

يمكنك مراجعته الحلول من خلال المذكرة المحلولة  
للتأكد من حلك والتدرب على الحل الصحيح

المذكرة الشاملة

# الرياضيات

الصف العاشر

## الفصل الدراسي الأول

"لا تبحث عن الحل الأسرع ... بل عن الفهم الذي لا يُنسى"

للحصول على المذكرة المحلولة اشترك في قناتي اليوتيوب والتليجرام  
وسيصلك كل ما هو جديد



اضغط هنا

للاضمام لجروب التليجرام

YouTube

اضغط هنا

للاشتراك في قناة اليوتيوب



HOSAMBAYOUMI199



رياضيات

إعداد: أ. حسام بيومي

## 1-1 دالة القيمة المطلقة

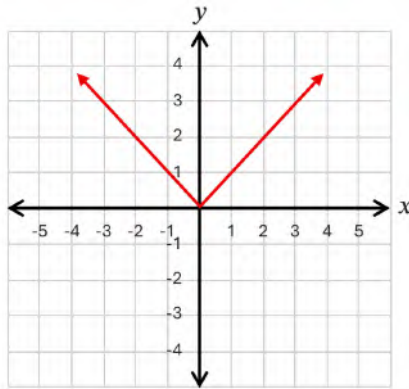
إن القيمة المطلقة لعدد حقيقي تعبر عن بعد هذا العدد عن الصفر على خط الأعداد.

الصورة الأساسية لدالة القيمة المطلقة هي :  $f(x) = |x|$  ،  $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$  ،  
(المجال المقابل) (المجال)

والتي مكوناتها هي :

1. المجال  $\mathbb{R}$  2. المجال المقابل  $\mathbb{R}$  3. قاعدة اقترانها  $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases} \Rightarrow \therefore f(x) = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$



|   |    |    |   |   |   |
|---|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 2  | 1  | 0 | 1 | 2 |

نستنتج أن :

1. تمثيل الدالة  $y = |x|$  بياناً ينتج من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية (رأس المنحنى) وهي نقطة الأصل ويشبهان الحرف V.
2. رأس المنحنى هو (0,0) وعنده توجد أصغر قيمة للدالة.
3. تماثلة حول محور الصادات ( $x=0$ ) نسميها فيما بعد دالة زوجية
4. مدى الدالة هو  $[0, \infty)$

ومن التعريف:

- إذا كانت  $a \in \mathbb{R}^+$  ،  $b, x \in \mathbb{R}$  عددين حقيقيين فإن :
1.  $|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$
  2.  $|x+a| = \begin{cases} x+a & : x \geq -a \\ -x-a & : x < -a \end{cases}$
  3.  $|ax+b| = \begin{cases} ax+b & : x \geq \frac{-b}{a} \\ -ax-b & : x < \frac{-b}{a} \end{cases} , a > 0$

خواص القيمة المطلقة:

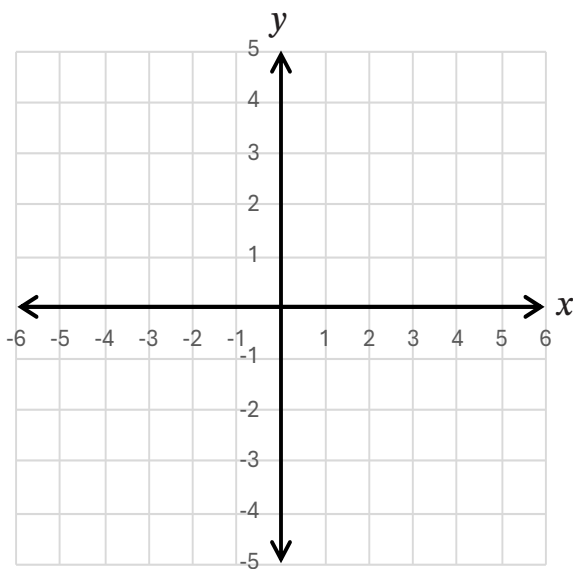
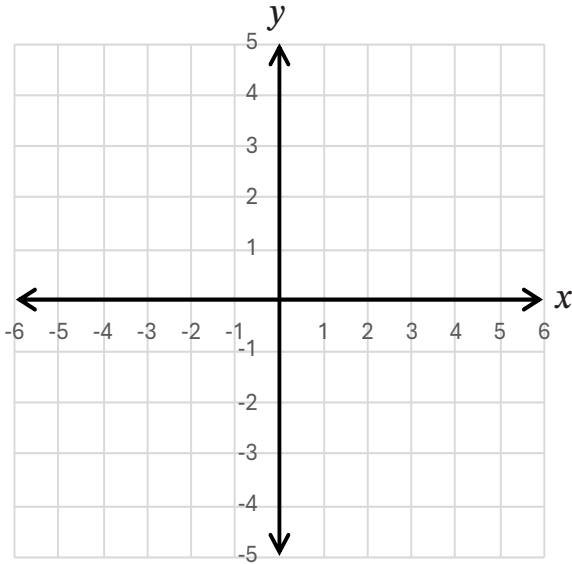
1.  $|x| \geq 0$
2.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3.  $|a+b| \leq |a| + |b|$

ملحوظات هامة:

1.  $|a|^2 = a^2$
2.  $\sqrt{x^2} = |x|$



رسم بيان دالة القيمة المطلقة باستخدام رأس المنحنى ومحور التماثل

مثال ( 1 ) ارسم بيان الدالة:  $f(x) = |2x + 4|$ 

مما سبق نلاحظ :

$$f(x) = |2x + 4| + 0$$

بفرض أن

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 0$$

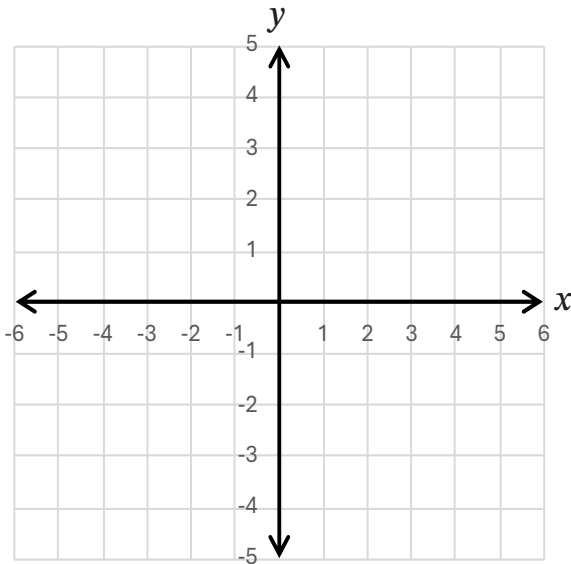
$$1. \text{ رأس المنحنى هو } \left( -\frac{b}{a}, c \right) = (-2, 0)$$

$$2. \text{ معادلة محور التماثل هو } x = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$3. \text{ مدى الدالة هو } [c, \infty) = [0, \infty)$$

تحقق من فهمك (1)

$$f(x) = |3x + 6|$$



تعميم:

الصورة القياسية لدوال القيمة المطلقة:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(المجال)      (المجال المقابل)

$$f(x) = |ax + b| + c$$

مجال الدالة هو  $\mathbb{R}$  ، ومجالها المقابل هو  $\mathbb{R}$ 

$$1. \text{ رأس المنحنى هو النقطة } \left( -\frac{b}{a}, c \right)$$

$$2. \text{ معادلة محور التماثل هو } x = -\frac{b}{a}$$

$$3. \text{ مدى الدالة هو } [c, \infty)$$

$$4. \text{ مدى الدالة يتغير إذا كانت الدالة على الصورة } f(x) = -|ax + b| + c \text{ ويصبح}$$

$$[-\infty, c]$$

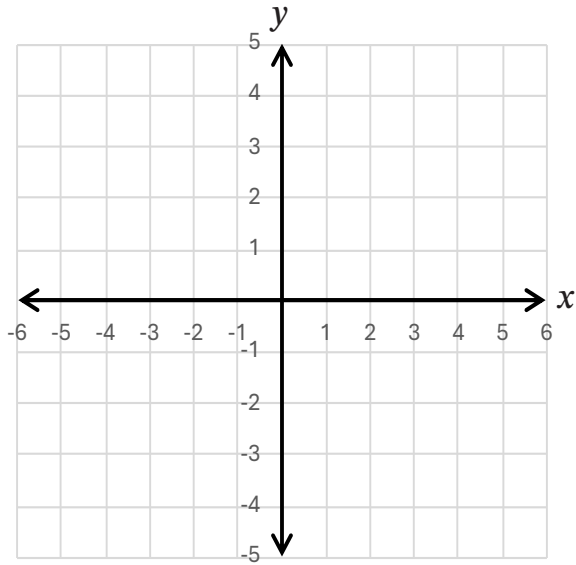




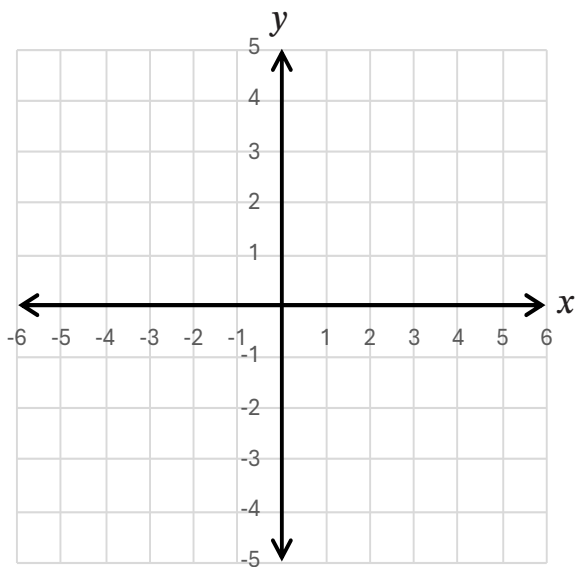
أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية ثم ارسم بيان كل منها

مثال (2)

a  $y = |x - 2| + 1$



b  $y = -|2x + 3|$

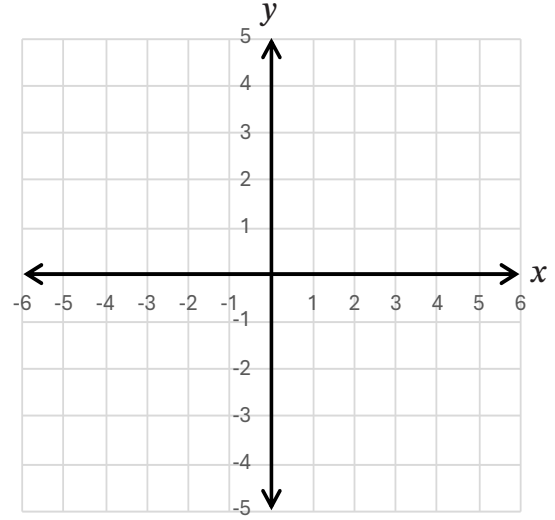
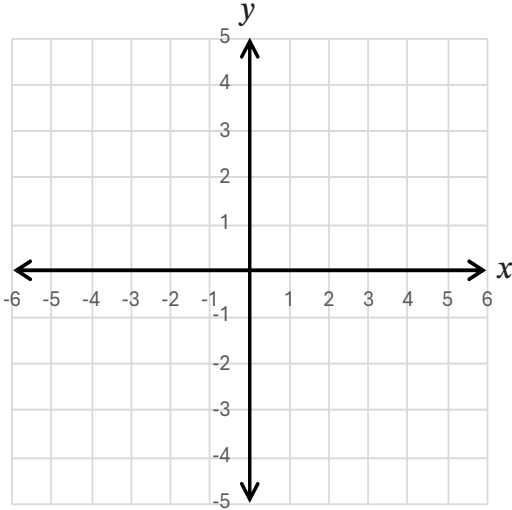


تحقق من فهمك (2)

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية ثم ارسم بيان كل منها

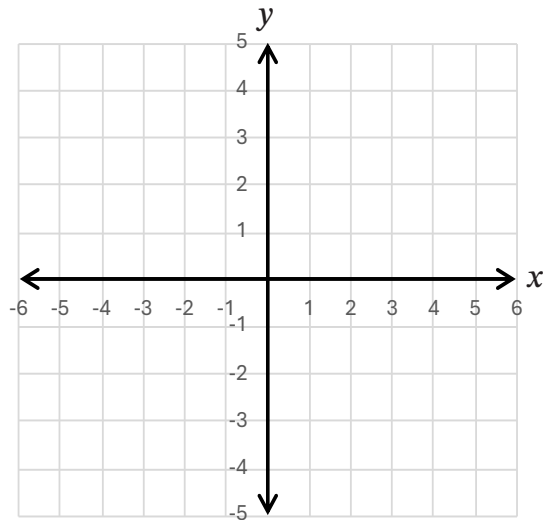
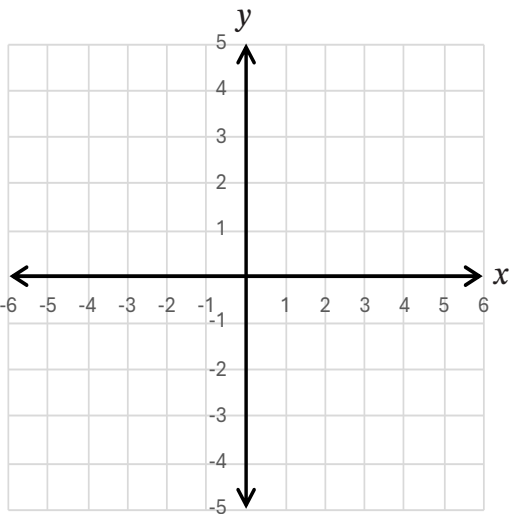
a)  $f(x) = |x + 1| + 3$

b)  $y = -|x + 1|$



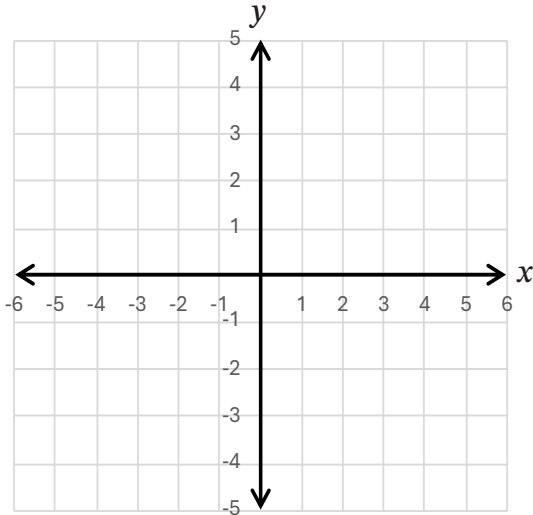
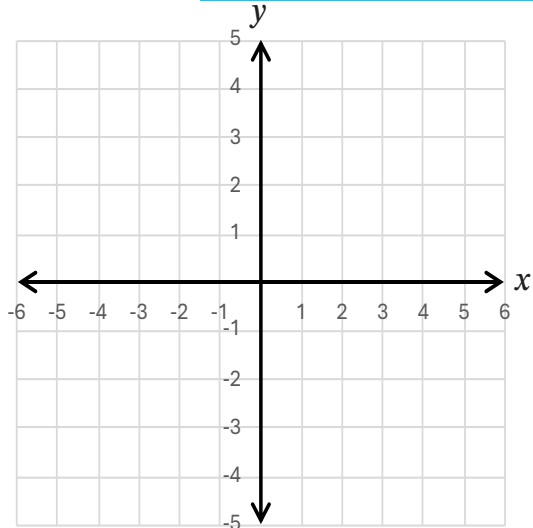
c)  $g(x) = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right|$

d)  $f(x) = 1 - |x - 2|$

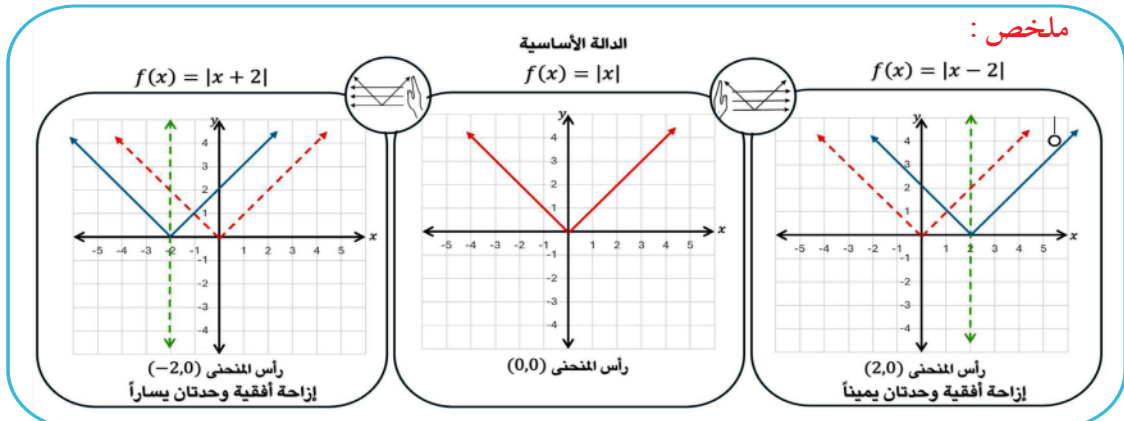


التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة الأساسية  $g(x) = |x|$ 

1. الانسحاب في اتجاه محور السينات (إزاحة أفقية)

ارسم بيان الدالة :  $f(x) = |x + 3|$ مثال (3) ارسم بيان كل من الدالة  $f(x) = |x - 1|$  باستخدام التحويلات الهندسية

ملخص :



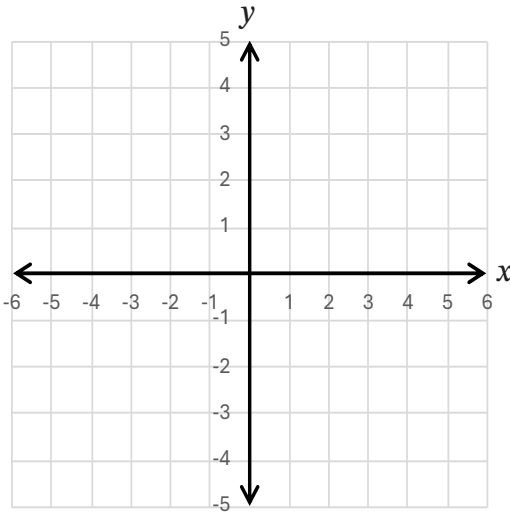
تعميم:

يكون منحنى الدالة  $f(x) = |x + a|$  هو نفس منحنى الدالة الأساسية  $g(x) = |x|$  وبإزاحة أفقية مقدارها  $|a|$  وحدة في الاتجاه: 1 - الموجب لمحور السينات (جهة اليمين) عندما  $a < 0$   
2 - السالب لمحور السينات (جهة اليسار) عندما  $a > 0$

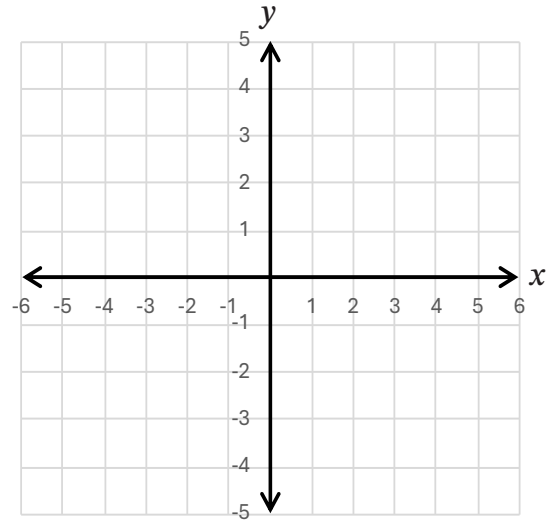
تحقق من فهمك (3)

لكل من الدوال التالية حدد مسافة الانسحاب ، ثم ارسم بيان كل منها مستخدماً الإزاحة لبيان الدالة الأساسية  $g(x) = |x|$ :

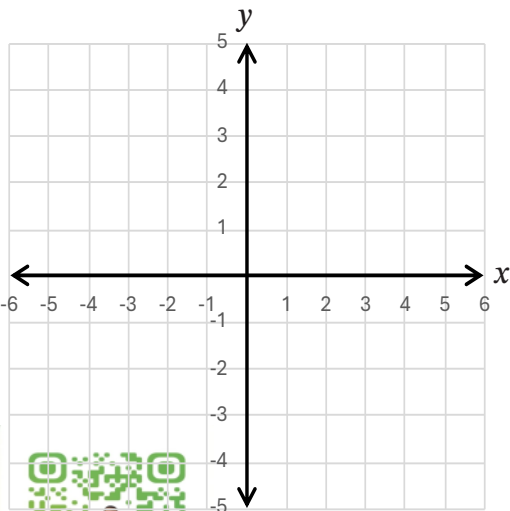
a)  $f(x) = |x - 3|$



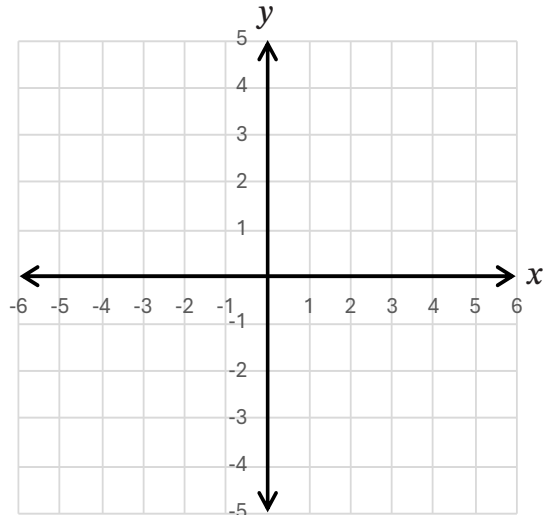
b)  $y = |x + 2|$



c)  $f(x) = |x - 3.5|$

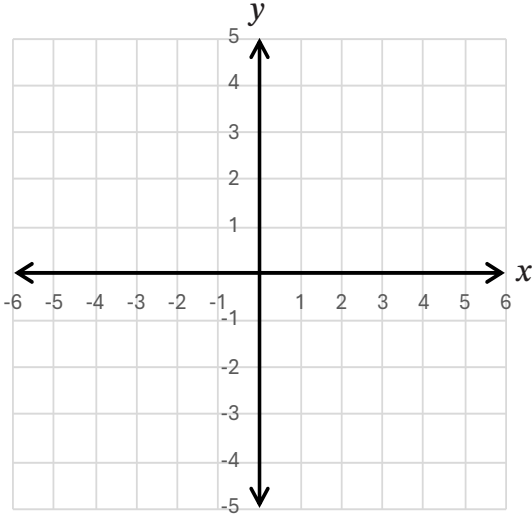


d)  $y = |x - 1.5|$

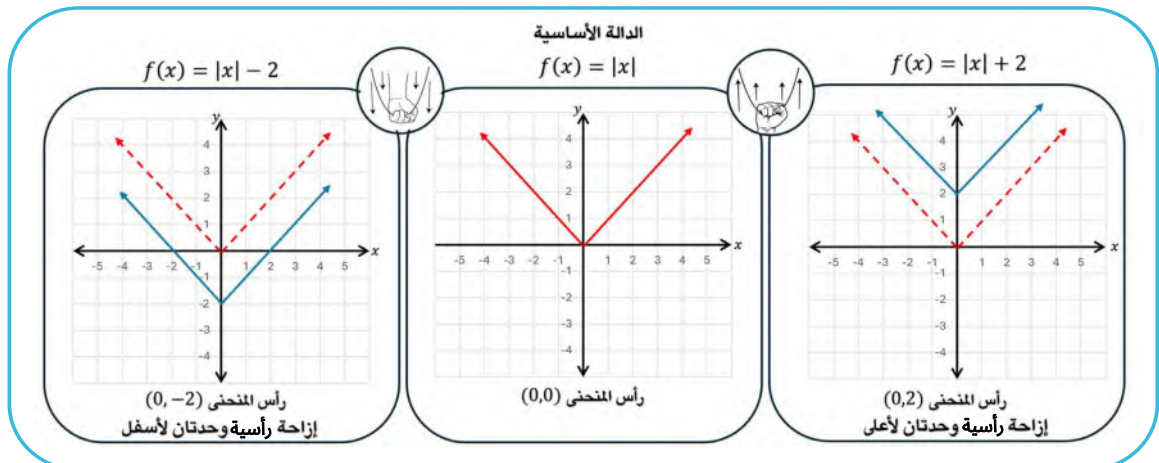
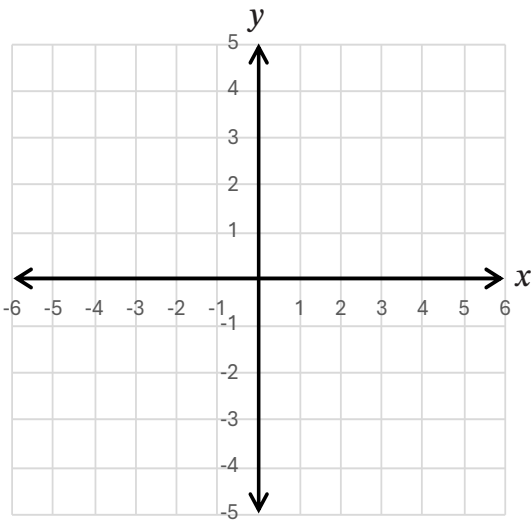


$$f(x) = |x| - 1$$

ارسم بيان الدالة :



مثال (4) ارسم بيان الدالة  $f(x) = |x| + 2$  باستخدام التحويلات الهندسية



تعميم:

يكون منحنى الدالة  $f(x) = |x| + a$  هو نفس منحنى الدالة الأساسية  $g(x) = |x|$  وبإزاحة رأسية مقدارها  $|a|$  وحدة في الاتجاه:

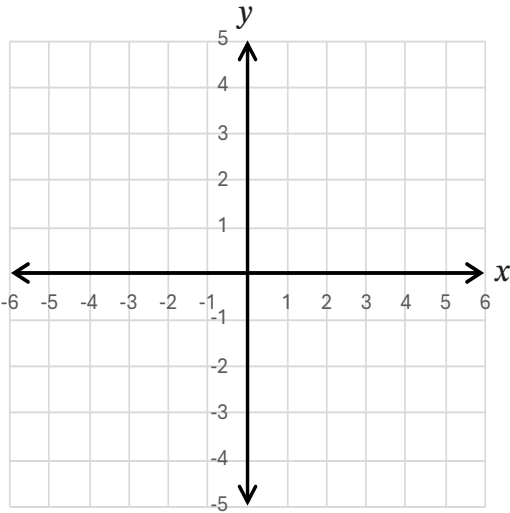
1. الموجب لمحور الصادات (رأسيًا للأعلى) عندما  $a > 0$

2. السالب لمحور الصادات (رأسيًا للأسفل) عندما  $a < 0$

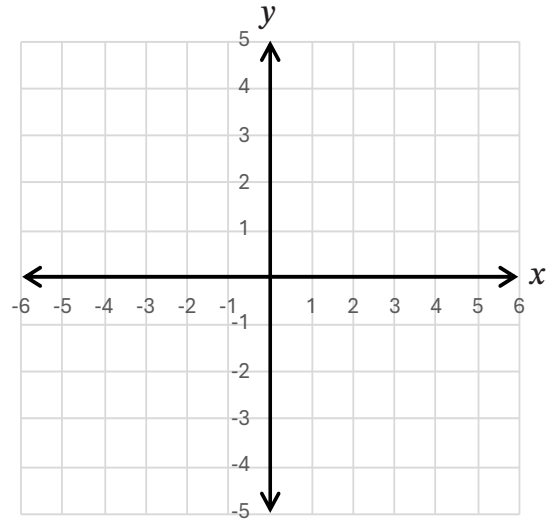
تحقق من فهمك (4)

ارسم بيان كل من الدوال التالية باستخدام التحويلات الهندسية والدالة الأساسية  $g(x) = |x|$ :

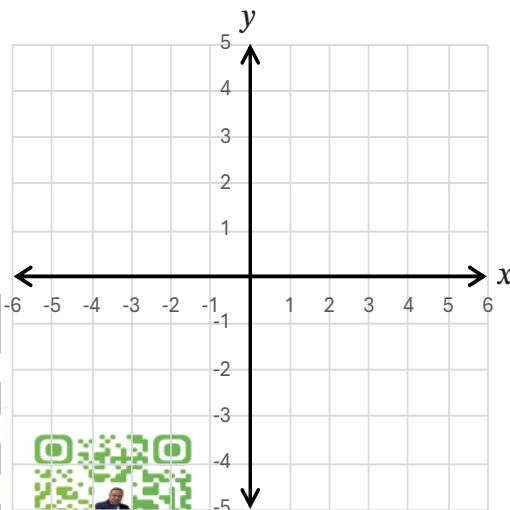
a  $f(x) = |x| + 3$



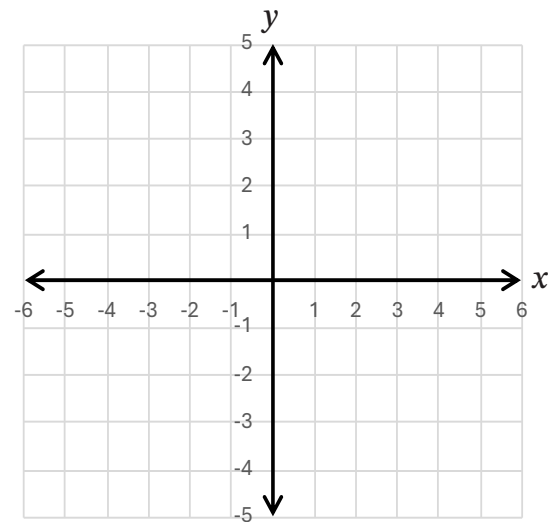
b  $y = |x| - 2$



c  $f(x) = |x| - 2.5$



d  $y = |x| - 1$

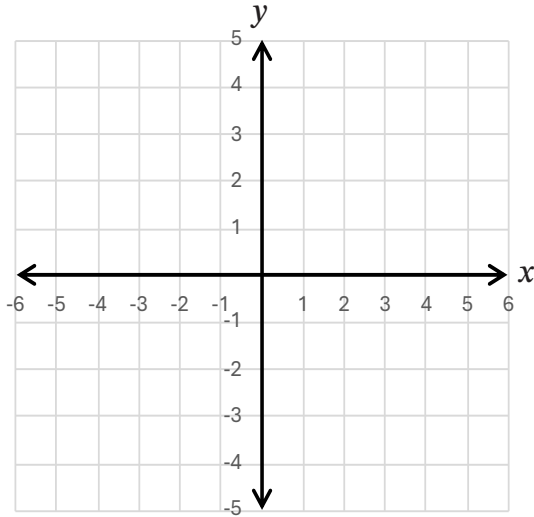


3. الانسحاب المركب: إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية لمنحنى الدالة  $f(x) = |x|$

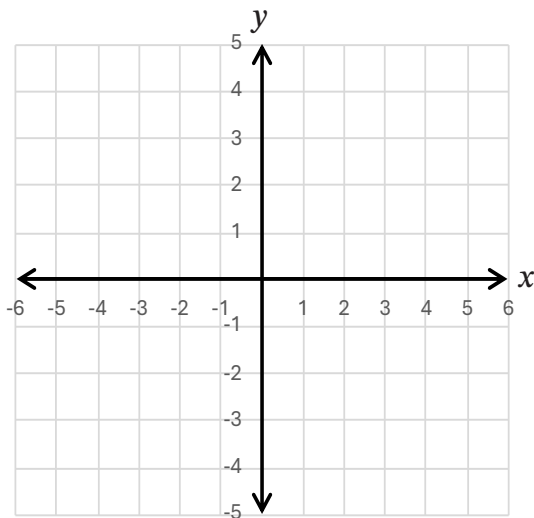
ارسم بيان كل دالة مما يلي باستخدام دالة المرجع والإزاحة:

مثال (5)

a  $f(x) = |x - 4| + 2$



b  $f(x) = |x + 3| - 1$

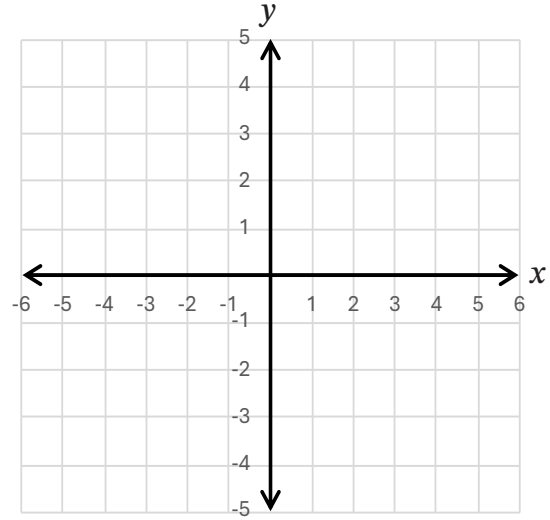
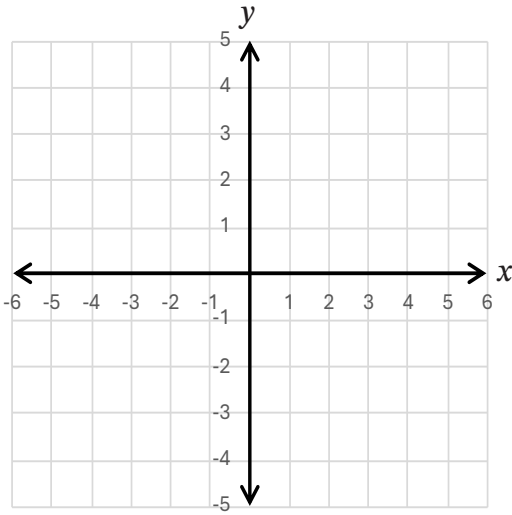


تحقق من فهمك (5)

ارسم بيان الدوال التالية باستخدام دالة المرجع والإزاحة :

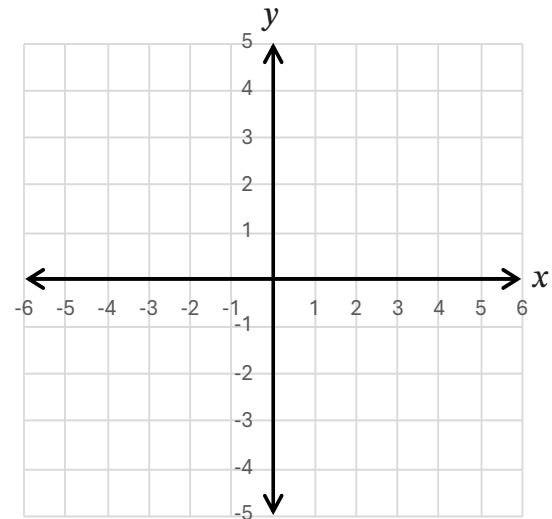
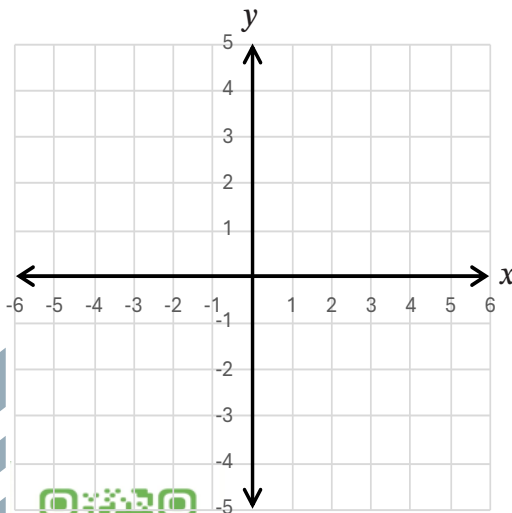
a  $f(x) = |x + 3| + 2$

b  $y = |x - 2| - 1$



c  $f(x) = |x + 2| - 2$

d  $y = |x - 1| + 3$



HOSSAMBAYOUMI199



تعميم:

منحنى الدالة  $f(x) = |x + a| + b$  هو نفس منحنى الدالة الأساسية  $g(x) = |x|$  بإزاحة:

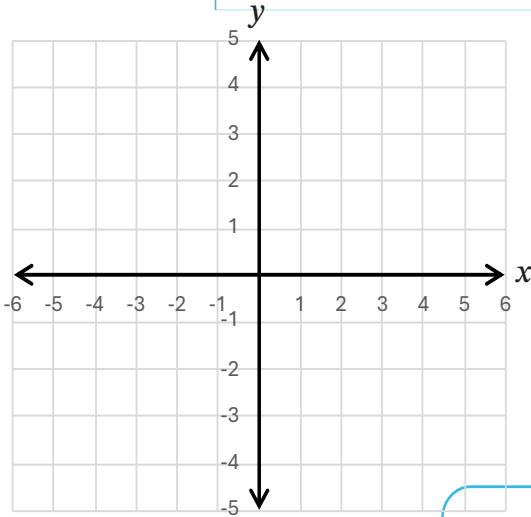
- 1 - أفقية (محور السينات) مقدارها  $|a|$  مع مراعاة الاتجاه يمينًا أو يسارًا.
- 2 - رأسية (محور الصادات) مقدارها  $|b|$  مع مراعاة الاتجاه للأعلى أو للأسفل.

الانعكاس في محور السينات للدالة الأساسية  $g(x) = |x|$

$$f(x) = -|x|$$

ارسم بيان دالة:

استكشف



تعميم:

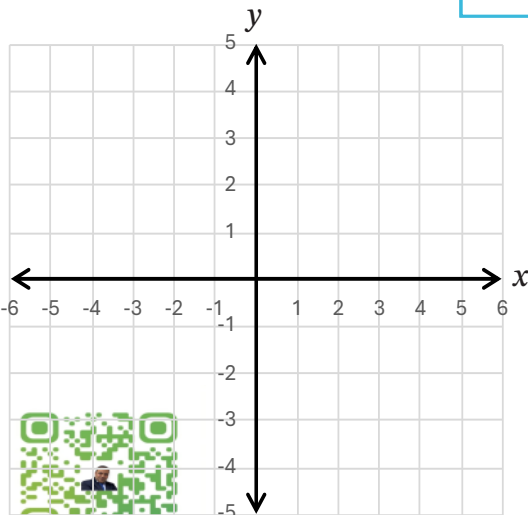
- إذا كانت  $f(x) = -|x+b|$  ،  $g(x) = |x|$  يجب مراعاة ترتيب التحويلات الهندسية لرسم بيان الدالة  $f(x)$ :

  - 1 - انعكاس في محور السينات أولاً للدالة الأساسية.
  - 2 - إزاحة أفقية (يمينًا أو يسارًا).
  - 3 - إزاحة رأسية (للأعلى أو للأسفل).
  - 4 - تحديد الرأس للمنحنى و محور التماثل.

ارسم بيانًا لمنحنى الدالة  $f(x) = -|x+1| + 2$

مستخدمًا منحنى الدالة الأساسية  $g(x) = |x|$

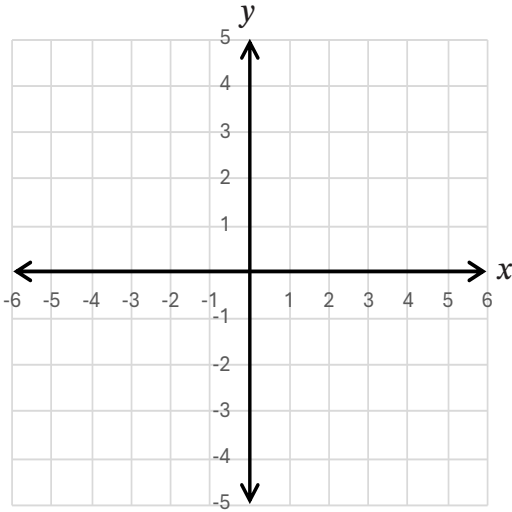
مثال (6)



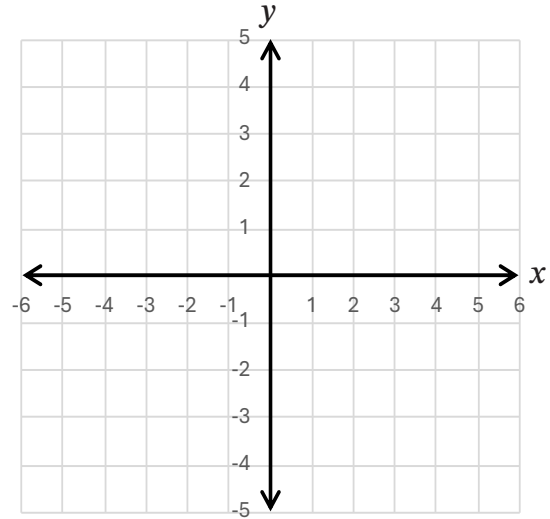
تحقق من فهمك (6)

ارسم بيانيًا كلا من الدوال التالية مستخدمًا بيان منحنى الدالة الأساسية  $g(x)=|x|$ :

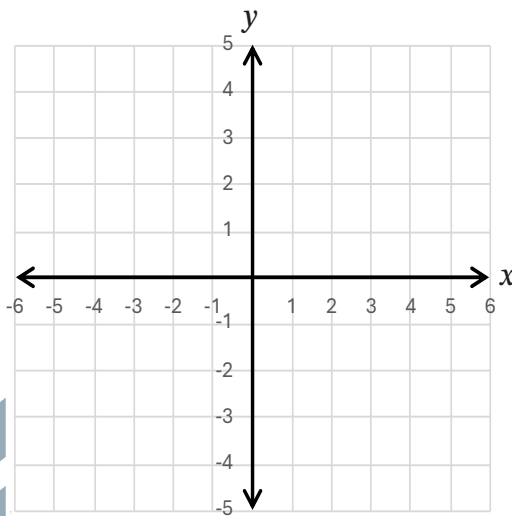
a  $f(x) = -|x - 2| + 3$



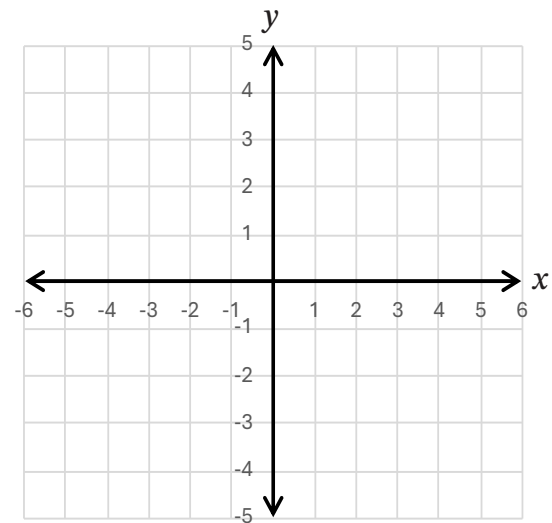
b  $f(x) = -|x + 1| - 2$



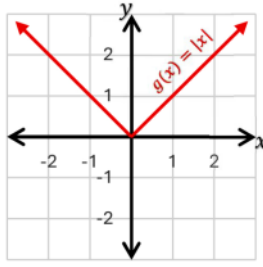
c  $f(x) = -|x - 1| - 1$



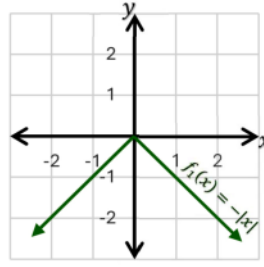
d  $f(x) = -|x + 2| + 1$



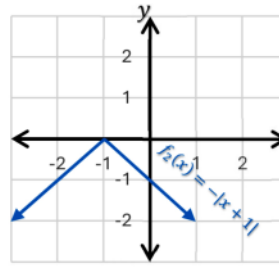
من منحنى الدالة الأساسية  $g(x) = |x|$  ونحصل على منحنى الدالة  $f(x) = -|x + 1| + 2$  كالتالي :



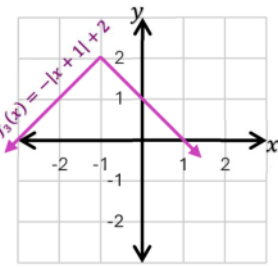
من منحنى الدالة الأساسية  
 $g(x) = |x|$



الانعكاس في محور السينات  
 $f_1(x) = -|x|$

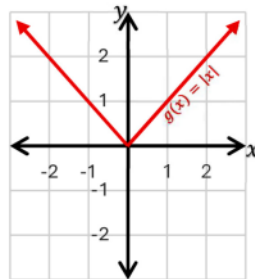


إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليسار  
 $f_2(x) = -|x + 1|$

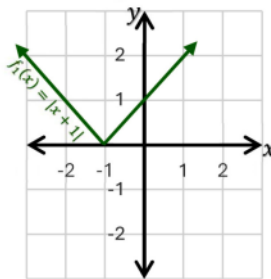


إزاحة رأسية وحدتان للأعلى  
 $f_3(x) = -|x + 1| + 2$

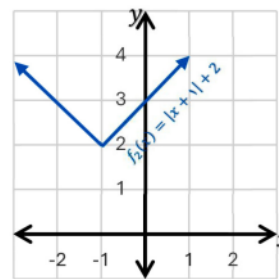
بالطبع لا يمكننا لأننا سوف نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب ، وسيكون على الصورة التالية.



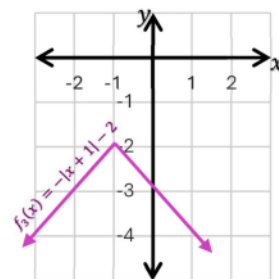
من منحنى الدالة الأساسية  
 $g(x) = |x|$



إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليسار  
 $f_1(x) = |x + 1|$



إزاحة رأسية وحدتان للأعلى  
 $f_2(x) = |x + 1| + 2$



الانعكاس في محور السينات  
 $f_3(x) = -|x + 1| + 2$

وهذا المنحنى ستكون معادلته هي  $f(x) = -|x + 1| + 2$  ، يمكننا التحقق :

بإعادة تعريف القيمة المطلقة ثم رسم بيان الدالة، أو تحديد الرأس ومحور التماثل وفتحه بيان الدالة.



## البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-5) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(a) (b)

(1) بيان الدالة  $f(x)=|x|$  ينطبق على بيان الدالة  $g(x)=x$

.....

.....

(a) (b)

(2) بيان الدالة  $f(x)=|x|$  هو انعكاس لبيان الدالة  $g(x)=-|x|$  حول

محور السينات

.....

.....

(a) (b)

(3) بيان الدالة  $f(x)=|x-4|+2$  يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان

الدالة  $g(x)=|x|$  في الاتجاه المحدد 4 وحدات جهة اليمين ووحدة واحدة للأعلى

.....

.....

(a) (b)

(4) محور التماثل للدالة  $f(x)=|x-3|$  هو  $x=3$

.....

.....

(a) (b)

(5) مدى الدالة  $f(x)=|x+3|-3$  هو  $[-3, \infty)$

.....

.....

■ في البنود من (1-2) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) أي من الدوال التالية رأس مُنَحْنَاهَا  $(-3, 2)$  :

(a)  $y=|x+3|+2$

(b)  $y=|x-3|+2$

(c)  $y=|x+3|-2$

(d)  $y=|x-3|-2$

.....

.....



(2) أي من قواعد الدوال التالية تمثل منحنى الدالة المرسوم :

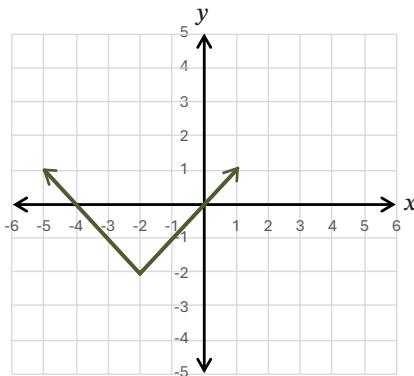
(a)  $y=|x-4|-3$

(b)  $y=|x-4|+3$

(c)  $y=|x+4|+3$

(d)  $y=|x+4|-3$

### مهارات تفكير عليا



■ اختر الإجابة الصحيحة:

المساحة المحصورة بين منحنى الدالة  $f(x)=|x+2|-2$

ومحور السينات تساوي ..... وحدة مربعة

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 4



## 1-2 حل معادلة القيمة المطلقة

## معادلات القيمة المطلقة

## مفهوم أساسي « حل معادلات القيمة المطلقة »

لحل المعادلة  $|ax+b|=c$  حيث  $c \geq 0$   
 نحل المعادلتين المرتبطتين بها وهما :  $ax+b=-c$  أو  $ax+b=c$

حل المعادلة على الصورة  $|ax+b|=c, c \geq 0$ 

تعلمنا فيما سبق أن حل معادلة القيمة المطلقة :

1  $|x|=A$

إذا كان  $A > 0$  ، فإن  
 للمعادلة حلان هما :

$$x=A \text{ or } x=-A$$

$$S=\{-A, A\}$$

2  $|x|=0$

إذا كان  $A=0$  ، فإن  
 للمعادلة حل وحيد وهو :

$$x=0$$

$$S=\{0\}$$

3  $|x|=A$

إذا كان  $A < 0$  ، فإن  
 للمعادلة ليس لها حل :

$$S=\emptyset$$

## خواص القيمة المطلقة

لكل  $a, b \in \mathbb{R}$  فإن :

1.  $|a| \geq 0$

2.  $|a+b| \leq |a| + |b|$

3.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

4.  $|x-a| = |a-x|$

5.  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$  ,  $b \neq 0$

6.  $|x| = |-x|$

7.  $|n|^2 = n^2$  حيث  $n$  عدد زوجي

8.  $\sqrt{x^2} = |x|$  لأي عدد حقيقي  $x$  يكون

أولاً : حل المعادلة على الصورة  $|ax+b|=|cx+d|$ 

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة :  $|x-2| = |2x-1|$



مثال ( 1 ) أوجد مجموعة حل المعادلة :  $|x-2| = |2x-1|$

\* الحل الآخر (بتربيع الطرفين)

تحقق من فهمك (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة :  $|x-1| = |x+2|$



مثال (2) أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

a  $|x+4| = |x-3|$

a  $|2y+1| = |3y+4|$





تحقق من فهمك (2)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a  $|y-4| = |2y-5|$

b  $2x-3 = |x+1|$

c  $|3y+1| = |y-2|$

d  $|x-4| = |2x-5|$



ثانيًا: حل المعادلة على الصورة  $|ax+b|=cx+d$

مثال (3) أوجد مجموعة حل المعادلة:  $|x-3|=3x-1$

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a  $|2x-1|=x+2$

b  $|2x+5|=x+5$



أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

(a)  $|4x+2|=1-2x$

(b)  $|x+4|+2x+3=0$

مثال (4)

(a)  $|4x+2|=1-2x$

(b)  $|x+4|+2x+3=0$



تحقق من فهمك (4)

- أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a  $|2\ell - 3| = |4\ell - 1|$

b  $|3x - 1| + 4x - 13 = 0$



## البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-7) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

(1) حل المعادلة  $|2x-1|=x+3$  هو

- (a)  $x=1$       (b)  $x=2$       (c)  $x=-1$       (d)  $x=-2/3$

.....

.....

(2) حل المعادلة  $|x+2|=x+2$  هو

- (a)  $x=-2$       (b)  $x \in (-2, \infty)$       (c)  $x \in [-2, \infty)$       (d)  $\emptyset$

.....

.....

(3) حل المعادلة  $|x-3|=|x+1|$  هو

- (a)  $x=\pm 1$       (b)  $x=-1$       (c)  $x=1$       (d)  $x=2$

.....

.....

(4) مجموعة حل المعادلة  $|x-3|=|3-x|$  هي

- (a)  $\{3\}$       (b)  $\{-3, 3\}$       (c)  $\mathbb{R}$       (d)  $\emptyset$

.....

.....

(5) حل المعادلة  $|x-4|=|4-x|$  هو

- (a)  $x=-4$       (b)  $x=4$       (c)  $\mathbb{R}$       (d) لا يوجد حل

.....

.....

(6) حل المعادلة  $|2x-3|=|x+3|$  هو

- (a)  $x=0, x=6$       (b)  $x=-5, x=0$       (c)  $x=5, x=6$       (d)  $x=\pm 6$

.....

.....



مجموعة حل المعادلة  $|x-2|+x=2$  هي (7)

(a)  $\emptyset$

(b)  $(-\infty, 2)$

(c)  $(-\infty, 2]$

(d)  $\{2\}$

### مهارات تفكير عليا

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت مجموعة حل المعادلة  $|x-a|=b$  هي  $\{5, 11\}$  فإن  $(a, b) =$

(a)  $(-8, 3)$

(b)  $(-3, 8)$

(c)  $(8, 3)$

(d)  $(3, 8)$



# حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد "جبرياً وبيانياً"

1-3

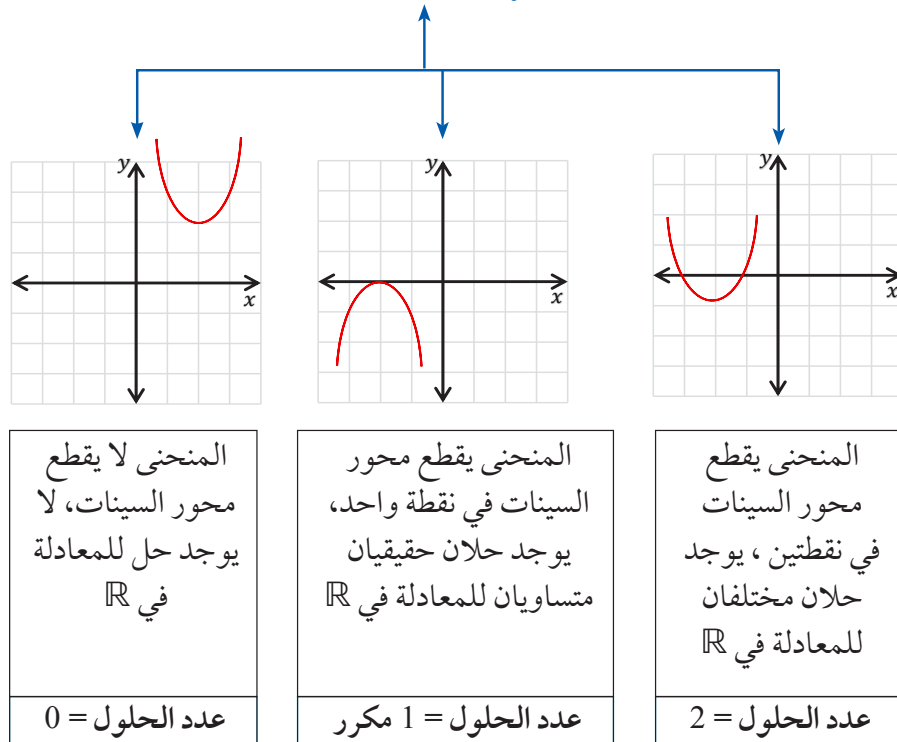
## مفاهيم أساسية:

1. الدالة الثابتة:  $f(x)=c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  (دالة من الدرجة الصفرية) وتمثيلها البياني يكون خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة  $c$ .
2. الدالة الخطية:  $f(x)=ax+b$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  (دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني على شكل خط مستقيم.
3. الدالة التربيعية:  $f(x)=ax^2+bx+c$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطع مكافئ مفتوحاً للأعلى إذا كانت  $a > 0$ ، ومفتوحاً للأسفل إذا كانت  $a < 0$ .

## \* حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانياً:

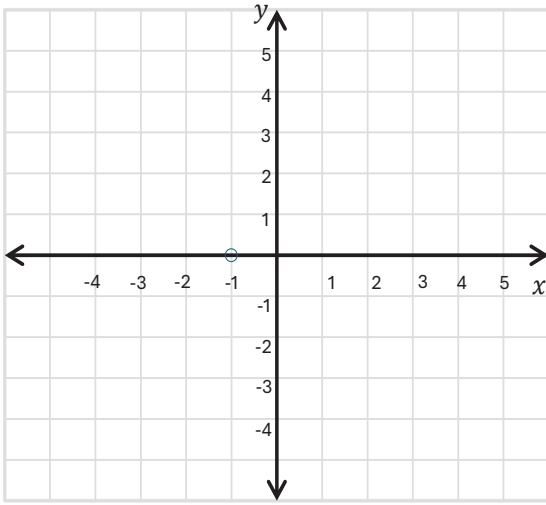
1. ضع المعادلة على الصورة:  $ax^2+bx+c=0$
2. افرض أن:  $f(x)=ax^2+bx+c$ ، ثم ارسم منحنى الدالة  $f$
3. عين نقاط تقاطع منحنى الدالة  $f$  مع محور السينات فتكون الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع هي:

### حلول المعادلة $f(x)=0$

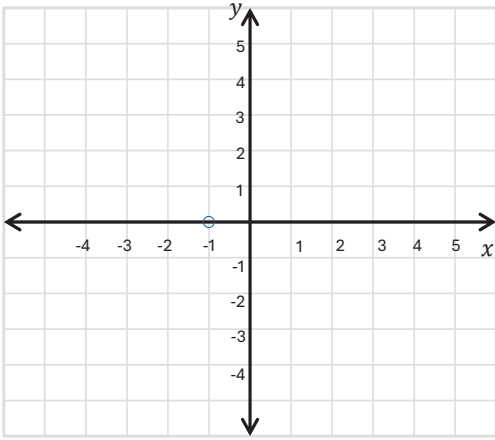


مثال ( 1 ) أوجد بيانيا مجمّوعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في  $\mathbb{R}$  مستعيناً بالفترة الموضحة:

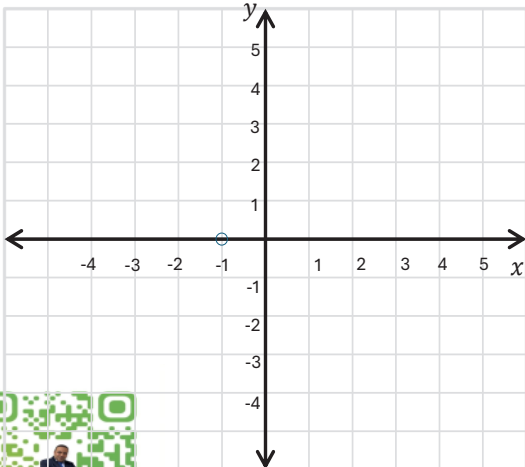
(a)  $x^2 - 2x - 3 = 0$  ,  $[-2, 4]$



(b)  $-x^2 - 4x - 4 = 0$  ,  $[-4, 0]$



(c)  $x^2 + 2 = 0$  ,  $[-2, 2]$



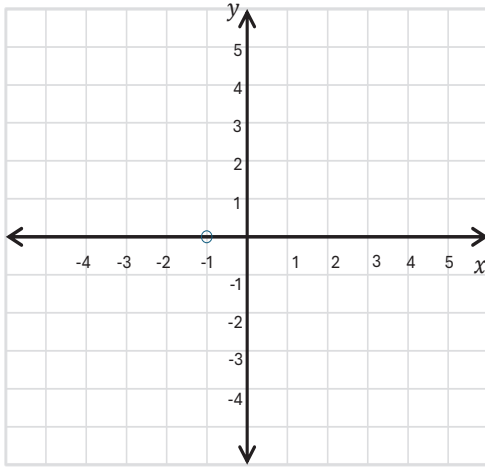


تحقق من فهمك (1)

أوجد بيانياً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في  $\mathbb{R}$  مستعيناً بالفترة الموضحة :

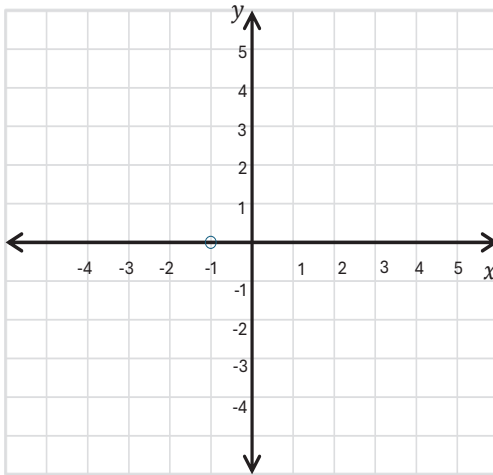
a  $x^2 - 6x + 8 = 0$

, [1, 5]



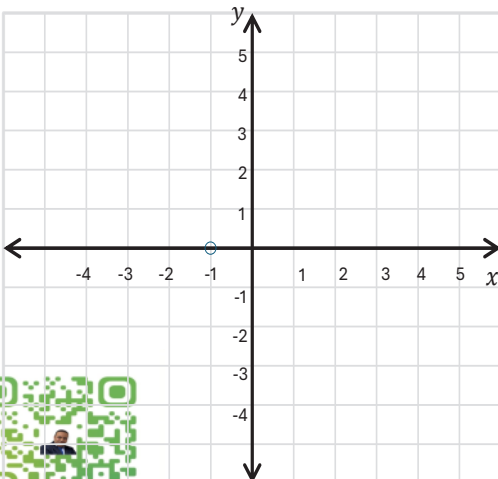
b  $x^2 + 4x + 4 = 0$

, [-4, 0]



c  $x^2 + 4x + 5 = 0$

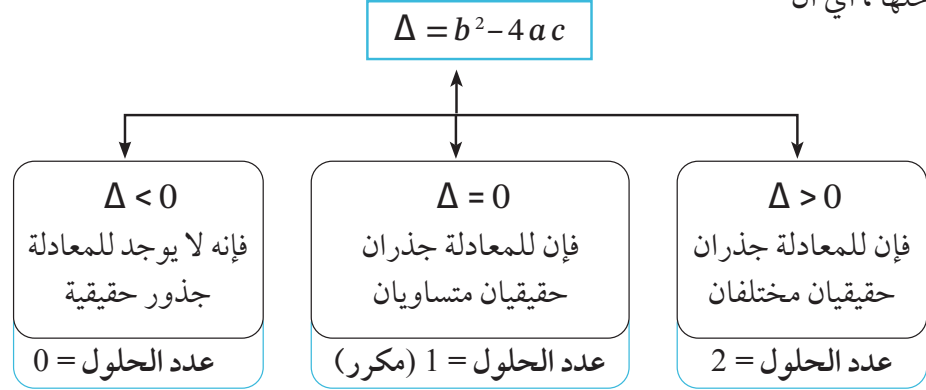
, [-4, 0]



## القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد وهو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad b^2 - 4ac \geq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

يُسمى المقدار  $b^2 - 4ac$  مميّز المعادلة التربيعية ، ويرمز له بالرمز  $\Delta$  ويقرأ (دلتا) ، والمميّز هو الذي يميّز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها ، أي أن



حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون

حل المعادلة:

مثال (2)

a  $4x^2 - 4x - 3 = 0$

b  $2x^2 - 4x + 2 = 0$

c  $x^2 + 2x + 3 = 0$

تحقق من فهمك (2)

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

a  $2x^2 - 7x - 4 = 0$

b  $x^2 - 10x + 25 = 0$

c  $3x^2 - 2x + 2 = 0$



d  $x^2 = 15$

e  $x^2 - x = 0$

f  $2x^2 - 8x + 8 = 0$

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a  $x^2 - x - 5 = 0$

b  $x^2 - 8 = 0$

مثال (3)

c  $x^2 = x + 1$

d  $x^2 - 6x + 9 = 0$

a  $x^2 - x - 5 = 0$

b  $x^2 - 8 = 0$



c  $x^2 = x + 1$

d  $x^2 - 6x + 9 = 0$

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a  $x^2 - 4x + 2 = 0$

b  $4x^2 - 5x + 1 = 0$



c  $x^2 - 2x + 1 = 0$

d  $x^2 - 6x + 8 = 0$

حل المعادلة التالية باستخدام القانون :  $x^2 - 3x = 0$

مثال (4)

تحقق من فهمك (4)

حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون .

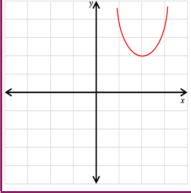
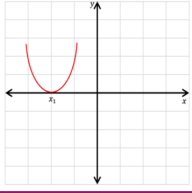
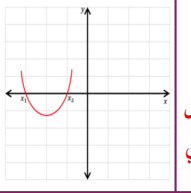
a  $x^2 + 7x + 10 = 0$

b  $2x^2 - 5x - 52 = 0$



تعميم:

للدالة التربيعية  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $a, b, c \in \mathbb{R}$   $a \neq 0$ 

| المميز          | $b^2 - 4ac < 0$<br>سالب                                                           | $b^2 - 4ac = 0$<br>صفر                                                             | $b^2 - 4ac > 0$<br>موجب                                                             |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| عدد الحلول      | لا يوجد حلول حقيقية                                                               | حلان حقيقيان متساويان                                                              | حلان حقيقيان مختلفان                                                                |
| التمثيل البياني |  |  |  |

مثال (5) عددان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما 34 فما العددان؟

تحقق من فهمك (5)

a) أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100



تحقق من فهمك (5)

b) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار  $3\text{cm}$  ومساحته  $40\text{cm}^2$ 

## البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) جذرا المعادلة  $x^2 - 5x + 6 = 0$  هما جذران حقيقيان متساويان

.....

.....

(a) (b)

(2) المعادلة  $x^2 - 4x + 4 = 0$  لها جذران حقيقيان متساويان

.....

.....

(a) (b)

(3) جذرا المعادلة  $x^2 + 9 = 0$  هما 3 ، -3

.....

.....

■ في البنود من (1-7) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) المعادلة  $x^2 - 6x + 9 = 0$

(a) لها جذران حقيقيان مختلفان

(b) لها جذران حقيقيان متساويان

(c) ليس لها جذور حقيقية

(d) ليس أيًا مما سبق

.....

.....

(2) المعادلة  $x^2 + 4x + 5 = 0$

(a) لها جذران حقيقيان مختلفان

(b) لها جذران حقيقيان متساويان

(c) ليس لها جذور حقيقية

(d) ليس أيًا مما سبق

.....

.....

(3) جذرا المعادلة  $x^2 - 3x - 4 = 0$  هما:

(a) -1, 4

(b) 1, 4

(c) -2, 2

(d) -1, 3

.....

.....





(4) حل المعادلة  $x^2=9$  هو:

- (a) 3 (b) -3 (c)  $\pm 3$  (d) لا يوجد حل

.....

.....

(5) جذرا المعادلة  $2x^2-7x+3=0$  هما:

- (a)  $\frac{1}{2}, 3$  (b) 1, 3 (c) 2, 3 (d)  $1, \frac{3}{2}$

.....

.....

(6) حل المعادلة  $x^2-25=0$  هو:

- (a) 5 (b) -5 (c)  $\pm 5$  (d) لا يوجد حل

.....

.....

(7) المعادلة التي مجموع جذريها يساوي 5 فيما يلي:

- (a)  $(x+1)(x+4)=0$  (b)  $x(x-5)=0$   
(c)  $(x-1)(x+6)=0$  (d)  $(x-5)(x+1)=0$

.....

.....

### مهارات تفكير عليا

■ اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) إذا كانت المعادلة  $x^2-6x-k=0$  لها جذران حقيقيان متساويان

- (a) (b) فإن قيمة  $k$  هي 3

.....

.....



■ في البنود من (2 - 5) اختر الإجابة الصحيحة:

(2) إذا كانت المعادلة  $x^2 - kx + 4 = 0$  ليس لها جذور حقيقية فإن  $k$  تحقق:

- (a)  $k^2 > 16$  (b)  $k^2 = 16$  (c)  $k^2 < 16$  (d)  $k > 16$

.....

.....

(3) مجموعة حل المعادلة  $x^2 = 2 - |x|$  هي:

- (a)  $\{1, -1\}$  (b)  $\{2, -2\}$  (c)  $\{1, -2\}$  (d)  $\{-1, 2\}$

.....

.....

(4) مجموعة حل المعادلة  $x^2 - 2|x| = 8$  هي:

- (a)  $\{2, -2\}$  (b)  $\{4, -4\}$  (c)  $\{2, 4\}$  (d)  $\emptyset$

.....

.....

(5) إذا كانت  $|x| > x$  ،  $x^2 + 2x - 3 = 0$  فإن  $2x + 4$  تساوي:

- (a) -2 (b) 2 (c) 6 (d) 8

.....

.....



# 1-4 إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري معادلة تربيعية - تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها

أولاً : إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين للمعادلة التربيعية  $ax^2+bx+c=0$  بدون حلها

∴ جذري المعادلة  $ax^2+bx+c=0$  هما:

$$x_1 = \ell = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = m = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فإن: ①  $x_1 + x_2 = \ell + m = \frac{-b}{a}$  ②  $x_1 \cdot x_2 = \ell \cdot m = \frac{c}{a}$

③  $x_1 - x_2 = \ell - m = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$

مثال ( 1 ) إذا كان حاصل ضرب جذرا المعادلة  $2x^2 - 3x + c = 0$  يساوي -1 أوجد قيمة C .

تحقق من فهمك (1)

إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة  $3x^2 + 10x - c = 0$  يساوي  $-\frac{8}{3}$  أوجد قيمة C .



مثال (2) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة:  $2x^2 + bx - 5 = 0$  هو  $\frac{3}{2}$  ، فأوجد قيمة  $b$  .

تحقق من فهمك (2) إذا كان حاصل ضرب جذريّ المعادلة  $ax^2 - 5x + 2 = 0$  يساوي  $\frac{3}{2}$  أوجد قيمة  $a$  ، ثم حل المعادلة.

مثال (3) إذا كان  $m$  ,  $l$  هما جذريّ المعادلة  $2x^2 - 8x + 5 = 0$  ، فأوجد القيم العددية لكل مما يلي:

(a)  $l^2 + m^2$  (b)  $\frac{1}{l} + \frac{1}{m}$  (c)  $l - m$



تحقق من فهمك (3)

إذا علمت أن جذريّ المعادلة  $x^2 - 7x + 9 = 0$  هما  $l, m$  ، فأوجد قيمة كل من:

a  $l + m$

b  $l \cdot m$

c  $l^2 + m^2$

ثانيًا: إيجاد المعادلة التربيعية إذا عُلم جذراها

تعميم

إذا كان  $l, m$  هما جذرا المعادلة التربيعية فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (l + m)x + (l \cdot m) = 0$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 حاصل ضرب الجذرين    مجموع الجذرين

كُون معادلة تربيعية في متغير واحد والتي جذراها 4 , -3 بطريقتين مختلفتين.

مثال (4)



تحقق من فهمك (4)

أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها معلومان في الحالات التالية :

a  $3, 5$

b  $4, \frac{-1}{3}$

c  $2, -2$

كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها:

مثال (4)

a  $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

b  $5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$

a  $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

b  $5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$



تحقق من فهمك (5)

كُونِ المعادلة التربيعية التي جذراها:  $-3\sqrt{2}$  ,  $3\sqrt{2}$ 

ثالثاً: تَكْوِينُ معادلةٍ تربيعيةٍ بمعلومية معادلةٍ أُخرى

إذا كان  $l, m$  هما جذرا المعادلة التربيعية  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  كون المعادلة التربيعية التي جذراها  $2l, 2m$

مثال (6)

تحقق من فهمك (6)

إذا كان  $l, m$  هما جذرا المعادلة التربيعية  $2x^2 + 15x - 8 = 0$  كون المعادلة التربيعية التي جذراها:  $2l, 2m$



## البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-6) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) إذا كان ناتج ضرب جذريّ المعادلة التربيعية  $x^2 - 3x + c = 0$  يساوي 2 فإن  $c$  يساوي:

- (a) -4 (b) -2 (c) 4 (d) 2

(2) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة  $x^2 - ax + 6 = 0$  يساوي 5 فإن  $a$  يساوي:

- (a) -6 (b) -5 (c) 5 (d) 6

(3) إذا كان أحد جذريّ المعادلة  $x^2 - (m+2)x + 3 = 0$  هو معكوسٌ جمعيّ للآخر فإن  $m$  تساوي:

- (a) 3 (b) 2 (c) -2 (d) -3

(4) عدنان حقيقيان مجموعهما 2 و حاصل ضربهما -35 هما:

- (a) 5, 7 (b) -5, -7 (c) -7, 5 (d) 7, -5

(5) حاصل ضرب جذريّ المعادلة  $x(2x-3)=7$  يساوي:

- (a)  $-\frac{3}{2}$  (b)  $\frac{3}{2}$  (c)  $-\frac{7}{2}$  (d)  $\frac{7}{2}$

## مهارات تفكير عليا

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كان أحد جذريّ المعادلة :  $2x^2 + 6x + c = 0$  هو 3 ، فإن  $c$  تساوي:

- (a) 18 (b) 36 (c) -6 (d) -36





## 1-5 حل متباينة من الدرجة الثانية

أولاً: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام التحليل

«خواص المتباينات في الأعداد الحقيقية» :

1. عندما :  $a.b \geq 0$  فإن :  $a \geq 0, b \geq 0$  or  $a \leq 0, b \leq 0$

2. عندما :  $a.b \leq 0$  فإن :  $a \geq 0, b \leq 0$  or  $a \leq 0, b \geq 0$

مثال ( 1 ) حل كلاً من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

a  $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

b  $x^2 - 2x - 8 \leq 0$



ملحوظة:

حل المتباينة:  $x^2 - 2x - 8 > 0$  هوحل المتباينة:  $x^2 - 2x - 8 < 0$  هو

تحقق من فهمك (1)

حل كلاً من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

a  $x^2 + x - 12 \leq 0$

b  $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

c  $x^2 - x - 6 < 0$



d  $(x-3)(2x+5)<0$

e  $x^2-2x+1>0$

f  $x^2+6x+9<0$



## ثانيًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية بدراسة الإشارة

هناك طرق عديدة لحل متباينة من الدرجة الثانية تعرضنا على طريقة توظيف خواص التباين والآن سنتعرف معًا على حل المتباينة من الدرجة الثانية بالبحث عن إشارة المقدار الثلاثي  $ax^2+bx+c$  بإيجاد مجموعة جميع الأعداد الحقيقية  $x$  التي تجعل المقدار سالبًا أو موجبًا ، **لنتعرف أولاً على دراسة مقدار من الدرجة الأولى :**

ادرس إشارة كل من :

مثال ( 2 )

a  $f(x) = 2x - 8$

b  $g(x) = -3x + 6$



## قاعدة هامة

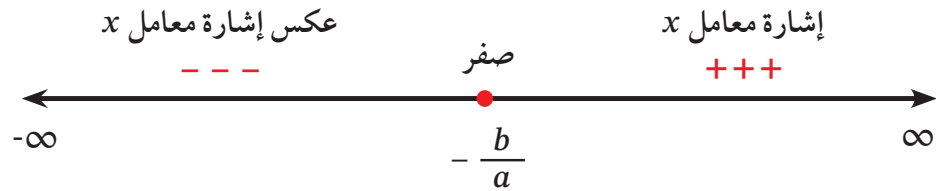
لدراسة إشارة  $g(x)=ax+b$ ,  $a \neq 0$  نتبع التالي :

$$1. \text{ نضع } x = -\frac{b}{a} \iff ax+b=0 \iff g(x) = 0$$

2. نحدد العدد  $x = -\frac{b}{a}$  على خط الأعداد

3. تكون إشارة  $g(x)$  : • مماثلة للإشارة  $a$  على يمين العدد  $-\frac{b}{a}$

• ومخالفة للإشارة  $a$  على يسار العدد  $-\frac{b}{a}$



تحقق من فهمك (2)

من السؤال السابق أكمل الجدول التالي وحدد الفترات التي تعبر عن حل المتباينات في كل مما يلي :

| $f(x)$ | المتباينة      | الفتره | التمثيل على خط الأعداد |
|--------|----------------|--------|------------------------|
| $f(x)$ | $x^2-4 \leq 0$ |        |                        |
| $f(x)$ | $x^2-4 > 0$    |        |                        |
| $f(x)$ | $x^2-4 \geq 0$ |        |                        |

## قاعدة هامة

لدراسة إشارة  $f(x)=ax^2+bx+c$ ,  $a \neq 0$  نتبع التالي :

1. نوجد المعادلة المناظرة:  $f(x)=0$

2. نوجد قيم  $x$  التي تجعل  $f(x)=0$  إما بالتحليل أو باستخدام المميز عندما يصعب التحليل

3. لدينا ثلاثة احتمالات:

|                                                           |              |  |
|-----------------------------------------------------------|--------------|--|
| للمعادلة $f(x)=0$<br>حلان حقيقيان مختلفان<br>$x_1 < x_2$  | $\Delta > 0$ |  |
| للمعادلة $f(x)=0$<br>حلان حقيقيان متساويان<br>$x_1 = x_2$ | $\Delta = 0$ |  |
| ليس للمعادلة<br>$f(x)=0$<br>جذور حقيقية                   | $\Delta < 0$ |  |



حل كلاً من المتباينات التالية :

مثال (3)

a  $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

b  $x^2 - x \leq 5$

c  $x^2 - 10x + 25 > 0$

d  $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

a  $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

b  $x^2 - x \leq 5$



c  $x^2 - 10x + 25 > 0$



$$d \quad -3x^2 + 4x - 2 \geq 0$$

لحل المتباينة التربيعية بصورها المختلفة التي على الصورة  $ax^2 + bx + c \geq 0$  ،  $a \neq 0$  يجب ملاحظة إشارة  $\Delta$  ،  $a \neq 0$  ،  $f(x) = ax^2 + bx + c$  لايجاد قيمة  $\Delta$

تحقق من فهمك (3)

حل كل من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

$$a \quad 2x^2 + 3x - 2 < 0$$





b  $-x^2 - x + 6 > 0$

c  $x^2 - 6x + 9 \geq 0$



## حالة خاصة : حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام القيمة المطلقة

## خاصية

إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين موجبين فإن:  $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

## ملحوظة:

عند حل المتباينة  $x^2 < 0$  فإننا نلاحظ أنه لا يوجد أي عدد حقيقي بحيث يكون مربعه أصغر من الصفر.  
أي إن المتباينة  $x^2 < 0$  ليس لها أي حل ، وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي المجموعة الخالية  $\emptyset$ .  
وبالمقابل فإن المتباينة  $x^2 \geq 0$  صحيحة لأي عدد حقيقي و بالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ .

**بصفة عامة :** إذا كان  $a, b, c$  أعداداً حقيقية بحيث  $c < 0, a \neq 0$  فإن :

1. مجموعة حل المتباينة  $(ax+b)^2 < c$  هي المجموعة الخالية  $\emptyset$
2. مجموعة حل المتباينة  $(ax+b)^2 > c$  هي مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$
3. مجموعة حل المتباينة  $(ax+b)^2 < 0$  هي  $\emptyset$
- مجموعة حل المتباينة  $(ax+b)^2 > 0$  هي  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

## ملحوظة:

| المتباينة    | مجموعة الحل          |
|--------------|----------------------|
| $x^2 < 0$    | $\emptyset$          |
| $x^2 \leq 0$ | $\{0\}$              |
| $x^2 \geq 0$ | $\mathbb{R}$         |
| $x^2 > 0$    | $\mathbb{R} - \{0\}$ |

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

مثال (4)

- a)  $2x^2 + 5 \geq 23$       b)  $(5x+7)^2 + 3 < 2$

الحل:

a)  $2x^2 + 5 \geq 23$



b  $(5x+7)^2+3<2$

تحقق من فهمك (4)

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

a  $3x^2-4\leq 8$

b  $(4x-3)^2+2>-3$

c  $(2-3x)^2<1$

d  $(2x+1)^2-3\geq 1$



## البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) مجموعة حل المتباينة  $(x+2)(x-5) > 0$  هي:

(a)  $(-2,5)$

(b)  $[-2,5]$

(c)  $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$

(d)  $\mathbb{R}$

(2) مجموعة حل المتباينة  $x^2 - 2x < 0$  هي:

(a)  $(0,2)$

(b)  $[-\infty, 0]$

(c)  $(2, \infty)$

(d)  $[0,2]$

(3) مجموعة حل المتباينة  $x^2 + 6x + 9 \leq 0$  هي:

(a)  $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

(b)  $\{-3\}$

(c)  $[-3,3]$

(d)  $\mathbb{R}$

(4) أي مما يلي ليس حلاً للمتباينة  $4x^2 - 4x - 5 > 0$

(a) 60

(b) -20

(c) 2

(d) 0

(5) أي من المتباينات التالية حلها نفس حل المتباينة  $-2x^2 + 5x - 3 > 0$ :

(a)  $x^2 - 5 > 2x^2$

(b)  $-x^2 - x > x^2 - 4x$

(c)  $2x^2 + 3 < 5x$

(d)  $x^2 - 3x > 2x - x^2$



## التناسب

## 2-1

**النسبة :** هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس ويمكن

التعبير عن النسبة بصورة  $a$  إلى  $b$  ، وتكتب  $a:b$  أو  $\frac{a}{b}$

**التناسب:** هو تساوي نسبتين أو أكثر.

إذا كان :  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

وكانت  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فإن  $a, b, c, d$  تسمى أعدادًا متناسبة

**ملحوظة :**

إذا كان  $a, b, c, d$  أعداد متناسبة فإن  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  حيث  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

## خواص التناسب

**خاصية (1): « الضرب التقاطعي »**

إذا كان :  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$  وكان  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فإن :  $a.d = c.b$

أي إن : حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه الخاصية «قاعدة الضرب التقاطعي»

**مثال ( 1 )** إذا كانت :  $2, x, 4, 6$  أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة:  $x$

تحقق من فهمك (1)

إذا كانت :  $3, 5, 6, x$  أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة  $x$



مثال (2) أوجد الرابع المتناسب للأعداد : 1, 3, 9, ...

تحقق من فهمك (2)

أوجد الثالث المتناسب للأعداد : 4, 7, ....., 35

مثال (3) أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدّي النسبة  $\frac{7}{9}$  أصبحت  $\frac{4}{5}$

تحقق من فهمك (3)

أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدّي النسبة  $\frac{5}{6}$  أصبحت  $\frac{9}{4}$



مثال (4) إذا كان  $(x+4) : (5x-1) = 4:5$  أوجد قيمة  $x$

تحقق من فهمك (4)

أوجد قيمة  $x$  إذا كان :  $(2x+3) : (3x-5) = 3 : 4$

خاصية (2): "عكس الخاصية 1"

إذا كان :  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$  وكان  $a.d = b.c$

فإن :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال (5) إذا كان  $5a = 4b$  فأوجد  $\frac{a}{b}$  حيث  $a, b \in \mathbb{R}^*$

تحقق من فهمك (5)

إذا كان :  $2a = 7b$  ، فأوجد  $\frac{a}{b}$



خاصية (3): إذا كان :  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$  وكان  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فإن :

$$(1) \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$(2) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$(3) \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

خواص التناسب

أوجد  $\frac{x}{y}$  في كل مما يلي حيث :  $y \neq 0, x \neq 0$

مثال (6)

a  $3x = 4y$

b  $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

a  $3x = 4y$

b  $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

الحل:

تحقق من فهمك (6)

أوجد  $\frac{x}{y}$  في كل مما يلي حيث :  $y \neq 0, x \neq 0$

a  $5x = 7y$

b  $\frac{5x-2y}{5x+2y} = \frac{1}{4}$

خاصية (4): إذا كان :  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$  وكان  $k \in \mathbb{R}^*$

حيث  $k$  عدد ثابت  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

فإن  $a = bk, c = dk$





مثال (7) إذا كان :  $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$  أوجد  $\frac{2a+5b}{3b+2a}$

تحقق من فهمك (7)

إذا كان :  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$  ، فأوجد القيمة العددية للمقدار :  $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

خاصية (4): إذا كان :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\ell}{s} = \dots$  وكانت  $k_1, k_2, k_3, \dots \in \mathbb{R}^*$  فإن: إحدى النسب  $\frac{ak_1 + ck_2 + \ell k_3 + \dots}{bk_1 + dk_2 + sk_3 + \dots}$



مثال (8) إذا كانت الأعداد 5, 6, 3 متناسبة مع  $a, b, c$  ،  
أوجد قيمة المقدار :  $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$



تحقق من فهمك (8)

إذا كان :  $\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5}$  ، أوجد :  $\frac{a+2b}{3b+c}$  ( بطريقتين مختلفتين ).

أسئلة المقال

إذا كانت الأعداد 3, 5, 11 متناسبة مع  $a, b, c$  أوجد القيمة العددية للمقدار :  $\frac{a+3b}{5b+c}$



## تعريف:

الكميات :  $a, b, c$  في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان :

$$b^2 = ac \quad \text{أو} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

ويسمى :  $a$  الأول المتناسب ،  $b$  الوسط المتناسب ،  $c$  الثالث المتناسب

$$b = \pm \sqrt{a \cdot c} \quad \text{حيث :}$$

**ملحوظة :**  $a, c$  إما أن يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً

$$\frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الأول المتناسب}} = \frac{\text{الثالث المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}} \quad , \quad \frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الثالث المتناسب}} = \frac{\text{الأول المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}}$$

**مثال (9)** أوجد الوسط المتناسب بين العددين 9, 16

## تحقق من فهمك (9)

أوجد الوسط المتناسب بين العددين -27 , -3

إذا كان  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$  ,  $k$  عدد ثابت لا يساوي الصفر وكان :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$$

فإن :  $a = dk^3$  ,  $b = dk^2$  ,  $c = dk$

**مثال (10)** إذا كان :  $a, b, c$  في تناسب متسلسل أثبت أن :  $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$



تحقق من فهمك (10)

إذا كان :  $a, b, c$  في تناسب متسلسل أثبت أن :  $\frac{a+3b}{b+3c} = \frac{a-2b}{b-2c}$   
حيث المقام  $\neq$  صفر

مثال (11) إذا كان :  $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a+2b}{b+2c}$  أثبت أن :  $b$  وسط متناسب بين  $a, c$

تحقق من فهمك (11)

إذا كان :  $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$  أثبت أن  $b$  وسط بين  $a, c$

تعميم: الكميات :  $a, b, c, d, \dots$  في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان :  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$



## البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-4) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$  فإن  $ab = 3 \times 4$

(a) (b)

(2) إذا كان  $\frac{x}{3} = \frac{14}{23}$  فإن  $x = \frac{23}{42}$

(a) (b)

(3) إذا كان  $\frac{x-7}{7} = \frac{1}{8}$  فإن  $x = \frac{63}{8}$

(a) (b)

(4) زوج النسب التالي:  $\frac{9}{12} = \frac{4}{5}$  لا يكون تناسباً

■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) إذا كانت  $a, 3x, 2b, 4x$  في تناسب فإن  $\frac{a}{b}$  تساوي :

(a)  $\frac{3}{2}$

(b)  $\frac{2}{3}$

(c)  $\frac{4}{3}$

(d)  $\frac{3}{4}$

(a)  $7x$

(b)  $8x$

(c)  $2x$

(d)  $10x$

(2) إذا كان  $\frac{x}{y} = 7$  فإن  $x + 7y$  تساوي :



(3) إذا كان  $2x - 5y = 0$  فإن  $\frac{x}{y}$  تساوي:

(a)  $\frac{5}{2}$

(b)  $\frac{2}{5}$

(c)  $\frac{3}{2}$

(d)  $\frac{2}{3}$

.....

.....

(4) إذا كان  $\frac{x}{2y} = \frac{3}{5}$  فإن  $\frac{x+2y}{2x-y}$  تساوي:

(a)  $\frac{15}{9}$

(b)  $\frac{16}{7}$

(c)  $\frac{7}{16}$

(d)  $\frac{9}{15}$

.....

.....

(5) إذا كان  $20, x, 32$  في تناسب متسلسل فإن  $x$  تساوي:

(a)  $\pm 2\sqrt{10}$

(b)  $\pm 4\sqrt{10}$

(c)  $\pm 8\sqrt{10}$

(d)  $\pm \frac{1}{8\sqrt{10}}$

.....

.....



## تشابه المضلعات

2-2

**تعميم (1):** يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) انهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معا :

1. قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .
  2. أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .
- «والعكس صحيح»

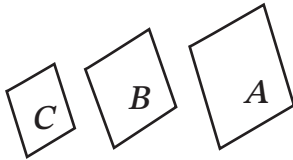
وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه** ، ويستخدم الرمز  $(\sim)$  للتعبير عن تشابه المضلعين .

**تعميم (2):** المضلعان المتطابقان متشابهان.

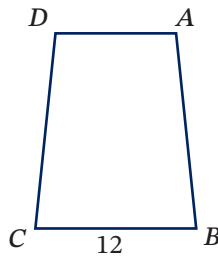
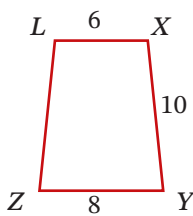
**ملحوظة:** يراعى ترتيب كتابة الرؤوس المتناظرة للأشكال الهندسية المتشابهة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة .

**تعميم (3):**

إذا كان المضلع  $A$  يشابه المضلع  $B$  ، وكان المضلع  $B$  يشابه المضلع  $C$  فإن المضلع  $A$  يشابه المضلع  $C$   
أي أنه : إذا كان  $A \sim B, B \sim C$  فإن  $A \sim C$



المضلعات المتشابهة يكون لها نفس عدد الأضلاع وليس بالضرورة أن يكون لها نفس القياس بالأطوال .



في الشكل المقابل :  
إذا كان:  $XYZL \sim ABCD$   
أوجد :  $AB, DA$

**مثال (1)**





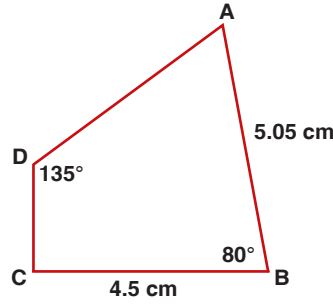
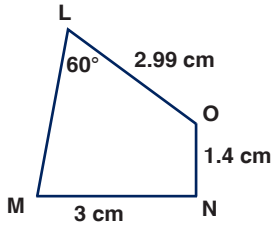
(1) تحقق من فهمك

في الشكل المقابل :

المضلعان  $LMNO$  ,  $ABCD$  متشابهان

أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال

الأضلاع المجهولة في كلا من المضلعين



## نظرية

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي  $\frac{a}{b}$  فإن :1 . النسبة بين محيطي الشكلين  $= \frac{a}{b}$  و هي نسبة التشابه2 . النسبة بين مساحتي الشكلين  $= \left(\frac{a}{b}\right)^2$  و هي مربع نسبة التشابهإذا كان المضلع  $A$  يشابه المضلع  $B$  (كانت  $k$  نسبة تشابه المضلع  $A$  : المضلع  $B$ ) :(1)  $k > 1$  فإن المضلع  $A$  هو تكبير للمضلع  $B$  وتسمى  $K$  معامل التكبير(2)  $0 < k < 1$  فإن المضلع  $A$  هو تصغير للمضلع  $B$  وتسمى  $K$  معامل التصغير(3)  $k = 1$  فإن المضلع  $A$  يطابق المضلع  $B$ 

مثال (2) إذا كانت نسبة التشابه لمضلعين متشابهين تساوي  $\frac{5}{6}$  ، وكان محيط المضلع الأصغر يساوي  $14.5 \text{ cm}$  ، أوجد محيط المضلع الأكبر.

تحقق من فهمك (2)

لدينا شكلان رباعيان متشابهان ونسبة التشابه بينهما  $\frac{5}{4}$  ، فإذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر هي  $30 \text{ cm}^2$  فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر ؟



## البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-3) ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة أو (b) إذا كانت العبارة خاطئة :

(a) (b)

(1) كل مضلعين متطابقين هما مضلعان متشابهان .

(a) (b)

(2) كل مضلعين متشابهين هما مضلعان متطابقان .

(a) (b)

(3) إذا تساوت الزوايا المتناظرة في مضلعين فإن المضلعين متشابهان .

■ في البنود من (1-6) ظل دائرة الإجابة الصحيحة.

(2) المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كانت نسبة التشابه  $x$  ، فإن  $x$  تساوي:

(a)  $x = 1$

(b)  $x > 1$

(c)  $0 < x < 1$

(d)  $x = \frac{1}{2}$

(3) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما 36:25 ، فإن النسبة بين طولي ضلعي متناظرين فيهما تساوي:

(a) 6 : 5

(b) 5 : 6

(c) 36 : 25

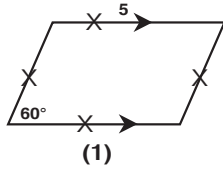
(d) 4 : 5



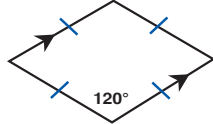
(4) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين 16 : 25 طوليهما ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

- (a) 2 : 5 (b) 4 : 5  
(c) 16 : 25 (d) 16 : 41

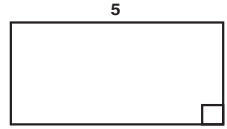
(5) أي من المضلعين التاليين متشابهان ؟



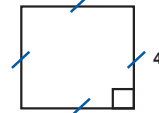
(1)



(2)



(3)



(4)

- (a) المضلعان (1), (2) (b) المضلعان (1), (3)  
(c) المضلعان (3), (4) (d) المضلعان (2), (4)

(6) إذا كان :  $\Delta ABC \sim \Delta LMN$  ,  $AB=3cm$  ,  $LM=6cm$  ,  $MN=8cm$  فإن  $BC$  تساوي:

- (a) 4 cm (b) 3 cm  
(c) 2 cm (d) 1.5 cm



## تشابه المثلثات

2-3

من خواص التكبير أنه يحافظ على قياسات الزوايا :

(1) قياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية

من خواص التكبير أنه يحافظ على تناسب أطوال الأضلاع :

$$\therefore \frac{AB}{LM} = \frac{AC}{LN} = \frac{BC}{MN} = \frac{2}{1} \quad (\text{معامل التكبير})$$

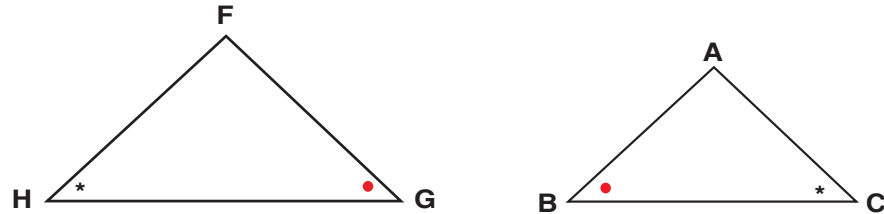
(2) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

(1، 2) هذان الشرطان أساسيان لتشابه أي مضلعين.

ونكتفي بشرط واحد لإثبات تشابه مثلثين حيث إن تشابه المثلثات يعتبر حالة خاصة من تشابه المضلعات .

نظرية (1)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.



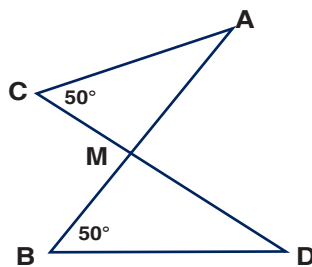
$$m(\hat{H}) = m(\hat{C})$$

$$m(\hat{G}) = m(\hat{B})$$

$$\Delta FGH \sim \Delta ABC$$

وينتج من التشابه أن :

$$\frac{FG}{AB} = \frac{GH}{BC} = \frac{FH}{AC}$$



في الشكل المقابل :

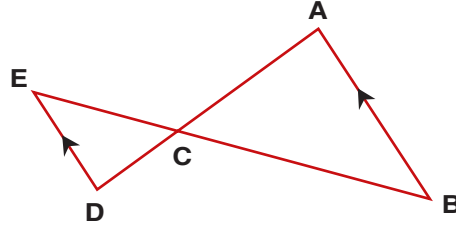
$$m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 50^\circ$$

مثال (1)

أثبت أن:  $\Delta DBM \sim \Delta ACM$



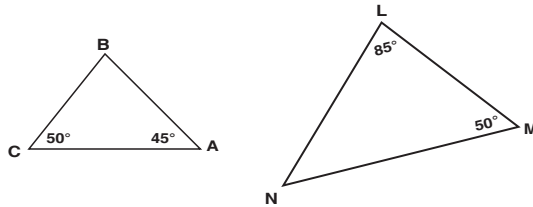
تحقق من فهمك (1)



في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين  $DEC$  ,  $ABC$   $\overline{DE} // \overline{BA}$ 

متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه



في الشكل المقابل :

$$m(\hat{A})=45^\circ, m(\hat{C})=50^\circ$$

$$m(\hat{L})=85^\circ, m(\hat{M})=50^\circ$$

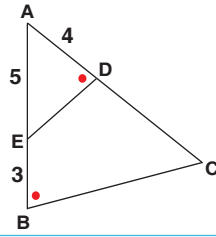
أثبت أن:  $\Delta ABC \sim \Delta NLM$ 

مثال (2)

تحقق من فهمك (2)

المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $A$  فيه  $m(\hat{B}) = 55^\circ$  ، والمثلث  $NLM$  قائم الزاوية في  $L$  فيه  $m(\hat{M}) = 35^\circ$  ، أثبت أن المثلثين متشابهان .

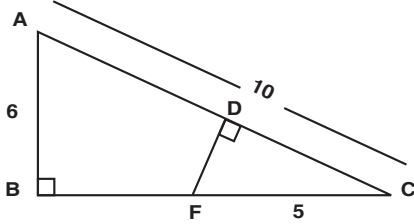




مثال (3) في الشكل المقابل :

1. أثبت أن:  $\Delta ACB \sim \Delta AED$

2. أوجد طول  $\overline{DC}$



تحقق من فهمك (3)

في الشكل المقابل :

(1) أثبت أن المثلثين  $ABC$ ,  $FDC$  متشابهان

(2) أوجد طول  $\overline{FD}$



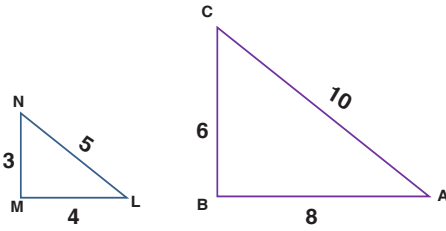
## نظرية (2)

يتشابه المثلثان إذا تناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

## مثال (4)

في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين  $ABC, LMN$  متشابهان.



الحل:  $\Delta ABC, \Delta LMN$  وفيهما :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \longrightarrow (1)$$

$$\frac{LN}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \longrightarrow (2)$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \longrightarrow (3)$$

من 1، 2، 3 ينتج أن :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

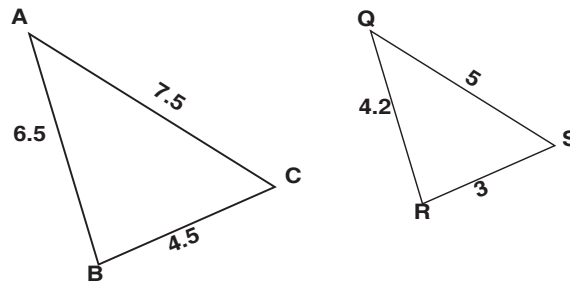
$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta NLM$$

## تحقق من فهمك (4)

في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين

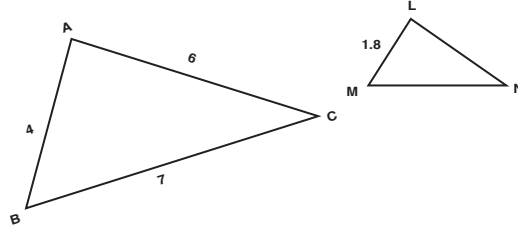
$ABC, QRS$  متشابهان.







تحقق من فهمك (4)

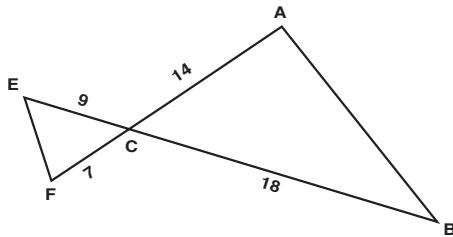


b في الشكل المقابل :

المثلثان  $ABC, LMN$  متشابهان.أوجد طول كل من  $\overline{MN}$ ,  $\overline{LN}$ 

نظرية (3)

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طول الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين .

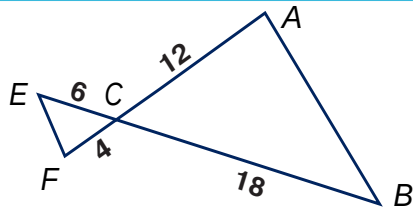


في الشكل المقابل :

مثال (5) أثبت أن المثلثين  $FEC, ABC$  متشابهان.

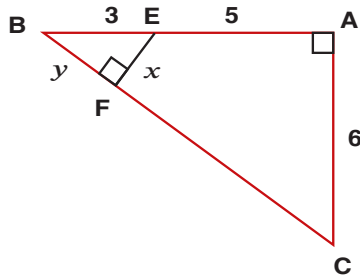
ثم اكتب عبارة التشابه .





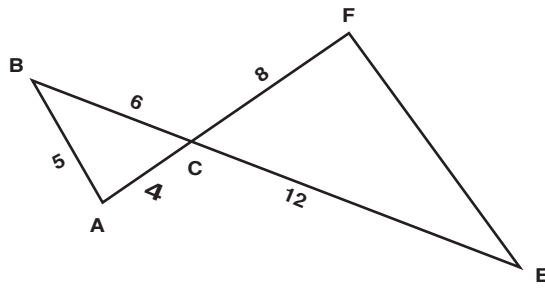
تحقق من فهمك (5)

في الشكل المقابل :  
أثبت أن المثلثين متشابهان .



مثال (6) في الشكل المقابل :  
أثبت أن المثلثين  $BAC$  ,  $BFE$  متشابهان .  
ثم أوجد كلا من  $x, y$





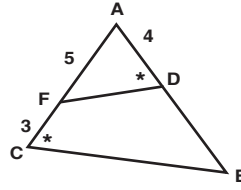
تحقق من فهمك (6)

في الشكل المرسوم :

a أثبت أن  $\Delta FEC \sim \Delta ABC$ b أوجد  $\overline{EF}$ 

## البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:



(1) في الشكل المقابل:

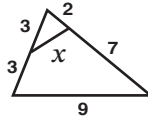
طول  $\overline{BD}$  يساوي 6

(a) (b)

(2) في الشكل المقابل:

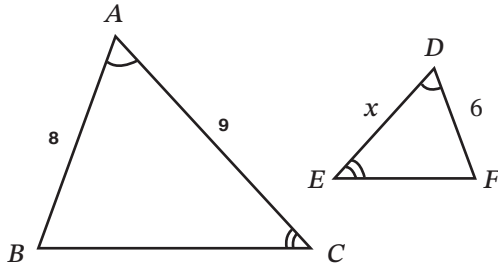
$x$  يساوي 2

(a) (b)



■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) في الشكل المرسوم قيمة  $x$  بوحدات الطول تساوي:



(a) 6

(b)  $5\frac{1}{3}$

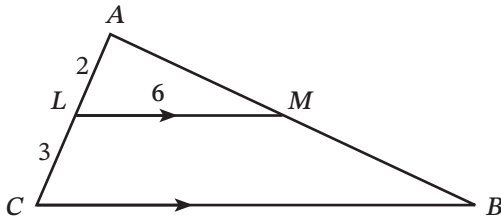
(c) 7

(d) 6.75

(2) في الشكل المقابل:

$\overline{LM} \parallel \overline{BC}$ ,  $AL=2cm$ ,  $LC=3cm$

$LM=6cm$ , فإن  $BC$  تساوي:



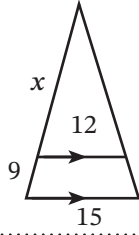
(a) 9 cm

(b) 12 cm

(c) 15 cm

(d) 10 cm





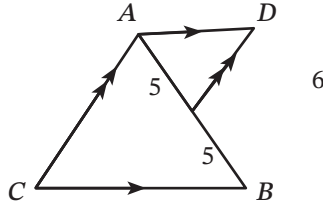
(3) في الشكل المقابل : قيمة  $x$  تساوي :

(a) 12

(b) 24

(c) 36

(d) 48



(4) في الشكل المقابل : طول  $\overline{AC}$  تساوي :

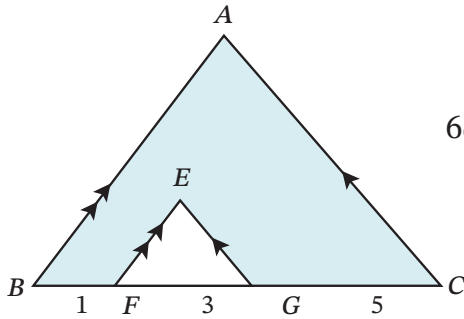
(a) 6

(b) 9

(c) 12

(d) 15

### مهارات تفكير عليا



■ اختر الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث  $EFG$  تساوي  $6\text{cm}^2$

فإن مساحة المنطقة المظللة بالشكل تساوي بالسنتيمتر المربع

(a) 27

(b) 36

(c) 48

(d) 54



## 2-4 التشابه في المثلثات القائمة الزاوية

## نظرية

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي .

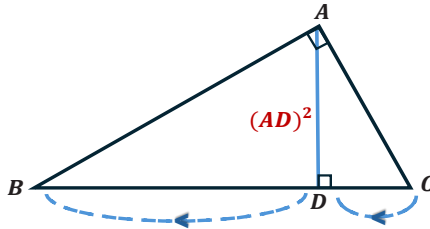
## «نظرية إقليدس»

نتيجة (1) :

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

أي أن في المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $A$  إذا كان  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  فإن :  $(AD)^2 = DC \cdot BD$

يمكن تمثيل هذه العلاقة بالشكل المجاور

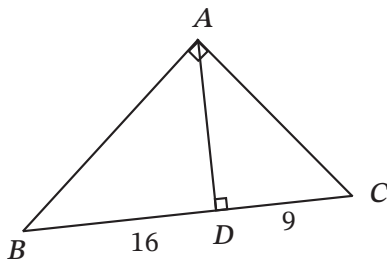
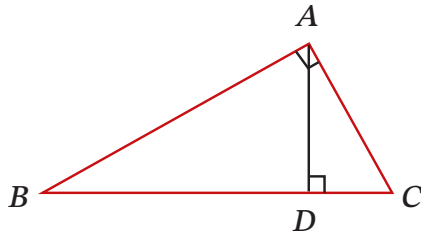


## «نظرية إقليدس»

نتيجة (2) :

في المثلث القائم  $ABC$  إذا كان  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  فإن :

- ①  $(AB)^2 = BD \cdot BC$
- ②  $(AC)^2 = CD \cdot CB$
- ③  $(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$



في الشكل المرسوم :

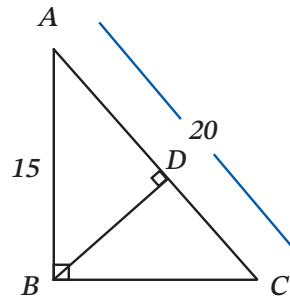
$ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  ،

إذا كان  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  ،

أوجد طول كل من :  $\overline{AD}$  ،  $\overline{AC}$

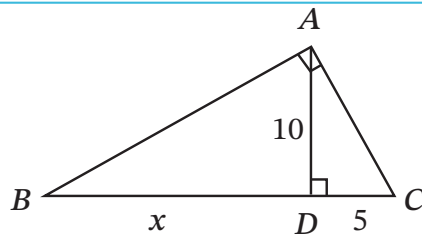
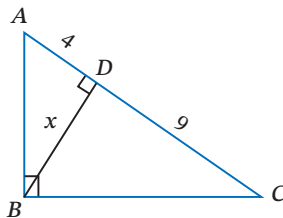
مثال (1)





تحقق من فهمك (1)

في الشكل المرسوم :

a أوجد طول  $\overline{BC}$ b أوجد طول  $\overline{CD}$ مثال (2) في الشكل المرسوم : أوجد قيمة  $x$ 

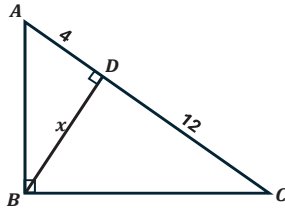
تحقق من فهمك (2)

في الشكل المرسوم : أوجد قيمة  $x$ 

## البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-5) ظل دائرة الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم قيمة  $x$  تساوي :



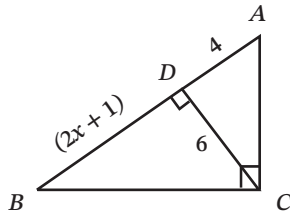
(a)  $4\sqrt{3}$

(b)  $3\sqrt{4}$

(c) 48

(d) 16

(2) في الشكل المرسوم قيمة  $x$  تساوي :



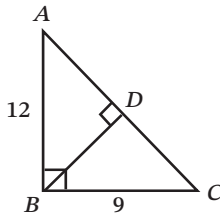
(a) 6

(b) 4.8

(c) 8

(d) 4

(3) في الشكل المرسوم طول  $\overline{BD}$  تساوي :



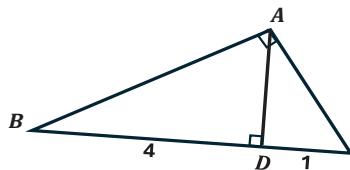
(a) 9.5

(b) 7.2

(c) 7.5

(d) 8

(4) في الشكل المرسوم طول  $\overline{AD}$  تساوي :



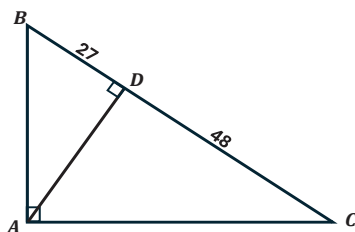
(a) 2

(b) 4

(c) 5

(d) 16

(5) في الشكل المرسوم طول  $\overline{AD}$  تساوي :



(a) 24

(b) 12

(c) 36

(d) 75

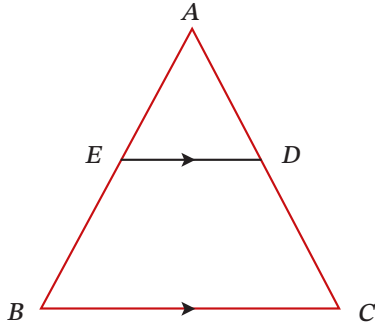




## 2-5 التناسبات والمثلثات المتشابهة

## نظرية (1) « نظرية المستقيم الموازي »

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين ، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة .



أي أن في المثلث  $ABC$

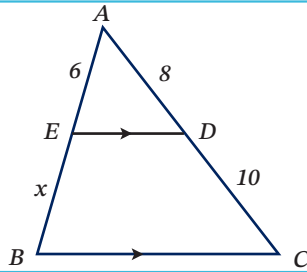
$$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$

فإن :

عكس النظرية صحيح

أي أنه إذا كان :  $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$  فإن :  $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$



مثال (1) في الشكل المقابل : أوجد قيمة  $x$

الحل:

وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب :

$$\frac{6}{x} = \frac{8}{10}$$

الأجزاء المتناسبة

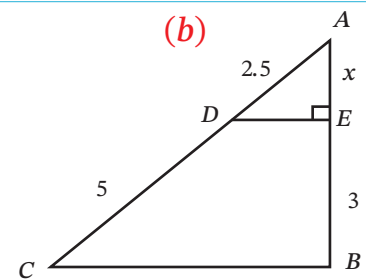
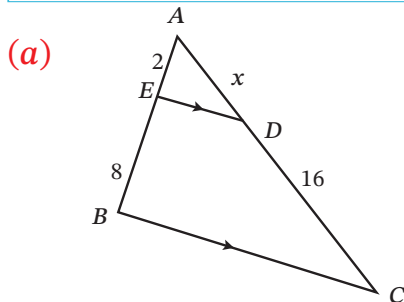
$$8x = 60$$

باستخدام الضرب التقاطعي والقسمة على 8

$$x = 7.5$$

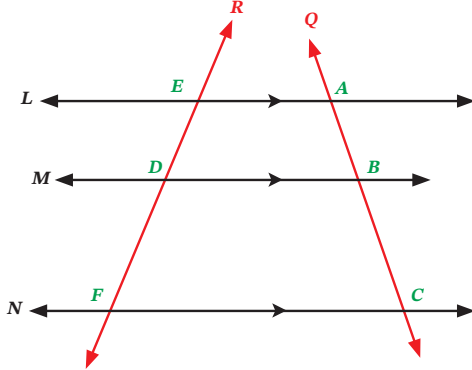
تحقق من فهمك (1)

في الأشكال التالية : أوجد قيمة  $x$



## نظرية (2) « نظرية طاليس »

إذا قطع مستقيمان ثلاث مستقيمتين متوازيتين أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر .



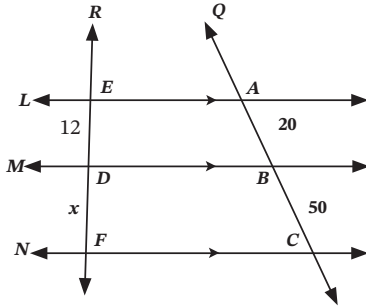
أي أن إذا كان

$$\vec{N} // \vec{M} // \vec{L}$$

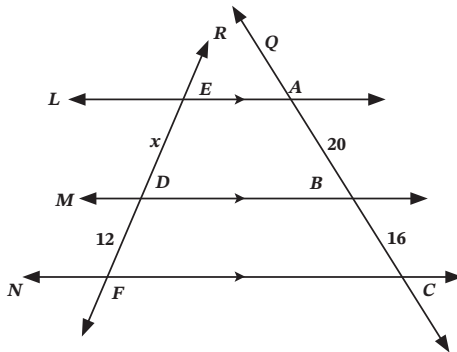
تقطع  $\vec{Q}, \vec{R}$  كلاً من

$$\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC} \quad \text{فإن :}$$



مثال (2) في الشكل المقابل : أوجد قيمة  $x$

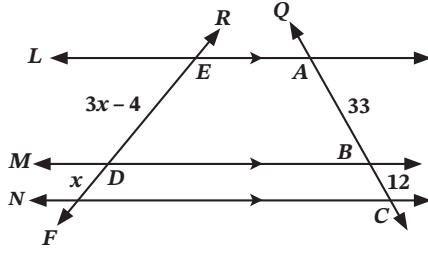


تحقق من فهمك (2)

في الأشكال المقابل : أوجد قيمة  $x$

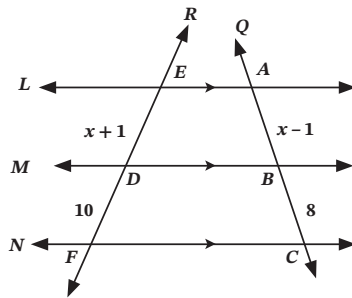


مثال (3) في الشكل المقابل : أوجد قيمة  $x$



تحقق من فهمك (3)

في الأشكال المرسوم : أوجد قيمة  $x$



ملحوظة:

في الشكل المرسوم نجد أن :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

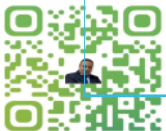
$$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DF} = \frac{1}{2}$$

أي أن :

ولكن المستقيمات  $L, M, N$  ليست متوازية

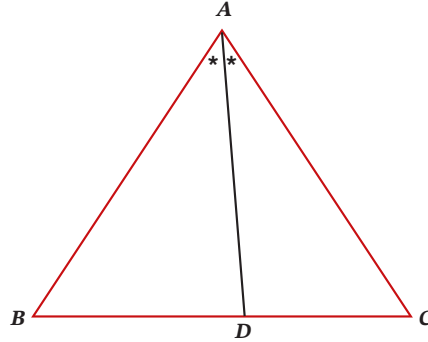
إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة من أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس بالضرورة أن تكون المستقيمات متوازية .

∴ عكس نظرية طاليس ليس بالضرورة صحيح



## نظرية (3) « نظرية منصف الزاوية في مثلث »

إذا نصفت زاوية رأس مثلث الداخلة أو الزاوية الخارجة عند هذا الرأس، قسم المُنَصِّف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

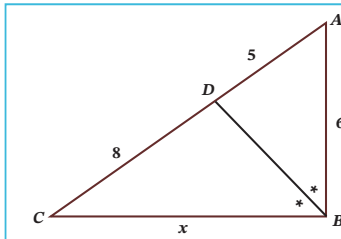


أي أن

إذا كان  $\overrightarrow{AD}$  مُنصف  $(\hat{A})$ 

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{فإن :}$$

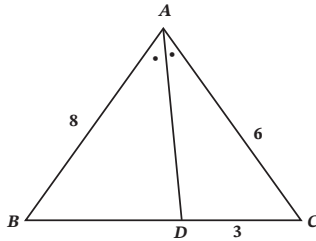
$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \quad \text{أو:}$$

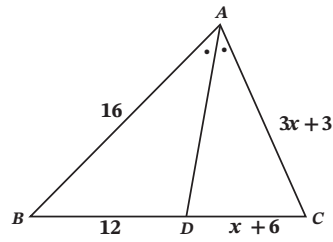
أوجد قيمة  $x$  في الشكل المبين حيث

مثال (4)

 $\overrightarrow{BD}$  يُنصف  $\hat{A}$ 

تحقق من فهمك (4)

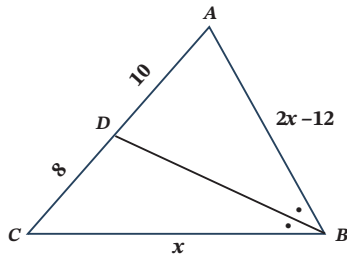
المثلث فيه  $AC = 6$ ، $AB = 8$ ،  $\overrightarrow{AD}$  يُنصف  $(\hat{A})$ ويقطع  $\overline{BC}$  في  $D$  إذا كان  $BD = 3$ أوجد  $CD$ 



أوجد قيمة  $x$  في الشكل المبين حيث

$\overrightarrow{AD}$  يُنصّف  $(\hat{CAB})$

مثال (5)



تحقق من فهمك (5)

$ABC$  المثلث فيه  $AD = 10$  ،  $DC = 8$

$\overline{BD}$  ينصف الزاوية  $(\hat{ABC})$  ويقطع  $\overline{AC}$

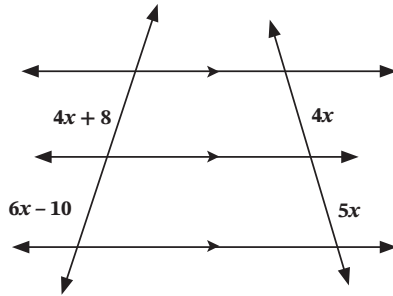
في  $D$  ، أوجد  $x$



## البنود الموضوعية:

■ في البنود (1-2) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم قيمة  $x$  تساوي :



(a) 10

(b) 20

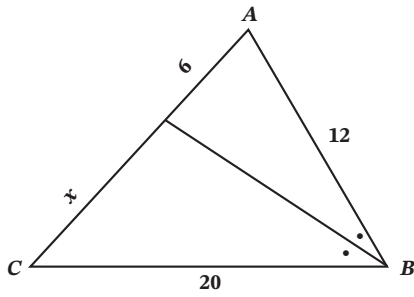
(c) 8

(d) 5

.....

.....

(2) في الشكل المرسوم قيمة  $x$  تساوي :



(a) 8

(b) 10

(c) 12

(d) 20

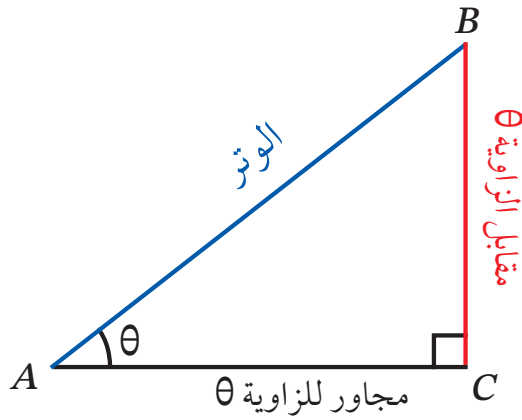
.....

.....



## 3-1 النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها

في أي مثلث قائم يكون :



$$\textcircled{1} \sin \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB}$$

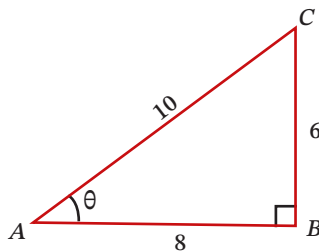
$$\textcircled{2} \cos \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\textcircled{3} \tan \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AC}$$

- هذه العلاقات الثلاث تسمى النسب المثلثية الأساسية للزاوية  $\theta$
- هذه النسب تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وقياس الزاويتين الحادتين فيه .



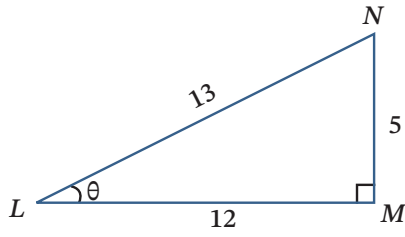
في الشكل المقابل :

ABC مثلث قائم الزاوية في B

أوجد :  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$

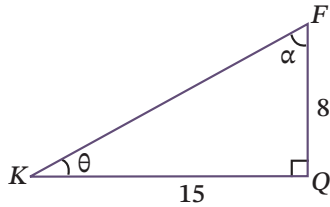
مثال (1)





تحقق من فهمك (1)

في الشكل المقابل :

مثلث قائم الزاوية في  $M$ أوجد :  $\tan \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ 

في الشكل المرسوم :

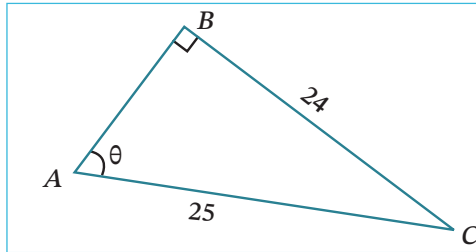
المثلث  $FQK$  قائم الزاوية في  $Q$  ،

أوجد كلاً من :

مثال (2)

1  $KF$  2  $\cos \theta$  3  $\sin \alpha$ 4  $\sin \theta$  5  $\cos \alpha$ 6 ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين  $\alpha$  ،  $\theta$ 





تحقق من فهمك (2)  
في الشكل المقابل : أوجد:  
 $\tan \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ ,  $\overline{AB}$  طول

### مقلوبات النسب المثلثية الأساسية

① مقلوب  $\sin \theta$  هو  $\frac{1}{\sin \theta}$  ويسمى ( $\csc \theta$ ) ويرمز له بالرمز  $\csc \theta$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} : \sin \theta \neq 0 \Rightarrow \csc \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}$$

② مقلوب  $\cos \theta$  هو  $\frac{1}{\cos \theta}$  ويسمى ( $\sec \theta$ ) ويرمز له بالرمز  $\sec \theta$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} : \cos \theta \neq 0 \Rightarrow \sec \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}$$

③ مقلوب  $\tan \theta$  هو  $\frac{1}{\tan \theta}$  ويسمى ( $\cot \theta$ ) ويرمز له بالرمز  $\cot \theta$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} : \tan \theta \neq 0 \Rightarrow \cot \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}$$

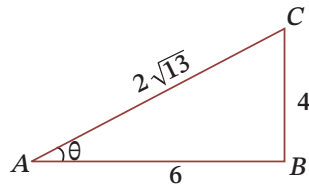
لاحظ أن: حاصل ضرب النسبة المثلثية الأساسية في مقلوبها يساوي 1

$$\textcircled{1} (\sin \theta)(\csc \theta) = 1 : \sin \theta \neq 0$$

$$\textcircled{2} (\cos \theta)(\sec \theta) = 1 : \cos \theta \neq 0$$

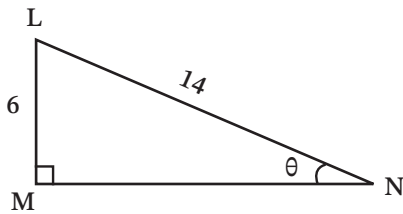
$$\textcircled{3} (\tan \theta)(\cot \theta) = 1 : \tan \theta \neq 0$$





في الشكل المرسوم :

- مثال (3) ① أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $B$   
 ② أوجد :  $\csc \theta$ ,  $\sec \theta$ ,  $\cot \theta$



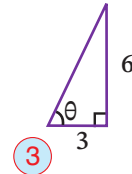
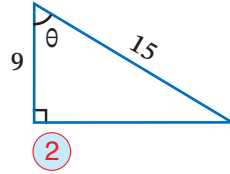
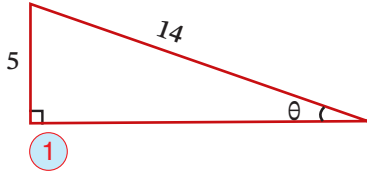
تحقق من فهمك (3)

في الشكل المقابل أوجد :

- ① طول  $\overline{MN}$   $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  ②  
 ③  $\sec \theta$ ,  $\csc \theta$ ,  $\cot \theta$



## إيجاد قياس زاوية باستخدام النسب المثلثية

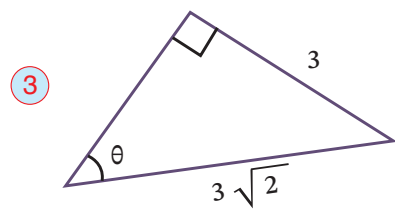
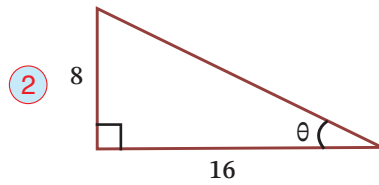
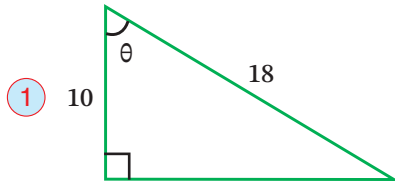
أوجد قياس الزاوية  $\theta$  في كل مما يلي :

مثال (4)

الحل:



تحقق من فهمك (4)

أوجد قياس الزاوية  $\theta$  في كل مما يلي :

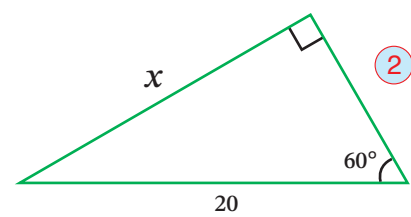
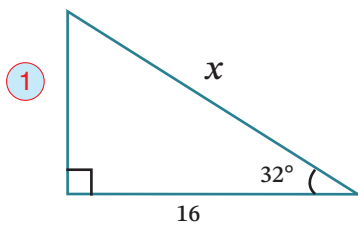
## إيجاد طول ضلع في مثلث قائم باستخدام النسب المثلثية

مثال (5) (1) في الشكل المقابل : أوجد قيمة  $x$

(2) في الشكل المقابل : أوجد قيمة  $x$

تحقق من فهمك (5)

استخدم النسب المثلثية في إيجاد قيمة  $x$  فيما يلي :

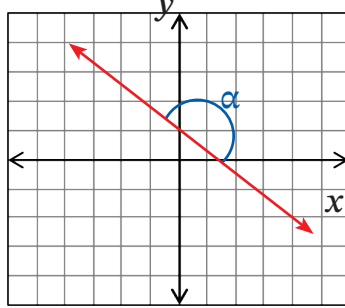


$$m = \tan \theta$$

أي إن ميل المستقيم يساوي ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

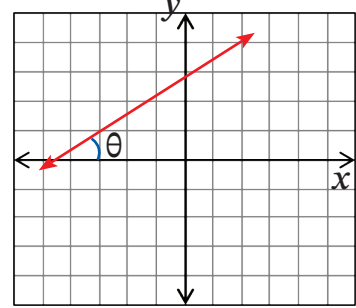
### زاوية منفرجة ( ميل سالب )

إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم يكون ( سالبًا ).



### زاوية حادة ( ميل موجب )

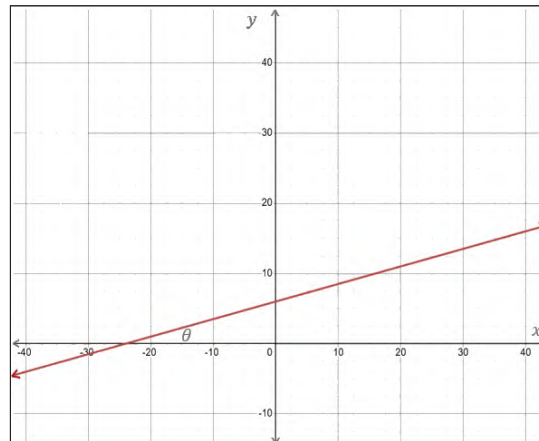
إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم يكون ( موجبًا ).



أحسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم  $L : y = \frac{1}{4}x + 6$  مع الاتجاه الموجب للمحور السيني .

مثال (6)

الحل:



تحقق من فهمك (6)

أحسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم  $L : y = x + 3$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .



## النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

النسب المثلثية للزاوية  $45^\circ$ 

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \csc(45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec(45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(45^\circ) = 1 \Rightarrow \cot(45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

النسب المثلثية للزاوية  $60^\circ$ 

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \csc(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(60^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow \cot(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

النسب المثلثية للزاوية  $30^\circ$ 

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \csc(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

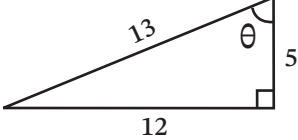
$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$



## البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-8) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

- (1) في المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $B$  يكون  $\sec(\hat{A}) \cos(\hat{A}) = 1$  حيث  $\cos(\hat{A}) \neq 0$  (a) (b)  
السبب: مقلوب دالة جيب التمام:  $\sec(\hat{C}) = \frac{1}{\cos(\hat{C})}$ ، وحاصل ضرب أي نسبة في مقلوبها يساوي 1.

- (2) في الشكل المرسوم :  
  
 (a) (b)  $\sin(90^\circ - \theta)$  يساوي  $\frac{5}{13}$

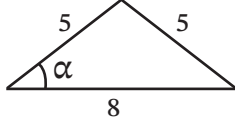
- السبب: من المثلث القائم: المجاور للزاوية  $\theta$  هو 12، والوتر 13،  
 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta = \frac{12}{13} \neq \frac{5}{13}$

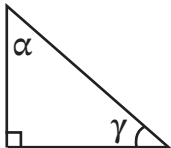
- (3) في المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $B$  يكون  $\sin(\hat{C}) \cdot \cot(\hat{C}) = \cos(\hat{C})$  حيث  $\sin(\hat{C}) \neq 0$  (a) (b)  
السبب:  $\cot(\hat{C}) = \frac{\cos(\hat{C})}{\sin(\hat{C})}$  وبالتالي  $\sin(\hat{C}) \cdot \frac{\cos(\hat{C})}{\sin(\hat{C})} = \cos(\hat{C})$

- (4) في المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $B$  يكون  $AC = (AB) \cos(\hat{C})$  (a) (b)  
السبب: في المثلث القائم في  $B$ ، الوتر هو  $AC$  والمقابل لـ  $C$  هو  $AB$ ، فالصحيح أن  
 $\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \sin(\hat{C})$

- (5) إذا كان  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $B$  فإن  $\cos(\hat{C}) \cdot \tan(\hat{C}) = \sin(\hat{C})$  حيث  $\cos(\hat{C}) \neq 0$  (a) (b)  
السبب:  $\tan(\hat{C}) = \frac{\sin(\hat{C})}{\cos(\hat{C})}$  وبالتالي  $\cos(\hat{C}) \cdot \frac{\sin(\hat{C})}{\cos(\hat{C})} = \sin(\hat{C})$

- (6) قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم  $y - x = 6$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي  $45^\circ$  (a) (b)  
السبب: بوضع المعادلة على الصورة  $y = x + 6$  نجد أن الميل  $m = 1$ ، ومنها  
 $\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$

- (7) في المثلث المرسوم :  
  
 (a) (b)  $\sin(\alpha) = \frac{5}{8}$

- السبب: المثلث ليس قائم الزاوية  
 (8) في المثلث المرسوم :  
  
 (a) (b)  $\sin(\gamma) = \cos(\alpha)$

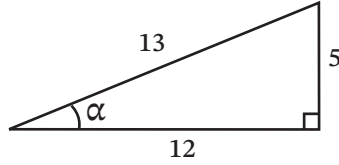
- السبب: في المثلث القائم الزاوية الحادتان متتامتان ( $\alpha + \gamma = 90^\circ$ )، وبالتالي  
 $\sin(\gamma) = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$





■ في البنود من (1-6) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

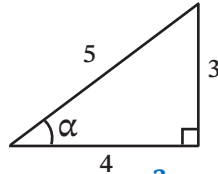
(1) في الشكل المرسوم  $\sin(\alpha)$  تساوي :



- (a)  $\frac{5}{12}$  (b)  $\frac{5}{13}$   
(c)  $\frac{12}{13}$  (d)  $\frac{12}{5}$

السبب:  $\sin(\alpha) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{13}$

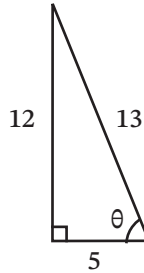
(2) في الشكل المرسوم قيمة  $\frac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$  تساوي :



- (a) 7 (b) -7  
(c) 2 (d) -1

السبب: المقابل لـ  $\alpha$  هو 3 والمجاور 4 والوتر 5 :  $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$  ،  $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$

$$\frac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{7}{5}}{-\frac{1}{5}} = -7$$



(3) في المثلث المرسوم :  
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$  يساوي :

- (a) -1 (b) 0  
(c) 1 (d)  $\frac{17}{13}$

السبب: متطابقة فيثاغورس المثلثية الأساسية تنص على أن  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

دائماً لأي زاوية.

(4) قيمة  $\sin(30^\circ) \cos(60^\circ) + \cos(30^\circ) \sin(60^\circ)$  تساوي :

- (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d)  $\frac{1}{2}$

السبب:  $\sin(30^\circ) \cos(60^\circ) + \cos(30^\circ) \sin(60^\circ)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

(5) قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم  $L: y = 5 + \sqrt{3}x$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي :

- (a)  $30^\circ$  (b)  $60^\circ$  (c)  $45^\circ$  (d)  $135^\circ$

السبب: الميل  $m = \sqrt{3}$  ،  $\tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

(6) إذا كان  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $B$  فإن قيمة  $\cos(90^\circ - A)$  هي :

- (a)  $\frac{BC}{AC}$  (b)  $\frac{BC}{AB}$  (c)  $\frac{AB}{BC}$  (d)  $\frac{AB}{AC}$

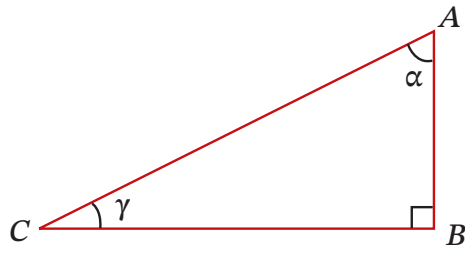
السبب:  $\cos(90^\circ - A) = \sin(A) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$



## حل المثلث القائم

3-2

## حل المثلث القائم الزاوية

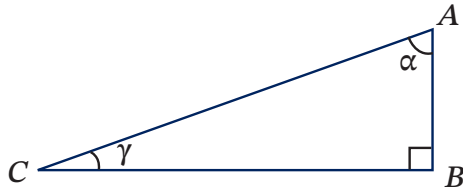
حل المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $B$ إذا علم أن :  $AB=3cm$  ,  $BC=4cm$ 

مثال (1)

الحل:

تحقق من فهمك (1)

حل المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $C$  حيث :  $AC=12cm$  ,  $BC=15cm$ 



حل المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $B$   
إذا علم أن :  $AB=8cm$ ,  $\alpha=71^\circ$

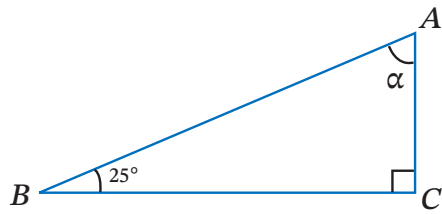
مثال (2)

الحل:

تحقق من فهمك (2)

حل المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $B$  حيث :  $m(\hat{A})=42^\circ$ ,  $AB=12cm$





حل المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $C$   
إذا علم أن:  $BA=40cm$ ,  $m(\hat{B})=25^\circ$

مثال (3)

الحل:

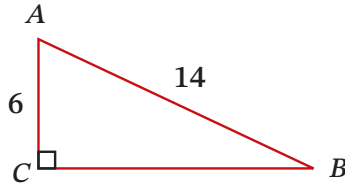
تحقق من فهمك (3)

حل المثلث  $ABC$  القائم الزاوية في  $C$  إذا علم أن:  $AC=20cm$ ,  $m(\hat{B})=75^\circ$



## البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-5) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

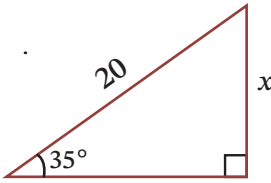


(1) في الشكل المرسوم  $m(\hat{B})$  تساوي تقريباً:

- (a)  $31^\circ$  (b)  $20^\circ$   
(c)  $27^\circ$  (d)  $25^\circ$

السبب:  $\sin(\hat{B}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$  ،

ومنها  $m(\hat{B}) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 25.38^\circ \approx 25^\circ$

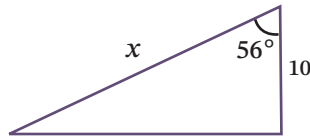


(2) في الشكل المقابل قيمة  $x$  تساوي تقريباً:

- (a) 13 (b) 11.5  
(c) 14 (d) 15

السبب: المقابل هو  $x$  والوتر هو 20:  $\sin(35^\circ) = \frac{x}{20}$

$x = 20 \cdot \sin(35^\circ) \approx 20 \times 0.5736 \approx 11.47 \approx 11.5$

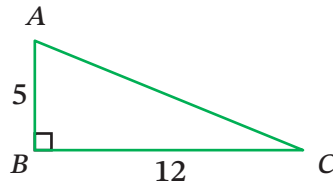


(3) في الشكل المقابل قيمة  $x$  تساوي تقريباً:

- (a) 15 (b) 16  
(c) 18 (d) 14

السبب: المجاور هو 10 والوتر هو  $x$ :  $\cos(56^\circ) = \frac{10}{x}$

$x = \frac{10}{\cos(56^\circ)} \approx \frac{10}{0.5592} \approx 17.88 \approx 18$

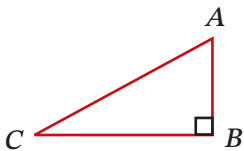


(4) في الشكل المقابل  $m(\hat{C})$  تساوي:

- (a)  $22.6^\circ$  (b)  $25^\circ$   
(c)  $32^\circ$  (d)  $26.4^\circ$

السبب: المقابل = 5 والمجاور = 12:  $\tan(\hat{C}) = \frac{5}{12}$

$m(\hat{C}) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 22.62^\circ \approx 22.6^\circ$



(5) في الشكل المقابل :

$ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $B$  ، إذا كان :

$AB = 8 \text{ cm}$  ،  $\sin(\hat{C}) = 0.4$  ، فإن  $AC$  يساوي :

- (a) 9 cm (b) 10 cm (c) 12 cm (d) 20 cm

السبب:  $\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{AC} \Rightarrow 0.4 = \frac{8}{AC} \Rightarrow AC = \frac{8}{0.4} = 20 \text{ cm}$

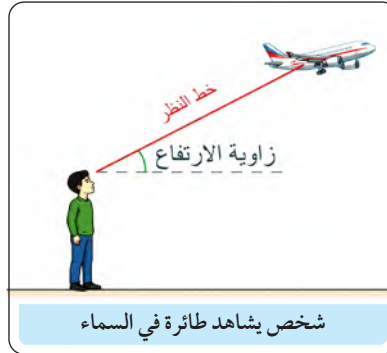


## 3-3 زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض

## زاوية الارتفاع

هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وبين خط النظر المتجه إلى الأعلى نحو الشيء المراد رصده .

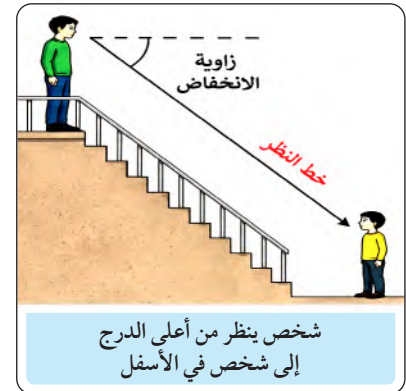
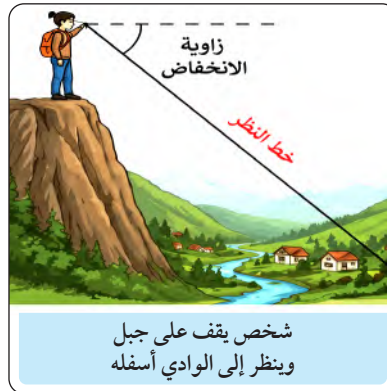
## أمثلة حياتية:

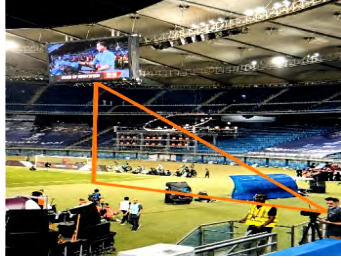


## زاوية الانخفاض

هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وبين خط النظر المتجه إلى الأسفل نحو الشيء المراد رصده .

## أمثلة حياتية:





يقف أحد المشجعين في ساحة ملعب استاد جابر الأحمد الدولي ويشاهد شاشة الملعب المعلقة ، إذا كانت المسافة الأفقية بينه وبين نقطة بُعد الشاشة عن الأرض  $30\text{ m}$  وكانت زاوية الارتفاع إلى أعلى الشاشة  $40^\circ$  . أوجد إلى أقرب متر ارتفاع الشاشة عن سطح الأرض .

مثال (1)

الحل:

تحقق من فهمك (1)

أثناء تحية العلم ينظر فهد إلى قمة سارية العلم بزاوية ارتفاع مقدارها  $85^\circ$  ، فإذا كان ارتفاع سارية العلم هي  $5\text{ m}$  كم يبلغ بعد فهد عن قاعدة السارية ؟



يقف زائر أمام مبنى المركز العلمي ، ويبعد  $25\text{ m}$  عن قاعدة هيكل "البوم" الخشبي الكبير .. إذا كان ارتفاع قمة الشراع عن الأرض هو  $20\text{ m}$  احسب قياس زاوية الارتفاع التي يشكلها نظر الزائر إلى قمة الشراع

مثال (2)

تحقق من فهمك (2)

يقف شخص على مسافة  $1000\text{ m}$  من قاعدة مبنى ارتفاعه  $300\text{ m}$  ما قياس زاوية الارتفاع التي يكونها مع قمة المبنى ؟

في محمية صباح الأحمد الطبيعية يقف موظف الرصد فوق برج مراقبة خشبي ارتفاعه  $12\text{ m}$  شاهد الموظف " أرنب عربي " يقترب من شجيرة صغيرة فوجد أن زاوية انخفاض موقع الأرنب تساوي  $40^\circ$  ، أوجد بعد الأرنب لأقرب متر عن قاعدة برج المراقبة في تلك اللحظة ؟

مثال (3)





تحقق من فهمك (3)

من أعلى برج ارتفاعه  $45m$  عن سطح الأرض رصد شخص سيارة بزاوية انخفاض  $55^\circ$  احسب المسافة بين السيارة وقاعدة البرج لأقرب متر.



رصد قارب من قمة منارة جزيرة قاروه ارتفاعها  $14 m$  ، فوجد أن قياس زاوية انخفاضه  $34^\circ 25'$  . أوجد إلى أقرب متر البعد بين القارب وقمة المنارة .

مثال (4)

تحقق من فهمك (4)

قاس بحار زاوية انخفاض سفينة من أعلى نقطة على قمة منارة في جزيرة أم المرادم ارتفاعها  $23 m$  فوجد أنها  $39^\circ$  ، أوجد بعد السفينة عن قمة المنارة لأقرب متر .



## البنود الموضوعية:

في البنود من (1-4) ظلل الإجابة الصحيحة :

(1) من نقطة على سطح الأرض تبعد  $40\text{ m}$  عن قاعدة برج قياست زاوية ارتفاع قمة برج فكانت  $63^\circ$  ، فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوي :

- (a)  $20.38\text{ m}$  (b)  $78.5\text{ m}$   
(c)  $31\text{ m}$  (d)  $36\text{ m}$

.....السبب:  $\tan(63^\circ) = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 40 \cdot \tan(63^\circ) \approx 40 \times 1.9626 \approx 78.5\text{ m}$ .....

(2) طائرة ورقية طول خيطها  $34\text{ m}$  وكانت زاوية ارتفاع الطائرة  $70^\circ$  فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر يساوي :

- (a)  $36.18\text{ m}$  (b)  $10\text{ m}$   
(c)  $28\text{ m}$  (d)  $32\text{ m}$

.....السبب: طول الخيط هو الوتر =  $34$  والارتفاع هو المقابل:  $\sin(70^\circ) = \frac{h}{34}$ .....  
..... $h = 34 \cdot \sin(70^\circ) \approx 31.95\text{ m} \approx 32\text{ m}$ .....

(3) يسير شخص في طريق منحدر وعندما قطع الشخص مسافة  $60\text{ m}$  وصل الشخص لنقطة ارتفاعها عن سطح الأرض  $6\text{ m}$  ، فإن زاوية ارتفاع ميل الطريق على سطح الأرض يساوي تقريباً :

- (a)  $5.74^\circ$  (b)  $89.43^\circ$   
(c)  $7^\circ$  (d)  $9^\circ$

.....السبب: المسافة على الطريق هي الوتر =  $60$  والارتفاع هو المقابل =  $6$  :  $\sin \theta = \frac{6}{60} = 0.1$ .....  
..... $\theta = \sin^{-1}(0.1) \approx 5.74^\circ$ .....

(4) برج طوله  $12\text{ m}$  يلقي ظلًا على الأرض طوله  $8\text{ m}$  فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ لأقرب درجة تساوي :

- (a)  $33.69^\circ$  (b)  $51^\circ$   
(c)  $48^\circ$  (d)  $56.30^\circ$

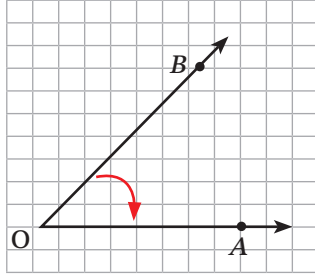
.....السبب:  $\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{12}{8} = 1.5$ .....  
..... $\theta = \tan^{-1}(1.5) \approx 56.3099^\circ \approx 56.30^\circ$ .....



## الدوال المثلثية (الدوال الدائرية)

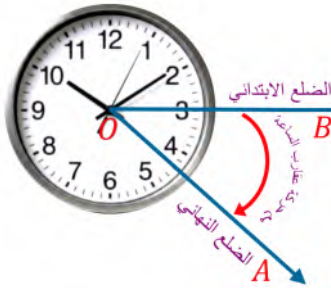
3-4

## (3-4-a) الزاوية الموجهة



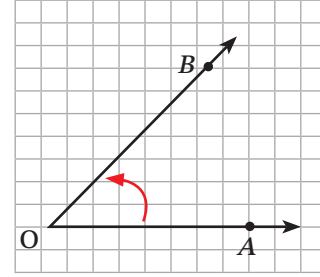
(BOA)

يمثل الزوج المرتب  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  حيث :  
العنصر الأول  $\vec{OB}$  الضلع الابتدائي للزاوية  
العنصر الثاني  $\vec{OA}$  الضلع النهائي للزاوية



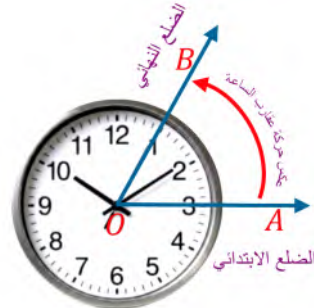
يكون قياس الزاوية الموجهة **سالبًا**  
(Negative Measure)

إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الابتدائي إلى  
الضلع النهائي **مع اتجاه عقارب الساعة**.



(AOB)

يمثل الزوج المرتب  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  حيث :  
العنصر الأول  $\vec{OA}$  الضلع الابتدائي للزاوية  
العنصر الثاني  $\vec{OB}$  الضلع النهائي للزاوية



يكون قياس الزاوية الموجهة **موجبًا**  
(Positive Measure)

إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الابتدائي إلى  
الضلع النهائي **عكس اتجاه عقارب الساعة**.

## الزاوية الموجهة

هي زاوية تتكوّن من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية يسمى الشعاع الأول بالضلع الابتدائي، ويسمى الشعاع الثاني بالضلع النهائي، ويحدد قياسها واتجاهها بالدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي.

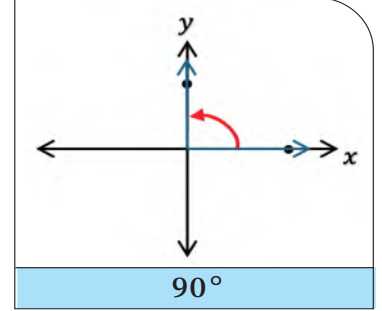
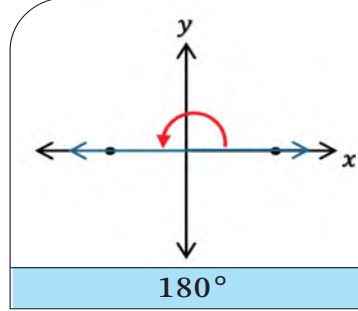
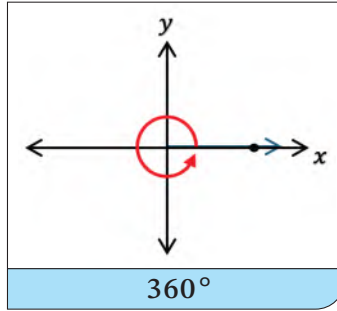
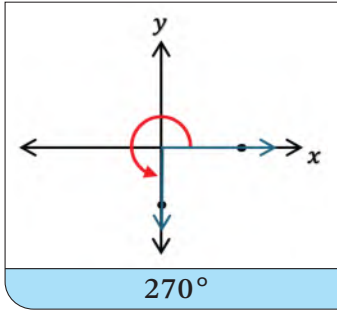
## الزاوية الموجهة في الوضع القياسي :

هي زاوية رأسها نقطة الأصل وضلعها الابتدائي منطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات .



## الزاوية الربعية

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات.



ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التالي ، ثم حدد الزوايا الربعية منها أو حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية إن أمكن :

- (a) 120°      (b) 450°      (c) -270°  
(d) 300°      (e) -150°      (f) 450°

مثال (1)

الحل:

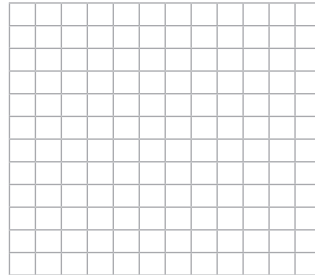
(a)

(b)

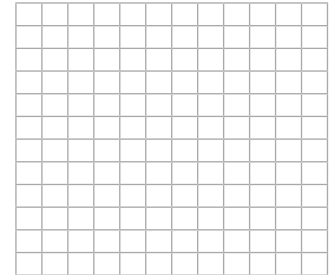
(c)



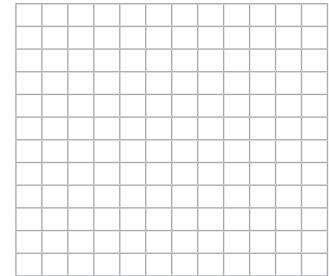
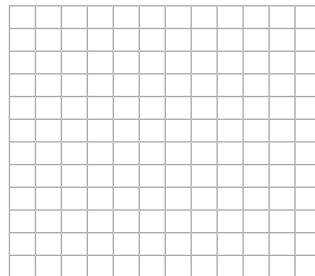
(d)



(e)

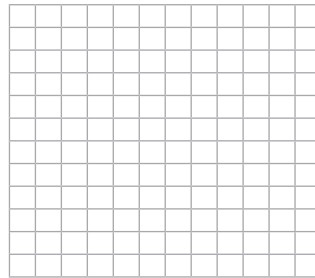
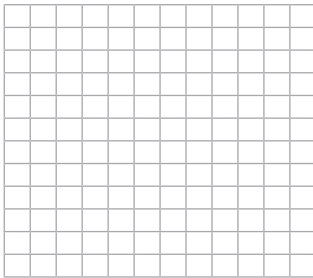


(f)



تحقق من فهمك (1)

ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التالي ، ثم حدد الزوايا الربعية منها  
أو حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية إن أمكن :

a  $135^\circ$ b  $-90^\circ$ c  $810^\circ$ d  $-70^\circ$ e  $225^\circ$ 

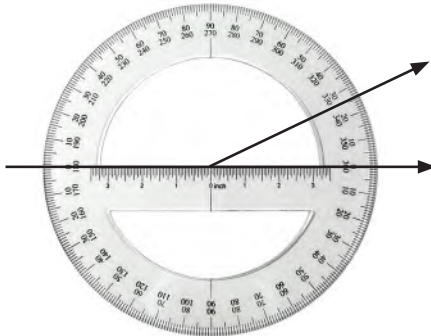
## (3-4-b) القياس الستيني - القياس الدائري

## أولاً: القياس الستيني

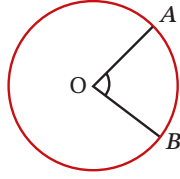
في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى 360 قسمًا متساويًا ، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا .

ويرمز لها بالرمز ( $^\circ$ )فمثلاً قياس الزاوية القائمة يساوي  $90^\circ$ وقياس الزاوية المستقيمة يساوي  $180^\circ$ 

أجزاء الدرجة :

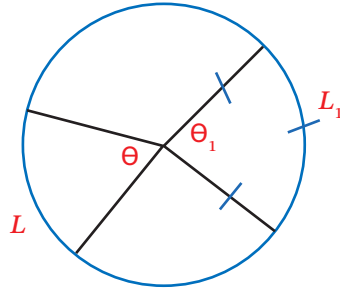
 $1^\circ$  (درجة واحدة) =  $60'$  (دقيقة) $1'$  (دقيقة واحدة) =  $60''$  (ثانية)

## الزاوية المركزية في دائرة :



هي زاوية يقع رأسها على مركز الدائرة ( O ) وضلعها يحمل نصف قطر في الدائرة في الشكل المرسوم (AÔB) تسمى زاوية مركزية.

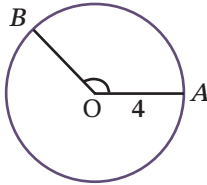
## ثانيًا : القياس الدائري « التقدير الدائري »



استنتاج العلاقة بين طول نصف قطر الدائرة و طول القوس ، الزاوية المركزية بالقياس الدائري :

$$\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{L_1}{L}$$

$$\frac{1}{\theta} = \frac{r}{L} \longrightarrow L = r \cdot \theta \longrightarrow \theta = \frac{L}{r}$$



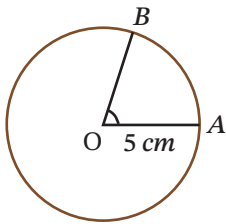
في الشكل المقابل:  
أوجد قياس الزاوية المركزية AÔB بالتقدير الدائري  
إذا كان طول القوس  $\widehat{AB}$  يساوي 8 وحدة طول وطول  
نصف القطر يساوي 4 وحدة طول .

مثال (2)

الحل:

تحقق من فهمك (2)

في الشكل المقابل :



إذا كان قياس الزاوية المركزية BOA يساوي 1.5rad

أوجد طول القوس  $\widehat{AB}$



## العلاقة بين القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية :

$$180^\circ = \pi \text{ radian}$$

بالقسمة على 180

$$1 \text{ radian} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radian}$$

بالقسمة على  $\pi$

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

ومن خواص التناسب نستطيع القول إن :

$$\frac{x^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi}$$

**مثال (3)** أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها  $120^\circ$

الحل:

تحقق من فهمك (3) أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها :

a  $60^\circ$

b  $330^\circ$

a  $\frac{3\pi}{4}$

b  $2\text{rad}$

**مثال (4)** أوجد القياس الستيني لكل مما يلي:

الحل:



تحقق من فهمك (4)

أوجد القياس الستيني للزاوية التي قياسها :

(a)  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

(b)  $\theta = \frac{4\pi}{3}$

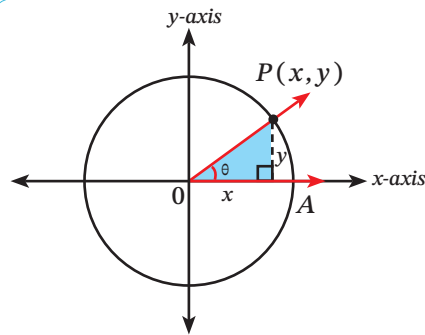
(c)  $1.6 \text{ rad}$

دائرة الوحدة (3-4-c)

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل ، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

النقطة المثلثية

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي  
لزاوية موجهة في الوضع  
القياسي مع دائرة الوحدة .الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها  $\theta$  :(1) مجال  $f(\theta) = \sin \theta$  هو  $\mathbb{R}$ (2) مدى  $f(\theta) = \sin \theta$  هو  $[-1, 1]$ (3)  $|\sin \theta| \leq 1$ (1) مجال  $f(\theta) = \tan \theta$  هو  $\mathbb{R} / \left\{ \frac{n\pi}{2} \right\}$  ، حيث إن  $n$  عدد فردي ،  $n \in \mathbb{Z}$ (2) مدى  $f(\theta) = \tan \theta$  هو  $\mathbb{R}$ 



$$\sin \theta = y$$

$$\cos \theta = x$$

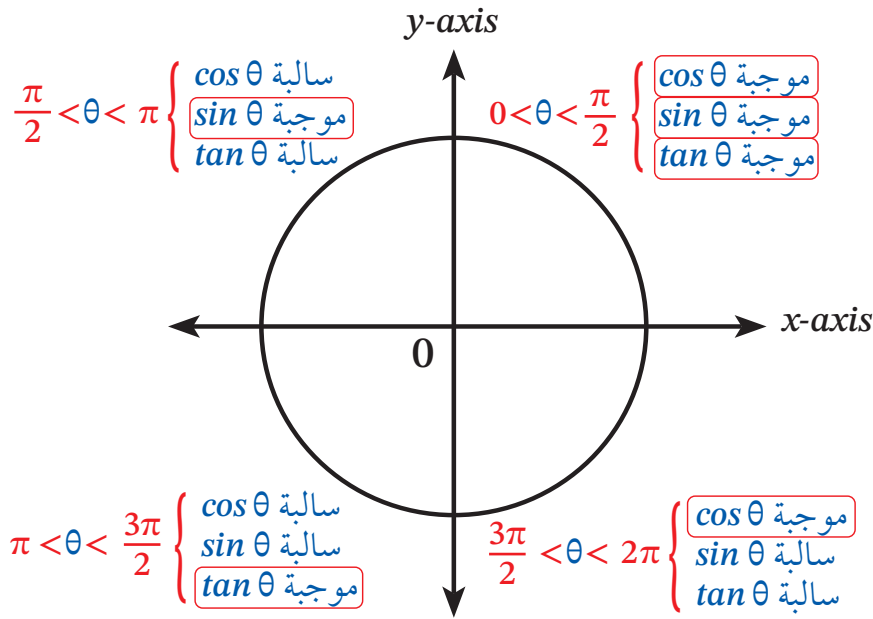
$$\tan \theta = \frac{y}{x} : x \neq 0$$

$$\csc \theta = \frac{1}{y}, y \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

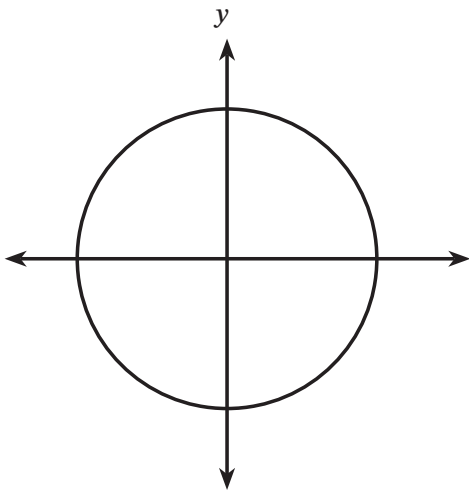
إشارة كل من دالة الجيب sine ودالة جيب التمام cosine :



مثال (5) إذا كانت النقطة  $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  ، للزاوية  $\theta$  في الوضع القياسي :

الحل:

(a) بَيِّنْ أن النقطة  $P$  نقطة مثلثية



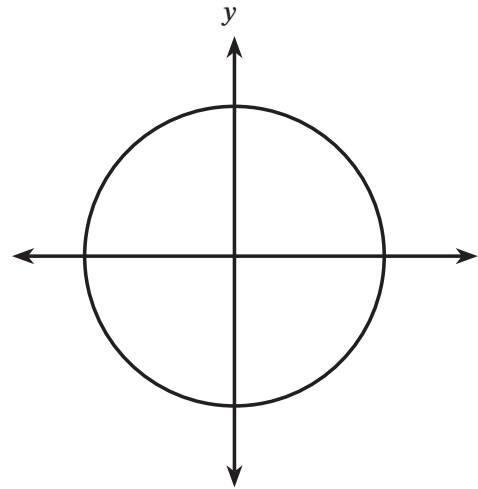
b) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية  $\theta$

تحقق من فهمك (5)

إذا كانت النقطة  $P\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$  للزاوية  $\theta$  في الوضع القياسي :

b) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية  $\theta$

a) بين أن النقطة  $P$  نقطة مثلثية



مثال (6) إذا كانت النقطة  $P\left(\frac{1}{2}, y\right)$  هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها  $\theta$   
أوجد :  $\sin \theta, \cos \theta$  حيث  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل:

تحقق من فهمك (6)

إذا كانت النقطة  $P\left(x, \frac{-1}{2}\right)$  هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها  $\theta$   
أوجد :  $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$  حيث  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$



إذا كانت :  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

مثال (7)

أوجد  $\cos \theta, \tan \theta$  ، حيث  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

الحل:

تحقق من فهمك (7)

إذا كانت :  $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

أوجد :  $\tan x, \sin x$  حيث  $90^\circ < x < 180^\circ$



## البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-14) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(a) (b)

(1) الزاوية الموجهة في وضعها القياسي يمكن أن ينطبق ضلعها الابتدائي

على الاتجاه السالب لمحور السينات

لأن الوضع القياسي يشترط أن ينطبق الضلع الابتدائي على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(a) (b)

(2) الزاوية  $200^\circ$  زاوية ربعية

لأن الزاوية الربعية ضلعها النهائي ينطبق على أحد المحاور الإحداثية، و  $200^\circ$  تقع في الربع الثالث.

(a) (b)

(3) الزاوية الموجهة في وضع قياسي يمكن أن يكون قياسها سالبًا

يكون القياس سالبًا إذا كان اتجاه الدوران في مع عقارب الساعة.

(a) (b)

(4) الزاوية الموجهة التي في وضع قياسي لها أكثر من نقطة مثلثية

لكل زاوية موجهة نقطة مثلثية واحدة وحيدة وهي نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة.

(a) (b)

(5) إذا كانت  $(x, y)$  نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي فإن  $x > 1$

لأن النقطة تقع على دائرة الوحدة نصف قطرها 1 وبالتالي  $-1 \leq x \leq 1$ .

(a) (b)

(6)  $(-1, 0)$  نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي

لأن  $1^2 + 0^2 = 1$  وهي النقطة المثلثية للزاوية  $0^\circ$  أو  $360^\circ$ .

(a) (b)

(7) نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي  $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$

لأن  $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{1}{25} = \frac{17}{25} \neq 1$ .

(a) (b)

(8) إذا كانت  $\left(x, \frac{3}{5}\right)$  نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي تقع

في الربع الثاني فإن  $x = \frac{4}{5}$

في الربع الثاني يكون الإحداثي السيني سالبًا، فالصحيح  $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(a) (b)

(9)  $\cos(-300^\circ) = \frac{1}{2}$

لأن  $\cos(-300^\circ) = \cos(300^\circ) = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ .

(a) (b)

(10)  $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}$

لأن  $\sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}$ .

(a) (b)

(11)  $\tan(-150^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

لأن  $\tan(-150^\circ) = -\tan(150^\circ) = -(-\tan 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

(a) (b)

(12)  $\sec(315^\circ) = \sqrt{2}$

لأن  $\cos(315^\circ) = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec(315^\circ) = \sqrt{2}$ .



(a) (b)

(13) الزاوية التي قياسها  $\frac{11\pi}{2}$  تقع في الربع الرابعلأن  $\frac{11\pi}{2} = 4\pi + \frac{3\pi}{2}$  ينطبق ضلعها النهائي على محور الصادات السالب، فهي زاوية ربعية.

(a) (b)

(14) الزاوية المركزية  $ABC$  قياسها  $(0.75)$  في دائرة طول قطرها  $8\text{cm}$ ،فإن طول القوس  $AC$  الذي تحصره هذه الزاوية يساوي  $3\text{cm}$ طول نصف القطر  $r = \frac{8}{2} = 4\text{ cm}$ ، وطول القوس

$$L = r \cdot \theta = 4 \times 0.75 = 3\text{ cm}$$

■ في البنود من (16-28) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) الزاوية التي قياسها  $300^\circ$  تقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثالث

(c) الثاني

(d) الرابع

الرابع: لأن  $270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$ .(2) الزاوية التي قياسها  $730^\circ$  تقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثالث

(c) الثاني

(d) الرابع

الأول: لأن  $720^\circ - 730^\circ = 10^\circ$  وتقع في الربع الأول.

(3) الزاوية التي تقع في الربع الثالث هي :

(a)  $39^\circ$ (b)  $550^\circ$ (c)  $70^\circ$ (d)  $650^\circ$  $550^\circ$ : لأن  $550^\circ - 360^\circ = 190^\circ$  وتقع في الربع الثالث ( $180^\circ < 190^\circ < 270^\circ$ ).

(4) الزاوية التي تقع في الربع الثاني هي :

(a)  $200^\circ$ (b)  $510^\circ$ (c)  $560^\circ$ (d)  $260^\circ$  $510^\circ$ : لأن  $510^\circ - 360^\circ = 150^\circ$  وتقع في الربع الثاني ( $90^\circ < 150^\circ < 180^\circ$ ).(5) الزاوية التي قياسها  $280^\circ$  تقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثالث

(c) الثاني

(d) الرابع

الرابع: لأن  $270^\circ < 280^\circ < 360^\circ$ .

(6) النقطة المثلثية للزاوية الموجهة في الوضع القياسي يمكن أن يكون :

(a)  $(0,0)$ (b)  $(3,0)$ (c)  $(-1,1)$ (d)  $(0,1)$  $(0,1)$ : تحقق معادلة دائرة الوحدة  $0^2 + 1^2 = 1$ .

(7) إذا كانت  $\sin\theta=1$  فإن النقطة المثلثية للزاوية  $\theta$  هي :

- (a) (1,1) (b) (3,0)  
(c) (0,1) (d) (-1,1)

(0, 1): بما أن  $\sin\theta = y = 1$  فإن  $x = 0$ ، فتكون النقطة (0, 1).

(8) إذا كانت  $(x, \frac{5}{13})$  نقطة مثلثية لزاوية حادة موجهة في وضع قياسي فإن  $x$

- (a)  $\frac{12}{13}$  (b)  $\frac{8}{13}$   
(c)  $\frac{5}{12}$  (d)  $-\frac{12}{13}$

$\frac{12}{13}$ : زاوية حادة في الربع الأول  $x > 0$ :  $x = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

(9) إذا كانت  $(y, \frac{1}{2})$  نقطة مثلثية للزاوية  $\theta$  والتي في وضع قياسي  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  فإن  $y$  تساوي :

- (a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (b)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   
(c)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  (d)  $-\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ : في الربع الأول  $y > 0$ :  $y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(10) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي :

- (a)  $\frac{7\pi}{4}$  (b)  $135^\circ$   
(c)  $\frac{3\pi}{4}$  (d)  $215^\circ$

$215^\circ$ : زاوية إسنادها  $\alpha = 215^\circ - 180^\circ = 35^\circ$  بينما باقي الزوايا زاوية إسنادها  $45^\circ$ .

(11) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها  $\frac{\pi}{3}$  هي :

- (a)  $\frac{11\pi}{6}$  (b)  $225^\circ$   
(c)  $\frac{7\pi}{8}$  (d)  $\frac{5\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{3}$ : تقع في الربع الرابع وزاوية إسنادها  $\alpha = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

(12) النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها  $\frac{1}{2}$  هي :

- (a)  $\sin(-330^\circ)$  (b)  $\cos(-240^\circ)$   
(c)  $\cot(-1500^\circ)$  (d)  $\tan(765^\circ)$

$\sin(-330^\circ) = \sin(-330^\circ + 360^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$

(13) النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها  $\frac{-\sqrt{3}}{2}$  هي :

- (a)  $\cos \frac{31\pi}{6}$  (b)  $\sin \frac{-35\pi}{3}$   
(c)  $\tan \frac{17\pi}{6}$  (d)  $\sec \frac{13\pi}{3}$

$\cos \frac{31\pi}{6} = \cos\left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



## العلاقات بين الدوال المثلثية

3-5

العلاقة بين الزاويتين  $(\theta, -\theta)$ انعكاس في محور السينات  
 $A(x, y) \rightarrow B(x, -y)$ 

- لأي زاوية  $\theta$  :
- ①  $\cos(-\theta) = \cos\theta$
  - ②  $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
  - ③  $\tan(-\theta) = -\tan\theta$  : ( معرفه  $\tan\theta$  )

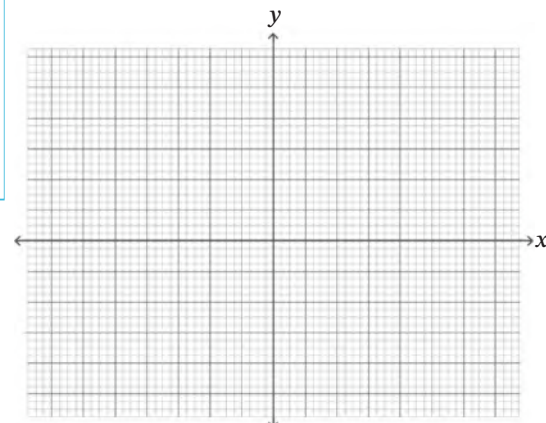
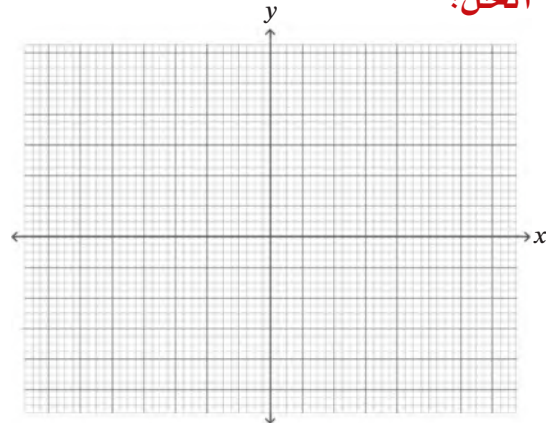
العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين  $(\theta, (\pi - \theta))$ انعكاس في محور الصادات  
 $A(x, y) \rightarrow B(-x, y)$ 

- لأي زاوية  $\theta$  :
- ①  $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
  - ②  $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
  - ③  $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$  : ( معرفه  $\tan\theta$  )

1. اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية :

مثال (1) a  $\cos(\pi - \theta)$  b  $\tan(180^\circ - x)$  c  $\sin(180^\circ - x)$ 2. إذا كان  $\sec\theta = 2$  أوجد  $\cos(\pi - \theta)$ 

الحل:



تحقق من فهمك (1)

|                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| أوجد $\sin(\pi - \theta)$ | $\sin\theta = 0.2$         |
| أوجد $\cos(\pi - \theta)$ | $\cos\theta = 0.6$         |
| أوجد $\cot(\pi - \theta)$ | $\tan\theta = \frac{1}{3}$ |





انعكاس في نقطة الأصل  $A(x, y) \rightarrow B(-x, -y)$

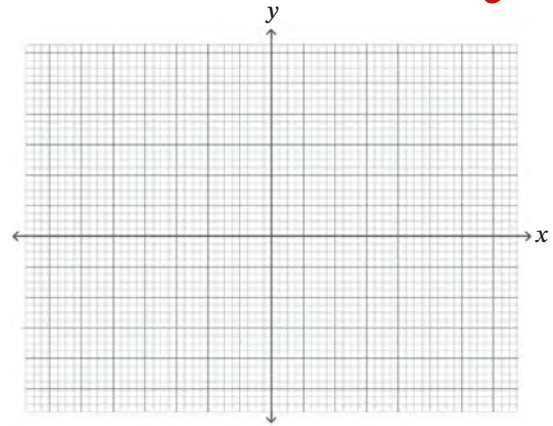
- لأي زاوية  $\theta$  :
- ①  $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
  - ②  $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
  - ③  $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$  : ( معرفه  $\tan\theta$  )

ا) إذا كان  $\tan\theta = 3$  أوجد  $\tan(\pi+\theta)$

ب) إذا كان  $\cos\theta = \frac{1}{2}$  أوجد  $\sec(\pi+\theta)$  مثال (2)

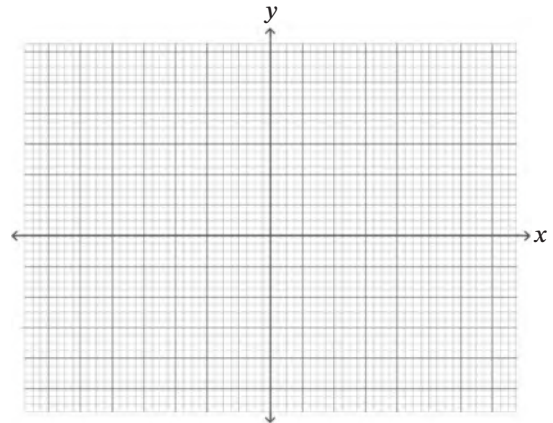
ج) إذا كان  $\sin\theta = \frac{1}{5}$  أوجد  $\csc(\pi+\theta)$

الحل:



تحقق من فهمك (2)

- 1) إذا كان  $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  أوجد  $\sin(\pi+\theta)$
- 2) إذا كان  $\tan\theta = 3.2$  أوجد  $\tan(\pi+\theta)$
- 3) إذا كان  $\cos\theta = \frac{2}{3}$  أوجد  $\sec(\pi+\theta)$



العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين  $(\theta, (\frac{\pi}{2} - \theta))$

①  $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$  لأي زاوية  $\theta$  :

②  $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$

③  $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$  : ( معرفه  $\tan \theta$  )

مثال (3) إذا كان  $\cos \theta = \frac{7}{25}$  أوجد  $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$  ,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل:

تحقق من فهمك (3)

إذا كان  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  أوجد  $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$  ,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$



العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين  $(\theta, (\frac{\pi}{2} + \theta))$

①  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$  لأي زاوية  $\theta$ :

②  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$

③  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$  : ( معرفه  $\tan \theta$  )

مثال (4) إذا كان  $\tan \theta = \sqrt{3}$  أوجد  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$  ,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل:

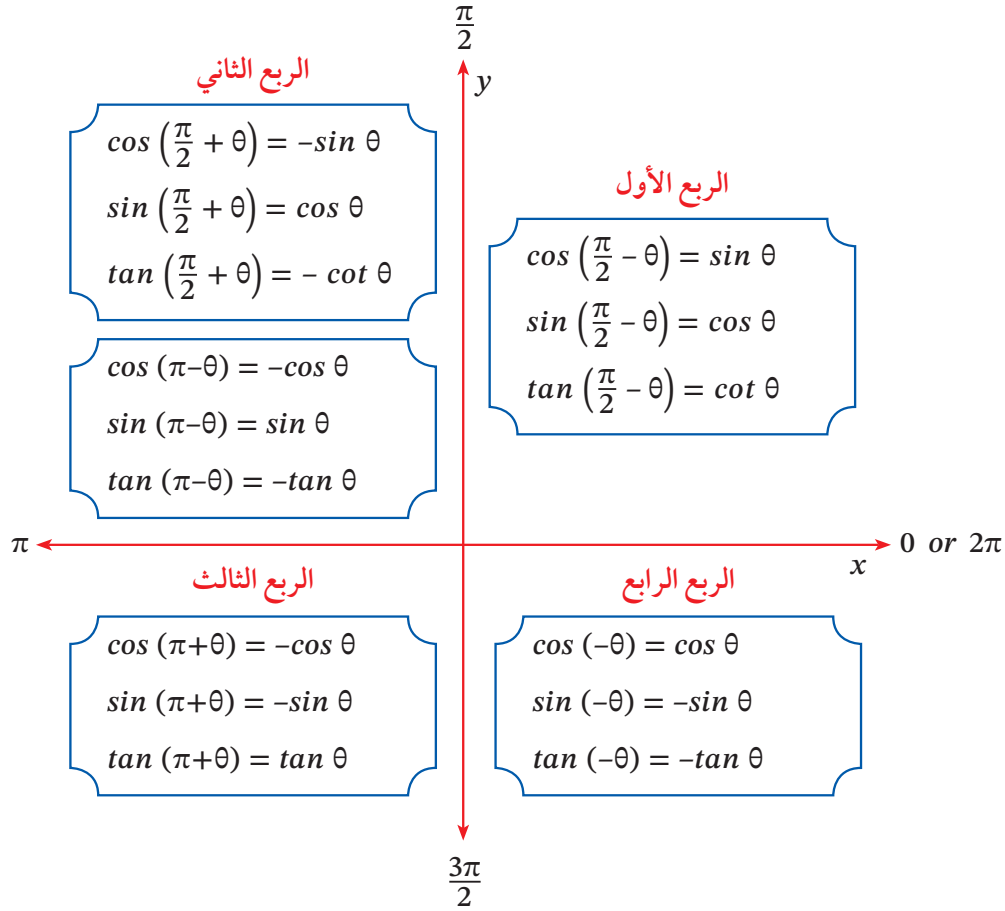
تحقق من فهمك (4)

إذا كان  $\cos \theta = \frac{1}{5}$  أوجد  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$  ,  $\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$



## ملخص

## العلاقات بين الدوال المثلثية



بسّط التعبيرات التالية:

- a)  $\cos(\pi - \theta) - \cos(\theta) + \sin(\pi + \theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
- b)  $\sin x + \sin(90^\circ + x) + \sin(180^\circ + x) + \sin(90^\circ - x)$
- c)  $\cos(\pi + \theta) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\theta - \pi) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

مثال (5)

الحل:



تحقق من فهمك (5) بسط التعبيرات التالية :

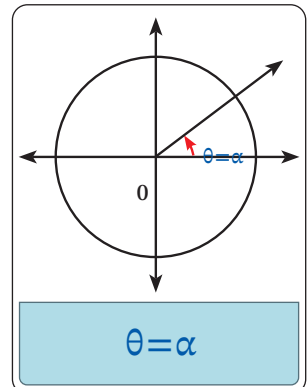
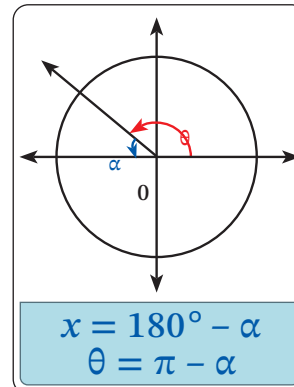
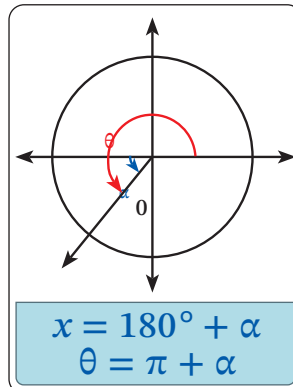
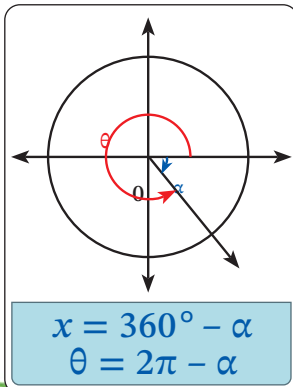
$$① \sin(\pi + \theta) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\theta - \pi) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$② \cos(-\theta) + \cos(\pi - \theta) - \sin(\pi + \theta)$$

$$③ \cos x - \sin(90^\circ - x) + \sin(180^\circ - x) + \cos(90^\circ + x)$$

## زاوية الإسناد

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة  $\theta$  التي في الوضع القياسي هي الزاوية الحادة  $\alpha$  التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات حيث  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



أوجد زاوية الإسناد للزوايا التالية :

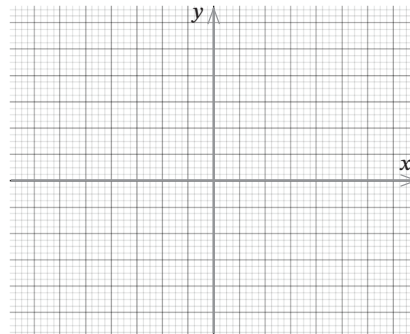
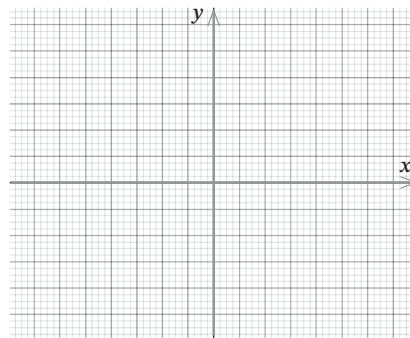
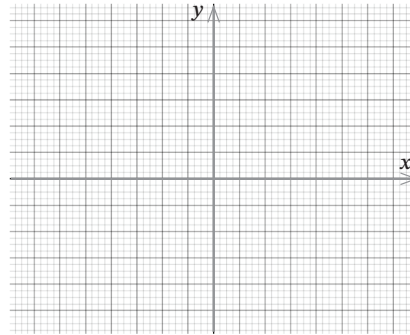
مثال (6)

a  $x = 125^\circ$

b  $x = 215^\circ$

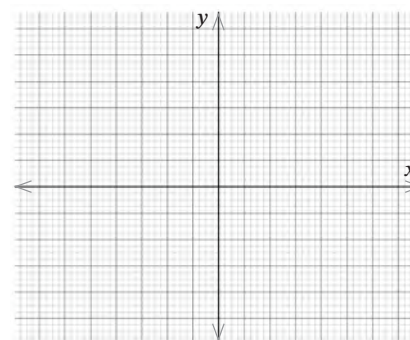
c  $x = \frac{11\pi}{6}$

الحل:

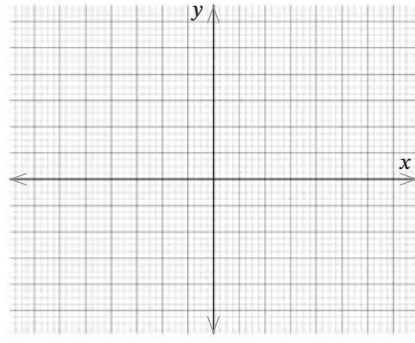


تحقق من فهمك (6) أوجد زاوية الإسناد للزوايا التالية :

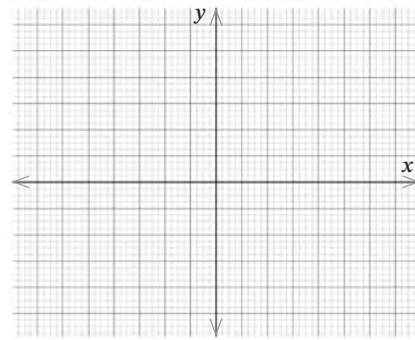
a  $x = 215^\circ$



(b)  $\theta = \frac{2\pi}{3}$



(c)  $x = 300^\circ$



مثال (7) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد :

الحل:

(a)  $\sin \frac{5\pi}{6}$

(b)  $\cos 225^\circ$

(c)  $\tan 315^\circ$

تحقق من فهمك (7) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد :

(a)  $\cos(-150^\circ)$

(b)  $\sin \frac{7\pi}{6}$

(c)  $\tan 330^\circ$



## البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-6) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) إذا كانت  $\sin \theta = 0.2$  فإن  $\sin(\pi + \theta) = 0.2$

لأن  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -0.2$ .

(a) (b)

(2) إذا كانت  $\cos \theta = \frac{2}{3}$  فإن  $\sec(\pi + \theta) = \frac{3}{2}$

لأن  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sec(\pi + \theta) = -\frac{3}{2}$

(a) (b)

(3) إذا كانت  $\tan \theta = 3$  فإن  $\cot(\pi + \theta) = 3$

لأن  $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta = 3 \Rightarrow \cot(\pi + \theta) = \frac{1}{3}$

(a) (b)

(4) إذا كانت  $\sin \theta = \frac{1}{5}$  فإن  $\csc(\pi + \theta) = -5$

لأن  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -\frac{1}{5} \Rightarrow \csc(\pi + \theta) = -5$

(a) (b)

(5) إذا كانت  $\cos x = \frac{1}{2}$  فإن  $x = \frac{\pi}{3}$

لأن حل المعادلة في الدورة الواحدة يشمل قيمتين:  $x = \frac{\pi}{3}$  أو  $x = \frac{5\pi}{3}$  ولم يُحدد الربع في السؤال.

(a) (b)

(6) إذا كانت  $\sin x = \frac{1}{2}$  فإن  $x = \frac{\pi}{6}$

لأن دالة الجيب موجبة في الربعين الأول والثاني، فلها حلان:  $x = \frac{\pi}{6}$  أو  $x = \frac{5\pi}{6}$

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا التالية هي :

(a)  $315^\circ$ (b)  $60^\circ$ (c)  $45^\circ$ (d)  $135^\circ$ 

$60^\circ$ : زاوية إسنادها  $60^\circ$ ، بينما الزوايا  $315^\circ$  و  $45^\circ$  و  $135^\circ$  زاوية إسنادها  $45^\circ$ .

(2) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلوعها النهائي يمر بالنقطة المثلثية  $M(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  هي :

(a)  $45^\circ$ (b)  $225^\circ$ (c)  $135^\circ$ (d)  $330^\circ$ 

$135^\circ$ : الإحداثيات  $x < 0$  و  $y > 0$  تقع في الربع الثاني ، والزاوية التي تحقق

$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  هي  $135^\circ$ .

(3) إذا كانت  $\cos x$  سالبة و  $\sin x$  موجبة . فإن الضلع النهائي للزاوية  $x$  يقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثاني

(c) الثالث

(d) الرابع

الثاني: جيب التمام سالب والجيب موجب فقط في الربع الثاني.





## حل المعادلات المثلثية

3-6

أوجد مجموعة حل المعادلة :  $2 \sin \theta - 1 = 0$ حيث  $\theta \in [0, 2\pi)$ 

مثال (1)

الحل:

تحقق من فهمك (1) أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$\textcircled{1} \quad 2 \cos \theta - \sqrt{2} = 0$$

حيث :  $0 \leq \theta < 2\pi$ 

②  $2 \sin \theta + \sqrt{3} = 0$

حيث :  $\theta \in [0, 2\pi)$

مثال (2) أوجد حل المعادلة :  $2 \cos \theta + \sqrt{3} = 0$  حيث :  $0 \leq \theta < 2\pi$

الحل:



تحقق من فهمك (2)

أوجد حل المعادلة :  $2 \cos \theta + 1 = 0$  حيث :  $\theta \in [0, 2\pi)$ أوجد حل المعادلة :  $\sqrt{2} \csc \theta + 2 = 0$ مثال (3) حيث :  $0 \leq \theta < 2\pi$ 

الحل:



تحقق من فهمك (3)

أوجد حل المعادلة :  $\sec \theta - 2 = 0$ حيث :  $0 \leq \theta < 2\pi$ أوجد مجموعة حل المعادلة :  $\tan \theta + \sqrt{3} = 0$ حيث :  $\theta \in [0, 2\pi)$ 

مثال (4)

الحل:



تحقق من فهمك (4) أوجد مجموعة حل المعادلة : حيث :  $\theta \in [0, 2\pi)$

①  $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$

②  $\cot \theta - 1 = 0$

ملخص حل المعادلة المثلثية جبرياً

لايجاد حل المعادلة المثلثية

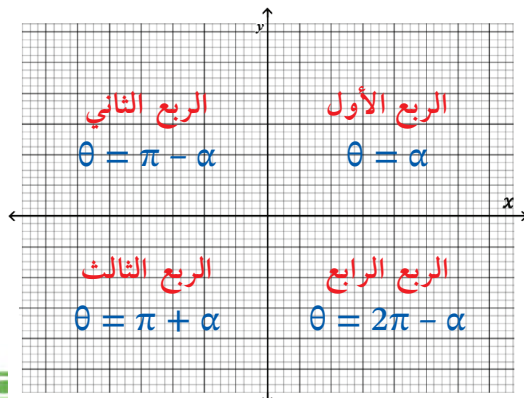
$$\sin \theta = a, \quad \cos \theta = a, \quad \tan \theta = a$$

نتبع التالي :

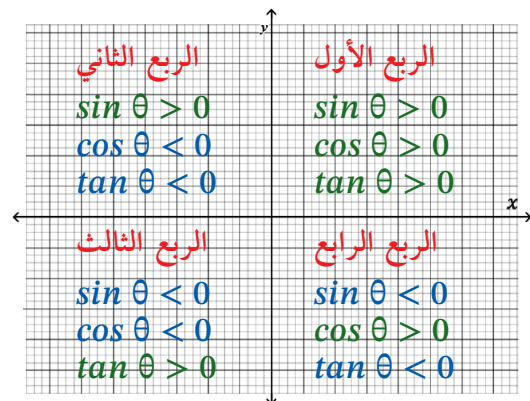
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= |a| \\ \cos \alpha &= |a| \\ \tan \alpha &= |a| \end{aligned}$$

1. نوجد قياس الزاوية  $\alpha$  وهي زاوية الإسناد للزاوية  $\theta$  التي تحقق أن :

3. نوجد قيمة الزاوية  $\theta$  حيث العلاقة بين  $\theta, \alpha$  كما هو موضح بالشكل :



2. نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية  $\theta$  حسب إشارة الدالة المثلثية من خلال الأرباع الموضحة :



## البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) إذا كانت  $\sin x = \sqrt{3}$  فإن حل المعادلة يساوي  $\emptyset$

لأن مدى دالة الجيب هو  $[-1, 1]$ ، والعدد  $1.732 > 1$ ، وبالتالي مستحيلة الحل ومجموعة الحل هي  $\phi$

(a) (b)

(2) إذا كانت  $\cos x = \frac{1}{2}$  فإن  $x = \frac{\pi}{3}$

لأن المعادلة لها حلان في دورة واحدة هما  $\frac{\pi}{3}$  و  $\frac{5\pi}{3}$

(a) (b)

(3) إذا كانت  $x = \frac{\pi}{6}$  فإن  $\sin x = \frac{1}{2}$

لأن المعادلة لها حلان في الدورة هما  $\frac{\pi}{6}$  و  $\frac{5\pi}{6}$

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) إذا كانت  $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ ، وكانت  $2 \sin \theta = 1$ ، فإن قياس الزاوية  $\theta$  بالقياس الستيني تساوي :

(a)  $30^\circ$ (b)  $120^\circ$ (c)  $135^\circ$ (d)  $150^\circ$ 

$2 \sin \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$ ، زاوية الإسناد  $30^\circ$ ، وبما أن الزاوية في الربع الثاني ( $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ )

$$\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

(2) إذا كانت  $\pi \leq \theta < 2\pi$ ، وكانت  $2\cos\theta - 1 = 0$  فإن قياس الزاوية  $\theta$  بالقياس الستيني تساوي :

(a)  $60^\circ$ (b)  $120^\circ$ (c)  $330^\circ$ (d)  $315^\circ$ 

الزاوية محصورة بين  $180^\circ$  و  $360^\circ$  ( $\pi \leq \theta < 2\pi$ )، وتكون  $330^\circ$  في الربع الرابع.

(3) حل المعادلة  $\sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$  حيث  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  بالقياس الستيني تساوي :

(a)  $30^\circ$ (b)  $150^\circ$ (c)  $240^\circ$ (d)  $45^\circ$ 

$\sqrt{3} \tan \theta = 1 \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ$ ، وبما أن  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  (الربع الأول):



## المنطق والتقارير

## 4-1

مثال (1) في المواقع التالية حدد أيًا منها استقراء وأيًا منها استنتاج

| م | الموقف                                                                                                              |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | الحديد والنحاس والألمنيوم تتمدد بالحرارة إذا المعادن تتمدد بالحرارة.                                                |
| 2 | جميع الطيور لها أجنحة والعصفور طائر إذا للعصفور أجنحة.                                                              |
| 3 | جميع الأعداد التي رقم خانة الآحاد لها 0 أو 5 تقبل القسمة على 5 والعدد 75 عدد آحاده 5 إذا العدد 75 يقبل القسمة على 5 |
| 4 | الأعداد 2,4,6,8 كل منها يقبل القسمة على 2 إذا الأعداد 2,4,6,8 هي أعداد زوجية.                                       |
| 5 | كل من يلتزم بقوانين المرور يقل تعرضه للحوادث وأحمد يلتزم بقوانين المرور إذا أحمد أقل عرضة للحوادث.                  |

الحل:

كل من الاستقراء والاستنتاج يساعد الإنسان على التفكير المنظم واتخاذ القرارات الصحيحة في حياته اليومية، لحل المشكلات وفهم العلاقات بين الأشياء، والذي يساعدنا في التمييز بين البرهان الصحيح والبرهان الخاطئ وهذا ما نسميه بالمنطق الرياضي .

- الاستقراء الرياضي : يكون من الخاص إلى العام.
- الاستنتاج الرياضي : يكون من العام إلى الخاص.

تحقق من فهمك (1) في المواقع التالية حدد أيًا منها استقراء وأيًا منها استنتاج

| م | الموقف                                                                                                                                                |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | جميع الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على 2 والعدد 39 هو عدد فردي إذا العدد 39 لا يقبل القسمة على 2.                                                    |
| 2 | إذا كان مجموع قياسات زوايا المثلث $180^\circ$ وقياس زاويتين فيه $30^\circ$ و $60^\circ$ إذا قياس الزاوية الثالثة تساوي $90^\circ$                     |
| 3 | إذا كانت السماء مليئة بالغيوم السوداء فإن المطر يتساقط والسماء اليوم مليئة بالغيوم السوداء فإننا نتوقع سقوط الأمطار .                                 |
| 4 | إذا علمت أن $3^2 = 9$ , $2^2 = 4$ , $1^2 = 1$ إذا مربع أي عدد هو ضرب العدد في نفسه.                                                                   |
| 5 | جميع المتعلمين المجتهدين نجحوا وأنور مجتهد إذا أنور ناجح.                                                                                             |
| 6 | لدراسة حالة الطقس يعتمد المختصون على أمور كثيرة وهي: (سرعة الرياح، اتجاهها، مقدار ومناطق الضغط الجوي) إذا يمكننا توقع حالة الطقس في أي يوم من الأيام. |



**المنطق:** هو أسلوب منظم للتفكير يساعد على الوصول إلى نتائج صحيحة اعتماداً على معلومات واضحة.

**العبارة المنطقية:** هي التقرير وهي أيضاً القضية المنطقية.



بالنظر إلى خريطة دولة الكويت اقرأ الجمل التالية، ثم حدد نوع هذه الجمل أيّاً منها يمكن الحكم عليها بأنها جملة خبرية (صحيحة - خاطئة)، وأيها استفهامية أو تعجب أو أمر .

مثال (2)

| م | الجملة                              |
|---|-------------------------------------|
| 1 | مدينة الكويت هي عاصمة دولة الكويت . |
| 2 | نهر النيل يمر بأرض الكويت .         |
| 3 | ما أجمل الكويت !                    |
| 4 | هل زرت جزيرة فيلكا ؟                |
| 5 | اذهب إلى البحر مساءً .              |

الحل:

الجمل التي يمكن تحديد صحتها أو خطئها تسمى جملة خبرية، والتي لا يمكن الحكم عليها تسمى جملة غير خبرية.

نعلم أن الجمل في اللغة العربية تختلف في أنواعها فنجد الجملة الفعلية والاسمية والاستفهامية والتعجبية والأمر.

أما في المنطق الرياضي تُقسّم الجمل إلى قسمين هما:

- جملة خبرية: هي الجملة التي تحمل لنا خبراً ما.
- جملة غير خبرية: هي الجملة التي لا تحمل لنا خبراً ما.

تحقق من فهمك (2)

حدد نوع كل جملة أيها خبرية وأيها غير خبرية

| م | الجملة                                   |
|---|------------------------------------------|
| 1 | الشتاء فصل من فصول السنة.                |
| 2 | الفروانية عاصمة الكويت.                  |
| 3 | ما أجمل السماء!                          |
| 4 | اكتب الواجب يا أحمد.                     |
| 5 | هل المثلث متطابق الأضلاع متطابق الزوايا؟ |





## العبارة البسيطة (التقرير)

هي جملة خبرية ذات معنى تحمل خبراً ويمكن الحكم بأنها صائبة (True) أو خاطئة (False) وليس كلاهما معاً.

## العبارة الصائبة والعبارة الخاطئة

إذا كانت العبارة تحمل خبراً صادقاً فإنها تُسمى عبارة صائبة. وإذا كانت العبارة تحمل خبراً غير صادقاً فإنها تُسمى عبارة خاطئة.

## قيم الصحة (قيم الحقيقة)

| الم العبارة (التقرير) |   |       |
|-----------------------|---|-------|
| صحيح                  | T | True  |
| خطأ                   | F | False |

إذا رمزنا للعبارة بالرمز  $p$  فإما أن تكون صحيحة  $T$  أو خاطئة  $F$

مثال (3) وضع قيمة الصحة لكل من العبارات (التقارير) التالية:

| الم | العبارة                      |
|-----|------------------------------|
| 1   | العدد 32 يقبل القسمة على 4   |
| 2   | $\sqrt{16} = -4$             |
| 3   | العدد 18 من مضاعفات العدد 3. |
| 4   | الشكل الرباعي يُسمى مربعاً.  |
| 5   | 5 عدد فردي.                  |
| 6   | $2 \times 10 \neq 20$        |

الحل:

## تحقق من فهمك (3)

وضع قيمة الصحة لكل من العبارات (التقارير) التالية:

| الم | العبارة                                            |
|-----|----------------------------------------------------|
| 1   | $3 + 4 > 5$                                        |
| 2   | العدد 5 من مضاعفات العدد 10                        |
| 3   | للمعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ جذران حقيقيان مختلفان. |
| 4   | تونس دولة آسيوية.                                  |
| 5   | مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي $180^\circ$       |
| 6   | عدد حروف كلمة ثريا هو أربعة حروف.                  |
| 7   | استاد جابر يقع في منطقة جابر الأحمد.               |



## البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-10) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) الجملة الخبرية يمكن الحكم عليها بالصواب أو الخطأ. (a) (b)

لأن الجملة الخبرية بطبيعتها المنطقية هي الوحيدة التي يمكن الحكم على مضمونها بالصواب أو الخطأ

(2) الجملة الاستفهامية تُعد عبارة منطقية. (a) (b)

لأن الجملة الاستفهامية جملة إنشائية غير خبرية ولا تعد تقريراً أو عبارة منطقية

(3) الاستنتاج يبدأ بأمثلة متعددة. (a) (b)

لأن التفكير الذي يبدأ بملاحظة أمثلة متعددة وحالات خاصة هو "الاستقراء"، بينما الاستنتاج يبدأ من القواعد العامة

(4) (اكتب الدرس) جملة خبرية. (a) (b)

لأنها جملة إنشائية تعبر عن أمر وليست جملة خبرية

(5) (لا تذهب إلى الصحراء مساءً) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها أسلوب نهى (إنشائي) لا يحمل خبراً يحتمل الصدق أو الكذب

(6) (دولة الكويت تقع على الخليج العربي) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها جملة تفيد خبراً جغرافياً حقيقياً يحمل قيمة الصواب .

(7) (هبة درست جيداً) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها جملة خبرية فعلية تفيد خبراً يحتمل الصواب أو الخطأ .

(8) (هل المثلث المتطابق الضلعين متطابق الزوايا؟) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها جملة استفهامية

(9)  $7 = 4 + 3$  هي عبارة صحيحة. (a) (b)

لأن  $7 = 4 + 3$  تقرير رياضي متطابق الطرفين وصائب .

(10) (ما الدول التي تشترك في الحدود مع المملكة العربية السعودية؟) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها صيغة سؤال واستفهام وليست خبراً

■ في البنود من (1-7) ظلل اختر الإجابة الصحيحة :

(1) أي مما يلي تُعتبر عبارة منطقية:

(a) ما أجمل السماء! (b) هل حضرت الدرس؟ (c) 7 عدد أولي (d) افتح الباب

السبب: هي الجملة الخبرية الوحيدة التي تفيد خبراً ذا معنى يمكن الحكم عليه بالصواب،

بينما الخيارات الأخرى تعجب، استفهام، وأمر .

(2) أي من الجمل التالية ليست عبارة منطقية:

(a) الكويت دولة عربية (b) ادرس جيداً (c)  $2 + 2 = 4$  (d)  $5 > 9$

السبب: لأنها جملة أمر وطلب وليست جملة خبرية، فلا تعتبر عبارة منطقية



(3) أي مما يلي يُمثل استقراء:

- (a) استخدام قانون لإيجاد نتيجة  
(b) ملاحظة نمط والوصول إلى قاعدة  
(c) حل معادلة  
(d) رسم شكل هندسي

السبب: هذا هو التعريف العلمي الدقيق للاستقراء الرياضي (الانتقال من الخاص إلى العام).

(4) أي مما يلي يُمثل استنتاجًا:

- (a) توقع نتيجة إحدى المباريات  
(b) التنبؤ بحالة الطقس  
(c) تطبيق قاعدة عامة لإيجاد نتيجة  
(d) تخمين الإجابة

السبب: هذا هو جوهر الاستنتاج المنطقي (الانتقال من القاعدة الكلية العامة إلى نتائج وحالات خاصة).

(5) أي المواقف التالية يُمثل استقراء:

- (a) كل المربعات هي مستطيلة.  
(b) العدد 64 هو مربع كامل.  
(c) لاحظت أن الحديد والنحاس يتمددان بالحرارة فاستنتجت أن المعادن تتمدد بالحرارة.  
(d) جميع الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على 2 والعدد 39 عدد فردي فإن العدد 39 لا يقبل القسمة على 2

السبب: بدأ بحالات خاصة لمعدنين ثم عمم النتيجة على جميع المعادن.

(6) أي المواقف يُمثل استنتاجًا:

- (a) لاحظ المتعلم أن كل اختبارات الرياضيات تحتاج إلى تركيز عالٍ.  
(b) شاهدت عدة طيور تطير فاستنتجت أن الطيور تطير.  
(c) جميع المتعلمين المجتهدين ناجحون وخالد مجتهد إذاً خالد ناجح.  
(d) الماء يغلي عند  $100^{\circ}$  مئوية.

السبب: استدل منطقيًا بحكم عام يشمل جميع المجتهدين وطبقه على حالة الطالب خالد.



## 4-2 أدوات الربط (العمليات المنطقية)

### العبرة البسيطة (التقرير البسيط - القضية الأولية - القضية المستقلة)

هي جملة خبرية تحمل خبراً واحداً.

### العبرة المركبة (التقرير المركب)

هي جملة خبرية تشتمل على أكثر من خبر واحد

**ملاحظات هامة :**

1. نرسم للعبرة البسيطة ( التقرير البسيط ) بالحروف الصغيرة مثل :

$$p, q, r, s, t, \dots$$

2. العبرة المركبة (التقرير المركب) هي التي تتكوّن من عبارتين بسيطتين أو أكثر ويربط بين كل منها أداة من أدوات الربط التالية :

و - أو - إذا كان ... فإن - إذا فقط إذا - وغيرها.

3. نرسم للعبرة المركبة ( التقرير المركب ) بالحروف الكبيرة ....  $A, B, C$ .

### العمليات المنطقية (أدوات الربط)

العمليات المنطقية للربط بين العبارات البسيطة للحصول على عبارة جديدة تسمى عبارة مركبة (قضية مركبة)، مستخدمين بعض الرموز الخاصة والتي نسميها بأدوات الربط المنطقية بالإضافة إلى ذلك صحة أو خطأ العبارة البسيطة، والتي نسميها جداول الصحة والخطأ.

والآن نتعرف على أدوات الربط المنطقية:

| أدوات الربط الثنائية      | أدوات الربط الأحادية  |
|---------------------------|-----------------------|
| تتعامل مع عبارتين أو أكثر | تتعامل مع عبارة واحدة |

### 1. أداة نفي العبارة

العبارة "مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي  $180^\circ$ " هي عبارة صحيحة (  $T$  )  
فإن نفي هذه العبارة:

"مجموع قياسات زوايا المثلث لا يساوي  $180^\circ$ " وهي عبارة خاطئة (  $F$  )

في الجدول التالي عبارات (تقارير) قد تكون صحيحة (  $T$  ) وقد

تكون خاطئة (  $F$  ) أكتب نفي كلّ منها

**مثال (1)**

**الحل:**

| العبارة (التقرير) $p$      | نفي العبارة (نفي التقرير) $\sim p$ |
|----------------------------|------------------------------------|
| عيون أحمد زرقاء.           |                                    |
| العدد 7 يقبل القسمة على 2. |                                    |
| $3 + 4 < 10$               |                                    |
| $2 \times 3 \neq 5$        |                                    |
| $2 \in \{3, 4, 5\}$        |                                    |



نفي العبارة يرمز له بالرمز ( $\sim$ ) يعتبر من أبسط العمليات المنطقية، وهو أداة ربط أحادية، لأنها تتعامل مع عبارة واحدة (تقرير واحد أو قضية واحدة).  
مما سبق نصل إلى هذا الجدول والذي نسميه جدول الصحة (جدول الحقيقة).

|        |            |                  |
|--------|------------|------------------|
| $\rho$ | $\sim\rho$ | $\sim(\sim\rho)$ |
| $T$    | $F$        | $T$              |
| $F$    | $T$        | $F$              |

## ملاحظات :

1. نفي النفي للعبارة هو العبارة نفسها.
2. ليس من الضروري أن تكون جميع القيم الواردة في الجدول صحيحة ، إنما الجدول بمكوناته الصحيحة والخاطئة يسمى **جدول الصحة**.  
عدد عناصر العبارة البسيطة دائماً عنصران وهما إما  $T$  أو  $F$ .

## تحقق من فهمك (1)

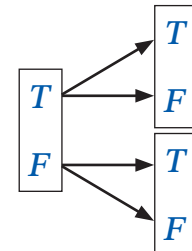
في الجدول التالي عبارات (تقارير) قد تكون صحيحة ( $T$ ) وقد تكون خاطئة ( $F$ )  
أكتب نفي كل منها

| العبارة (التقرير) $\rho$        | نفي العبارة (نفي التقرير) $\sim\rho$ |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| منهج الرياضيات مُشوق في دراسته. |                                      |
| العدد 2 عامل من عوامل العدد 5   |                                      |
| $x \in \mathbb{R}$              |                                      |
| خالد يدرس الطب.                 |                                      |

## ملاحظات :

1. عدد عناصر العبارة البسيطة  $\rho$  (قيم الصحة) عنصران دائماً وهما إما  $T$  أو  $F$ .
2. إذا كان كل من  $\rho, q$  عبارتين بسيطتين فإن:  
التركيبات الممكنة من قيم الصحة للتقريرين عددها  $2^2 = 4$  ونمثّلها كالتالي:

| العبارة (التقرير) $q$ | العبارة (التقرير) $p$ |
|-----------------------|-----------------------|
| $T$                   | $T$                   |
| $F$                   | $T$                   |
| $T$                   | $F$                   |
| $F$                   | $F$                   |



## 2. أداة الوصل "و" :

العبارة المركبة ( $\rho$  و  $q$ ) والتي نرمز لها بالرمز ( $\rho \wedge q$ ) تكون صحيحة فقط إذا كان كل من  $\rho, q$  صحيحتين معاً وتكون خاطئة فيما عدا ذلك



## تعميم:

| $p$ (العبارة) | $q$ (العبارة) | $p \wedge q$ |
|---------------|---------------|--------------|
| $T$           | $T$           | $T$          |
| $T$           | $F$           | $F$          |
| $F$           | $T$           | $F$          |
| $F$           | $F$           | $F$          |

إذا كانت كلٌّ من  $p, q$  عبارات بسيطة فإن جدول الصحة للعبارة المركبة  $p \wedge q$  هو

أداة الوصل "و" تعتبر أداة من أدوات الربط الثنائية ، لأنها تتعامل مع عبارتين.

بفرض العبارات البسيطة التالية :

مثال (2)  $p: 4 > 3$  ،  $q: 7$  عدد زوجي ،  $r$  : المنامة عاصمة البحرين

اكتب العبارات المركبة التالية :  $p \wedge q$  ،  $p \wedge r$  ،  $r \wedge q$

الحل:

| $p$<br>$4 > 3$ | $q$<br>7 عدد زوجي | $r$<br>المنامة عاصمة البحرين | $p \wedge q$ | $p \wedge r$ | $r \wedge q$ |
|----------------|-------------------|------------------------------|--------------|--------------|--------------|
|                |                   |                              |              |              |              |

تحقق من فهمك (2)

1. بفرض العبارات البسيطة التالية:

$p: 2 > 3$  ،  $q: 6$  عدد زوجي ،  $r$  : الدوحة عاصمة قطر

اكتب العبارات المركبة التالية :  $p \wedge q$  ،  $p \wedge r$  ،  $r \wedge q$

2. كوّن جدول الصحة للعبارة:  $\sim(p \wedge q)$

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

3. أداة الفصل "أو" :

العبارة المركبة ( $p$  أو  $q$ ) والتي نرمز لها بالرمز ( $p \vee q$ ) تكون صحيحة إذا كان أحد العبارتين على الأقل صحيحة ، وتكون خاطئة إذا كانت كلتاها خاطئتين.

تعميم:

| $p$ (التقرير) | $q$ (التقرير) | $p \vee q$ |
|---------------|---------------|------------|
| $T$           | $T$           | $T$        |
| $T$           | $F$           | $T$        |
| $F$           | $T$           | $T$        |
| $F$           | $F$           | $F$        |

إذا كان كلٌّ من  $p, q$

عبارة بسيطة فإن جدول الصحة للعبارة المركبة  $p \vee q$  هو

أداة الوصل "أو" تعتبر أداة من أدوات الربط الثنائية، لأنها تتعامل مع عبارتين أو أكثر.



كوّن جدول الصحة للعبارات التالية:

a  $(p \vee \sim q)$

b  $(p \wedge q) \vee \sim q$

c  $(p \vee q) \wedge \sim q$

مثال (3)

الحل:

a  $(p \vee \sim q)$



b  $(p \wedge q) \vee \sim q$



c  $(p \vee q) \wedge \sim q$



تحقق من فهمك (3)

كوّن جدول الصحة لكل من العبارات التالية :

a  $(p \wedge q) \vee q$

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

b  $(p \vee q) \wedge q$

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |



c

$$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$$

| p | q | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$ |
|---|---|------------|--------------|----------------------------------|
|   |   |            |              |                                  |
|   |   |            |              |                                  |
|   |   |            |              |                                  |
|   |   |            |              |                                  |
|   |   |            |              |                                  |

e

$$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$$

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ |
|---|---|----------|----------|-------------------|---------------------------------|
|   |   |          |          |                   |                                 |
|   |   |          |          |                   |                                 |
|   |   |          |          |                   |                                 |
|   |   |          |          |                   |                                 |
|   |   |          |          |                   |                                 |

d

$$\sim (p \wedge q) \vee \sim q$$

| p | q | $p \wedge q$ | $\sim (p \wedge q)$ | $\sim q$ | $\sim (p \wedge q) \vee \sim q$ |
|---|---|--------------|---------------------|----------|---------------------------------|
|   |   |              |                     |          |                                 |
|   |   |              |                     |          |                                 |
|   |   |              |                     |          |                                 |
|   |   |              |                     |          |                                 |
|   |   |              |                     |          |                                 |

f

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

| p | q | $p \vee q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \vee \sim q$ | $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ |
|---|---|------------|----------|----------|----------------------|------------------------------------------|
|   |   |            |          |          |                      |                                          |
|   |   |            |          |          |                      |                                          |
|   |   |            |          |          |                      |                                          |
|   |   |            |          |          |                      |                                          |
|   |   |            |          |          |                      |                                          |

#### 4. أداة الربط الشرطية "إذا كان ..... فإن .....":

إذا كان كل من  $p, q$  عبارة بسيطة، فإن العبارة "إذا كان  $p$  فإن  $q$ " تكون عبارة مركبة، ونرمز لها بالرمز  $p \rightarrow q$  وتسمى هذه العبارة "عبارة شرطية"

وعد عبدالله ابنه حمد قائلاً "إذا نجحت في الامتحان فسأشتري لك هدية" متى يكون عبدالله صادقاً (صائباً) في كلامه؟ ومتى يكون غير صادقاً (خاطئاً)؟

مثال (4)

الحل:





## تعميم:

إذا كان كل من  $p, q$  عبارة بسيطة فإن جدول الصحة للعبارة  $p \rightarrow q$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| $T$ | $T$ | $T$               |
| $T$ | $F$ | $F$               |
| $F$ | $T$ | $T$               |
| $F$ | $F$ | $T$               |

## ملاحظات:

العبارة الأولى  $p$  تسمى شرطاً  
العبارة الثانية  $q$  تسمى جواباً للشرط  
العبارة  $p \rightarrow q$  تقرأ  $p$  تؤدي إلى  $q$   
وأيضاً تقرأ إذا كان  $q$  فإن  $p$

## تحقق من فهمك (4)

وعد محمد ابنته مها قائلاً:

"إذا حصلت على زيادة في راتبي فسأشتري لك سيارة جديدة" ناقش:  
متى يكون محمد صادقاً (صائباً) في كلامه؟ ومتى يكون غير صادق (خاطئاً)؟ ووضح ذلك في جدول الصحة.  
انتبه: لم يذكر الأب أنه في حال عدم حصوله على زيادة فإنه لن يشتري سيارة جديدة لها.

## جدول الصحة للعبارة الشرطية

| $p \rightarrow q$ | ( $q$ السيارة) | ( $p$ الزيادة) |
|-------------------|----------------|----------------|
|                   |                |                |
|                   |                |                |
|                   |                |                |
|                   |                |                |



كوّن جدول الصحة لكل من العبارات التالية:

مثال (5)

a  $(q \rightarrow p)$

b  $(\sim q \rightarrow \sim p)$

الحل:

| (a) |     |          |          |                   | (b)               |                             |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|-------------------|-----------------------------|
| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $\sim q \rightarrow \sim p$ |
|     |     |          |          |                   |                   |                             |
|     |     |          |          |                   |                   |                             |
|     |     |          |          |                   |                   |                             |
|     |     |          |          |                   |                   |                             |

ملاحظات:

1. العبارة الشرطية  $p \rightarrow q$ 2. عكس العبارة الشرطية  $q \rightarrow p$ 3. ضد العبارة الشرطية  $\sim q \rightarrow \sim p$ 4. قيم الصحة للعبارة الشرطية  $p \rightarrow q$  هي نفسها قيم الصحة.لضد العبارة  $\sim p \rightarrow \sim q$  (نقول العبارة  $p \rightarrow q$  تكافئ العبارة  $\sim q \rightarrow \sim p$ ).

العبارات المتكافئة: تكون العبارتان المركبتان متكافئتين إذا كان لهما قيم الصحة نفسها.

تحقق من فهمك (5)

كوّن جدول الصحة لكل من العبارات التالية:

a  $(p \wedge q) \rightarrow q$

b  $(p \vee q) \rightarrow q$

c  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$

d  $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q)$

e  $p \rightarrow (p \wedge \sim q)$

f  $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $(p \wedge q) \rightarrow q$ | $(p \vee q) \rightarrow q$ | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$ | $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q)$ |
|-----|-----|--------------|------------|------------------------------|----------------------------|-------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------|
|     |     |              |            |                              |                            |                   |                                              |                                            |
|     |     |              |            |                              |                            |                   |                                              |                                            |
|     |     |              |            |                              |                            |                   |                                              |                                            |
|     |     |              |            |                              |                            |                   |                                              |                                            |

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $p \rightarrow (p \wedge \sim q)$ | $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \rightarrow q$ | $\sim p \rightarrow \sim q$ | $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$ |
|-----|-----|----------|-------------------|-----------------------------------|-----|-----|----------|----------|-------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------------|
|     |     |          |                   |                                   |     |     |          |          |                   |                             |                                                        |
|     |     |          |                   |                                   |     |     |          |          |                   |                             |                                                        |
|     |     |          |                   |                                   |     |     |          |          |                   |                             |                                                        |
|     |     |          |                   |                                   |     |     |          |          |                   |                             |                                                        |



\* ملخص أدوات الربط المنطقية :

النفي ( $\sim$ ) - الوصل ( $\wedge$ ) - الفصل أو ( $\vee$ ) -  
أداة الربط الشرطية "إذا كان ..... فإن ...." ( $\rightarrow$ )

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ |
|-----|-----|--------------|------------|----------|----------|-------------------|-------------------|
| T   | T   | T            | T          | F        | F        | T                 | T                 |
| T   | F   | F            | T          | F        | T        | F                 | T                 |
| F   | T   | F            | T          | T        | F        | T                 | F                 |
| F   | F   | F            | F          | T        | T        | T                 | T                 |

## 5. أداة الربط الشرطية المزدوجة ".... إذا فقط إذا كان ...." :

إذا كان كل من  $p$ ,  $q$  عبارة بسيطة، فإن العبارة " $p$  إذا فقط إذا كان  $q$ " يكون عبارة مركبة، ونرمز لها بالرمز  $p \leftrightarrow q$  ونسمى هذه العبارة "عبارة شرطية مزدوجة" وهي تعني " $p$  إذا كان  $q$  و  $q$  إذا كان  $p$ "

مثال (6) ما قيم الصحة للتقرير المركب  $p \leftrightarrow q$  ؟

الحل:

العبارة " $p$  إذا فقط إذا كان  $q$ " هي عمليتا شرط مركبتان معا بأداة الوصل " $\wedge$ " في الاتجاهين " $\rightarrow$ " و " $\leftarrow$ " ويعني  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|----------------------------------------------|-----------------------|
|     |     |                   |                   |                                              |                       |
|     |     |                   |                   |                                              |                       |
|     |     |                   |                   |                                              |                       |
|     |     |                   |                   |                                              |                       |

تحقق من فهمك (6)

ما قيم الصحة للتقرير المركب  $p \leftrightarrow \sim q$ 

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \leftrightarrow \sim q$ |
|-----|-----|----------|----------------------------|
|     |     |          |                            |
|     |     |          |                            |
|     |     |          |                            |
|     |     |          |                            |



مثال (7) كَوْن جدول الصحة للعبارة التالية :  $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$

الحل:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $q \leftrightarrow p$ | $\sim (p \wedge q)$ | $\sim (q \leftrightarrow p)$ | $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$ |
|-----|-----|--------------|-----------------------|---------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------|
|     |     |              |                       |                     |                              |                                                     |
|     |     |              |                       |                     |                              |                                                     |
|     |     |              |                       |                     |                              |                                                     |
|     |     |              |                       |                     |                              |                                                     |

تحقق من فهمك (7)

كَوْن جدول الصحة للعبارة التالية :  $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-------------------|-----------------------------------------------------|
|     |     |          |                 |                   |                                                     |
|     |     |          |                 |                   |                                                     |
|     |     |          |                 |                   |                                                     |
|     |     |          |                 |                   |                                                     |

| اسم أداة الربط      | أداة الربط                | رمز أداة الربط    |
|---------------------|---------------------------|-------------------|
| النفى               | ( ليس )                   | $\sim$            |
| الوصل               | ( و )                     | $\wedge$          |
| الفصل               | ( أو )                    | $\vee$            |
| الشرط               | ( إذا كان ... فإن .. )    | $\rightarrow$     |
| الشرط المزدوج       | ( ... إذا وفقط إذا .... ) | $\leftrightarrow$ |
| وأهمية وجود الأقواس |                           |                   |



## البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-19) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) العبارة "العدد 3 عددٌ أولي" هي عبارة بسيطة.  
لأنها جملة خبرية تفيد خبراً واحداً مستقلاً.

(2) العبارة "العدد 2 عددٌ أولي وزوجي" هي عبارة بسيطة.  
لأنها عبارة مركبة تتضمن خبرين وأداة الربط "و"

(3) عدد الإمكانيات الممكنة للعبارة البسيطة تساوي 2  
العبارة البسيطة لها احتمالان فقط: إما صائبة (T) أو خاطئة (F)

(4) عدد الإمكانيات الممكنة للعبارة المركبة من عبارتين أوليتين يساوي 8  
عدد الاحتمالات للعبارة المركبة من تقريرين بسيطين هو  $2^2 = 4$  وليس 8.

(5) إذا كانت  $p$  عبارة بسيطة فإن نفي  $p$  هي عبارة بسيطة أيضاً.  
نفي التقرير البسيط يتعامل مع خبر واحد ويبقى تقريراً بسيطاً.

(6) لأي عبارتين  $p, q$  يكون  $(p \wedge q)$  صحيحاً إذا كان كل من  $p, q$  صحيحاً.  
أداة الوصل  $\wedge$  لا تصدق إلا بصدق العبارتين معاً.

(7) لأي عبارتين  $p, q$  يكون  $(p \vee q)$  صحيحاً إذا كان كل من  $p, q$  صحيحاً.

أداة الفصل  $\vee$  تكون صائبة إذا كانت إحدى العبارتين على الأقل صائبة، وبالتالي تصدق عند صدق كليهما

(8) لأي عبارتين  $p, q$  يكون  $(p \rightarrow q)$  صحيحاً إذا كان كل من  $p, q$  خاطئاً.  
من جدول صحة العبارة الشرطية  $F \rightarrow F$ : تعطي قيمة صائبة T.

(9) لأي عبارتين  $p, q$  يكون  $(p \leftrightarrow q)$  خاطئاً إذا كان  $p$  صحيحاً،  $q$  خاطئاً.  
الشرط المزدوج  $p \leftrightarrow q$  يكون خاطئاً دائماً إذا اختلفت قيمتا الصحة  $(T \leftrightarrow F = F)$

(10) نفي العبارة " $3 + 5 < 9$ " هو " $3 + 5 \geq 9$ "  
لأن نفي أصغر من ( $<$ ) هو أكبر من أو يساوي ( $\geq$ )

(11) نفي العبارة " $2 \times 4 = 8$ " هو " $2 \times 4 \neq 8$ "  
نفي علاقة التساوي ( $=$ ) هو نفي مباشر بعدم التساوي ( $\neq$ )

(12) نفي العبارة "العدد 3 هو عدد فردي" هو "العدد 3 هو عدد أولي".  
النفي الصحيح هو "العدد 3 ليس عدداً فردياً" (أو: العدد 3 عدد زوجي).

(13) نفي العبارة "الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية"  
هو "الرياض ليست عاصمة المملكة العربية السعودية".

نفي العبارة الخبرية المثبتة يكون بإدخال أداة النفي "ليست".  
(14) القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية أو لندن عاصمة فرنسا.

عبارة فصل  $p \vee q$ ؛ حيث "القاهرة عاصمة مصر" صائبة (T)، ويكفي لصحة

الفصل صحة أحد الجزأين.  $(T \vee F = T)$

(15) الدوحة عاصمة قطر ومسقط عاصمة عمان.

عبارة وصل  $p \wedge q$  وكلا الجزأين صائب جغرافياً.  $(T \wedge T = T)$



(a) (b)

(16) إذا كان  $2 + 3 = 5$  فإن  $2^3 = 8$ عبارة شرطية  $p \rightarrow q$ ؛ المقدم  $2 + 3 = 5$  صائب (T) والتالي  $2^3 = 8$  صائب (T)، ف  $T \rightarrow T = T$ .

(17) إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

(a) (b)

التقرير يمثل نص نظرية فيثاغورث الصحيحة دائماً.

(a) (b)

(18) يتشابه المثلثان إذا تطابقت زواياهما المتناظرة أو تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة.

يتشابه المثلثان إذا تحقق أحد الشرطين على الأقل.

(a) (b)

(19) إذا كانت  $p$  صحيحة،  $q$  صحيحة،  $r$  خاطئة، فتكون العبارة  $(p \rightarrow q) \vee r$  صحيحةبما أن  $p$  صائبة و  $q$  صائبة فإن العبارة الشرطية  $p \rightarrow q$  تكون صائبة  $(T \rightarrow T = T)$  بصرف النظر عن قيمة  $r$ .

■ في البنود من (1-6) ظلل اختر الإجابة الصحيحة :

(1) العبارة  $p \rightarrow \sim p$  تكافئ :(a)  $\sim p \wedge p$ (b)  $\sim p$ (c)  $\sim p \rightarrow p$ (d)  $p \rightarrow p$ (2) العبارة  $p \rightarrow p$ 

(a) صحيحة دائماً

(b) صحيحة مرة واحدة

(c) خاطئة دائماً

(d) خاطئة مرة واحدة دائماً

السبب: إذا كانت  $p$  صائبة فإن  $T \rightarrow T = T$ ، وإذا كانت  $p$  خاطئة فإن  $F \rightarrow F = T$ ؛

فهي تحصيل حاصل.

(3) أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(a) الكويت في آسيا إذا وفقط إذا  $35 \div 7 = 8$ (b) إذا كانت الكويت تقع في آسيا فإن  $35 \div 7 = 8$ (c)  $\frac{2}{5} < \frac{3}{2}$  و  $\frac{5}{2} < \frac{3}{2}$ 

(d) ليس أيّاً مما سبق.

السبب: كلا التقريرين صائب عددياً والوصل بين صائبين صائب  $(T \wedge T = T)$ 

(4) أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(a) لندن ليست عاصمة أوربية أو الموز من الفاكهة. (b) لندن عاصمة أوربية وألمانيا في أفريقيا.

(c) ألمانيا ليست في أفريقيا ولندن ليست عاصمة أوربية. (d) الموز ليس من الفاكهة أو لندن ليست عاصمة أوربية.

السبب: عبارة فصل  $F \vee T = T$ ؛ لأن الشق الثاني "الموز من الفاكهة" تقرير صائب.

(5) إن العبارة الخاطئة فيما يلي هي :

(a) 16 من مضاعفات العدد 4 أو 16 عدد أولي. (b)  $0 < \pi - 3$  و  $\frac{3}{8} < \frac{2}{5}$ (c) إذا كان  $3 \times 3 = 9$  فإن 9 من عوامل 3 (d)  $(-8)^{\frac{2}{3}} = -4$  إذا وفقط إذا  $3 \times 6 = 21$ السبب: عبارة شرطية مقدمها  $3 \times 3 = 9$  صائب (T) وتاليها "9 من عوامل 3" خاطئ (F)؛ والشرط  $T \rightarrow F$  هو الحالة الوحيدة الخاطئة (F).

رمز المجموع  $\Sigma$ 

## 4-3

## تعريف

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n, n \in \mathbb{Z}^+$$

(وتقرأ مجموع  $a_k$  من  $k=1$  إلى  $k=n$ ) حيث  $n$  عدد صحيح موجب

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ ويسمى } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \text{ مفكوك}$$

## نلاحظ أن :

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ عدد حدود مفكوك } n \text{ هو}$$

مثال (1) عبّر باستخدام رمز المجموع  $\Sigma$  عن  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$

## الحل:

## قاعدة

$$\sum_{k=i}^n a_k = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \dots + a_n, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

عدد حدود المفكوك يساوي  $(n-i+1)$

مثال (2) عبّر باستخدام رمز المجموع  $\Sigma$  عن  $a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{15}$

## الحل:

تحقق من فهمك (1)

عبّر باستخدام رمز المجموع  $\Sigma$  عن  $5+6+7+8+\dots+45$



مثال (3) اكتب مفكوك  $\sum_{k=10}^{40} k$  ، ثم أوجد عدد حدود المفكوك

الحل:

مثال (4) اكتب مفكوك  $\sum_{k=1}^{50} k^2$

الحل:

تحقق من فهمك (2)  
اكتب مفكوك  $\sum_{k=1}^{10} k^3$

مثال (5) اكتب مفكوك  $\sum_{k=1}^{50} (k+k^2)$

الحل:





نتيجة:

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k, n \in \mathbb{Z}^+$$

تحقق من فهمك (3)

اكتب مفكوك  $\sum_{k=1}^8 (2k+1)$

مثال (6) أوجد قيمة  $\sum_{k=1}^3 \left(k + \frac{1}{k}\right)$

الحل:



تحقق من فهمك (4)

$$\sum_{k=1}^4 \left(3 + \frac{1}{k}\right) \text{ اكتب مفكوك}$$

$$\sum_{k=1}^{10} 3k \text{ أوجد قيمة}$$

مثال (7)

الحل:

تحقق من فهمك (5)

$$\sum_{k=1}^7 2k \text{ اكتب مفكوك}$$



مثال (8) أوجد قيمة  $\sum_{k=1}^5 (5k-3)$

الحل:

تحقق من فهمك (6)  
اكتب مفكوك  $\sum_{k=1}^8 (3k-5)$

نتيجة:

$$\sum_{k=1}^n ck = c \sum_{k=1}^n k, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$$

نتيجة:

$$\sum_{k=1}^n c = n \times c, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$$

بصفة عامة:

$$\sum_{k=i}^n c = c(n-i+1)$$



$$\sum_{k=4}^8 7$$

مثال (9) أوجد قيمة

الحل:

تحقق من فهمك (7)

$$\sum_{k=2}^6 10$$

اكتب مفكوك

$$\sum_{k=1}^{13} \frac{5}{2} k$$

مثال (10) أوجد قيمة

الحل:



## البند الموضوعية:

■ في البنود من (1 - 4) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(a) (b) 
$$\sum_{k=0}^3 k^3 = \left( \sum_{k=0}^3 k \right)^3 \quad (1)$$

الطرف الأيمن  $(\sum_{k=0}^3 k)^3 = (0 + 1 + 2 + 3)^3 = 6^3 = 216$

الطرف الأيسر  $\sum_{k=0}^3 k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 0 + 1 + 8 + 27 = 36 \neq 216$

(a) (b) 
$$\sum_{k=2}^5 10 = 10(10-2) \quad (2)$$

الطرف الأيسر: عدد الحدود  $= 5 - 2 + 1 = 4 \Rightarrow 10 \times 4 = 40$

الطرف الأيمن  $10(10 - 2) = 10 \times 8 = 80 \neq 40$

(a) (b) 
$$\sum_{k=0}^5 (k^5) = 16 \quad (3)$$

الطرف الأيسر  $\sum_{k=0}^5 k^0 = 1^0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$ ، ولا تساوي 16.

(a) (b) 
$$\sum_{k=1}^{10} 3k = 3 \sum_{k=1}^{10} k \quad (4)$$

خاصية خطية رمز المجموع تسمح بإخراج المعامل الثابت خارج رمز المجموع  $\sum c k = c \sum k$

■ في البنود من (1 - 4) اختر الإجابة الصحيحة:

(1)  $1 + 3 + 9 + 27$  تساوي:

(a)  $\sum_{k=0}^3 3k$  (b)  $\sum_{k=1}^3 k^3$  (c)  $\sum_{k=1}^3 3^k$  (d)  $\sum_{k=0}^3 3^k$

السبب: بالتعويض: عند  $k = 0 \Rightarrow 3^0 = 1$ ،  $k = 1 \Rightarrow 3^1 = 3$ ،  $k = 2 \Rightarrow 3^2 = 9$ ،

،  $k = 3 \Rightarrow 3^3 = 27$ ، ومجموعها يطابق  $1 + 3 + 9 + 27$  تماماً.

(2) إذا كانت  $\sum_{k=2}^n k = 9$  فإن  $n$  تساوي:

(a) 3 (b) 7 (c) 4 (d) 9

السبب: بفك المجموع: عند  $k = 2, 3, 4$  يكون المجموع  $2 + 3 + 4 = 9$ ؛ إذاً الحد النهائي  $n = 4$ .



(3) إذا كانت  $\sum_{k=m}^3 k^3 = 36$  فإن  $m$  تساوي:

- (a)  $\mathbb{Z}$  (b) 3 (c) 2 (d) 1

السبب: الحدود هي  $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ ؛ إذاً البداية من  $k = 1$

أي  $m = 1$ .

(4)  $\sum_{k=1}^n k - \left( \sum_{k=1}^n (2k-1) \right)$  تساوي:

- (a)  $n - 1$  (b)  $n - r$  (c)  $n - \sum_{k=1}^n k$  (d)  $1 - \sum_{k=1}^n k$

السبب:

$$\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n (2k-1) = \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = - \sum_{k=1}^n k + n = n - \sum_{k=1}^n k$$



## 4-4 مقاييس التشتت - الانحراف المعياري

## أولاً: المدى

## تعريف: المدى

المدى لمجموعة من القيم هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة ويرمز له بالرمز  $R$   
المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة  
وفي التوزيعات التكرارية يكون المدى هو الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة و الحد الأدنى للفئة الأولى  
المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى

يعتبر المدى من أبسط مقاييس التشتت لسهولة إيجاده حسابياً.

أوجد المدى لكل من :

a) القيم 32,31,24,21,18,24

b) القيم 60,25,24,16,1,24

c) التوزيع التكراري :

مثال (1)

| الفئات  | 10 - | 25 - | 40 - | 55 - | 70 - | 85 - |
|---------|------|------|------|------|------|------|
| التكرار | 4    | 6    | 8    | 5    | 3    | 2    |

الحل:

تحقق من فهمك (1)

يبين الجدول أدناه معدل السرعة  $km/h$  لمجموعة من السيارات على إحدى الطرق :

| الفئات  | 60 - | 70 - | 80 - | 90 - |
|---------|------|------|------|------|
| التكرار | 35   | 65   | 70   | 30   |

أوجد المدى لقيم هذه البيانات



## ثانيًا: التباين والانحراف المعياري

## تعريف: التباين

ليكن لدينا مجموعة من القيم  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  يُعرّف التباين على أنه المتوسط الحسابي لمجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي  $\bar{x}$  ويرمز له بالرمز  $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n} \quad \text{أي أن:}$$

## تعريف: الانحراف المعياري

يُعرّف الانحراف المعياري لمجموعة من القيم  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  على أنه الجذر التربيعي الموجب للتباين ويرمز له بالرمز  $\sigma$  أي أن:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}}$$

أوجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية:

مثال (2)

3, 7, 5, 4, 6, 8, 2

الحل:

| $x$ | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ |
|-----|---------------|-------------------|
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |





تحقق من فهمك (2)

أوجد التباين و الانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية :

a) 12, 8, 10, 6, 4, 14, 2

b) 9, 5, 7, 3, 11, 1, 6

| $x$ | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ |
|-----|---------------|-------------------|
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |

| $x$ | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ |
|-----|---------------|-------------------|
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |
|     |               |                   |



## التباين والانحراف المعياري للتوزيعات التكرارية:

(a) ذات الجدول التكراري البسيط:

التباين

$$\sigma^2 = \frac{\left[ \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f}$$

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left[ \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f}}$$

حيث  $x_k$ : القيم  $f$ : تكرار القيم  $\bar{x}$ : المتوسط الحسابي

أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسيط التالي :

مثال (3)

|         |    |    |    |    |
|---------|----|----|----|----|
| القيمة  | 10 | 20 | 30 | 40 |
| التكرار | 6  | 7  | 6  | 1  |

الحل:

| $x$ | $f$ | $x.f$ | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(x - \bar{x})^2.f$ |
|-----|-----|-------|---------------|-------------------|---------------------|
|     |     |       |               |                   |                     |
|     |     |       |               |                   |                     |
|     |     |       |               |                   |                     |
|     |     |       |               |                   |                     |
|     |     |       |               |                   |                     |



## (b) التوزيعات التكرارية ذات الفئات:

هذه الحالة نوجد مراكز الفئات ونستعملها بدلاً من قيم  $x$  :  
حيث  $x$  : مركز الفئة  $f$  : تكرار الفئة  $\bar{x}$  : المتوسط الحسابي

يبين الجدول أدناه أطوال 20 طفلاً حديثي الولادة إلى أقرب سنتيمتر

|         |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|
| الفئات  | 34 - | 36 - | 38 - | 40 - |
| التكرار | 4    | 5    | 8    | 3    |

مثال (4)

أوجد التباين والانحراف المعياري لأطوال الأطفال

الحل:

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

1 - نكوّن الجدول التالي :

| الفئات | $x$ | $f$ | $x.f$ | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(x - \bar{x})^2.f$ |
|--------|-----|-----|-------|---------------|-------------------|---------------------|
|        |     |     |       |               |                   |                     |
|        |     |     |       |               |                   |                     |
|        |     |     |       |               |                   |                     |
|        |     |     |       |               |                   |                     |
|        |     |     |       |               |                   |                     |



أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسط التالي:

|         |     |     |      |      |      |      |      |
|---------|-----|-----|------|------|------|------|------|
| القيمة  | 4 - | 8 - | 12 - | 16 - | 20 - | 24 - | 28 - |
| التكرار | 4   | 5   | 2    | 7    | 6    | 10   | 6    |

مثال (5)

الحل:

| الفئات | $x$ | $f$ | $x \cdot f$ | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(x - \bar{x})^2 \cdot f$ |
|--------|-----|-----|-------------|---------------|-------------------|---------------------------|
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |



تحقق من فهمك (3)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات 60 متعلماً في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى 100 درجة

| الفئات  | 0 - | 20 - | 40 - | 60 - | 80 - |
|---------|-----|------|------|------|------|
| التكرار | 4   | 6    | 16   | 24   | 10   |

أوجد المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  والتباين  $\sigma^2$  والانحراف المعياري  $\sigma$  لقيم هذه البيانات

| الفئات | $x$ | $f$ | $x \cdot f$ | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(x - \bar{x})^2 \cdot f$ |
|--------|-----|-----|-------------|---------------|-------------------|---------------------------|
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |
|        |     |     |             |               |                   |                           |

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو  $\sigma=6$  ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو 540 ، فما عدد قيم هذه البيانات ؟

مثال (6)

الحل:

تحقق من فهمك (4)

1- الانحراف المعياري لمجموعة قيم من البيانات هو  $\sigma=4$  ومجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو 480 ، فما عدد قيم هذه البيانات ؟



## البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-6) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) الانحراف المعياري للقيم 2, 4, 6, 8 هو:

(a) 2

(b) 4

(c) 5

(d)  $\sqrt{5}$

السبب:

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\sum (x - \bar{x})^2 = (2 - 5)^2 + (4 - 5)^2 + (6 - 5)^2 + (8 - 5)^2 = 9 + 1 + 1 + 9 = 20$$

$$\sigma^2 = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

(2) إذا كان التباين لمجموعة من القيم يساوي 4 فإن الانحراف المعياري لها :

(a) 16

(b) 8

(c) 4

(d) 2

السبب: الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين.  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4} = 2$ .

(3) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم يساوي 6 فإن التباين يساوي:

(a)  $36^2$

(b) 6

(c) 36

(d) 72

السبب: التباين هو مربع الانحراف المعياري.  $\sigma^2 = (6)^2 = 36$ .

(4) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم = 5 ومجموع مربعات انحرافات

هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو = 100 فإن عدد القيم يساوي:

(a) 10

(b) 20

(c) 4

(d) 25

السبب:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow (5)^2 = \frac{100}{n} \Rightarrow 25 = \frac{100}{n} \Rightarrow n = \frac{100}{25} = 4$$

(5) إذا كان الانحراف المعياري لأربع قيم هو 5 فإن مجموع مربعات انحرافات

القيم عن متوسطها الحسابي:

(a) 25

(b) 100

(c) 20

(d) 4

$$\sigma = 5 \Rightarrow \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sum (x - \bar{x})^2 = n \cdot \sigma^2 = 4 \times 25 = 100$$

