

مذكرة متابعة وأوراق عمل

الرياضيات

الجبر الخطي MA101

الصف العاشر - نظام المسارات

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$


$$y = mx + b$$
$$T_n = n - 1$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إعداد : أ. أحمد عبد الكريم المطاوع

مذكرة الطالب
الصف العاشر

نظام المسارات
المرحلة الثانوية

مقرر - MA101

1 الجبر وحل المعادلات

- (1-1) دالة القيمة المطلقة
- (1-2) معادلات القيمة المطلقة
- (1-3) حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام القانون
- (1-4) العلاقة بين مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة التربيعية
- (1-5) حل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

2 المصفوفات والمحددات

- (2-1) التعريف العام للمصفوفة
- (2-2) جمع وطرح المصفوفات
- (2-3) ضرب المصفوفات
- (2-4) المحددات
- (2-5) تطبيقات المحددات

3 المتتاليات

- (3-1) الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)
- (3-2) المتتالية الحسابية
- (3-3) المتتاليات الهندسية

تعريف:

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x: x \geq 0 \\ -x: x < 0 \end{cases}$$

لنحل معاً (1)

أعد تعريف الدالة التالية دون استخدام رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |2x - 8|$$

تمثيل دالة القيمة المطلقة بيانياً:

يمكننا توظيف إعادة تعريف دالة القيمة المطلقة لرسم الدالة $f(x) = |x|$ بيانياً

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

(١) نحدد صفر الدالة: $x = 0$

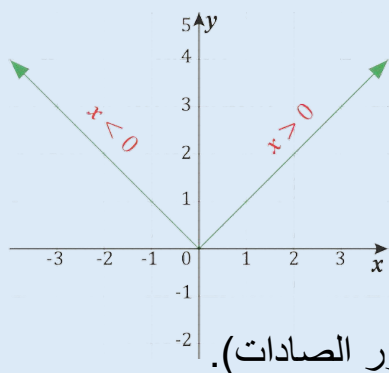
(٢) نختار رقماً للمتغير x على جانبي صفر الدالة.

(٣) نوجد صور المتغير x تحت تأثير دالة $f(x) = |x|$.

(٤) نعين النقاط الناتجة على المستوى الإحداثي.

(٥) نصل بين النقاط.

(٦) نلاحظ شكل المنحنى ونستنتج خصائصه.



نلاحظ من البيان خصائص الدالة $f(x) = |x|$:

• رأس المنحنى: النقطة $(0, 0)$

• المجال $(\text{Domain}): \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

• المدى $(\text{Range}): [0, \infty)$

• محور التناظر (Axis of Symmetry): المستقيم $x = 0$ (محور الصادات).

• اتجاه الفتحة: إلى الأعلى.

لنحل معاً (2)

ارسم بيان الدالة: $f(x) = |2x + 4| - 1$

بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة، ثم أوجد المجال والمدى ومحور التناظر للدالة.

التحويلات الهندسية لدالة القيمة المطلقة : الإزاحة الأفقية والرأسية

دالة المرجع هي دالة نستخدم بيانها للحصول على بيان دوال أخرى بإجراء بعض التحويلات الهندسية.

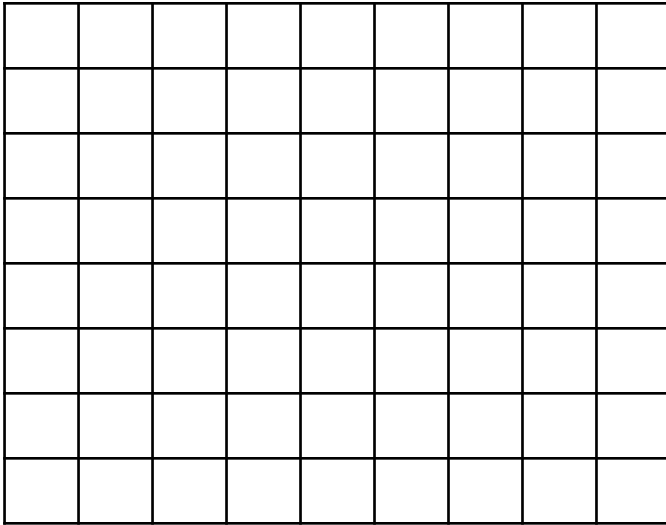
دالة المرجع لدوال القيمة المطلقة هي:

$$y = |x| \text{ أو } y = -|x|$$

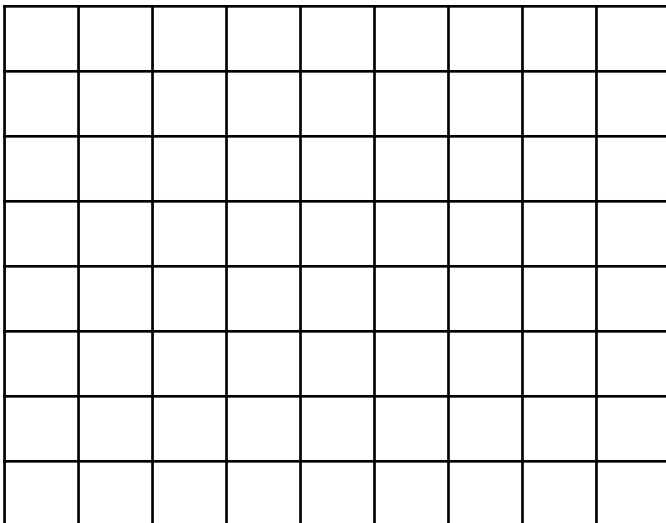
لنحل معاً (4)

لكل من الدالتين حدد دالة المرجع ونوع الانسحاب ومقداره واتجاهه،
ثم ارسم بيانياً كل دالة مستخدماً الانسحاب.

$$(a) \quad y = |x| + 4$$



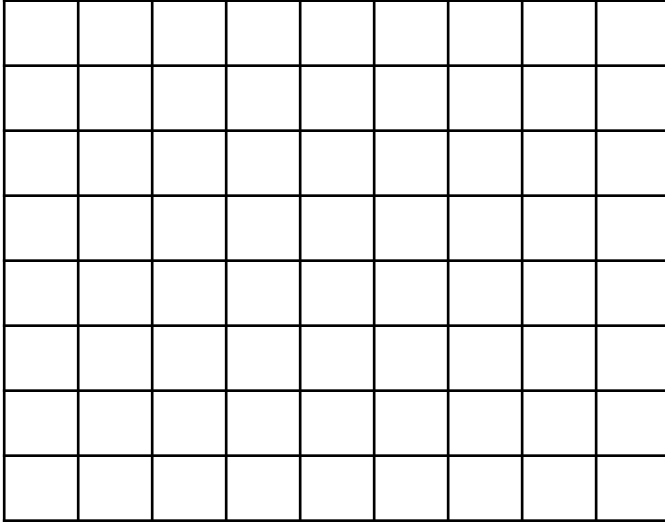
$$(b) \quad y = |x + 4|$$



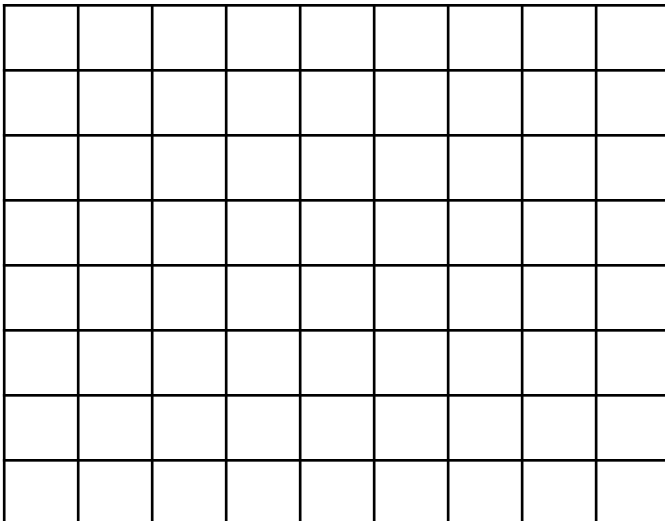
لنحل معاً (5)

لكل من الدالتين، حدد دالة المرجع ونوع الانسحاب ومقداره واتجاهه،
ثم ارسم بيانياً كل دالة مستخدماً الانسحاب.

$$y = -|x| + 3 \quad (a)$$



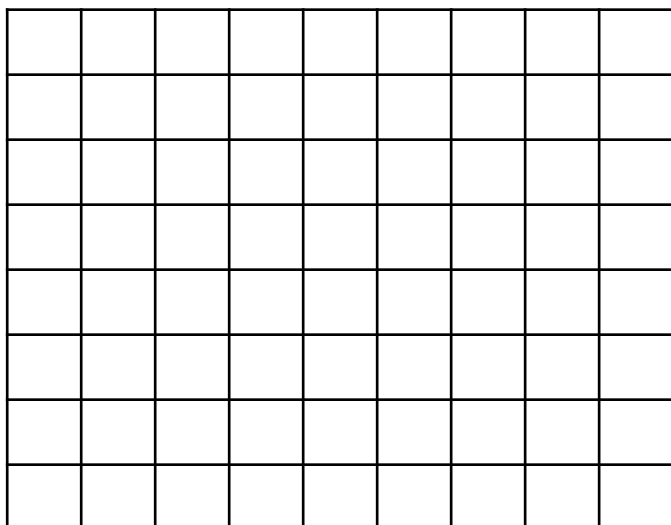
$$y = -|x + 3| \quad (b)$$



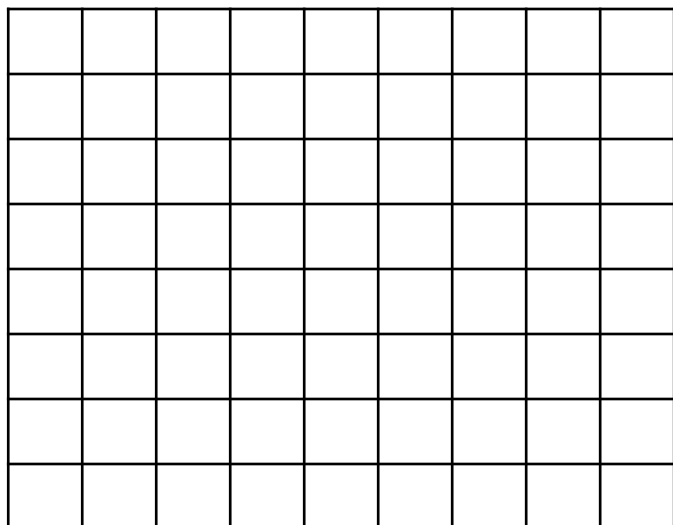
لنحل معاً (6)

ارسم بيان كلاً من الدالتين:

$$y = |x - 2| + 1 \quad (a)$$

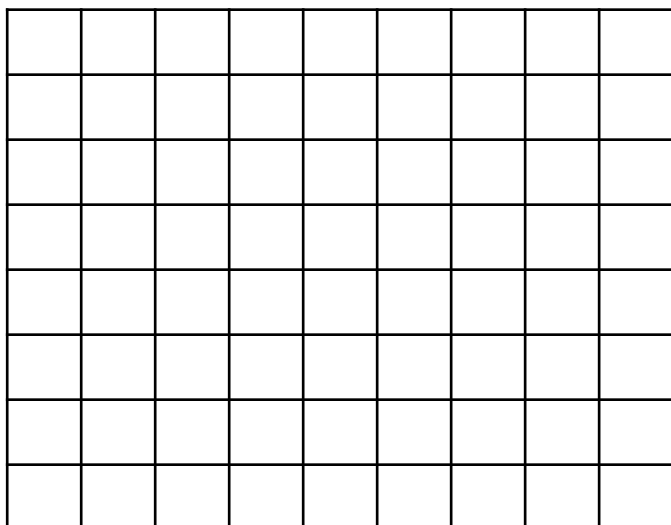


$$y = -|x + 3| - 2 \quad (b)$$

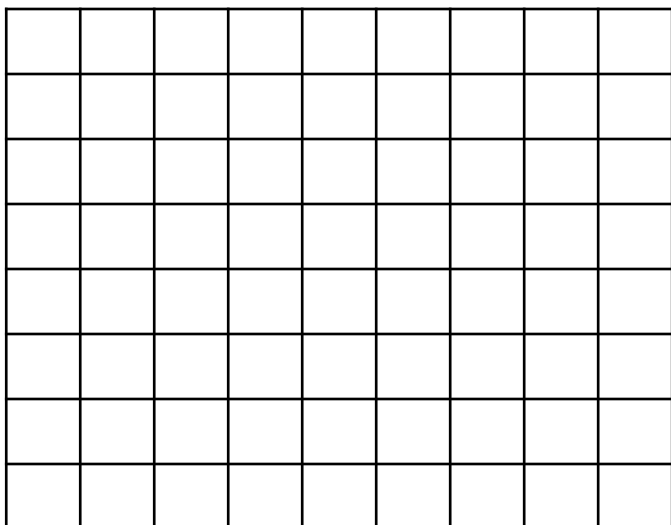


اكتب كل دالة دون استخدام رمز القيمة المطلقة، ثم ارسمها بيانيًا، ثم أوجد إحداثيي رأس المنحنى، معادلة محور التناظر، مجال الدالة ومدى الدالة

$$y = |x + 3|$$



مثّل بيانيًا الدالة: $f(x) = |x + 3| - 2$ مستعينًا ببيان دالة القيمة المطلقة، ثم أوجد كلاً من: إحداثيي رأس المنحنى. معادلة محور التناظر. مجال الدالة ومداه.



في التمارين (1-3) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) مدى الدالة $f(x) = |x - 2| + 5$ هو $[5, \infty)$.
 (a) (b)
- (2) مدى التناظر للدالة $g(x) = |x + 3| - 1$ هو المستقيم $x = 3$.
 (a) (b)
- (3) رأس منحنى الدالة $f(x) = |2 - x| + 4$ هو النقطة $(-2, 4)$.
 (a) (b)

في البنود (4-11) ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(4) إحداثيا رأس منحنى الدالة $f(x) = |x - 3| - 2$ هما:

- (a) $(3, 2)$ (b) $(-3, -2)$ (c) $(3, -2)$ (d) $(-3, 2)$

(5) بيان الدالة $g(x) = |x + 4|$ يمثل انسحاباً لبيان دالة المرجع $y = |x|$ بمقدار 4 وحدات إلى:

- (a) اليمين (b) اليسار (c) الأعلى (d) الأسفل

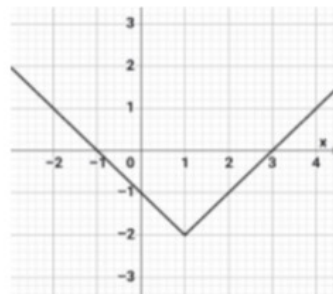
(6) مدى الدالة $f(x) = -|x + 1| + 3$ هو:

- (a) $(3, \infty)$ (b) $(-\infty, 3]$ (c) $(-1, \infty)$ (d) $(-\infty, -1]$

(7) عند إعادة تعريف الدالة $f(x) = |2x - 4|$ عندما $x < 2$ نحصل على:

- (a) $f(x) = 2x - 4$ (b) $f(x) = 2x + 4$
 (c) $f(x) = -2x - 4$ (d) $f(x) = -2x + 4$

(8) الدالة التي يمثلها الرسم أدناه هي:



a $y = |3x - 1| + 2$

b $y = |x - 1| - 2$

c $y = |x - 1| + 2$

d $y = |3x - 3| - 2$

(9) فيما يلي أي دالة لا يمر ببيانها بالنقط (0, 5):

a $y = |x| + 5$

b $y = |x - 5|$

c $y = |x - 5| + 5$

d $y = |x + 5|$

(10) الانسحاب الذي يحوّل $y = |x + 2| - 1$ إلى $y = |x| + 2$ هو:

a وحدتين إلى اليمين، 3 وحدات إلى الأسفل

b وحدتين إلى اليمين، 3 وحدات إلى الأعلى

c وحدتين إلى اليسار، 3 وحدات إلى الأسفل

d وحدتين إلى اليسار، 3 وحدات إلى الأعلى

(11) الرسم البياني للدالة $y = |x - 1|$ تم انسحابه 3 وحدات إلى اليمين ووحدين إلى الأسفل فإن الدالة الناتجة هي:

a $y = |x + 2| - 2$

b $y = |x - 4| - 2$

c $y = |x + 4| + 2$

d $y = |x - 4| + 2$

لنحل معاً (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة:
 $|2x - 1| = |x + 3|$



إذا كان:

$$|A| + |B| = 0$$

فإن:

$$A = 0 \text{ و } B = 0$$

لنحل معاً (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|2x - 8| + |x - 4| = 0$

لنحل معاً (4)

أوجد مجموعة حل المعادلة:
 $|3x - 2| = x + 4$

لنحل معاً (5)

أوجد مجموعة الحل للمعادلة:
 $|x - 3| = x - 3$

أوجد مجموعة حل كل معادلة:

a) $|2x - 3| = |x + 1|$

b) $|x - 5| = |2x + 1|$

أوجد مجموعة حل كل معادلة:

c) $|2x + 5| = x + 1$

d) $|3x - 1| - x = 5$

التمارين الموضوعية

في التمارين (1-4) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) مجموعة حل المعادلة $|x - 3| = |3 - x|$ هي $\{3\}$.
 (a) (b)
- (2) القيمة $x = -5$ لا تعتبر حلاً للمعادلة $|2x + 1| = x - 2$.
 (a) (b)
- (3) للمعادلة $|3x - 1| = -2$ حل وحيد في $\mathbb{R}$.
 (a) (b)
- (4) إذا كان $|x| = |y|$ فإن $x^2 = y^2$.
 (a) (b)

في البنود (5-10) ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

- (5) مجموعة حل المعادلة $|2x - 4| = |x + 1|$ هي:
 (a) $\{5\}$ (b) $\{1, 5\}$ (c) $\{1, -5\}$ (d) $\{-1, 5\}$
- (6) مجال حل للمعادلة $|5x - 3| = 2x + 6$ هو الفترة:
 (a) $[-3, \infty)$ (b) $(-\infty, -3]$ (c) $[3, \infty)$ (d) $[\frac{3}{5}, \infty)$
- (7) مجال حل للمعادلة $|x - 2| = 2 - x$ هو الفترة:
 (a) $\{2\}$ (b) $[2, \infty)$ (c) $(-\infty, 2]$ (d) $\mathbb{R}$
- (8) عدد الحلول الحقيقية للمعادلة $|4x + 3| = x - 5$ هو:
 (a) حل وحيد (b) حلان (c) عدد لا نهائي من الحلول (d) صفر (لا يوجد حلول)
- (9) مجموعة حل المعادلة $|x - 5| + |2x - 10| = 0$ هي:
 (a) $\{5\}$ (b) $\{5, -5\}$ (c) $\emptyset$ (d) $\mathbb{R}$
- (10) مجموعة حل المعادلة $|x + 2| + |x - 2| = 0$ هي:
 (a) $\{2\}$ (b) $\{-5\}$ (c) $\{2, -2\}$ (d) $\emptyset$

حل المعادلة التربيعية في متغير واحد باستخدام القانون

1-3

القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

حل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ ، حيث $a \neq 0$ هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , b^2 - 4ac \geq 0$$

لنحل معاً (1)

حدد عدد الجذور لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \quad (a)$$

$$x^2 + 14x + 49 = 0 \quad (b)$$

$$5x^2 + 2x + 1 = 0 \quad (c)$$

لنحل معاً (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

باستخدام القانون.

لنحل معاً (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$x^2 + 3x - 5 = 0$$

باستخدام القانون.

لنحل معاً (4)

أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$9x^2 + 24x = -16$$

باستخدام القانون.

لنحل معاً (5)

بيّن أن للمعادلة: $25x^2 - 10x + 1 = 0$

جذران حقيقيان متساويان ثم أوجدتهما.

لنحل معاً (6)

أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$x(3x - 7) = -6 \quad \text{باستخدام القانون.}$$

لنحل معاً (7)

أوجد قيمة k التي تجعل للمعادلة:

$$9x^2 + kx + 64 = 0 \quad \text{جذران حقيقيان متساويان.}$$

أوجد مجموعة حل كل معادلة باستخدام القانون

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $x^2 + 5x = 6$

أوجد مجموعة حل كل معادلة باستخدام القانون

c) $4x^2 - 3 = 5x$

d). $2x^2 = 4x + 1$

في التمارين (1-5) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) إذا كانت قيمة المميز $b^2 - 4ac < 0$ ، فإن للمعادلة التربيعية جذرين حقيقيين مختلفين. (a) (b)
- (2) في المعادلة التربيعية $x^2 - 5x + 6 = 0$ ، تكون قيمة المعامل b هي 5. (a) (b)
- (3) في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx = 0$ ، حيث $c = 0$ و $b \neq 0$ ، يكون المميز دائماً عدداً موجباً. (a) (b)
- (4) إذا كانت قيمة المميز $b^2 - 4ac = 0$ ، فإن للمعادلة جذر حقيقي واحد يساوي $x = -\frac{b}{2a}$. (a) (b)
- (5) قيمة المميز $b^2 - 4ac = 0$ للمعادلة $x^2 - 2x - 3 = 0$ تساوي -8. (a) (b)

في البنود (6-9) ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) المعادلة $x^2 - 4x + 7 = 0$ لها: (a) جذران حقيقيان متساويان (b) جذران حقيقيان مختلفان (c) لا توجد لها جذور حقيقية (d) ثلاثة جذور حقيقية مختلفة

- (7) المعادلة التي لها جذران حقيقيان مختلفان فيما يلي هي: (a) $x^2 + 2x + 5 = 0$ (b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (c) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (d) $2x^2 + x + 3 = 0$

(8) في المعادلة التربيعية $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ، المعاملات a, b, c على التوالي هي: (a) 2, 5, 3 (b) 2, -5, 3 (c) -2, 5, -3 (d) 3, -5, 2

- (9) قيمة المميز ($\Delta = b^2 - 4ac$) للمعادلة $x^2 - 6x + 9 = 0$ تساوي: (a) 0 (b) 36 (c) -36 (d) 18

العلاقة بين مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة التربيعية

1-4

إذا كان جذرا المعادلة:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{هما } m, n$$

فإن: مجموع الجذرين:

$$m + n = -\frac{b}{a}$$

حاصل ضرب الجذرين:

$$m \cdot n = \frac{c}{a}$$

لنحل معاً (1)

أوجد مجموع وناتج ضرب جذري كل معادلة من المعادلات التالية بدون حلها.

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad (a)$$

$$x^2 - 5 = 4x \quad (b)$$

لنحل معاً (2)

إذا كان مجموع جذري المعادلة:

$$3x^2 + kx - 4 = 0 \quad \text{يساوي } 5$$

فأوجد قيمة المجهول k

لنحل معاً (3)

إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة:

$$ax^2 - 5x + 2 = 0. \quad \text{يساوي } \frac{3}{2} \quad \text{فأوجد قيمة } a.$$



$$(m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn$$

$$m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn$$

$$(m - n)^2 = (m + n)^2 - 4mn$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + c.b}{b.d}$$

مراجعة

لنحل معاً (6)

إذا علمت أن m, n هما جذرا المعادلة: $2x^2 - 10x + 3 = 0$
فأوجد قيمة كل مما يلي دون حل المعادلة:

$$m - n \quad (c) \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad (b) \quad m^2 + n^2 \quad (a)$$

في التمارين (1-6) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) في المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ مجموع الجذرين يساوي -5. (a) (b)
- (2) حاصل ضرب جذري المعادلة $2x^2 + 7x - 8 = 0$ يساوي -4. (a) (b)
- (3) المعادلة التربيعية التي مجموع جذريها 3 وحاصل ضربهما 2 هي $x^2 + 3x + 2 = 0$. (a) (b)
- (4) إذا كان مجموع جذري معادلة تربيعية يساوي صفراً، فإن معامل x يساوي صفراً. (a) (b)
- (5) إذا كان حاصل ضرب جذري معادلة تربيعية يساوي 1، فإن أحد الجذرين هو "معكوس جمعي" للآخر. (a) (b)
- (6) في أي معادلة تربيعية، إذا كان الحد الثابت (c) سالباً ومعامل x^2 (a) موجباً، فإن الجذرين سيكون لهما إشارتان مختلفتان. (a) (b)

في البنود (7-11) ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) مجموع جذري المعادلة $x^2 - 8x + 15 = 0$ هو:

- (a) -8 (b) 8 (c) 15 (d) -15

(8) المعادلة التي لها جذران حقيقيان مختلفان فيما يلي هي:

- (a) -6 (b) 6 (c) -3 (d) 3

(9) المعادلة التي لها جذران حقيقيان مختلفان فيما يلي هي:

- (a) $x^2 + 3x - 10 = 0$
 (b) $x^2 - 3x - 10 = 0$
 (c) $x^2 - 10x + 3 = 0$
 (d) $x^2 - 3x + 10 = 0$

(10) المعادلة التي لها جذران حقيقيان مختلفان فيما يلي هي:

- (a) -12 (b) 4 (c) -4 (d) 0

(11) إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 - 5x + k = 0$ يساوي k ، فإن قيمة k تساوي:

- (a) -7 (b) 7 (c) 5 (d) -5

حل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

1-5



$$|x| \geq a, a > 0$$
$$x \geq a \text{ أو } x \leq -a$$

لنحل معاً (1)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $2x^2 + 3 \geq 11$
ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد.

لنحل معاً (2)



$$|x| \leq a, a > 0$$
$$-a < x < a$$

أوجد مجموعة حل المتباينة: $(2x + 1)^2 - 3 \leq 6$
ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد.

حالات خاصة:

إذا كان a, b, c أعدادًا حقيقية بحيث $a \neq 0, c < 0$ فإن مجموعة حل المتباينة:

$(ax + b)^2 \geq 0$	هي $\mathbb{R}$
$(ax + b)^2 > 0$	هي $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$
$(ax + b)^2 < 0$	هي $\emptyset$.
$(ax + b)^2 \leq 0$	هي $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$
$(ax + b)^2 > c$	هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
$(ax + b)^2 < c$	هي المجموعة الخالية $\emptyset$

المتباينة	مجموعة الحل
$x^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 > 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^2 < 0$	$\emptyset$
$x^2 \leq 0$	$\{0\}$

حل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد بالتحليل

لنحل معاً (5)

$$(x + 1)(x - 2) > 0.$$

أوجد مجموعة حل المتباينة :
ومثلها على خط الأعداد.

حل المتباينة: $x^2 - 2x - 8 \leq 0$
ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد.

حل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام المميز

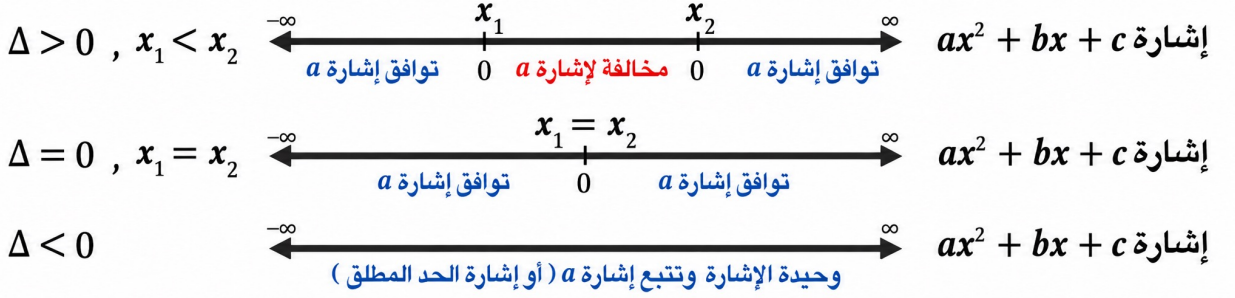
لدراسة إشارة مقدار من الدرجة الثانية على الصورة: $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0, a, b, c, \in \mathbb{R}$

نتبع الخطوات التالية:

(1) نكتب المعادلة المناظرة: $ax^2 + bx + c = 0$

(2) نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac$ ونحدد عدد جذور المعادلة

(3) ندرس إشارة المميز فيكون لدينا الحالات التالية :



لنحل معاً (7)

$$x^2 + 2x - 15$$

ادرس إشارة المقدار:

ثم حدد الفترات التي تكون فيها إشارة المقدار موجبة والفترات التي تكون فيها إشارة المقدار سالبة.

لنحل معاً (8)

ادرس إشارة : $x^2 + 4x + 4$

لنحل معاً (9)

حل المتباينة: $2x^2 + 3x \leq 4$ باستخدام قاعدة المميز.

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات ومثلها على خط الأعداد

(a) $x^2 - 16 \leq 0$

(b) $x^2 - 6x + 8 \leq 0$

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات ومثلها على خط الأعداد

(g) $x^2 - 6x + 5 > 0$

(b) $(2x + 5)^2 + 3 \leq 7$

في التمارين (1-4) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) مجموعة حل المتباينة $(x+1)^2 < 0$ هي $\{-1\}$.
 (a) (b)
- (2) مجموعة حل المتباينة $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ هي $\{-3\}$.
 (a) (b)
- (3) مجموعة حل المتباينة $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ هي $\emptyset$.
 (a) (b)
- (4) مجموعة حل المتباينة $x^2 + 3x + 4 > 0$ هي $[-1, 3]$.
 (a) (b)

في البنود (5-14) ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) مجموعة حل المتباينة $(x+1)^2 \leq 9$ هي:

- (a) $[-2, 4]$ (b) $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$
 (c) $[-4, 2]$ (d) $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$

(6) مجموعة حل المتباينة $25 - 9x^2 \leq 0$ هي:

- (a) $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [\frac{5}{3}, \infty)$ (b) $(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$
 (c) $(-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$ (d) $[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$

(7) مجموعة حل المتباينة $x^2 + 3x + 9 \leq 0$ هي:

(a) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

(b) $[-3, 3]$

(c) $(-\infty, \infty)$

(d) $\emptyset$

(8) مجموعة حل المتباينة $(x - 1)^2 \geq 25$ هي:

(a) $[-6, 4]$

(b) $(-\infty, -4] \cup [6, \infty)$

(c) $[-4, 6]$

(d) $(-\infty, -6] \cup [4, \infty)$

(9) مجموعة حل المتباينة $2x^2 + 3x \leq 5$ هي:

(a) $[-\frac{5}{2}, 1]$

(b) $(-\infty, -\frac{5}{2}]$

(c) $(-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [1, \infty)$

(d) $(0, \infty) \cup (-\infty, -\frac{5}{2}]$

(10) مجموعة حل المتباينة $2x^2 - 5x > 3$ هي:

(a) $2x^2 - 5x > 3$

(b) $(-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$

(c) $(-\frac{1}{2}, 3)$

(d) $(-\frac{1}{2}, \infty)$

(11) مجموعة حل المتباينة $x^2 + 6x + 9 \geq 0$ هي:

(a) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

(b) $\{-3\}$

(c) $(-\frac{1}{2}, 3)$

(d) $\mathbb{R}$

(12) مجموعة حل المتباينة $|3x - 1| > 2$ هي:

(a) $(-\frac{1}{3}, 1)$

(b) $[-\frac{1}{3}, 1]$

(c) $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$

(d) $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, \infty)$

(13) مجموعة حل المتباينة $x^2 + 1 \geq 0$ هي:

(a) $\mathbb{R}$

(b) $[-1, 1]$

(c) $(-1, 1)$

(d) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(14) مجموعة حل المتباينة $(x + 3)^2 \leq 4$ هي:

(a) $[1, 5]$

(b) $(-\infty, -5] \cup [-1, \infty)$

(c) $(-\infty, 5]$

(d) $[-5, -1]$

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم من العناصر المرتبة في صفوف وأعمدة، تتكون الصفوف والأعمدة من عناصر تسمى (المدخلات).

ترميز المصفوفات:

- سنرمز للمصفوفة بحرف من الحروف الكبيرة مثل: A, B, C و نرسم لعناصر المصفوفة بحروف صغيرة a, b, c .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة:

المصفوفة المكونة من m صفًا و n عمودًا نقول أنها من الرتبة $m \times n$ دون إيجاد ناتج الضرب حيث: $m, n \in \mathbb{Z}^+$

لنحل معاً (1)

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 9 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix} \text{ (a)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \text{ (b)}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ (c)}$$

أنواع المصفوفات:

المصفوفة المستطيلة: هي مصفوفة عدد صفوفها لا يساوي عدد أعمدها.

$$\text{مثل: } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المربعة: هي مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدها.

$$\text{مثل: } \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصف (الأفقية): هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة العمود (الرأسية): هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية: هي مصفوفة من أي رتبة جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز O .

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسي.

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد الصحيح ويرمز لها بالرمز I .

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تساوي مصفوفتين:

تكون المصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة نفسها وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية (والعكس صحيح).

لنحل معاً (3)

$$\text{إذا كانت } \begin{bmatrix} x & 5 \\ 6 & y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ أوجد قيمة كل من } x, y$$

لنحل معاً (4)

$$\text{إذا كانت: } \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & y-2 \end{bmatrix} \text{ أوجد قيمة كل من } x, y$$

العمليات على المصفوفات

جمع وطرح المصفوفات وضرب مصفوفة في عدد

2-2

لنحل معاً (1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد إن أمكن:

$$A + B \text{ (a)}$$

$$B - C \text{ (b)}$$

ملاحظة:

إذا كان $A \neq B$ و لهما الرتبة نفسها فإن:

$$A - B \neq B - A$$

وبالتالي عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية

لنحل معاً (6)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

لنحل معاً (7)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$X - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

لنحل معاً (9)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ إذا كانت:}$$

فأوجد: $5A - 3B$

لنحل معاً (10)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

حل المعادلة التالية:

الحل:

حل المعادلة التالية:

$$3X + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = X + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

شرط ضرب المصفوفات:

يمكن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية.

لنحل معاً (2)

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{إذا كانت:}$$

وكان : $A \times B = C$ أوجد المصفوفة C

لنحل معاً (3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{إذا كانت} \quad \text{فأوجد ناتج كل مما يلي: } a) A^2 \quad b) A^3$$

لنحل معاً (4)

إذا كانت

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

فأوجد ناتج كل مما يلي: $a) GH$ $b) HG$

لنحل معاً (5)

إذا كان

$$L = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

فأوجد ناتج مايلي: $J(K + L)$

أولاً: المحددات من الرتبة الثانية

كل مصفوفة مربعة A تختزن بعدد يسمى محدد المصفوفة ويرمز له بالرمز $|A|$ (ويقرأ محدد المصفوفة A أو مباشرة المحدد A)

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

فإنه يرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

لنحل معاً (1)

أوجد قيمة محدد كل من المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

لنحل معاً (2)

أوجد قيمة x إذا كان:

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

الحل:

لنحل معاً (4)

عين النظير الضربي للمصفوفة B إن وجد.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

تعريف:

المعادلة على الصورة: $AX = B$ حيث A, X, B مصفوفات تسمى معادلة مصفوفية حيث A مصفوفة المعاملات، X مصفوفة المتغيرات، B مصفوفة النواتج

حل المعادلة المصفوفية:

• $AX = B$ هو $X = A^{-1} \cdot B$ (بضرب طرفي المعادلة في A^{-1} من جهة اليسار)

• $XA = B$ هو $X = B \cdot A^{-1}$ (بضرب طرفي المعادلة في A^{-1} من جهة اليمين)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

لنحل معاً (5)

$$X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ثانياً: المحددات من الرتبة الثالثة:

تسمى محدّدات المصفوفات من الرتبة 3×3 محدّدات من الرتبة الثالثة ويمكن حساب هذه المحددات باستخدام طريقة المفكوك بالمحددات الصغرى.
لإيجاد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

لنحل معاً (7)

أوجد قيمة المحدد التالي باستخدام عناصر الصف الأول:

$$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

لنحل معاً (8)

أوجد قيمة المحدد باستخدام قاعدة الأقطار:

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

(2a-5) إيجاد مساحة المنطقة المثلثة

إذا كانت النقاط $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ ، $C(x_3, y_3)$ تمثل رؤوس منطقة مثلثية في المستوى الإحداثي، فإن مساحة هذه المنطقة $Area$ تحسب بالقانون

$$Area = \frac{1}{2} |\Delta| \text{ units}^2$$

حيث Δ هو المحدد من الرتبة 3×3 ويكتب كما يلي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

لنحل معاً (1)

أوجد مساحة منطقة رسو القوارب في قطعة الشمال والمحذدة بالمثلث الذي رؤوسه النقاط:

$$A(1, 2), B(5, 1), C(8, 6)$$

الحل:

أوجد مساحة المنطقة المثلثية XYZ علمًا بأن:

$$X(-, 32) , Y(1, 6) , Z(5, -2)$$

يمكنك تقسيم المضلع (الرباعي أو الخماسي...) إلى عدة مناطق مثلثة وحساب مساحته بالكامل باستخدام المحددات.

لنحل معاً (3)

أوجد مساحة المضلع الخماسي $ABCDE$ الذي رؤوسه هي:

$$A(0, 0) , B(4, 0) , C(5, 3) , D(2, 5) , E(-, 13).$$

إذا كانت مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $(0, y)$ ، $(4, 0)$ ، $(0, 0)$ تساوي 10 وحدات مربعة، فما القيم الممكنة للمتغير y ؟ وضح إجابتك هندسياً.

(b5-2) حل نظام معادلتين خطيتين

نظام معادلات خطية

حل نظام مكون من معادلتين خطيتين في متغيرين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.
حل نظام مكون من معادلتين خطيتين في متغيرين باستخدام المحددات (قاعدة كرامر).
سبق لك في الصف التاسع دراسة حل معادلتين خطيتين في متغيرين بيانياً وجبرياً.
في هذا البند ستتعرف على طرق جديدة لحل النظام المكتوب بالصورة:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

حيث سنعرض طريقتين جديدتين لإيجاد قيمتي المتغيرين x, y اعتماداً على مهارتك السابقة في المصفوفات والمحددات:

1- طريقة النظير الضربي للمصفوفة.

2- طريقة المحددات (قاعدة كرامر).

لنحل معاً (1)

استخدم النظير الضربي للمصفوفة لإيجاد مجموعة حل النظام:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

الحل:

لنحل معاً (3)

استخدم المحددات (قاعدة كرامر) لإيجاد مجموعة حل النظام:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

الحل:

لنحل معاً (4)

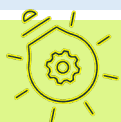
استخدم المحددات (قاعدة كرامر) لإيجاد مجموعة حل النظام:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = 18 \end{cases}$$

الحل:

تعريف:

المتتالية الحقيقية: هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ أو مجموعة جزئية منها مرتبة على الصورة $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.



يستخدم الرمز (T_n) للتعبير عن المتتالية، بينما يعبر T_n عن الحد النوني لهذه المتتالية. حيث أن n هي رتبة الحد.

لنحل معاً (3)

اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية $(35, 37, 39, 41, 43, \dots)$ ، ثم أوجد T_6 .

لنحل معاً (5)

لتكن الدالة $T: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة الصريحة التالية $T_n = n^2 + 1$ أوجد جميع حدود هذه المتتالية.

تعريف:

المتتالية الحسابية هي متتالية يكون فيها الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة مقداراً ثابتاً. هذا المقدار الثابت يسمى أساس المتتالية ويرمز له بالرمز d .
أي أن:

$$T_{n+1} = T_n + d$$

أو

$$d = T_{n+1} - T_n$$

لنحل معاً (1)

في المتتالية (T_n) حيث: $T_n = 7n - 3$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$
أثبت أن المتتالية حسابية.

لنحل معاً (3)

بيّن أن المتتالية $(6, 12, 18, 24)$ هي متتالية حسابية ثم أوجد أساسها.

$$T_n = T_1 + (n - 1)d \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$T_n = T_k + (n - k)d.$$

$$d = \frac{T_n - T_k}{n - k} \quad , n \neq k$$

لنحل معاً (3)

في المتتالية (T_n) حيث:

$$T_n = 7n - 3 \quad \text{لكل } n \in \mathbb{Z}^+$$

أثبت أن المتتالية حسابية.

لنحل معاً (3)

بيّن أن المتتالية $(6, 12, 18, 24)$ هي متتالية حسابية ثم أوجد أساسها.

لنحل معاً (4)

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية (8, 6, 4, ...).

لنحل معاً (5)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته 99 من المتتالية الحسابية (7, 9, 11, ...).

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي 9 والحد الثامن يساوي 15، فأوجد أساس المتتالية.

في سباق دراجات لدعم مشروع خيري، على المتسابق الأول تأمين مبلغ 5 دنانير. وكل متسابق تالي يؤمن مبلغ يزيد 1.5 ديناراً عن المتسابق الذي يسبقه مباشرة. ما المبلغ الذي سيدفعه المتسابق الخامس والسبعون؟

إذا كانت (a, b, c) متتالية حسابية حيث a, b, c (أعداد حقيقية)، فإن b يسمى وسطاً حسابياً بين a, c ويكون:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

لنحل معاً (9)

أدخل 5 أوساط حسابية بين 23 و 65.

مجموع n حداً الأولى من متتالية حسابية

القانون (1): يعطي مجموع حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.

$$S_n = \frac{n}{2} (T_1 + T_n)$$

القانون (1): يعطي مجموع n حداً الأولى من حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والأساس d .

$$S_n = \frac{n}{2} [2T_1 + (n - 1)d]$$

حيث T_n هو الحد الذي ترتيبه n من المتتالية الحسابية و T_1 حدها الأول.

لنحل معاً (10)

أوجد مجموع العشرين حداً الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول 10 وحدها العشرون 500.

أوجد مجموع الستة عشر حدًا الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول 15 وأساسها 7.

إذا كان مجموع n من متتالية حسابية يعطى بالعلاقة: $S_n = 2n^2 - n$ فأوجد: T_{10}

المتتالية الهندسية: تكون المتتالية (T_n) هندسية إذا كانت النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابتة وتسمى النسبة الثابتة أساس المتتالية الهندسية ويرمز لها بالرمز r . أي أن:

$$r = \frac{T_n}{T_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2, T_{n-1} \neq 0$$

الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية:

$$T_n = r \times T_{n-1} \\ n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$$

حيث T_1 معلومة.

لنحل معاً (1)

في كل مما يلي حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية أو ليست هندسية، وإذا كانت المتتالية هندسية اكتب الصيغة الارتدادية ثم أوجد الحد التالي.

(a) $(4, 12, 36, 108, \dots)$

(b) : $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$

الحد العام للمتتالية الهندسية:

الحد العام للمتتالية الهندسية هي:

$$T_n = r^{n-1} \times T_1$$

حيث:

الحد الأول للمتتالية: T_1 ، أساس المتتالية: r ، رتبة الحد n

الحد الذي رتبته n : T_n

لنحل معاً (2)

أوجد الحد العاشر في المتتالية الهندسية (128, 64, 32, 16, ...)

لنحل معاً (3)

متتالية هندسية حدها الرابع يساوي 8 - وحدها السابع يساوي 64 - . أوجد حدها الثاني عشر.

تعريف:

الوسط الهندسي بين عددين
إذا كانت (a, b, c) متتالية هندسية فإن b يسمى وسطاً هندسياً بين العددين a, c حيث:
فتكون:

$$b = \pm\sqrt{ac}$$

لنحل معاً (4)

أوجد وسطاً هندسياً بين العددين فيما يلي:

$\frac{1}{3}, 27$ (a)

$-3, -72$ (b)

لنحل معاً (5)

أدخل 4 أوساط هندسية بين العددين 2, 486.

لنحل معاً (6)

أدخل 4 أوساط هندسية بين العددين 3, 48.

مجموع n حداً الأولى من متتالية حسابية

إذا كانت (T_n) متتالية هندسية فإن مجموع n حداً الأولى منها:

$$(a) S_n = T_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

لنحل معاً (7)

أوجد مجموع الحدود الستة الأولى من المتتالية الهندسية $(3, 6, 12, \dots)$.

لنحل معاً (8)

أوجد قيمة الحد الأول T_1 لمتتالية هندسية إذا علمت أن أساسها يساوي 3، وعدد حدودها يساوي 7، ومجموع هذه الحدود يساوي 13116.

لنحل معاً (9)

إذا كان مجموع n حداً الأولى في متتالية هندسية يعطى بالعلاقة: $S_n = 3(2^n - 1)$ فأوجد المتتالية ثم أوجد الحد العاشر.

أوجد مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 240 وحدها الأخير 15 وأساسها $\frac{1}{2}$.