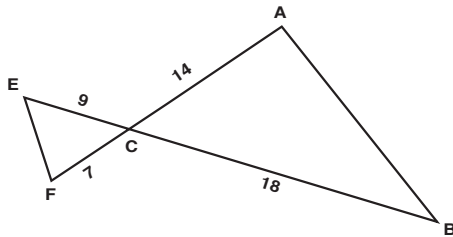


b في الشكل المقابل :

المثلثان ABC, LMN متشابهان.أوجد طول كل من $\overline{MN}$, $\overline{LN}$

نظرية (3)

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طول الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين .

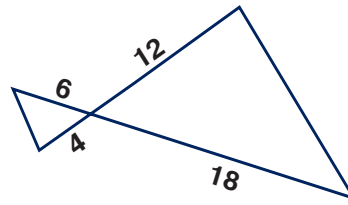


في الشكل المقابل :

مثال (5) أثبت أن المثلثين FEC, ABC متشابهان.

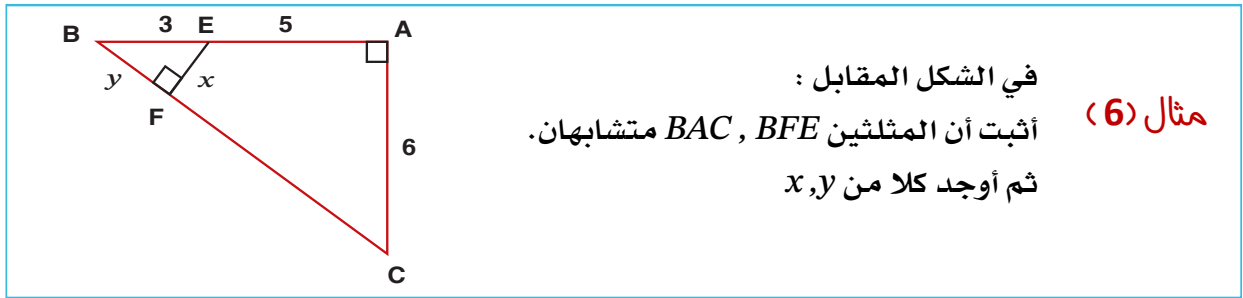
ثم اكتب عبارة التشابه .





تحقق من فهمك (5)

في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين متشابهان .

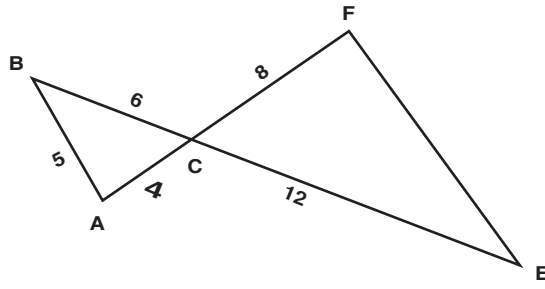


في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين BAC , BFE متشابهان .

مثال (6)

ثم أوجد كلا من x, y 



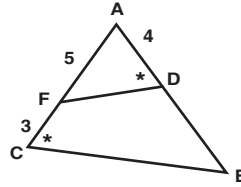
تحقق من فهمك (6)

في الشكل المرسوم :

a أثبت أن $\Delta FEC \sim \Delta ABC$ b أوجد $\overline{EF}$ 

البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:



(1) في الشكل المقابل:

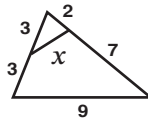
طول $(\overline{BD})$ يساوي 6

(a) (b)

(2) في الشكل المقابل:

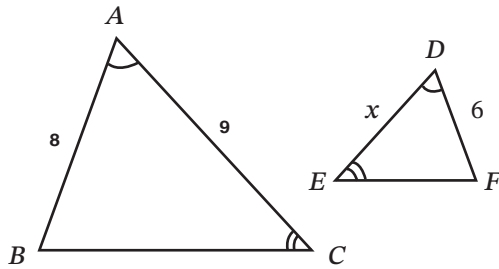
x يساوي 2

(a) (b)



■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) في الشكل المرسوم قيمة x بوحدات الطول تساوي:



(a) 6

(b) $5\frac{1}{3}$

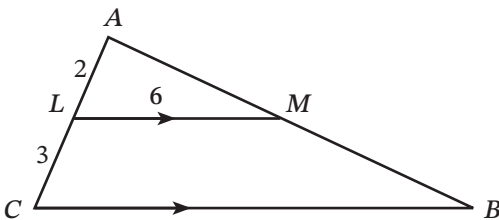
(c) 7

(d) 6.75

(2) في الشكل المقابل:

$(\overline{LM}) \parallel (\overline{BC})$, $AL=2cm$, $LC=3cm$

$LM=6cm$, فإن BC تساوي:



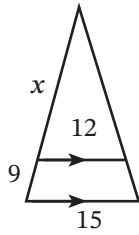
(a) 9 cm

(b) 12 cm

(c) 15 cm

(d) 10 cm





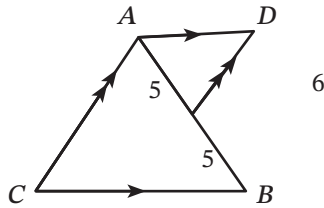
(3) في الشكل المقابل : قيمة x تساوي :

(a) 12

(b) 24

(c) 36

(d) 48



(4) في الشكل المقابل : طول $\overline{AC}$ تساوي :

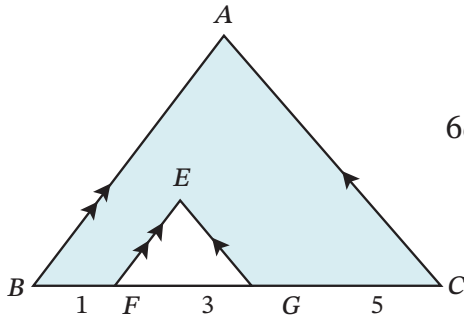
(a) 6

(b) 9

(c) 12

(d) 15

مهارات تفكير عليا



■ اختر الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث EFG تساوي 6cm^2

فإن مساحة المنطقة المظللة بالشكل تساوي بالسنتيمتر المربع

(a) 27

(b) 36

(c) 48

(d) 54



2-4 التشابه في المثلثات القائمة الزاوية

نظرية

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي .

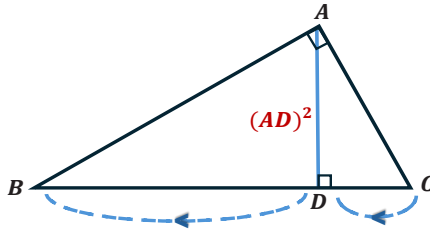
«نظرية إقليدس»

نتيجة (1) :

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

أي أن في المثلث ABC القائم الزاوية في A إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن : $(AD)^2 = DC \cdot BD$

يمكن تمثيل هذه العلاقة بالشكل المجاور

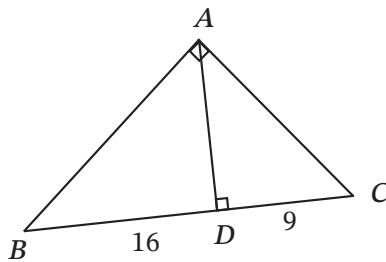
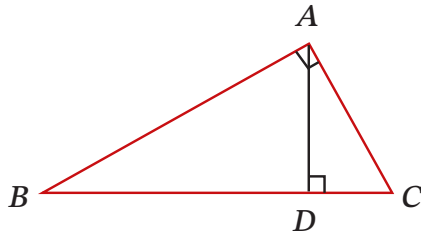


«نظرية إقليدس»

نتيجة (2) :

في المثلث القائم ABC إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :

- ① $(AB)^2 = BD \cdot BC$
- ② $(AC)^2 = CD \cdot CB$
- ③ $(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$



في الشكل المرسوم :

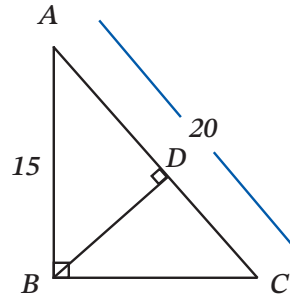
ABC مثلث قائم الزاوية في A ،

إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،

أوجد طول كل من : $\overline{AC}$ ، $\overline{AD}$

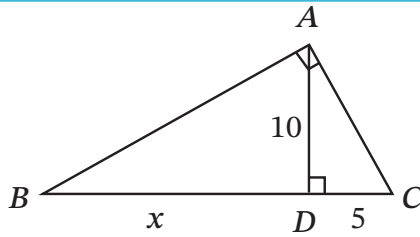
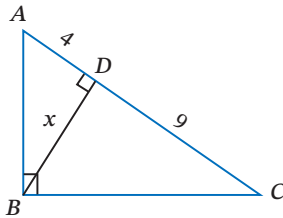
مثال (1)





تحقق من فهمك (1)

في الشكل المرسوم :

a أوجد طول $\overline{BC}$ b أوجد طول $\overline{CD}$ مثال (2) في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x 

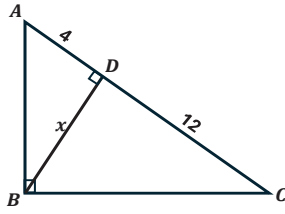
تحقق من فهمك (2)

في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x 

البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-5) ظل دائرة الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



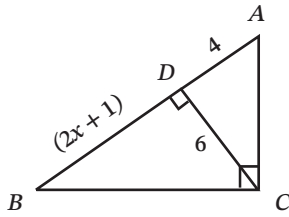
(a) $4\sqrt{3}$

(b) $3\sqrt{4}$

(c) 48

(d) 16

(2) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



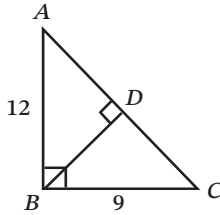
(a) 6

(b) 4.8

(c) 8

(d) 4

(3) في الشكل المرسوم طول $\overline{BD}$ تساوي :



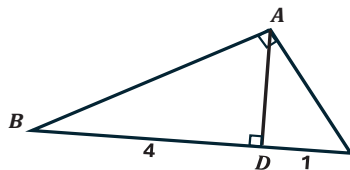
(a) 9.5

(b) 7.2

(c) 7.5

(d) 8

(4) في الشكل المرسوم طول $\overline{AD}$ تساوي :



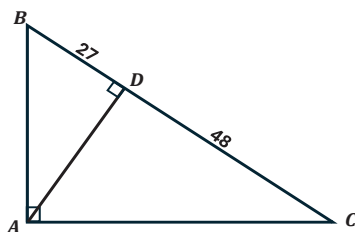
(a) 2

(b) 4

(c) 5

(d) 16

(5) في الشكل المرسوم طول $\overline{AD}$ تساوي :



(a) 24

(b) 12

(c) 36

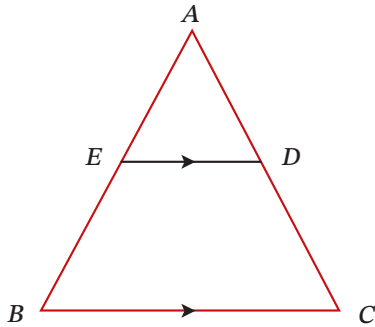
(d) 75



2-5 التناسبات والمثلثات المتشابهة

نظرية (1) « نظرية المستقيم الموازي »

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين ، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة .



أي أن في المثلث ABC

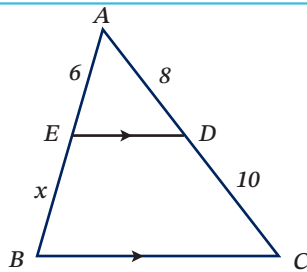
$$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$

فإن :

عكس النظرية صحيح

أي أنه إذا كان : $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ فإن : $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$



مثال (1) في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

الحل:

وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب :

$$\frac{6}{x} = \frac{8}{10}$$

الأجزاء المتناسبة

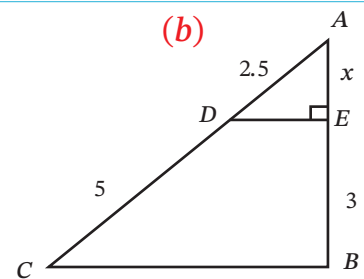
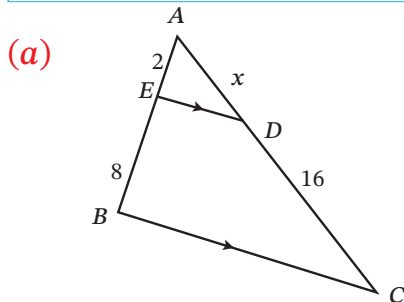
$$8x = 60$$

باستخدام الضرب التقاطعي والقسمة على 8

$$x = 7.5$$

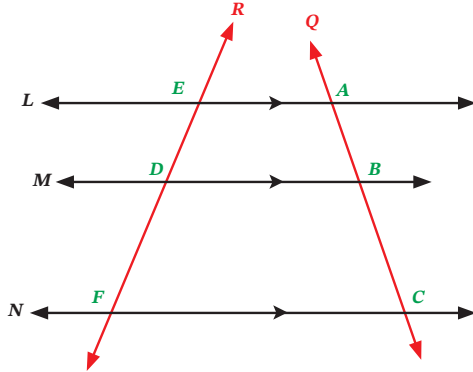
تحقق من فهمك (1)

في الأشكال التالية : أوجد قيمة x



نظرية (2) « نظرية طاليس »

إذا قطع مستقيمان ثلاث مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر .



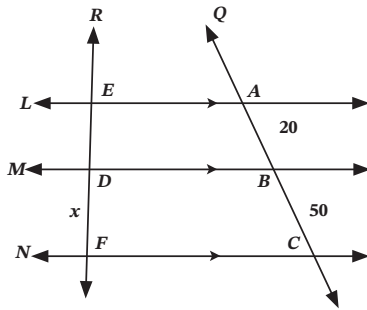
أي أن إذا كان

$$\vec{N} // \vec{M} // \vec{L}$$

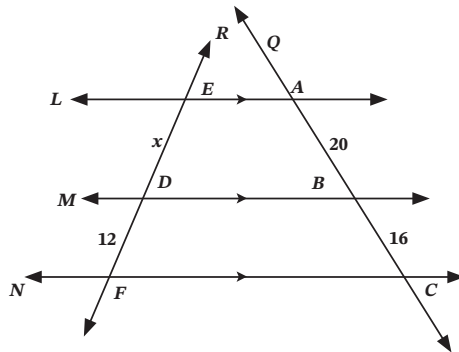
تقطع $\vec{Q}, \vec{R}$ كلاً من

$$\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC} \quad \text{فإن :}$$



مثال (2) في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

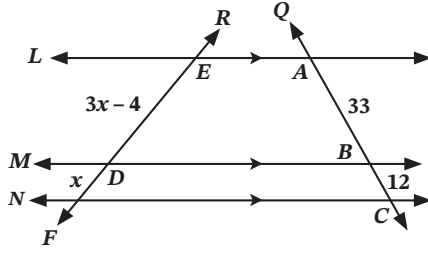


تحقق من فهمك (2)

في الأشكال المقابل : أوجد قيمة x

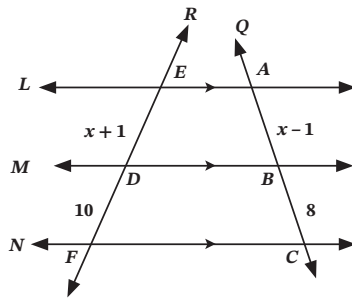


مثال (3) في الشكل المقابل : أوجد قيمة x



تحقق من فهمك (3)

في الأشكال المرسوم : أوجد قيمة x



ملحوظة:

في الشكل المرسوم نجد أن :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

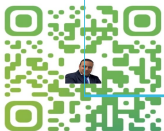
$$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DF} = \frac{1}{2}$$

أي أن :

ولكن المستقيمات L, M, N ليست متوازية

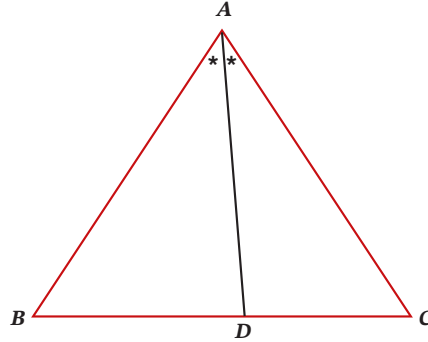
إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة من أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس بالضرورة أن تكون المستقيمات متوازية .

∴ عكس نظرية طاليس ليس بالضرورة صحيح



نظرية (3) « نظرية منصف الزاوية في مثلث »

إذا نصفت زاوية رأس مثلث الداخلة أو الزاوية الخارجة عند هذا الرأس، قسم المُنَصِّفُ قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

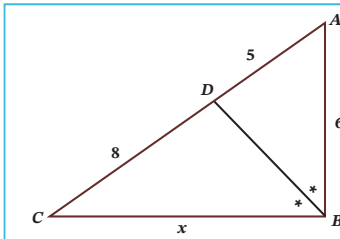


أي أن

إذا كان $\overrightarrow{AD}$ مُنصف $(\hat{A})$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{فإن :}$$

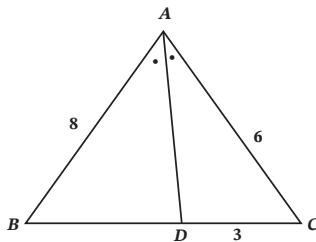
$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \quad \text{أو :}$$

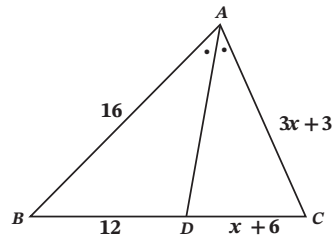
أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث

مثال (4)

 $\overrightarrow{BD}$ يُنصف $\hat{A}$

تحقق من فهمك (4)

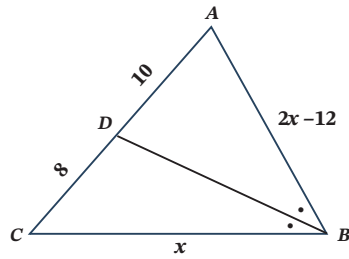
المثلث فيه $AC = 6$ ، $AB = 8$ ، $\overrightarrow{AD}$ يُنصف $(\hat{A})$ ويقطع $\overline{BC}$ في D إذا كان $BD = 3$ أوجد CD 



أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث

مثال (5)

$\overrightarrow{AD}$ يُنصف $(\hat{CAB})$



تحقق من فهمك (5)

ABC المثلث فيه $AD = 10$ ، $DC = 8$

$\overline{BD}$ ينصف الزاوية $(\hat{ABC})$ ويقطع $\overline{AC}$

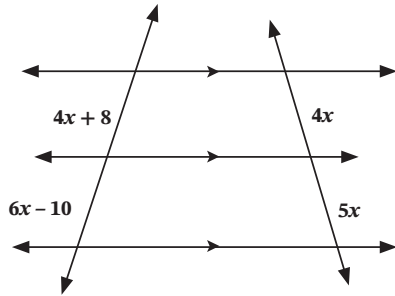
في D ، أوجد x



البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-2) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



(a) 10

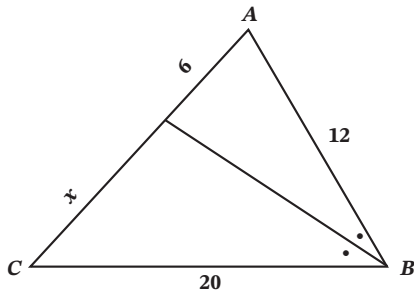
(b) 20

(c) 8

(d) 5

.....

.....



(2) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :

(a) 8

(b) 10

(c) 12

(d) 20

.....

.....

