

يمكنك مراجعته الحلول من خلال المذكرة المحلولة
للتأكد من حلك والتدرب على الحل الصحيح

المذكرة المختصرة

الجزء الثاني

الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول

"لا تبحث عن الحل الأسرع ... بل عن الفهم الذي لا يُنسى"

للحصول على المذكرة المحلولة اشترك في قناتي اليوتيوب والتليجرام
وسيصلك كل ما هو جديد



اضغط هنا

للاضمام لجروب التليجرام

YouTube

اضغط هنا

للاشتراك في قناة اليوتيوب



HOSAMBAYOUMI199

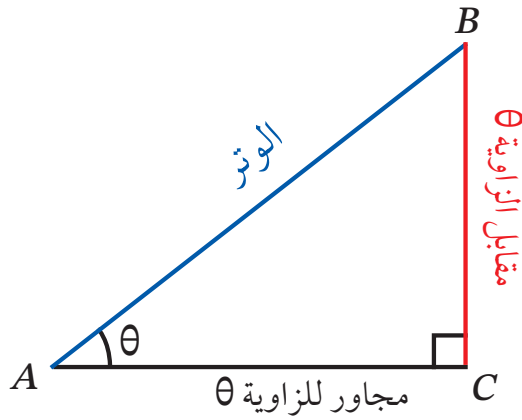


رياضيات

إعداد: أ. حسام بيومي

3-1 النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها

في أي مثلث قائم يكون :



$$\textcircled{1} \sin \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB}$$

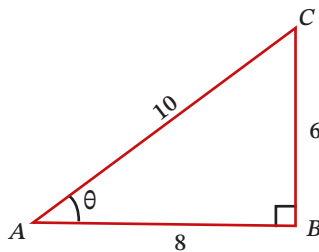
$$\textcircled{2} \cos \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\textcircled{3} \tan \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AC}$$

- هذه العلاقات الثلاث تسمى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ
- هذه النسب تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وقياس الزاويتين الحادتين فيه .



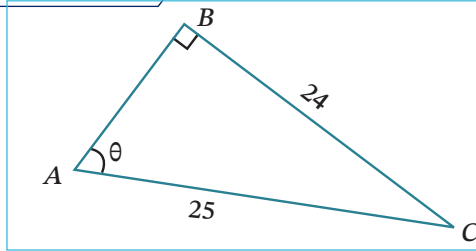
في الشكل المقابل :

ABC مثلث قائم الزاوية في B

أوجد : $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$

مثال (1)





تحقق من فهمك (2)

في الشكل المقابل : أوجد:

طول $\overline{AB}$, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$

مقلوبات النسب المثلثية الأساسية

① مقلوب $\sin \theta$ هو $\frac{1}{\sin \theta}$ ويسمى $(\operatorname{cosecant} \theta)$ ويرمز له بالرمز $\operatorname{csc} \theta$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\sin \theta} : \sin \theta \neq 0 \Rightarrow \operatorname{csc} \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}$$

② مقلوب $\cos \theta$ هو $\frac{1}{\cos \theta}$ ويسمى $(\operatorname{secant} \theta)$ ويرمز له بالرمز $\sec \theta$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} : \cos \theta \neq 0 \Rightarrow \sec \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}$$

③ مقلوب $\tan \theta$ هو $\frac{1}{\tan \theta}$ ويسمى $(\operatorname{cotangent} \theta)$ ويرمز له بالرمز $\cot \theta$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} : \tan \theta \neq 0 \Rightarrow \cot \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}$$

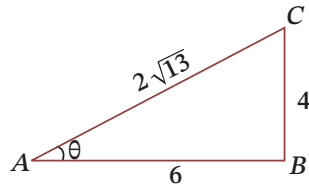
لاحظ أن: حاصل ضرب النسبة المثلثية الأساسية في مقلوبها يساوي 1

$$\textcircled{1} (\sin \theta)(\operatorname{csc} \theta) = 1 : \sin \theta \neq 0$$

$$\textcircled{2} (\cos \theta)(\sec \theta) = 1 : \cos \theta \neq 0$$

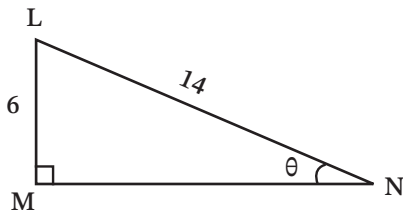
$$\textcircled{3} (\tan \theta)(\cot \theta) = 1 : \tan \theta \neq 0$$





في الشكل المرسوم :

- مثال (3)
- 1 أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية في B
 - 2 أوجد : $\csc \theta$, $\sec \theta$, $\cot \theta$



تحقق من فهمك (3)

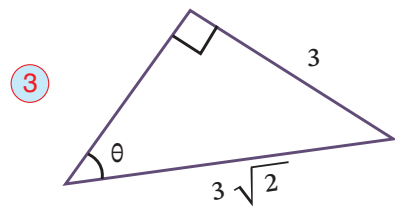
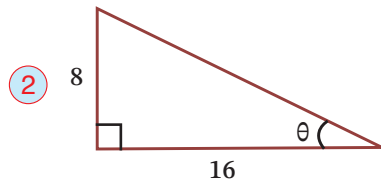
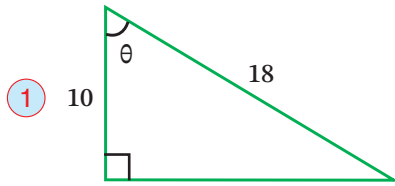
في الشكل المقابل أوجد :

- 1 طول $\overline{MN}$
- 2 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$
- 3 $\sec \theta$, $\csc \theta$, $\cot \theta$

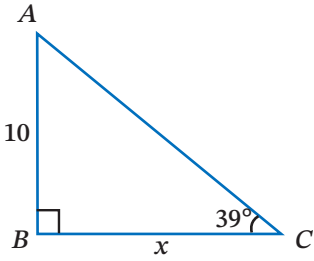
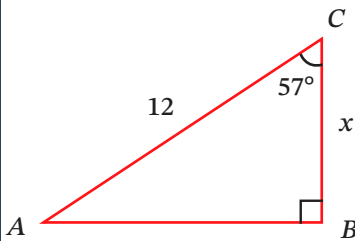


إيجاد قياس زاوية باستخدام النسب المثلثية

تحقق من فهمك (4)

أوجد قياس الزاوية θ في كل مما يلي :

إيجاد طول ضلع في مثلث قائم باستخدام النسب المثلثية

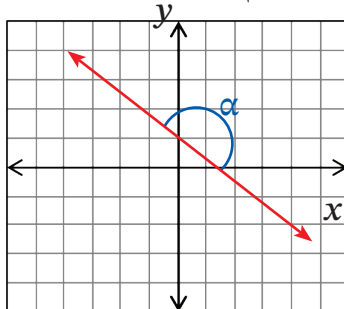
مثال (5) (1) في الشكل المقابل : أوجد قيمة x (2) في الشكل المقابل : أوجد قيمة x 

$$m = \tan \theta$$

أي إن ميل المستقيم يساوي ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

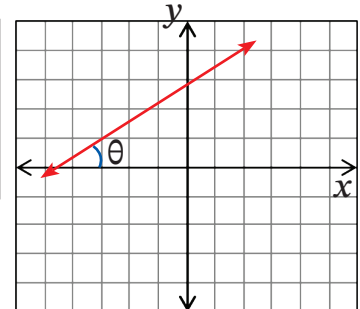
زاوية منفرجة (ميل سالب)

إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم يكون (سالبًا).



زاوية حادة (ميل موجب)

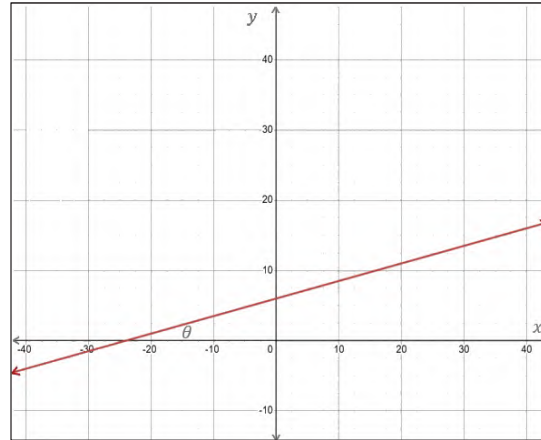
إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم يكون (موجبًا).



احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم $L : y = \frac{1}{4}x + 6$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني .

(مثال 6)

الحل:



النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

النسب المثلثية للزاوية 45°

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \csc(45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec(45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(45^\circ) = 1 \Rightarrow \cot(45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

النسب المثلثية للزاوية 60°

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \csc(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

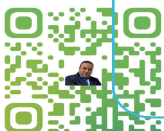
$$\tan(60^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow \cot(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

النسب المثلثية للزاوية 30°

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \csc(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

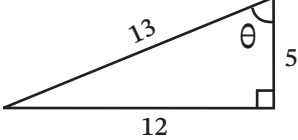
$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$



البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-8) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

- (1) في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $\cos(\hat{A}) = 1$ حيث $\sec(\hat{A}) \neq 0$ (a) (b)
 السبب: مقلوب دالة جيب التمام: $\sec(\hat{C}) = \frac{1}{\cos(\hat{C})}$ ، وحاصل ضرب أي نسبة في مقلوبها يساوي 1.

- (2) في الشكل المرسوم:

 (a) (b) $\sin(90^\circ - \theta)$ يساوي $\frac{5}{13}$

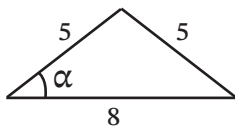
- السبب: من المثلث القائم: المجاور للزاوية θ هو 12، والوتر 13،
 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta = \frac{12}{13} \neq \frac{5}{13}$

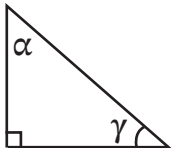
- (3) في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $\sin(\hat{C}) \cdot \cot(\hat{C}) = \cos(\hat{C})$ حيث $\sin(\hat{C}) \neq 0$ (a) (b)
 السبب: $\cot(\hat{C}) = \frac{\cos(\hat{C})}{\sin(\hat{C})}$ وبالتالي $\sin(\hat{C}) \cdot \frac{\cos(\hat{C})}{\sin(\hat{C})} = \cos(\hat{C})$

- (4) في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $AC = (AB) \cos(\hat{C})$ (a) (b)
 السبب: في المثلث القائم في B ، الوتر هو AC والمقابل لـ C هو AB ، فالصحيح أن
 $\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \sin(\hat{C})$

- (5) إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في B فإن $\cos(\hat{C}) \cdot \tan(\hat{C}) = \sin(\hat{C})$ حيث $\cos(\hat{C}) \neq 0$ (a) (b)
 السبب: $\tan(\hat{C}) = \frac{\sin(\hat{C})}{\cos(\hat{C})}$ وبالتالي $\cos(\hat{C}) \cdot \frac{\sin(\hat{C})}{\cos(\hat{C})} = \sin(\hat{C})$

- (6) قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم $y - x = 6$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي 45° (a) (b)
 السبب: بوضع المعادلة على الصورة $y = x + 6$ نجد أن الميل $m = 1$ ، ومنها
 $\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$

- (7) في المثلث المرسوم:

 (a) (b) $\sin(\alpha) = \frac{5}{8}$

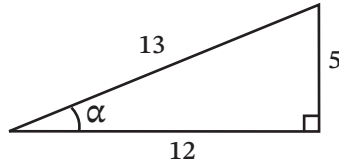
- السبب: المثلث ليس قائم الزاوية
 (8) في المثلث المرسوم:

 (a) (b) $\sin(\gamma) = \cos(\alpha)$

- السبب: في المثلث القائم الزاوية الحادتان متتامتان ($\alpha + \gamma = 90^\circ$)، وبالتالي
 $\sin(\gamma) = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$



■ في البنود من (1-6) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

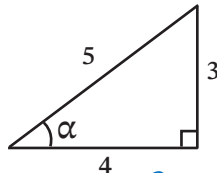
(1) في الشكل المرسوم $\sin(\alpha)$ تساوي:



- (a) $\frac{5}{12}$ (b) $\frac{5}{13}$
(c) $\frac{12}{13}$ (d) $\frac{12}{5}$

السبب: $\sin(\alpha) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{13}$

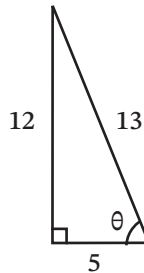
(2) في الشكل المرسوم قيمة $\frac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ تساوي :



- (a) 7 (b) -7
(c) 2 (d) -1

السبب: المقابل لـ α هو 3 والمجاور 4 والوتر 5 : $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ ، $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$

$$\frac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{7}{5}}{-\frac{1}{5}} = -7$$



(3) في المثلث المرسوم :
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ يساوي :

- (a) -1 (b) 0
(c) 1 (d) $\frac{17}{13}$

السبب: متطابقة فيثاغورس المثلثية الأساسية تنص على أن $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

دائماً لأي زاوية.

(4) قيمة $\sin(30^\circ) \cos(60^\circ) + \cos(30^\circ) \sin(60^\circ)$ تساوي :

- (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

السبب: $\sin(30^\circ) \cos(60^\circ) + \cos(30^\circ) \sin(60^\circ)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

(5) قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم $L: y = 5 + \sqrt{3}x$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي:

- (a) 30° (b) 60° (c) 45° (d) 135°

السبب: الميل $m = \sqrt{3}$ ، $\tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

(6) إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في B فإن قيمة $\cos(90^\circ - A)$ هي :

- (a) $\frac{BC}{AC}$ (b) $\frac{BC}{AB}$ (c) $\frac{AB}{BC}$ (d) $\frac{AB}{AC}$

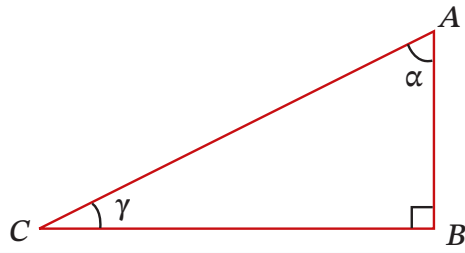
السبب: $\cos(90^\circ - A) = \sin(A) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$



حل المثلث القائم

3-2

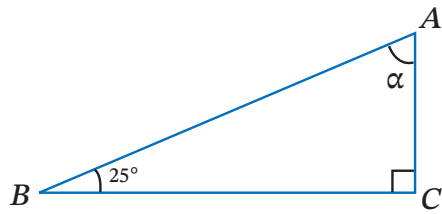
حل المثلث القائم الزاوية

حل المثلث ABC القائم الزاوية في B مثال (1) إذا علم أن : $AB=3cm$, $BC=4cm$

الحل:

تحقق من فهمك (2)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في B حيث : $m(\hat{A})=42^\circ$, $AB=12cm$ 



حل المثلث ABC القائم الزاوية في C
إذا علم أن: $BA=40cm$, $m(\hat{B})=25^\circ$

مثال (3)

الحل:

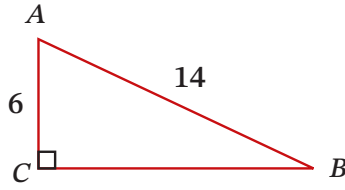
تحقق من فهمك (3)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في C إذا علم أن: $AC=20cm$, $m(\hat{B})=75^\circ$



البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-5) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

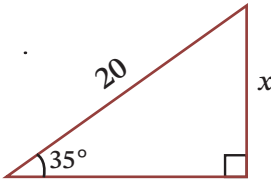


(1) في الشكل المرسوم $m(\hat{B})$ تساوي تقريباً:

- (a) 31° (b) 20°
(c) 27° (d) 25°

السبب: $\sin(\hat{B}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ ،

ومنها $m(\hat{B}) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 25.38^\circ \approx 25^\circ$

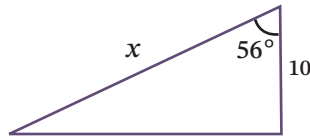


(2) في الشكل المقابل قيمة x تساوي تقريباً:

- (a) 13 (b) 11.5
(c) 14 (d) 15

السبب: المقابل هو x والوتر هو 20: $\sin(35^\circ) = \frac{x}{20}$

$x = 20 \cdot \sin(35^\circ) \approx 20 \times 0.5736 \approx 11.47 \approx 11.5$

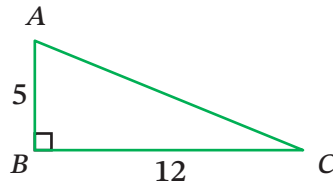


(3) في الشكل المقابل قيمة x تساوي تقريباً:

- (a) 15 (b) 16
(c) 18 (d) 14

السبب: المجاور هو 10 والوتر هو x : $\cos(56^\circ) = \frac{10}{x}$

$x = \frac{10}{\cos(56^\circ)} \approx \frac{10}{0.5592} \approx 17.88 \approx 18$

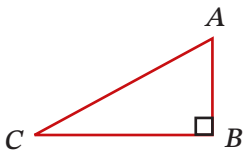


(4) في الشكل المقابل $m(\hat{C})$ تساوي:

- (a) 22.6° (b) 25°
(c) 32° (d) 26.4°

السبب: المقابل = 5 والمجاور = 12: $\tan(\hat{C}) = \frac{5}{12}$

$m(\hat{C}) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 22.62^\circ \approx 22.6^\circ$



(5) في الشكل المقابل :

ABC مثلث قائم الزاوية في B ، إذا كان :

$AB = 8 \text{ cm}$ ، $\sin(\hat{C}) = 0.4$ ، فإن AC يساوي :

- (a) 9 cm (b) 10 cm (c) 12 cm (d) 20 cm

السبب: $\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{AC} \Rightarrow 0.4 = \frac{8}{AC} \Rightarrow AC = \frac{8}{0.4} = 20 \text{ cm}$

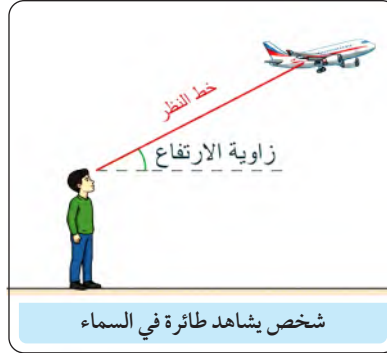


3-3 زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض

زاوية الارتفاع

هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وبين خط النظر المتجه إلى الأعلى نحو الشيء المراد رصده .

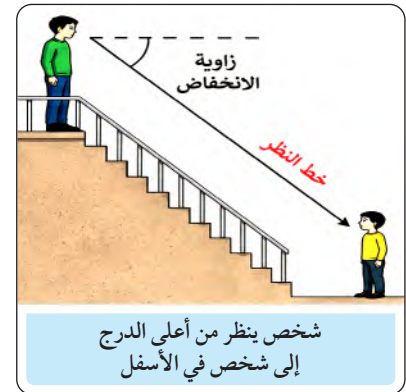
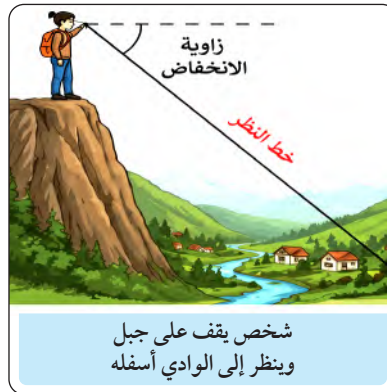
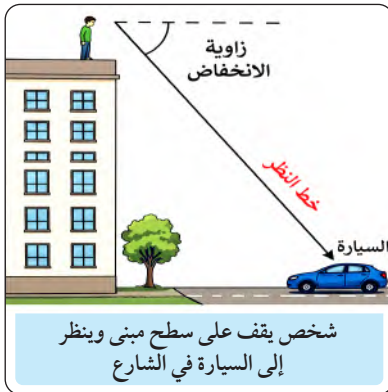
أمثلة حياتية:



زاوية الانخفاض

هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وبين خط النظر المتجه إلى الأسفل نحو الشيء المراد رصده .

أمثلة حياتية:



تحقق من فهمك (1)

أثناء تحية العلم ينظر فهد إلى قمة سارية العلم بزاوية ارتفاع مقدارها 85° ، فإذا كان ارتفاع سارية العلم هي 5 m كم يبلغ بعد فهد عن قاعدة السارية ؟

تحقق من فهمك (2)

يقف شخص على مسافة 1000 m من قاعدة مبنى ارتفاعه 300 m ما قياس زاوية الارتفاع التي يكونها مع قمة المبنى ؟

مثال (3)

في محمية صباح الأحمد الطبيعية يقف موظف الرصد فوق برج مراقبة خشبي ارتفاعه 12 m شاهد الموظف " أرنب عربي " يقترب من شجيرة صغيرة فوجد أن زاوية انخفاض موقع الأرنب تساوي 40° ، أوجد بعد الأرنب لأقرب متر عن قاعدة برج المراقبة في تلك اللحظة ؟





رصد قارب من قمة منارة جزيرة قاروه ارتفاعها 14 m ، فوجد أن قياس زاوية انخفاضه $34^\circ 25'$.
أوجد إلى أقرب متر البعد بين القارب وقمة المنارة .

مثال (4)

تحقق من فهمك (4)

قاس بحار زاوية انخفاض سفينة من أعلى نقطة على قمة منارة في جزيرة أم المرادم ارتفاعها 23 m فوجد أنها 39° ، أوجد بعد السفينة عن قمة المنارة لأقرب متر .



البنود الموضوعية:

في البنود من (1-4) ظلل الإجابة الصحيحة :

(1) من نقطة على سطح الأرض تبعد 40 m عن قاعدة برج قياست زاوية ارتفاع قمة برج فكانت 63° ، فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوي :

- (a) 20.38 m (b) 78.5 m
(c) 31 m (d) 36 m

.....السبب: $\tan(63^\circ) = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 40 \cdot \tan(63^\circ) \approx 40 \times 1.9626 \approx 78.5\text{ m}$

(2) طائرة ورقية طول خيطها 34 m وكانت زاوية ارتفاع الطائرة 70° فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر يساوي :

- (a) 36.18 m (b) 10 m
(c) 28 m (d) 32 m

.....السبب: طول الخيط هو الوتر = 34 والارتفاع هو المقابل: $\sin(70^\circ) = \frac{h}{34}$
..... $h = 34 \cdot \sin(70^\circ) \approx 31.95\text{ m} \approx 32\text{ m}$

(3) يسير شخص في طريق منحدر وعندما قطع الشخص مسافة 60 m وصل الشخص لنقطة ارتفاعها عن سطح الأرض 6 m ، فإن زاوية ارتفاع ميل الطريق على سطح الأرض يساوي تقريباً :

- (a) 5.74° (b) 89.43°
(c) 7° (d) 9°

.....السبب: المسافة على الطريق هي الوتر = 60 والارتفاع هو المقابل = 6 : $\sin \theta = \frac{6}{60} = 0.1$
..... $\theta = \sin^{-1}(0.1) \approx 5.74^\circ$

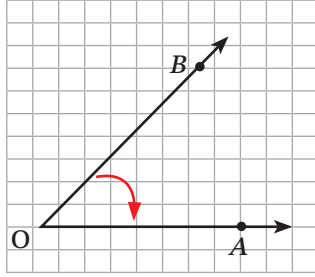
(4) برج طوله 12 m يلقي ظلًا على الأرض طوله 8 m فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ لأقرب درجة تساوي :

- (a) 33.69° (b) 51°
(c) 48° (d) 56.30°

.....السبب: $\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{12}{8} = 1.5$
..... $\theta = \tan^{-1}(1.5) \approx 56.3099^\circ \approx 56.30^\circ$

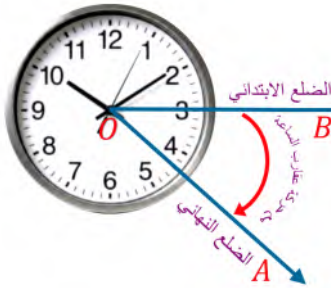


(3-4-a) الزاوية الموجهة



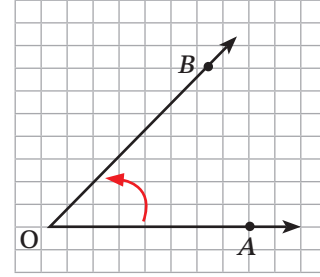
(BOA)

يمثل الزوج المرتب $(\vec{OA}, \vec{OB})$ حيث :
العنصر الأول $\vec{OB}$ الضلع الابتدائي للزاوية
العنصر الثاني $\vec{OA}$ الضلع النهائي للزاوية



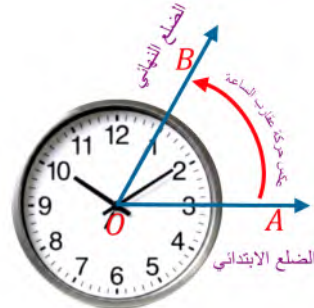
يكون قياس الزاوية الموجهة **سالبًا**
(Negative Measure)

إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الابتدائي إلى
الضلع النهائي **مع اتجاه عقارب الساعة**.



(AOB)

يمثل الزوج المرتب $(\vec{OA}, \vec{OB})$ حيث :
العنصر الأول $\vec{OA}$ الضلع الابتدائي للزاوية
العنصر الثاني $\vec{OB}$ الضلع النهائي للزاوية



يكون قياس الزاوية الموجهة **موجبًا**
(Positive Measure)

إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الابتدائي إلى
الضلع النهائي **عكس اتجاه عقارب الساعة**.

الزاوية الموجهة

هي زاوية تتكوّن من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية يسمى الشعاع الأول بالضلع الابتدائي، ويسمى الشعاع الثاني بالضلع النهائي، ويحدد قياسها واتجاهها بالدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي.

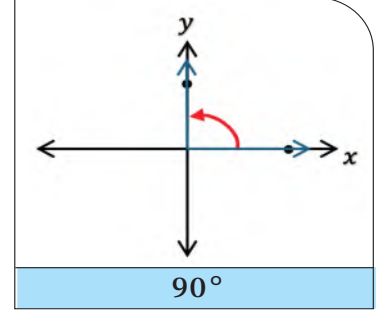
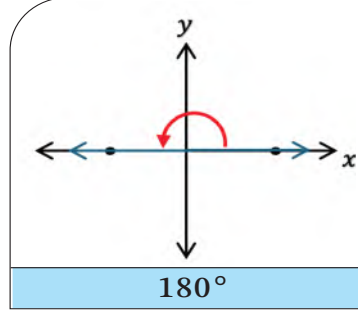
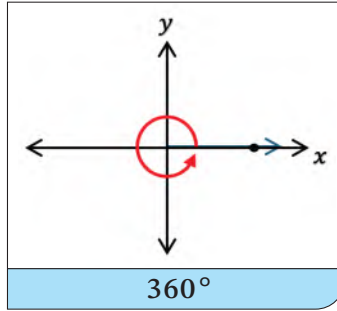
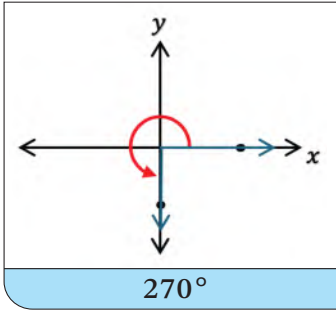
الزاوية الموجهة في الوضع القياسي :

هي زاوية رأسها نقطة الأصل وضلعها الابتدائي منطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات .



الزاوية الربعية

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات.



ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التالي ، ثم حدد الزوايا الربعية منها أو حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية إن أمكن :

- (a) 120° (b) 450° (c) -270°
(d) 300° (e) -150° (f) 450°

مثال (1)

الحل:

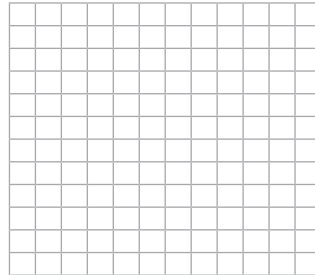
(a)

(b)

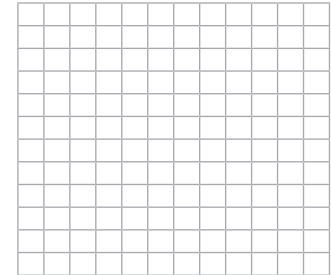
(c)



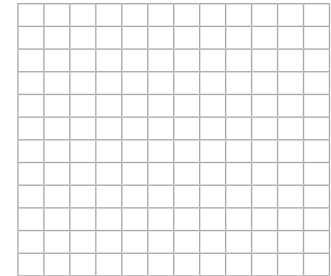
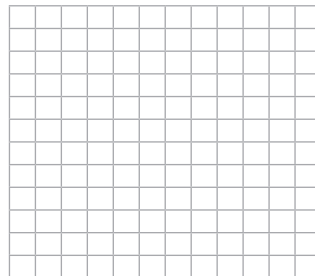
(d)



(e)

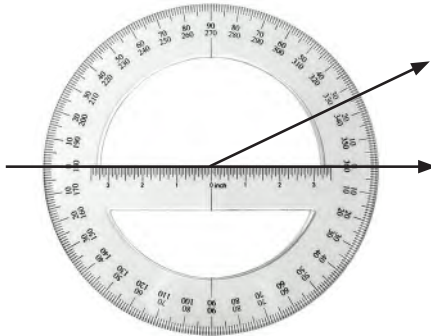


(f)



أولاً: القياس الستيني

في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى 360 قسمًا متساويًا ، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا .



ويرمز لها بالرمز ($^{\circ}$)

فمثلاً قياس الزاوية القائمة يساوي 90°

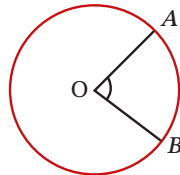
وقياس الزاوية المستقيمة يساوي 180°

أجزاء الدرجة :

1° (درجة واحدة) = $60'$ (دقيقة)

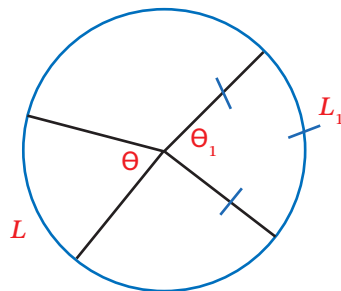
$1'$ (دقيقة واحدة) = $60''$ (ثانية)

الزاوية المركزية في دائرة :



هي زاوية يقع رأسها على مركز الدائرة (O) وضلعها يحمل نصفي قطر في الدائرة في الشكل المرسوم $(A\hat{O}B)$ تسمى زاوية مركزية.

ثانياً: القياس الدائري « التقدير الدائري »



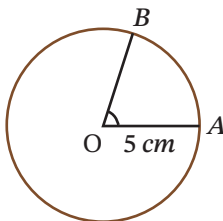
استنتاج العلاقة بين طول نصف قطر الدائرة و طول القوس ، الزاوية المركزية بالقياس الدائري :

$$\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{L_1}{L}$$

$$\frac{1}{\theta} = \frac{r}{L} \longrightarrow L = r \cdot \theta \longrightarrow \theta = \frac{L}{r}$$

تحقق من فهمك (2)

في الشكل المقابل :



إذا كان قياس الزاوية المركزية $B\hat{O}A$ يساوي 1.5rad

أوجد طول القوس $\widehat{AB}$



العلاقة بين القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية :

$$180^\circ = \pi \text{ radian}$$

بالقسمة على 180

$$1 \text{ radian} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radian}$$

بالقسمة على π

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

ومن خواص التناسب نستطيع القول إن :

$$\frac{x^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi}$$

مثال (3) أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها 120°

الحل:

تحقق من فهمك (3) أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها :

a 60°

b 330°

تحقق من فهمك (4)

أوجد القياس الستيني للزاوية التي قياسها :

a $\theta = \frac{3\pi}{4}$

b $\theta = \frac{4\pi}{3}$

c 1.6 rad

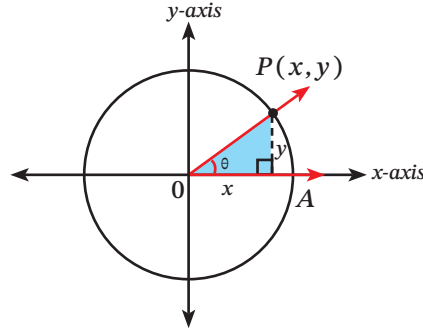


دائرة الوحدة (3-4-c)

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل ، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

النقطة المثلثية



هي نقطة تقاطع الضلع النهائي
لزائوية موجهة في الوضع
القياسي مع دائرة الوحدة .

الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها θ :

(1) مجال $f(\theta) = \sin \theta$ هو $\mathbb{R}$

(2) مدى $f(\theta) = \sin \theta$ هو $[-1, 1]$

(3) $|\sin \theta| \leq 1$

(1) مجال $f: f(\theta) = \tan \theta$ هو $\mathbb{R} / \left\{ \frac{n\pi}{2} \right\}$ ، حيث إن n عدد فردي ، $n \in \mathbb{Z}$ ،

(2) مدى $f: f(\theta) = \tan \theta$ هو $\mathbb{R}$

$$\sin \theta = y$$

$$\cos \theta = x$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} : x \neq 0$$

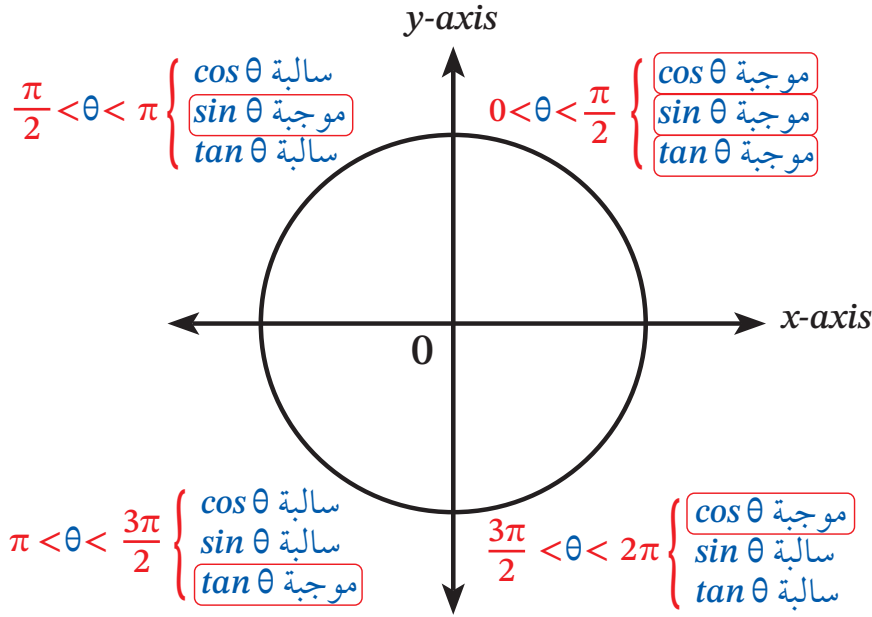
$$\csc \theta = \frac{1}{y} , y \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{x} , x \neq 0$$

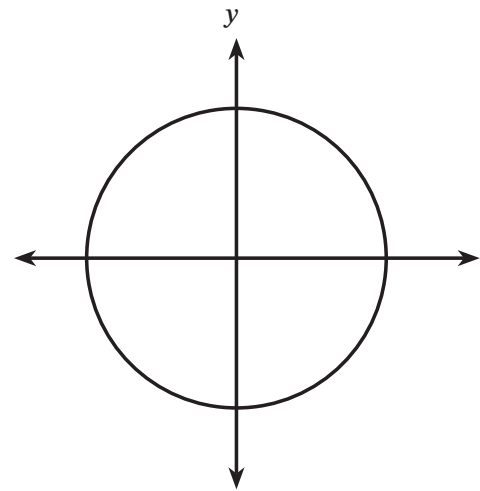
$$\cot \theta = \frac{x}{y} , y \neq 0$$



إشارة كل من دالة الجيب sine ودالة جيب التمام cosine :



تحقق من فهمك (5)

إذا كانت النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ للزاوية θ في الوضع القياسي :a) بين أن النقطة P نقطة مثلثيةb) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ 

مثال (6) إذا كانت النقطة $P\left(\frac{1}{2}, y\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها θ
أوجد : $\sin \theta, \cos \theta$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل:

تحقق من فهمك (7)

إذا كانت : $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

أوجد : $\tan x, \sin x$ حيث $90^\circ < x < 180^\circ$



البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-14) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(a) (b)

(1) الزاوية الموجهة في وضعها القياسي يمكن أن ينطبق ضلعها الابتدائي

على الاتجاه السالب لمحور السينات

لأن الوضع القياسي يشترط أن ينطبق الضلع الابتدائي على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(a) (b)

(2) الزاوية 200° زاوية ربعية

لأن الزاوية الربعية ضلعها النهائي ينطبق على أحد المحاور الإحداثية، و 200° تقع في الربع الثالث.

(a) (b)

(3) الزاوية الموجهة في وضع قياسي يمكن أن يكون قياسها سالبًا

يكون القياس سالبًا إذا كان اتجاه الدوران في مع عقارب الساعة.

(a) (b)

(4) الزاوية الموجهة التي في وضع قياسي لها أكثر من نقطة مثلثية

لكل زاوية موجهة نقطة مثلثية واحدة وحيدة وهي نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة.

(a) (b)

(5) إذا كانت (x, y) نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي فإن $x > 1$

لأن النقطة تقع على دائرة الوحدة نصف قطرها 1 وبالتالي $-1 \leq x \leq 1$.

(a) (b)

(6) $(-1, 0)$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي

لأن $1^2 + 0^2 = 1$ وهي النقطة المثلثية للزاوية 0° أو 360° .

(a) (b)

(7) نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$

لأن $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{1}{25} = 1$.

(a) (b)

(8) إذا كانت $\left(x, \frac{3}{5}\right)$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي تقع

في الربع الثاني فإن $x = \frac{4}{5}$

في الربع الثاني يكون الإحداثي السيني سالبًا، فالصحيح $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) (b)

(9) $\cos(-300^\circ) = \frac{1}{2}$

لأن $\cos(-300^\circ) = \cos(300^\circ) = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$.

(a) (b)

(10) $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}$

لأن $\sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}$.

(a) (b)

(11) $\tan(-150^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

لأن $\tan(-150^\circ) = -\tan(150^\circ) = -(-\tan 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(a) (b)

(12) $\sec(315^\circ) = \sqrt{2}$

لأن $\cos(315^\circ) = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec(315^\circ) = \sqrt{2}$.



(a) (b)

(13) الزاوية التي قياسها $\frac{11\pi}{2}$ تقع في الربع الرابعلأن $\frac{11\pi}{2} = 4\pi + \frac{3\pi}{2}$ ينطبق ضلعها النهائي على محور الصادات السالب، فهي زاوية ربعية.

(a) (b)

(14) الزاوية المركزية ABC قياسها (0.75) في دائرة طول قطرها 8cm ،فإن طول القوس AC الذي تحصره هذه الزاوية يساوي 3cm طول نصف القطر $r = \frac{8}{2} = 4\text{ cm}$ ، وطول القوس

$$L = r \cdot \theta = 4 \times 0.75 = 3\text{ cm}$$

■ في البنود من (16-28) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) الزاوية التي قياسها 300° تقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثالث

(c) الثاني

(d) الرابع

الرابع: لأن $270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$.(2) الزاوية التي قياسها 730° تقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثالث

(c) الثاني

(d) الرابع

الأول: لأن $720^\circ - 730^\circ = 10^\circ$ وتقع في الربع الأول.

(3) الزاوية التي تقع في الربع الثالث هي :

(a) 39° (b) 550° (c) 70° (d) 650° 550° : لأن $550^\circ - 360^\circ = 190^\circ$ وتقع في الربع الثالث ($180^\circ < 190^\circ < 270^\circ$).

(4) الزاوية التي تقع في الربع الثاني هي :

(a) 200° (b) 510° (c) 560° (d) 260° 510° : لأن $510^\circ - 360^\circ = 150^\circ$ وتقع في الربع الثاني ($90^\circ < 150^\circ < 180^\circ$).(5) الزاوية التي قياسها 280° تقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثالث

(c) الثاني

(d) الرابع

الرابع: لأن $270^\circ < 280^\circ < 360^\circ$.

(6) النقطة المثلثية للزاوية الموجهة في الوضع القياسي يمكن أن يكون :

(a) $(0,0)$ (b) $(3,0)$ (c) $(-1,1)$ (d) $(0,1)$ $(0,1)$: تحقق معادلة دائرة الوحدة $0^2 + 1^2 = 1$.

(7) إذا كانت $\sin\theta=1$ فإن النقطة المثلثية للزاوية θ هي :

- (a) (1,1) (b) (3,0)
(c) (0,1) (d) (-1,1)

(0, 1): بما أن $\sin\theta = y = 1$ فإن $x = 0$ ، فتكون النقطة (0, 1).

(8) إذا كانت $\left(x, \frac{5}{13}\right)$ نقطة مثلثية لزاوية حادة موجهة في وضع قياسي فإن x

- (a) $\frac{12}{13}$ (b) $\frac{8}{13}$
(c) $\frac{5}{12}$ (d) $-\frac{12}{13}$

$\frac{12}{13}$: زاوية حادة في الربع الأول $x > 0$: $x = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

(9) إذا كانت $\left(\frac{1}{2}, y\right)$ نقطة مثلثية للزاوية θ والتي في وضع قياسي $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن y تساوي :

- (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $-\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$: في الربع الأول $y > 0$: $y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(10) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي :

- (a) $\frac{7\pi}{4}$ (b) 135°
(c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) 215°

215° : زاوية إسنادها $\alpha = 215^\circ - 180^\circ = 35^\circ$ بينما باقي الزوايا زاوية إسنادها 45° .

(11) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{3}$ هي :

- (a) $\frac{11\pi}{6}$ (b) 225°
(c) $\frac{7\pi}{8}$ (d) $\frac{5\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{3}$: تقع في الربع الرابع وزاوية إسنادها $\alpha = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

(12) النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $\frac{1}{2}$ هي :

- (a) $\sin(-330^\circ)$ (b) $\cos(-240^\circ)$
(c) $\cot(-1500^\circ)$ (d) $\tan(765^\circ)$

$\sin(-330^\circ) = \sin(-330^\circ + 360^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$

(13) النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي :

- (a) $\cos \frac{31\pi}{6}$ (b) $\sin \frac{-35\pi}{3}$
(c) $\tan \frac{17\pi}{6}$ (d) $\sec \frac{13\pi}{3}$

$\cos \frac{31\pi}{6} = \cos\left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



العلاقات بين الدوال المثلثية

3-5

العلاقة بين الزاويتين $(\theta, -\theta)$ انعكاس في محور السينات
 $A(x, y) \rightarrow B(x, -y)$

- لأي زاوية θ :
- ① $\cos(-\theta) = \cos\theta$
 - ② $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
 - ③ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$: (معرفه $\tan\theta$)

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, (\pi - \theta))$ انعكاس في محور الصادات
 $A(x, y) \rightarrow B(-x, y)$

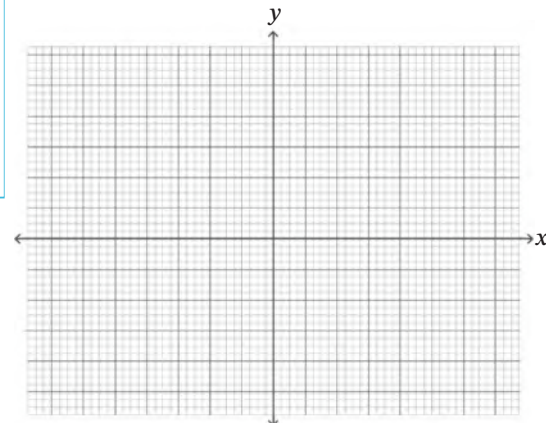
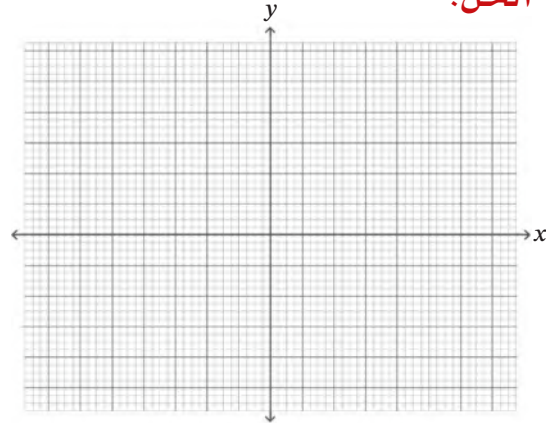
- لأي زاوية θ :
- ① $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
 - ② $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
 - ③ $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$: (معرفه $\tan\theta$)

1. اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية :

- مثال (1) ① $\cos(\pi - \theta)$ ② $\tan(180^\circ - x)$ ③ $\sin(180^\circ - x)$

2. إذا كان $\sec\theta = 2$ أوجد $\cos(\pi - \theta)$

الحل:



تحقق من فهمك (1)

أوجد $\sin(\pi - \theta)$	$\sin\theta = 0.2$
أوجد $\cos(\pi - \theta)$	$\cos\theta = 0.6$
أوجد $\cot(\pi - \theta)$	$\tan\theta = \frac{1}{3}$

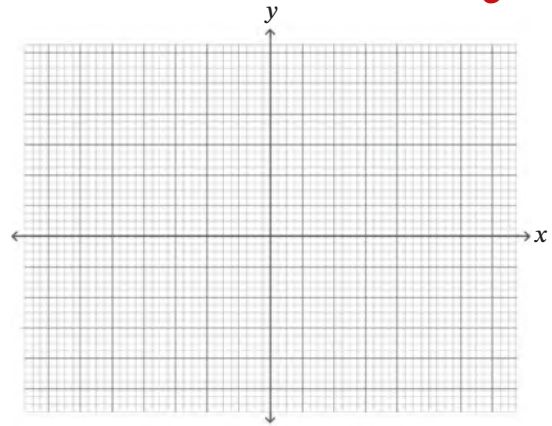


العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, (\pi+\theta))$ انعكاس في نقطة الأصل
 $A(x, y) \rightarrow B(-x, -y)$

- لأي زاوية θ :
- ① $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
 - ② $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
 - ③ $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$: (معرفه $\tan\theta$)

a) إذا كان $\tan\theta = 3$ أوجد $\tan(\pi+\theta)$ b) إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$ أوجد $\sec(\pi+\theta)$ مثال (2)c) إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{5}$ أوجد $\csc(\pi+\theta)$

الحل:



العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, (\frac{\pi}{2} - \theta))$

① $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$ لأي زاوية θ :

② $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$

③ $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$: (معرفه $\tan \theta$)

مثال (3) إذا كان $\cos \theta = \frac{7}{25}$ أوجد $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل:

تحقق من فهمك (3)

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ أوجد $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$



العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, (\frac{\pi}{2} + \theta))$

① $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$ لأي زاوية θ

② $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$: (معرفه $\tan \theta$)

مثال (4) إذا كان $\tan \theta = \sqrt{3}$ أوجد $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل:

تحقق من فهمك (4)

إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{5}$ أوجد $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$, $\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$



بسط التعبيرات التالية:

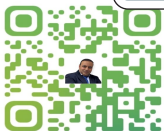
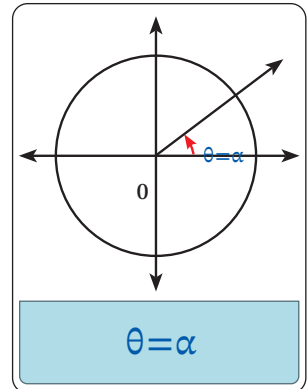
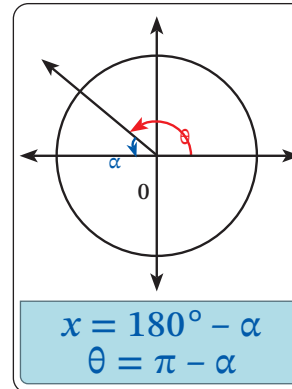
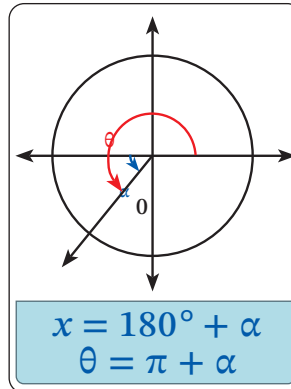
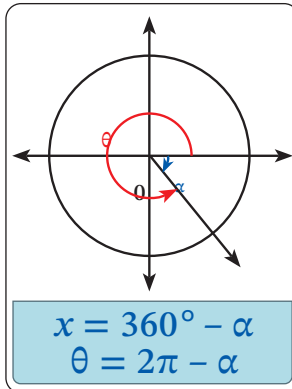
- (a) $\cos(\pi-\theta) - \cos(\theta) + \sin(\pi+\theta) + \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$
- (b) $\sin x + \sin(90^\circ+x) + \sin(180^\circ+x) + \sin(90^\circ-x)$
- (c) $\cos(\pi+\theta) + \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) + \sin(\theta-\pi) - \cos(\theta+\frac{\pi}{2})$

مثال (5)

الحل:

زاوية الإسناد

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة θ التي في الوضع القياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات حيث $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

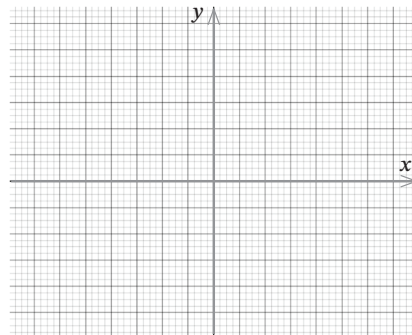
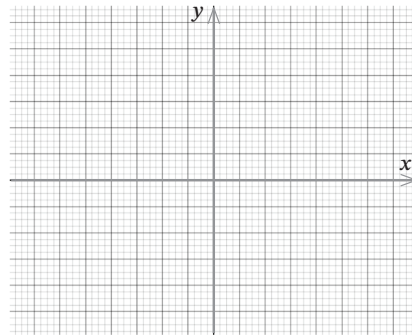
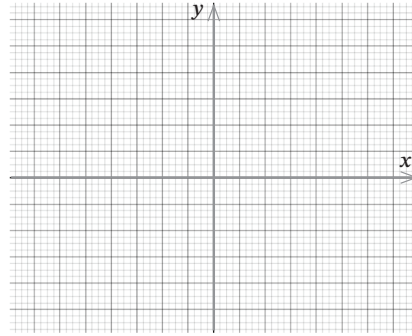


أوجد زاوية الإسناد للزوايا التالية :

مثال (6)

- a $x = 125^\circ$ b $x = 215^\circ$ c $x = \frac{11\pi}{6}$

الحل:



تحقق من فهمك (7) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد :

- a $\cos(-150^\circ)$ b $\sin \frac{7\pi}{6}$ c $\tan 330^\circ$



البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-6) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) إذا كانت $\sin \theta = 0.2$ فإن $\sin(\pi + \theta) = 0.2$

لأن $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -0.2$.

(a) (b)

(2) إذا كانت $\cos \theta = \frac{2}{3}$ فإن $\sec(\pi + \theta) = \frac{3}{2}$

لأن $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sec(\pi + \theta) = -\frac{3}{2}$

(a) (b)

(3) إذا كانت $\tan \theta = 3$ فإن $\cot(\pi + \theta) = 3$

لأن $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta = 3 \Rightarrow \cot(\pi + \theta) = \frac{1}{3}$

(a) (b)

(4) إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{5}$ فإن $\csc(\pi + \theta) = -5$

لأن $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -\frac{1}{5} \Rightarrow \csc(\pi + \theta) = -5$

(a) (b)

(5) إذا كانت $\cos x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{3}$

لأن حل المعادلة في الدورة الواحدة يشمل قيمتين: $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$ ولم يُحدد الربع في السؤال.

(a) (b)

(6) إذا كانت $\sin x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{6}$

لأن دالة الجيب موجبة في الربعين الأول والثاني، فلها حلان: $x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6}$

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا التالية هي :

(a) 315° (b) 60° (c) 45° (d) 135°

60° : زاوية إسنادها 60° ، بينما الزوايا 315° و 45° و 135° زاوية إسنادها 45° .

(2) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلوعها النهائي يمر بالنقطة المثلثية $M(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ هي :

(a) 45° (b) 225° (c) 135° (d) 330°

135° : الإحداثيات $x < 0$ و $y > 0$ تقع في الربع الثاني ، والزاوية التي تحقق

$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ هي 135° .

(3) إذا كانت $\cos x$ سالبة و $\sin x$ موجبة . فإن الضلع النهائي للزاوية x يقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثاني

(c) الثالث

(d) الرابع

الثاني: جيب التمام سالب والجيب موجب فقط في الربع الثاني.



حل المعادلات المثلثية

3-6

تحقق من فهمك (1) أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$\textcircled{1} \quad 2 \cos \theta - \sqrt{2} = 0$$

حيث : $0 \leq \theta < 2\pi$

$$\textcircled{2} \quad 2 \sin \theta + \sqrt{3} = 0$$

حيث : $\theta \in [0, 2\pi)$ 

تحقق من فهمك (2)

أوجد حل المعادلة : $2 \cos \theta + 1 = 0$ حيث : $\theta \in [0, 2\pi)$

تحقق من فهمك (3)

أوجد حل المعادلة : $\sec \theta - 2 = 0$ حيث : $0 \leq \theta < 2\pi$ 

تحقق من فهمك (4) أوجد مجموعة حل المعادلة : حيث : $\theta \in [0, 2\pi)$

① $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$

② $\cot \theta - 1 = 0$

ملخص حل المعادلة المثلثية جبرياً

لايجاد حل المعادلة المثلثية

$$\sin \theta = a, \quad \cos \theta = a, \quad \tan \theta = a$$

نتبع التالي :

$$\sin \alpha = |a|$$

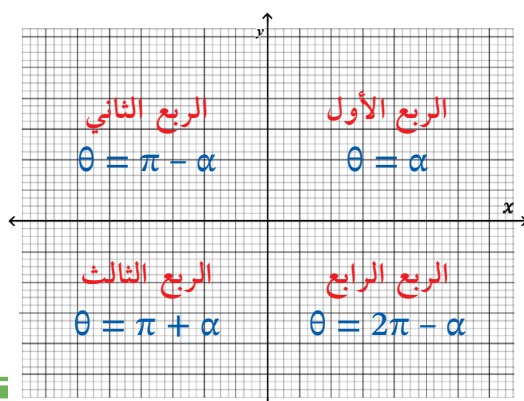
$$\cos \alpha = |a|$$

$$\tan \alpha = |a|$$

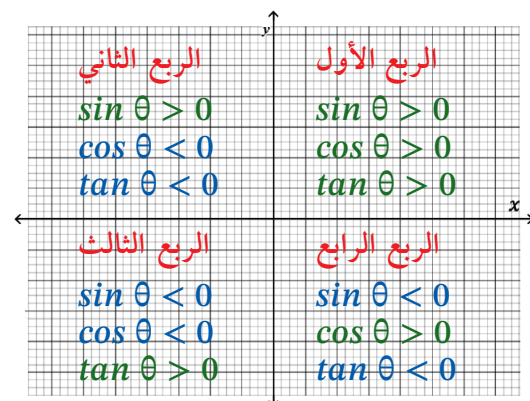
1. نوجد قياس الزاوية α وهي زاوية الإسناد للزاوية θ التي تحقق أن :

3. نوجد قيمة الزاوية θ حيث العلاقة

بين θ, α كما هو موضح بالشكل :



2. نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية θ حسب إشارة الدالة المثلثية من خلال الأرباع الموضحة :



البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) إذا كانت $\sin x = \sqrt{3}$ فإن حل المعادلة يساوي $\emptyset$

لأن مدى دالة الجيب هو $[-1, 1]$ ، والعدد $1.732 > 1$ ، وبالتالي مستحيلة الحل ومجموعة

الحل هي ϕ

(a) (b)

(2) إذا كانت $\cos x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{3}$

لأن المعادلة لها حلان في دورة واحدة هما $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$

(a) (b)

(3) إذا كانت $x = \frac{\pi}{6}$ فإن $\sin x = \frac{1}{2}$

لأن المعادلة لها حلان في الدورة هما $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) إذا كانت $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ ، وكانت $2 \sin \theta = 1$ ، فإن قياس الزاوية θ بالقياس الستيني تساوي :

(a) 30° (b) 120° (c) 135° (d) 150°

$2 \sin \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$ ، زاوية الإسناد 30° ، وبما أن الزاوية في الربع الثاني ($\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$)

$$\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

(2) إذا كانت $\pi \leq \theta < 2\pi$ ، وكانت $2\cos\theta - 1 = 0$ فإن قياس الزاوية θ بالقياس الستيني تساوي :

(a) 60° (b) 120° (c) 330° (d) 315°

الزاوية محصورة بين 180° و 360° ($\pi \leq \theta < 2\pi$)، وتكون 330° في الربع الرابع.

(3) حل المعادلة $\sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$ حيث $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ بالقياس الستيني تساوي :

(a) 30° (b) 150° (c) 240° (d) 45°

$\sqrt{3} \tan \theta = 1 \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ$ ، وبما أن $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (الربع الأول):



المنطق والتقارير

4-1

مثال (1) في المواقع التالية حدد أيًا منها استقراء وأيًا منها استنتاج

م	الموقف
1	الحديد والنحاس والألمنيوم تتمدد بالحرارة إذا المعادن تتمدد بالحرارة.
2	جميع الطيور لها أجنحة والعصفور طائر إذا للعصفور أجنحة.
3	جميع الأعداد التي رقم خانة الآحاد لها 0 أو 5 تقبل القسمة على 5 والعدد 75 عدد آحاده 5 إذا العدد 75 يقبل القسمة على 5
4	الأعداد 2,4,6,8 كل منها يقبل القسمة على 2 إذا الأعداد 2,4,6,8 هي أعداد زوجية.
5	كل من يلتزم بقوانين المرور يقل تعرضه للحوادث وأحمد يلتزم بقوانين المرور إذا أحمد أقل عرضة للحوادث.

الحل:

- الاستقراء الرياضي: يكون من الخاص إلى العام.
- الاستنتاج الرياضي: يكون من العام إلى الخاص.

المنطق: هو أسلوب منظم للتفكير يساعد على الوصول إلى نتائج صحيحة اعتماداً على معلومات واضحة.
العبارة المنطقية: هي التقرير وهي أيضاً القضية المنطقية.

- أما في المنطق الرياضي تُقسَّم الجمل إلى قسمين هما:
- جملة خبرية: هي الجملة التي تحمل لنا خبراً ما.
 - جملة غير خبرية: هي الجملة التي لا تحمل لنا خبراً ما.

تحقق من فهمك (2)
حدد نوع كل جملة أيها خبرية وأيها غير خبرية

م	الجملة
1	الشتاء فصل من فصول السنة.
2	الفروانية عاصمة الكويت.
3	ما أجمل السماء!
4	اكتب الواجب يا أحمد.
5	هل المثلث متطابق الأضلاع متطابق الزوايا؟



العبارة البسيطة (التقرير)

هي جملة خبرية ذات معنى تحمل خبراً ويمكن الحكم بأنها صائبة (True) أو خاطئة (False) وليس كلاهما معاً.

العبارة الصائبة والعبارة الخاطئة

إذا كانت العبارة تحمل خبراً صادقاً فإنها تُسمى عبارة صائبة. وإذا كانت العبارة تحمل خبراً غير صادقاً فإنها تُسمى عبارة خاطئة.

قيم الصحة (قيم الحقيقة)

الم العبارة (التقرير)		
صحيح	T	True
خطأ	F	False

إذا رمزنا للعبارة بالرمز p فإما أن تكون صحيحة T أو خاطئة F

مثال (3) وضع قيمة الصحة لكل من العبارات (التقارير) التالية:

الم	العبارة
1	العدد 32 يقبل القسمة على 4
2	$\sqrt{16} = -4$
3	العدد 18 من مضاعفات العدد 3.
4	الشكل الرباعي يُسمى مربعاً.
5	5 عدد فردي.
6	$2 \times 10 \neq 20$

الحل:

تحقق من فهمك (3)

وضع قيمة الصحة لكل من العبارات (التقارير) التالية:

الم	العبارة
1	$3 + 4 > 5$
2	العدد 5 من مضاعفات العدد 10
3	للمعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ جذران حقيقيان مختلفان.
4	تونس دولة آسيوية.
5	مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي 180°
6	عدد حروف كلمة ثريا هو أربعة حروف.
7	استاد جابر يقع في منطقة جابر الأحمد.



البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-10) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) الجملة الخبرية يمكن الحكم عليها بالصواب أو الخطأ. (a) (b)

لأن الجملة الخبرية بطبيعتها المنطقية هي الوحيدة التي يمكن الحكم على مضمونها بالصواب أو الخطأ

(2) الجملة الاستفهامية تُعد عبارة منطقية. (a) (b)

لأن الجملة الاستفهامية جملة إنشائية غير خبرية ولا تعد تقريراً أو عبارة منطقية

(3) الاستنتاج يبدأ بأمثلة متعددة. (a) (b)

لأن التفكير الذي يبدأ بملاحظة أمثلة متعددة وحالات خاصة هو "الاستقراء"، بينما الاستنتاج يبدأ من القواعد العامة

(4) (اكتب الدرس) جملة خبرية. (a) (b)

لأنها جملة إنشائية تعبر عن أمر وليست جملة خبرية

(5) (لا تذهب إلى الصحراء مساءً) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها أسلوب نهى (إنشائي) لا يحمل خبراً يحتمل الصدق أو الكذب

(6) (دولة الكويت تقع على الخليج العربي) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها جملة تفيد خبراً جغرافياً حقيقياً يحمل قيمة الصواب .

(7) (هبة درست جيداً) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها جملة خبرية فعلية تفيد خبراً يحتمل الصواب أو الخطأ .

(8) (هل المثلث المتطابق الضلعين متطابق الزوايا؟) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها جملة استفهامية

(9) $7 = 4 + 3$ هي عبارة صحيحة. (a) (b)

لأن $7 = 4 + 3$ تقرير رياضي متطابق الطرفين وصائب .

(10) (ما الدول التي تشترك في الحدود مع المملكة العربية السعودية؟) هي جملة خبرية. (a) (b)

لأنها صيغة سؤال واستفهام وليست خبراً

■ في البنود من (1-7) ظلل اختر الإجابة الصحيحة :

(1) أي مما يلي تُعتبر عبارة منطقية:

(a) ما أجمل السماء! (b) هل حضرت الدرس؟ (c) 7 عدد أولي (d) افتح الباب

السبب: هي الجملة الخبرية الوحيدة التي تفيد خبراً ذا معنى يمكن الحكم عليه بالصواب،

بينما الخيارات الأخرى تعجب، استفهام، وأمر .

(2) أي من الجمل التالية ليست عبارة منطقية:

(a) الكويت دولة عربية (b) ادرس جيداً (c) $2 + 2 = 4$ (d) $5 > 9$

السبب: لأنها جملة أمر وطلب وليست جملة خبرية، فلا تعتبر عبارة منطقية



(3) أي مما يلي يُمثل استقراء:

- (a) استخدام قانون لإيجاد نتيجة
(b) ملاحظة نمط والوصول إلى قاعدة
(c) حل معادلة
(d) رسم شكل هندسي

السبب: هذا هو التعريف العلمي الدقيق للاستقراء الرياضي (الانتقال من الخاص إلى العام).

(4) أي مما يلي يُمثل استنتاجًا:

- (a) توقع نتيجة إحدى المباريات
(b) التنبؤ بحالة الطقس
(c) تطبيق قاعدة عامة لإيجاد نتيجة
(d) تخمين الإجابة

السبب: هذا هو جوهر الاستنتاج المنطقي (الانتقال من القاعدة الكلية العامة إلى نتائج وحالات خاصة).

(5) أي المواقف التالية يُمثل استقراء:

- (a) كل المربعات هي مستطيلة.
(b) العدد 64 هو مربع كامل.
(c) لاحظت أن الحديد والنحاس يتمددان بالحرارة فاستنتجت أن المعادن تتمدد بالحرارة.
(d) جميع الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على 2 والعدد 39 عدد فردي فإن العدد 39 لا يقبل القسمة على 2

السبب: بدأ بحالات خاصة لمعدنين ثم عمم النتيجة على جميع المعادن.

(6) أي المواقف يُمثل استنتاجًا:

- (a) لاحظ المتعلم أن كل اختبارات الرياضيات تحتاج إلى تركيز عالٍ.
(b) شاهدت عدة طيور تطير فاستنتجت أن الطيور تطير.
(c) جميع المتعلمين المجتهدين ناجحون وخالد مجتهد إذاً خالد ناجح.
(d) الماء يغلي عند 100° مئوية.

السبب: استدل منطقيًا بحكم عام يشمل جميع المجتهدين وطبقه على حالة الطالب خالد.



2-4 أدوات الربط (العمليات المنطقية)

العبرة البسيطة (التقرير البسيط - القضية الأولية - القضية المستقلة)

هي جملة خبرية تحمل خبراً واحداً.

العبرة المركبة (التقرير المركب)

هي جملة خبرية تشتمل على أكثر من خبر واحد

العمليات المنطقية (أدوات الربط)

العمليات المنطقية للربط بين العبارات البسيطة للحصول على عبارة جديدة تسمى عبارة مركبة (قضية مركبة)، مستخدمين بعض الرموز الخاصة والتي نسميها بأدوات الربط المنطقية بالإضافة إلى ذلك صحة أو خطأ العبارة البسيطة، والتي نسميها جداول الصحة والخطأ.

والآن نتعرف على أدوات الربط المنطقية:

أدوات الربط الثنائية	أدوات الربط الأحادية
تتعامل مع عبارتين أو أكثر	تتعامل مع عبارة واحدة

1. أداة نفي العبارة

العبارة "مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180° " هي عبارة صحيحة (T) فإن نفي هذه العبارة:

"مجموع قياسات زوايا المثلث لا يساوي 180° " وهي عبارة خاطئة (F)

في الجدول التالي عبارات (تقارير) قد تكون صحيحة (T) وقد تكون خاطئة (F) أكتب نفي كلٍّ منها

الحل:

العبارة (التقرير) p	نفي العبارة (نفي التقرير) $\sim p$
عيون أحمد زرقاء.	
العدد 7 يقبل القسمة على 2.	
$3 + 4 < 10$	
$2 \times 3 \neq 5$	
$2 \in \{3, 4, 5\}$	

مما سبق نصل إلى هذا الجدول والذي نسميه جدول الصحة (جدول الحقيقة).

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F



تحقق من فهمك (1)

في الجدول التالي عبارات (تقارير) قد تكون صحيحة (T) وقد تكون خاطئة (F)
أكتب نفي كل منها

العبارة (التقرير) p	نفي العبارة (نفي التقرير) $\sim p$
منهج الرياضيات مُشوق في دراسته.	
العدد 2 عامل من عوامل العدد 5	
$x \in \mathbb{R}$	
خالد يدرس الطب.	

2. أداة الوصل "و" :

العبارة المركبة (p و q) والتي نرمز لها بالرمز ($p \wedge q$) تكون صحيحة فقط إذا كان كل من p, q صحيحتين معًا وتكون خاطئة فيما عدا ذلك

تعميم :

p (العبارة)	q (العبارة)	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

إذا كانت كل من p, q عبارات بسيطة فإن جدول الصحة للعبارة المركبة $p \wedge q$ هو

بفرض العبارات البسيطة التالية :

مثال (2) $p: 4 > 3$, $q: 7$ عدد زوجي , r : المنامة عاصمة البحرين

اكتب العبارات المركبة التالية : $p \wedge q$, $p \wedge r$, $r \wedge q$

الحل:

p $4 > 3$	q 7 عدد زوجي	r المنامة عاصمة البحرين	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$r \wedge q$



3. أداة الفصل "أو":

العبارة المركبة (p أو q) والتي نرمز لها بالرمز ($p \vee q$) تكون صحيحة إذا كان أحد العبارتين على الأقل صحيحة، وتكون خاطئة إذا كانت كلتاها خاطئتين.

p (التقرير)	q (التقرير)	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

تعميم:

إذا كان كل من p, q عبارة بسيطة فإن جدول الصحة للعبارة المركبة $p \vee q$ هو

كُون جدول الصحة للعبارات التالية:

a $(p \vee \sim q)$

b $(p \wedge q) \vee \sim q$

c $(p \vee q) \wedge \sim q$

مثال (3)

الحل:

a $(p \vee \sim q)$

b $(p \wedge q) \vee \sim q$

c $(p \vee q) \wedge \sim q$



4. أداة الربط الشرطية "إذا كان فإن" :

إذا كان كل من q, p عبارة بسيطة، فإن العبارة "إذا كان p فإن q " تكون عبارة مركبة، ونرمز لها بالرمز $p \rightarrow q$ وتسمى هذه العبارة "عبارة شرطية"

ومثال (4) وعد عبدالله ابنه حمد قائلاً "إذا نجحت في الامتحان فسأشتري لك هدية" متى يكون عبدالله صادقاً (صائباً) في كلامه؟ ومتى يكون غير صادقاً (خاطئاً)؟

الحل:

تعميم:

إذا كان كل من q, p عبارة بسيطة فإن جدول الصحة للعبارة $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ملاحظات :

العبارة الأولى p تسمى شرطاً
العبارة الثانية q تسمى جواباً للشرط
العبارة $p \rightarrow q$ تقرأ p تؤدي إلى q
وأيضاً تقرأ إذا كان q فإن p



كوّن جدول الصحة لكل من العبارات التالية:

مثال (5)

a $(q \rightarrow p)$

b $(\sim q \rightarrow \sim p)$

(a)

(b)

الحل:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim q \rightarrow \sim p$

* ملخص أدوات الربط المنطقية :

النفي ($\sim$) - الوصل ($\wedge$) - الفصل أو ($\vee$) -أداة الربط الشرطية "إذا كان فإن" ($\rightarrow$)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T	T

5. أداة الربط الشرطية المزدوجة ".... إذا فقط إذا كان" :

إذا كان كل من p, q عبارة بسيطة، فإن العبارة " p إذا فقط إذا كان q " يكون عبارة مركبة، ونرمز لها بالرمز $p \leftrightarrow q$ ونسمى هذه العبارة "عبارة شرطية مزدوجة"وهي تعني "إذا كان p فإن q و إذا كان q فإن p "

تحقق من فهمك (6)

ما قيم الصحة للتقرير المركب $p \leftrightarrow \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$



مثال (7) كَوْن جدول الصحة للعبارة التالية : $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$

الحل:

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (q \leftrightarrow p)$	$\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$

تحقق من فهمك (7)

كَوْن جدول الصحة للعبارة التالية : $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

اسم أداة الربط	أداة الربط	رمز أداة الربط
النفي	(ليس)	$\sim$
الوصل	(و)	$\wedge$
الفصل	(أو)	$\vee$
الشرط	(إذا كان ... فإن ..)	$\rightarrow$
الشرط المزدوج	(... إذا وفقط إذا)	$\leftrightarrow$
وأهمية وجود الأقواس		



البند الموضوعية:

■ في البنود من (1-19) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(a) (b)

(1) العبارة "العدد 3 عدد أولي" هي عبارة بسيطة.

لأنها جملة خبرية تفيد خبراً واحداً مستقلاً.

(a) (b)

(2) العبارة "العدد 2 عدد أولي وزوجي" هي عبارة بسيطة.

لأنها عبارة مركبة تتضمن خبرين وأداة الربط "و"

(a) (b)

(3) عدد الإمكانيات الممكنة للعبارة البسيطة تساوي 2

العبارة البسيطة لها احتمالان فقط: إما صائبة (T) أو خاطئة (F)

(a) (b)

(4) عدد الإمكانيات الممكنة للعبارة المركبة من عبارتين أوليتين يساوي 8

عدد الاحتمالات للعبارة المركبة من تقريرين بسيطين هو $2^2 = 4$ وليس 8.

(a) (b)

(5) إذا كانت p عبارة بسيطة فإن نفي p هي عبارة بسيطة أيضاً.

نفي التقرير البسيط يتعامل مع خبر واحد ويبقى تقريراً بسيطاً.

(a) (b)

(6) لأي عبارتين p, q يكون $(p \wedge q)$ صحيحاً إذا كان كل من p, q صحيحاً.

أداة الوصل $\wedge$ لا تصدق إلا بصدق العبارتين معاً.

(a) (b)

(7) لأي عبارتين p, q يكون $(p \vee q)$ صحيحاً إذا كان كل من p, q صحيحاً.

أداة الفصل $\vee$ تكون صائبة إذا كانت إحدى العبارتين على الأقل صائبة، وبالتالي تصدق عند صدق كليهما

(a) (b)

(8) لأي عبارتين p, q يكون $(p \rightarrow q)$ صحيحاً إذا كان كل من p, q خاطئاً.

من جدول صحة العبارة الشرطية $F \rightarrow F$: تعطي قيمة صائبة T.

(a) (b)

(9) لأي عبارتين p, q يكون $(p \leftrightarrow q)$ خاطئاً إذا كان p صحيحاً، q خاطئاً.

الشرط المزدوج $p \leftrightarrow q$ يكون خاطئاً دائماً إذا اختلفت قيمتا الصحة $(T \leftrightarrow F = F)$

(a) (b)

(10) نفي العبارة " $3 + 5 < 9$ " هو " $3 + 5 \geq 9$ "

لأن نفي أصغر من ($<$) هو أكبر من أو يساوي ($\geq$)

(a) (b)

(11) نفي العبارة " $2 \times 4 = 8$ " هو " $2 \times 4 \neq 8$ "

نفي علاقة التساوي ($=$) هو نفي مباشر بعدم التساوي ($\neq$)

(a) (b)

(12) نفي العبارة "العدد 3 هو عدد فردي" هو "العدد 3 هو عدد أولي".

النفي الصحيح هو "العدد 3 ليس عدداً فردياً" (أو: العدد 3 عدد زوجي).

(a) (b)

(13) نفي العبارة "الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية"

هو "الرياض ليست عاصمة المملكة العربية السعودية".

نفي العبارة الخبرية المثبتة يكون بإدخال أداة النفي "ليست".

(a) (b)

(14) القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية أو لندن عاصمة فرنسا.

عبارة فصل $p \vee q$ ؛ حيث "القاهرة عاصمة مصر" صائبة (T)، ويكفي لصحة

الفصل صحة أحد الجزأين. $(T \vee F = T)$

(a) (b)

(15) الدوحة عاصمة قطر ومسقط عاصمة عمان.

عبارة وصل $p \wedge q$ وكلا الجزأين صائب جغرافياً. $(T \wedge T = T)$



(a) (b)

(16) إذا كان $2 + 3 = 5$ فإن $2^3 = 8$ عبارة شرطية $p \rightarrow q$ ؛ المقدم $2 + 3 = 5$ صائب (T) والتالي $2^3 = 8$ صائب (T)، ف $T \rightarrow T = T$.

(17) إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

(a) (b)

التقرير يمثل نص نظرية فيثاغورث الصحيحة دائماً.

(18) يتشابه المثلثان إذا تطابقت زواياهما المتناظرة أو تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة. (a) (b) يتشابه المثلثان إذا تحقق أحد الشرطين على الأقل.

(19) إذا كانت p صحيحة، q صحيحة، r خاطئة، فتكون العبارة $(p \rightarrow q) \vee r$ صحيحة (a) (b)بما أن p صائبة و q صائبة فإن العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ تكون صائبة $(T \rightarrow T = T)$ بصرف النظر عن قيمة r .

■ في البنود من (1-6) ظلل اختر الإجابة الصحيحة :

(1) العبارة $p \rightarrow \sim p$ تكافئ :(a) $\sim p \wedge p$ (b) $\sim p$ (c) $\sim p \rightarrow p$ (d) $p \rightarrow p$ (2) العبارة $p \rightarrow p$

(a) صحيحة دائماً

(b) صحيحة مرة واحدة

(c) خاطئة دائماً

(d) خاطئة مرة واحدة دائماً

السبب: إذا كانت p صائبة فإن $T \rightarrow T = T$ ، وإذا كانت p خاطئة فإن $F \rightarrow F = T$ فهي تحصيل حاصل.

(3) أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(a) الكويت في آسيا إذا وفقط إذا $35 \div 7 = 8$ (b) إذا كانت الكويت تقع في آسيا فإن $35 \div 7 = 8$ (c) $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ و $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$

(d) ليس أيّاً مما سبق.

السبب: كلا التقريرين صائب عددياً والوصل بين صائبين صائب $(T \wedge T = T)$

(4) أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(a) لندن ليست عاصمة أوروبية أو الموز من الفاكهة. (b) لندن عاصمة أوروبية وألمانيا في أفريقيا.

(c) ألمانيا ليست في أفريقيا ولندن ليست عاصمة أوروبية. (d) الموز ليس من الفاكهة أو لندن ليست عاصمة أوروبية.

السبب: عبارة فصل $F \vee T = T$ ؛ لأن الشق الثاني "الموز من الفاكهة" تقرير صائب.

(5) إن العبارة الخاطئة فيما يلي هي :

(a) 16 من مضاعفات العدد 4 أو 16 عدد أولي. (b) $0 < \pi - 3$ و $\frac{3}{8} < \frac{2}{5}$ (c) إذا كان $3 \times 3 = 9$ فإن 9 من عوامل 3 (d) $(-8)^{\frac{2}{3}} = -4$ إذا وفقط إذا $3 \times 6 = 21$ السبب: عبارة شرطية مقدمها $3 \times 3 = 9$ صائب (T) وتاليها "9 من عوامل 3" خاطئ (F)؛ والشرط $T \rightarrow F$ هو الحالة الوحيدة الخاطئة (F).

رمز المجموع Σ

4-3

تعريف

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n, n \in \mathbb{Z}^+$$

(وتقرأ مجموع a_k من $k=1$ إلى $k=n$) حيث n عدد صحيح موجب

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ ويسمى } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \text{ مفكوك}$$

نلاحظ أن :

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ عدد حدود مفكوك } n \text{ هو}$$

مثال (1) عبّر باستخدام رمز المجموع Σ عن $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$

الحل:

تحقق من فهمك (1)

عبّر باستخدام رمز المجموع Σ عن $5+6+7+8+\dots+45$

مثال (3) اكتب مفكوك $\sum_{k=10}^{40} k$ ، ثم أوجد عدد حدود المفكوك

الحل:



تحقق من فهمك (2)

$$\sum_{k=1}^{10} k^3 \text{ اكتب مفكوك}$$

$$\sum_{k=1}^{50} (k+k^2) \text{ اكتب مفكوك} \quad \text{مثال (5)}$$

الحل:

نتيجة:

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k, n \in \mathbb{Z}^+$$

تحقق من فهمك (3)

$$\sum_{k=1}^8 (2k+1) \text{ اكتب مفكوك}$$



تحقق من فهمك (4)

$$\sum_{k=1}^4 \left(3 + \frac{1}{k}\right) \text{ اكتب مفكوك}$$

$$\sum_{k=1}^{10} 3k \text{ أوجد قيمة } (7) \text{ مثال}$$

الحل:

تحقق من فهمك (6)

$$\sum_{k=1}^8 (3k-5) \text{ اكتب مفكوك}$$



مثال (8) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^5 (5k-3)$

الحل:

$$\sum_{k=1}^n ck = c \sum_{k=1}^n k, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$$

نتيجة:

$$\sum_{k=1}^n c = n \times c, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$$

نتيجة:

$$\sum_{k=i}^n c = c(n-i+1)$$

بصفة عامة:

$$\sum_{k=2}^6 10$$

تحقق من فهمك (7)

اكتب مفكوك

مثال (10) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{13} \frac{5}{2}k$

الحل:



البند الموضوعية:

■ في البنود من (1 - 4) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(a) (b)
$$\sum_{k=0}^3 k^3 = \left(\sum_{k=0}^3 k \right)^3 \quad (1)$$

الطرف الأيمن $(\sum_{k=0}^3 k)^3 = (0 + 1 + 2 + 3)^3 = 6^3 = 216$

الطرف الأيسر $\sum_{k=0}^3 k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 0 + 1 + 8 + 27 = 36 \neq 216$

(a) (b)
$$\sum_{k=2}^5 10 = 10(10-2) \quad (2)$$

الطرف الأيسر: عدد الحدود $= 5 - 2 + 1 = 4 \Rightarrow 10 \times 4 = 40$

الطرف الأيمن $10(10 - 2) = 10 \times 8 = 80 \neq 40$

(a) (b)
$$\sum_{k=0}^5 (k^5) = 16 \quad (3)$$

الطرف الأيسر $\sum_{k=0}^5 k^0 = 1^0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$ ، ولا تساوي 16.

(a) (b)
$$\sum_{k=1}^{10} 3k = 3 \sum_{k=1}^{10} k \quad (4)$$

خاصية خطية رمز المجموع تسمح بإخراج المعامل الثابت خارج رمز المجموع $\sum c k = c \sum k$

■ في البنود من (1 - 4) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) $1 + 3 + 9 + 27$ تساوي:

(a) $\sum_{k=0}^3 3k$ (b) $\sum_{k=1}^3 k^3$ (c) $\sum_{k=1}^3 3^k$ (d) $\sum_{k=0}^3 3^k$

السبب: بالتعويض: عند $k = 0 \Rightarrow 3^0 = 1$ ، $k = 1 \Rightarrow 3^1 = 3$ ، $k = 2 \Rightarrow 3^2 = 9$ ،

، $k = 3 \Rightarrow 3^3 = 27$ ، ومجموعها يطابق $1 + 3 + 9 + 27$ تماماً.

(2) إذا كانت $\sum_{k=2}^n k = 9$ فإن n تساوي:

(a) 3 (b) 7 (c) 4 (d) 9

السبب: بفك المجموع: عند $k = 2, 3, 4$ يكون المجموع $2 + 3 + 4 = 9$ ؛ إذاً الحد النهائي $n = 4$.



(3) إذا كانت $\sum_{k=m}^3 k^3 = 36$ فإن m تساوي:

(a) $\mathbb{Z}$

(b) 3

(c) 2

(d) 1

السبب: الحدود هي $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ ؛ إذاً البداية من $k = 1$

أي $m = 1$.

(4) $\sum_{k=1}^n k - \left(\sum_{k=1}^n (2k-1) \right)$ تساوي:

(a) $n - 1$ (b) $n - r$ (c) $n - \sum_{k=1}^n k$ (d) $1 - \sum_{k=1}^n k$

السبب:

$$\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n (2k-1) = \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = - \sum_{k=1}^n k + n = n - \sum_{k=1}^n k$$



4-4 مقاييس التشتت - الانحراف المعياري

أولاً: المدى

تعريف: المدى

المدى لمجموعة من القيم هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة ويرمز له بالرمز R
 المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

وفي التوزيعات التكرارية يكون المدى هو الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة و الحد الأدنى للفئة الأولى
 المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى

يعتبر المدى من أبسط مقاييس التشتت لسهولة إيجاده حسابياً.

أوجد المدى لكل من :

a القيم 32,31,24,21,18,24

b القيم 60,25,24,16,1,24

c التوزيع التكراري :

مثال (1)

الفئات	10 -	25 -	40 -	55 -	70 -	85 -
التكرار	4	6	8	5	3	2

الحل:



ثانيًا: التباين والانحراف المعياري

التباين

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}$$

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}}$$

أوجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية:

مثال (2)

3, 7, 5, 4, 6, 8, 2

الحل:

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$



التباين والانحراف المعياري للتوزيعات التكرارية:

(a) ذات الجدول التكراري البسيط:

$$\sigma^2 = \frac{\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f}$$

التباين

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f}}$$

الانحراف المعياري

حيث x_k : القيم f : تكرار القيم $\bar{x}$: المتوسط الحسابي

أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسيط التالي :

القيمة	10	20	30	40
التكرار	6	7	6	1

مثال (3)

الحل:

x	f	$x.f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2.f$



(b) التوزيعات التكرارية ذات الفئات:

هذه الحالة نوجد مراكز الفئات ونستعملها بدلاً من قيم x :
 حيث x : مركز الفئة f : تكرار الفئة $\bar{x}$: المتوسط الحسابي

يبين الجدول أدناه أطوال 20 طفلاً حديثي الولادة إلى أقرب سنتيمتر

الفئات	34 -	36 -	38 -	40 -
التكرار	4	5	8	3

(مثال 4)

أوجد التباين والانحراف المعياري لأطوال الأطفال

الحل:

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

1 - نكوّن الجدول التالي:

الفئات	x	f	$x.f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2.f$



أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسط التالي:

القيمة	4 -	8 -	12 -	16 -	20 -	24 -	28 -
التكرار	4	5	2	7	6	10	6

مثال (5)

الحل:

الفئات	x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$

تحقق من فهمك (4)

1- الانحراف المعياري لمجموعة قيم من البيانات هو $\sigma=4$ ومجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو 480 ، فما عدد قيم هذه البيانات ؟



البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-6) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) الانحراف المعياري للقيم 2, 4, 6, 8 هو:

(a) 2

(b) 4

(c) 5

(d) $\sqrt{5}$

السبب:

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\sum (x - \bar{x})^2 = (2 - 5)^2 + (4 - 5)^2 + (6 - 5)^2 + (8 - 5)^2 = 9 + 1 + 1 + 9 = 20$$

$$\sigma^2 = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

(2) إذا كان التباين لمجموعة من القيم يساوي 4 فإن الانحراف المعياري لها :

(a) 16

(b) 8

(c) 4

(d) 2

السبب: الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين. $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4} = 2$.

(3) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم يساوي 6 فإن التباين يساوي:

(a) 36^2

(b) 6

(c) 36

(d) 72

السبب: التباين هو مربع الانحراف المعياري. $\sigma^2 = (6)^2 = 36$.

(4) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم = 5 ومجموع مربعات انحرافات

هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو = 100 فإن عدد القيم يساوي:

(a) 10

(b) 20

(c) 4

(d) 25

السبب:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow (5)^2 = \frac{100}{n} \Rightarrow 25 = \frac{100}{n} \Rightarrow n = \frac{100}{25} = 4$$

(5) إذا كان الانحراف المعياري لأربع قيم هو 5 فإن مجموع مربعات انحرافات

القيم عن متوسطها الحسابي:

(a) 25

(b) 100

(c) 20

(d) 4

$$\sigma = 5 \Rightarrow \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sum (x - \bar{x})^2 = n \cdot \sigma^2 = 4 \times 25 = 100$$

