الجذور التربيعية والأعداد غير النسبية

دورك الآن

ضع الأعداد الآتية في مكانها المناسب في الجدول:

$$\sqrt{١٥}\ ،\ -\sqrt{٢}\ ،\ \frac{١}{\sqrt{٦٤}}\ ،\ \pi\ ،\ \frac{٧}{٩}\ ،\ -٠,١٧\ ،\ ٠,٣\ ،\ ٠,٣٥٣٣٥٣٣٣٥\ldots$$

عدد نسبي	عدد غير نسبي
$\frac{١}{\sqrt{٦٤}}$	$\sqrt{١٥}$
$\frac{٧}{٩}$	$-\sqrt{٢}$
$-٠,١٧$	π
$٠,٣$	$٠,٣٥٣٣٥٣٣٣٥\ldots$

تمارين ذاتية

1 حدِّد ما إذا كان كل عدد مما يلي عدداً نسبياً أو غير نسبي:

① $\sqrt{١٦}$ — عدد نسبي

② $\sqrt{٢٠}$ — عدد غير نسبي

③ $٢,\overline{١٥}$ — عدد نسبي

④ $-٠,٧٧$ — عدد نسبي

⑤ $\frac{٨}{٣}$ — عدد نسبي

⑥ $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}}$ — عدد نسبي

⑦ π — عدد غير نسبي

⑧ $٠,٢٣٢٤٤٢٤٤٤\ldots$ — عدد غير نسبي

⑨ $\sqrt{٣}+٢$ — عدد غير نسبي

2 قدر كلاً مما يلي:

① $\sqrt{٣٥}$

نبحث عن عددين مربعين كاملين متتاليين يقع بينهما العدد ٣٥ وهما : ٢٥ , ٣٦

$\sqrt{٢٥} < \sqrt{٣٥} < \sqrt{٣٦}$

$٥ < \sqrt{٣٥} < ٦$

وبالتالي فإن $\sqrt{٣٥}$ يقع بين العددين ٥ ، ٦

$\sqrt{٣٥} \approx ٥,٩$

② $\sqrt{٦٨}$

نبحث عن عددين مربعين كاملين متتاليين يقع بينهما العدد ٦٨ وهما : ٦٤ , ٨١

$\sqrt{٦٤} < \sqrt{٦٨} < \sqrt{٨١}$

$٨ < \sqrt{٦٨} < ٩$

وبالتالي فإن $\sqrt{٦٨}$ يقع بين العددين ٨ ، ٩

$\sqrt{٦٨} \approx ٨,٢$

3 أوجد ناتج كلاً مما يلي موظِّفاً خواص الجذور التربيعية:

① $-\sqrt{\frac{١}{٨١}} = -\frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٨١}} = -\frac{١}{٩}$

② $\sqrt{١١} \times \sqrt{١١} = ١١ \times ١١ = ١٢١$

③ $\sqrt{٤} \times \sqrt{٤٩} = \sqrt{٤٩ \times ٤} = ٧ \times ٢ = ١٤$

④ $\sqrt{٢} \times \sqrt{١٨} = \sqrt{١٨ \times ٢} = \sqrt{٣٦} = ٦$

⑤ $\sqrt{\frac{٢٧}{٣}} = \sqrt{٩} = ٣$

⑥ $\sqrt{٢٥٠٠} = \sqrt{١٠٠ \times ٢٥} = \sqrt{١٠٠} \times \sqrt{٢٥}$
$= ١٠ \times ٥ = ٥٠$

⑦ $\sqrt{٠,٦٤} = ٠,٨$

⑧ $٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥} = ٦ \times ٥ = ٣٠$

⑨ $٥\sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٧} = ١٠ \times ٧ = ٧٠$

⑩ $٧\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٧ \times ٣ = ٢١$

مهارات تفكير عليا

في أحد المعارض ، يوجد قاعة عرض ، لها أرضية مربعة الشكل مقسمة إلى أربعة أجزاء متطابقة . إذا كانت مساحة الجزء الواحد من الأرضية تساوي ٤٠٠ م ، فما طول ضلع أرضية القاعة ؟

الحل:

مساحة المربع = طول الضلع^{٢}

طول الضلع = $\sqrt{٤٠٠} = ٢٠$م

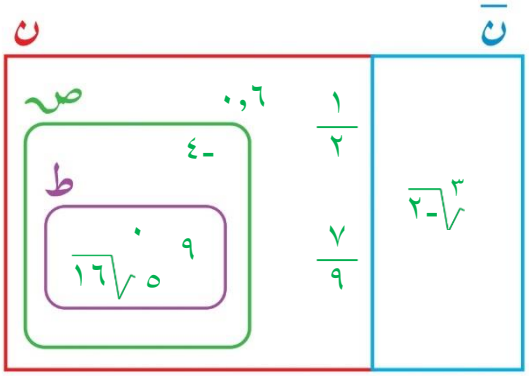
طول ضلع أرضية القاعة = ٢ × ٢٠ = ٤٠م

الأعداد الحقيقية (مقارنة ـ ترتيب)

حل وناقش

1 ضع كلا من الأعداد الآتية في مكانها المناسب على شكل فن المقابل:

$\frac{١}{٢}$ ، -٤ ، ٩ ، ٠,٦ ، $\frac{٧}{٩}$ ، $-\sqrt[٣]{٢}$ ، $\sqrt{١٦}$ ، ٠ ، ٥



2 ن ∩ $\bar{ن}$ = ح

دورك الآن (١)

① رتب تصاعدياً الأعداد الآتية:

$\pi\ ٢$ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$ ، $٦,\overline{٥}$

$\pi\ ٢ \approx ٦,٣$ ∴ $٦,\overline{٥} > \pi\ ٢$

$٥ < \sqrt[٣]{٢٧} < ٦$ ∴ $\pi\ ٢ > \sqrt[٣]{٢٧}$

∴ الترتيب التصاعدي: $\sqrt[٣]{٢٧}$ ، $\pi\ ٢$ ، $٦,\overline{٥}$

② رتب تنازلياً الأعداد الآتية:

$٣\frac{١}{٨}$ ، $٣,\overline{١٣}$ ، $-\pi$ ، $\sqrt{٨}$

$٣\frac{١}{٨} = ٣,١٢٥$

$-\pi \approx -٣,١٤$

$\sqrt{٨} \approx ٢,٨$

∴ الترتيب التنازلي: $٣,\overline{١٣}$ ، $٣\frac{١}{٨}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $-\pi$

دورك الآن (٢)

أكمل الجدول التالي:

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[١ ، ٣]	مغلقة	$١ \geq س \geq ٣$	١ ، ٣	مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ١ والأصغر من أو تساوي ٣
(١- ، ٤)	مفتوحة	$١- < س < ٤$	١- ، ٤	مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر ٤ والأصغر من ١-
[٤- ، ٠)	نصف مغلقة أو نصف مفتوحة	$٠ > س \geq ٤-$	٤- ، ٠	مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من ٠ والأصغر من أو تساوي ٤-
[٢- ، ٥-)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$٥- > س \geq ٢-$	٢- ، ٥-	مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من ٥- والأصغر من أو تساوي ٢-

دورك الآن (٣)

أكمل الجدول التالي:

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[٤- ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى	$س \geq ٤-$	٤-	مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ٤-
(٠ ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة من أعلى	$س > ٠$	٠	مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من صفر
[٢- ، ∞-)	نصف مغلقة وغير محدودة من أسفل	$س \geq ٢-$	٢-	مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي ٢-
(٢- ، ∞-)	مفتوحة وغير محدودة من أسفل	$س < ٢-$	٢-	مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٢-

تمارين ذاتية

1 قارن بين العددين في كل مما يلي:

① $\frac{٢}{٣}$ ، $٠,\overline{٦}$

الحل:

$٠,\overline{٦} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore ٠,\overline{٦} = \frac{٢}{٣}$

② -٢π ، $-٦,٢$

الحل:

$-٢\pi \approx -٦,٣$

$\therefore -٢\pi < -٦,٢$

③ $\frac{١}{٤}$ ، $٠,٢\overline{٥}$

الحل:

$٠,٢\overline{٥} \approx ٠,٢٥٢٥$

$٠,٢٥ = \frac{١}{٤}$

$\therefore ٠,٢\overline{٥} > \frac{١}{٤}$

④ $\sqrt{٥}$ ، $١\frac{٢}{٥}$

الحل:

$١\frac{٢}{٥} = ١,٤$

$\sqrt{٥} \approx ٢,٢٤$

$\therefore \sqrt{٥} > ١\frac{٢}{٥}$

2

① رتِّب تصاعدياً الأعداد الآتية: $\frac{٣}{٥}$ ، $٠,\overline{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$

الحل:

$\frac{٣}{٥} = ٠,٦$

$٠,\overline{٦} \approx ٠,٦٦٦$

$\frac{١}{٢} = ٠,٥$

$\therefore$ الترتيب التصاعدي هو: $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $٠,\overline{٦}$

② رتب تنازلياً الأعداد الآتية: $٣\frac{٣}{٨}$ ، $٣,\overline{٣٧}$ ، $\sqrt{١٥}$

الحل:

$٣\frac{٣}{٨} = ٣,٣٧٥$

$٣,\overline{٣٧} \approx ٣,٣٧٣٧$

$\sqrt{١٥} = ٣,٨٧$

$\therefore$ الترتيب التنازلي هو: $\sqrt{١٥}$ ، $٣\frac{٣}{٨}$ ، $٣,\overline{٣٧}$

③ رتِّب تصاعدياً الأعداد الآتية: $٠,\overline{٥}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣}{٧}$

الحل:

$٠,\overline{٥} \approx ٠,٥٥٥$

$\frac{\pi}{٤} \approx ٠,٧٩$

$\frac{٣}{٧} \approx ٠,٤٣$

$\therefore$ الترتيب التصاعدي هو: $\frac{٣}{٧}$ ، $٠,\overline{٥}$ ، $\frac{\pi}{٤}$

④ رتب تنازلياً الأعداد الآتية:

٢π ، $\sqrt{٤٨}$ ، $-٦,٢\overline{٥}$ ، $-٦\frac{٧}{٢٠}$

الحل:

$٢\pi \approx ٦,٣$

$\sqrt{٤٨} \approx ٦,٩٣$

$-٦,٢\overline{٥} \approx -٦,٢٥٢٥$

$-٦\frac{٧}{٢٠} = -٦,٣٥$

$\therefore$ الترتيب التنازلي هو:

$\sqrt{٤٨}$ ، ٢π ، $-٦,٢\overline{٥}$ ، $-٦\frac{٧}{٢٠}$

3 ① اكتب الفترة التي تعبّر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ٢ والأصغر من ٥.

$٢ \leq س < ٥$

② اكتب الفترة التي تعبّر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من٢ والأصغر من أو تساوي ٥.

$٢ < س \leq ٥$

③ اكتب الفترة التي تعبّر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من ـ٣

$س > -٣$

④ اكتب الفترة التي تعبّر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي ـ٣

$س \leq -٣$

⑤ إذا كانت $٣ \leq س < \sqrt{٣٦}$ ، فحدد الفترة، ومثّلها على خط الأعداد.

$\sqrt{٣٦} = ٦$ ، $\therefore ٣ \leq س < ٦$



4 أكمل الجدول التالي:

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[٢ ، ٥]	مغلقة	$٢ \leq س \leq ٥$		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ٢ والأصغر من أو تساوي ٥
(ـ٢ ، ١)	مفتوحة	$-٢ < س < ١$		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من ـ٢ والأصغر من ١
[ـ٤ ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى	$س \leq -٤$		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ـ٤
(∞ ، ٥)	مفتوحة وغير محدودة من أسفل	$س < ٥$		مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٥

مهارات تفكير عليا

تُقاس سرعة إغلاق الكاميرات الرقمية بوحدة الثانية. إذا كانت سرعات إغلاق الست كاميرات الرقمية بالثانية كما يلي:

$$\frac{١}{١٢٥} ، ٠,\overline{٦} ، \frac{١}{٢٠} ، ٠,١٢٥ ، \sqrt{٢} ، ٠,٠٠٤$$

فرتب هذه السرعات من الأسرع إلى الأبطأ.

الحل:

$$\frac{١}{١٢٥} = ٠,٠٠٨ \quad ، \quad \frac{١}{٢٠} = ٠,٠٥ \quad ، \quad \sqrt{٢} = ١,٤٢$$

الترتيب هو: $\sqrt{٢}$ ، $٠,\overline{٦}$ ، $٠,١٢$ ، $\frac{١}{٢٠}$ ، $٠,٠٠٤$ ، $\frac{١}{١٢٥}$

العمليات على الأعداد الحقيقية

دورك الآن (١)

حدد الاجراء الذي يتم أولاً:

① $\sqrt{٨١} - ٢ \times ٨$

الحل:

يتم إجراء عملية الضرب أولاً:

$\sqrt{٨١} - (٢ \times ٨)$

$= \sqrt{٨١} - ١٦$

$= ٩ - ١٦ = -٧$

② $١٢ - (٧٠ + ٣٠)$

الحل:

يتم إجراء العملية داخل القوس أولاً:

$١٢ - (٧٠ + ٣٠)$

$= ١٢ \times ١٠٠ = -١٢٠$

③ $٤٨ \div ٣٢ \times ٢$

الحل:

يتم إيجاد القوة أولاً ثم الضرب ثم القسمة:

$٤٨ \div ٣٢ \times ٢$

$= ٤٨ \div ٨ \times ٢$

$= ٤٨ \div ١٦ = ٣$

④ $\frac{(٢٤ + ٤)}{-٤}$

الحل:

يتم إجراء العملية داخل القوس أولاً:

$\frac{(٢٤ + ٤)}{-٤} = \frac{٢٨}{-٤} = -٧$

عبر عن فهمك

بأي عملية نبدأ: $\frac{(٦ - ٨)}{٢} + ٣$

- نبدأ بإيجاد العملية في البسط $\frac{٢}{٢} + ٣$
- ثم القسمة: $= ١ + ٣$
- ثم الجمع $= ٤$

دورك الآن (٢)

اذكر الخاصية المستخدمة:

① $\pi + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + \pi$ خاصية: الإبدال لعملية الجمع

② $\sqrt{٢} \times (\sqrt{٨} \times \sqrt{٥}) = (\sqrt{٢} \times \sqrt{٨}) \times \sqrt{٥}$ خاصية: التجميع لعملية الضرب

③ $\frac{٤}{٣} \times (\frac{٣}{٤} + \frac{٦}{٤}) = (\frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٤}) + (\frac{٤}{٣} \times \frac{٦}{٤})$ خاصية: توزيع الضرب على الجمع

دورك الآن (٣)

أوجد الناتج في أبسط صورة:

① $٥ \times \sqrt{١٦} \div ٠,\overline{٣} - ٧ \times ٢$

الحل:

$(٥ \times \sqrt{١٦}) \div ٠,\overline{٣} - (٧ \times ٢)$

$(٥ \times ٤) \div \frac{٣}{٩} - ١٤$

$(٢٠ \div \frac{٣}{٩}) - ١٤ = (٢٠ \times \frac{٩}{٣}) - ١٤$

$٦٠ - ١٤ = ٤٦$

② $\sqrt{\frac{١٠٠}{١٦}} \times ٨ - ٢٥^{٢}$

الحل:

$\sqrt{\frac{١٠٠}{١٦}} \times ٨) - ٢٥$

$(\frac{١٠}{٤} \times ٨) - ٢٥$

$\frac{٨٠}{٤} - ٢٥ = ٢٠ - ٢٥ = -٥$

عبر عن فهمك

ضع أقواساً لتصبح العبارة صحيحة: $١٢ \div ٣ + ١ + ٢ = ٥$

$١٢ \div (٣ + ١) + ٢ = ٥$

تمارين ذاتية

1 أوجد قيمة كلّ مما يلي بطريقتين مختلفتين:

① $٤ \times (٧ + ٨)$

$٤ \times (٧ + ٨) = ٤ \times ١٥ = ٦٠$

بطريقة توزيع الضرب على الجمع: $(٤ \times ٧) + (٤ \times ٨) = ٢٨ + ٣٢ = ٦٠$

② $٨ \times (١٠ - ١)$

$٨ \times (١٠ - ١) = ٨ \times ٩ = ٧٢$

بطريقة توزيع الضرب على الطرح: $(٨ \times ١٠) - (٨ \times ١) = ٨٠ - ٨ = ٧٢$

2 أوجد قيمة كلّ مما يلي:

① $٢٥ \div ٥ \times (-٣) + ٧$

الحل:

$(٢٥ \div ٥) \times (-٣) + ٧$

$= ٥ \times (-٣) + ٧$

$= -١٥ + ٧$

$= -٨$

② $١٨ - (-٤) + ٦ \div (-٣)$

الحل:

$١٨ - (-٤) + (٦ \div (-٣))$

$= ١٨ + ٤ + (-١٨)$

$= ٢٢ - ١٨$

$= ٤$

③ $(-١) + \frac{٦ - ١٢}{٦}$

الحل:

$(-١) + \frac{٦ - ١٢}{٦}$

$= ١ - \frac{٦}{٦}$

$= ١ - ١ = ٠$

④ $(-٢) + \frac{-٣ (٢ + ٩)}{-١١}$

الحل:

$(-٢) + \frac{-٣ \times ١١}{-١١}$

$= ٣ - ٢ = ١$

---

③ أوجد ناتج كلّ مما يلي في أبسط صورة:

① $٢ \times \frac{٣}{٨} - \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٢}}$

الحل:

$(٢ \times \frac{٣}{٤٨}) - \frac{\sqrt{٢ \times ٤}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٢} \times \sqrt{٤}}{\sqrt{٢}}$

$= ٢ - \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٨ - ٣}{٤} = \frac{٥}{٤} = ١\frac{١}{٤}$

② $\frac{١٨}{٧} \times ٠,\overline{٧} \div \sqrt{٣} \times \sqrt{٢٧}$

الحل:

$\frac{١٨}{٧} \times \frac{٧}{٩} \div \sqrt{٣} \times \sqrt{٣ \times ٩}$

$= \sqrt{٩} \times (\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}) \div \frac{٧}{٩} \times \frac{١٨}{٧}$

$= ٣ \times ٣ \div \frac{١٨}{٩}$

$= ٩ \times \frac{٩}{١٨} = \frac{٩}{٢} = ٤\frac{١}{٢}$

③ $٨ \times \sqrt{٢٥} \div ٠,\overline{٦} + ٤ \times ٩$

الحل:

$(٨ \times ٥) \div ٠,\overline{٦} + (٤ \times ٩)$

$= ٤٠ \div \frac{٦}{٩} + ٣٦$

$= ٤٠ \div \frac{١}{٣} + ٣٦$

$= ٤٠ \times ٣ + ٣٦$

$= ٤٣ + ٣٦ = ٧٩$

④ $\sqrt{٤٩} \div ٠,\overline{٧} \times ٦ - ٩ \times ٦$

الحل:

$(٦ \times ٧ \div \frac{٧}{٩}) - (٩ \times ٦)$

$= (٦ \times \frac{٩}{٧} \times ٧) - ٥٤$

$= (٦ \times ٩) - ٥٤$

$= ٥٤ - ٥٤ = ٠$

---

④ نظمت إحدى المدارس رحلة إلى المركز العلمي، وكانت أسعار التذاكر على الشكل الآتي: زيارة المركز ٣,٥ دنانير، زيارة قاعة الاستكشاف ٤,٥ دنانير . أحسب المبلغ الإجمالي للرحلة مستعينا بالجدول الموضح فيه عدد المتعلمين المشاركين؟

أنواع التذاكر	زيارة المركز	زيارة قاعة الاستكشاف
عدد المتعلمين	٢٠	١٠

الحل:

$٣,٥ \times (٢٠ + ٣٠) = (٣,٥ \times ٢٠) + (٣٠ \times ٣,٥) = ١٧٥$

$٤,٥ \times (٢٠ + ٣٠) = (٤,٥ \times ٢٠) + (٣٠ \times ٤,٥) = ٢٢٥$

المبلغ الإجمالي = ١٧٥ + ٢٢٥ = ٤٠٠ دنانير

5 **إذا أنتجت كل من الكويت والإمارات العربية المتحدة والصين الكمية نفسها من النفط في أحد الأيام ولتكن ٣,٦ مليون برميل ، وأنتجت المملكة العربية السعودية في اليوم نفسه ١٠ ملايين برميل ، فاحسب إجمالي إنتاج الدول الأربع في هذا اليوم .**

$(٤ \times ٣,٦) + ١٠$

$١٤,٤ + ١٠ = ٢٤,٤$ مليون برميل.

القيمة المطلقة

عبر عن فهمك

هل $|٥ + (-٣)| = |٥| + |-٣|$ ؟ ولماذا؟

نعم تتساوى القيمتين؟ لأن من خواص القيمة المطلقة: $|س + ص| = |س| + |ص|$

دورك الآن (١)

أوجد ناتج كلّ مما يلي مستخدماً خواص القيمة المطلقة: :

① $|٣ \times ٦|$
$= |٣| \times |٦|$
$= ٣ \times ٦$
$= ١٨$

② $\left|\frac{-٤}{٩}\right|$
$= \frac{|-٤|}{|٩|} = \frac{٤}{٩} = ٠,\overline{٤}$

③ $|٠,٥ - ٢٣,٥|$
$= |-٢٣,٥ + ٠,٥|$
$= |-٢٣|$
$= ٢٣$

دورك الآن (٢)

أوجد قيمة كلّ مما يلي:

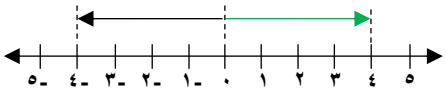
① $|س \times ٦ + ٤|$ ، إذا كانت $س = ١١$
بالتعويض:
$= |١١ \times ٦ + ٤|$
$= |٦٦ + ٤|$
$= |٧٠|$
$= ٧٠$

② $|س - ٥| + |-٣,٢|$ ، إذا كانت $س = -٤$
بالتعويض:
$= |-٤ - ٥| + |-٣,٢|$
$= |-٩| + |-٣,٢|$
$= ٩ + ٣,٢$
$= ١٢,٢$

دورك الآن (٣)

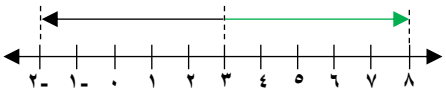
أكمل لتوجد حل المعادلات الآتية مستعيناً بالتمثيل الموضح على خط الأعداد:

① $|$ س $| = ٤$



س = ٤ أو س = ـ ٤

② $|$ س ـ ٣ $| = ٥$



س = ٨ أو س = ـ ٢

تمارين ذاتية

1 أوجد قيمة كلّ مما يلي:

① $|$ ٢ س $|$ ـ ٥ ، إذا كانت س = ٥

بالتعويض عن قيمة س:

$= |$ ٢ × ٥ $|$ ـ ٥

$= |$ ١٠ $|$ ـ ٥

= ١٠ ـ ٥

= ٥

② $|$ س + ٢ $| + |$ ٦ $|$ ، إذا كانت س = ـ ٢

بالتعويض عن قيمة س:

$= |$ ـ ٢ + ٢ $| + |$ ٦ $|$

$= |$ ٠ $| +$ ٦

= ٦

③ $|$ س × ٧ ـ ٦ $|$ ، إذا كانت س = ٨

بالتعويض عن قيمة س:

$= |$ ٨ × ٧ ـ ٦ $|$

$= |$ ٥٦ ـ ٦ $|$

$= |$ ٥٠ $|$

= ٥٠

④ $|$ س ـ ٨ $| + |$ ـ ١,٣ $|$ ، إذا كانت س = ٤

بالتعويض عن قيمة س:

$= |$ ٤ ـ ٨ $| + |$ ـ ١,٣ $|$

$= |$ ـ ٤ $| + |$ ـ ١,٣ $|$

= ٤ + ١,٣

= ٥,٣

2 أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات الآتية في ح:

① $|$ ٥ س ـ ٣ $| = ٨$

الحل:

$|$ ٥ س ـ ٣ $| = ٨$

٥ س ـ ٣ = ٨ أو ٥ س ـ ٣ = ـ ٨

٥ س ـ ٣ + ٣ = ٨ + ٣ ٥ س ـ ٣ + ٣ = ـ ٨ + ٣

٥ س = ١١ ٥ س = ـ ٥

$س = \frac{١١}{٥}$ س = ـ ١

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١١}{٥}، ـ ١\}$

② $|٧س| = ٠$

الحل:

$|٧س| = ٠$

$٧س = ٠$

$س = ٠$

∴ مجموعة الحل = { ٠ } لها حل وحيد

③ $|١ - ص| = ٤$

الحل:

$|١ - ص| = ٤$

$١ - ص = ٤$ أو $١ - ص = -٤$

$١ - ١ - ص = ٤ - ١$ $١ - ١ - ص = -٤ - ١$

$-ص = ٣$ $-ص = -٥$

$ص = -٣$ $ص = ٥$

∴ مجموعة الحل = { -٣ ، ٥ }

④ $|٣س + ٧| = ٠$

الحل:

$|٣س + ٧| = ٠$

$٣س + ٧ = ٠$

$٣س + ٧ - ٧ = -٧$

$٣س = -٧$

$س = -\frac{٧}{٣}$

∴ مجموعة الحل = { $-\frac{٧}{٣}$ } لها حل وحيد

⑤ $|٩س - ٢| = -١$

الحل:

مجموعة الحل = ∅

⑥ $\frac{١}{٢}$ | س – ٣ | = ١٠

الحل:

$\frac{١}{٢}$ | س – ٣ | = ١٠

| س – ٣ | = ٢٠

س – ٣ = ٢٠ أو س – ٣ = – ٢٠

س – ٣ + ٣ = ٢٠ + ٣ س – ٣ + ٣ = – ٢٠ + ٣

س = ٢٣ س = – ١٧

∴ مجموعة الحل = {٢٣ ، – ١٧}

⑦ | س | – ١ = ٣

الحل:

| س | – ١ = ٣

| س | – ١ + ١ = ٣ + ١

| س | = ٤

س = ٤ أو س = – ٤

∴ مجموعة الحل = {٤ ، – ٤}

⑧ ٣ | ٤ س + ١ | – ٩ = ٠

الحل:

٣ | ٤ س + ١ | – ٩ = ٠

٣ | ٤ س + ١ | – ٩ + ٩ = ٩

| ٤ س + ١ | = ٣

٤ س + ١ = ٣ أو ٤ س + ١ = – ٣

٤ س + ١ – ١ = ٣ – ١ ٤ س + ١ – ١ = – ٣ – ١

٤ س = ٢ ٤ س = – ٤

س = $\frac{١}{٢}$ س = – ١

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٢}$ ، – ١}

حل متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد

دورك الآن (١)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٣ – | س | ≤ ٤ في ح :

الحل:

٣ – | س | ≤ ٤

٣ – ٣ – | س | ≤ ٤ – ٣

– | س | ≤ ١

| س | ≥ – ١

س ≥ – ١ أو س ≤ ١

س ∈ (– ∞ ، – ١] س ∈ [١ ، ∞)

∴ مجموعة الحل = (– ∞ ، – ١] ∪ [١ ، ∞)

دورك الآن (٢)

يقدم محل للعصائر الطازجة أنواعًا مختلفة من العصير. إذا كان يقدم نوعاً من العصير بخلط ثلاثة أنواع من عصير الفاكهة : الفراولة والمانجو والأناناس ، وإذا كانت كمية عصير الفراولة المستخدمة هي $\frac{١}{٤}$ لتر ، والمانجو $١\frac{١}{٢}$ لتر ، فما الكمية التي يمكن إضافتها من عصير الأناناس علما بأن وعاء الخلط يتسع لـ ٢ لتر على الأكثر .

(أكتب متباينة لإيجاد كمية عصير الأناناس المناسبة).

الحل:

نفرض كمية عصير الأناناس = س

$\frac{١}{٤} + ١\frac{١}{٢} + س \leq ٢$

$س \leq ٢ - \frac{٧}{٤}$

$س \leq \frac{١}{٤}$ (ولأن الكمية لا تحسب بالسالب)

∴ مجموعة الحل = [٠ ، $\frac{١}{٤}$] أي أن كمية عصير الأناناس مابين ٠ إلى $\frac{١}{٤}$ لتر.

تمارين ذاتية

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية في ح ومثّلها على خط الأعداد الحقيقية:

1 **س – ٩ > ٥**

الحل:

س – ٩ > ٥

س – ٩ + ٩ > ٥ + ٩

س > ١٤

∴ مجموعة الحل = (– ∞ ، ١٤)



2 **١ ≤ ٢ ص + ٣ < ١١**

الحل:

١ ≤ ٢ ص + ٣ < ١١

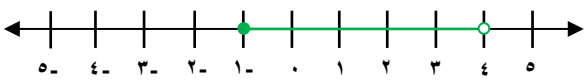
١ – ٣ ≤ ٢ ص + ٣ – ٣ < ١١ – ٣

– ٢ ≤ ٢ ص < ٨

$\frac{١}{٢} \times -٢ \leq \frac{١}{٢} \times ٢ ص < \frac{١}{٢} \times ٨$

– ١ ≤ ص < ٤

∴ مجموعة الحل = [– ١ ، ٤)



3 **٣ – ٥ س ≥ ٨**

الحل:

٣ – ٥ س ≥ ٨

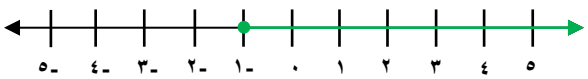
٣ – ٥ س – ٣ ≥ ٨ – ٣

– ٥ س ≥ ٥

$-٥ س \times \frac{١}{-٥} \leq ٥ \times \frac{١}{-٥}$

س ≤ – ١

∴ مجموعة الحل = [– ١ ، ∞)



4 $س + ٧ > ٥$

الحل:

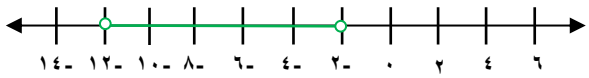
$| س + ٧ | > ٥$

$- ٥ < س + ٧ < ٥$

$- ٥ - ٧ < س + ٧ - ٧ < ٥ - ٧$

$- ١٢ < س < - ٢$

∴ مجموعة الحل = $(- ١٢ ، - ٢)$



5 $م + ١ \geq ٦$

الحل:

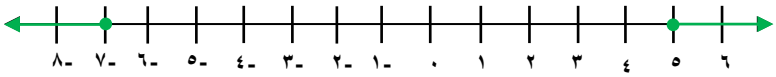
$| م + ١ | \geq ٦$

$م + ١ \geq ٦$ أو $م + ١ \geq - ٦$

$م + ١ - ١ \geq ٦ - ١$ $م + ١ - ١ \geq - ٦ - ١$

$م \geq ٥$ $م \geq - ٧$

$س \in [٥ ، \infty)$ $س \in (- \infty ، - ٧]$



∴ مجموعة الحل = $[٥ ، \infty) \cup (- \infty ، - ٧]$

6 $٢ س - ٣ > ٧$

الحل:

$٢ | س | - ٣ > ٧$

$٢ | س | - ٣ + ٣ > ٧ + ٣$

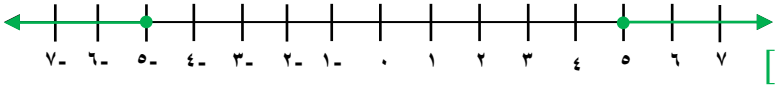
$٢ | س | > ١٠$

$٢ \times \frac{١}{٢} | س | > ١٠ \times \frac{١}{٢}$

$| س | > ٥$

$س > ٥$ أو $س < - ٥$

$س \in (٥ ، \infty)$ $س \in (- \infty ، - ٥)$



∴ مجموعة الحل = $[٥ ، \infty) \cup (- \infty ، - ٧]$

7 $|٣س - ٤| + ١ \geq ١١$

الحل:

$|٣س - ٤| + ١ \geq ١١$

$|٣س - ٤| + ١ - ١ \geq ١١ - ١$

$|٣س - ٤| \geq ١٠$

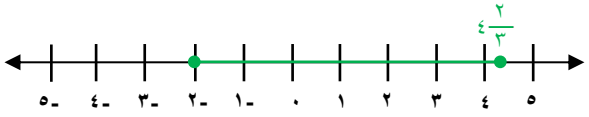
$-١٠ \geq ٣س - ٤ \geq ١٠$

$-١٠ + ٤ \geq ٣س - ٤ + ٤ \geq ١٠ + ٤$

$-٦ \geq ٣س \geq ١٤$

$-٦ \times \frac{١}{٣} \geq ٣س \times \frac{١}{٣} \geq ١٤ \times \frac{١}{٣}$

$-٢ \geq س \geq \frac{١٤}{٣}$



∴ مجموعة الحل = $[-٢ ، ٤\frac{٢}{٣}]$

8 $-٥ < س < -٢$

الحل:

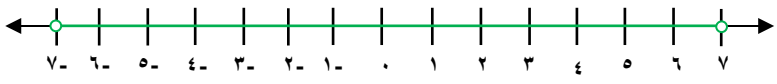
$-٥ < |س| < -٢$

$-٥ - ٥ < |س| < -٢ - ٥$

$-٧ < |س| < -٧$

$|س| < ٧$

$-٧ < س < ٧$



∴ مجموعة الحل = $(-٧ ، ٧)$

9 $| ٣ - ٢س | \geq ٩$

الحل:

$| ٣ - ٢س | \geq ٩$

$٣ - ٢س \leq ٩$ أو $٣ - ٢س \geq - ٩$

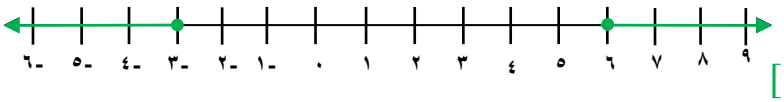
$٣ - ٣ - ٢س \leq ٩ - ٣$ $٣ - ٣ - ٢س \geq - ٩ - ٣$

$- ٢س \leq ٦$ $- ٢س \geq - ١٢$

$- ٢س \times - \frac{١}{٢} \leq ٦ \times - \frac{١}{٢}$ $- ٢س \times - \frac{١}{٢} \geq - ١٢ \times - \frac{١}{٢}$

$س \geq - ٣$ $س \leq ٦$

$س \in (- \infty ، - ٣)$ $س \in (\infty ، ٦)$



∴ مجموعة الحل = $[٦ ، \infty) \cup (- \infty ، - ٣]$

مهارات تفكير عليا

لتحصل مريم على تقدير امتياز في مادة الرياضيات ، عليها أن تحصل على ١٨٠ درجة فأكثر من مجموع درجات الفصلين الدراسيين ، إذا حصلت مريم على ٩١ درجة في نهاية الفصل الدراسي الأول ، فما الدرجات التي يجب أن تحصل عليها مريم في الفصل الدراسي الثاني لتحصل على تقدير امتياز في درجة نهاية العام ؟

الحل:

نفرض درجات مريم في الفصل الدراسي الثاني = س

$س + ٩١ \geq ١٨٠$

$س + ٩١ - ٩١ \geq ١٨٠ - ٩١$

$س \geq ٨٩$

∴ مجموعة الحل = $[٨٩ ، \infty)$ ∴ عليها أن تحصل على ٨٩ درجة فأكثر.

الأسس العلمية باستخدام الأسس الصحيحة

دورك الآن (١)

اكتب بالصورة العلمية كلاً مما يلي:

1) ٤٣٧٥ = ٤,٣٧٥ × ١٠^٣

2) ٤١٥,٣ = ٤,١٥٣ × ١٠^٢

3) ١١٨٠ مليوناً = ١١٨٠٠٠٠٠٠٠ = ١,١٨٠ × ١٠^٩

4) ٢٣١ ملياراً = ٢٣١٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٢,٣١ × ١٠^١١

دورك الآن (٢)

اكتب رمز كلّ من الأعداد الآتية بالشكل النظامي:

1) ١,٤ × ١٠^٣ = ١٤٠٠

2) ٣,٤٥٦ × ١٠^٥ = ٣٤٥٦٠٠

3) ٦,٨٩ × ١٠^٦ = ٦٨٩٠٠٠٠

4) ٢,٠٠٣ × ١٠^٧ = ٢٠٠٣٠٠٠٠

دورك الآن (٣)

اكتب بالصورة العلمية كلاً مما يلي:

1) ٠,٠٠٠٥٩ = ٥,٩ × ١٠^-٥

2) ٠,٠٠٠٠٠٦٤٥ = ٦,٤٥ × ١٠^-٦

3) أربعمائة وخمسون جزءاً من مائة ألف = ٠,٠٠٤٥٠ = ٤,٥٠ × ١٠^-٣

4) ٤٣ جزءاً من مليون = ٠,٠٠٠٠٤٣ = ٤,٣ × ١٠^-٥

5) ٥٣ / ١٠٠٠٠٠٠ = ٥٣ / ١٠^٥ = ٥٣ × ١٠^-٥ = ٥,٣ × ١٠^-٦

دورك الآن (٤)

اكتب رمز كلّ من الأعداد الآتية بالشكل النظامي:

1) ٥,٢ × ١٠^-٢ = ٠,٠٥٢

2) ٣ × ١٠^-٦ = ٠,٠٠٠٠٠٣

3) ٤,٠٠٣ × ١٠^-٥ = ٠,٠٠٠٠٤٠٠٣

4) ٢,٥٦٤ × ١٠^-٤ = ٠,٠٠٠٢٥٦٤

دورك الآن (٥)

قارن بوضع > ، < ، = ، في كل مما يلي لتحصل على عبارة صحيحة:

1. $٤,٤ \times ١٠^{-٣}$ (<) $٤,٤ \times ١٠^{-٥}$
2. $٣,٠٥ \times ١٠^{٧}$ (>) $٧,٢ \times ١٠^{٧}$
3. $٢,٧ \times ١٠^{-٦}$ (>) $٤,٠٧ \times ١٠^{-٤}$

دورك الآن (٦)

يبلغ طول حشرة السوس $٩,٦٥٣ \times ١٠^{-٥}$ بينما يبلغ طول حشرة الماء ٠,٠١٩٨١ سم، أي من الحشرتين هي الأصغر طولاً؟

الحل:

$٠,٠١٩٨١ = ١,٩٨١ \times ١٠^{-٢}$

∴ حشرة السوس الأصغر طولاً.

تمارين ذاتية

اكتب بالصورة العلمية كلاً مما يلي: ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

1. $٣٥٩٠٠٠ = ٣,٥٩٠٠٠ \times ١٠^{٥}$
2. $٠,٠٠٣٤٢ = ٣,٤٢ \times ١٠^{-٣}$
3. $٦١٣٥٤ = ٦,١٣٥٤ \times ١٠^{٤}$
4. $٠,٠٠٠١٩٦٧ = ١,٩٦٧ \times ١٠^{-٤}$
5. ٤٨٦٦ مليوناً $= ٤٨٦٦٠٠٠٠٠٠ = ٤,٨٦٦ \times ١٠^{٩}$
6. ٣٤١ تريليوناً $= ٣٤١ \times ١٠^{١٢} = ٣,٤١ \times ١٠^{١٤}$
7. خمسمائة وسبعة وثلاثون ملياراً $= ٥٣٧٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٥,٣٧ \times ١٠^{١١}$
8. ستمائة وثلاثون جزءاً من عشرة آلاف $= ٠,٠٣٦٠ = ٣,٦٠ \times \times ١٠^{-٢}$
9. ١٣ جزءاً من مليون $= ٠,٠٠٠٠١٣ = ١,٣ \times ١٠^{-٥}$
10. ٣٨٦ جزءاً من مليار $= ٠,٠٠٠٠٠٠٣٨٦ = ٣,٨٦ \times ١٠^{-٧}$

اكتب رمز كلّ من الأعداد الآتية بالشكل النظامي:

1. $٣,١٤ \times ١٠^{٥} = ٣١٤٠٠٠$
2. $-٣,٤ \times ١٠^{-٢} = -٠,٠٣٤$
3. $٢,٠٩ \times \times ١٠^{٤} = ٢٠٩٠٠$
4. $٢ \times ١٠^{-٧} = ٠,٠٠٠٠٠٠٢$
5. $-٥ \times \times ١٠^{٧} = -٥٠٠٠٠٠٠٠$
6. $٣,٢٣١ \times ١٠^{-٢} = ٠,٠٣٢٣١$

قارن بوضع > ، < ، = ، في كل مما يلي لتحصل على عبارة صحيحة:

1. $٩,٩ \times ١٠^{٧}$ (>) $١,١ \times ١٠^{٨}$
2. $٣,٢ \times ١٠^{-٢}$ (<) $١,٧ \times ١٠^{-٣}$
3. $٣,٥٤ \times ١٠^{-١}$ (=) ٣٥٤ جزءاً من ألف

أوجد ناتج كلاً مما يلي بالصورة العلمية:

1. $٢,٥ \times ١٠^{٦} + ٣,٢ \times ١٠^{٦} = (٢,٥ + ٣,٢) \times ١٠^{٦} = ٥,٧ \times ١٠^{٦}$
2. $٩,٨ \times ١٠^{٤} - ٢,٧ \times ١٠^{٤} = (٩,٨ - ٢,٧) \times ١٠^{٤} = ٧,١ \times ١٠^{٤}$
3. $(٤,٣ \times ١٠^{٢}) \times (٥ \times ١٠^{-٤}) = (٤,٣ \times ٥) \times (١٠^{٢} \times ١٠^{-٤}) = ٢١,٥ \times ١٠^{-٢}$
4. $(٦,٣ \times ١٠^{-٤}) \div (٧ \times ١٠^{٢}) = \frac{٦,٣ \times ١٠^{-٤}}{٧ \times ١٠^{٢}} = \frac{٦,٣}{٧} \times ١٠^{-٤-٢} = ٠,٩ \times ١٠^{-٦}$

بلغت مساحة الشيخ عبدالله السالم الثقافي ١٢٧٠٠٠ متر مربع، اكتب هذه المساحة في الصورة العلمية.

الحل:

$١,٢٧ \times ١٠^{٥}$

مهارات تفكير عليا

في عام ٢٠١٦ م ، بلغ عدد سكان دولة الكويت حوالي (٤,١ × ١٠^{٦}) نسمة ، بينما بلغ عدد سكان دولة الإمارات العربية المتحدة حوالي (٨٫٣ × ١٠^{٦}) نسمة .

فأي الدولتين هي الأكثر عددًا في السكان؟ وكم بلغ مجموع عدد سكان الدولتين معًا بالصورة العلمية ؟

الحل:

نقارن: عدد سكان دولة الكويت ٤,١ × ١٠^{٦} وعدد سكان دولة الامارات ٨,٣ × ١٠^{٦}

∴ الامارات هي الدولة الأكثر عدداً.

المجموع = ٤,١ × ١٠^{٦} + ٨,٣ × ١٠^{٦}

= ١٠^{٦} (٤,١ + ٨,٣)

= ١٢,٤ × ١٠^{٦}

الوحدة التعليمية
الثانية



التحليل والمعادلات

عالم الصناعة

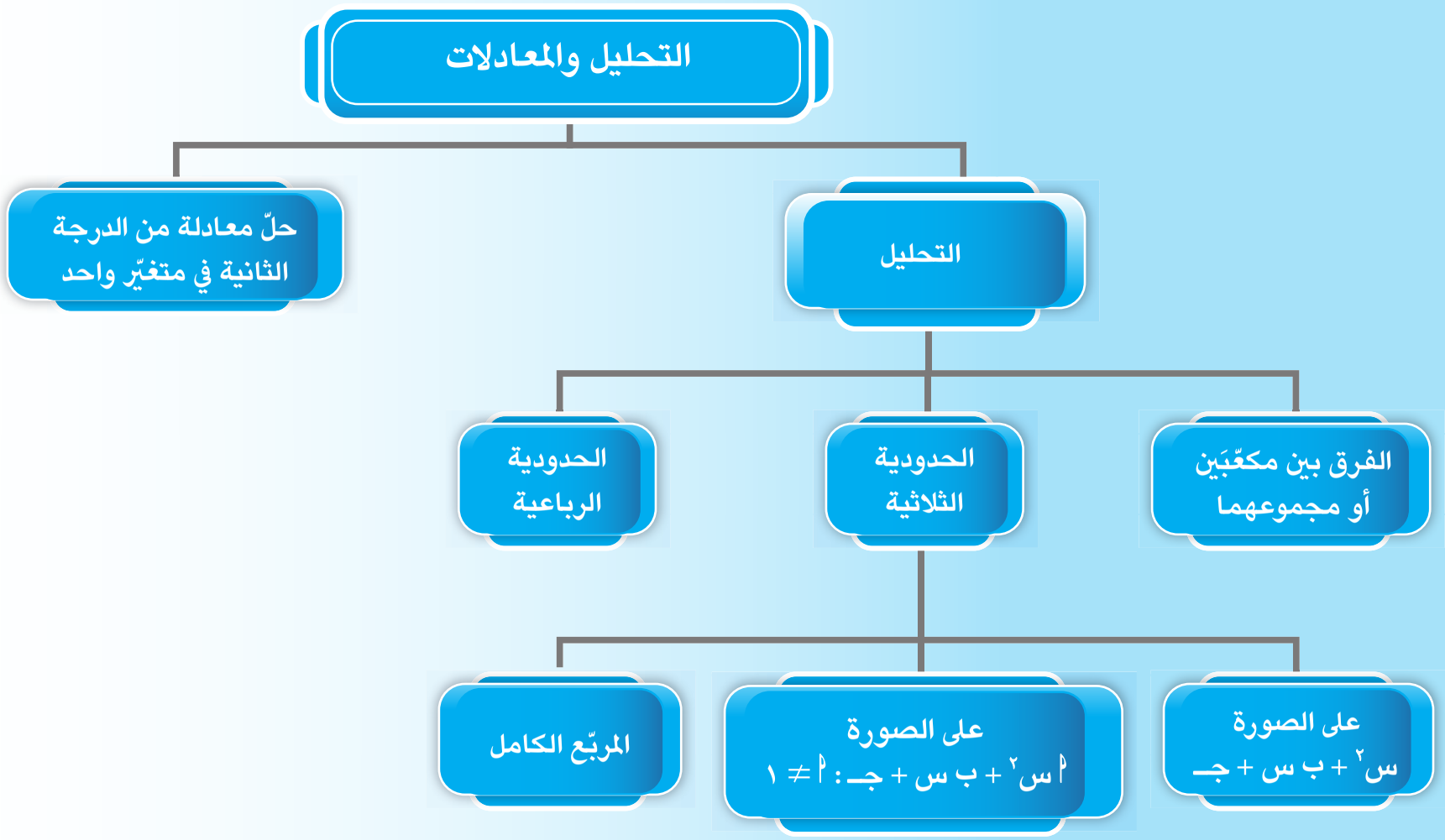
تُعدّ الصناعة مصدرًا من أهمّ مصادر الدخل في دولة الكويت ؛ وحيث إنّ الكويت بلدًا مصدِّرًا للنفط كان لا بدّ من وجود مصانع كشركة الصناعات الهندسية الثقيلة وبناء السفن (HEISCO) حيث تأسّست عام ١٩٧٤ م. ومقرّها في الشويخ ، ومن أنشطتها :

- بناء وإصلاح السفن وأعمال الترسية .
- تصنيع الهياكل المعدنية والمبادلات الحرارية والخزّانات .
- التنفيذ الهندسي الشامل في مشاريع النفط والغاز والبتروكيماويات .
- أعمال الإنشاء المدني والصيانة الصناعية وخدمات الشحن والتفتيش الفنّي والإشعاعي والحلول اللوجستية .



المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
العدّ والجبر	تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية .	العمل الجَماعي - الاستكشاف والتقصّي - التذكّر - التعرّف - الفهم - المقارنة والتمييز - التمثيل - النمذجة - التحليل والتركيب - القوانين
	فهم الأنماط والعلاقات والدوالّ .	التعاون - المشاركة - الاستنتاج - الترميز والبرمجة - حلّ المشكلات - الاستدلال - القيادة - اِتّخاذ القرار - الاستكشاف والتقصّي

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثانية



هل أنت مستعدّ ؟

١ أوجِد العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) لكلّ ممّا يلي :

(أ) ١٤ ، ٧

٧

(ب) ٦س^{٢} ، ٨س^{٣}

٢ س^{٢}

٢ حلِّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) ٢س^{٢} – ٨س

٢ س (س – ٤)

(ب) ص^{٢} – ٤

(ص + ٢) (ص – ٢)

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

(أ) $\sqrt[٣]{\frac{-٨}{٢٧}}$

$= \sqrt[٣]{\frac{(-٢)^{٣}}{(٣)^{٣}}} = \frac{-٢}{٣}$

(ب) $\sqrt[٣]{٠,٠٦٤}$

$= \sqrt[٣]{\frac{٦٤}{١٠٠٠}} = \sqrt[٣]{\frac{(٤)^{٣}}{(١٠)^{٣}}}$

$= \frac{٤}{١٠} = ٠,٤$

٤ اِختصِر ما يلي :

(أ) (٣^{٢})^{٣}

$= ٣^{٢ \times ٣} = ٣^{٦} = ٧٢٩$

(ب) (٢$^{-٤}$)^{٢}

$= ٢^{-٤ \times ٢} = ٢^{-٨} = \frac{١}{٢٥٦}$

(ج) (ص^{٣})^{٢}

ص$^{٢ \times ٣}$ = ص^{٦}

(د) (س^{٢} ص^{٣})^{٤}

س$^{٢ \times ٤}$ ص$^{٣ \times ٤}$ = س^{٨} ص^{١٢}

٥ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) س (س + ٣)

س² + ٣ س

ب) ٣ (٢س² − ٧س + ٥)

٦ س² − ٢١ س + ١٥

ج) (٣س − ١) × (س + ٤)

٣ س² + ١٢ س − س − ٤

٣ س² + ١١ س − ٤

د) (٢ص − ١) × (٢ص − ١)

٤ ص² − ٢ ص − ٢ ص + ١

٤ ص² − ٤ ص + ١

هـ) (س + ٥)²

س² + ١٠ س + ٢٥

و) (س − ص)(س² + س ص + ص²)

س³ + س² ص + س ص² − س² ص − س ص² − ص³

س³ − ص³

٦ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

أ) ٦ س + ٥ = ٨ س

٦ س − ٨ س = − ٥

− ٢ س = − ٥ ∴ س = ٥/٢

∴ مجموعة الحل = { ٥/٢ }

ب) س² − ١٦ = ٠

س² = ١٦ ∴ س = ± √١٦

∴ س = ± ٤

∴ مجموعة الحل = { − ٤ ، ٤ }

٧ أوجِد مساحة منطقة مربّعة طول ضلعها (س − ٣) سم .

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

∴ م = (س − ٣) × (س − ٣) = (س − ٣)²

= س² − ٦ س + ٩

٨ منطقة مستطيلة أبعادها موضَّحة في الشكل المقابِل.
أوجِد مساحتها .

(س + ١) سم

(س + ٥) سم

مساحة المستطيل = طول × عرض

∴ (س + ٥) (س + ١) = س² + س + ٥ س + ٥

= س² + ٦ س + ٥

هل أنت مستعدّ ؟

٢ - ١ تحليل الفرق بين مكعّبَين أو مجموعهما

Factorising the Difference Between Two Cubes or Their Sum

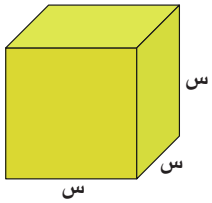
سوف تتعلّم : تحليل الفرق بين مكعّبَين وتحليل مجموع مكعّبَين .

العبارات والمفردات :

تحليل	Factorising	مجموع مكعّبَين	Sum of Two Cubes
الفرق بين مكعّبَين	Difference Between Two Cubes		

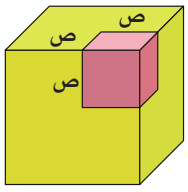
اِستكشِف

أنتج مصنع للإسفنج قطعة مكعّبة الشكل طول حرفها (س) وحدة طول ، كما في الشكل (أ) .



الشكل (أ)

ومن أحد رؤوسها تمّ قطع مكعّب صغير طول حرفه (ص) وحدة طول ، كما في الشكل (ب) .



الشكل (ب)

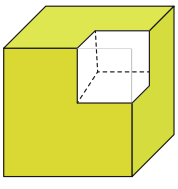
- أُحسب كلًّا من : حجم المكعّب الكبير = ... × ..... × ..... = ... وحدة مكعّبة

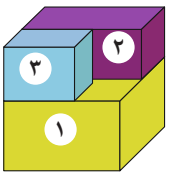
  حجم المكعّب الصغير = ... × ..... × ..... = ... وحدة مكعّبة

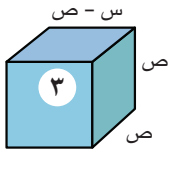
  حجم الجزء المتبقّي = س^{٣} - ص^{٣} وحدة مكعّبة

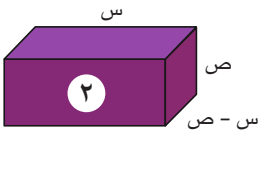
يُسمّى المقدار س^{٣} - ص^{٣} **فرقًا بين مكعّبَين** ، كما في الشكل (ج) .

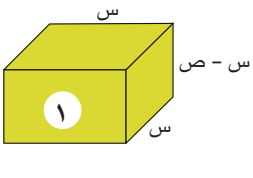
وكذلك يمكن التوصّل إلى حجم الجزء المتبقّي من قطعة الإسفنج بتجزئتها إلى ثلاثة مجسَّمات ① ، ② ، ③ كلّ منها على شكل شبه مكعّب معلومة أبعاده كما يلي :


الشكل (ج)









الحجم = ... × ..... × (س - ص) | الحجم = ... × ..... × (س - ص) | الحجم = ... × ..... × (س - ص)

حجم الجزء المتبقّي = حجم الجزء ① + حجم الجزء ② + حجم الجزء ③

س^{٣} - ص^{٣} = ... (س - ص) + ... (س - ص) + ... (س - ص)

= (س - ص) (س^{٢} + س ..... + ...)

تحقَّق جبريًّا: (س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

= س (س^{٢} + س ص + ص^{٢}) − ص (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

= س^{٣} + س^{٢} ص + س ص^{٢} − ص س^{٢} − س ص^{٢} − ص^{٣} = س^{٣} − ص^{٣}

ممّا سبق، نستنتج أنّه لتحليل الفرق بين مكعّبَين س^{٣} ، ص^{٣} نتّبع القاعدة الآتية :

س^{٣} − ص^{٣} = (س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

أي أنّ الفرق بين مكعّبَي حدَّين يُحلَّل إلى حاصل ضرب عاملَين كما يلي :

(الحدّ الأوّل − الحدّ الثاني) (مربّع الحدّ الأوّل + الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني + مربّع الحدّ الثاني)

يمكن استخدام قانون الفرق بين مكعّبَين لتحليل المقدار س^{٣} + ص^{٣}

يُكتب المقدار س^{٣} + ص^{٣} على الصورة س^{٣} − (− ص)^{٣}

س^{٣} + ص^{٣} = س^{٣} − (− ص)^{٣}

= (س − (− ص)) (س^{٢} + س (− ص) + (− ص)^{٢})

= (س + ص) (س^{٢} − س ص + ص^{٢})

∴ س^{٣} + ص^{٣} = (س + ص) (س^{٢} − س ص + ص^{٢})

يُسمّى المقدار س^{٣} + ص^{٣} مجموع مكعّبَين

معلومة مفيدة :

الإسفنج الطبيعي يتمّ استخراجه من حيوان الإسفنج البحري ، ولكنّ الإسفنج المستخدَم في منازلنا هو عبارة عن مادّة صناعية يتمّ تصنيعها من سيلّيلوز ألياف الخشب ، أو البوليمرات البلاستيكية الرغوية .

أي أنّ مجموع مكعّبَي حدَّين يُحلَّل إلى حاصل ضرب عاملَين كما يلي :

(الحدّ الأوّل + الحدّ الثاني) (مربّع الحدّ الأوّل − الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني + مربّع الحدّ الثاني)

مثال (١) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) س^{٣} − ٢٧

الحلّ :

س^{٣} − ٢٧ = (س − ٣) (س^{٢} + ٣س + ٩)

(ب) ٦٤ أ^{٣} + ب^{٣}

الحلّ :

٦٤ أ^{٣} + ب^{٣} = (٤ أ + ب) (١٦ أ^{٢} − ٤ أ ب + ب^{٢})

(ج) ١ − م^{٣} ن^{٦}

الحلّ :

١ − م^{٣} ن^{٦} = (١ − م ن^{٢}) (١ + م ن^{٢} + م^{٢} ن^{٤})

انتبِه

١^{٢} = ١	٨^{٢} = ٦٤
١^{٣} = ١	٤^{٣} = ٦٤

لاحِظ أنّ

ن^{٦} = (ن^{٢})^{٣}

ن^{٦} = (ن^{٣})^{٢}

دورك الآن (١)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) س^{٣} − ٦٤ = (س − ٤) (س^{٢} + ٤س + ١٦)

ب) ١ − ٨ ص^{٣} = (١ − ٢ ص) (١ + ٢ص + ٤ص^{٢})

ج) ٨ ل^{٣} + ٢٧ م^{٣} = (٢ل + ٣م) (٤ل^{٢} − ٦ل م + ٩م^{٢})

مثال (٢) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) ٥٤ ص − ٢ص^{٤}

الحلّ :

٥٤ ص − ٢ص^{٤} = ٢ ص (٢٧ − ص^{٣})

= ٢ ص (٣ − ص) (٩ + ٣ص + ص^{٢})

ب) ٠,٠٠٨ − س^{٣}

الحلّ :

٠,٠٠٨ − س^{٣} = (٠,٢ − س) (٠,٠٤ + ٠,٢ س + س^{٢})

ج) $\frac{١}{٨}$ ف^{٣} + ١

الحلّ :

$\frac{١}{٨}$ ف^{٣} + ١ = ($\frac{١}{٢}$ ف + ١) ($\frac{١}{٤}$ ف^{٢} − $\frac{١}{٢}$ ف + ١)

انتبه

في التحليل، إبدأ باستخراج العامل المشترَك الأكبر إن وُجد.

دورك الآن (٢)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) ٣ ع^{٣} − ٨١ = ٣ (ع^{٣} − ٢٧)

= ٣ (ع − ٣) (ع^{٢} + ٣ ع + ٩)

ب) ٢ س^{٤} + ١٦ س = ٢س (س^{٣} + ٨)

= ٢س (س + ٢) (س^{٢} − ٢س + ٤)

ج) ٥ − ٤٠ م^{٣} = ٥ (١ − ٨ م^{٣})

= ٥ (١ − ٢ م) (١ + ٢م + ٤م^{٢})

دورك الآن (٣)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $\frac{٢٧}{٦٤}$ + ن^{٦} = ($\frac{٣}{٤}$ + ن^{٢}) ($\frac{٩}{١٦}$ - $\frac{٣}{٤}$ن^{٢} + ن^{٤})

(ب) $\frac{١}{١٢٥}$ م^{٣} - $\frac{٨}{٢٧}$ ب^{٣} = ($\frac{١}{٥}$ م - $\frac{٢}{٣}$ ب) ($\frac{١}{٢٥}$ م^{٢} + $\frac{٢}{١٥}$ م ب + $\frac{٤}{٩}$ ب^{٢})

(ج) س^{٣} - ٠,١٢٥ = (س - ٠,٥) (س^{٢} + ٠,٥ س + ٠,٢٥)

عبِّر عن فهمك

هل يمكن تحليل (م^{٦} - ن^{٦}) بطريقتَين مختلفتَين ؟ وضِّح ذلك .

نعم إما (م^{٢})^{٣} - (ن^{٣})^{٢} نحلل فرق بين مكعبين أو (م^{٣})^{٢} - (ن^{٣})^{٢} نحلل فرق بين مربعين

دورك الآن (٤)

صندوق على شكل شبه مكعّب حجمه (٢^{٣} + ٢٧) متر مكعّب وارتفاعه (٢ + ٣) متر ، وظِّف مفهوم التحليل ، لإيجاد مساحة قاعدته .

تذكَّر

حجم شبه المكعّب =
مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم شبه المكعب = مساحة القاعدة × الارتفاع

(٢^{٣} + ٢٧) = م × (٢ + ٣)

∴ م = (٩ + ٢٣ - ٢^{٢}) ... (٢ + ٣) × م = (٩ + ٢٣ - ٢^{٢})(٢ + ٣)

تمارين ذاتية :

١ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) ٢^{٣} + ١ = (٢ + ١)(٢^{٢} - ٢ + ١)

(ب) ب^{٣} - ٨ = (ب - ٢)(ب^{٢} + ٢ب + ٤)

(ج) ٨ ل^{٣} + ١٢٥ = (٢ل + ٥)(٤ل^{٢} - ١٠ل + ٢٥)

(د) ١ - ٢٧ هـ^{٣} = (١ - ٣هـ)(١ + ٣هـ + ٩هـ^{٢})

(هـ) ل^{٣} م^{٦} + ن^{٣} = (ل م^{٢} + ن)(ل^{٢} م^{٤} - ل م^{٢} ن + ن^{٢})

(و) ١٢٥ س^{٣} - ٦٤ ص^{٣} ع^{٣} = (٥س - ٤ص ع)(٢٥س^{٢} + ٢٠ س ص ع + ١٦ ص^{٢} ع^{٢})

٢ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) ٠,٠٢٧ - ص^{٣} = $(٠,٣ - ص)(٠,٠٩ + ٠,٣ص + ص^{٢})$

ب) $\frac{٨}{٢٧}$ أ^{٣} + $\frac{١}{٦٤}$ ب^{٣} = $(\frac{٢}{٣}أ + \frac{١}{٤}ب)(\frac{٤}{٩}أ^{٢} - \frac{٢}{١٢}أب + \frac{١}{١٦}ب^{٢})$

ج) ٥٤ ب^{٤} - ٢ ب = $٢ب(٢٧ب^{٣} - ١)$
$٢ب(٣ب - ١)(٩ب^{٢} + ٣ب + ١)$

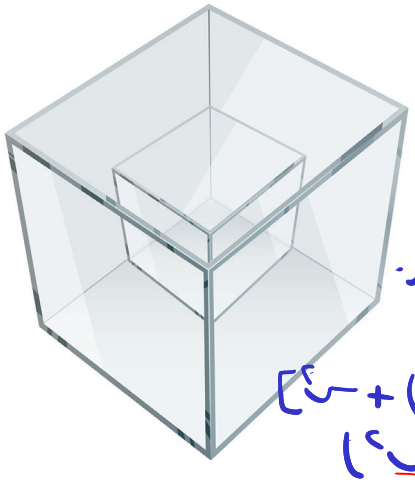
د) ٨١ ك^{٣} + ٣ هـ^{٣} = $٣(٢٧ك^{٣} + هـ^{٣})$
$= ٣(٣ك + هـ)(٩ك^{٢} - ٣كهـ + هـ^{٢})$

هـ) ٣ س^{٥} - ٢٤ س^{٢} = $٣س^{٢}(س^{٣} - ٨)$
$= ٣س^{٢}(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)$

و) ١٦ س^{٤} + ٥٤ س ص^{٣} = $٢س(٨س^{٣} + ٢٧ص^{٣})$
$= ٢س(٢س + ٣ص)(٤س^{٢} - ٦سص + ٩ص^{٢})$

مهارات تفكير عليا :

٣ يريد فهد تخزين هديّة داخل صندوق مكعّب الشكل طول ضلعه (س + ١) سم ، لكنّه يحتاج إلى وضع صندوق آخر مكعّب الشكل أصغر منه طول ضلعه (س) سم ، وملء الفراغ المتبقّي بالزينة . كم حجم الفراغ المتبقّي ؟



حجم الفراغ = حجم المكعب الاكبر - حجم المكعب الاصغر
$= (س + ١)^{٣} - س^{٣}$
$= [(س + ١) - س][(س + ١)^{٢} + س(س + ١) + س^{٢}]$
$= (١)(س^{٢} + ٢س + ١ + س^{٢} + س + س^{٢})$
$= ٣س^{٢} + ٣س + ١$

٤ اِختر الإجابة الصحيحة :

صندوق على شكل شبه مكعّب مساحة قاعدته (س^{٢} - ٢س + ٤) متر مربّع وارتفاعه (س + ٢) متر ، فإنّ حجمه بالمتر المكعّب يساوي : $س^{٣} + ٨$

أ) (س^{٣} + ٨)

ب) (س^{٣} + ١٦)

ج) (س^{٣} - ٨)

د) (س^{٣} - ١٦)

٢ - ٢

تحليل الحدودية الثلاثية : س^{٢} + ب س + جـ

Factorising Trinomial : $x^2 + bx + c$

سوف تتعلّم : تحليل حدودية ثلاثية على الصورة : س^{٢} + ب س + جـ .

العبارات والمفردات :

حدودية ثلاثية	Trinomial

إستكشِف

حلِّل الحدودية الآتية تحليلًا تامًّا باستخدام بطاقات الجبر :

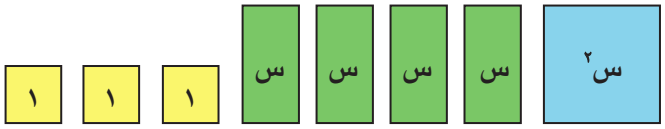
س^{٢} + ٤ س + ٣

اللوازم :

بطاقات الجبر	
س × س	س^{٢}
١ × س	س
١ × ١	١

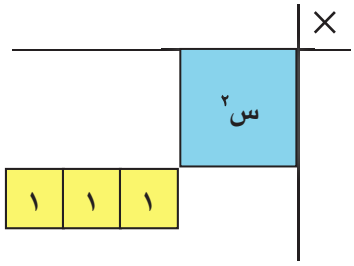
الخطوة الأولى :

مثِّل الحدودية س^{٢} + ٤ س + ٣ ببطاقات الجبر كما يلي :



الخطوة الثانية :

ضَع البطاقة س^{٢} في زاوية رقعة الضرب ، ورتِّب بطاقات ١ . بما أنّ ٣ عدد أوّلي ، فإنّه يمكن ترتيب البطاقات الثلاث بمصفوفة ١ × ٣ كما في الشكل .



الخطوة الثالثة :

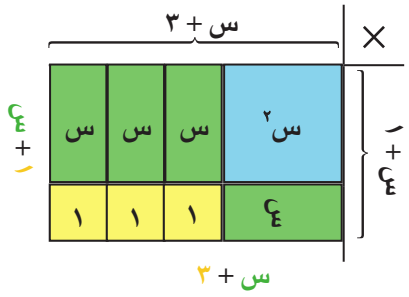
أكمِل شكل المستطيل على رقعة الضرب ببطاقات س

فيكون بذلك طول المستطيل (س + ٣)

وعرض المستطيل (س + ١)

∴ مساحة المستطيل = (س + ٣) (س + ١)

∴ س^{٢} + ٤ س + ٣ = (س + ٣) (س + ١)



تحقَّق جبريًّا

$(س + ٣)(س + ١) = س \times س + س \times ١ + ٣ \times س + ٣ \times ١$

$= س^{٢} + ١ س + ٣ س + ٣ \times ١$

$= س^{٢} + (١ + ٣) س + ٣ \times ١$

$= س^{٢} + ٤ س + ٣$

انتبِه

اِجمع الحدود المتشابهة.

عندما نكتب : $س^{٢} + ٤ س + ٣ = (س + ٣)(س + ١)$

نقول : إنّنا حلّلنا الحدودية $س^{٢} + ٤ س + ٣$ إلى حاصل ضرب عاملَين هما $(س + ٣)(س + ١)$

لاحِظ: إنّه لتحليل الحدودية $س^{٢} + ٤ س + ٣$ نحلّل العدد ٣ إلى عاملَين يحقّقان الشرطَين:

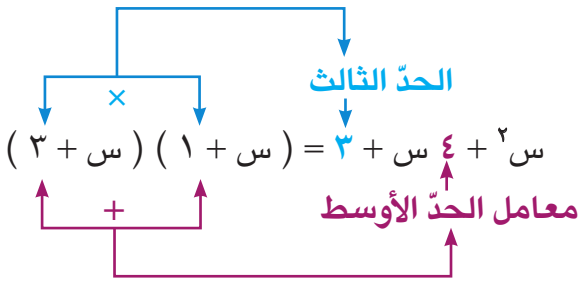
حاصل ضربهما ٣ الحدّ الثالث

ناتج جمعهما ٤ معامل الحدّ الأوسط

$١ \times ٣ = ٣$

$-١ \times -٣ = ٣$

كما في الشكل الآتي :



لتحليل حدودية ثلاثية على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$ إلى عواملها ،
اِبحث عن عددَين م ، ن حيث $جـ = م ن$ ، $ب = م + ن$
فيكون $س^{٢} + ب س + جـ = (س + م)(س + ن)$

مثال (١) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} + ٦ س + ٥$

نبحث عن عددَين
حاصل ضربهما ٥ وناتج
جمعهما ٦

الحلّ :

$س^{٢} + ٦ س + ٥ = (س + ٥)(س + ١)$

(ب) $٢ أ^{٢} - ٧ أ + ١٢$

نبحث عن عددَين حاصل
ضربهما ١٢ وناتج
جمعهما -٧

الحلّ :

$٢ أ^{٢} - ٧ أ + ١٢ = (٤ - أ)(٣ - أ)$

دورك الآن (١)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $ص^{٢} + ٨ ص + ٧$

$= (ص + ١) (ص + ٧)$

(ب) $س^{٢} - ٩ س + ١٨$

$= (س - ٣) (س - ٦)$

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

(أ) $م^{٢} + م - ٢$

الحلّ :

$م^{٢} + م - ٢ = (م + ٢) (م - ١)$

نبحث عن عددَين حاصل ضربهما (-٢) وناتج جمعهما (+١)

(ب) $س^{٢} - ٥ س - ٣٦$

الحلّ :

$س^{٢} - ٥ س - ٣٦ = (س - ٩) (س + ٤)$

نبحث عن عددَين حاصل ضربهما (-٣٦) وناتج جمعهما (-٥)

دورك الآن (٢)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} + ٢ س - ٣$

$= (س - ١) (س + ٣)$

(ب) $س^{٢} - ٥ س ص - ١٤ ص^{٢}$

$= (س - ٧ ص) (س + ٢ ص)$

دورك الآن (٣)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $٥ ص^{٢} + ١٥ ص - ٢٠$

$= ٥ (ص^{٢} + ٣ ص - ٤)$

$= ٥ (ص - ١) (ص + ٤)$

(ب) $- س^{٢} + ٧ س - ١٢$

$= - (س^{٢} - ٧ س + ١٢)$

$= - (س - ٣) (س - ٤)$

اِنتبِه

عند أخذ (-١) كعامل مشترَك يصبح ما داخل القوسَين هو المعكوس الجمعي للحدودية .

عبِّر عن فهمك

أعطِ ثلاث قِيَم مختلفة لـ جـ في الحدودية :

س^{٢} + ٣ س − جـ بحيث يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب عاملَين .

٤ ← (س + ٤)(س − ١) ، ١٠ ← (س − ٢)(س + ٥) ، ٢٨ ← (س − ٤)(س + ٧)

دورك الآن (٤)

حلِّل الحدوديات الثلاثية الآتية تحليلًا تامًّا :

(أ) ص^{٢} − ٩ ص + ٢٠

(ص − ٤)(ص − ٥)

(ب) س^{٣} + ١٢ س^{٢} + ٣٢ س

س(س^{٢} + ١٢ س + ٣٢) = س(س + ٨)(س + ٤)

(ج) ص^{٢} − ص − ٤٢

(ص − ٧)(ص + ٦)

(د) س^{٢} + ٧ س ف − ١٨ ف^{٢}

(س + ٩ ف)(س − ٢ ف)

عبِّر عن فهمك

يقول حسين : إنّ تحليل الحدودية س^{٢} + ٤ س − ٢١ هو (س − ٣) (س + ٧)

بينما يقول حمود : إنّ تحليلها هو (س + ٣) (س − ٧) .

أيّهما على صواب ؟ فسِّر إجابتك .

حسين على صواب .. لأن (س − ٣)(س + ٧) = س^{٢} + ٤ س − ٢١

= س^{٢} + ٤ س − ٢١ ✓

تمارين ذاتية :

١ أكمِل بوضع (+) أو (-) في كلّ ممّا يلي :

(أ) $س^{٢}$ + ٥ س + ٦ = (س + ٢) (س + ٣)

(ب) $س^{٢}$ - س - ١٢ = (س + ٣) (س - ٤)

٢ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢}$ + ٤ س + ٣

(س + ٣)(س + ١)

(ب) $س^{٢}$ - ٦ س + ٨

(س - ٤)(س - ٢)

(ج) $ص^{٢}$ + ٧ ص - ٣٠

(ص - ٣)(ص + ١٠)

(د) $س^{٢}$ - ٥ س - ٦

(س - ٦)(س + ١)

(هـ) $س^{٢}$ - س - ٥٦

(س - ٨)(س + ٧)

(و) $س^{٢}$ + ٧ س - ٤٤

(س - ٤)(س + ١١)

(ز) $ب^{٢}$ - ١٠ ب ك + ١٦ $ك^{٢}$

(ب - ٨ك)(ب - ٢ك)

(ح) $م^{٢}$ + ١٥ م ن + ٥٤ $ن^{٢}$

(م + ٩ن)(م + ٦ن)

(ط) $ص^{٤}$ - ١٧ $ص^{٣}$ + ٣٠ $ص^{٢}$

$ص^{٢}$ ($ص^{٢}$ - ١٧ ص + ٣٠)

$ص^{٢}$ (ص - ١٥)(ص - ٢)

(ي) -٢ $س^{٢}$ + ٢ س + ٤

-٢ ($س^{٢}$ - س - ٢)

-٢ (س - ٢)(س + ١)

٣ يُنتج مصنع للألومينيوم نوافذ مختلفة الأشكال ، إحدى هذه النوافذ مستطيلة الشكل مساحة سطحها الأمامي يساوي ($س^{٢}$ + ٩ س + ٢٠) وحدة مربّعة.
أوجِد بعدَي السطح الأمامي للنافذة بدلالة س .



∴ ($س^{٢}$ + ٩ س + ٢٠) = (س + ٤)(س + ٥)

∴ البعد الأول = (س + ٤) ، البعد الثاني = (س + ٥)

مهارات تفكير عليا :

٤ شبه مكعّب حجمه ٢س^{٣} + ١٠س^{٢} + ١٢ س وحدة مكعّبة ، وارتفاعه يساوي العامل المشترَك الأكبر لحجمه . ما أبعاد شبه المكعّب (بدلالة س) ؟

∴ الارتفاع = ٢ س

٢س (س^{٢} + ٥س + ٦)

∴ ٢س (س + ٢)(س + ٣) ∴ الابعاد = ٢س ، (س + ٢) ، (س + ٣)

٥ اِختر الإجابة الصحيحة .

مستطيل مساحته س^{٢} + ٦ س + ٥ وحدة مربعة ، إذا كان طوله (س + ٥) وحدة طول فإنّ محيطه بوحدات الطول يساوي:

(س + ٥)(س + ١)

أ) ٢ س + ٦

ب) ٤ س + ١٢

ج) س^{٢} + ٦

د) ٤ س + ١٠

∴ الابعاد هى (س + ٥) ، (س + ١)

∴ المحيط = ٢ (الطول + العرض)

∴ المحيط = ٢ (س + ٥ + س + ١)

= ٢ (٢س + ٦)

= ٤ س + ١٢

الدرس الثاني

٢ - ٣

تحليل الحدودية الثلاثية : أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ١

Factorising Trinomials : a x^2 + b x + c, a ≠ 1

سوف تتعلّم : تحليل حدودية ثلاثية على الصورة : أ س^{٢} + ب س + جـ ، حيث أ ≠ ١

اِستكشِف

حلِّل الحدودية الآتية تحليلًا تامًّا باستخدام بطاقات الجبر :

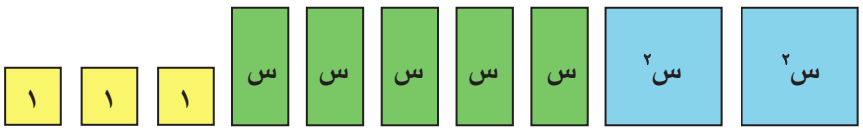
٢ س^{٢} + ٥ س + ٣

اللوازم

بطاقات الجبر	
س^{٢}	س × س
س	١ × س
١	١ × ١

الخطوة الأولى :

مثِّل الحدودية ببطاقات الجبر كما يلي :



الخطوة الثانية :

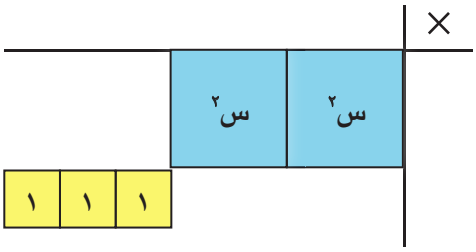
في زاوية رقعة الضرب، ضَع بطاقات س^{٢} ،

كذلك ضَع بطاقات ١ على شكل مصفوفة.

بما أنّ ٣ عدد أوّلي ، فإنّه يمكن ترتيب

البطاقات الثلاث بمصفوفة ١ × ٣

كما في الشكل .



الخطوة الثالثة :

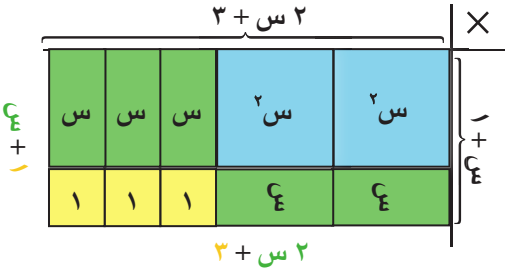
أكمِل شكل المستطيل على رقعة الضرب ببطاقات س ،

فنلاحظ أنّ : طول المستطيل = ٢ س + ٣

وعرض المستطيل = س + ١

∴ مساحة المستطيل = (٢ س + ٣) (س + ١)

∴ ٢ س^{٢} + ٥ س + ٣ = (٢ س + ٣) (س + ١)



تحقَّق جبريًّا

أوجِد ناتج ضرب (٢س + ٣) (س + ١)

الحلّ :

$$(٢س + ٣)(س + ١) = ٢س^{٢} + ٢س + ٣س + ٣$$
$$= ٢س^{٢} + ٥س + ٣$$

أي أنّ $٢س^{٢} + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$

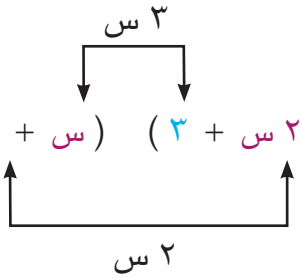
نلاحظ أنّنا حلّلنا $٢س^{٢} + ٥س + ٣$ إلى عاملَين (٢س + ٣) ، (س + ١) حيث إنّ

الحدّ الأوّل $٢س^{٢}$ في المقدار الثلاثي هو ناتج ضرب ٢س × س

الحدّ الثالث (المطلَق) ٣ في المقدار الثلاثي هو ناتج ضرب ٣ × ١

الحدّ الأوسط ٥ س هو ناتج جمع (٢س × ١) + (٣ × س) أي

[حاصل ضرب طرفَي عاملَي تحليل المقدار وهما (٢س ، ١) + حاصل ضرب وسطَي عاملَي التحليل للمقدار الثلاثي وهما (٣ ، س)]



الحدّ الأوسط = ٥ س = ٢ س + ٣ س

$\therefore ٢س^{٢} + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$

مثال توضيحي

حلِّل تحليلًا تامًّا :

$٥س^{٢} - ١٢س + ٧$

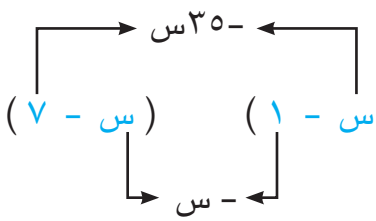
الحلّ :

الحدّ الأوّل : $٥س^{٢}$ عوامل الحدّ الأوّل هي ٥ س ، س

الحدّ الأوسط : $-١٢س$ (سالب)

الحدّ الثالث : ٧ (موجَب) عوامل الحدّ الثالث هي $-٧ ، -١$

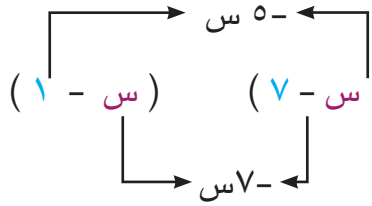
المحاولة الأولى $٥ س^{٢} - ١٢ س + ٧ = (٥س - ١) (س - ٧)$



نلاحظ أنّ الحدّ الأوسط الناتج (- ٣٦ س) وهو لا يساوي الحدّ الأوسط للمقدار الثلاثي المطلوب (- ١٢س) .

∴ المحاولة ليست صحيحة ؛ لذلك نبدّل موضع العاملَين -٧ ، -١

المحاولة الثّانية $٥ س^{٢} - ١٢ س + ٧ = (٥ س - ٧) (س - ١)$



نلاحظ أنّ الحدّ الأوسط الناتج (-١٢س) وهو مساوٍ للحدّ الأوسط للمقدار الثلاثي المطلوب .

∴ المحاولة صحيحة

∴ $٥ س^{٢} - ١٢ س + ٧ = (٥ س - ٧) (س - ١)$

مثال (١) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

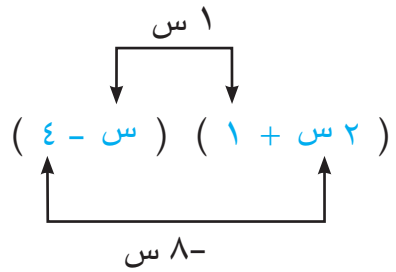
$٢ س^{٢} - ٧ س - ٤$

الحلّ :

الحدّ الأوّل : $٢ س^{٢}$ عوامل الحدّ الأوّل هي ٢ س ، س

الحدّ الأوسط : -٧ س (سالب)

الحدّ الثالث : -٤ (سالب) عوامل الحدّ الثالث هي -٤ ، ١
أو -١ ، ٤ أو -٢ ، ٢



$(٢ س + ١) (س - ٤)$

الحدّ الأوسط = -٧ س = -٨ س + س

∴ $٢ س^{٢} - ٧ س - ٤ = (٢ س + ١) (س - ٤)$

دورك الآن (١)

حلِّل تحليلًا تامًّا كلًّا ممّا يلي :

أ) ٥ س^{٢} + ٨ س + ٣ = (٥س + ٣) (س + ١)

ب) ٢ هـ^{٢} − ٣ هـ − ٥ = (هـ + ١) (٢هـ − ٥)

ج) ٣ س^{٢} + ٧ س − ٦ = (٣س − ٢) (س + ٣)

انتبِه

بعد إجراء التحليل ، تحقَّق من صحّته .

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

٦ س^{٢} − ١٩ س ص + ١٠ ص^{٢}

الحلّ :

الحدّ الأوّل : ٦ س^{٢} عوامل الحدّ الأوّل هي ٦ س ، س
أو ٢س ، ٣ س

الحدّ الأوسط : −١٩ س ص (سالب)

الحدّ الثالث : + ١٠ ص^{٢} عوامل الحدّ الثالث هي −٢ ص ، −٥ ص
أو −ص ، −١٠ ص

−١٥ س ص

(٢ س − ٥ ص) (٣ س − ٢ ص)

−٤ س ص

الحدّ الأوسط = −١٩ س ص = (−٤ س ص) + −١٥ س ص

٦ س^{٢} − ١٩ س ص + ١٠ ص^{٢} = (٢ س − ٥ ص) (٣س − ٢ص)

دورك الآن (٢)

حلِّل تحليلًا تامًّا كلًّا ممّا يلي :

أ) ٤ س^{٢} − ٤ س − ٣ = (٢س − ٣)(٢س + ١)

ب) ٧ ك^{٢} − ١١ ل ك − ٦ ل^{٢} = (٧ك + ٣ل)(ك − ٢ل)

ج) ٤٢ ص^{٢} + ٣٢ ص + ٦ = ٢ (٢١ص^{٢} + ١٦ص + ٣)

= ٢ (٧ص + ٣) (٣ص + ١)

د) ١٣ ع^{٣} + ٥ ع^{٢} − ٨ ع = ع(١٣ع^{٢} + ٥ع − ٨)

= ع(١٣ع − ٨)(ع + ١)

عبِّر عن فهمك

أوجِد قيمتَين للمعامل ك تسمحان بتحليل الحدودية :

٤ س^{٢} + ك س + ١٠

١٣ ← (٤ س + ٥)(س + ٢) ، ٢٢ ، (٢ س + ١)(٢ س + ١٠)

تمارين ذاتية :

حلِّل تحليلًا تامًّا كلًّا ممّا يلي :

١ ٣ س^{٢} + ١٦ س + ٥

عوامل الحد الاول = ٣ س ، س

عوامل الحد الثانى = ١ ، ٥

∴ (٣ س + ١)(س + ٥) ✓

∴ ١٥ س + س = ١٦ س = الحد الاوسط

٢ ١١ ل^{٢} − ١٢ ل + ١

عوامل الحد الاول = ١١ ل ، ل

// // الثانى = −١ ، −١

∴ (١١ ل − ١)(ل − ١) ✓

∴ −١١ ل − ل = −١٢ ل = الحد الاوسط

٣ ٢ ك^{٢} − ١١ ك − ٢١

عوامل الحد الاول = ٢ ك ، ك

// // الثانى = −٢١ ، ١ أو ٣ ، −٧

∴ (٢ ك + ٣)(ك − ٧) ✓

∴ −١٤ ك + ٣ ك = −١١ ك = الحد الاوسط

٤ ٨ ص^{٢} + ١٠ ص ل − ٣ ل^{٢}

عوامل الحد الاول = ٨ ص ، ص أو ٤ ل ، ٢ ل

// // الثانى = ل ، −٣ ل أو −ل ، ٣ ل

∴ (٤ ص − ل)(٢ ص + ٣ ل) ✓

∴ ١٢ ص ل − ٢ ص ل = ١٠ ص ل = الحد الاوسط

٥ ٢٥ س^{٢} + ١٠ س − ١٥

٥(٥ س^{٢} + ٢ س − ٣)

عوامل الحد الاول = ٥ س ، س

// // الثانى = ١ ، −٣ أو −١ ، ٣

∴ (٥ س − ٣)(س + ١) ✓

∴ ٥ س − ٣ س = ٢ س = الحد الاوسط

٦ ٦ س^{٢} − ٥ س ص − ص^{٢}

عوامل الحد الاول = ٦ س ، س أو ٢ س ، ٣ س

// // الثانى = −ص ، ص

∴ (٦ س + ص)(س − ص) ✓

∴ −٦ س ص + ص س = −٥ س ص = الحد الاوسط

٧ ٢١ ف^{٣} − ٧٠ ف^{٢} + ٤٩ ف

٧ ف (٣ ف^{٢} − ١٠ ف + ٧)

عوامل الحد الاول = ٣ ف ، ف

// // الثانى = −٧ ، −١

∴ (٣ ف − ٧)(ف − ١) ✓

∴ −٣ ف − ٧ ف = −١٠ ف = الحد الاوسط

٨ ٤ هـ^{٣} + ١٢ هـ^{٢} + ٩ هـ

هـ (٤ هـ^{٢} + ١٢ هـ + ٩)

عوامل الحد الاول = ٤ هـ ، هـ أو ٢ هـ ، ٢ هـ

// // الثانى = ٩ ، ١ أو ٣ ، ٣

∴ (٢ هـ + ٣)(٢ هـ + ٣) ✓

∴ ٦ هـ + ٦ هـ = ١٢ هـ = الحد الاوسط

الدرس الثالث

٢ - ٤ تحليل المربّع الكامل
Factorising Perfect Square

سوف تتعلّم : تحليل المربّع الكامل ، والتحليل بإكمال المربّع .

العبارات والمفردات :

مربّع كامل	Perfect Square
إكمال المربّع	Completing the Square

اِستكشِف

حلِّل الحدودية الآتية تحليلًا تامًّا باستخدام بطاقات الجبر :

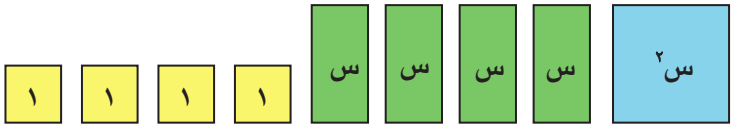
$س^{٢} + ٤ س + ٤$

اللوازم :

بطاقات الجبر	
س × س	$س^{٢}$
١ × س	س
١ × ١	١

الخطوة الأولى :

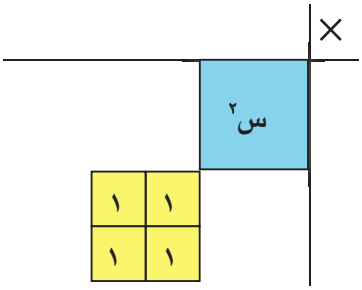
مثِّل الحدودية $س^{٢} + ٤ س + ٤$ ببطاقات الجبر كما يلي :



الخطوة الثانية :

في زاوية رقعة الضرب ، ضَع بطاقة $س^{٢}$ ،

كذلك ضَع بطاقات ١ على شكل مصفوفة كما في الشكل :



الخطوة الثالثة :

أكمِل شكل المربّع على رقعة الضرب ببطاقات س ،

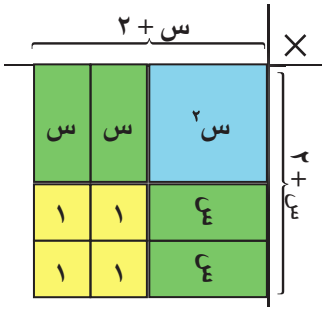
فنلاحظ أنّ طول ضلع المربّع = س + ٢

∴ مساحة المربّع = (س + ٢) (س + ٢)

$= (س + ٢)^{٢}$

∴ $س^{٢} + ٤ س + ٤ = (س + ٢) (س + ٢)$

$= (س + ٢)^{٢}$ (تحقَّق جبريًّا)



أكمِل ما يلي :

$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

$(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$

$(أ \pm ب)^{٢} = أ^{٢} \pm ٢أب + ب^{٢}$ يُسمّى ذلك **مربّعًا كاملًا** .

- $أ^{٢}$: مربّع الحدّ الأوّل
- $٢أب$: ٢ × الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني
- $ب^{٢}$: مربّع الحدّ الثاني

تحليل المربّع الكامل

$أ^{٢} \pm ٢أب + ب^{٢} = (أ \pm ب)^{٢}$

- الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الأوّل
- إشارة الحدّ الأوسط
- الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الثالث

∴ لتحليل الحدودية $س^{٢} + ٤س + ٤$ بالطريقة الجبرية :

- الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الأوّل = س
- الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الثالث = ٢

∴ $س^{٢} + ٤س + ٤ = (س + ٢)^{٢}$

وهذا المقدار $(س^{٢} + ٤س + ٤)$ يُسمّى **مربّعًا كاملًا** .

وستقتصر دراستنا في هذا الكتاب على الطريقة الجبرية فقط .

مثال (١) :

حدِّد ما إذا كانت الحدودية الثلاثية الآتية مربّعًا كاملًا أم لا ؟ ثمّ حلِّل الحدودية إذا كانت مربّعًا كاملًا .

$س^{٢} + ١٠س + ٢٥$

الحلّ :

- هل $س^{٢}$ مربّع كامل ؟ **الإجابة :** نعم ، وجذره التربيعي الموجَب = س
- هل ٢٥ مربّع كامل ؟ **الإجابة :** نعم ، وجذره التربيعي الموجَب = ٥
- هل الحدّ الأوسط **ضعف** حاصل ضرب س × ٥

الإجابة : نعم ، حيث ٢ × س × ٥ = ١٠ س (الحدّ الأوسط)

∴ الحدودية الثلاثية $س^{٢} + ١٠س + ٢٥$ مربّع كامل

∴ $س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = (س + ٥)^{٢}$

دورك الآن (١)

أيّ من الحدوديات الثلاثية الآتية تمثّل مربعًا كاملًا :

(أ) $س^{٢} - ١٤ س + ٤٩$

نعم، حيث الاول مربع: $س$
الثاني مربع: ٧
الاوسط: $٢ \times س \times ٧ = ١٤ س$

(ب) $ص^{٢} + ٣ ص + ٩$

لا، حيث الاول مربع: $ص$
الثاني " : ٣
$\therefore ٢ \times ص \times ٣ = ٦ ص \neq$ الاوسط.

(ج) $٩ س^{٢} - ٦ س - ١$

لا، حيث الحد الثاني سالب

(د) $٤ س^{٢} + ٣٦ س + ٩$

لا، حيث الاول مربع: $٢س$
الثاني " : ٣
$\therefore ٢ \times ٢س \times ٣ = ١٢ س \neq$ الاوسط.

دورك الآن (٢)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $ص^{٢} + ٨ ص + ١٦$

$= (ص + ٤)^{٢}$

(ب) $١٦ ب^{٢} - ٢٤ ب + ٩$

$= (٤ب - ٣)^{٢}$

(ج) $ص^{٢} + ١٦ ص + ٦٤$

$(ص + ٨)^{٢}$

(د) $١ - ١٠ س + ٢٥ س^{٢}$

$(١ - ٥ س)^{٢}$

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا : $٢٠ س^{٢} - ٢٠ س + ٥$

الحلّ :

$٢٠ س^{٢} - ٢٠ س + ٥$

$= ٥ (٤ س^{٢} - ٤ س + ١)$ (بأخذ العامل المشترَك)

$= ٥ (٢ س - ١)^{٢}$

تذكَّر

إخراج العامل المشترَك الأكبر إن وُجد .

دورك الآن (٣)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $٩ س^{٣} - ٦ س^{٢} ص + س ص^{٢}$

$س (٩ س^{٢} - ٦ س ص + ص^{٢})$

$س (٣س - ص)^{٢}$

(ب) $٤ ب^{٣} جـ + ٨ ب^{٢} جـ^{٢} + ٤ ب جـ^{٣}$

$٤ ب جـ (ب^{٢} + ٢ ب جـ + جـ^{٢})$

$٤ ب جـ (ب + جـ)^{٢}$

مثال (٣) :

أوجِد قيمة جـ التي تجعل الحدودية الثلاثية الآتية مربعًا كاملًا :

٩ س^{٢} + جـ س ص + ٤٩ ص^{٢}

الحلّ :

الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الأوّل = ٣ س ،

الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الثالث = ٧ ص ،

الحدّ الأوسط = ± ٢ × ٣ س × ٧ ص

جـ س ص = ± ٤٢ س ص

∴ جـ = ٤٢ أو جـ = -٤٢

دورك الآن (٤)

وظِّف مفهوم المربّع الكامل لإيجاد قيمة كلّ ممّا يلي :

(١٠١)^{٢} = (١٠٠ + ...١.....)^{٢}

= (١٠٠)^{٢} + ٢ × ١٠٠ × .....١..... + (.....١.....)^{٢}

= ١٠٠٠٠ + ...٢٠٠..... + ...١..... = ...١٠٢٠١.....

عبِّر عن فهمك

ليكن المقدار س^{٢} + ٦س + جـ مربّعًا كاملًا، هل يمكن إيجاد قيمة جـ ؟ فسِّر إجابتك .

نعم، حيث الوسط = ٦س = ٢ × س × ٣ = ٢ × س × ٧ = ٩

إكمال المربّع

تعلم أنّ الحدودية س^{٢} + ب س + جـ مربّع كامل إذا كان :

س^{٢} + ب س + جـ = (س + $\sqrt{\text{جـ}}$)^{٢}

لكنّ الحدودية س^{٢} + ب س ليست مربّعًا كاملًا

لنفترِض عند إضافة جـ يصبح مربّعًا كاملًا

س^{٢} + ب س + جـ = (س + $\sqrt{\text{جـ}}$)^{٢}

= س^{٢} + ٢ $\sqrt{\text{جـ}}$ س + جـ

∴ ب = ٢ $\sqrt{\text{جـ}}$

$\sqrt{\text{جـ}} = \left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)$ نربّع الطرفَين

∴ جـ = $\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢}$ ماذا تلاحظ ؟

وبصورة عامّة :

لإكمال الحدودية $س^{٢} + ب س$ إلى مربّع كامل ، نُضيف إليها مربّع نصف معامل س أي $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$

$س^{٢} + ب س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} = \left(س + \frac{ب}{٢}\right)^{٢}$ وهو مربّع كامل .

مثال (٤) :

أكمِل $س^{٢} + ٤ س$ إلى مربّع كامل .

الحلّ :

معامل س = ٤

نصف معامل س = $\frac{٤}{٢}$

مربّع نصف معامل س = $\left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} = (٢)^{٢} = ٤$

نُضيف مربّع نصف معامل س

$س^{٢} + ٤ س + ٤ = (س + ٢)^{٢}$

دورك الآن (٥)

أكمِل: $س^{٢} + ١٤ س$ إلى مربّع كامل .

مربّع نصف معامل س = ... $(٧)^{٢} = ٤٩$

$س^{٢} + ١٤ س + ... ٤٩ = (س + ٧)^{٢}$

مثال (٥) :

حلِّل الحدودية الآتية بطريقة إكمال المربّع :

$س^{٢} - ٦ س + ٨$

الحلّ :

$س^{٢} - ٦ س + ٨$ ليست مربّعًا كاملًا

حتّى يصبح $(س^{٢} - ٦ س)$ مربّعًا كاملًا ، نُضيف مربّع نصف معامل س

مربّع نصف معامل س = $\left(\frac{-٦}{٢}\right)^{٢} = (-٣)^{٢} = ٩$

وحتّى لا تتغيّر الحدودية المطلوب تحليلها يلزم طرح ٩

$س^{٢} - ٦ س + ٨ = س^{٢} - ٦ س + ٩ - ٩ + ٨$

$= (س - ٣)^{٢} - ١$ (فرق بين مربّعَين)

$= (س - ٣ - ١)(س - ٣ + ١)$

$= (س - ٤)(س - ٢)$

مثال (٦) :

حلِّل الحدودية الآتية بطريقة إكمال المربّع :

س^{٢} − ٥ س + ٦

الحلّ :

س^{٢} − ٥ س + ٦ ليست مربّعًا كاملًا

حتّى يصبح (س^{٢} − ٥ س) مربّعًا كاملًا، نُضيف مربّع نصف معامل س

مربّع نصف معامل س = $\left(\frac{-٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{٤}$

وحتّى لا تتغيّر الحدودية المطلوب تحليلها يلزم طرح $\frac{٢٥}{٤}$

س^{٢} − ٥س + ٦ = س^{٢} − ٥س + $\frac{٢٥}{٤}$ − $\frac{٢٥}{٤}$ + ٦

$= \left(س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٤}$ (فرق بين مربّعَين)

$= \left(س - \frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢}\right)\left(س - \frac{٥}{٢} + \frac{١}{٢}\right)$

= (س − ٣) (س − ٢)

اِنتبِه

$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢} = \left(-\frac{أ}{ب}\right)^{٢}$

دورك الآن (٦)

حلِّل الحدودية الآتية بطريقة إكمال المربّع :

٢س^{٢} + ٨ س − ١٠

= ٢ (س^{٢} + ٤ س − ٥) بأخذ العامل المشترَك

مربّع نصف معامل س = $(٤ \div ٢)^{٢} = ٤$

٢س^{٢} + ٨ س − ١٠ = ٢ (س^{٢} + ٤ س + ٤ − ٤ − ٥)

= ٢[$(س + ٢)^{٢}$ − ٩]

= ٢ ((س + ٢) + ٣) ((س + ٢) − ٣)

= ٢ (س + ٥) (س − ١)

تمارين ذاتية :

١ أيّ من الحدوديات الثلاثية الآتية تمثّل مربعًا كاملًا ؟

(أ) $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

$٢ \times س \times ص = ٢ س ص$ = الوسط

نعم تمثل مربعًا كاملًا

(ب) $ع^{٢} - ٤ ع - ٤$

لا ، لأنه الحد الثابت سالب

(ج) $١ + ١٠ س + ٢٥ س^{٢}$

نعم تمثل مربعًا كاملًا

(د) $٩ ب^{٢} + ١٢ ب + ١٦$

$٣ ب \times ٤ \times ٢ = ٢٤ ب \neq$ الوسط

∴ لا تمثل

٢ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $ص^{٢} - ٢ ص + ١$

$(ص - ١)^{٢}$

(ب) $١ + ٦ ب + ٩ ب^{٢}$

$(١ + ٣ ب)^{٢}$

(ج) $س - ٤ س^{٢} + ٤ س^{٣}$

$س(١ - ٤ س + ٤ س^{٢})$

$س(١ - ٢ س)^{٢}$

(د) $س^{٢} + ٢٢ س + ١٢١$

$(س + ١١)^{٢}$

(هـ) $س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س$

$س(س^{٢} - ٦ س + ٩)$

$س(س - ٣)^{٢}$

(و) $١٢ س^{٢} + ٣٦ س ص + ٢٧ ص^{٢}$

$٣(٤ س^{٢} + ١٢ س ص + ٩ ص^{٢})$

$٣(٢ س + ٣ ص)^{٢}$

٣ وظِّف مفهوم المربّع الكامل لإيجاد قيمة كلّ ممّا يلي :

(أ) $(١٠٣)^{٢}$

$= (١٠٠ + ٣)^{٢}$

$= ١٠٠٠٠ + ٢ \times ١٠٠ \times ٣ + ٩$

$= ١٠٠٠٠ + ٦٠٠ + ٩ = ١٠٦٠٩$

(ب) $(٥٩)^{٢}$

$= (٦٠ - ١)^{٢}$

$= ٣٦٠٠ - ١٢٠ + ١$

$= ٣٤٨٠ + ١ = ٣٤٨١$

٤ أوجِد قيمة جـ التي تجعل كلًّا من الحدوديات الثلاثية الآتية مربعًا كاملًا :

(أ) $س^{٢}$ + جـ س + ٨١

∴ جـ = ± ٢ × الجذر التربيعي للحد الاول × الجذر التربيعي للحد الثاني

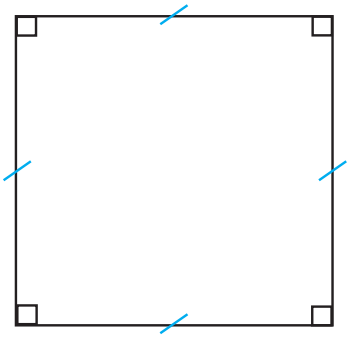
∴ جـ = ± ٢ × $\sqrt{س^{٢}}$ × $\sqrt{٨١}$ = ± ٢ × س × ٩ = ± ١٨ س

(ب) ٤ $س^{٢}$ − جـ س ص + ٩ $ص^{٢}$

جـ = ± ٢ × $\sqrt{٤س^{٢}}$ × $\sqrt{٩ص^{٢}}$ = ± ٢ × ٢س × ٣ص = ± ١٢ س ص

٥ ما طول ضلع المربّع الذي مساحته

($س^{٢}$ + ٢٢ س + ١٢١) وحدة مربّعة .



مساحة المربع = (طول الضلع)^{٢}

∴ $(س^{٢}$ + ٢٢ س + ١٢١) = $(س + ١١)^{٢}$

∴ طول ضلع المربع = (س + ١١)

٦ أكمِل كلًّا ممّا يلي إلى مربّع كامل :

(أ) $س^{٢}$ + ١٨ س

مربع نصف معامل س = $(\frac{١٨}{٢})^{٢}$ = $(٩)^{٢}$ = ٨١

∴ $س^{٢}$ + ١٨ س + ٨١ − ٨١

= [$(س + ٩)^{٢}$ − ٨١]

(ب) $س^{٢}$ − ٧ س

مربع نصف معامل س = $(\frac{٧}{٢})^{٢}$ = $\frac{٤٩}{٤}$

∴ $س^{٢}$ − ٧ س + $\frac{٤٩}{٤}$ − $\frac{٤٩}{٤}$

∴ $(س - \frac{٧}{٢})^{٢}$ − $\frac{٤٩}{٤}$

٧ حلِّل كلًّا ممّا يلي بطريقة إكمال المربّع :

(أ) $س^{٢}$ + ٦ س − ٧

مربع نصف معامل س = $(\frac{٦}{٢})^{٢}$ = $(٣)^{٢}$ = ٩

∴ $س^{٢}$ + ٦ س + ٩ − ٩ − ٧

∴ $(س + ٣)^{٢}$ − ١٦

∴ [(س + ٣) − ٤][(س + ٣) + ٤]

∴ (س − ١)(س + ٧)

(ب) ٢ $س^{٢}$ − ٨ س − ٢٤

٢ ($س^{٢}$ − ٤ س − ١٢)

مربع نصف معامل س = $(\frac{-٤}{٢})^{٢}$ = $(-٢)^{٢}$ = ٤

٢ ($س^{٢}$ − ٤ س + ٤ − ٤ − ١٢)

٢ [$(س - ٢)^{٢}$ − ١٦]

∴ ٢ [(س − ٢) − ٤][(س − ٢) + ٤]

∴ ٢ (س − ٦)(س + ٢)

٢ - ٥ تحليل الحدودية الرباعية
Factorising Quadrinomial Polynomial

سوف تتعلّم : تحليل الحدودية الرباعية .

العبارات والمفردات :

حدودية رباعية	Quadrinomial Polynomial

حُلّ وناقِش

الحدودية الرباعية هي حدودية مكوَّنة من أربعة حدود غير متشابهة .

فمثلًا : $أ^{٢}س + أ^{٢}ص + ب س + ب ص$ حدودية رباعية

- هل يمكنك تحليل الحدودية الرباعية باستخدام طرق التحليل التي درستها من قبل ؟
- هل يوجد عامل مشترَك بين الحدود الأربعة ؟

$أ^{٢}س + أ^{٢}ص + ب س + ب ص$ — هل يوجد عامل مشترَك بين حدَّين من الحدود ؟

$= (أ^{٢}س + أ^{٢}ص) + (ب س + ب ص)$ — أخرِج العامل المشترَك لكلّ حدَّين .

$= أ^{٢}(\square + \square) + ب(\square + \square)$ — هل يوجد عامل مشترَك بين الحدَّين ؟

$= (\square + \square)(\square + \square)$ (تحقَّق جبريًّا)

جرِّب ، الآن ، تحليل الحدودية الرباعية بأخذ عوامل مشترَكة أخرى

$أ^{٢}س + أ^{٢}ص + ب س + ب ص$

تحقَّق ، هل حصلت على التحليل نفسه ؟

تذكَّر

- الجمع عملية إبدالية
- الضرب عملية إبدالية.

مثال (١) :

حلِّل الحدودية الآتية تحليلًا تامًّا :

$هـ جـ + هـ د + ب جـ + ب د$

الحلّ :

$هـ جـ + هـ د + ب جـ + ب د$

$= (هـ جـ + هـ د) + (ب جـ + ب د)$ (جزِّىء)

$= هـ(جـ + د) + ب(جـ + د)$ (بأخذ العامل المشترَك)

$= (جـ + د)(هـ + ب)$ (بأخذ العامل المشترَك)

دورك الآن (١)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} هـ - س^{٢} د + ص^{٢} هـ - ص^{٢} د$

$= (س^{٢} هـ - س^{٢} د) + (ص^{٢} هـ - ص^{٢} د)$

$= س^{٢} (هـ - د) + ص^{٢} (هـ - د)$

$= (هـ - د) (س^{٢} + ص^{٢})$

(ب) $٢ س + جـ س + ٢ جـ + جـ^{٢}$

$(٢ س + جـ) + (جـ ٢ + جـ^{٢})$

$س (٢ + جـ) + جـ (٢ + جـ)$

$\therefore (٢ + جـ) (س + جـ)$

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

$س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٢ س - ٦$

الحلّ :

$س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٢ س - ٦ = (س^{٣} - ٣ س^{٢}) + (٢ س - ٦)$

$= س^{٢} (س - ٣) + ٢ (س - ٣)$

$= (س - ٣) (س^{٢} + ٢)$

دورك الآن (٢)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} - ٣ س - س ص + ٣ ص$

$(س^{٢} - ٣ س) + (- س ص + ٣ ص)$

$س (س - ٣) - ص (س - ٣)$

$(س - ٣) (س - ص)$

(ب) $٢٠ س^{٢} ص + ١٠ ب س^{٢} - ٤ أ^{٢} ص - ٢ أ^{٢} ب$

$= ٢ (١٠ س^{٢} ص + ٥ ب س^{٢} - ٢ أ^{٢} ص - أ^{٢} ب)$

$= ٢ [(١٠ س^{٢} ص + ٥ ب س^{٢}) + (- ٢ أ^{٢} ص - أ^{٢} ب)]$

$= ٢ [٥ س^{٢} (٢ ص + ب) - أ^{٢} (٢ ص + ب)]$

$= ٢ (٢ ص + ب) (٥ س^{٢} - أ^{٢})$

تذكَّر

$(س - ص) = - (- س + ص)$

$= - (ص - س)$

مثال (٣) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

$س^{٣} - ٢ س^{٢} - س + ٢$

الحلّ :

$س^{٣} - ٢ س^{٢} - س + ٢ = (س^{٣} - ٢ س^{٢}) + (- س + ٢)$

$= س^{٢} (س - ٢) - (س - ٢)$

$= (س - ٢) (س^{٢} - ١)$ (حلِّل الفرق بين مربّعَين)

$= (س - ٢) (س - ١) (س + ١)$

انتبه

أكمِل الحلّ حتّى تصل إلى تحليلًا تامًّا .

دورك الآن (٣)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٤ س + ١٢$

$= (س^{٣} - ٣ س^{٢}) + (- ٤ س + ١٢)$

$= س^{٢}(س - ٣) - ٤(س - ٣)$

$= (س - ٣)(س^{٢} - ٤)$

$= (س - ٣)(س - ٢)(س + ٢)$

(ب) $ص^{٣} + ٤ ص^{٢} - ٩ ص - ٣٦$

$= (ص^{٣} + ٤ ص^{٢}) + (- ٩ ص - ٣٦)$

$= ص^{٢}(ص + ٤) - ٩(ص + ٤)$

$= (ص + ٤)(ص^{٢} - ٩)$

$= (ص + ٤)(ص - ٣)(ص + ٣)$

تمارين ذاتية :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

١ $م هـ - س م + هـ ص - س ص$

$(م هـ - س م) + (هـ ص - س ص)$

$م(هـ - س) + ص(هـ - س)$

$\therefore (هـ - س)(م + ص)$

٢ $٢ أ^{٢} س + ٢ س ب + أ^{٢} ص + ب ص$

$(٢ أ^{٢} س + ٢ س ب) + (أ^{٢} ص + ب ص)$

$٢ س(أ^{٢} + ب) + ص(أ^{٢} + ب)$

$(أ^{٢} + ب)(٢ س + ص)$

٣ $٤س^{٢} + ٢٠أس + ٨ب س + ١٤أب$

$٢(٢س^{٢} + ٩س + ٤ب س + ٢٩ب)$

$٢[(٢س^{٢} + ٩س) + (٤ب س + ٢٩ب)]$

$٢[س(٢س + ٩) + ٢ب(٢س + ٩)] = ٢(٢س + ٩)(س + ٢ب)$

٤ $٦س^{٢} - ٨س ص - ٣س ب + ٤ب ص$

$(٦س^{٢} - ٨س ص) + (-٣س ب + ٤ب ص)$

$٢س(٣س - ٤ص) - ب(٣س - ٤ص)$

$(٣س - ٤ص)(٢س - ب)$

٥ $س^{٣} - ٢س^{٢} - ٩س + ١٨$

$(س^{٣} - ٢س^{٢}) + (-٩س + ١٨)$

$س^{٢}(س - ٢) - ٩(س - ٢)$

$(س - ٢)(س^{٢} - ٩) = (س - ٢)(س - ٣)(س + ٣)$

٦ $س^{٣} + ٢س^{٢} - ٢٥س - ٥٠$

$(س^{٣} + ٢س^{٢}) + (-٢٥س - ٥٠)$

$س^{٢}(س + ٢) - ٢٥(س + ٢)$

$(س + ٢)(س^{٢} - ٢٥) = (س + ٢)(س + ٥)(س - ٥)$

٢ - ٦ حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد

Solving Second Degree Equation in One Variable

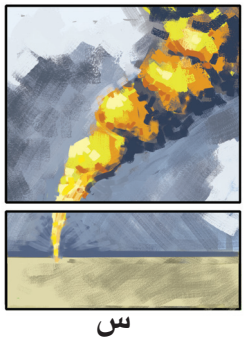
سوف تتعلّم : حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد على صورة واحدة: أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠

العبارات والمفردات :

معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد	Second Degree Equation with One Variable
حلّ معادلة	Solving an Equation

حُلّ وناقِش

تشارك أمل في مسابقة رسم لوحة فنّية بمناسبة إطفاء آخر بئر نفطية ، وكان من شروط المسابقة أن تكون مساحة اللوحة ١٥٠ سم^{٢} .



فلم تجد في المكتبة إلّا لوحتان إحداهما مربّعة الشكل والأخرى مستطيلة الشكل كما هو موضّح في الشكل المقابل . ساعِد أمل على إيجاد قِيَم س التي تجعل مجموع مساحتَي اللوحتَين يساوي ١٥٠ سم^{٢} .

١ أُكتب مساحة اللوحة المربّعة بدلالة س : س^{٢}

٢ أُكتب مساحة اللوحة المستطيلة بدلالة س : ٥ س

٣ أوجِد قِيَم س التي تجعل مجموع المساحتَين يساوي ١٥٠ سم^{٢}

- **نكتب المعادلة :** س^{٢} + ٥ س = ١٥٠

نبحث عن عدد موجَب مجموع مربّعه وخمسة أمثاله يساوي ١٥٠

- **نضع المعادلة في صورة** أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

س^{٢} + ٥ س - ١٥٠ = ٠

- **نحلّل بطريقة مناسِبة لإيجاد قِيَم س :**

(س + ١٥) (س - ١٠) = ٠

- **نوجِد قِيَم س** س = -١٥ ، ١٠

- **هل تقبل القيمتان؟ لماذا؟** لا، قيمة ١٠ فقط لأن الأطوال دائمًا موجبة.

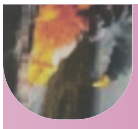
لاحِظ أنّ

المعادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد تُسمّى المعادلة التربيعية .

تذكَّر

حلّ المعادلة يعني إيجاد قِيَم المتغيّر التي تحقّق المعادلة .

معلومة مفيدة :



تحتفل الكويت سنويًّا في ٦ نوفمبر بذكرى إطفاء آخر بئر نفطية إثر العدوان العراقي الغاشم .

خاصّية الضرب الصفري

لكلّ أ ، ب عددان حقيقيان ، إذا كان أ × ب = ٠ ، فإنّ أ = ٠ أو ب = ٠

مثال (١) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلة : (س + ٥) (س − ٦) = ٠ ،
حيث س ∈ ح ، ثمّ تحقَّق من صحّة الحلّ .

الحلّ :

(س + ٥) (س − ٦) = ٠

س + ٥ = ٠ أو س − ٦ = ٠

س = − ٥ أو س = ٦

∴ مجموعة الحلّ = { − ٥ ، ٦ }

(اِستخدِم خاصّية الضرب الصفري)

لاحِظ أنّ

عند حلّ المعادلة التربيعية ، سنعتبر أنّ قِيَم المتغيّر تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم يُذكر غير ذلك .

تحقَّق :

عوِّض عن س بالعدد − ٥

(− ٥ + ٥) (− ٥ − ٦) ≟ ٠

٠ × − ١١ ≟ ٠

٠ = ٠ ✓

عوِّض عن س بالعدد ٦

(٦ + ٥) (٦ − ٦) ≟ ٠

١١ × ٠ ≟ ٠

٠ = ٠ ✓

مثال (٢) :

أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) ص^{٢} − ٥ ص = ٠

الحلّ :

ص^{٢} − ٥ ص = ٠

ص (ص − ٥) = ٠

ص = ٠ أو ص − ٥ = ٠

ص = ٥

∴ مجموعة الحلّ = { ٠ ، ٥ }

تذكَّر

خطوات حلّ معادلة تربيعية :

١ ضع المعادلة في الصورة العامّة .

٢ حلِّل .

٣ اِستخدِم خاصّية الضرب الصفري.

(ب) $س^{٢} = ٩$

الحلّ :

$س^{٢} = ٩$

$س^{٢} - ٩ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٣) = ٠$

$س - ٣ = ٠$ أو $س + ٣ = ٠$

$س = ٣$ $س = -٣$

∴ **مجموعة الحلّ = { ٣ ، -٣ }**

(ج) $ص^{٢} - ٦ ص + ٥ = ٠$

الحلّ :

$ص^{٢} - ٦ ص + ٥ = ٠$

$(ص - ٥)(ص - ١) = ٠$

$ص - ٥ = ٠$ أو $ص - ١ = ٠$

$ص = ٥$ $ص = ١$

∴ **مجموعة الحلّ = { ٥ ، ١ }**

(د) $س^{٢} + ٨ س + ١٦ = ٠$

الحلّ :

$س^{٢} + ٨ س + ١٦ = ٠$

$س^{٢} + ٨ س + ١٦ = ٠$

$(س + ٤)^{٢} = ٠$

$(س + ٤) = ٠$

$س = -٤$

∴ **مجموعة الحلّ = { -٤ }**

لاحِظ أنّ

إذا كانت $س^{٢} = ٠$

فإنّ $س = ٠$

عبِّر عن فهمك (١)

ما مجموعة حلّ المعادلة $س^{٢} + ١ = ٠$ ؟ حيث $س \in ح$.

لأن لا يمكن أن يكون عدد مربع تحته الجذر

مثال (٣) :

أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) $٦ص^{٢} + ٩ص = ٢ + ص^{٢}$

الحلّ :

$٦ص^{٢} + ٩ص = ٢ + ص^{٢}$

$٦ص^{٢} + ٩ص - ٢ - ص^{٢} = ٠$

$٥ص^{٢} + ٩ص - ٢ = ٠$

$(٥ص - ١)(ص + ٢) = ٠$

$٥ص - ١ = ٠$ أو $ص + ٢ = ٠$

$٥ص = ١$ $ص = -٢$

$ص = \frac{١}{٥}$

∴ مجموعة الحلّ $= \{\frac{١}{٥}، -٢\}$

اِنتبِه

اِجمع الحدود المتشابهة .

(ب) $ع(ع - ٦) = ٧$

الحلّ :

$ع(ع - ٦) = ٧$

$ع^{٢} - ٦ع = ٧$

$ع^{٢} - ٦ع - ٧ = ٠$

$(ع - ٧)(ع + ١) = ٠$

$ع - ٧ = ٠$ أو $ع + ١ = ٠$

$ع = ٧$ $ع = -١$

∴ مجموعة الحلّ $= \{٧، -١\}$

(ج) $(س + ٢)^{٢} = ١٤٤$

الحلّ :

$(س + ٢)^{٢} = ١٤٤$

$(س + ٢)^{٢} - ١٤٤ = ٠$

$[(س + ٢) - ١٢][(س + ٢) + ١٢] = ٠$

$(س - ١٠)(س + ١٤) = ٠$

$س - ١٠ = ٠$ أو $س + ١٤ = ٠$

$س = ١٠$ $س = -١٤$

∴ مجموعة الحلّ $= \{١٠، -١٤\}$

عبِّر عن فهمك (٢)

هل يمكنك حلّ مثال (٣) : (ج) بطريقة أخرى ؟ نعم نأخذ الجذر التربيعي للطرفين $(س + ٢) = \pm ١٢$

إما $س + ٢ = ١٢$ أو $س + ٢ = -١٢$

$س = ١٠$ $س = -١٤$

∴ مجموعة الحل $= \{١٠، -١٤\}$

مثال (٤) :

ما العدد الحقيقي الذي يزيد مربّعه عن أربعة أمثاله بمقدار ٥ ؟

الحلّ :

نفرض أنّ العدد الحقيقي هو س

$س^{٢} - ٤س = ٥$ (كوِّن المعادلة التربيعية)

$س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$ (ضع المعادلة في الصورة العامّة)

$(س + ١) (س - ٥) = ٠$ (حلِّل)

إمّا $(س + ١) = ٠$ أو $(س - ٥) = ٠$

$س = -١$ $س = ٥$

العدد الحقيقي هو -١ أو ٥

تذكّر

بفرض أنّ س عدد حقيقي ، فإنّ :

ضعفه هو ٢ س

مربّعه هو $س^{٢}$

ثلاثة أمثاله هو ٣ س

مثال (٥) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلة الآتية في ح بإكمال المربّع :

$س^{٢} + ٤س + ٢ = ٠$

الحلّ :

$س^{٢} + ٤س + ٤ - ٤ + ٢ = ٠$ (أكمِل إلى مربّع كامل)

$(س + ٢)^{٢} - ٢ = ٠$ (حلِّل الفرق بين مربّعَين)

$(س + ٢ - \sqrt{٢}) (س + ٢ + \sqrt{٢}) = ٠$

إمّا $س + ٢ - \sqrt{٢} = ٠$ أو $س + ٢ + \sqrt{٢} =$

$س = -٢ + \sqrt{٢}$ $س = -٢ - \sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحلّ = $\{ -٢ + \sqrt{٢} ، -٢ - \sqrt{٢} \}$

انتبِه

$\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٢$

دورك الآن

أوجِد مجموعة حلّ المعادلة الآتية في ح بإكمال المربّع :

$س^{٢} + ٦س - ٢ = ٠$

الحلّ :

$س^{٢} + ٦س + ..٩.. - ..٩.. - ٢ = ٠$

$(س + ..٣..)^{٢} - ..١١.. = ٠$

$(س + ٣ - ..\sqrt{١١}..) (س + ٣ + ..\sqrt{١١}..) = ٠$

إمّا س + ٣ = $\sqrt{١١٧}$ ..... أو س + ٣ = $-\sqrt{١١٧}$ .....

س = $-٣+\sqrt{١١٧}$ ..... س = $-٣-\sqrt{١١٧}$ .....

∴ مجموعة الحلّ = { $-٣+\sqrt{١١٧}$ ، $-٣-\sqrt{١١٧}$ }

تمارين ذاتية :

١ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) (س − ٣) (٢ س + ١) = ٠

س − ٣ = ٠ | ٢ س + ١ = ٠

س = ٣ | ٢ س = −١

س = $-\frac{١}{٢}$

∴ مجموعة الحل = { ٣ ، $-\frac{١}{٢}$ }

(ب) ص^{٢} − ٣٦ = ٠

(ص − ٦)(ص + ٦) = ٠

∴ ص = ± ٦

∴ مجموعة الحل = { ٦ ، −٦ }

(ج) ص^{٢} − ١٠ ص − ١١ = ٠

(ص − ١١)(ص + ١) = ٠

ص = ١١ ، ص = −١

مجموعة = { ١١ ، −١ }

(د) ن^{٢} − ٦ ن + ٩ = ٠

(ن − ٣)(ن − ٣) = ٠

ن = ٣

مجموعة الحل = { ٣ }

(هـ) ك^{٢} + ٧ ك + ١٢ = ٠

(ك + ٣)(ك + ٤) = ٠

ك + ٣ = ٠ | ك + ٤ = ٠

ك = −٣ | ك = −٤

مجموعة الحل = { −٣ ، −٤ }

(و) ل^{٢} = ٧ ل

ل^{٢} − ٧ ل = ٠

ل (ل − ٧) = ٠

ل = ٠ ، ل = ٧

مجموعة الحل = { ٠ ، ٧ }

(ز) ٣ ن^{٢} + ن − ١٠ = ٠

(٣ ن − ٥)(ن + ٢) = ٠

٣ ن − ٥ = ٠ | ن + ٢ = ٠

ن = $\frac{٥}{٣}$ | ن = −٢

مجموعة الحل = { $\frac{٥}{٣}$ ، −٢ }

(ح) ٧ س^{٢} − ١٢ س − ٨ = ٥ س^{٢} − ٦ س

٧ س^{٢} − ١٢ س − ٨ − ٥ س^{٢} + ٦ س = ٠

٢ س^{٢} − ٦ س − ٨ = ٠

٢ (س^{٢} − ٣ س − ٤) = ٠

٢ (س − ٤)(س + ١) = ٠ ، مجموعة الحل = { ٤ ، −١ }

(ط) ٢ ص^{٢} = ١٥ ص − ١٨

٢ ص^{٢} − ١٥ ص + ١٨ = ٠

(٢ ص − ٣)(ص − ٦) = ٠

ص = $\frac{٣}{٢}$ ، ص = ٦

مجموعة الحل = { $\frac{٣}{٢}$ ، ٦ }

(ي) س (س + ١) = ٢

س^{٢} + س − ٢ = ٠

(س − ١)(س + ٢) = ٠

س = ١ ، س = −٢

مجموعة الحل = { ١ ، −٢ }

الدرس السادس

(ك) $(س + ٣)^٢ - ٤٩ = ٠$

$[(س+٣)+٧][(س+٣)-٧] = ٠$

$(س-٤)(س+١٠) = ٠$

$س = ٤ ، س = -١٠$

مجموعة الحل $= \{٤ ، -١٠\}$

(ل) $٩م^٢ = ١٢م - ٤$

$٩م^٢ - ١٢م + ٤ = ٠$

$(٣م - ٢)^٢ = ٠$

$\therefore ٣م - ٢ = ٠ \quad \therefore م = \frac{٢}{٣}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\frac{٢}{٣}\}$

٢ أوجِد مجموعة حلّ المعادلة الآتية في ح بإكمال المربّع : $س^٢ - ٢س - ٤ = ٠$

مربع نصف معامل $س = (\frac{-٢}{٢})^٢ = (-١)^٢ = ١$

$\therefore س^٢ - ٢س + ١ - ١ - ٤ = ٠$

$(س-١)^٢ - ٥ = ٠ \quad ، \quad [س-١-\sqrt{٥}][س-١+\sqrt{٥}] = ٠$

$\therefore س = ١+\sqrt{٥} ، س = ١-\sqrt{٥} \quad \therefore$ مجموعة الحل $= \{١+\sqrt{٥} ، ١-\sqrt{٥}\}$

٣ يُنتج مصنع للحديد والصلب قطعة على شكل شبه مكعّب أبعاده :
٤ سم ، (س + ٢) سم ، (س + ٢) سم وحجمه يساوي ١٠٠ سم^٣ . أوجِد قيمة س .

$٤ \times (س+٢) \times (س+٢) = ١٠٠$

$٤(س+٢)^٢ = ١٠٠$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$(س+٢)^٢ = \pm ١٠$

إما $(س+٢)^٢ = ١٠$ أو $(س+٢)^٢ = -١٠$

$س + ٢ = ٥$

$س = ٣$

$\therefore$ قيمة س هي ٣

$س + ٢ = -٧$

$س = -٧$ ← مرفوض لأنه سالب

٤ لدى مخزن أحد المصانع أرضية مستطيلة الشكل يزيد طولها ٢٠ مترًا عن عرضها ، وكانت مساحتها ٣٠٠ م^٢ . أوجِد بعدَي أرضية المخزن .

نفرض أن طول المستطيل $= س$ ∴ عرض المستطيل $= س - ٢٠$

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض

$\therefore س(س-٢٠) = ٣٠٠$

$س^٢ - ٢٠س - ٣٠٠ = ٠$

$(س-٣٠)(س+١٠) = ٠$

$\therefore س = ٣٠ ، س = -١٠$ مرفوض لأنه الطول دائمًا موجبًا

∴ العرض $= س - ٢٠ = ٣٠ - ٢٠ = ١٠$

∴ بعدى أرضية المخزن هما ٣٠ ، ١٠

٥ ما العدد الحقيقي الذي ينقص مربّعه عن خمسة أمثاله بمقدار ٤ ؟

نفرض أن العدد الحقيقي هو س

∴ ٥س − س² = ٤

∴ ٥س − س² − ٤ = ٠ اضرب ف (−١)

∴ −٥س + س² + ٤ = ٠ إعادة الترتيب

س² − ٥س + ٤ = ٠

∴ (س − ٤)(س − ١) = ٠ ∴ العدد الحقيقي هو ٤ أو ١

مهارات تفكير عليا :

٦ أوجِد مجموعة حلّ المعادلة ، حيث س ∈ ح

(س + ٥)² + ٥(س + ٥) + ٤ = ٠

نضع (س + ٥) = ص

∴ ص² + ٥ص + ٤ = ٠

ص² + ٥ص + ٤ = ٠

(ص + ٤)(ص + ١) = ٠

∴ ص + ٤ = ٠ | ص + ١ = ٠

(س + ٥) + ٤ = ٠ | (س + ٥) + ١ = ٠

س = −٩ | س = −٦

∴ مجموعة الحل = {−٩ ، −٦ ، −٤}

تقويم الوحدة التعليمية الثانية
Unit Two Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} + ١٤ س + ٤٩$

$(س + ٧)^{٢}$

(ب) $١٢٥ + س^{٣}$

$(٥ + س)(٢٥ - ٥س + س^{٢})$

(ج) $٣٢ س^{٣} - ٤$

$٤(٨ س^{٣} - ١)$

$٤(٢س - ١)(٤س^{٢} + ٢س + ١)$

(د) $س^{٦} - \frac{٢٧}{٦٤} ص^{٣}$

$(س^{٢} - \frac{٣}{٤} ص)(س^{٤} + \frac{٣}{٤} س^{٢} ص + \frac{٩}{١٦} ص^{٢})$

(هـ) $س^{٢} + ٨ س + ٧$

$(س + ٧)(س + ١)$

(و) $س^{٢} - ٣ س - ١٨$

$(س - ٦)(س + ٣)$

(ز) $٢ س^{٢} - ١٤ س + ٢٤$

$٢(س^{٢} - ٧س + ١٢)$

$٢(س - ٣)(س - ٤)$

(ح) $ص^{٤} + ١١ ص^{٣} + ٢٨ ص^{٢}$

$ص^{٢}(ص^{٢} + ١١ ص + ٢٨)$

$ص^{٢}(ص + ٤)(ص + ٧)$

(ط) $ب^{٢} - ٩ ب ك - ١٠ ك^{٢}$

$(ب - ١٠ك)(ب + ك)$

ي) ٢ س^{٢} - ٨ س + ٦

٢(س^{٢} - ٤ س + ٣)

٢(س - ٣)(س - ١)

ك) ٦ س^{٢} + ٢١ س - ١٢

٣(٢ س^{٢} + ٧ س - ٤)

٣(٢ س - ١)(س + ٤)

ل) ١٢ ل^{٢} + ١١ ل م - ١٥ م^{٢}

(٣ ل + ٥ م)(٤ ل - ٣ م)

م) ٤ س^{٢} + ٤ س + ١

(٢ س + ١)^{٢}

ن) ٩ س^{٢} ص - ٥٤ س ص + ٨١ ص

٩ ص (س^{٢} - ٦ س + ٩)

٩ ص (س - ٣)^{٢}

س) س^{٣} + ٢ س^{٢} - س - ٢

(س^{٣} + ٢ س^{٢}) + (- س - ٢)

س^{٢}(س + ٢) - (س + ٢)

(س + ٢)(س^{٢} - ١)

(س + ٢)(س + ١)(س - ١)

ص) س ص^{٢} + ٢ س^{٢} - ٣ ص^{٣} - ٦ س ص

(س ص^{٢} + ٢ س^{٢}) + (- ٣ ص^{٣} - ٦ س ص) ← س ص(ص^{٢} + ٢ س) - ٣ ص(ص^{٢} + ٢ س)

∴ (ص^{٢} + ٢ س)(س - ٣ ص)

٢ حلِّل الحدودية الآتية بطريقة إكمال المربّع :

س^{٢} - ٢ س - ٣

مربع نصف معامل س = $(\frac{-٢}{٢})^{٢}$ = (-١)^{٢} = ١

∴ س^{٢} - ٢ س + ١ - ١ - ٣ ← (س - ١)^{٢} - ٤

= [(س - ١) - ٢][(س - ١) + ٢] = (س - ٣)(س + ١)

٣ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية :

(أ) $س^{٢} - ٦ س = ٠$

$س (س - ٦) = ٠$

إما $س = ٠$ أو $س = ٦$

مجموعة الحل $= \{ ٦ ، ٠ \}$

(ب) $٩ ص^{٢} - ١١ = ١٤$

$٩ ص^{٢} - ٢٥ = ٠$

$(٣ ص - ٥) (٣ ص + ٥) = ٠$

إما $٣ ص = ٥$ $\therefore ص = \frac{٥}{٣}$ أو $٣ ص = -٥$ $\therefore ص = -\frac{٥}{٣}$

مجموعة الحل $= \{ \frac{٥}{٣} ، -\frac{٥}{٣} \}$

(ج) $س^{٢} - ٤ س = ٢١$

$س^{٢} - ٤ س - ٢١ = ٠$

$(س - ٧) (س + ٣) = ٠$

إما $س = ٧$ أو $س = -٣$

مجموعة الحل $= \{ ٧ ، -٣ \}$

(د) $٩ ن^{٢} + ١٢ ن + ٤ = ٠$

$(٣ ن + ٢)^{٢} = ٠$

$٣ ن + ٢ = ٠$ $\therefore ٣ ن = -٢$ $\therefore ن = -\frac{٢}{٣}$

مجموعة الحل $= \{ -\frac{٢}{٣} \}$

(هـ) $(س - ٧)^{٢} - ٨١ = ٠$

$[(س - ٧) - ٩] [(س - ٧) + ٩] = ٠$

$(س - ١٦) (س + ٢) = ٠$

$\therefore س = ١٦$ ، $س = -٢$

مجموعة الحل $= \{ ١٦ ، -٢ \}$

(و) $٩ س^{٢} - ٥ س = ٦ س^{٢} - ٣ س + ٥$

$٩ س^{٢} - ٥ س - ٦ س^{٢} + ٣ س - ٥ = ٠$

$٣ س^{٢} - ٢ س - ٥ = ٠$

$(٣ س - ٥) (س + ١) = ٠$

$س = \frac{٥}{٣}$ ، $س = -١$ $\therefore$ مجموعة الحل $= \{ -١ ، \frac{٥}{٣} \}$

ز) س (س + ٢) = ٣

$س^{٢} + ٢س - ٣ = ٠$

$(س + ٣)(س - ١) = ٠$

$س = -٣ ، س = ١$

مجموعة الحل = $\{-٣ ، ١\}$

ح) (٣ س - ٢)^{٢} - س^{٢} = ٠

$[(٣س - ٢) - س][(٣س - ٢) + س] = ٠$

$(٢س - ٢)(٤س - ٢) = ٠$

$٤(س - ١)(٢س - ١) = ٠$

$س = ١ ، س = \frac{١}{٢}$ ∴ مجموعة الحل = $\{١ ، \frac{١}{٢}\}$

٤ أوجِد مجموعة حلّ المعادلة في ح بطريقة إكمال المربّع :

س^{٢} + ٨ س + ١٤ = ٠

مربع نصف معامل س = $(\frac{٨}{٢})^{٢} = ٤^{٢} = ١٦$ ∴ $س^{٢} + ٨س + ١٦ - ١٦ + ١٤ = ٠$

$(س + ٤)^{٢} - ٢ = ٠ ، [(س + ٤) - \sqrt{٢}][(س + ٤) + \sqrt{٢}]$

∴ مجموعة الحل = $\{-٤ + \sqrt{٢} ، -٤ - \sqrt{٢}\}$

٥ وظِّف مفهوم المربّع الكامل لإيجاد قيمة : (٦١)^{٢}

$(١ + ٦٠)^{٢}$

$= ١ + ١٢٠ + ٣٦٠٠$

$= ٣٧٢١$

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ١٠) ، ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $س^{٣} - \frac{١}{٢٧} = (س - \frac{١}{٣})(س^{٢} + \frac{١}{٣} س + \frac{١}{٩})$	أ	ب
٢ المقدار الثلاثي $س^{٢} + س + \frac{١}{٤}$ مربّع كامل	أ	ب
٣ $س^{٢} + س + ١ = (س + ١)^{٢}$	أ	ب
٤ مجموعة حلّ المعادلة $س^{٢} + ٣ س = ٠$ ، $س \in ح$ هي $\{٠ ، ٣\}$	أ	ب
٥ $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$	أ	ب
٦ إذا كان $٤ ص^{٢} + جـ ص + ٩$ مربّعًا كاملًا ، فإنّ إحدى قِيَم جـ هي ١٢	أ	ب
٧ إذا كان $٢ س^{٢} - س - ١٠ = ل (س + ٢)$ فإنّ $ل = (٢س - ٥)$	أ	ب
٨ $(س + ص)^{٣} = س^{٣} + ص^{٣}$	أ	ب
٩ $٠,٠٠١ + أ^{٣} = (٠,١ + أ)(أ^{٢} - ٠,١ أ + ٠,٠١)$	أ	ب
١٠ إذا كان $س - ص = ٥$ ، $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٦$ ، فإنّ $س^{٣} - ص^{٣} = ٣٠$	أ	ب

في البنود (١١ - ١٩) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

١١ إذا كان $أ^{٣} = ١٠$ ، $ب^{٣} = ٢$ ، فإنّ $(أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢}) =$

أ -٨ ب ٨ ج ١٢ د ٢٠

١٢ $س(س - ٣) - ٣ س + ٩ =$

أ $(س - ٣)(س + ٣)$ ب $(س - ٣)^{٢}$

ج $(س - ٣)(س + ١)$ د $(س + ٣)^{٢}$

١٣ إذا كان ل + م = ٣ ، ل^{٣} + م^{٣} = ٥١ ، فإنّ ل^{٢} - ل م + م^{٢} =

أ ١٧ ب ٤٨ ج ٥٤ د ١٥٣

١٤ (س - ١)^{٢} - ٤ =

أ (س - ٢) (س + ١) ب (س + ٢) (س - ١)

ج (س - ١) (س + ٣) د (س + ١) (س - ٣)

١٥ إذا كان ٢ س^{٢} + م س - ٧ = (٢ س - ١) (س + ٧) ، فإنّ م =

أ -١٣ ب ١٣ ج ١٤ د ١٥

١٦ مجموعة حلّ المعادلة س (س - ١٢) = ١٣ في ح هي :

أ { ١٢ ، -١٣ } ب { ١ ، -١٣ }

ج { -١٢ ، ٠ } د { -١ ، ١٣ }

١٧ ص^{٤} + ٠,٠٢٧ ص =

أ ص (ص + ٠,٣) (ص^{٢} + ٠,٣ ص + ٠,٠٩)

ب ص (ص - ٠,٣) (ص^{٢} - ٠,٣ ص - ٠,٠٩)

ج ص (ص + ٠,٣) (ص^{٢} - ٠,٣ ص + ٠,٠٩)

د ص (ص + ٠,٣) (ص^{٢} - ٠,٦ ص + ٠,٠٩)

١٨ (س - ١)^{٣} + ١ =

أ س (س^{٢} - ٣س + ٣)

ب س (س^{٢} + ٣س + ٣)

ج س (س^{٢} + ٣س - ٣)

د س (س^{٢} - ٣س - ٣)

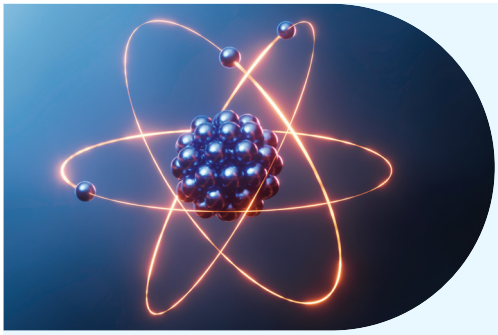
١٩ قيمة جـ التي تجعل الحدودية الثلاثية س^{٢} - ٦ س + جـ مربّعًا كاملًا هي :

أ -٩ ب ٣ ج ٩ د ٣٦

في البنود (٢٠ - ٢٣) ، اِختر من القائمة (٢) ما يناسب كلّ بند من القائمة (١) لتحصل على عبارة صحيحة .

القائمة (١)		القائمة (٢)
٢٠ ٦ س^{٢} - ١١ س + ٤ =	ج	أ (٣ س - ١) (س + ٢)
٢١ ٦ س^{٢} - ٥ س - ٤ =	د	ب ٣ (٣ س - ٢) (س + ١)
٢٢ ٩ س^{٢} + ٣ س - ٦ =	ب	ج (٢ س - ١) (٣ س - ٤)
٢٣ س (٣ س + ٥) - ٢ =	ﻫ	د (٢ س + ١) (٣ س - ٤)
		هـ (٢ س - ١) (٣ س + ٤)

المشروع الأوّل:
الرياضيات والعلوم

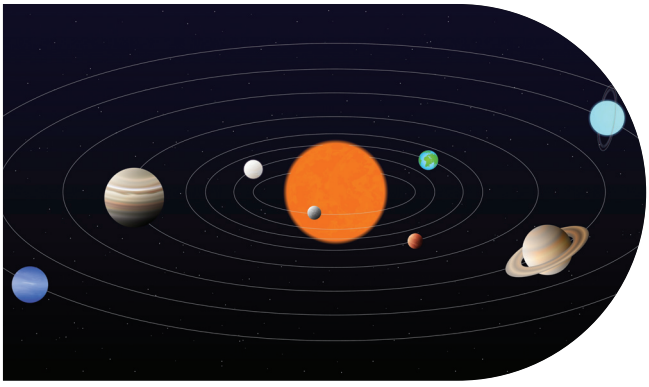


تُستخدم الصورة العلمية لكتابة الأعداد الكبيرة جدًّا أو الصغيرة جدًّا، ما يفيد في الكثير من المجالات العلمية والحياتية .

خطّة العمل :

توظّف كلّ مجموعة من المتعلّمين الصورة العلمية لكتابة الأعداد الكبيرة جدًّا أو الصغيرة جدًّا ، ثمّ ترتّبها ترتيبًا تصاعديًّا .

خطوات تنفيذ المشروع :



- اِجمع البيانات وسجِّل ملاحظاتك .

قُم بجمع البيانات الآتية من الشبكة المعلوماتية (internet) أو بالبحث في الكتب العلمية:

أ حجم الميكروبات .

ب وزن ذرّة الأكسجين .

ج مساحة سطح الأرض .

د وزن حبّة الأرزّ .

- صمِّم جدولًا منظَّمًا بورقة جذّابة من ٣ أعمدة توضّح فيها دلالة كلّ عدد ورمز العدد بالصورة النظامية وصورته العلمية .
- رتِّب الأعداد تصاعديًّا أو تنازليًّا .

علاقات وتواصل:

تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة كتابة وترتيب الأعداد .

عرض العمل:

تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل.

المراجع

- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة الأولى ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ،
  وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ،
  وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

مصادر بعض الصور

- صفحة ٩٨ : صورة لإطفاء بئر نفط – المصدر : وكالة الأنباء الكويتية (KUNA) ، وقت مراسم إطفاء آخر بئر بتاريخ ٦ نوفمبر ١٩٩١

هل أنت مستعدّ ؟

١ أوجِد العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) لكلّ ممّا يلي :

أ) ٢٤ ، ١٨
ع . م . أ = ٦

ب) ١٥ ، ٣
ع . م . أ = ٣

٢ أوجِد المضاعَف المشترَك الأصغر (م . م. أ) لكلّ ممّا يلي :

أ) ١٤ ، ٧
م . م . أ = ١٤

ب) ٦ ، ٨
م . م . أ = ٢٤

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{-١٥}{٢٥} = \frac{-٣}{٥}$

ب) $\frac{٦٣}{٣٦} = \frac{٧}{٤} = ١\frac{٣}{٤}$

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{٢}{٤} \times \frac{-٢}{١٥} = \frac{١}{٢} \times \frac{-١}{٥} = \frac{-١}{١٠}$

ب) $-٩ س^{٣} \times ٣ س^{٢}$
$= -٢٧ س^{٥}$

ج) أوجِد ناتج : ٣ س × ($س^{٢}$ − ٢ س + ١)
$= ٣ س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٣ س$

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{٢٢}{٣٥} \div \frac{٦}{٧} = \frac{٢٢}{٣٥} \times \frac{٧}{٦} = \frac{١١}{١٥} \times \frac{١}{٣} = \frac{١١}{١٥}$

ب) $-٩ س^{٢} \div ٣ س^{٢}$
$= -٩ س^{٢} \times \frac{١}{٣ س^{٢}} = -٣ \times \frac{١}{س^{٢}} = \frac{-٣}{س^{٢}}$

هل أنت مستعدّ ؟

ج) $\frac{١}{٦} + \frac{٣}{٤}$

= $\frac{٢}{١٢} + \frac{٩}{١٢}$ = $\frac{١١}{١٢}$

د) $-٩ س^{٢} + ٣ س^{٢}$

= $-٦ س^{٢}$

٥ اِقسم ($٣ س^{٤} - ١٥ س^{٣} + ٢١ س^{٢}$) على $٣ س^{٣}$

$(٣ س^{٤} - ١٥ س^{٣} + ٢١ س^{٢}) \div ٣ س^{٣}$

$\frac{١}{٣ س^{٣}} \times (٧ + ٥ س - س^{٢})$

$= \frac{١}{٣ س^{٣}} \times (٧ + ٥ س - س^{٢}) = \frac{٧}{٣ س^{٣}} + \frac{٥}{٣ س^{٢}} - \frac{١}{٣ س}$

٦ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًا :

أ) $٣ س^{٢} ص - ٩ س ص^{٢}$

$٣ س ص (س - ٣ ص)$

ب) $س^{٢} - ٣٦$

$(س - ٦)(س + ٦)$

ج) $س^{٢} + ٥ س + ٦$

$(س + ٢)(س + ٣)$

د) $٢ س^{٢} - ١١ س + ١٢$

$(٢ س - ٣)(س - ٤)$

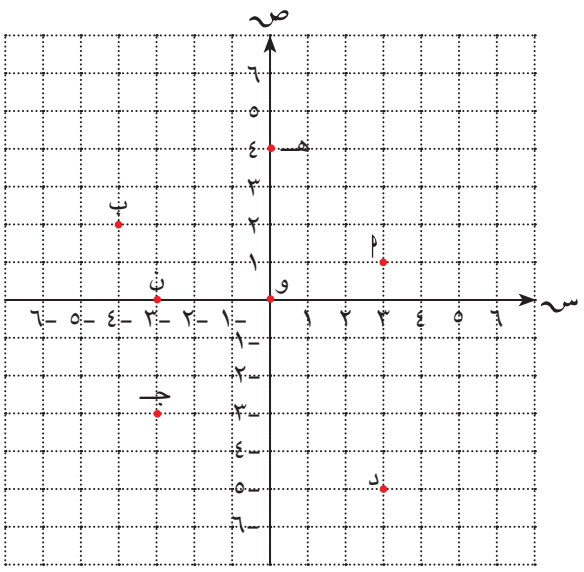
هـ) $س^{٣} + ٦٤$

$(س + ٤)(س^{٢} - ٤ س + ١٦)$

و) $٨ س^{٣} - ١$

$(٢ س - ١)(٤ س^{٢} + ٢ س + ١)$

٧ في المستوى الإحداثي ، اُكتب إحداثيات النقاط الآتية :



أ (٣ ، ١)

ب (-٤ ، ٢)

جـ (-٣ ، -٣)

د (٣ ، -٥)

هـ (٠ ، ٤)

ن (-٣ ، ٠)

و (٠ ، ٠)

هل أنت مستعدّ ؟

٣ - ١ الحدوديات النسبية وتبسيطها
Simplifying Rational Expressions

سوف تتعلّم : الحدوديات النسبية وتبسيطها .

العبارات والمفردات :

تبسيط	Simplify	حدودية نسبية	Rational Expression

حُلّ وناقِش

صمّم مهندس حوضَي سباحة كلاهما على شكل شبه مكعّب أحدهما كبير حجمه ٢٧ س^{٥} ص وحدة مكعّبة والآخر صغير حجمه ٩ س^{٢} ص^{٣} وحدة مكعّبة ، ساعِد المهندس في إيجاد النسبة بين الحجمَين .



١ أكمِل ما يلي :

النسبة بين الحجمَين = $\frac{\text{حجم الحوض الكبير}}{\text{حجم الحوض الصغير}} = \frac{٢٧ س^{٥} ص^{٣}}{٩ س^{٢} ص^{٣}}$

- يُسمّى الناتج « حدودية نسبية » .

حيث إنّ كلًّا من البسط والمقام يمثّل حدودية ، والمقام لا يساوي صفرًا .

٢ إختصِر الحدودية النسبية بالقسمة على العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) .

$$\frac{٢٧ س^{٥} ص^{٣} \div ٩ س^{٢} ص^{٣}}{٩ س^{٢} ص^{٣} \div ٩ س^{٢} ص^{٣}} = \frac{٣ س^{٣}}{ص^{٣}}$$

عند تبسيط الحدودية النسبية نقوم بقسمة كلّ من الحدوديتَين في البسط والمقام على العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) بينهما .

أمثلة لحدوديات نسبية

- $\frac{ص^{٣}}{٢ س^{٣}}$ ، $\frac{س + ٢}{ص}$ ، $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ ، $\frac{س^{٢} - ٦ س + ٥}{س^{٢} - ٢٥}$

معلومة مفيدة :



عمق حوض السباحة هو الارتفاع الرأسي للماء من القاع إلى السطح .

يُستخدم الارتفاع في حساب حجم الماء ، وتوزيع الميل أو الانحدار في أرضية الحوض لضمان تصريف الماء ، وأمان السبّاحين.

تذكَّر

المقام أينما وُجد لا يساوي صفرًا .

مثال (١) :

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

(أ) $\frac{١٨ س^{٥}}{٩ س^{٢}}$

(ب) $\frac{٤ س^{٢} ص}{١٢ س ص^{٣}}$

(ج) $\frac{ع + ٢}{٣ ع + ٦}$

(د) $\frac{٢ س - ٤}{س^{٢} - ٤}$

الحلّ :

(أ) $\frac{١٨ س^{٥}}{٩ س^{٢}} = ٢ س^{٣}$

(ب) $\frac{٤ س^{٢} ص}{١٢ س ص^{٣}} = \frac{س}{٣ ص^{٢}}$

(ج) $\frac{ع + ٢}{٣ ع + ٦} = \frac{(ع + ٢)}{٣ (ع + ٢)} = \frac{١}{٣}$

(د) $\frac{٢ س - ٤}{س^{٢} - ٤} = \frac{٢ (س - ٢)}{(س - ٢) (س + ٢)} = \frac{٢}{س + ٢}$

تذكَّر

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

$\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$

خطوات الحلّ:

١ حلِّل كلًّا من البسط والمقام إلى عواملهما باستخدام طرق التحليل المختلفة .

٢ قسِّم كلًّا من البسط والمقام على (ع. م. أ) .

٣ يكون الناتج هو أبسط صورة للحدودية النسبية .

عبِّر عن فهمك (١)

بسّط سالم الحدودية $\frac{س - ٢}{س + ٣}$ كما يلي : $\frac{س - ٢}{س + ٣} = \frac{-٢}{٣}$ ، فهل طريقته صحيحة ؟ ولماذا ؟

خطأ صحيحة لأنه لا يمكن الاختصار من الجمع والطرح إنما الضرب والقسمة .

مثال (٢) :

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

(أ) $\frac{م + ٦}{م^{٢} - م - ٤٢}$

(ب) $\frac{٢ س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$

الحلّ :

(أ) $\frac{م + ٦}{م^{٢} - م - ٤٢} = \frac{م + ٦}{(م + ٦)(م - ٧)} = \frac{(م + ٦)}{(م + ٦)(م - ٧)} = \frac{١}{م - ٧}$

(ب) $\frac{٢ س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + ٣ س + ٢} = \frac{٢ س (س + ١)}{(س + ٢)(س + ١)} = \frac{٢ س (س + ١)}{(س + ٢)(س + ١)} = \frac{٢ س}{س + ٢}$

دورك الآن

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{س^{٢} - ٦ س + ٥}{س^{٢} - ٢٥}$

$= \frac{(س - ٥)(س - ١)}{(س + ٥)(س - ٥)}$

$= \frac{س - ١}{س + ٥}$

ب) $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٦ س + ٩}$

$= \frac{(س - ٣)}{(س - ٣)^{٢}}$

$= \frac{١}{س - ٣}$

ج) $\frac{س - ٢}{٢ - س}$

$= \frac{(س - ٢)}{-(س - ٢)}$

$= \frac{١}{-١} = -١$

مثال (٣) :

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{٢ س^{٢} + ١٣ س - ٧}{س^{٢} + ٤ س - ٢١}$

الحلّ :

$\frac{٢ س^{٢} + ١٣ س - ٧}{س^{٢} + ٤ س - ٢١}$

$= \frac{(٢ س - ١)(س + ٧)}{(س - ٣)(س + ٧)}$

$= \frac{٢ س - ١}{س - ٣}$

ب) $\frac{٤ س - ٢}{١ - ٢ س}$

الحلّ :

$\frac{٤ س - ٢}{١ - ٢ س} = \frac{٢ (٢ س - ١)}{(١ - ٢ س)}$

$= \frac{٢ (٢ س - ١)}{-(٢ س - ١)}$

$= -٢$

ج) $\frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢ س + ٤}$

الحلّ :

$\frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢ س + ٤}$

$= \frac{(س + ٢)(س^{٢} - ٢ س + ٤)}{(س^{٢} - ٢ س + ٤)}$

$= س + ٢$

د) $\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٣} - ٢٧}$

الحلّ :

$\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٣} - ٢٧}$

$= \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)(س^{٢} + ٣ س + ٩)}$

$= \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٣ س + ٩}$

تذكَّر

$أ - س = -(س - أ)$

انتبِه

$(س^{٢} + ٣ س + ٩)$

لا يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب عاملَين.

عبِّر عن فهمك (٢)

أُكتب حدودية نسبية تصبح بعد تبسيطها $\frac{٥}{س + ٥}$

$\frac{٢٥ - س٥}{٢٥ - ٢س}$

تمارين ذاتية :

١ ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{٥ س^{٣}}{٢٥ س^{٧}}$

$= \frac{١}{٥ س^{٤}}$

ب) $\frac{١٠ أ + ١٥}{٢٠}$

$= \frac{٥(٢ أ + ٣)}{٤ \times ٥} = \frac{٢ أ + ٣}{٤}$

$= \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٢} أ$

ج) $\frac{س^{٢} - ٨ س + ١٥}{س^{٢} - ٩}$

$= \frac{(س - ٥)(س - ٣)}{(س + ٣)(س - ٣)}$

$= \frac{س - ٥}{س + ٣}$

د) $\frac{٦ س^{٢} + ١٧ س - ٢٨}{س^{٢} - س - ٢٠}$

$= \frac{(٦ س - ٧)(س + ٤)}{(س - ٥)(س + ٤)}$

$= \frac{٦ س - ٧}{س - ٥}$

هـ) $\frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٢} - ٣ س + ٩}$

$= \frac{(س + ٣)(س^{٢} - ٣ س + ٩)}{(س^{٢} - ٣ س + ٩)}$

$= س + ٣$

و) $\frac{س^{٢} - ١٦}{س^{٣} - ٦٤}$

$= \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{(س - ٤)(س^{٢} + ٤ س + ١٦)}$

$= \frac{س + ٤}{س^{٢} + ٤ س + ١٦}$

ز) $\frac{٤ س^{٣} + ١٦ س^{٢} + ١٢ س}{٢ س^{٣} - ١٤ س^{٢} - ١٦ س}$

$= \frac{٤ س (س^{٢} + ٤ س + ٣)}{٢ س (س^{٢} - ٧ س - ٨)}$

$= \frac{٢(س + ١)(س + ٣)}{(س + ١)(س - ٨)}$

$= \frac{٢(س + ٣)}{(س - ٨)}$

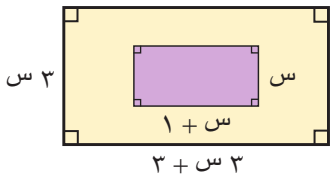
ح) $\frac{س - ٣}{٣ - س}$

$= \frac{(س - ٣)}{-(٣ - س)}$

$= -١$

مهارات تفكير عليا :

٢ في الشكل المقابِل :



أُكتب نسبة مساحة منطقة المستطيل الأصغر إلى مساحة منطقة المستطيل الأكبر في صورة حدودية نسبية ، ثمّ ضَعها في أبسط صورة .

مساحة المستطيل الأصغر ÷ مساحة المستطيل الكبير

$= س(س + ١) \div ٣ س(س + ٣)$

$\therefore \frac{س(س + ١)}{٣ \times ٣ س(س + ١)} = \frac{١}{٩}$

٣ - ٢ ضرب الحدوديات النسبية
Multiplying Rational Expressions

سوف تتعلّم : ضرب الحدوديات النسبية .

العبارات والمفردات :

ضرب	Multiplying

حُلّ وناقِش

١ أُكتب كلًّا مما يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٥} =$ ..... $\frac{٣}{٢٠}$

ب) $\frac{-٣}{١٦} \times \frac{٨}{٩} =$ ..... $\frac{-١}{٦} = \frac{-١}{٢} \times \frac{١}{٣}$

ج) $\frac{٢}{١٥} \times (-٣) =$ ..... $\frac{-٤}{٥} = (-١) \times \frac{٤}{٥}$

٢ طبِّق الخطوات السابقة لإيجاد ناتج $\frac{٣}{س} \times \frac{س}{٩}$ في أبسط صورة .

$$\frac{\text{.....} \times \text{.....}}{\text{.....} \times \text{.....}} = \frac{س}{٩} \times \frac{٣}{س}$$

$$= \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$$

ضرب الحدوديات النسبية يشبه ضرب الأعداد النسبية

إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ تمثّل حدوديتين نسبيتين ،

فإنّ : $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ\,جـ}{ب\,د}$

مثال (١) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{ع^{٣}}{٣٥} \times \frac{٧}{ع^{٢}}$

الحلّ :

$$\frac{ع^{٣}}{٣٥} \times \frac{٧}{ع^{٢}} = \frac{ع^{٣} \times ٧}{٣٥ \times ع^{٢}}$$

$$= \frac{ع}{٥}$$

(ب) $\frac{٥ ل^{٣}}{ل^{٢}} \times \frac{٣ ل^{٤}}{٦ ل}$

الحلّ :

$$\frac{٥ ل^{٣}}{ل^{٢}} \times \frac{٣ ل^{٤}}{٦ ل} = \frac{٥ ل^{٣} \times ٣ ل^{٤}}{ل^{٢} \times ٦ ل}$$

$$= \frac{٥ ل^{٤}}{٢}$$

(ج) $\frac{٢ س + ١}{٣} \times \frac{٦ س}{٤ س^{٢} - ١}$

الحلّ :

$$\frac{٢ س + ١}{٣} \times \frac{٦ س}{٤ س^{٢} - ١}$$

$$= \frac{(٢ س + ١) \times ٦ س}{٣ (٤ س^{٢} - ١)}$$

$$= \frac{(٢ س + ١) \times ٦ س}{٣ (٢ س + ١)(٢ س - ١)}$$

$$= \frac{٢ س}{٢ س - ١}$$

(د) $\frac{٤ م}{م + ١} \times \frac{م + ١}{م - ١}$

الحلّ :

$$\frac{٤ م}{م + ١} \times \frac{م + ١}{م - ١}$$

$$= \frac{٤ م (م + ١)}{(م + ١)(م - ١)}$$

$$= \frac{٤ م}{م - ١}$$

تذكّر

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

$\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$

مثال (٢) :

أوجِد ناتج ما يلي في أبسط صورة :

$$\frac{ن^{٢} + ن - ١٢}{٢ ن^{٢} + ٣ ن - ٢٠} \times \frac{٢ ن - ٥}{ن - ٣}$$

الحلّ :

$$\frac{ن^{٢} + ن - ١٢}{٢ ن^{٢} + ٣ ن - ٢٠} \times \frac{٢ ن - ٥}{ن - ٣}$$

$$= \frac{(ن^{٢} + ن - ١٢)(٢ ن - ٥)}{(٢ ن^{٢} + ٣ ن - ٢٠)(ن - ٣)}$$

$$= \frac{(ن + ٤)(ن - ٣)(٢ ن - ٥)}{(٢ ن - ٥)(ن + ٤)(ن - ٣)}$$

$$= ١$$

دورك الآن

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} \times (س + ٣)$

$= \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{(س - ٣)(س + ٣)} \times (س + ٣)$

$= س^{٢} + ٣س + ٩$

ب) $\frac{ص + ٢}{٢ ص^{٢} + ١٤ ص} \times \frac{ص^{٢} - ٤٩}{ص^{٢} - ص - ٦}$

$= \frac{(ص + ٢)}{٢ص(ص + ٧)} \times \frac{(ص - ٧)(ص + ٧)}{(ص - ٣)(ص + ٢)}$

$= \frac{١}{٢ص} \times \frac{ص - ٧}{ص - ٣} = \frac{ص - ٧}{٢ص(ص - ٣)}$

اِنتبِه

$\frac{س + ٣}{١} = س + ٣$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{س^{٣}}{ص^{٢}} \times \frac{٥ ص}{س^{٢}}$

$= \frac{٥ س^{٣} ص}{ص^{٢} س^{٢}} = \frac{٥س}{ص}$

ب) $\frac{٣ ص}{ص - ٢} \times \frac{٣ ص - ٦}{ص^{٢}}$

$= \frac{٣ص \times ٣(ص - ٢)}{ص^{٢} \times (ص - ٢)}$

$= \frac{٩}{ص}$

ج) $\frac{م - ١}{م + ٢} \times \frac{٤ م + ٨}{١ - م^{٢}}$

$= \frac{(م - ١) \times ٤(م + ٢)}{(م + ٢) \times (١ - م)(١ + م)}$

$= \frac{٤}{١ + م}$

د) $\frac{١}{٦ - س} \times \frac{س^{٢} - ٣٦}{س + ٦}$

$= \frac{(س + ٦)(س - ٦)}{-(س - ٦)(س + ٦)}$

$= -١$

هـ) $\frac{٣}{ص - ٥} \times (ص^{٣} - ٢٥ ص)$

$= \frac{٣ ص (ص^{٢} - ٢٥)}{ص - ٥}$

$= \frac{٣ ص \times (ص - ٥)(ص + ٥)}{ص - ٥} = ٣ ص (ص + ٥)$

و) $\frac{١}{س^{٢} - ٢ س + ١} \times \frac{س^{٢} - ٦ س + ٥}{س - ٥}$

$= \frac{(س - ١)(س - ٥)}{(س - ١)^{٢} \times (س - ٥)}$

$= \frac{١}{(س - ١)}$

ز) $\frac{٧ س^{٢} - ٢٨ س}{٢ س^{٢} - ٥ س - ١٢} \times \frac{٢ س + ٣}{١٤ س^{٣}}$

$= \frac{٧ س (س - ٤) \times (٢ س + ٣)}{(٢ س + ٣)(س - ٤) \times ١٤ س^{٣}}$

$= \frac{١}{٢ س^{٢}}$

ح) $\frac{س^{٣} - ٦٤}{س^{٢} + ٤ س + ١٦} \times \frac{٥ س}{س^{٢} - ١٦}$

$= \frac{(س - ٤)(س^{٢} + ٤ س + ١٦) \times ٥ س}{(س^{٢} + ٤ س + ١٦) \times (س - ٤)(س + ٤)}$

$= \frac{٥ س}{س + ٤}$

٣ - ٣ قسمة الحدوديات النسبية
Dividing Rational Expressions

سوف تتعلّم : قسمة الحدوديات النسبية .

العبارات والمفردات :

قسمة	Dividing

حُلّ وناقِش

أكمِل ما يلي :

١ $\frac{٨}{٢١} \div \frac{٤}{٣}$

$= \frac{٨}{٢١} \times \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٨ \times ٣}{٢١ \times ٤}$

$= \frac{٢}{٧}$

٢ $\frac{٨ س^{٢}}{٢١ ص} \div \frac{٤ س}{٣ ص}$

$= \frac{٨ س^{٢}}{٢١ ص} \times \frac{٣ ص}{٤ س}$

$= \frac{٨ س^{٢} \times ٣ ص}{٢١ ص \times ٤ س}$

$= \frac{٢ س}{٧}$

عند قسمة حدودية نسبية على أخرى :

١ نبدأ بضرب الحدودية النسبية الأولى في المعكوس الضربي للحدودية النسبية الثانية .

٢ نوجِد ناتج الضرب في أبسط صورة (كما في درس ضرب الحدوديات النسبية) .

إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ حدوديتَين نسبيتَين حيث جـ $\neq$ ٠ ،

فإنّ : $\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د}$

$= \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ}$

$= \frac{أ د}{ب جـ}$

تذكَّر

المعكوس الضربي للحدودية النسبية $\frac{جـ}{د}$ هو $\frac{د}{جـ}$ ، جـ $\neq$ ٠

مثال (١) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{١٤}{س} \div \frac{٧}{س}$

الحلّ :

$$\frac{١٤}{س} \div \frac{٧}{س} = \frac{١٤}{س} \times \frac{س}{٧}$$

$$= \frac{١٤^{٢} \times س^{١}}{س^{١} \times ٧^{١}}$$

$$= ٢$$

(ب) $\frac{م + ٣}{م - ٢} \div (م + ٣)$

الحلّ :

$$\frac{م + ٣}{م - ٢} \div (م + ٣) = \frac{م + ٣}{م - ٢} \times \frac{١}{م + ٣}$$

$$= \frac{١ \times (م + ٣^{١})}{(م - ٢)(م + ٣^{١})}$$

$$= \frac{١}{(م - ٢)}$$

انتبه

المعكوس الضربي للحدودية م هو $\frac{١}{م}$ ، م ≠ ٠

مثال (٢) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{س - ١}{س + ٤} \div \frac{س + ٣}{س + ٤}$

الحلّ :

$$\frac{س - ١}{س + ٤} \div \frac{س + ٣}{س + ٤} = \frac{س - ١}{س + ٤} \times \frac{س + ٤}{س + ٣}$$

$$= \frac{(س - ١)(س + ٤^{١})}{(س + ٤^{١})(س + ٣)}$$

$$= \frac{س - ١}{س + ٣}$$

(ب) $\frac{٥م + ١٠}{م - ٣} \div \frac{م + ٢}{م - ٣}$

الحلّ :

$$\frac{٥م + ١٠}{م - ٣} \div \frac{م + ٢}{م - ٣} = \frac{٥م + ١٠}{م - ٣} \times \frac{م - ٣}{م + ٢}$$

$$= \frac{٥(م + ٢^{١})(م - ٣^{١})}{(م + ٢^{١})(م - ٣^{١})}$$

$$= ٥$$

(ج) $\frac{ن^{٣} - ١}{٢ن^{٢} + ن - ٣} \div \frac{ن - ١}{٤ن + ٦}$

الحلّ :

$$\frac{ن^{٣} - ١}{٢ن^{٢} + ن - ٣} \div \frac{ن - ١}{٤ن + ٦} = \frac{ن^{٣} - ١}{٢ن^{٢} + ن - ٣} \times \frac{٤ن + ٦}{ن - ١}$$

$$= \frac{(ن^{٣} - ١)(٤ن + ٦)}{(٢ن^{٢} + ن - ٣)(ن - ١)}$$

$$= \frac{(ن - ١^{١})(ن^{٢} + ن + ١) \times ٢(٢ن + ٣^{١})}{(٢ن + ٣^{١})(ن - ١^{١})(ن - ١)}$$

$$= \frac{٢(ن^{٢} + ن + ١)}{(ن - ١)}$$

انتبه

$ن^{٢} + ن + ١$

لا يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب عاملَين.

دورك الآن

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{٤ س^{٣} - ٤ س}{س + ١} \div (س - ١)$

$= \frac{٤ س (س^{٢} - ١)}{(س + ١)} \times \frac{١}{(س - ١)}$

$= \frac{٤ س (س - ١)(س + ١)}{(س + ١)(س - ١)} = ٤ س$

ب) $\frac{م^{٢} + ١١ م + ١٨}{م^{٢} - ٨ م + ٧} \div \frac{م + ٢}{م - ٧}$

$= \frac{(م + ٩)(م + ٢)}{(م - ١)(م - ٧)} \times \frac{(م - ٧)}{(م + ٢)}$

$= \frac{م + ٩}{م - ١}$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{٣ م}{م - ١} \div \frac{٦ م}{م - ١}$

$= \frac{٣ م}{م - ١} \times \frac{م - ١}{٦ م}$

$= \frac{١}{١} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

ب) $\frac{٢ س}{٢ س^{٢} + ٥ س - ٣} \div \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٩}$

$= \frac{٢ س}{(٢ س - ١)(س + ٣)} \times \frac{(س + ٣)(س - ٣)}{(س - ٣)}$

$= \frac{٢ س}{٢ س - ١}$

ج) $\frac{٣ س + ٩}{س} \div (س + ٣)$

$= \frac{٣(س + ٣)}{س} \times \frac{١}{(س + ٣)}$

$= \frac{٣}{س}$

د) $\frac{٥ س^{٢} + ١٠ س - ١٥}{س^{٢} + ٦ س - ٧} \div \frac{س^{٢} - ١٤ س + ٤٩}{س^{٢} - ٤٩}$

$= \frac{٥(س^{٢} + ٢ س - ٣)}{(س^{٢} + ٦ س - ٧)} \times \frac{(س^{٢} - ٤٩)}{(س^{٢} - ١٤ س + ٤٩)}$

$= \frac{٥(س + ٣)(س - ١)}{(س + ٧)(س - ١)} \times \frac{(س + ٧)(س - ٧)}{(س - ٧)^{٢}}$

$= \frac{٥(س + ٣)}{(س - ٧)}$

هـ) $\frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٢} - ٥ س - ٢٤} \div \frac{س^{٢} - ٣ س + ٩}{٢ س - ١٦}$

$= \frac{(س + ٣)(س^{٢} - ٣ س + ٩)}{(س - ٨)(س + ٣)} \times \frac{٢(س - ٨)}{(س^{٢} - ٣ س + ٩)}$

$= \frac{١}{١} \times \frac{٢}{١} = ٢$

٢ أوجِد ناتج قسمة $\frac{س^{٢} + ٣ س + ٢}{٤ س}$ على (٥ $س^{٢}$ + ٥ س) في أبسط صورة .

$$\frac{س^{٢} + ٣ س + ٢}{٤ س} \div (٥ س^{٢} + ٥ س)$$

$$= \frac{(س + ٢)(س + ١)}{٤ س} \times \frac{١}{٥ س (س + ١)} = \frac{س + ٢}{٢٠ س}$$

٣ إذا كانت م = $\frac{س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + س - ٢}$ ، ن = $\frac{س^{٢} - ٢ س + ١}{س^{٢} + ٤ س - ٥}$ ، فأوجِد :

(أ) م × ن

$$\frac{س(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ١)} \times \frac{(س - ١)^{٢}}{(س - ١)(س + ٥)}$$

$$= س \times \frac{١}{س + ٥} = \frac{س}{س + ٥}$$

(ب) م ÷ ن

$$\frac{س(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ١)} \div \frac{(س - ١)^{٢}}{(س - ١)(س + ٥)}$$

$$\frac{س(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ١)} \times \frac{(س - ١)(س + ٥)}{(س - ١)^{٢}} = \frac{س(س + ٥)}{(س - ١)^{٢}}$$

مهارات تفكير عليا :

٤ أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - س - ٦} \times \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٢ س + ٤} \div \frac{س^{٢} + ٦ س + ٩}{٣ س + ٩}$$

$$\frac{(س + ٢)(س^{٢} - ٢ س + ٤)}{(س - ٣)(س + ٢)} \times \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س^{٢} - ٢ س + ٤)} \div \frac{(س + ٣)^{٢}}{٣(س + ٣)}$$

$$\frac{(س + ٣)}{١} \times \frac{٣}{(س + ٣)} = ٣$$

٣ - ٤ جمع الحدوديات النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

سوف تتعلّم : جمع الحدوديات النسبية وطرحها.

العبارات والمفردات :

جمع	Adding	طرح	Subtracting

حُلّ وناقِش



لدينا خزّان ماء يمكن تعبئته باستخدام أنبوبَين :

- الأنبوب الأوّل يملأ $\frac{٣}{٧ س}$ من سعة الخزّان في دقيقة واحدة .
- الأنبوب الثاني يملأ $\frac{٢}{٧ س}$ من سعة الخزّان في دقيقة واحدة .

ما كمّية الماء التي يمكن تعبئتها في دقيقة واحدة عند تشغيل الأنبوبَين معًا ؟

كمّية الماء التي يمكن تعبئتها في دقيقة واحدة للأنبوبَين معًا

$= \frac{٣}{٧ س} + \frac{٢}{٧ س} = \frac{٣ + ٢}{٧ س} = \frac{٥}{٧ س}$ من سعة الخزّان

أوّلًا : جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة

جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة يشبه جمع الأعداد النسبية ذات المقامات الموحَّدة .

إذا كانت $\frac{أ}{جـ}$ ، $\frac{ب}{جـ}$ حدوديتَين نسبيتَين ، فإنّ : $\frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{جـ} = \frac{أ + ب}{جـ}$

دورك الآن (١)

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٣}{س + ٥} + \frac{٤}{س + ٥}$

$= \frac{٣ + ٤}{س + ٥}$

$= \frac{٧}{س + ٥}$

(ب) $\frac{ص}{ص - ٢} + \frac{٣ ص}{ص - ٢}$

$= \frac{ص + ٣ ص}{ص - ٢}$

$= \frac{٤ ص}{ص - ٢}$

(ج) $\frac{٥ ن}{ن + ١} + \frac{٥}{ن + ١}$

$= \frac{٥ ن + ٥}{ن + ١}$

$= \frac{(ن + ١) ٥}{(ن + ١)} = ٥$

ثانيًا : جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة

لجمع الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة :

١ أوجِد المضاعَف المشترَك الأصغر للمقامات (م . م . أ) .

٢ أُكتب الحدوديات النسبية بعد توحيد مقاماتها .

٣ اِجمع الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة .

٤ ضَع الناتج في أبسط صورة .

- لاحِظ لإيجاد م . م . أ (المضاعَف المشترَك الأصغر) للعددَين ٨ ، ١٢ ، نتّبع ما يلي :

٨ = ٢ × ٢ × ٢

١٢ = ٢ × ٢ × ٣

∴ م . م . أ للعددَين = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ = ٢٤

- وكذلك لإيجاد م . م . أ للحدَّين ٦ س ، ٤ س ، نتّبع الطريقة السابقة نفسها :

٦س = ٢ × ٣ × س

٤س = ٢ × ٢ × س

∴ م . م . أ للحدَّين = ٢ × ٢ × ٣ × س = ١٢ س

- وأيضًا لإيجاد م . م . أ للحدوديتَين (س٢ - ٤) ، (س٢ - ٥ س + ٦)

س٢ - ٤ = (س - ٢) (س + ٢)

س٢ - ٥ س + ٦ = (س - ٢) (س - ٣)

∴ م . م . أ للحدوديتَين = (س - ٢) (س + ٢) (س - ٣)

دورك الآن (٢)

أوجِد م . م . أ في كلّ ممّا يلي :

	الحدوديات	م . م . أ
١	س ، ص	س ص
٢	٢ أ ، ٦ ب	٦ أ ب
٣	٣ ص ، ٢ ص٢	٦ ص٢
٤	ص ، (ص - ٥)	ص (ص - ٥)
٥	(س - ١) ، (س - ٢)	(س - ١) (س - ٢)

	الحدوديات	م . م . أ
٦	$(٤ س^{٢} - ١)$ ، $(٢ س - ١)$	$(٢ س - ١)(٢ س + ١)$
٧	$(ص - ٣)$ ، $(-٦ + ٢ص)$	$٢(ص - ٣)$
٨	$(ص - ٢)^{٢}$ ، $(ص - ٢)(ص + ٢)$	$(ص - ٢)^{٢}(ص + ٢)$
٩	$(س^{٣} - ١)$ ، $(س - ١)$	$(س - ١)(س^{٢} + س + ١)$
١٠	$(س^{٢} - ٦ س + ٩)$ ، $(س^{٢} - ٩)$	$(س - ٣)^{٢}(س + ٣)$

مثال (١) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $\frac{١}{٦ س^{٢}} + \frac{٣}{٤ س}$

الحلّ :

$\frac{١}{٦ س^{٢}} + \frac{٣}{٤ س}$ (م . م . أ للمقامات هو $١٢ س^{٢}$)

$= \frac{١ \times ٢}{٦ س^{٢} \times ٢} + \frac{٣ \times ٣ س}{٤ س \times ٣ س}$

$= \frac{٢}{١٢ س^{٢}} + \frac{٩ س}{١٢ س^{٢}} = \frac{٢ + ٩ س}{١٢ س^{٢}}$

مثال (٢) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $\frac{٢}{ب - ٢} + \frac{ب}{ب + ٣}$

الحلّ :

$\frac{٢}{ب - ٢} + \frac{ب}{ب + ٣}$ (م . م . أ للمقامات هو $(ب - ٢)(ب + ٣)$)

$= \frac{٢(ب + ٣)}{(ب - ٢)(ب + ٣)} + \frac{ب \times (ب - ٢)}{(ب + ٣)(ب - ٢)}$

$= \frac{٢ ب + ٦}{(ب - ٢)(ب + ٣)} + \frac{ب^{٢} - ٢ ب}{(ب - ٢)(ب + ٣)}$

$= \frac{٢ ب + ٦ + ب^{٢} - ٢ ب}{(ب - ٢)(ب + ٣)}$ اِجمع الحدود المتشابهة

$= \frac{ب^{٢} + ٦}{(ب - ٢)(ب + ٣)}$

اِنتبِه

$٢ ب + (-٢ب) =$ صفر
خاصّية المعكوس الجمعي

مثال (٣) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $\frac{١٢}{س^{٢} - ٤} + \frac{٣}{س + ٢}$

الحلّ :

$$\frac{١٢}{س^{٢} - ٤} + \frac{٣}{س + ٢}$$

$$= \frac{١٢}{(س - ٢)(س + ٢)} + \frac{٣}{س + ٢}$$ (م . م . أ للمقامات هو (س + ٢)(س - ٢))

$$= \frac{١٢}{(س - ٢)(س + ٢)} + \frac{٣(س - ٢)}{(س + ٢)(س - ٢)}$$

$$= \frac{١٢ + ٣س - ٦}{(س - ٢)(س + ٢)}$$ اِجمع الحدود المتشابهة

$$= \frac{٣س + ٦}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \frac{٣(\cancel{س + ٢}^{١})}{(س - ٢)(\cancel{س + ٢}^{١})}$$

$$= \frac{٣}{س - ٢}$$

دورك الآن (٣)

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{٤}{س^{٢} + ٤س + ٣} + \frac{٣}{س + ١}$$

$$= \frac{٤}{(س + ١)(س + ٣)} + \frac{٣}{(س + ١)}$$

$$= \frac{٤}{(س + ١)(س + ٣)} + \frac{٣ \times (س + ٣)}{(س + ١) \times (س + ٣)}$$ (م . م . أ للمقامات هو (س + ١)(س + ٣))

$$= \frac{٤ + ٣س + ٩}{(س + ١)(س + ٣)}$$

$$= \frac{٣س + ١٣}{(س + ١)(س + ٣)}$$

دورك الآن (٤)

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{س + ٣}{س^{٢} - ٩} + \frac{٢ س + ٤}{س^{٢} - س - ٦}$$

$$= \frac{(\quad)}{(\quad)(\quad)} + \frac{٢(\quad)}{(\quad)(\quad)}$$

$$= \frac{\quad}{\quad} = \frac{٢}{\quad} + \frac{١}{\quad}$$

اِنتبِه

يمكنك تبسيط الحدودية النسبية قبل البدء بعملية الجمع .

طرح الحدوديات النسبية

أوّلًا : طرح الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة

طرح الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة يماثل طرح الأعداد النسبية ذات المقامات الموحَّدة .

فمثلًا ، إذا كانت $\frac{أ}{جـ}$ ، $\frac{ب}{جـ}$ حدوديتَين نسبيتَين ، فإنّ : $\frac{أ}{جـ} - \frac{ب}{جـ} = \frac{أ - ب}{جـ}$

مثال (٤) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٢س}{س + ١} - \frac{س}{س + ١}$

الحلّ :

$$\frac{٢س}{س + ١} - \frac{س}{س + ١}$$

$$= \frac{٢س - (س)}{س + ١}$$

$$= \frac{٢س - س}{س + ١} = \frac{س}{س + ١}$$

(ب) $\frac{٣ص}{ص - ٢} - \frac{ص - ١}{ص - ٢}$

الحلّ :

$$\frac{٣ص}{ص - ٢} - \frac{ص - ١}{ص - ٢}$$

$$= \frac{٣ص - (ص - ١)}{ص - ٢}$$

$$= \frac{٣ص - ص + ١}{ص - ٢} = \frac{٢ص + ١}{ص - ٢}$$

اِنتبِه

المعكوس الجمعي للحدودية ص - ١ هو :

- (ص - ١) = - ص + ١

دورك الآن (٥)

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٣م}{م - ١} - \frac{م}{م - ١}$

$$= \frac{٣م - \quad}{م - ١}$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

(ب) $\frac{٢هـ + ١}{هـ - ١} - \frac{هـ + ٢}{هـ - ١}$

$$= \frac{(٢هـ + ١) - (\quad)}{هـ - ١}$$

$$= \frac{\quad}{هـ - ١}$$

$$= \frac{\quad}{هـ - ١} = \quad$$

ثانيًا : طرح الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة

لطرح حدوديات نسبية ذات مقامات مختلفة ، أعِد كتابة هذه الحدوديات باستخدام المضاعَف المشترَك الأصغر م . م . أ للمقامات، ثمّ اطرح.

(راجِع جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة) .

اِنتبِه

يمكنك تبسيط الحدودية النسبية قبل البدء بعملية الطرح .

مثال (٥) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{س - ١}$

الحلّ :

$\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{س - ١}$

(م . م . أ للمقامَين هو $(س + ١)(س - ١)$)

$= \frac{(س - ١)}{(س + ١)(س - ١)} - \frac{(س + ١)}{(س + ١)(س - ١)}$

$= \frac{(س - ١) - (س + ١)}{(س + ١)(س - ١)}$

$= \frac{س - ١ - س - ١}{(س + ١)(س - ١)}$ اِجمع الحدود المتشابهة

$= \frac{-٢}{(س + ١)(س - ١)}$

(ب) $\frac{ن + ٣}{ن^٢ + ن - ٦} - \frac{ن - ٣}{ن^٢ - ٩}$

الحلّ :

$\frac{ن + ٣}{ن^٢ + ن - ٦} - \frac{ن - ٣}{ن^٢ - ٩}$

$= \frac{(ن + ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٢)} - \frac{(ن - ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

$= \frac{\cancel{(ن + ٣)}^{١}}{(ن + \cancel{٣}^{١})(ن - ٢)} - \frac{\cancel{(ن - ٣)}^{١}}{(ن + ٣)(ن - \cancel{٣}^{١})}$ بسِّط

$= \frac{١}{(ن - ٢)} - \frac{١}{(ن + ٣)}$

(م . م . أ للمقامَين هو $(ن - ٢)(ن + ٣)$)

$= \frac{١ \times (ن + ٣)}{(ن - ٢)(ن + ٣)} - \frac{(ن - ٢) \times ١}{(ن + ٣)(ن - ٢)}$

$= \frac{(ن + ٣) - (ن - ٢)}{(ن - ٢)(ن + ٣)}$

$= \frac{ن + ٣ - ن + ٢}{(ن - ٢)(ن + ٣)}$ اِجمع الحدود المتشابهة

$= \frac{٥}{(ن - ٢)(ن + ٣)}$

دورك الآن (٦)

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٦}{س - ٣} - \frac{٥}{س + ٢}$

(م . م . أ للمقامات هو $(س - ٣)(س + ٢)$)

$= \frac{٦ \times (س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥ \times (س - ٣)}{(س + ٢)(س - ٣)}$

$= \frac{٦س + ١٢}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥س - ١٥}{(س - ٣)(س + ٢)}$

$= \frac{(٦س + ١٢) - (٥س - ١٥)}{(س - ٣)(س + ٢)}$

$= \frac{٦س + ١٢ - ٥س + ١٥}{(س - ٣)(س + ٢)}$

$= \frac{س + ٢٧}{(س - ٣)(س + ٢)}$

(ب) $\frac{٢}{٣م - ١} - \frac{٧}{١ - ٣م}$

$= \frac{٢}{٣م - ١} - \frac{٧}{-(١ - ٣م)}$

$= \frac{٢}{٣م - ١} + \frac{٧}{١ - ٣م}$

$= \frac{٢ + ٧}{٣م - ١}$

$= \frac{٩}{٣م - ١}$

تذكَّر

$أ - ب = - (ب - أ)$

تمارين ذاتية :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

١ $\frac{٥}{٢م} + \frac{٣}{٢م}$

م . م . أ للمقامات $(٢م)$

$= \frac{٥ + ٣}{٢م} = \frac{٨}{٢م} = \frac{٤}{م}$

٢ $\frac{٤}{٦س - ١} - \frac{٣}{١ - ٦س}$

م . م . أ للمقامات $(٦س - ١)$

$= \frac{٤ - ٣}{٦س - ١} = \frac{١}{٦س - ١}$

٣ $\frac{س^٢}{س + ٣} - \frac{٩}{س + ٣}$

م . م . أ للمقامات $(س + ٣)$

$= \frac{س^٢ - ٩}{س + ٣}$

$= \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٣)} = س - ٣$

٤ $\frac{١}{٢ب - ١} - \frac{٣}{١ - ٢ب}$

م . م . أ للمقامات $(٢ب - ١)$

$= \frac{١}{٢ب - ١} - \frac{٣}{-(١ - ٢ب)}$

$= \frac{١ + ٣}{(١ - ٢ب)} = \frac{٤}{(١ - ٢ب)}$

٥ $\frac{٥}{٧ل} - \frac{٣}{٥ل^{٢}}$

م.م.م للمقامات $٣٥ل^{٢}$

$= \frac{٥ \times ٥ل}{٣٥ل^{٢}} - \frac{٧ \times ٣}{٣٥ل^{٢}}$

$= \frac{٢٥ل - ٢١}{٣٥ل^{٢}}$

٦ $\frac{٤}{س} + \frac{٣}{س + ٢}$

م.م.م للمقامات $س(س+٢)$

$= \frac{٤(س+٢)}{س(س+٢)} + \frac{٣ \times س}{س(س+٢)}$

$= \frac{٤س+٨+٣س}{س(س+٢)} = \frac{٧س+٨}{س(س+٢)}$

٧ $\frac{٥}{٢س - ٦} - \frac{١}{٣ - س}$

م.م.م للمقامات $٢(س-٣)$

$= \frac{٥}{٢(س-٣)} - \frac{١}{-(س-٣)}$

$= \frac{٥+٢}{٢(س-٣)} = \frac{٧}{٢(س-٣)}$

٨ $\frac{٤}{٣س + ٦} + \frac{٣}{٢س + ٤}$

م.م.م للمقامات $٦(س+٢)$

$= \frac{٤ \times ٢}{٦(س+٢)} + \frac{٣ \times ٣}{٦(س+٢)}$

$= \frac{٨+٩}{٦(س+٢)} = \frac{١٧}{٦(س+٢)}$

٩ $\frac{ص - ٦}{ص^{٢} - ٣ص - ١٨} - \frac{٣}{ص + ٣}$

م.م.م للمقامات $(ص-٦)(ص+٣)$

$= \frac{ص-٦}{(ص-٦)(ص+٣)} - \frac{٣ \times (ص-٦)}{(ص-٦)(ص+٣)}$

$= \frac{ص-٦-(٣ص-١٨)}{(ص-٦)(ص+٣)} = \frac{-٢ص+١٢}{(ص-٦)(ص+٣)}$

$= \frac{-٢(ص-٦)}{(ص-٦)(ص+٣)} = \frac{-٢}{ص+٣}$

١٠ $\frac{س^{٣} + ١}{٣س^{٢} + ٨س + ٥} + \frac{٧س}{٣س^{٢} + ٥س + ٢}$

$= \frac{(س+١)(س^{٢}-س+١)}{(٣س+٥)(س+١)} + \frac{٧س}{(٣س+٥)(س+٢)}$

$= \frac{س^{٢}-س+١}{٣س+٥} + \frac{٧}{س+٢}$

$= \frac{س^{٢}-س+٨}{٣س+٥}$

١١ $\frac{س}{س^{٢} - ٩} - \frac{س}{س^{٢} + ٦س + ٩}$

م.م.م للمقامات $(س+٣)^{٢}(س-٣)$

$= \frac{س(س+٣)}{(س+٣)^{٢}(س-٣)} - \frac{س(س-٣)}{(س+٣)^{٢}(س-٣)}$

$= \frac{س^{٢}+٣س - س^{٢}+٣س}{(س+٣)^{٢}(س-٣)}$

$= \frac{٦س}{(س+٣)^{٢}(س-٣)}$

١٢ $\frac{س}{س + ٣} - \frac{١}{س - ٣} + \frac{٦}{س^{٢} - ٩}$

م.م.م للمقامات $(س+٣)(س-٣)$

$= \frac{س(س-٣)}{(س+٣)(س-٣)} - \frac{س+٣}{(س+٣)(س-٣)} + \frac{٦}{(س+٣)(س-٣)}$

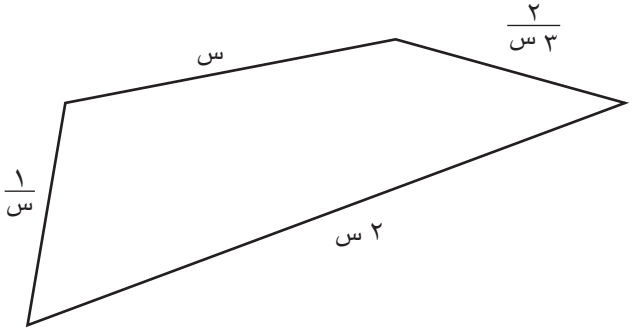
$= \frac{س^{٢}-٣س - س - ٣ + ٦}{(س+٣)(س-٣)}$

$= \frac{س^{٢}-٩}{(س+٣)(س-٣)}$

$= \frac{(س+٣)(س-٣)}{(س+٣)(س-٣)} = ١$

مهارات تفكير عليا :

١٣ أوجِد محيط الشكل الرباعي التالي في أبسط صورة :



$\frac{٢}{س^{٣}} + \frac{١}{س} + س + ٢س = \frac{٣س^{٣}}{١} + \frac{١}{س} + \frac{٢}{س^{٣}}$

∴ م.م.أ للمقامات $س^{٣}$

$\frac{٢}{س^{٣}} + \frac{٣}{س^{٣}} + \frac{٩س^{٤}}{س^{٣}} = \frac{٢+٣+٩س^{٤}}{س^{٣}}$

$= \frac{٥+٩س^{٤}}{س^{٣}}$

٣ - ٥ المسافة بين نقطتَين في المستوى الإحداثي

Distance Between Two Points In a Plane

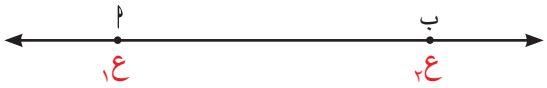
سوف تتعلّم : إيجاد المسافة (البعد) بين نقطتَين في المستوى الإحداثي .

العبارات والمفردات :

المسافة	Distance	المستوى	Plane

اِستكشِف

١ **المسافة (البعد) بين نقطتَين على خطّ الأعداد هي :** القيمة المطلَقة للفرق بين إحداثيَّي هاتَين النقطتَين .



$$أ ب = |ع_٢ - ع_١|$$

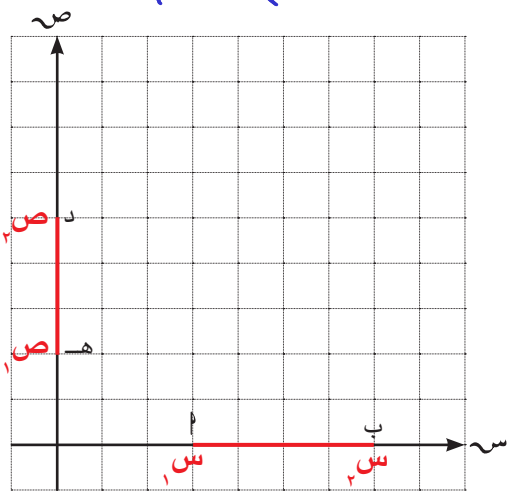
- $أ ب$: طول $\overline{أ ب}$
- $ع_٢$: إحداثي النقطة ب
- $ع_١$: إحداثي النقطة أ

٢ **البعد بين نقطتَين على محورَي الإحداثيات :**

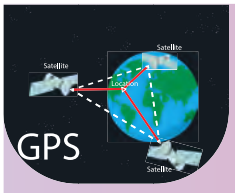
من الشكل المرسوم ، أكمِل ما يلي :

$أ ب = |س_٢ - س_١|$

$هـ د = |ص_٢ - ص_١|$



معلومة مفيدة :



في الكويت ومعظم دول العالم ، تعتمد غرف العمليات المركزية (مثل الإسعاف والطوارئ والشرطة) على أنظمة GPS مدمَجة مع الخرائط الذكية لتحديد موقع البلاغ بدقّة وسرعة .

لاحِظ أنّ

$|ع_٢ - ع_١| = |ع_١ - ع_٢|$

٣ البعد بين النقطتَين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) في المستوى الإحداثي .

من الشكل المقابِل ، أكمِل ما يلي : أ جـ = | س٢ − س١ |

جـ ب = ... | ص٢ − ص١ |

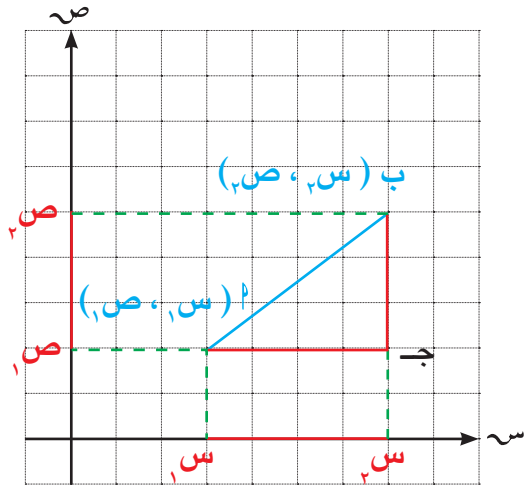
∵ المثلّث أ ب جـ قائم الزاوية في جـ

∴ (أ ب)٢ = ... (أ جـ)٢ + (جـ ب)٢

= (| س٢ − س١ |)٢ + (| ص٢ − ص١ |)٢

= (س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢

أ ب = ... $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$



لاحِظ أنّ

| س٢ | = | س |٢ = س٢

أي أنّ :

البعد بين النقطتَين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) هو :

أ ب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

مثال (١) :

أوجِد البعد بين النقطتَين أ (١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٦)

الحلّ :

أ ب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

= $\sqrt{(٥ - ١)^2 + (٦ - ٣)^2}$

= $\sqrt{(٤)^2 + (٣)^2}$

= $\sqrt{١٦ + ٩}$

= $\sqrt{٢٥}$

= ٥ وحدات طول

لاحِظ أنّ

(س٢ − س١)٢ = (س١ − س٢)٢

دورك الآن (١)

إذا كانت أ (٢ ، ٦) ، ب (٤ ، ٩) ، فأوجِد أ ب .

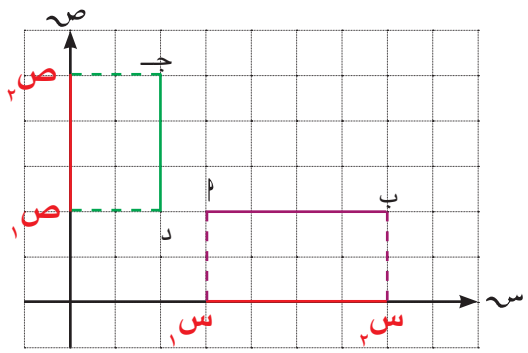
أ ب = $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

أ ب = $\sqrt{(\ldots 4 \ldots - \ldots 2 \ldots)^2 + (\ldots 9 \ldots - \ldots 6 \ldots)^2}$

أ ب = $\sqrt{(\ldots 2 \ldots)^2 + (\ldots 3 \ldots)^2}$

أ ب = $\sqrt{\ldots 4 \ldots + \ldots 9 \ldots}$

أ ب = $\sqrt{\ldots 13 \ldots}$ وحدة طول



من الرسم المقابِل ، نلاحظ أن:

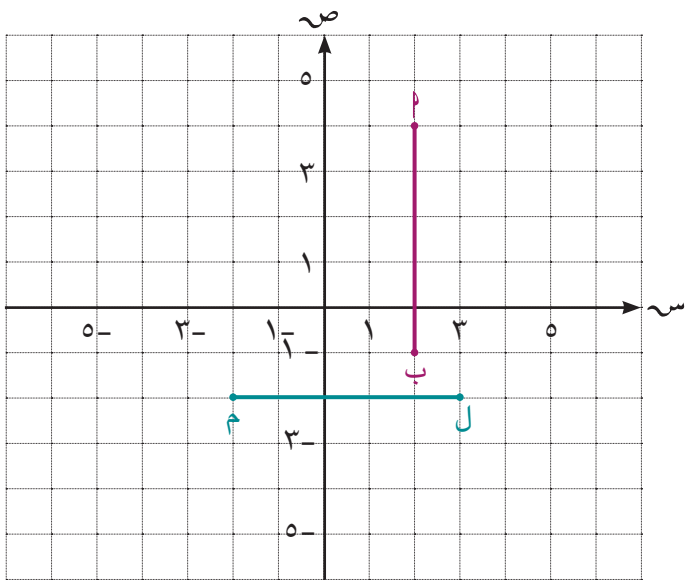
إذا كانت القطعة المستقيمة موازِية لأحد المحاور ، يمكن إيجاد طولها دون استخدام القانون العامّ .

$\overline{\text{أ ب}}$ موازِية للمحور السيني : أ ب = | س٢ − س١ |

$\overline{\text{جـ د}}$ موازِية للمحور الصادي : جـ د = | ص٢ − ص١ |

مثال (٢) :

اِستخدِم الشكل المقابِل لإيجاد النقطتَين أ ، ب ،
ثمّ أوجِد البعد بين النقطتَين أ ، ب .
ماذا تلاحظ ؟



الحلّ :

أ (٢ ، ٤) ، ب (٢ ، −١)

لاحِظ أنّ الإحداثي السيني متساوٍ

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ موازِية للمحور الصادي

إذًا أ ب = | ص٢ − ص١ |

= | −١ − ٤ |

= | −٥ |

= ٥ وحدات طول

دورك الآن (٢)

اِستخدِم الشكل في المثال (٢) لإيجاد البعد بين النقطتَين ل ، م . ماذا تلاحظ ؟

ألاحظ أن ل م موازى لمحور السينات

∴ ل م = | س٢ − س١ | = | ١ − (−٣) | = ٥ وحدات طول.

عبِّر عن فهمك

قام مشاري بحلّ مثال (٢) باستخدام البعد بين نقطتَين كما في المثال (١)، فهل حلّه صحيح؟

فسِّر ذلك. نعم لانه م ب = √((س٢ − س١)² + (ص٢ − ص١)²) = √(صفر + (ص٢ − ص١)²) = | ص٢ − ص١ | = | ٣ − ١ | = ٢

دورك الآن (٣)

أوجِد البعد بين النقطتَين الآتيتَين :

(أ) أ (٧ ، −٦) ، ب (٧ ، −٢)

أ ب = √((٧ − ٧)² + (−٢ + ٦)²)

= √(٠ + ٤²) = √١٦ = ٤

(ب) ل (٠ ، −٤) ، ن (٣ ، ٠)

ل ن = √((٠ − ٣)² + (−٤ − ٠)²)

= √(٩ + ١٦) = √٢٥ = ٥

مثال (٣) :

المثلّث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٨ ، ٥) ، ب (٤ ، ١) ، جـ (١ ، ٤)

- بيِّن نوع المثلّث بالنسبة إلى أضلاعه ؟
- بيِّن نوع المثلّث بالنسبة إلى زواياه ؟

الحلّ :

أ جـ = √((س٢ − س١)² + (ص٢ − ص١)²)

أ جـ = √((١ − ٨)² + (٤ − ٥)²)

أ جـ = √((−٧)² + (١)²)

أ جـ = √(٤٩ + ١)

أ جـ = √٥٠ وحدة طول

تذكَّر

أيّ مثلّث أ ب جـ ، حيث $\overline{أ جـ}$ هو الضلع الأطول ، يكون المثلّث :

قائم الزاوية إذا كان :

$(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

منفرج الزاوية إذا كان :

$(أ جـ)^2 > (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

حادّ الزوايا إذا كان :

$(أ جـ)^2 < (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

$أ ب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$أ ب = \sqrt{(٨ - ٤)^2 + (٥ - ١)^2}$

$أ ب = \sqrt{(-٤)^2 + (-٤)^2}$

$أ ب = \sqrt{١٦ + ١٦}$

$أ ب = \sqrt{٣٢}$ وحدة طول

$ب جـ = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$ب جـ = \sqrt{(٤ - ١)^2 + (١ - ٤)^2}$

$ب جـ = \sqrt{(٣)^2 + (-٣)^2}$

$ب جـ = \sqrt{٩ + ٩}$

$ب جـ = \sqrt{١٨}$ وحدة طول

∴ نوع المثلّث أ ب جـ بالنسبة إلى أضلاعه هو مثلّث مختلف الأضلاع

$(أ جـ)^2 = (\sqrt{٥٠})^2 = ٥٠$

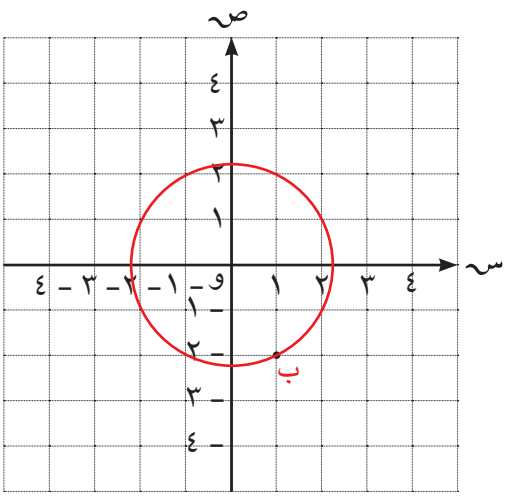
$(أ ب)^2 + (ب جـ)^2 = (\sqrt{٣٢})^2 + (\sqrt{١٨})^2 = ٣٢ + ١٨ = ٥٠$

∵ $(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ (عكس نظرية فيثاغورث)

∴ نوع المثلّث أ ب جـ بالنسبة إلى زواياه هو مثلّث قائم الزاوية .

دورك الآن (٤)

لتكن ب نقطة تنتمي إلى دائرة مركزها نقطة الأصل و .
أوجِد طول نصف قطر الدائرة .



ب و تمثّل نصف قطر الدائرة

إحداثيا النقطتَين ب ، و هما :

ب (١ ، -٢) ، و (٠ ، ٠)

ب و = $\sqrt{(١ - ٠)^2 + (-٢ - ٠)^2}$

= $\sqrt{١ + (-٢)^2}$

= $\sqrt{١ + ٤}$

= $\sqrt{٥}$ وحدات طول

تمارين ذاتية :

١ أوجِد البعد بين النقطتَين أ (٦ ، ٣) ، ب (٩ ، ٧) .

أب = $\sqrt{(٩-٦)^{٢}+(٧-٣)^{٢}}$

= $\sqrt{٣^{٢}+٤^{٢}}$

= $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول .

٢ إذا كانت أ (١٠ ، -٥) ، ب (٤ ، ٣) ، فأوجِد طول $\overline{أب}$.

أب = $\sqrt{(٤-١٠)^{٢}+(٣-(-٥))^{٢}}$

= $\sqrt{(-٦)^{٢}+٨^{٢}}$

= $\sqrt{٣٦+٦٤}$

= $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ وحدات طول .

٣ أوجِد البعد بين النقطتَين ع (-٣ ، ٢) ، ك (-١ ، ٢) .

ع ك = $\sqrt{(-١+٣)^{٢}+(٢-٢)^{٢}}$

= $\sqrt{٢^{٢}}$

= ٢ وحدة طول .

٤ أوجِد البعد بين النقطتَين ل (٤ ، ٠) ، ن (٠ ، -٢) .

ل ن = $\sqrt{(٠-٤)^{٢}+(-٢+٠)^{٢}}$

= $\sqrt{٤^{٢}+٢^{٢}}$

= $\sqrt{١٦+٤}$

= $\sqrt{٢٠}$ = $\sqrt{٤\times٥}$ = ٢$\sqrt{٥}$ وحدة طول .

٥ $\overline{ط\,ل}$ قطر في دائرة ، حيث ط (٠ ، ٢) ، ل (٨ ، -٤) . أوجِد طول نصف قطر الدائرة .

طل = $\sqrt{(-٨-٠)^{٢}+(٤+٢)^{٢}}$

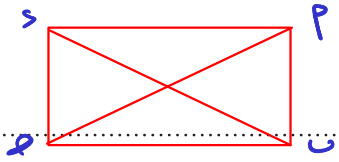
= $\sqrt{(-٨)^{٢}+٦^{٢}}$

= $\sqrt{٦٤+٣٦}$

= $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ وحدات طول .

∴ نصف قطر الدائرة = ١٠ ÷ ٢ = ٥ وحدات طول .

٦ أوجِد طول قطر المستطيل أ ب جـ د الذي إحداثيات رؤوسه هي :
أ (٢ ، ٦) ، ب (٨ ، ٦) ، جـ (-١ ، ٨) ، د (-١ ، ٢)



نوجد أ ه أو ب د

∴ أ ه = $\sqrt{(٢-٨)^{٢}+(-١-٦)^{٢}}$

= $\sqrt{(-٧)^{٢}+٦^{٢}}$

= $\sqrt{٤٩+٣٦}$ = $\sqrt{٨٥}$ وحدة طول

٧ المثلّث ل م ن إحداثيات رؤوسه هي :
ل (٢ ، ٥) ، م (٤ ، -١) ، ن (٦ ، ٥) .

(أ) بيِّن نوع المثلّث بالنسبة إلى أضلاعه .

(ب) بيِّن نوع المثلّث بالنسبة إلى زواياه .

ل م = $\sqrt{(٤-٢)^{٢}+(-١-٥)^{٢}}$ = $\sqrt{٤+(-٦)^{٢}}$ = $\sqrt{٤+٣٦}$ = $\sqrt{٤٠}$ = $٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

م ن = $\sqrt{(٦-٤)^{٢}+(٥-(-١))^{٢}}$ = $\sqrt{٢^{٢}+(٦)^{٢}}$ = $\sqrt{٤+٣٦}$ = $\sqrt{٤٠}$ = $٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

ل ن = $\sqrt{(٦-٢)^{٢}+(٥-٥)^{٢}}$ = $\sqrt{(٤)^{٢}+٠}$ = ١٤ = ٤ وحدات طول

∵ ل م = م ن ∴ المثلث متطابق الساقين

∵ (ل م)^{٢} < (م ن)^{٢} + (ل ن)^{٢} ∴ المثلث حاد الزوايا .

مهارات تفكير عليا :

٨ هل تمثّل النقاط أ (٨ ، ٥) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٢ ، - ٣) رؤوس مثلّث ؟

أ ب = $\sqrt{(٥-٨)^٢ + (١-٥)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول

ب جـ = $\sqrt{(٢-٥)^٢ + (٣+١)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

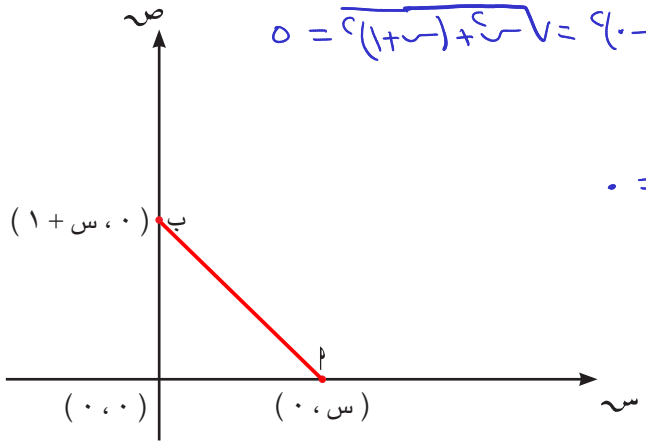
أ جـ = $\sqrt{(٣+٥)^٢ + (٢-٨)^٢}$ = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ وحدات طول

∴ أ ب + ب جـ = أ جـ ∴ النقط أ ، ب ، جـ تمثل رؤوس مثلث

٩ اِختر الإجابة الصحيحة .

في المستوى الإحداثي ، إذا كان أ ب = ٥ وحدات طول

فإنّ قيمة س هي :



أ ب = $\sqrt{(س-٠)^٢ + (١+٠-س)^٢}$ = $\sqrt{س^٢ + (١+س)^٢}$ = ٥

(أ) ١

(ب) ٢

(ج) ٣

(د) ٤

∴ $س^٢ + (١+س)^٢$ = ٢٥

$س^٢ + س^٢ + ٢س + ١$ - ٢٥ = ٠

$٢س^٢ + ٢س$ - ٢٤ = ٠

$س^٢ + س$ - ١٢ = ٠

(س + ٤)(س - ٣) = ٠

∴ س = - ٤ أو س = ٣ ✓

مرفوض لأن الإحداثيات في الربع الأول

ملحوظة : يكون أ ب جـ مثلثًا عندما مجموع أصغر ضلعين > الضلع الثالث

٦ - ٣

إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي

Midpoint Coordinates in a Plane

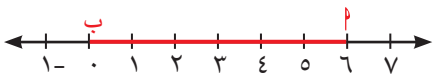
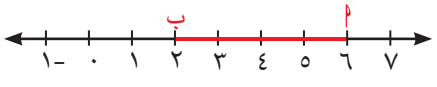
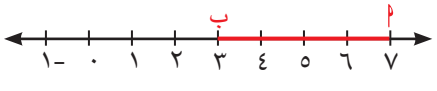
سوف تتعلّم : إيجاد إحداثيَّي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

العبارات والمفردات :

منتصف قطعة مستقيمة	Midpoint of a Segment
إحداثيات	Coordinates

اِستكشِف (١)

في الجدول التالي، أكمِل ما يلي :

حدّد جـ منتصف $\overline{أب}$	إحداثي أ	إحداثي ب	إحداثي أ + إحداثي ب	إحداثي جـ
	٦	٠	٦ + ٠	٣
	٦	٢	٦ + ٢	٤
	٧	٣	٧ + ٣	٥

قارِن إحداثي جـ بمجموع إحداثيَّي النقطتَين أ ، ب

ماذا تلاحظ ؟ نلاحظ أن إحداثي جـ يساوي نصف مجموع إحداثيي النقطتين أ، ب

أي أنّ :

إذا كانت $س_١$ إحداثي النقطة أ ، $س_٢$ إحداثي النقطة ب ،

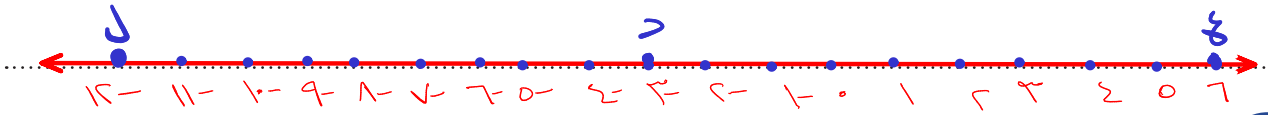
حيث أ ، ب نقطتان على خطّ الأعداد وكانت جـ نقطة منتصف $\overline{أب}$ ، فإنّ :

إحداثي النقطة جـ هو $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$.

دورك الآن (١)

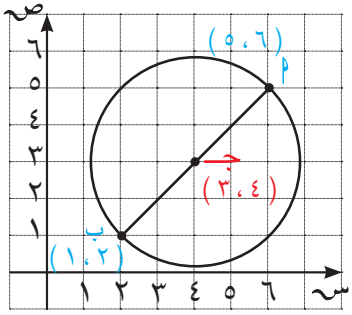
أوجِد إحداثي النقطة د منتصف $\overline{ل ع}$ على خطّ الأعداد ، إذا كان إحداثي النقطة ل هو - ١٢ ، وإحداثي النقطة ع هو ٦

د = $\frac{س_{ل} + س_{ع}}{٢}$ = $\frac{٦ - ١٢}{٢}$ = $\frac{-٦}{٢}$ = - ٣



اِستكشِف (٢)

في الشكل المقابِل، دائرة مركزها جـ ، $\overline{أ ب}$ قطر فيها .



أكمِل ما يلي :

إحداثيا النقطة أ (٦ ، ٥) ،

إحداثيا النقطة ب (٢ ، ١)

∵ جـ مركز الدائرة ∴ إحداثيا النقطة جـ (٤ ، ٣)

قارِن الإحداثي السيني في النقطة جـ بمجموع الإحداثي السيني في كلّ من النقطتَين أ ، ب .

قارِن الإحداثي الصادي في النقطة جـ بمجموع الإحداثي الصادي في كلّ من النقطتَين أ ، ب .

تذكَّر

مركز الدائرة هو نقطة المنتصف لأيّ قطر فيها .

ماذا تلاحظ ؟

أ لاحظ أن إحداثي النقطة جـ = $\frac{1}{2}$ مجموع إحداثي السيني ، $\frac{1}{2}$ مجموع الإحداثي الصادي

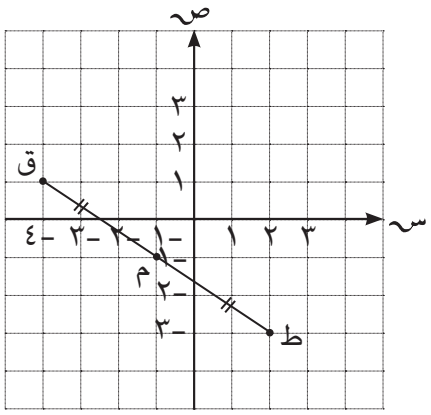
في المستوى الإحداثي إذا كانت أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) ، فإنّ :

النقطة جـ منتصف $\overline{أ ب}$ هي :

جـ $\left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢} \right)$

مثال (١) :

إذا كانت ط (٢ ، -٣) ، ق (-٤ ، ١) ، فأوجِد النقطة م التي تنصّف $\overline{ط\ ق}$.



الحلّ :

إحداثيا نقطة المنتصف م $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

$= \left(\frac{١ + (-٣)}{٢} ، \frac{٢ + (-٤)}{٢} \right)$

$= \left(\frac{(-٢)}{٢} ، \frac{(-٢)}{٢} \right)$

$= (-١ ، -١)$

دورك الآن (٢)

أوجِد النقطة ف منتصف $\overline{ع\ ل}$ في كلّ ممّا يلي :

(أ) ع (٣ ، -٥) ، ل (-٣ ، ١)

ف = $\left(\frac{٣-٣}{٢} ، \frac{-٥+١}{٢} \right)$

ف = $\left(\frac{٠}{٢} ، \frac{-٤}{٢} \right)$

ف = (٠ ، -٢)

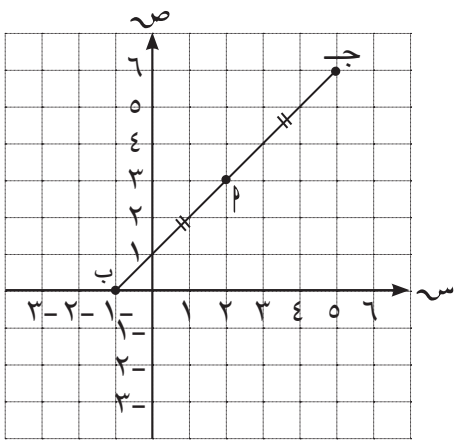
(ب) ع (-٢ ، ٧) ، ل (-١ ، -٤)

ف = $\left(\frac{-٢-١}{٢} ، \frac{٧-٤}{٢} \right)$

ف = $\left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{٣}{٢} \right)$

مثال (٢) :

إذا كانت أ (٢ ، ٣) تنصّف $\overline{ب\ جـ}$ حيث ب (-١ ، ٠) ، جـ ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، فأوجِد النقطة جـ .



الحلّ :

∵ إحداثيا نقطة المنتصف أ $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

∴ $\left(\frac{-١ + س_٢}{٢} ، \frac{٠ + ص_٢}{٢} \right) = (٢ ، ٣)$

$\frac{-١ + س_٢}{٢} = ٢$

$-١ + س_٢ = ٤$

$س_٢ = ٤ + ١ = ٥$

$\frac{٠ + ص_٢}{٢} = ٣$

$٠ + ص_٢ = ٦$

$ص_٢ = ٦$

∴ النقطة جـ (٥ ، ٦)

دورك الآن (٣)

إذا كانت م (-٢ ، -١) نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، -٣) ، فأوجِد النقطة ب .

$$\left(\frac{س_ب + ٢}{٢} ، \frac{ص_ب + ٣-}{٢}\right) = (-٢ ، -١)$$

$$\frac{س_ب + ٢}{٢} = -٢ \quad \therefore$$

$$س_ب + ٢ = -٤ \quad \therefore$$

$$س_ب = -٦$$

$$\frac{ص_ب + ٣-}{٢} = -١ \quad \therefore$$

$$ص_ب + ٣- = -٢ \quad \therefore$$

$$ص_ب = ١$$

$$\therefore ب (-٦ ، ١)$$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد النقطة م منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (-٢ ، ٥) ، ب (٨ ، -٣) .

$$م = \left(\frac{٨ + ٢-}{٢} ، \frac{٣- + ٥}{٢}\right) = \left(\frac{٦}{٢} ، \frac{٢}{٢}\right) = (٣ ، ١)$$

٢ أوجِد النقطة ن منتصف $\overline{جـد}$ حيث جـ (٧ ، -٣) ، د (-٦ ، -٩) .

$$ن = \left(\frac{٧ - ٦}{٢} ، \frac{٣- - ٩}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢} ، \frac{١٢-}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢} ، -٦\right)$$

٣ أوجِد النقطة ع منتصف $\overline{ف ق}$ حيث ف (-١١ ، ٨) ، ق (٤ ، ٨) .

$$ع = \left(\frac{١١- + ٤}{٢} ، \frac{٨ + ٨}{٢}\right) = \left(\frac{٧-}{٢} ، \frac{١٦}{٢}\right) = \left(\frac{٧-}{٢} ، ٨\right)$$

٤ أوجِد النقطة ت منتصف $\overline{ح ز}$ حيث ح (١٧ ، -١٠) ، ز (١٣ ، -٤) .

$$ت = \left(\frac{١٧ + ١٣}{٢} ، \frac{١٠- - ٤}{٢}\right) = \left(\frac{٣٠}{٢} ، \frac{١٤-}{٢}\right) = (١٥ ، -٧)$$

٥ إذا كانت ك (٩ ، ٣) تنصّف $\overline{د ف}$ حيث د (-٣ ، -١) ، فأوجِد النقطة ف .

$(٩ ، ٣) = (\frac{س_ف + س_د}{٢} ، \frac{ص_ف + ص_د}{٢})$

$(٩ ، ٣) = (\frac{س_ف - ٣}{٢} ، \frac{ص_ف - ١}{٢})$

$٩ = \frac{س_ف - ٣}{٢}$ ∴ $س_ف - ٣ = ١٨$ ، $س_ف = ٢١$

$٣ = \frac{ص_ف - ١}{٢}$ ∴ $ص_ف - ١ = ٦$ ∴ $ص_ف = ٧$

∴ ف (٢١ ، ٧)

٦ $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة التي مركزها م حيث أ (٥ ، -١) ، ب (-١ ، ٧) ، أوجِد :

(أ) النقطة م مركز الدائرة .

م منتصف $\overline{أ ب}$ (قطر الدائرة) $= (\frac{س_أ + س_ب}{٢} ، \frac{ص_أ + ص_ب}{٢})$

∴ م $= (\frac{٥ - ١}{٢} ، \frac{-١ + ٧}{٢}) = (٢ ، ٣)$

∴ النقطة م مركز الدائرة هي (٢ ، ٣)

(ب) طول نصف قطر الدائرة .

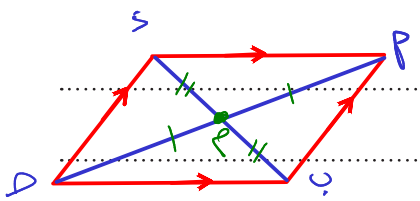
نصف قطر الدائرة $= \frac{١}{٢}$ أ ب

∴ أ ب $= \sqrt{(٥ + ١)^٢ + (-١ - ٧)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

∴ نصف قطر الدائرة $= \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$

مهارات تفكير عليا :

٧ أ ب جـ د متوازي أضلاع إحداثيات رؤوسه هي أ (١ ، ٦) ، ب (٤ ، -١) ، جـ (٠ ، ١) ، د (س ، ص) . أوجِد إحداثيَّي النقطة د .



∴ $(س - ١)^٢ + ص^٢ = ٨$

∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ م ينصف $\overline{أ جـ}$ و ينصف $\overline{ب د}$.

∴ م $= (\frac{١ + ١}{٢} ، \frac{٦ + ٠}{٢}) = (\frac{٢}{٢} ، \frac{٦}{٢}) = (١ ، ٣)$

∴ $(\frac{س_د + ٣}{٢} ، \frac{ص_د + ٤}{٢}) = (١ ، ٣)$

∴ $(\frac{س_د + ١-}{٢} ، \frac{ص_د + ٤}{٢}) = (١ ، ٣)$

$١ = \frac{س_د + ١-}{٢}$ ∴ $س_د + ١- = ٢$ ، $س_د = ٣$

$٣ = \frac{ص_د + ٤}{٢}$ ∴ $ص_د + ٤ = ٦$ ∴ $ص_د = ٢$

∴ د (٣ ، ٢)

تقويم الوحدة التعليمية الثالثة
Unit Three Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

(أ) $\frac{٦ أ^{٢} + ٩}{١٢}$

$= \frac{٣(٢ أ^{٢} + ٣)}{١٢ \; ٤} = \frac{٢ أ^{٢} + ٣}{٤} = \frac{٢ أ^{٢}}{٤} + \frac{٣}{٤} = \frac{١}{٢} أ^{٢} + \frac{٣}{٤}$

(ب) $\frac{٢ س - ٥}{٦ س - ١٥}$

$= \frac{(٢ س - ٥)}{٣(٢ س - ٥)} = \frac{١}{٣}$

(ج) $\frac{٢ س^{٢} + ٢ س}{٣ س^{٢} + ٣ س}$

$= \frac{٢ س (س + ١)}{٣ س (س + ١)} = \frac{٢ س}{٣ س} = \frac{٢}{٣}$

(د) $\frac{٨ - ٢ ب}{ب^{٢} - ١٦}$

$= \frac{-٢(ب - ٤)}{(ب - ٤)(ب + ٤)} = \frac{-٢}{ب + ٤}$

(هـ) $\frac{ل^{٢} - ٦ ل + ٨}{ل^{٢} + ل - ٦}$

$= \frac{(ل - ٢)(ل - ٤)}{(ل - ٢)(ل + ٣)} = \frac{ل - ٤}{ل + ٣}$

(و) $\frac{٢ ر^{٢} + ٩ ر - ٥}{ر^{٢} + ١٠ ر + ٢٥}$

$= \frac{(٢ ر - ١)(ر + ٥)}{(ر + ٥)^{٢}} = \frac{٢ ر - ١}{ر + ٥}$

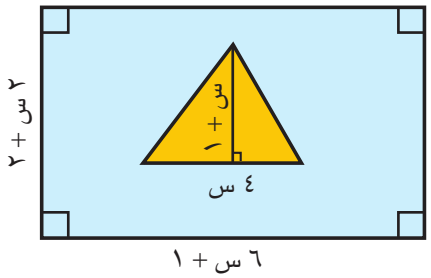
ز) $\frac{٧ص^{٢} - ١٣ص + ٦}{ص^{٢} + ٢ص - ٣}$

$= \frac{(٧ص - ٦)(ص - ١)}{(ص + ٣)(ص - ١)} = \frac{٧ص - ٦}{ص + ٣}$

ح) $\frac{٢٧س^{٣} + ١٢٥}{٣س^{٢} - س - ١٠}$

$= \frac{(٣س + ٥)(٩س^{٢} - ١٥س + ٢٥)}{(٣س + ٥)(س - ٢)} = \frac{٩س^{٢} - ١٥س + ٢٥}{س - ٢}$

٢ **أُكتب نسبة مساحة المنطقة المثلّثة إلى مساحة المنطقة المستطيلة في صورة حدودية نسبية ، وضَعها في أبسط صورة .**



$\frac{١}{٢} \times ٤س \times (س + ١) \div (س + ٢)(٦س + ١)$

$= ٢س(س + ١) \times \frac{١}{(س + ٢)(٦س + ١)}$

$= \frac{س}{٦س + ١}$

٣ **أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة .**

أ) $\frac{٤س + ٤}{س - ٣} \times (س^{٢} - س - ٦)$

$= \frac{٤(س + ١)}{(س - ٣)} \times (س - ٣)(س + ٢)$

$= ٤(س + ١)(س + ٢)$

ب) $\frac{٣س^{٢} + ١٢س}{٢س^{٢} + ٧س - ٤} \times \frac{٦س^{٢} - ١٣س + ٥}{٩س^{٣}}$

$= \frac{٣س(س + ٤)}{(٢س - ١)(س + ٤)} \times \frac{(٢س - ١)(٣س - ٥)}{٩س^{٣}}$

$= \frac{١}{س + ٤} \times \frac{٣س - ٥}{س^{٢}} = \frac{٣س - ٥}{س^{٣} + ٤س^{٢}}$

ج) $\frac{س^{٢} - س ص + ص^{٢}}{س^{٣} + ص^{٣}} \times \frac{س + ص}{س - ص}$

$= \frac{(س^{٢} - س ص + ص^{٢})}{(س + ص)(س^{٢} - س ص + ص^{٢})} \times \frac{س + ص}{س - ص}$

$= ١ \times \frac{١}{س - ص} = \frac{١}{س - ص}$

(د) $\frac{٨ س^{٣}}{س^{٣} - ص^{٣}} \div \frac{٤ س^{٢}}{س^{٢} + س ص + ص^{٢}}$

$= \frac{٨ س^{٣}}{(س - ص)(س^{٢} + س ص + ص^{٢})} \times \frac{(س^{٢} + س ص + ص^{٢})}{٤ س^{٢}}$

$= \frac{٢ س}{س - ص}$

(هـ) $\frac{٥ س^{٢} + ١٠ س - ١٥}{س^{٢} - ٦ س + ٥} \div \frac{٢ س^{٢} + ٧ س + ٣}{٤ س^{٢} - ٨ س - ٥}$

$= \frac{٥(س^{٢} + ٢ س - ٣)}{(س - ٥)(س - ١)} \div \frac{(٢ س + ١)(س + ٣)}{(٢ س - ٥)(س + ١)}$

$= \frac{٥(س - ١)(س + ٣)}{(س - ٥)(س - ١)} \times \frac{(٢ س - ٥)(س + ١)}{(٢ س + ١)(س + ٣)} = \frac{٥(٢ س - ٥)}{س - ٥}$

(و) $\frac{ص^{٢} + ٥ ص + ٦}{ص - ٣} \div \frac{ص^{٢} + ٣ ص + ٢}{ص^{٢} - ٢ ص - ٣}$

$= \frac{(ص + ٢)(ص + ٣)}{ص - ٣} \div \frac{(ص + ٢)(ص + ١)}{(ص - ٣)(ص + ١)}$

$= \frac{(ص + ٢)(ص + ٣)}{(ص - ٣)} \times \frac{(ص - ٣)(ص + ١)}{(ص + ٢)(ص + ١)} = (ص + ٣)$

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة:

(أ) $\frac{٥}{٨ م} + \frac{٣}{٨ م}$

$= \frac{٥ + ٣}{٨ م} = \frac{٨}{٨ م} = \frac{١}{م}$

(ب) $\frac{س}{س + ٦} + \frac{٢}{س + ٣}$

م.م.أ للمقامات هو $(س + ٦)(س + ٣)$

$= \frac{س(س + ٣)}{(س + ٦)(س + ٣)} + \frac{٢(س + ٦)}{(س + ٣)(س + ٦)} = \frac{س^{٢} + ٣ س + ٢ س + ١٢}{(س + ٦)(س + ٣)} = \frac{س^{٢} + ٥ س + ١٢}{(س + ٦)(س + ٣)}$

(ج) $\frac{٢ س - ٤}{س^{٢} - ٤} + \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} + س - ٢}$

$= \frac{٢(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)} + \frac{س(س - ١)}{(س + ٢)(س - ١)}$

$= \frac{٢}{س + ٢} + \frac{س}{س + ٢} = \frac{س + ٢}{س + ٢} = ١$

(د) $\frac{٤}{س + ٣} - \frac{٦}{س - ٢}$

م.م.أ للمقامات $(س + ٣)(س - ٢)$

$= \frac{٤(س - ٢)}{(س + ٣)(س - ٢)} - \frac{٦(س + ٣)}{(س - ٢)(س + ٣)} = \frac{٤ س - ٨ - ٦ س - ١٨}{(س + ٣)(س - ٢)}$

$= \frac{-٢ س - ٢٦}{(س + ٣)(س - ٢)} = \frac{-٢(س + ١٣)}{(س + ٣)(س - ٢)}$

هـ $\frac{٦}{س^٢ + ٣ س + ٢} - \frac{٤}{س + ٢}$

م.م.أ للمقامات $(س+١)(س+٢)$

$\frac{٦}{(س+١)(س+٢)} - \frac{٤(س+١)}{(س+٢)(س+١)} = \frac{٦ - ٤س - ١}{(س+٢)(س+١)} = \frac{٥ + ٤س -}{(س+٢)(س+١)}$

و $\frac{٢ن - ١}{٢ن^٢ + ٥ن - ٣} - \frac{ن + ٣}{ن^٢ - ٩}$

$= \frac{(٢ن - ١)}{(٢ن - ١)(ن + ٣)} - \frac{(ن + ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

$= \frac{١}{ن + ٣} - \frac{١}{ن - ٣} = \frac{(ن - ٣) - (ن + ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٣)} = \frac{ن - ٣ - ن - ٣}{(ن + ٣)(ن - ٣)} = \frac{-٦}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

٥ أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$(س^٢ - ص^٢) \div (س^٣ - ص^٣) \times \frac{س^٢ + س ص + ص^٢}{س + ص}$

$\frac{(س - ص)(س + ص)}{(س - ص)(س^٢ + س ص + ص^٢)} \times \frac{(س^٢ + س ص + ص^٢)}{(س + ص)}$

$= ١ \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} = ١$

٦ إذا كانت ل (٣ ، ٨) ، م (-٢ ، ٣) :

أ أوجِد طول $\overline{ل م}$.

$ل م = \sqrt{(٣ + ٢)^٢ + (٨ - ٣)^٢} = \sqrt{٢٥ + ٢٥} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$

ب أوجِد إحداثيَّي النقطة هـ منتصف $\overline{ل م}$.

هـ $= \left(\frac{٣ - ٢}{٢} ، \frac{٨ + ٣}{٢} \right) = \left(\frac{١}{٢} ، ٥\frac{١}{٢} \right)$

٧ إذا كانت ل (٢ ، -١) ، ن (-١ ، -٣) ، م (٠ ، -٤) ، فبيِّن نوع Δ ل ن م بالنسبة إلى أضلاعه .

$ل ن = \sqrt{(-١ - ٢)^٢ + (-٣ + ١)^٢} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$

$ن م = \sqrt{(٠ + ١)^٢ + (-٤ + ٣)^٢} = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

$ل م = \sqrt{(٠ - ٢)^٢ + (-٤ + ١)^٢} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$

$\therefore ل م = ل ن = \sqrt{١٣}$ $\therefore$ Δ ل ن م متطابق الساقين .

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٦) ، ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{ص} - \text{س}} = -١$	[أ]	[ب]
٢ $\frac{٢}{\text{س} + ١} + \frac{٣}{\text{س} + ٣} = \frac{٥}{٢\text{س} + ٤}$	[أ]	[ب]
٣ $\frac{٥\text{س}}{٣\text{س} - ٢} - \frac{٢\text{س}}{٣\text{س} - ٢} = \frac{٣\text{س}}{٣\text{س} - ٢}$	[أ]	[ب]
٤ $\frac{\text{ص} + ٢}{\text{ص} + ٣} \div (\text{ص} + ٢) = \frac{١}{\text{ص} + ٣}$	[أ]	[ب]
٥ إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ وكانت جـ (٣ ، ٥) ، أ (-١ ، ٣) فإنّ ب (١ ، ٤) .	[أ]	[ب]
٦ إذا كانت أ (١ ، ٣) ، ب (١ ، -٥) فإنّ $\overline{أب}$ توازي محور السينات .	[أ]	[ب]

في البنود (٧ - ١٤) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٧ $\frac{٣\text{م}}{\text{م} - ١} \div \frac{٦\text{م}}{\text{م} - ٢} =$

[أ] $\frac{\text{م} - ٢}{\text{م} - ١}$ [ب] $\frac{١٨\text{م}^{٢}}{(\text{م} - ١)(\text{م} - ٢)}$ [ج] $\frac{\text{م} - ٢}{٢(\text{م} - ١)}$ [د] $\frac{\text{م} - ١}{٢(\text{م} - ٢)}$

٨ $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ٢} - \frac{٤}{\text{س} - ٢} =$

[أ] س - ٢ [ب] س + ٢ [ج] $\text{س}^{٢} - ٤$ [د] ١

٩ الحدودية النسبية التي في أبسط صورة هي :

أ $\frac{ص + ١}{ص^{٢} - ١}$ ب $\frac{٢ ن - ١}{ن^{٢} + ٤}$ ج $\frac{س - ٧}{٧ - س}$ د $\frac{٣ م - ٣}{م - ١}$

١٠ $\frac{٢ س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢} =$

أ $\frac{٦ س}{س + ٢}$ ب ٢ س ج ٢ د ١

١١ $\frac{٢ س}{س + ٢} \times \frac{٣ س + ٦}{س^{٢}} =$

أ $\frac{٦}{س}$ ب $\frac{س}{٦}$ ج ٦ س د $\frac{٣}{س}$

١٢ $\frac{٢ ص}{ص + ١} - \frac{ص}{ص + ١} + \frac{١}{ص + ١} =$

أ ص + ١ ب $\frac{ص + ١}{٣ ص + ٣}$ ج $\frac{٣ ص + ١}{ص + ١}$ د ١

١٣ $\frac{س}{س - ١} + \frac{١}{١ - س}$

أ صفر ب ١ ج -١ د $\frac{س + ١}{س - ١}$

١٤ إذا كانت ق (٣ ، ٠) ، ك (١ ، ٠) ، فإنّ : ق ك = ... وحدة طول .

أ ٤ ب ٢ ج $\sqrt{٢}$ د -٢

الوحدة التعليمية
الرابعة



هندسة التحويلات – الإحصاء والاحتمال

معالم حضارية

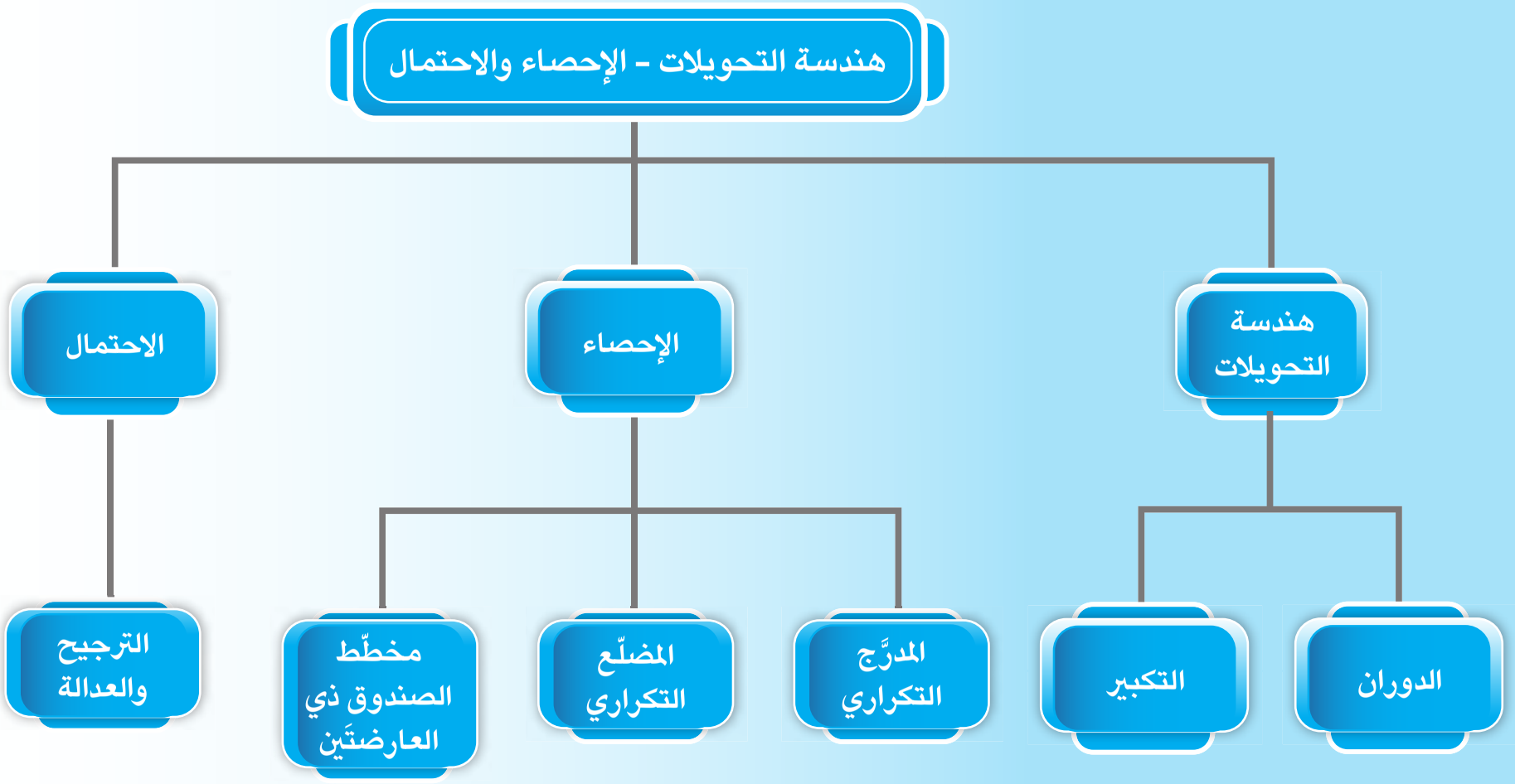
تهتمّ دولتنا الحبيبة الكويت بمعالمها الحضارية اهتمامًا واضحًا ، فقد زخرت بالعديد من المظاهر العمرانية العصرية والمباني الشاهقة ذات التصاميم الجميلة ومجمَّعات التسوّق الضخمة والتي شُيِّدت على أحدث طراز .

اِهتمّت دولة الكويت بالتخطيط العلمي ، باعتباره الأسلوب الأمثل ؛ لكشف آفاق المستقبل ولتحقيق التنمية الاقتصادية والاجتماعية الشاملة ، ويُعتبر الجهاز الإحصائي من أولى المؤسَّسات التي واكبت إنشاء دولة الكويت ، عشية الاستقلال في مطلع الستّينيات . ولكي يتمكّن هذا الجهاز من تأدية عمله على أكمل وجه لا بدّ له أن يبحث عن البيانات المناسِبة . والبيانات بمفهومها العامّ هي : مجموعة من الأحرف أو الكلمات أو الأرقام أو الرموز أو الصور المتعلّقة بموضوع ما ، يتمّ جمعها ومعالجتها وتحويلها إلى معلومات مفيدة لاتّخاذ القرارات المناسِبة .

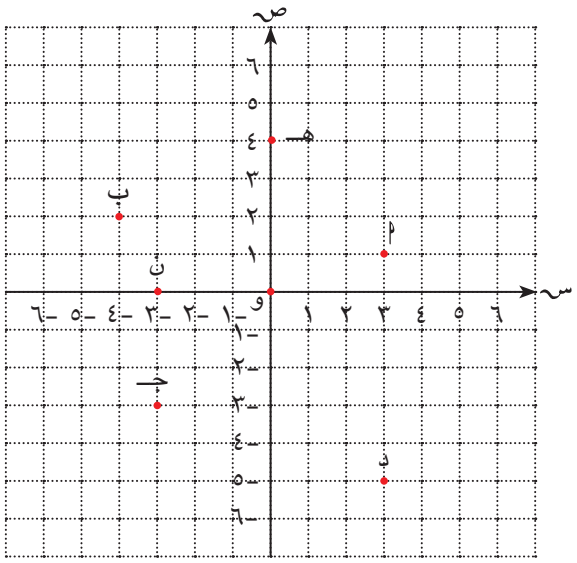


المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
الهندسة والقياس	تطبيق التحويلات الهندسية ، واستخدامها في تطوير الحسّ المكاني واستخدام التماثل في تحليل مواقف رياضية .	العمل الجَماعي - التذكّر - التعرّف - الفهم - التحويل - العلاقات - الاستدلال - القوانين - الوسائط - التمثيل
	تحديد المواقع ووصف العلاقات المكانية باستخدام هندسة الإحداثيات وأنظمة تمثيل أخرى .	العمل الجَماعي - التذكّر - التعرّف - الفهم - التحويل - العلاقات - الاستدلال - القوانين
الإحصاء والاحتمال	تجميع البيانات وتنظيمها وعرضها وتحليلها وتفسيرها ، باستخدام تمثيلات ومقاييس وإجراءات إحصائية .	عمل جَماعي- التذكّر - الفهم - معالجة البيانات - القوانين - الوسائط - التمثيل
	تطبيق مفاهيم الاحتمال النظري والتجريبي للقيام بالتوقّعات والاستنتاجات .	العمل الجَماعي - التذكّر - الفهم - التعرّف - الاستشراف - القوانين - حلّ المشكلات

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الرابعة



هل أنت مستعدّ ؟



١ في المستوى الإحداثي ،
أُكتب إحداثيات النقاط الآتية :

أ (٣ ، ١)

ب (-٤ ، ٢)

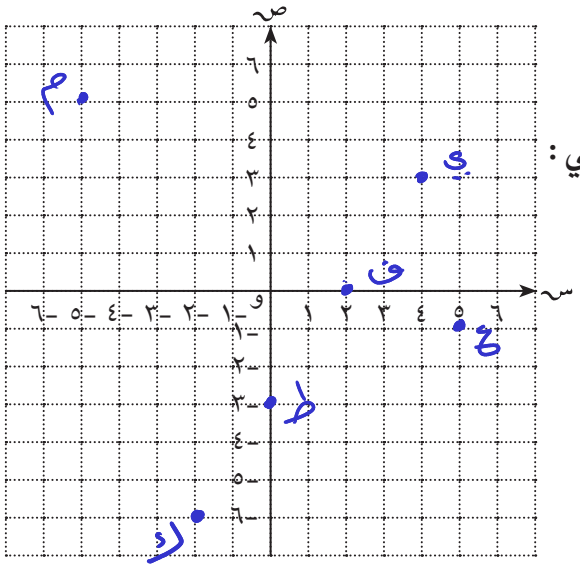
جـ (-٣ ، -٣)

د (٣ ، -٥)

هـ (٠ ، ٤)

ن (-٣ ، ٠)

و (٠ ، ٠)



٢ عيِّن النقاط الآتية على المستوى الإحداثي :

ع (٥ ، -١) ، ك (-٢ ، -٦) ،

ف (٢ ، ٠) ، ط (٠ ، -٣) ،

م (-٥ ، ٥) ، ي (٤ ، ٣) ،

٣ حُلَّ التناسب في كلّ ممّا يلي :

أ) $\frac{س}{٤} = \frac{٦}{٨}$

$س = \frac{٦ \times ٤}{٨} = \frac{٢٤}{٨}$

$س = ٣$

ب) $\frac{٣}{٥} = \frac{٩}{ص}$

$ص = \frac{٥ \times ٩}{٣}$

$ص = ٣ \times ٥ = ١٥$

٤ أوجِد المدى والوسيط لقِيَم البيانات الآتية :

أ) ٣ ، ٥ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٨ ، ٥

المدى = ٩ - ٣ = ٦

الوسيط = ٥

ب) ١٥ ، ١٩ ، ١٧ ، ١٤ ، ١٨ ، ١٥

١٤ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩

المدى = ١٩ - ١٤ = ٥

الوسيط = $\frac{١٥ + ١٧}{٢} = \frac{٣٢}{٢} = ١٦$

هل أنت مستعدّ ؟

٥ أكمِل الجدول التكراري الآتي بإيجاد مراكز الفئات ، ثمّ أجِب عمّا يلي :

الفئة	التكرار	مركز الفئة
٤-	٢	٥
٦-	٤	٧
٨-	٢	٩
١٠-	٣	١١

(أ) طول الفئة = ... ٢ .....

(ب) الحدّ الأدنى للفئة الثالثة = ... ٨ .....

(ج) الحدّ الأعلى للفئة الأخيرة = ... ١٢ .....

٦ أُكتب جميع النواتج الممكنة لكلّ تجربة ممّا يلي :

(أ) رمي قطعة نقود مرّة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

ملاحظة الوجه العلوي = ١

احتمال ظهور الوجه العلوي = $\frac{١}{٢}$

(ب) سحب كرة عشوائيًّا من كيس فيه ٤ كرات صفراء ، ٣ كرات حمراء وملاحظة لونها.

احتمال سحب كرة صفراء = $\frac{٤}{٧}$

احتمال سحب كرة حمراء = $\frac{٣}{٧}$

٧ عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي . أوجِد ما يلي :

(أ) اِحتمال (ظهور عدد أوّلي) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(ب) اِحتمال (ظهور عدد غير أوّلي) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(ج) اِحتمال (ظهور عدد أكبر من ٥) = $\frac{١}{٦}$

(د) اِحتمال (ظهور عدد أصغر من ٧) = $\frac{٦}{٦}$ = ١

(هـ) اِحتمال (ظهور عدد أكبر من ٦) = صفر

٤ - ١ الدوران في المستوى

Rotation in the Plane

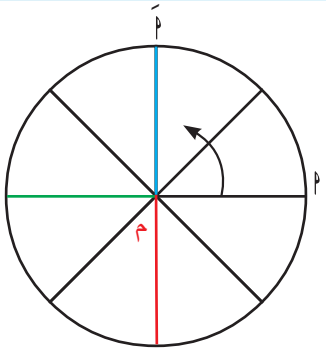
سوف تتعلّم : الدوران في المستوى وإيجاد صورة شكل هندسي بالدوران .

العبارات والمفردات :

التحويل الهندسي	Geometric Transformation	الدوران	Rotation

إستكشِف (١) :





من الشكل المرسوم : يوضّح السهم اتّجاه حركة عجلة المشاهدة ، وهي تدور حول نقطة ثابتة ، ولتكن مركز الدائرة (م) .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

$\overline{م أ}$ هو ..... نصف قطر ..... للدائرة

$\overline{م أ'}$ هو ..... نصف قطر ..... آخر للدائرة

∴ م أ ..... = ... م أ'

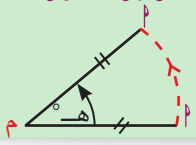
معلومة مفيدة :

عجلة المشاهدة في دبيّ تُعتبر أكبر عجلة مشاهدة في العالم يصل ارتفاعها إلى ٢٥٠ م ، ويمكن من خلالها الاستمتاع بأروع الإطلالات البانورامية على مدينة دبيّ .

الدوران حول نقطة ثابتة م هو تحويل هندسي يعيّن لكلّ نقطة أ في المستوى نقطة أخرى أ' في نفس المستوى بحيث : أ ⟵ أ' ، م ⟵ م (م نقطة ثابتة ، تُسمّى مركز الدوران) ،

م أ = م أ' ، (أ $\hat{م}$ أ') هي زاوية الدوران وقياسها هـ° .

ويُرمز إليه بالرمز د (م ، هـ°)



و بذلك نستخلص عناصر الدوران الأساسية :

- مركز الدوران (م)
- قياس زاوية الدوران (هـ°)
- اِتّجاه الدوران :
  - **مع اتّجاه حركة عقارب الساعة**
  - **عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة**

اللوازم

أدوات هندسية

ورق شفّاف

الدوران الذي مركزه (م) وقياس زاويته (هـ°) ورمزه د (م ، هـ°) :

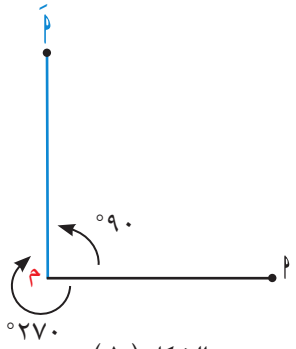
- يكون **موجَبًا** إذا كان **عكس** اتّجاه حركة عقارب الساعة ،
- يكون **سالبًا** إذا كان **مع** اتّجاه حركة عقارب الساعة .
- م مركز الدوران ، نقطة صامدة .

تذكَّر

- إذا كانت صورة النقطة تحت تأثير أيّ تحويل هندسي هي النقطة نفسها ، فإنّها تُسمّى **نقطة صامدة** .

بالرجوع إلى « اِستكشِف (١) » السابق :

في الشكل (١) :



الشكل (١)

عندما تدور العجلة من أ إلى أَ

يتعيّن دوران **موجَب** اتّجاهه ..عكس.. اتّجاه حركة عقارب الساعة

مركزه : ..م.. قياس زاويته : ..٩٠°..

نعبّر عنه بالرمز د(م ، ٩٠°) وهو دوران $\frac{١}{٤}$ دورة

أو عندما تدور العجلة من أ إلى أَ بالاتّجاه الآخر

يتعيّن دوران **سالب** اتّجاهه ..مع.. اتّجاه حركة عقارب الساعة

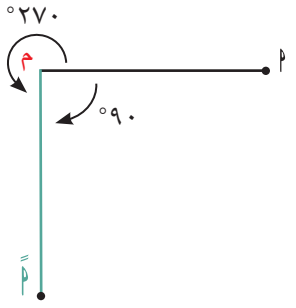
مركزه : ..م.. قياس زاويته : ..٢٧٠°..

نعبّر عنه بالرمز د(م ، -٢٧٠°) وهو دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة

ماذا تلاحظ ؟

د(م ، ٩٠°) يكافئ د(م ، -٢٧٠°)

في الشكل (٢) :



الشكل (٢)

عندما تدور العجلة من أ إلى أً

يتعيّن دوران **موجَب** اتّجاهه ..عكس.. اتّجاه حركة عقارب الساعة

مركزه : ..م.. قياس زاويته : ..٢٧٠°..

نعبّر عنه بالرمز د(م ، ٢٧٠°) وهو دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة

أو عندما تدور العجلة من أ إلى أً بالاتّجاه الآخر

يتعيّن دوران **سالب** اتّجاهه ..مع.. اتّجاه حركة عقارب الساعة

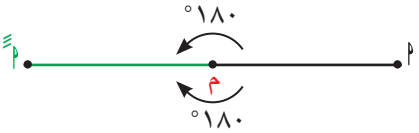
مركزه : ..م.. قياس زاويته : ..٩٠°..

نعبّر عنه بالرمز د(م ، -٩٠°) وهو دوران $\frac{١}{٤}$ دورة

ماذا تلاحظ ؟

د(م ، ٢٧٠°) يكافئ د(م ، -٩٠°)

في الشكل (٣) :



الشكل (٣)

عندما تدور العجلة من أ إلى أ'

يتعيّن دوران **موجَب** اتّجاهه ..عكس.. اتّجاه حركة عقارب الساعة

مركزه : ..م.. قياس زاويته : ..١٨٠°..

نعبّر عنه بالرمز ..د(م، ١٨٠°).. وهو دوران $\frac{١}{٢}$ دورة

أو عندما تدور العجلة من أ إلى أ' بالاتّجاه الآخر

يتعيّن دوران **سالب** اتّجاهه ..مع.. اتّجاه حركة عقارب الساعة

مركزه : ..م.. قياس زاويته : ..١٨٠°..

نعبّر عنه بالرمز ..د(م، -١٨٠°).. وهو دوران $\frac{١}{٢}$ دورة

ماذا تلاحظ ؟

د(م، ١٨٠°) يكافئ د(م، -١٨٠°)

دورك الآن (١)

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

(أ) د (م ، ٣٠°) هو :

دوران حول ..م.. في اتّجاه ..عكس.. حركة عقارب الساعة بزاوية قياسها ..٣٠°..

(ب) د (م ، -١٢٠°) هو :

دوران حول ..م.. في اتّجاه ..مع.. حركة عقارب الساعة بزاوية قياسها ..١٢٠°..

اِنتبِه

د (م ، -١٢٠°)

← قياس زاوية الدوران

← اِتّجاه الدوران

مثال توضيحي :

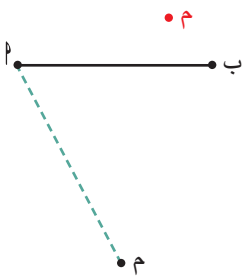
أُرسم صورة $\overline{أب}$ تحت تأثير الدوران : د (م ، -٧٥°)



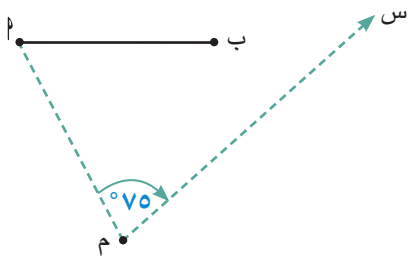
الحلّ :

١ نعيّن $أ'$ صورة النقطة أ كالآتي :

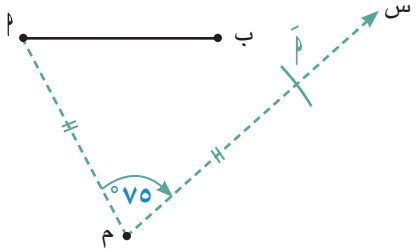
أ نرسم القطعة المستقيمة م أ



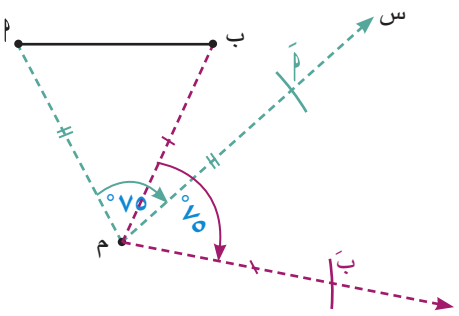
ب باستخدام المنقلة نرسم زاوية قياسها ٧٥° (الاتّجاه مع حركة عقارب الساعة)
رأسها النقطة م ، وضلعاها $\overleftarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م س}$



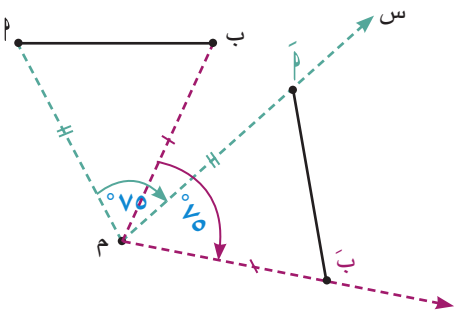
ج باستخدام الفرجار نعيّن $أ'$ على $\overleftarrow{م س}$
حيث م أ = م $أ'$



٢ نعيّن $ب'$ صورة النقطة ب بالطريقة نفسها .



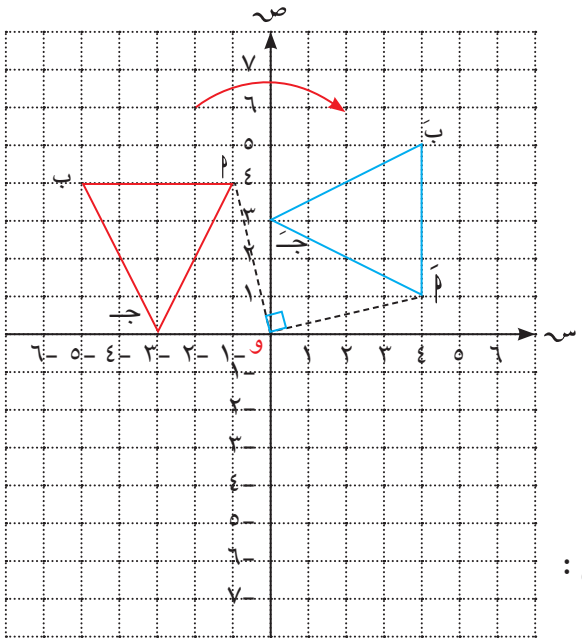
٣ نرسم $\overline{أ'ب'}$ صورة $\overline{أب}$.



الدوران في المستوى الإحداثي :

اِستكشِف (٢) :

أُرسم المثلّث أ ب جـ على شبكة المستوى الإحداثي حيث
أ (-١ ، ٤) ، ب (-٥ ، ٤) ، جـ (-٣ ، ٠)



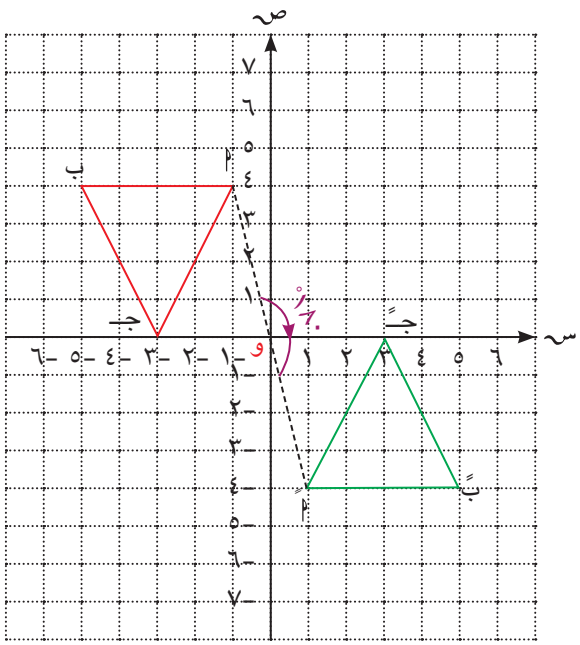
- ثبِّت ورقة شفّافة على المستوى ، وقُم برسم المثلّث أ ب جـ والمحاور على الورقة الشفّافة.
- ثبِّت سنّ دبّوس عند نقطة الأصل (و) ، وقُم بتدوير الورقة الشفّافة بزاوية قياسها ٩٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة ؛ لتحصل على المثلّث أَ بَ جَـ صورة المثلّث أ ب جـ بدوران مركزه و ومقياس زاوية ٩٠° باتّجاه مع حركة عقارب الساعة ، ونعبّر عن ذلك كما يلي :

Δ أ ب جـ $\xrightarrow{د\,(و\,،\,-٩٠^\circ)}$ Δ أَ بَ جَـ

- وباستخدام الورقة الشفّافة السابقة نفسها، دوِّر وارسم صورة Δ أ ب جـ :

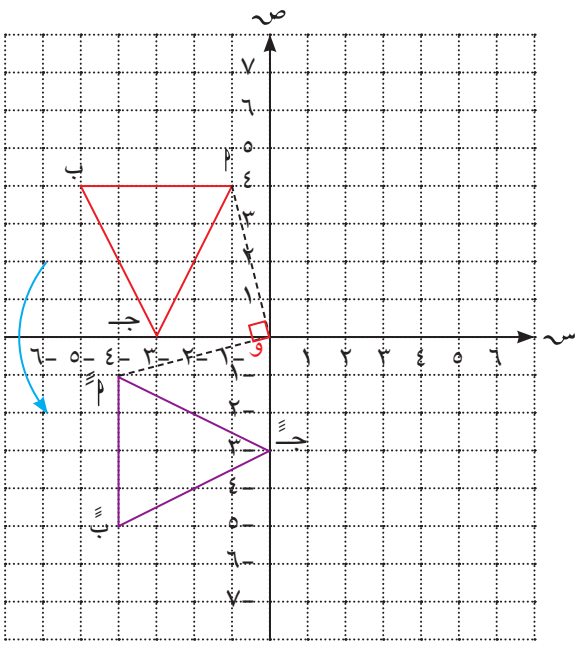
١ حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة

Δ أ ب جـ $\xrightarrow{د\,(و\,،\,-١٨٠^\circ)}$ Δ أً بً جـً



٢ حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ٩٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة

Δ أ ب جـ $\xrightarrow{د\,(و\,،\,٩٠^\circ)}$ Δ أً بً جـً



٣ أكمِل الجدول الآتي وفقًا للخطوات السابقة :

الدوران / الرؤوس	أ (-١ ، ٤)	ب (-٥ ، ٤)	جـ (-٣ ، ٠)
د (و ، -٩٠°)	أَ (٤ ، ١)	بَ (٤ ، ٥)	جَ (٠ ، ٣)
د (و ، -١٨٠°)	أً (١ ، -٤)	بً (٥ ، -٤)	جً (٣ ، ٠)
د (و ، ٩٠°)	أٌ (-٤ ، -١)	بٌ (-٤ ، -٥)	جٌ (٠ ، -٣)
د (و ، -٢٧٠°)	$أ^{(٤)}$ (-١ ، -٤)	$ب^{(٤)}$ (-٥ ، -٤)	$جـ^{(٤)}$ (-٣ ، ٠)
د (و ، ٢٧٠°)	$أ^{(٥)}$ (٤ ، ١)	$ب^{(٥)}$ (٤ ، ٥)	$جـ^{(٥)}$ (٣ ، ٠)
د (و ، ١٨٠°)	$أ^{(٦)}$ (١ ، -٤)	$ب^{(٦)}$ (٥ ، -٤)	$جـ^{(٦)}$ (٠ ، ٣)

ماذا تلاحظ ؟

د (و ، -٩٠°) يكافئ د (و ، ٢٧٠°)

د (و ، -١٨٠°) يكافئ د (و ، ١٨٠°)

د (و ، ٩٠°) يكافئ د (و ، -٢٧٠°)

ممّا سبق نستنتج أنّه :

إذا كانت (س ، ص) نقطة في المستوى الإحداثي ، فإنّ :

(١) (س ، ص) $\xleftarrow{د (و ، -٩٠°)}$ (ص ، -س) يُسمّى دوران ربع دورة ($\frac{١}{٤}$ دورة) .

(س ، ص) $\xleftarrow{د (و ، ٩٠°)}$ (-ص ، س) يُسمّى دوران ربع دورة ($\frac{١}{٤}$ دورة) .

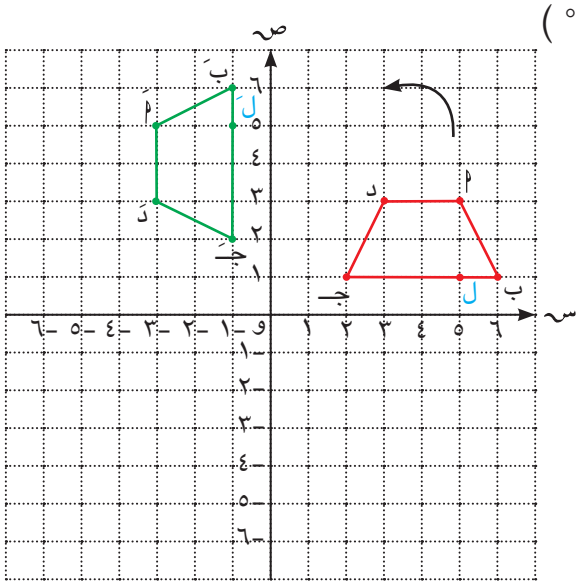
(٢) (س ، ص) $\xleftarrow{د (و ، -١٨٠°)}$ (-س ، -ص) يُسمّى دوران نصف دورة ($\frac{١}{٢}$ دورة) .

(س ، ص) $\xleftarrow{د (و ، ١٨٠°)}$ (-س ، -ص) يُسمّى دوران نصف دورة ($\frac{١}{٢}$ دورة) .

(٣) (س ، ص) $\xleftarrow{د (و ، -٢٧٠°)}$ (-ص ، س) يُسمّى دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة .

(س ، ص) $\xleftarrow{د (و ، ٢٧٠°)}$ (ص ، -س) يُسمّى دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة .

خواصّ الدوران



أَ بَ جَـ دَ صورة الشكل أ ب جـ د تحت تأثير د (و ، ٩٠°)

باستخدام الشكل المقابِل تحقَّق من الخواصّ الآتية :

(١) الدوران يحافظ على الاستقامة .

(٢) الدوران يحافظ على البينية .

(٣) الدوران يحافظ على قياسات الزوايا .

(٤) الدوران يحافظ على التوازي .

(٥) الدوران يحافظ على الأبعاد .

(٦) الدوران يحافظ على الاتّجاه الدوراني .

دورك الآن (٢)

أكمِل كلًّا ممّا يلي حيث (و) نقطة الأصل :

أ (٢ ، ٤) ← د (و ، ٩٠°) ← (..... ، .....)

ب (٣ ، −٥) ← د (و ، −٩٠°) ← (..... ، .....)

ج (٣ ، ٠) ← د (و ، ١٨٠°) ← (..... ، .....)

د (−٤ ، −٣) ← د (و ، −١٨٠°) ← (..... ، .....)

هـ (٠ ، −٢) ← د (و ، ٢٧٠°) ← (..... ، .....)

و (−٦ ، ٢) ← د (و ، −٢٧٠°) ← (..... ، .....)

عبِّر عن فهمك (١)

هل د (و ، ١٠٠°) يكافئ د (و ، −٢٦٠°) ؟ فسِّر إجابتك .

نعم لأن ١٠٠° − ٣٦٠° = −٢٦٠°

مثال (١) :

أُرسم المثلّث أ ب و ، الذي رؤوسه : أ (٥ ، ٢) ، ب (٢ ، ٤) ، و (٠ ، ٠) ،
ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ٩٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة .

الحلّ :

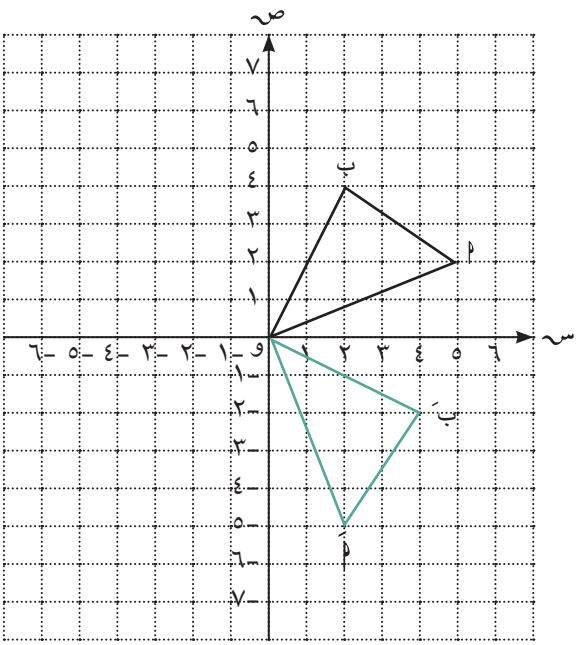
(س ، ص) $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ (ص ، −س)

أ (٥ ، ٢) $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ أَ (٢ ، −٥)

ب (٢ ، ٤) $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ بَ (٤ ، −٢)

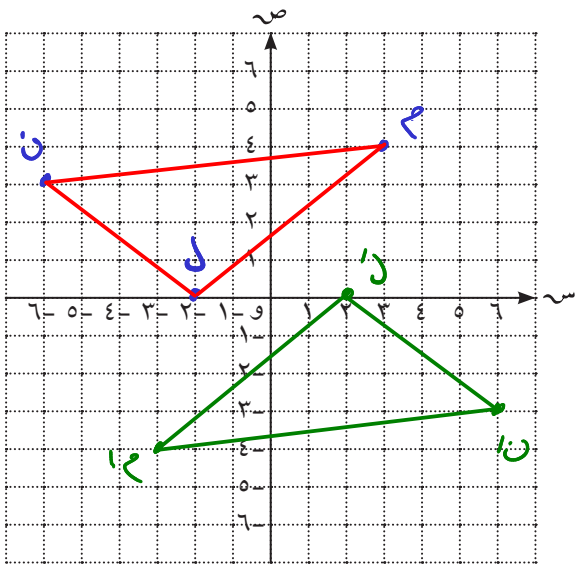
و (٠ ، ٠) $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ و (٠ ، ٠) نقطة صامدة

∴ Δ أ ب و $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ Δ أَ بَ و



دورك الآن (٣)

أُرسم المثلّث ل م ن الذي إحداثيات رؤوسه :
ل (-٢ ، ٠) ، م (٣ ، ٤) ، ن (-٦ ، ٣) ،
ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة
الأصل وبزاوية قياسها ١٨٠° عكس
اتّجاه حركة عقارب الساعة .



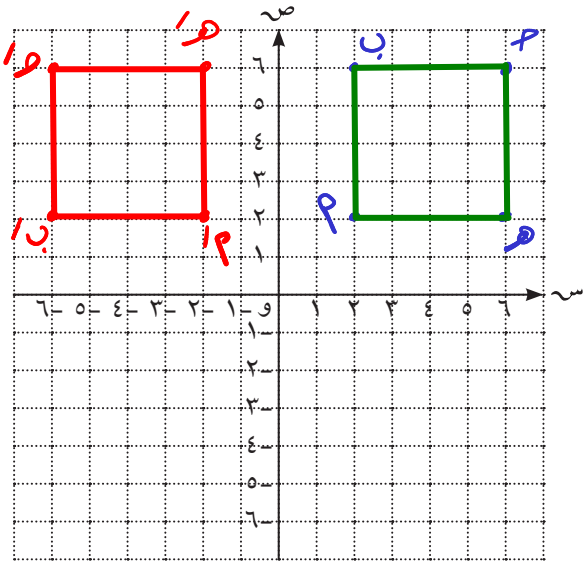
ل (-٢، ٠) $\xrightarrow{د(و، ١٨٠°)}$ ل' (٠، ٢)

م (٣، ٤) $\xrightarrow{د(و، ١٨٠°)}$ م' (-٣، -٤)

ن (-٦، ٣) $\xrightarrow{د(و، ١٨٠°)}$ ن' (٦، -٣)

دورك الآن (٤)

أُرسم المربّع أ ب جـ هـ الذي إحداثيات
رؤوسه : أ (٢ ، ٢) ، ب (٢ ، ٦) ،
جـ (٦ ، ٦) ، هـ (٦ ، ٢) ،
ثمّ ارسم صورته تحت تأثير
د (و ، -٢٧٠°) حيث (و) نقطة الأصل .



أ (٢، ٢) $\xrightarrow{د(و، -٢٧٠°)}$ أ' (-٢، ٢)

ب (٢، ٦) $\xrightarrow{د(و، -٢٧٠°)}$ ب' (-٦، ٢)

جـ (٦، ٦) $\xrightarrow{د(و، -٢٧٠°)}$ جـ' (-٦، ٦)

هـ (٦، ٢) $\xrightarrow{د(و، -٢٧٠°)}$ هـ' (-٢، ٦)

عبِّر عن فهمك (٢)

إذا كان قياس زاوية الدوران ٣٦٠° لشكل ما ، فما العلاقة بين الشكل وصورته ؟

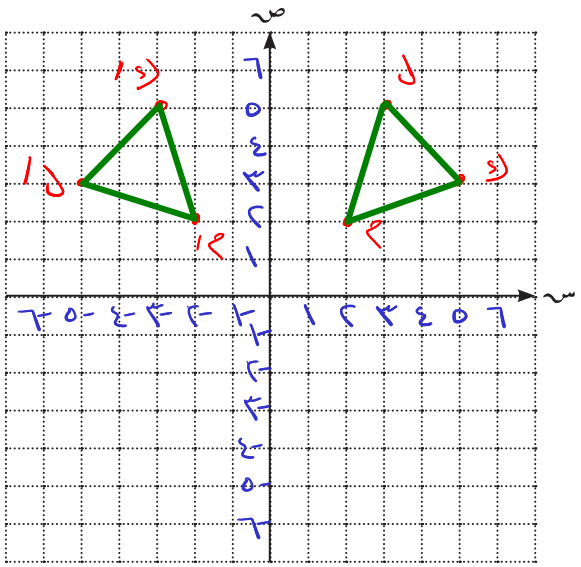
إذا دار الشكل دورة كاملة فإن الشكل يطابق صورته

تمارين ذاتية :

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي حيث (و) نقطة الأصل :

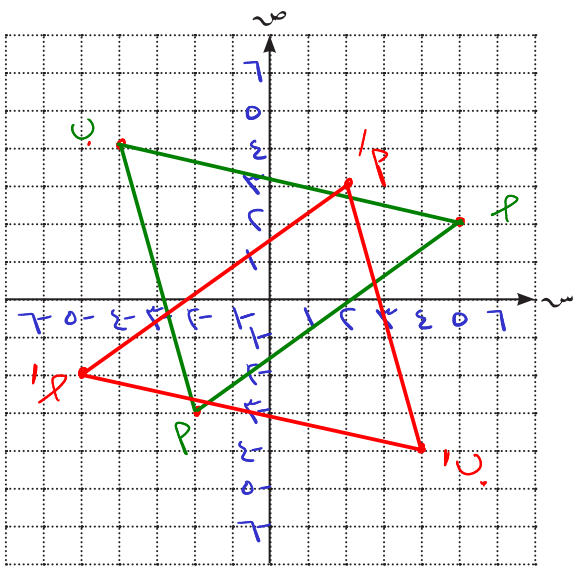
(٣ ، ٧)	د (و ، ٩٠°)	(..... ، .....)
(١ ، ٩-)	د (و ، ٩٠- °)	(..... ، .....)
(٠ ، ٤)	د (و ، ١٨٠°)	(..... ، .....)
(٥ ، ٢-)	د (و ، ١٨٠- °)	(..... ، .....)
(٨- ، ٠)	د (و ، ٢٧٠°)	(..... ، .....)
(١٠ ، ٣-)	د (و ، ٢٧٠- °)	(..... ، .....)

٢ أُرسم المثلّث ك م ل الذي إحداثيات رؤوسه :
ك (٥ ، ٣) ، م (٢ ، ٢) ، ل (٣ ، ٥) ، ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ٩٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة .



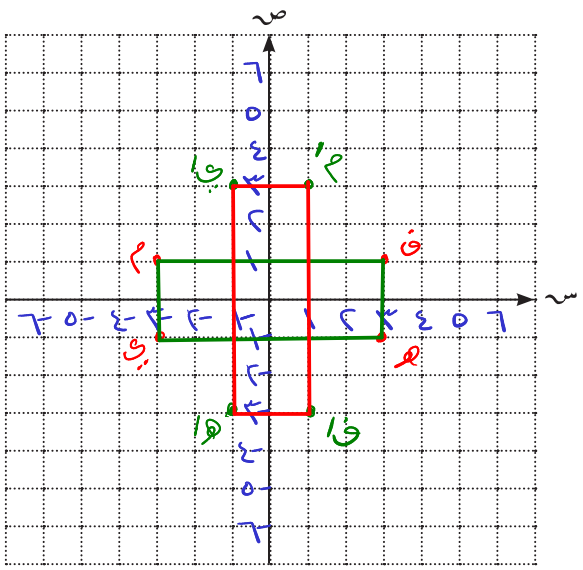
ك (٥،٣) د(و، ٩٠°) ك١ (-٣،٥)
م (٢،٢) د(و، ٩٠°) م١ (-٢،٢)
ل (٣،٥) د(و، ٩٠°) ل١ (-٥،٣)

٣ أُرسم المثلّث أ ب جـ الذي إحداثيات رؤوسه : أ (-٢ ، -٣) ، ب (-٤ ، ٤) ، جـ (٥ ، ٢) ، ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة .



أ (-٢،-٣) د(و، ١٨٠°) أ١ (٢،٣)
ب (-٤،٤) د(و، ١٨٠°) ب١ (٤،-٤)
جـ (٥،٢) د(و، ١٨٠°) جـ١ (-٥،-٢)

٤ أُرسم المستطيل ف هـ ي م الذي إحداثيات رؤوسه : ف (٣ ، ١) ، هـ (٣ ، -١) ، ي (-٣ ، -١) ، م (-٣ ، ١) ، ثمّ ارسم صورته تحت تأثير د (و ، ٢٧٠°) حيث (و) نقطة الأصل .



ف (٣، ١) ⟵ د(و، ٢٧٠°) ⟵ ف′ (١، -٣)

هـ (٣، -١) ⟵ د(و، ٢٧٠°) ⟵ هـ′ (١، -٣)

ي (-٣، -١) ⟵ د(و، ٢٧٠°) ⟵ ي′ (١، ٣)

م (-٣، ١) ⟵ د(و، ٢٧٠°) ⟵ م′ (١، ٣)

مهارات تفكير عليا :

٥ اِختر الإجابة الصحيحة . (١، -٢)

إذا كانت صورة النقطة (١ ، ٢) تحت تأثير د (و ، -٩٠°) هي (٣ + س ، ص - ٤) ، فإنّ قيمة كلّ من س ، ص هي :

(أ) س = ١ ، ص = ٣

(ب) س = -١ ، ص = ٣

(ج) س = -١ ، ص = -٣

(د) س = ٣ ، ص = -١

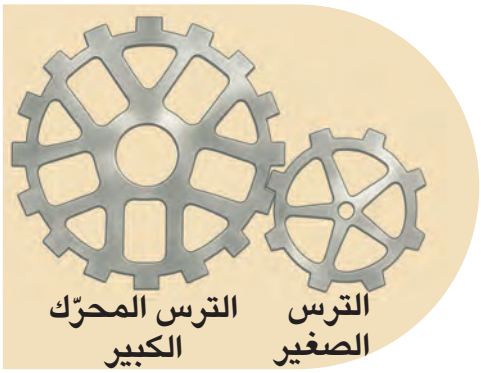
٦ الدوران الذي يجب أن يجريه الترس الكبير المحرّك ليدور الترس الصغير بزاوية ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة هو :

(أ) ٩٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة

(ب) ٩٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة

(ج) ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة

(د) ١٨٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة



٤ - ٢ التكبير Enlargement

سوف تتعلّم : التكبير وإيجاد صورة شكل هندسي بالتكبير .

العبارات والمفردات :

تكبير	Enlargement	تصغير	Reduction

اللوازم

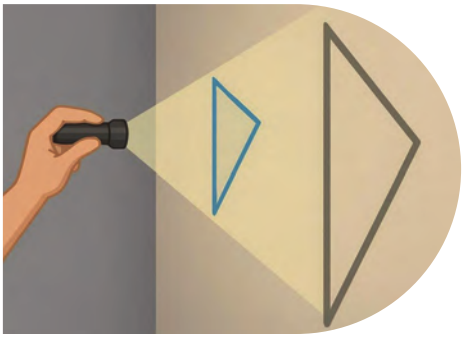
مسطرة

درست فيما سبق ثلاثة أنواع من التحويلات الهندسية هي : الانعكاس والإزاحة والدوران ، وتُسمّى **تحويلات متقايسة** (تحافظ على الأبعاد) . ويكون الشكل وصورته تحت تأثير هذه التحويلات المتقايسة متطابقَين .

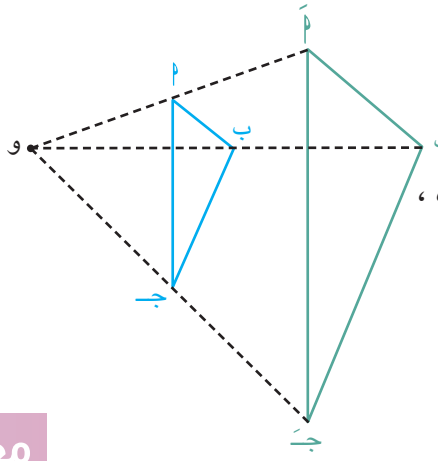
هل يوجد تحويل **غير متقايس** (لا يحافظ على الأبعاد) ؟

اِستكشِف

قام نايف بإجراء تجربة عملية من خلال تسليط الضوء على مثلّث ، حيث حصل على صورة مكبَّرة للمثلّث على الحائط .



في الشكل المقابِل وتحت تأثير هذا التحويل :



و ⟵ و ، أ ⟵ أَ

ب ⟵ بَ ، جـ ⟵ جـَ

حيث $\frac{\text{و أ}}{\text{و أ}} = \frac{\text{و ب}}{\text{و ب}} = \frac{\text{و جـ}}{\text{و جـ}}$ = عدد ثابت ،

نلاحظ أنّ :

$\overline{\text{أ ب}}$ ⟵ $\overline{\text{أَبَ}}$

$\overline{\text{ب جـ}}$ ⟵ $\overline{\text{بَ جـَ}}$

$\overline{\text{أ جـ}}$ ⟵ $\overline{\text{أَجـَ}}$

١ أوجِد بالقياس :

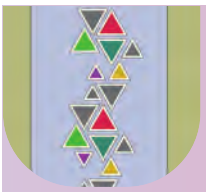
أ ب = ١ سم ، أَ بَ = ٢ سم

ب جـ = ٢ سم ، بَ جـَ = ٤ سم

أ جـ = ٢ ½ سم ، أَ جـَ = ٥ سم

∴ هذا التحويل غير متقايس (لا يحافظ على الأبعاد) .

معلومة مفيدة :



التكبير هو من المبادئ الأساسية في هندسة الديكور والتصميم الداخلي ، ويمكن الاستفادة منه بعدّة طرق لتحسين جمالية الأشكال واللوحات .

٢ أكمِل ما يلي :

$\frac{أ'ب'}{أب} = \frac{٢}{١} = \frac{٢ سم}{\ldots\ldots}$

$\frac{ب'جـ'}{ب جـ} = \frac{٤}{٢} = \frac{٢ سم}{\ldots\ldots}$

$\frac{أ'جـ'}{أ جـ} = \frac{٥}{٢٫٥} = \frac{٢ سم}{\ldots\ldots}$

$\therefore \frac{أ'ب'}{أب} = \frac{ب'جـ'}{ب جـ} = \frac{أ'جـ'}{أ جـ} = ٢ سم$

نلاحظ أنّ :

- $أ'ب' = ٢ أب$ ، $ب'جـ' = ٢ ب جـ$ ، $أ'جـ' = ٢ أ جـ$
- $و أ' = ٢ و أ$ ، $و ب' = ٢ و ب$ ، $و جـ' = ٢ و جـ$

- النقطة وصورتها ومركز التحويل تقع على استقامة واحدة .

يُسمّى هذا التحويل تكبيرًا .

- وتُسمّى النقطة الثابتة (و) مركز التكبير ، ويُسمّى العدد ٢ (هنا) معامل التكبير .

وعمومًا :

التكبير الذي مركزه النقطة الثابتة (و) هو تحويل هندسي يُعيِّن لكلّ نقطة أ غير (و) صورة أ' $\in$ $\overleftarrow{و أ}$ ،

أ ⟵ أ' ، و ⟵ و ، وتُسمى النقطة الثابتة (و) مركز التكبير .

ويكون $\frac{و أ'}{و أ}$ = عددًا ثابتًا .

ويُسمّى العدد الثابت معامل التكبير ويُرمز إليه بالرمز م .

ويُرمز إلى هذا التحويل بالرمز ت (و ، م) ويُقرأ ت تكبير مركزه النقطة (و) ومعامله م .

لاحِظ أنّ :

(١) $\frac{\text{و أ}'}{\text{و أ}} = \text{م} \Leftrightarrow \text{و أ}' = \text{م} \times \text{و أ}$

(٢) (و) مركز التكبير نقطة صامدة .

(٣) ستقتصر دراستنا على التكبير الذي معامله م $>$ صفر .

(٤) يُقصد بالتكبير (تكبير أو تصغير) :

- إذا كان م $>$ ١ فالتحويل يمثّل تكبيرًا .
- إذا كان صفر $<$ م $<$ ١ فالتحويل يمثّل تصغيرًا .

مثال توضيحي :

عيِّن صورة Δ أ ب جـ تحت تأثير تكبير مركزه النقطة و ، ومعامله = ٣ .

الحلّ :

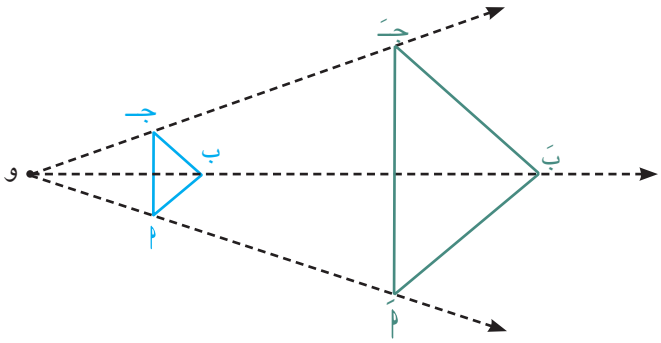
نرمز إلى هذا التكبير بالرمز ت (و ، ٣)

رسمنا $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و جـ}}$ وعيّنّا النقاط أ' ، ب' ، جـ' باستخدام الفرجار بحيث يكون :

و أ' = ٣ و أ

و ب' = ٣ و ب

و جـ' = ٣ و جـ



فيكون :

Δ أ ب جـ $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٣)}}$ Δ أ' ب' جـ'

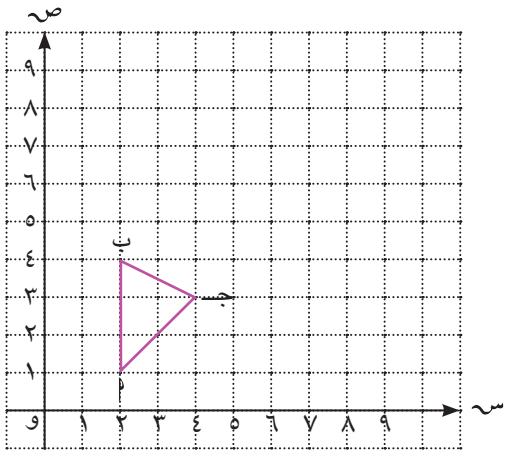
التكبير في المستوى الإحداثي

إذا كانت (س ، ص) نقطة في المستوى الإحداثي حيث (و) نقطة الأصل ، م معامل التكبير ، فإنّ :

(س ، ص) $\xleftarrow{\text{ت (و ، م)}}$ (م س ، م ص) .

مثال (١) :

أُرسم صورة المثلّث أ ب جـ مستخدِمًا التكبير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله ٢ .



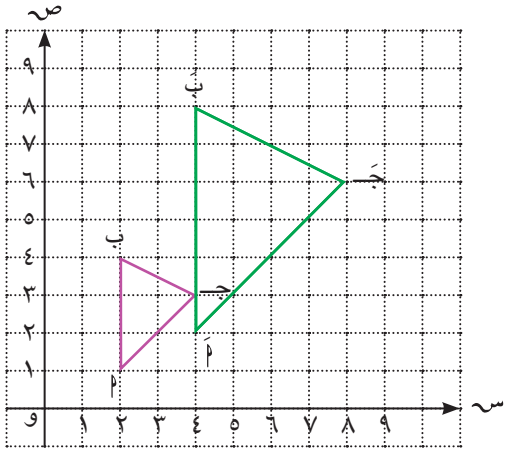
الحلّ :

(س ، ص) $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٢)}$ (٢ س ، ٢ ص)

أ (٢ ، ١) $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٢)}$ أَ (٢ × ٢ ، ٢ × ١) = أَ (٤ ، ٢)

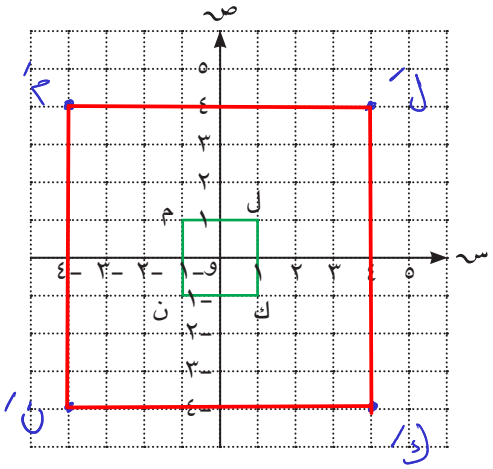
ب (٢ ، ٤) $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٢)}$ بَ (٢ × ٢ ، ٢ × ٤) = بَ (٨ ، ٤)

جـ (٤ ، ٣) $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٢)}$ جَـ (٢ × ٢ ، ٤ × ٢ ، ٣) = جَـ (٦ ، ٨)



دورك الآن (١)

أُرسم صورة المربّع ل م ن ك مستخدِمًا التكبير ت (و ، ٤) .



(س ، ص) $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٤)}$ (٤ س ، ٤ ص)

ل (١ ، ١) $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٤)}$ لَ (٤ ، ٤)

م (-١ ، ١) $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٤)}$ مَ (-٤ ، ٤)

ن (-١ ، -١) $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٤)}$ نَ (-٤ ، -٤)

ك (١ ، -١) $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٤)}$ كَ (٤ ، -٤)

∴ المربّع ل م ن ك $\xleftarrow{ت\,(و\,،\,٤)}$ المربّع لَ مَ نَ كَ .

عبِّر عن فهمك

إذا كان معامل التكبير يساوي ١ ، فما هي العلاقة بين الشكل وصورته ؟

يكون الشكل مطابق لصورته

خواصّ التكبير

بالرجوع إلى « دورك الآن (١) » ، تحقَّق من الخواصّ الآتية :

(١) التكبير يحافظ على الاستقامة .

(٢) التكبير يحافظ على البينية .

(٣) التكبير يحافظ على قياسات الزوايا .

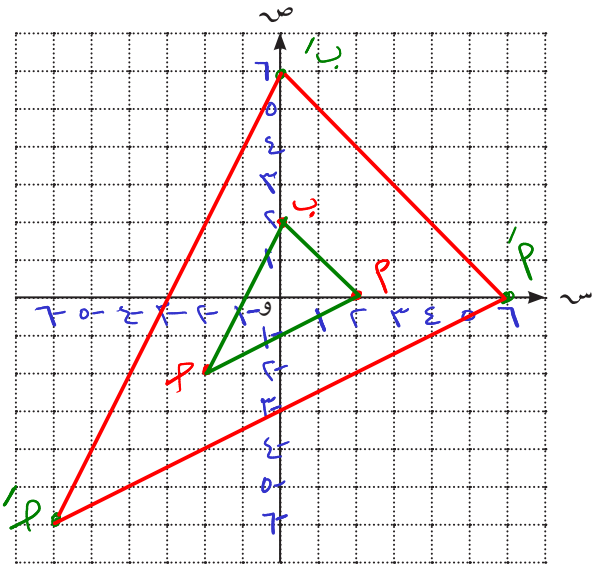
(٤) التكبير يحافظ على التوازي .

(٥) التكبير يحافظ على الاتّجاه الدوراني .

(٦) التكبير لا يحافظ على الأبعاد (تحويل غير متقايس)

دورك الآن (٢)

أُرسم المثلّث أ ب جـ حيث أ (٢ ، ٠) ، ب (٢ ، ٠) ، جـ (-٢ ، -٢) ، ثمّ ارسم صورته تحت تأثير ت (و ، ٣) حيث (و) نقطة الأصل .



أ(٢،٠) $\xrightarrow{ت(و،٣)}$ أ'(٠،٦)

ب(٢،٠) $\xrightarrow{ت(و،٣)}$ ب'(٦،٠)

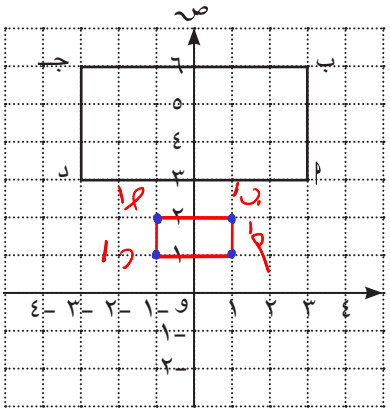
جـ(-٢،-٢) $\xrightarrow{ت(و،٣)}$ جـ'(-٦،-٦)

∴ Δ أ ب جـ $\xrightarrow{ت(و،٣)}$ Δ أ' ب' جـ'

دورك الآن (٣)

١ أُكتب النقاط التي تمثّل رؤوس الشكل أ ب جـ د ، ثمّ ارسم صورة الشكل مستخدِمًا التصغير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{١}{٣}$.

$(س ، ص) \xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})} (\frac{١}{٣}س ، \frac{١}{٣}ص)$



أ (٣ ، ٣) $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ أَ (١ ، ١)

ب (٣ ، ٦) $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ بَ (١ ، ٢)

جـ (-٣ ، ٦) $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ جـَ (-١ ، ٢)

د (-٣ ، ٣) $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ دَ (-١ ، ١)

∴ الشكل أ ب جـ د $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ الشكل أَ بَ جـَ دَ

٢ أكمِل من الرسم في الشكل السابق :

(أ) نسبة محيط المستطيل أَ بَ جـَ دَ إلى محيط المستطيل أ ب جـ د

= ٢(١ + ٢) ÷ ٢(٣ + ٦) = ٩ ÷ ٣ = ١ ÷ ٣ = $\frac{١}{٣}$

(ب) نسبة مساحة المستطيل أَ بَ جـَ دَ إلى مساحة المستطيل أ ب جـ د

= ١ × ٢ ÷ ٣ × ٦ = ٢ ÷ ١٨ = ١ ÷ ٩ = $\frac{١}{٩}$

إذا كان ت (و ، م) ، فإنّ :

- نسبة محيط صورة الشكل الهندسي إلى محيطه تساوي معامل التكبير (م) .
- نسبة مساحة صورة الشكل الهندسي إلى مساحته تساوي مربّع معامل التكبير (م^{٢}) .

مثال (٢) :

شكل هندسي مساحته ٢٥ م^{٢} ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ما ، هي ١٠٠ م^{٢}
أوجِد معامل التكبير .

الحلّ :

$$\text{مساحة صورة الشكل} = \text{مساحة الشكل} \times (\text{م})^{٢}$$

$$(\text{م})^{٢} = \frac{١٠٠}{٢٥}$$

$$\text{م}^{٢} = ٤ \longleftarrow \text{م} = ٢$$

∴ معامل التكبير يساوي ٢

دورك الآن (٤)

ليكن ت (و ، م) تكبيرًا حيث (و) نقطة الأصل ، أ ⟵ أَ ، ب ⟵ بَ .

أوجِد معامل التكبير أو التصغير (م) في كلّ من الحالات الآتية :

(أ) أ (٢ ، -١) ، أَ (٨ ، -٤)

م = $\frac{٨}{٢}$ = ٤

أو م = $\frac{-٤}{-١}$ = ٤

(ب) أ (٦ ، ٩) ، أَ (٢ ، ٣)

م = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

(ج) أ ب = ٦ سم ، أَبَ = ٣٠ سم

م = $\frac{٣٠}{٦}$ = ٥

دورك الآن (٥)

شكل هندسي محيطه ١٢ م ومحيط صورته تحت تأثير تكبير ما هي ٤٨ م ، أوجِد معامل التكبير .

معامل التكبير (ص) = محيط صورته / محيط الشكل الهندسي = ٤٨ / ١٢ = ٤

تمارين ذاتية :

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي حيث (و) نقطة الأصل :

(أ) أ (٣ ، ١) ← ت (و ، ٥) أ′ (١٥ ، ٥)

(ب) ب (٠ ، -٢) ← ت (و ، ٦) ب′ (٠ ، -١٢)

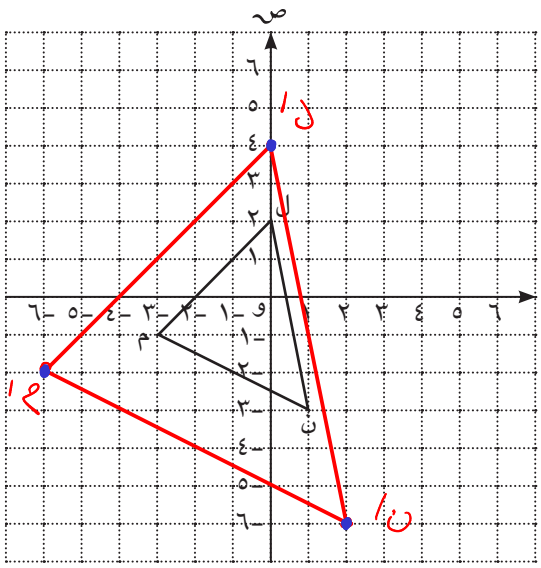
(ج) جـ (٤ ، ٨) ← ت (و ، $\frac{١}{٤}$) جـ′ (١ ، ٢)

(د) د (-٤ ، ٦) ← ت (و ، $\frac{١}{٢}$) د′ (-٢ ، ٣)

(هـ) ك (-١٠ ، -١٢) ← ت (و ، $\frac{٣}{٢}$) ك′ (-١٥ ، -١٨)

(و) ل (٩ ، -٧) ← ت (و ، ١) ل′ (٩ ، -٧)

٢ أُكتب النقاط التي تمثّل رؤوس المثلّث ل م ن ، ثمّ ارسم المثلّث لَ مَ نَ صورة المثلّث ل م ن تحت تأثير ت (و ، ٢) .

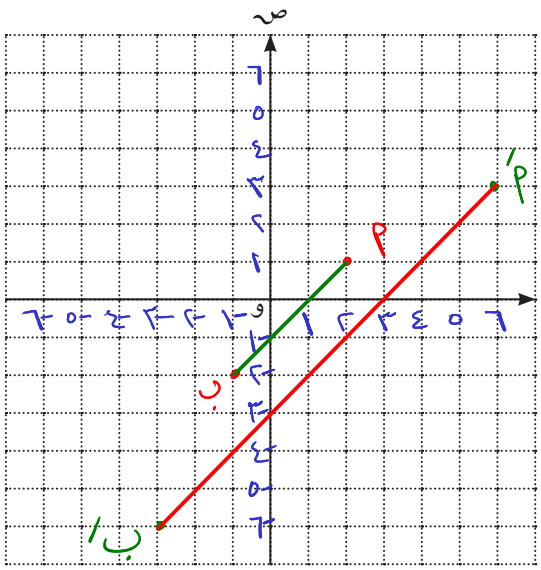


ل(٤،٠) $\xrightarrow{ت(و،٢)}$ ل'(٤،٠)

م(-١،-٣) $\xrightarrow{ت(و،٢)}$ م'(-٢،-٦)

ن(-٣،١) $\xrightarrow{ت(و،٢)}$ ن'(-٦،٢)

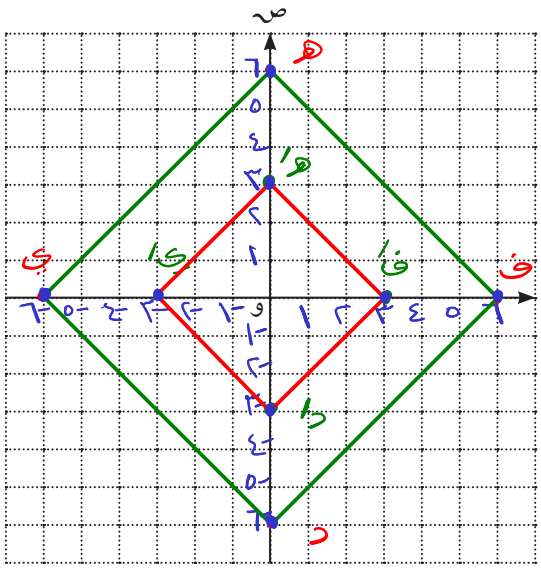
٣ أُرسم $\overline{أب}$ إذا كانت أ (٢ ، ١) ، ب (-١ ، -٢) ، ثمّ أُرسم $\overline{أ'ب'}$ صورة $\overline{أب}$ بتكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٣ .



أ(٢،١) $\xrightarrow{ت(و،٣)}$ أ'(٦،٣)

ب(-١،-٢) $\xrightarrow{ت(و،٣)}$ ب'(-٣،-٦)

٤ أُرسم الشكل الرباعي ف هـ ي د الذي فيه ف (٦ ، ٠) ، هـ (٠ ، ٦) ، ي (-٦ ، ٠) ، د (٠ ، -٦) ، ثمّ ارسم الشكل فَ هَـ يَ دَ صورة الشكل ف هـ ي د تحت تأثير ت (و ، $\frac{١}{٢}$) .



ف(٦،٠) $\xrightarrow{ت(و،\frac{١}{٢})}$ ف'(٣،٠)

هـ(٠،٦) $\xrightarrow{ت(و،\frac{١}{٢})}$ هـ'(٠،٣)

ي(-٦،٠) $\xrightarrow{ت(و،\frac{١}{٢})}$ ي'(-٣،٠)

د(٠،-٦) $\xrightarrow{ت(و،\frac{١}{٢})}$ د'(٠،-٣)

٥ أوجِد معامل التكبير أو التصغير (م) في كلّ من الحالات الآتية حيث النقطة أَ صورة النقطة أ ، والنقطة بَ صورة النقطة ب .

أ) أ (٤ ، ١) ، أَ (١٢ ، ٣)

م = ١٢ / ٤ = ٣

ب) أ (٠ ، ٥) ، أَ (٠ ، ١٠)

م = ١٠ / ٥ = ٢

ج) أ (-٢ ، -٦) ، أَ (-١ ، -٣)

م = -١ / -٢ = ١/٢

د) أ ب = ٨ سم ، أَ بَ = ١ سم

م = ١/٨

٦ مستطيل بعداه ٣ سم ، ٥ سم . أوجِد محيط ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ت (و ، ٣) .

محيط صورته = م × (طول + عرض) = ٢ × ٣ × (٥ + ٣) = ٢ × ٣ × ٨ = ٤٨ سم

مساحة صورته = م^{٢} × طول × عرض = ٣^{٢} × ٣ × ٥ = ١٣٥ سم^{٢}

مهارات تفكير عليا :

٧ اِختر الإجابة الصحيحة .

إذا كانت النسبة بين محيط صورة مثلّث إلى محيطه يساوي ٢ .

وكانت مساحة المثلّث تساوي (س + ٣) وحدة مربّعة ، فإنّ مساحة صورة المثلّث = ...

أ) (س + ٣)^{٢}

ب) ٢ (س + ٣)

ج) ٤س + ١٢

د) س + ٦

∵ محيط الصورة / محيط المثلث = ٢

∴ م = ٢

∵ مساحة الصورة / مساحة المثلث = م^{٢} = ٤

∴ مساحة الصورة / (س + ٣) = ٤

∴ مساحة صورة المثلث = ٤س + ١٢

٤ - ٣

المدرَّج التكراري
Histogram Frequency

سوف تتعلّم : عرض البيانات وتمثيلها بمدرَّجات تكرارية .

العبارات والمفردات :

المدرَّج التكراري	Histogram Frequency

حُلّ وناقِش

سبق لك دراسة الجدول التكراري ذي الفئات ، والذي يُعتبر وسيلة مهمّة في تنظيم عدد كبير من البيانات ، ويمكن تمثيل البيانات الواردة في الجداول التكرارية بواسطة المدرَّج التكراري .

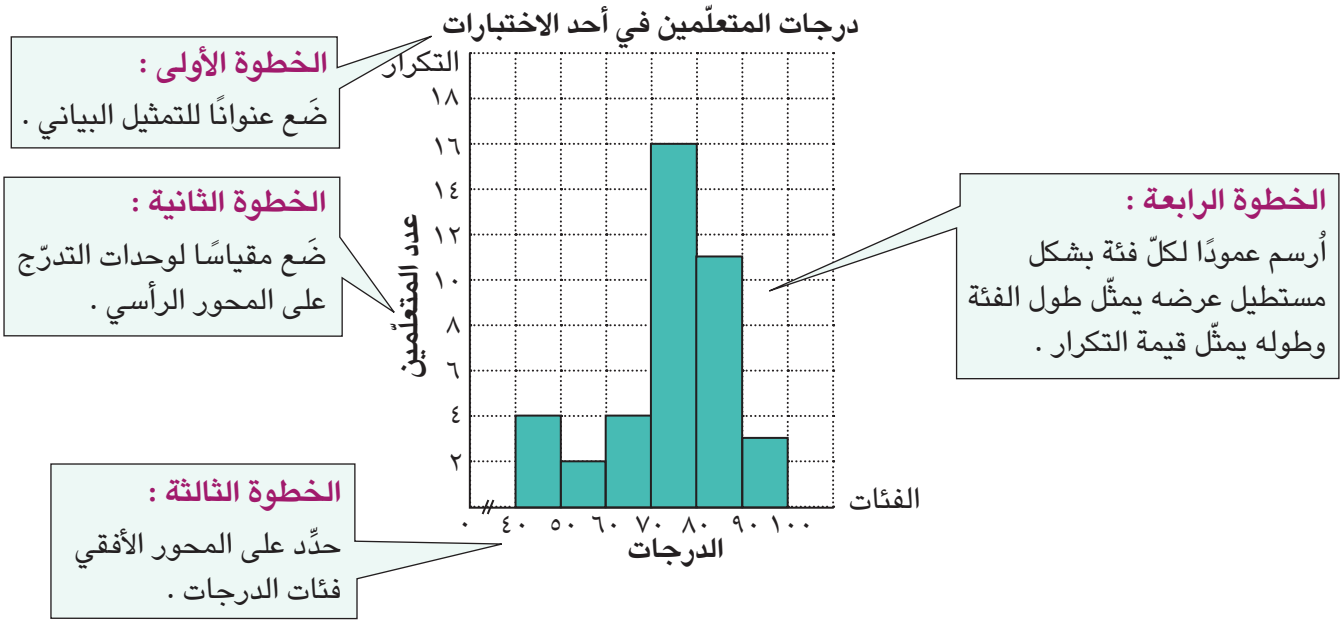
اللوازم

مسطرة

يوضّح الجدول الآتي الدرجات النهائية التي حصل عليها ٤٠ متعلّمًا في أحد الاختبارات (النهاية العظمى ١٠٠) .

الفئات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٤	٢	٤	١٦	١١	٣

لتمثيل بيانات الجدول التكراري من خلال المدرَّج التكراري ، اِتّبِع الخطوات الآتية :



اِستخدِم المدرَّج التكراري للإجابة عمّا يلي :

١ كم عدد المتعلّمين الذين حصلوا على أقلّ من ٧٠ درجة ؟

..... ٤+٢+٤=١٠ متعلمين .....

٢ بكم يزيد عدد المتعلّمين في الفئة الرابعة عن عدد المتعلّمين في الفئة الخامسة ؟

..... ١٦ − ١١ = ٥ متعلمين .....

المدرَّج التكراري : هو تمثيل بياني بالأعمدة المتلاصقة لمجموعة بيانات منظَّمة في جدول تكراري ذي فئات .

دورك الآن (١)

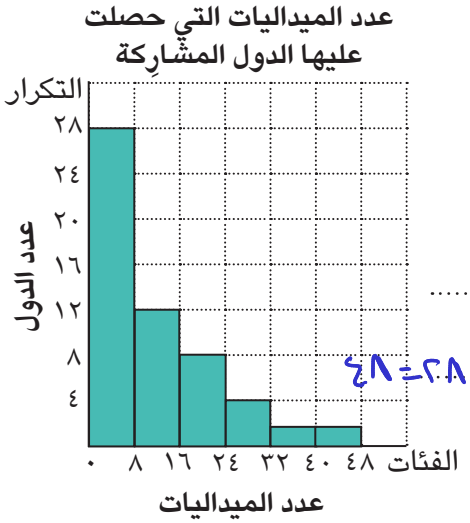
يمثّل المدرَّج التكراري المقابِل عدد الميداليات التي حصدتها الدول المشارِكة في إحدى الدورات الأولمبية .

أجِب عمّا يلي :

أ ما طول الفئة ؟ ٨

ب كم عدد الدول التي حصلت على ٣٢ ميدالية فأكثر ؟ ..... ٢+٢=٤

ج كم عدد الدول التي حصلت على أقلّ من ٢٤ ميدالية ؟ ٨+١٢+٢٨=٤٨

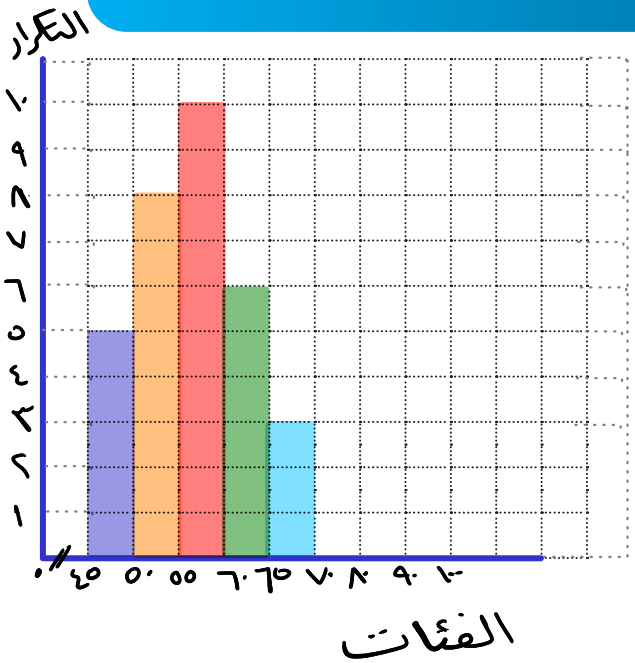


دورك الآن (٢)

السرعة القصوى في أحد الشوارع التجارية في مدينة الكويت العاصمة ٤٥ كم / س ، يبيّن الجدول أدناه عدد المخالفات المسجَّلة بحقّ عدد من سائقي المركبات الذين لم يلتزموا بالقانون .

مثِّل البيانات الواردة في الجدول باستخدام المدرَّج التكراري ،

الفئات	-٤٥	-٥٠	-٥٥	-٦٠	-٦٥
التكرار	٥	٨	١٠	٦	٣



ثمّ أجِب عما يلي :

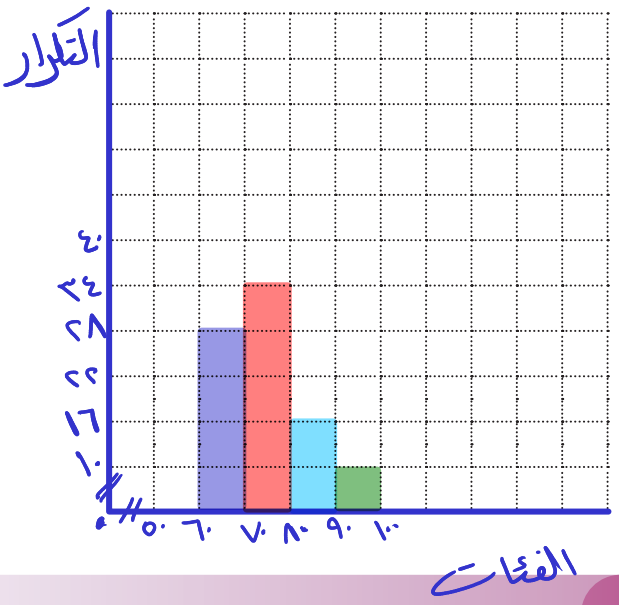
كم عدد مخالفات سائقي المركبات الذين بلغت سرعتهم ٥٥ كم / س فأكثر ؟ ..... ١٠+٦+٣=١٩ مخالفاً

دورك الآن (٣)

يوضّح الجدول التكراري المقابِل فئات أسعار أسهم بعض الشركات والمؤسَّسات التجارية المدرَجة في إحدى الأسواق المالية بالدولار الأميركي .

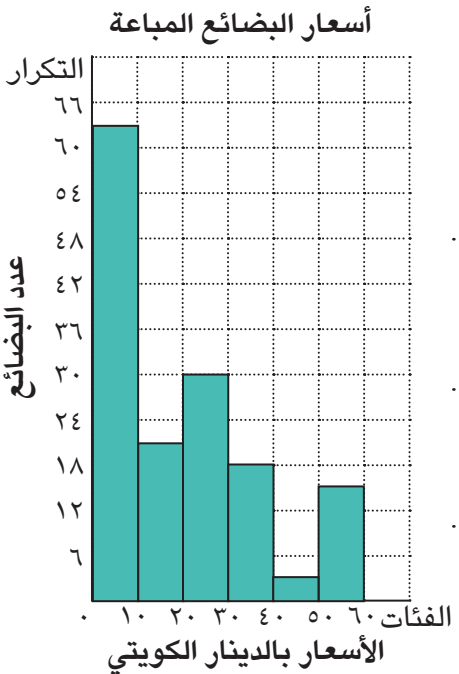
الفئات	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠
التكرار	٢٨	٣٤	١٦	١٠

اِصنع مدرَّجًا تكراريًّا لهذه البيانات .



تمارين ذاتية :

١ يمثّل المدرَّج التكراري المقابِل أسعار مختلف البضائع المباعة في إحدى الجمعيات التعاونية بالدينار الكويتي .



أجِب عمّا يلي :

(أ) ما طول الفئة ؟

١٠

(ب) كم عدد البضائع التي بلغ سعرها ٣٠ دينارًا فأكثر ؟

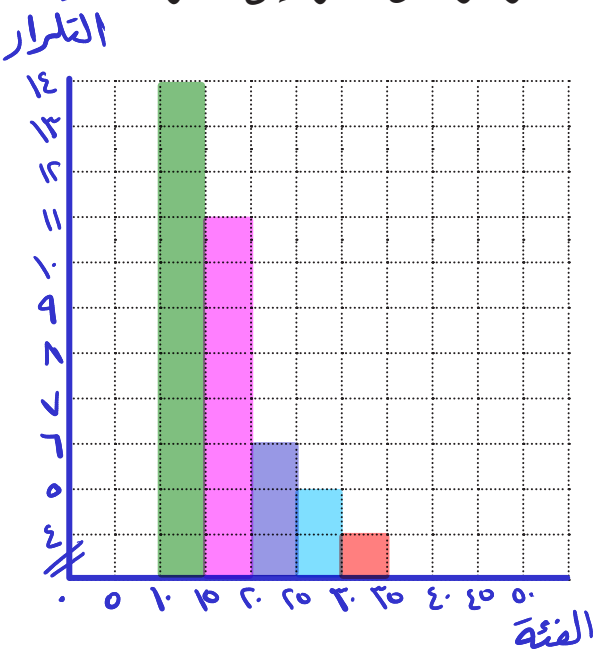
١٨ + ٣ + ١٥ = ٣٦

(ج) ما الفئة الأكثر مبيعًا ؟

الت تبلغ سعرها ١٠ دنانير فأقل

٢ يبيّن الجدول الآتي الزمن بالدقائق الذي استغرقه ٤٠ متعلّمًا للوصول من المنزل إلى المدرسة ، اِصنع مدرَّجًا تكراريًّا لهذه البيانات .

الفئة (الزمن بالدقائق)	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠
التكرار	١٤	١١	٦	٥	٤



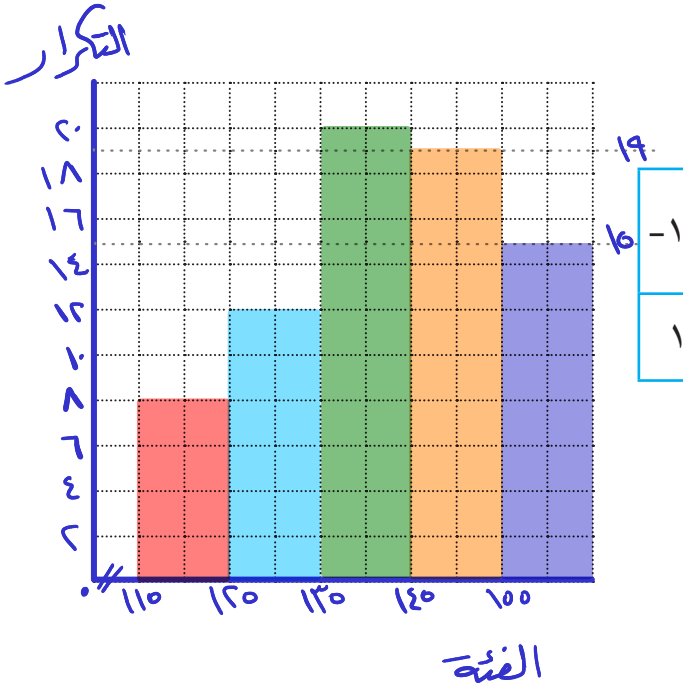
أجِب عمّا يلي :

(أ) كم عدد المتعلّمين الذين يصلون إلى المدرسة في أقلّ من ٢٠ دقيقة ؟ ..... ١١ + ١٤ = ٢٥ متعلمًا

(ب) كم عدد المتعلّمين الذين يصلون إلى المدرسة في ٢٥ دقيقة فأكثر ؟ ..... ٥ + ٤ = ٩ متعلمين

٣ يوضّح الجدول التكراري أطوال بعض المتعلّمين في إحدى المدارس ، اِصنع مدرَّجًا تكراريًّا لتمثيل البيانات .

الفئة (أطوال المتعلّمين)	-١١٥	-١٢٥	-١٣٥	-١٤٥	-١٥٥
التكرار	٨	١٢	٢٠	١٩	١٥



٤ - ٤ المضلّع التكراري

Polygon Frequency

سوف تتعلّم : عرض البيانات وتمثيلها بمضلّعات تكرارية .

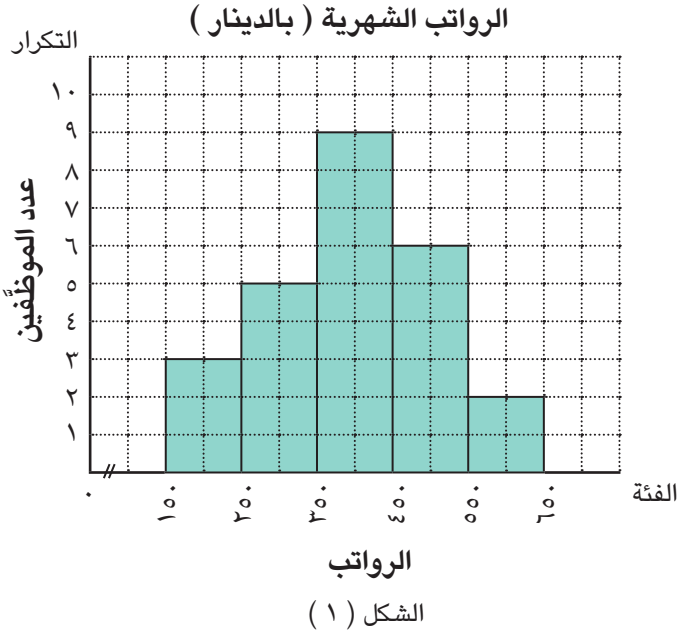
العبارات والمفردات :

المضلّع التكراري	Polygon Frequency

حلّ وناقِش

يعرض الجدول الآتي فئات الرواتب الشهرية (بالدينار) للموظَّفين في إحدى الشركات وتمّ تمثيلها بمدرَّج تكراري في الشكل (١) .

الفئة	١٥٠-	٢٥٠-	٣٥٠-	٤٥٠-	٥٥٠-
التكرار	٣	٥	٩	٦	٢
مركز الفئة	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠



الشكل (١)

تذكّر

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحدّ الأعلى للفئة} + \text{الحدّ الأدنى للفئة}}{٢}$$

اللوازم

مسطرة

١ أكمِل الجدول السابق (أُكتب مراكز الفئات) .

٢ في الشكل (٢) ، اِتّبِع الخطوات الآتية :

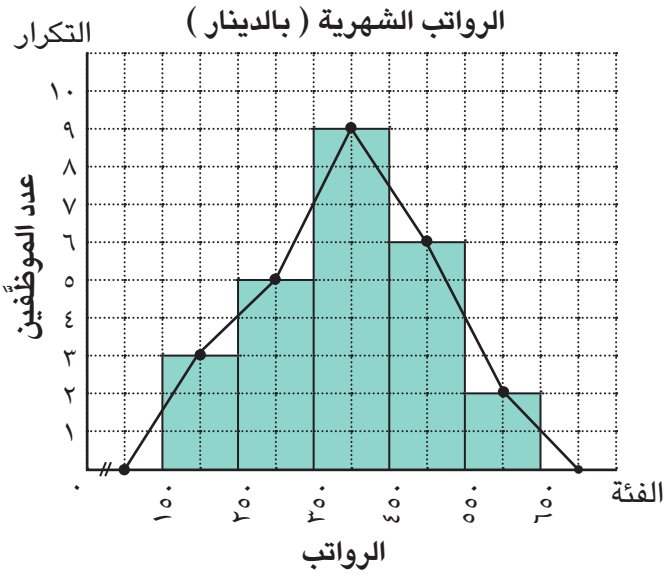
أ مثِّل مراكز الفئات على المحور الأفقي .

ب عيِّن النقاط التي تمثّل :
(مركز الفئة ، التكرار) .

ج صِل بين النقاط السابقة على التوالي مستخدِمًا حافّة المسطرة .

د أكمِل رسم المضلّع بتمثيل النقطتَين (١٠٠ ، ٠) ، (٧٠٠ ، ٠) ثمّ صِل .

(هاتان النقطتان ليستا من ضمن هذه البيانات)



الشكل (٢)

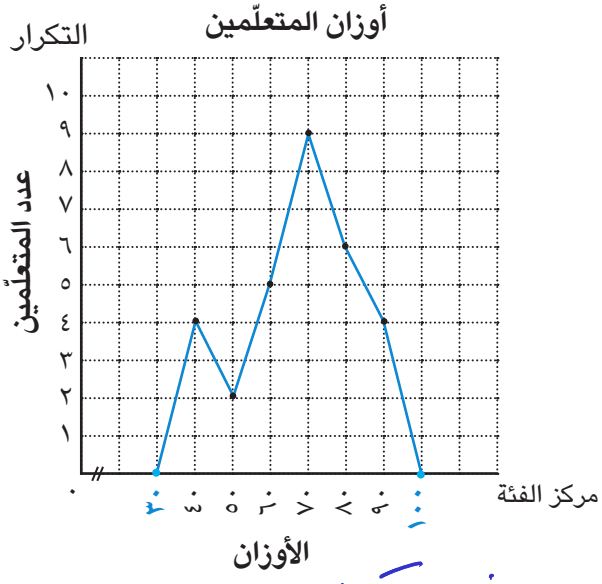
لاحِظ أنّ :

يُسمّى الشكل الناتج في النشاط السابق **مضلّعًا تكراريًّا** ، ويُعبَّر بوجه عامّ عن مقدار واتّجاه التغيّر في مجموعة من القِيَم .

دورك الآن (١)

يمثّل الشكل الآتي أوزان متعلّمي أحد فصول الصفّ التاسع .

تأمَّل الشكل ، ثمّ أجِب عمّا يلي :



أ ماذا يُسمّى التمثيل البياني ؟ مضلع تكراري .....

ب ما مركز الفئة الأكثر تكرارًا ؟ ٧٠ .....

ج ما مركز الفئة الأقلّ تكرارًا ؟ ٥٠ .....

مثال :

يبيّن الجدول المقابِل المسافة المقطوعة بالكيلومتر من قبل ٨٤ سائقًا في إحدى شركات سيّارات الأجرة في يوم من الأيّام .

الفئة	-١٠٠	-١٥٠	-٢٠٠	-٢٥٠	-٣٠٠	-٣٥٠
التكرار	٦	٩	١٦	٢٤	١٨	١١

مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .

الحلّ :

(أ) نُكمل الجدول بإيجاد مراكز الفئات .

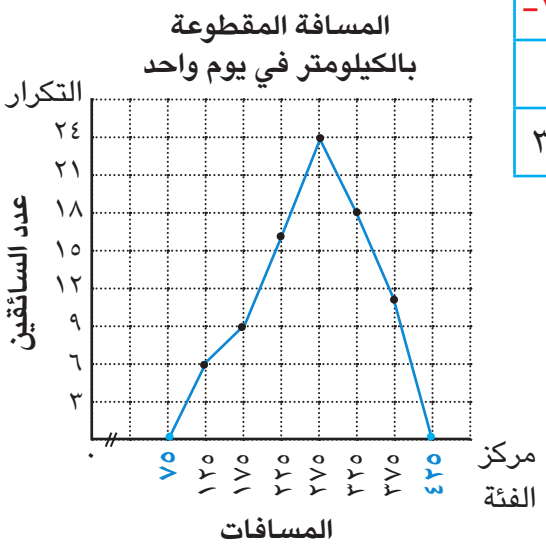
الفئة	-١٠٠	-١٥٠	-٢٠٠	-٢٥٠	-٣٠٠	-٣٥٠
التكرار	٦	٩	١٦	٢٤	١٨	١١
مركز الفئة	١٢٥	١٧٥	٢٢٥	٢٧٥	٣٢٥	٣٧٥

(ب) نمثّل مراكز الفئات على المحور الأفقي ، والتكرار على المحور الرأسي .

(ج) نعيّن النقاط التي تمثّل : (مركز الفئة ، التكرار) .

(د) نصل بين النقاط السابقة على التوالي مستخدِمين حافّة المسطرة .

(هـ) نُكمل رسم المضلّع .



دورك الآن (٢)

يبيّن الجدول الآتي أطوال متعلّمي الصفّ التاسع بالسنتيمتر في إحدى المدارس :

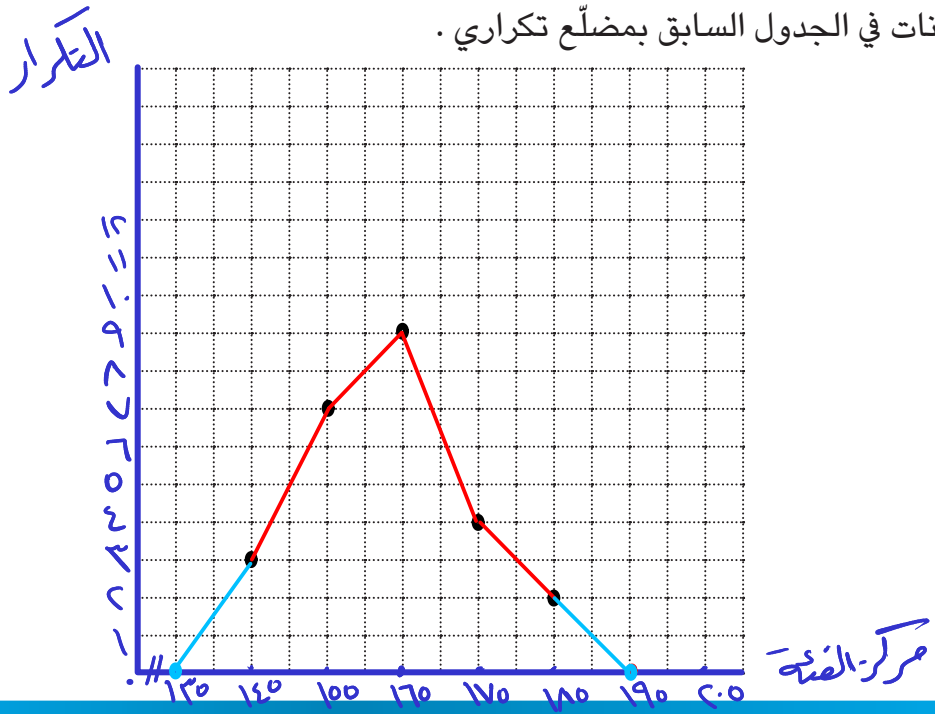
الفئة	-١٤٠	-١٥٠	-١٦٠	-١٧٠	-١٨٠
التكرار	٣	٧	٩	٤	٢
مركز الفئة	١٤٥	١٥٥	١٦٥	١٧٥	١٨٥

(أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ب) كم عدد المتعلّمين الذين تقلّ أطوالهم عن ١٦٠ سم ؟ ٣+٧=١٠ متعلمين .....

(ج) ما مركز الفئة الأكثر تكرارًا ؟ ١٦٥ .....

د) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



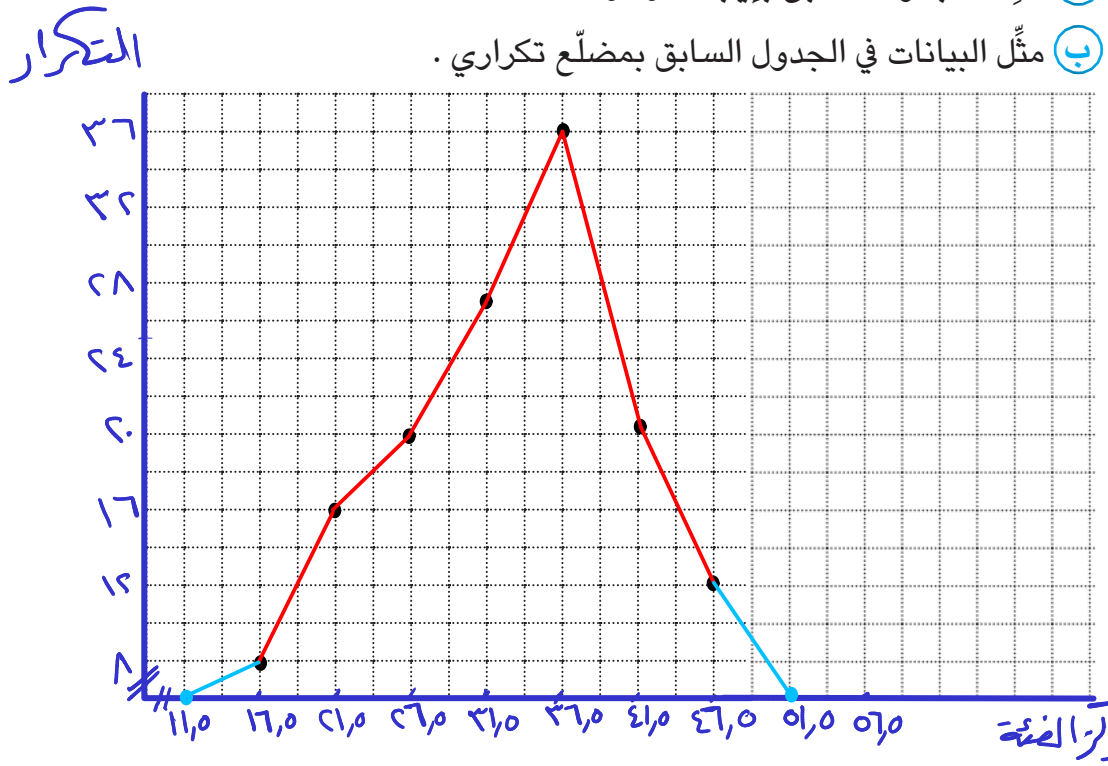
دورك الآن (٣)

يوضّح الجدول الآتي فئات الأعمار لمشاهدة برنامج تلفزيوني :

الفئة	-١٤	-١٩	-٢٤	-٢٩	-٣٤	-٣٩	-٤٤
التكرار	٨	١٦	٢٠	٢٦	٣٦	٢١	١٢
مركز الفئة	١٦,٥	٢١,٥	٢٦,٥	٣١,٥	٣٦,٥	٤١,٥	٤٦,٥

أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

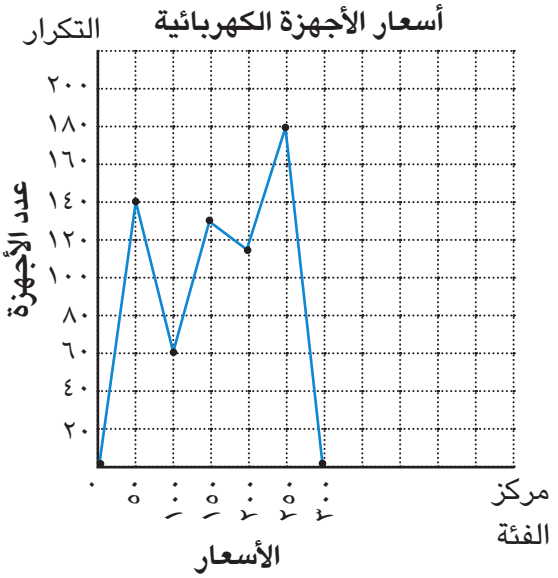
ب) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



تمارين ذاتية :

١ يمثّل الشكل الآتي أسعار الأجهزة الكهربائية التي بيعت خلال شهر في أحد المحلّات .

تأمَّل الشكل ، ثمّ أجِب عمّا يلي :



(أ) ماذا يُسمّى التمثيل البياني ؟

مضلع تكراري

(ب) ما مركز الفئة الأكثر تكرارًا ؟

٢٥٠

(ج) ما التكرار المقابِل لمركز الفئة ١٥٠ ؟

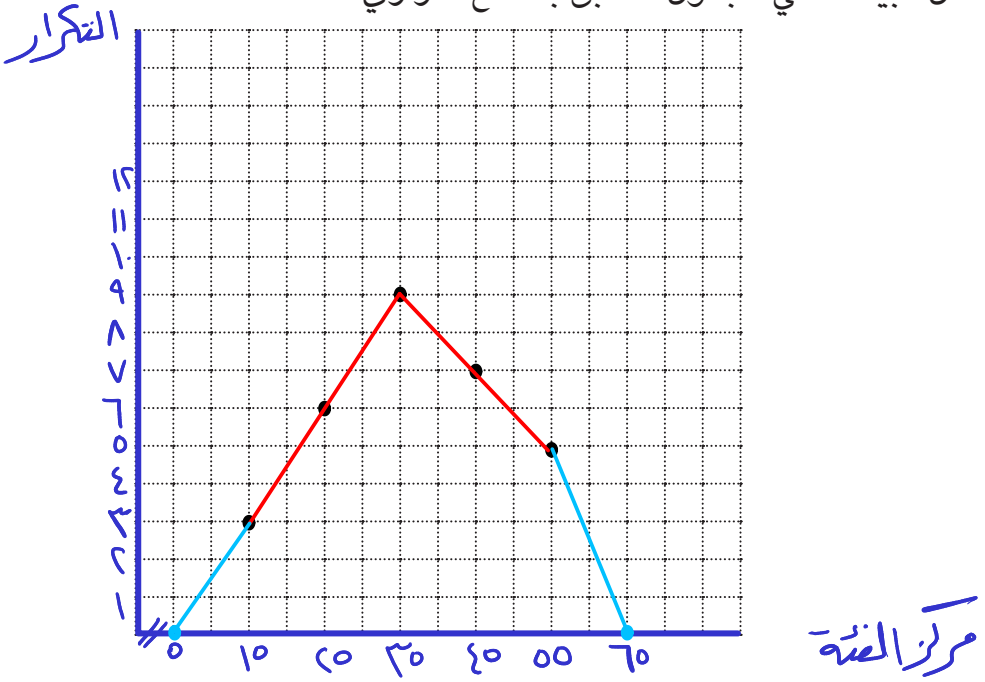
١٣٠

٢ يوضّح الجدول الآتي درجات الحرارة المسجَّلة لبعض دول العالم خلال أحد الأشهر.

الفئة	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
التكرار	٣	٦	٩	٧	٥
مركز الفئة	١٥	٢٥	٣٥	٤٥	٥٥

(أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ب) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



٣ يوضّح الجدول الآتي أوزان بعض متعلّمي الصفّ التاسع .

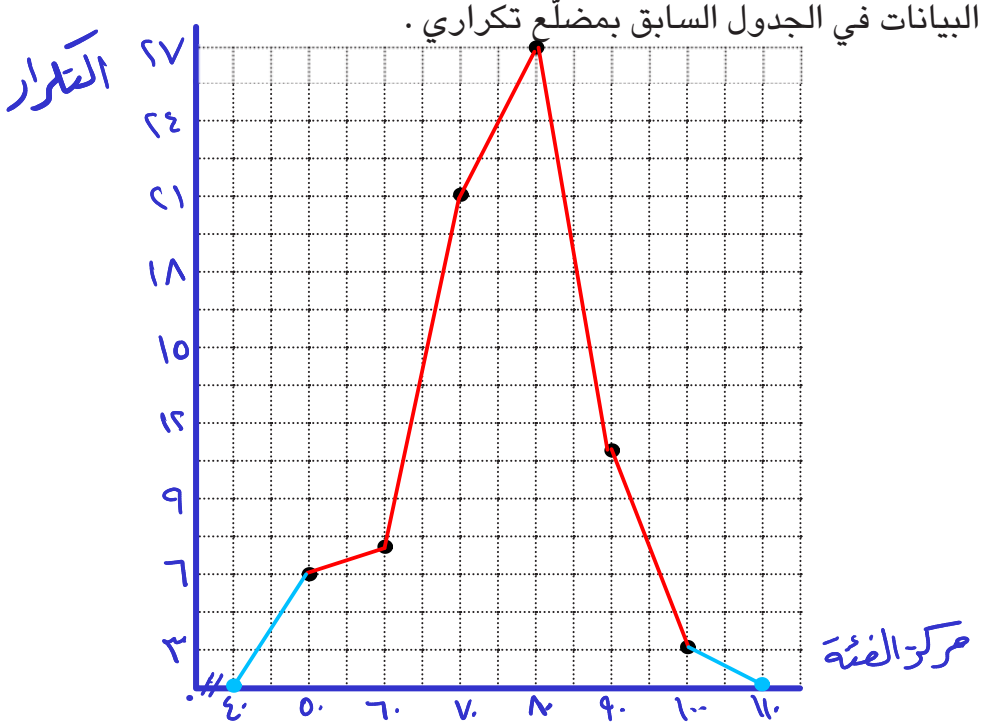
الفئة	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-	٩٥-
التكرار	٦	٧	٢١	٢٧	١١	٣
مركز الفئة	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٠

(أ) تأمَّل الجدول السابق ، ثمّ أجِب عمّا يلي :

- ما طول الفئة ؟ ١٠
- كم عدد المتعلّمين الذين يبلغ وزنهم ٦٥ كيلوجرامًا فأكثر ؟ ..... ٢١ + ٢٧ + ١١ + ٣ = ٦٢ متعلمًا

(ب) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ج) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



٤ يوضّح الجدول الآتي أعمار بعض زوّار مركز الشيخ جابر الأحمد الثقافي في أحد الأيّام .

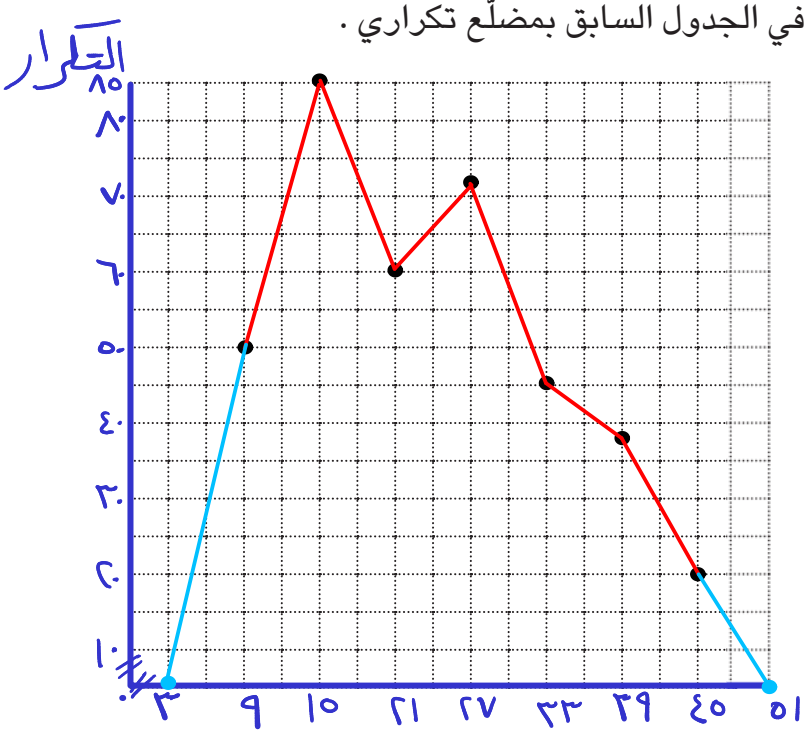
الفئة	-٦	-١٢	-١٨	-٢٤	-٣٠	-٣٦	-٤٢
التكرار	٥٠	٨٥	٦٠	٧٢	٤٥	٣٨	٢٠
مركز الفئة	٩	١٠	٢١	٢٧	٣٣	٣٩	٤٥

(أ) تأمَّل الجدول السابق ، ثمّ أجِب عمّا يلي :

- ما طول الفئة ١٢- ؟ ٦
- ما الحدّ الأعلى للفئة الأخيرة ؟ ٤٨

(ب) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ج) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



٤ - ٥

مخطّط الصندوق ذي العارضتَين
Box and Whisker Plot

سوف تتعلّم : قراءة وعرض توزيع البيانات مستخدِمًا مخطّط الصندوق ذي العارضتَين .

العبارات والمفردات :

مخطّط الصندوق ذي العارضتَين	Box and Wisker plot
الأرباعيات	Quartils
الأرباعي الأدنى	Lower Quartil
الأرباعي الأعلى	Upper Quartil

إستكشِف

لديك البيانات الآتية : ٨٢ ، ٧٧ ، ٨٥ ، ٧٦ ، ٨٠ ، ٧٥ ، ٨٤

١ رتِّب البيانات تصاعديًّا ..... ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٨٠ ، ٨٢ ، ٨٤ ، ٨٥

٢ أوجِد المدى ..... ٨٥ − ٧٥ = ١٠

٣ أوجِد الوسيط ٨٠

٤ أوجِد الوسيط للنصف الأدنى للبيانات ٧٦

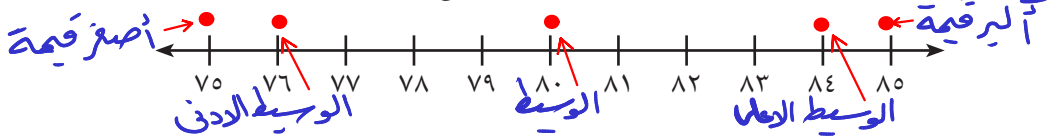
٥ أوجِد الوسيط للنصف الأعلى للبيانات ٨٤

لاحِظ أنّ

الوسيط يقسم البيانات المرتَّبة إلى نصفَين متساويَين ، نصف أدنى ونصف أعلى .

٦ مثِّل على خطّ الأعداد كلًّا ممّا يلي :

أكبر قيمة ، أصغر قيمة ، الوسيط ، الوسيط للنصف الأدنى للبيانات ، الوسيط للنصف الأعلى للبيانات .



الأرباعيات هي ثلاثة أعداد تقسّم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية من عدد البيانات .

الأرباعي الأوسط هو الوسيط .

الأرباعي الأدنى هو الوسيط للنصف الأدنى من مجموعة البيانات .

الأرباعي الأعلى هو الوسيط للنصف الأعلى من مجموعة البيانات .

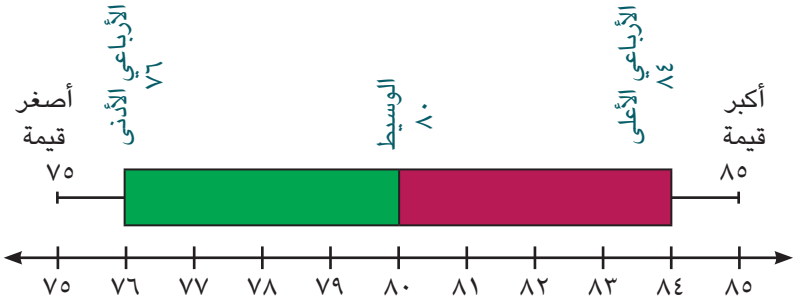
مخطّط الصندوق ذو العارضتَين هو طريقة لعرض توزيع مجموعة بيانات باستخدام خمس قِيَم رئيسية لها .

لعرض البيانات السابقة بمخطّط الصندوق ذي العارضتَين ، اِتّبِع الخطوات الآتية :

١ أُرسم خطّ الأعداد بحيث يتضمّن القيمتَين الكبرى والصغرى للبيانات .

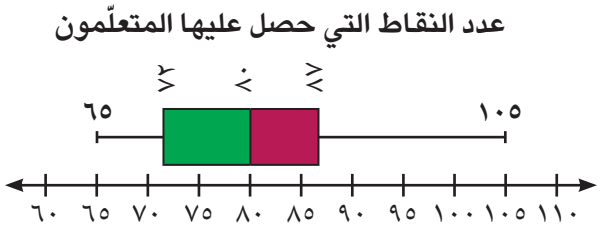
٢ حدِّد الوسيط والأرباعي الأعلى والأرباعي الأدنى على خطّ الأعداد .

٣ أُرسم الصندوق ذا العارضتَين كما في الشكل .



مثال (١) :

يبيّن مخطّط الصندوق ذي العارضتَين عدد النقاط التي حصل عليها بعض متعلّمي الصفّ التاسع في إحدى المسابقات .



أكمِل كلًّا ممّا يلي :

(أ) أصغر قيمة من البيانات هي ٦٥ وأكبر قيمة من البيانات هي ١٠٥

(ب) الأرباعي الأوسط (الوسيط) هو ٨٠

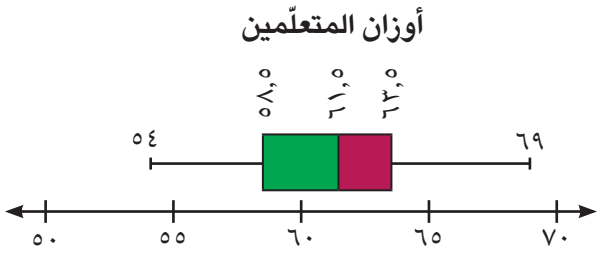
(ج) الأرباعي الأدنى هو ٧٢

(د) الأرباعي الأعلى هو ٨٧

دورك الآن (١)

يبيّن مخطّط الصندوق ذي العارضتَين أوزان بعض متعلّمي الصفّ التاسع بالكيلوجرامات .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :



(أ) القيمة الصغرى للبيانات هي ٥٤

والقيمة الكبرى للبيانات هي ٦٩

(ب) الأرباعي الأوسط (الوسيط) هو ٦١,٥

(ج) الأرباعي الأدنى هو ٥٨,٥

(د) الأرباعي الأعلى هو ٦٣,٥

مثال (٢) :

يتغيّر سعر الإعلان في الصحف الكبرى وفقًا ليوم الإعلان وعدد أسطره ومساحته ، إليك بعض هذه الأسعار بالدينار : ٥ ، ٤ ، ٣ ، ١٥ ، ٦ ، ٧ ، ١٢ ، ٨ ، ٢٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١٤ ، ٢٧ ، ١٦

اِصنع مخطّطًا لصندوق ذي عارضتَين لهذه الأسعار .

الحلّ :

١ رتِّب القيم تصاعديًّا :
٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٢٧

٢ المدى = ٢٧ - ٣ = ٢٤

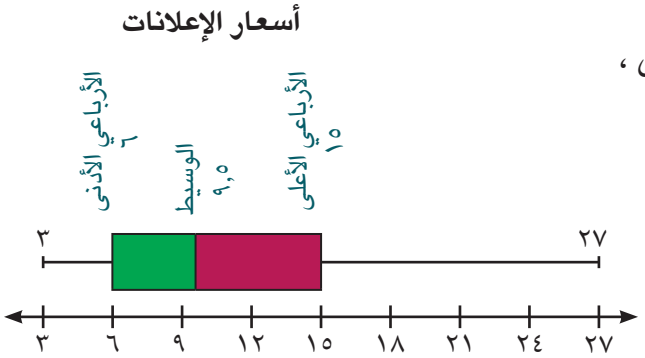
٣ الوسيط = $\frac{٩ + ١٠}{٢}$ = ٩,٥ دنانير

٤ نحدّد النصف الأدنى للبيانات : ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩
الأرباعي الأدنى = ٦

٥ نحدّد النصف الأعلى للبيانات : ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٢٧
الأرباعي الأعلى = ١٥

٦ أُرسم خطًّا يتضمّن القيمتين الكبرى والصغرى ،
ثمّ عيِّن عليه موقع كلّ من : الوسيط ،
الأرباعي الأدنى ، الأرباعي الأعلى .

٧ أُرسم صندوقًا يبيّن الأرباعيات ،
ثمّ اكتب عنوانًا .



دورك الآن (٢)

في مسابقة مادّة الرياضيات ، حصل أعضاء فريق إحدى المدارس المحلّية على الدرجات التالية (مرتَّبة ترتيبًا تصاعديًّا) : ٩٠ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٩ ، ١٠٠ أوجِد كلًّا ممّا يلي :

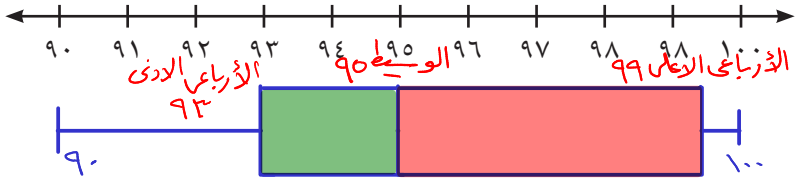
(أ) القيمة الصغرى للبيانات هي ..... ٩٠ ..... والقيمة الكبرى للبيانات هي ..... ١٠٠ .....

(ب) الأرباعي الأوسط (الوسيط) هو ..... ٩٥ .....

(ج) الأرباعي الأدنى هو ..... ٩٣ .....

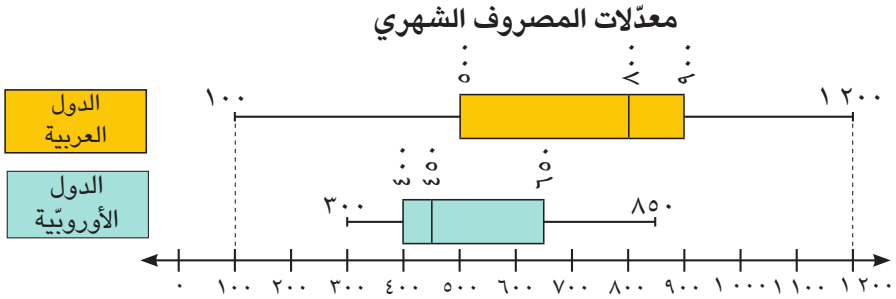
(د) الأرباعي الأعلى هو ..... ٩٩ .....

(هـ) أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين لهذه المجموعة من البيانات .



دورك الآن (٣)

في الشكل الآتي يوضّح مخطّط الصندوق ذي العارضتَين (العلوي) بيانات معدّل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأميركي في ١٢ دولة عربية ، ويمثّل مخطّط الصندوق ذي العارضتَين (السفلي) بيانات معدّل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأميركي في ١٢ دولة أوروبّية .



أكمِل الجدول الآتي :

	الدول العربية	الدول الأوروبّية
المدى	١١٠٠ = ١٠٠ − ١٢٠٠	٥٥٠ = ٣٠٠ − ٨٥٠
الوسيط	٨٠٠	٤٥٠
الأرباعي الأدنى	٥٠٠	٤٠٠
الأرباعي الأعلى	٩٠٠	٦٥٠
الوسيط أقرب إلى الأرباعي	٩٠٠	٤٠٠
الوسيط أبعد عن الأرباعي	٥٠٠	٦٠٠

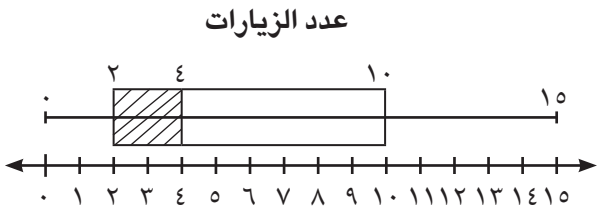
نلاحِظ أنّ :

١ الدول العربية تُنفق أكثر على الطعام من الدول الأوروبّية .

٢ التفاوت في الإنفاق على الطعام في الدول العربية أكبر من التفاوت في الإنفاق على الطعام في الدول الأوروبّية .

تمارين ذاتية :

١ سُئل عدد من المتعلّمين في أحد فصول الصفّ التاسع عن عدد مرّات زياراتهم لمحلّات بيع الملابس الرياضية خلال فترة ما ، والنتائجِ موضَّحة في مخطّط الصندوق ذي العارضتين في الشكل المقابِل .



أوجِد كلًّا ممّا يلي :

(أ) مدى البيانات ١٥

(ب) الوسيط ٤

(ج) الأرباعي الأدنى ٢

(د) الأرباعي الأعلى ١٠

٢ في مجموعة البيانات الآتية : ٤ ، ٨ ، ٥ ، ٣ ، ١ ، ٧ ، ٦ (بإعادة الترتيب)

١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨

(أ) أوجِد كلًّا ممّا يلي :

(١) القيمة الصغرى للبيانات هي ١

(٢) القيمة الكبرى للبيانات هي ٨

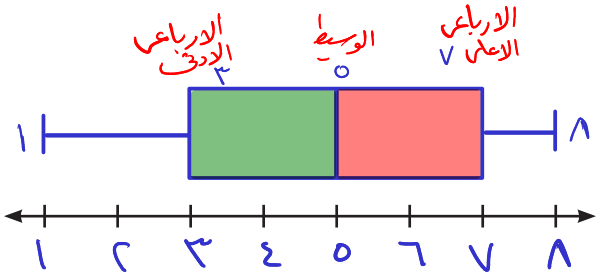
(٣) المدى هو ..... ٨ - ١ = ٧

(٤) الوسيط هو ٥

(٥) الأرباعي الأدنى هو ٣

(٦) الأرباعي الأعلى هو ٧

(ب) أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين لهذه المجموعة من البيانات .

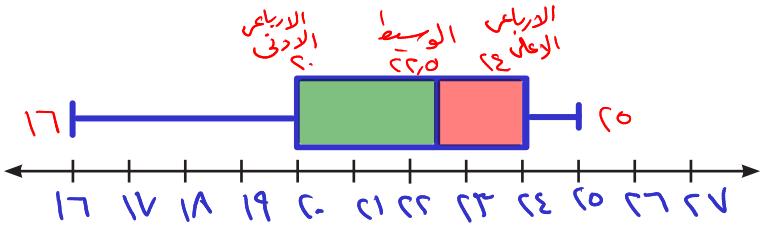


٣ تصفّحت حصّة كتيّبًا دعائيًّا لأحد متاجر الملابس . سجّلت أسعار الفساتين فيه (بالدينار) كالآتي : ٢٥ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٤ ، ٢٠

أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين لمجموعة البيانات السابقة .

الترتيب : ١٦ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٥

الوسيط = $\frac{٢٢ + ٢٣}{٢} = \frac{٤٥}{٢} = ٢٢,٥$



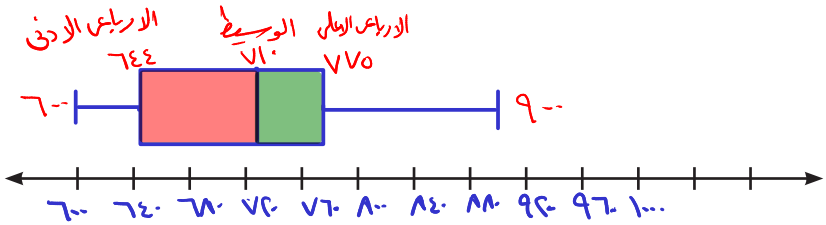
٤ أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين لمجموعة البيانات الآتية :

٩٠٠ ، ٧٠٠ ، ٧٧٥ ، ٦٢٤ ، ٦٨٨ ، ٧٦٠ ، ٧٢٠ ، ٧٨٩ ، ٦٤٤ ، ٦٠٠

الترتيب : ٦٠٠ ، ٦٢٤ ، ٦٤٤ ، ٦٨٨ ، ٧٠٠ ، ٧٢٠ ، ٧٦٠ ، ٧٧٥ ، ٧٨٩ ، ٩٠٠

الوسيط

الوسيط = $\frac{٧٢٠ + ٧٠٠}{٢} = ٧١٠$



٤ - ٦

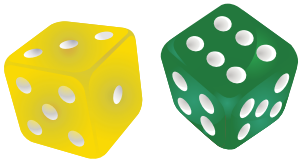
الترجيح والعدالة - الاحتمال
Odds and Fairness - Probability

سوف تتعلّم : إيجاد ترجيح وقوع حدث ما ، واحتمال وقوع حدث ما .

العبارات والمفردات :

تجربة	Experiment	ترجيح	Odds
تجربة عشوائية	Random Experiment	ألعاب عادلة	Fair Games
حدث	Event	الاحتمال	Probability
عدد نواتج	Number of Outcomes		

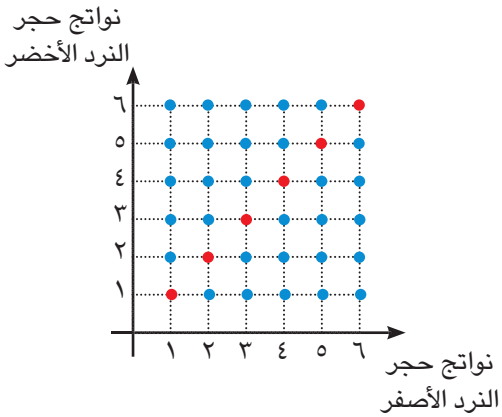
حُلّ وناقِش



يلعب عبدالله وعمر لعبة من ألعاب الفرص وهي رمي مكعّبَين متمايزَين منتظمَين مرقَّمَين من ١ إلى ٦ ، وملاحظة العددَين الظاهرَين على الوجه العلوي .

- يربح عبدالله نقطة إذا كان العددان الظاهران متساويَين .
- يربح عمر نقطة إذا كان العددان الظاهران مختلفَين .

١ مستعينًا بالتمثيل البياني لفضاء العيّنة المقابِل ، أكمِل الجدول التالي :



	عبدالله	عمر
عدد نواتج الفوز	٦	٣٠
عدد نواتج عدم الفوز	٣٠	٦
عدد نواتج الفوز / عدد نواتج عدم الفوز	٦/٣٠	٣٠/٦

٢ حدِّد أيّهما لديه فرصة أكبر للفوز ؟

اِشرح ذلك . عمر لديه الفرصة الأكبر لأنه عدد نواتج فوزه أكبر من عدد نواتج فوز عبدالله

يمكننا استخدام كلمة **ترجيح** لوصف فرصة وقوع حدث ما إلى عدم وقوعه .

ترجيح حدث ما : هو نسبة عدد نواتج وقوع الحدث إلى عدد نواتج عدم وقوعه .

$$\text{ترجيح حدث ما} = \frac{\text{عدد نواتج وقوع الحدث}}{\text{عدد نواتج عدم وقوع الحدث}}$$

مثال (١) :

عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة .
وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي .

(أ) أُكتب فضاء العيّنة .

(ب) أوجِد ترجيح ظهور العدد ٢ .

الحلّ :

(أ) ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

(ب) عدد نواتج (ظهور العدد ٢) = ١

عدد نواتج (عدم ظهور العدد ٢) = ٥

$$\text{ترجيح (ظهور العدد ٢)} = \frac{\text{عدد نواتج (ظهور العدد ٢)}}{\text{عدد نواتج (عدم ظهور العدد ٢)}}$$

$$= \frac{١}{٥} \text{ أو } ١ : ٥$$

تذكّر

فضاء العيّنة (ف) : هو مجموعة كلّ النواتج الممكنة عند إجراء تجربة عشوائية .

دورك الآن (١)

أوجِد ترجيح سحب قرص أزرق من حقيبة تحتوي على قرصَين أزرقَي اللون ، و ٥ أقراص حمراء اللون ، و ٤ أقراص بيضاء اللون .

عدد نواتج (سحب قرص أزرق) = ٢

عدد نواتج (عدم سحب قرص أزرق) = ٩

ترجيح (سحب قرص أزرق) = $\frac{\text{عدد نواتج (سحب قرص أزرق)}}{\text{عدد نواتج (عدم سحب قرص أزرق)}}$

$= \frac{٢}{٩}$

دورك الآن (٢)

أوجِد ترجيح كلّ حدث ممّا يلي :

أ ظهور صورة عند رمي قطعة نقود معدنية مرّة واحدة .

ف = { ص ، ك }

∴ ترجيح ظهور صورة = ١ : ١

ب ظهور العدد (٢ أو ٥) عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة .

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، عدد نواتج ظهور العدد (٢ أو ٥) = ٢

∴ ترجيح ظهور العدد (٢ أو ٥) = ٢ : ٤ = ١ : ٢

بالرجوع إلى حُلّ وناقِش السابق ، هل هذه اللعبة عادلة ؟ فسِّر إجابتك .

لا ليست عادلة لأن ترجيح فوز عمر لا يطابق ترجيح فوز عبدالله .

تذكّر

عند رمي قطعة نقود مرّة واحدة وملاحظة الوجه العلوي، فإنّ : ف = { ص ، ك }

اللعبة التي يكون ترجيح الفوز فيها متساويًا لجميع اللاعبين (تكافؤ الفرص) تُسمّى لعبة عادلة .

مثال (٢) :

يلعب كلّ من عبدالله وخالد وعيسى لعبة المكعّبات المرقَّمة من ١ إلى ٦ .
يحصل عبدالله على نقطة إذا ظهر على المكعّب العدد ١ .
يحصل خالد على نقطة إذا ظهر على المكعّب عدد زوجي .
يحصل عيسى على نقطة إذا ظهر على المكعّب العدد (٣ أو ٥) .
أوجِد ترجيح الفوز لكلّ لاعب ، ثمّ اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم غير عادلة .

الحلّ :

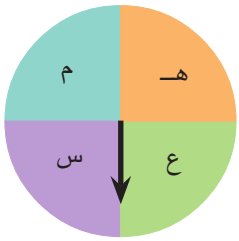
ترجيح فوز عبدالله = ١ : ٥

ترجيح فوز خالد = ٣ : ٣ = ١ : ١

ترجيح فوز عيسى = ٢ : ٤ = ١ : ٢

∴ إختلف ترجيح الفوز من لاعب إلى آخر ، لذلك تكون اللعبة غير عادلة .

دورك الآن (٣)



تتبادل كلّ من عائشة وهناء ومنيرة وساره تدوير المؤشّر في الشكل المقابِل ، على أن تحصل كلّ لاعبة على نقطة إذا توقّف المؤشّر عند الحرف الأوّل من اسمها ، أوجِد ترجيح الفوز لكلّ لاعبة ، ثمّ اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم غير عادلة .

ترجيح فوز عائشة = ١/٤ ، ترجيح فوز هناء = ١/٤

ترجيح فوز منيرة = ١/٤ ، ترجيح فوز ساره = ١/٤ ∴ اللعبة عادلة .

دورك الآن (٤)

في كلّ لعبة ، حدِّد ترجيح فوز كلّ لاعب ، ثمّ اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم غير عادلة .

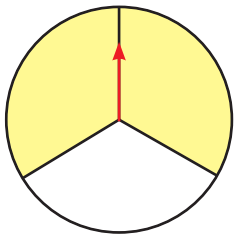
(أ) ترمي نوف وحنان قطعة نقود معدنية . تفوز نوف بنقطة إذا ظهرت صورة ، وتفوز حنان بنقطة إذا ظهرت كتابة .

ترجيح فوز نوف = ١/١ = ١

ترجيح فوز حنان = ١/١ = ١

∴ اللعبة عادلة

(ب) في الدوّارة التالية يُدير سالم ونايف المؤشّر الدوّار . يفوز سالم بنقطة إذا توقّف المؤشّر في المنطقة الصفراء ، ويفوز نايف بنقطة إذا توقّف المؤشّر في المنطقة البيضاء .



ترجيح فوز سالم = ٢/١ = ٢

ترجيح فوز نايف = ١/٢ = ١/٢

∴ اللعبة غير عادلة

(ج) عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ . إذا ظهر عدد زوجي تفوز منى بنقطة ، وإذا ظهر عدد أوّلي تفوز أمل بنقطة ، وإذا ظهر عدد يقبل القسمة على ٣ ، تفوز إيمان بنقطة .

ترجيح فوز منى = ٣/٦ = ١/٢

ترجيح فوز أمل = ٣/٦ = ١/٢

ترجيح فوز إيمان = ٢/٦ = ١/٣

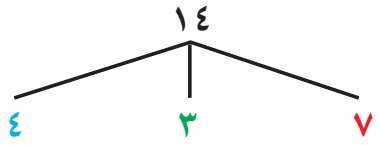
∴ اللعبة غير عادلة

لأيّ تجربة عشوائية ، اِحتمال وقوع حدث (أ) :

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد نواتج وقوع الحدث (أ)}}{\text{عدد كلّ النواتج الممكنة}}$$

مثال (٣) :

يحتوي صندوق على ٧ أقلام حمراء ، ٣ أقلام خضراء ، ٤ أقلام زرقاء . إذا تمّ اختيار قلم واحد عشوائيًّا ، فأوجِد كلًّا ممّا يلي :



(أ) ل (أزرق) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد كلّ النواتج الممكنة = ٤/١٤ = ٢/٧

(ب) ل (ليس أخضر) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد كلّ النواتج الممكنة = ١١/١٤

(ج) ل (أصفر) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد كلّ النواتج الممكنة = صفر/١٤ = صفر

(د) ترجيح الحدث أزرق = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد نواتج عدم وقوع الحدث = ٤/١٠ = ٢/٥

دورك الآن (٥)

في تجربة إلقاء مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة ، أكمِل كلًّا ممّا يلي :

(أ) عدد النواتج الممكنة = ٦

(ب) عدد نواتج الحدث أ (ظهور عدد فردي) = ٣

(ج) عدد نواتج الحدث ب (ظهور عامل من عوامل العدد ٦) = ٤

(د) ل (أ) = ٣/٦ = ١/٢

(هـ) ل (ب) = ٤/٦ = ٢/٣

(و) ترجيح الحدث أ = ٣/٣ = ١

(ز) ترجيح الحدث ب = ٤/٢ = ٢

إنتبه

إذا كان ترجيح الحدث هو ٣/١٠ ، فهذا لا يعني أنّ عدد نواتج وقوع الحدث هو ٣ وعدد نواتج عدم وقوعه هي ١٠ فقد تكون هذه النسبة مبسَّطة .

مثال (٤) :

إذا كان ترجيح حدث ما هو ٣ : ١٠ ، أوجِد احتمال وقوع هذا الحدث .

الحلّ :

ترجيح (الحدث) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد نواتج عدم وقوعه = ٣ك/١٠ك

إذًا عدد كلّ النواتج الممكنة = عدد نواتج وقوع الحدث + عدد نواتج عدم وقوعه

= ٣ك + ١٠ك = ١٣ك

إحتمال (الحدث) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد كلّ النواتج الممكنة = ٣ك/١٣ك

∴ إحتمال وقوع هذا الحدث = ٣/١٣

عبِّر عن فهمك

١ إذا كان ترجيح حدث ما هو ٧ : ١ ، فما هو احتمال وقوع هذا الحدث ؟ $\frac{٧}{٨}$

٢ إذا كان احتمال وقوع حدث ما يساوي $\frac{١}{٢}$ ، فما ترجيح هذا الحدث ؟ $\frac{١}{١} = ١$

٣ هل يمكن أن يتساوى ترجيح حدث ما مع احتمال هذا الحدث ؟

نعم، إذا كان تساوى احتمال حدوث الحدث هو صفر

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ترجيح كلّ حدث ممّا يلي :

أ (ظهور كتابة) عند رمي قطعة نقود معدنية مرّة واحدة

$\frac{١}{١} = ١$

ب الحصول على (عدد أكبر من أو يساوي ٢) عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة $\frac{٥}{١} = ٥$

ج (سحب كرة خضراء) من حقيبة تحتوي على ٤ كرات خضراء و٣ كرات حمراء

$\frac{٤}{٣}$

٢ أوجِد ترجيح الفوز في كلّ حالة ، ثمّ اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم لا :

أ عند رمي قطعة نقود معدنية ، يحصل سالم على نقطة إذا ظهرت صورة ويحصل سعود على نقطة إذا ظهرت كتابة .

ترجيح فوز سالم $= \frac{١}{١} = ١$ ، ترجيح فوز سعود $= \frac{١}{١} = ١$

∴ اللعبة عادلة .

ب عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ ، تحصل حصّة على نقطة إذا ظهر العدد ١ وتحصل عبير على نقطة إذا ظهر العدد (٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥) وتحصل هدى على نقطة إذا ظهر العدد ٦ .

ترجيح فوز حصّة $= \frac{١}{٥}$ ، ترجيح فوز عبير $= \frac{٤}{٢} = ٢$

ترجيح فوز هدى $= \frac{١}{٥}$ ∴ اللعبة غير عادلة .

٣ يحوي صندوق بطاقات متماثلة مرقَّمة من ١ إلى ١٠ ، إذا سحبت بطاقة عشوائيًّا ، فأوجِد كلًّا ممّا يلي :

٧،٥،٣،٢

أ ل (ظهور عدد أوّلي) ..... $\frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

٤،٢،١

ب ل (ظهور عامل من عوامل العدد ٤) ..... $\frac{٣}{١٠}$

ج ترجيح (ظهور عامل من عوامل العدد ٤) ..... $\frac{٣}{٧}$

١٠،٨،٦،٤،٢

هـ ترجيح (ظهور عدد زوجي) ..... $\frac{٥}{٥} = ١$

و ترجيح (ظهور العدد ١٠) ..... $\frac{١}{٩}$

٤ يمارس ٢٥ متعلّمًا في الصفّ التاسع رياضات مختلفة ، منهم ١٠ يمارسون رياضة كرة السلّة فقط ، ٨ يمارسون رياضة كرة القدم فقط والباقون يمارسون رياضة الجري فقط .

٧

اِختير متعلّم عشوائيًّا . ما احتمال أن يكون هذا المتعلّم :

أ ممارِسًا كرة السلّة ؟ ..... $\frac{١٠}{٢٥} = \frac{٢}{٥}$

ب لا يمارس رياضة الجري ؟ ..... $\frac{١٨}{٢٥}$

ج ممارِسًا كرة القدم أو رياضة الجري ؟ ..... $\frac{١٥}{٢٥} = \frac{٣}{٥}$

٥ إذا كان ترجيح حدث ما هو ٣ : ٢ ، فما احتمال هذا الحدث ؟ ..... $\frac{٣}{٥}$

٦ إذا كان احتمال وقوع حدث ما هو $\frac{٥}{٩}$ ، فما ترجيح هذا الحدث ؟ ..... $\frac{٥}{٤}$

تقويم الوحدة التعليمية الرابعة
Unit Four Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي :

أ) أ (٣ ، -٤) $\xrightarrow{د(و، ٩٠^\circ)}$ أ′ (٤ ، ٣)

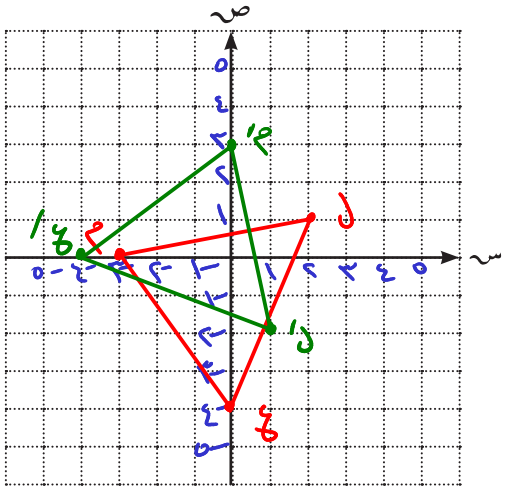
ب) أ (٣ ، -٤) $\xrightarrow{د(و، -٩٠^\circ)}$ أ′ (-٤ ، -٣)

ج) أ (٣ ، -٤) $\xrightarrow{د(و، ١٨٠^\circ)}$ أ′ (-٣ ، ٤)

د) أ (-٣ ، ٥) $\xrightarrow{ت(و، ٤)}$ أ′ (-١٢ ، ٢٠)

هـ) أ (٠ ، -١٠) $\xrightarrow{ت(و، \frac{١}{٥})}$ أ′ (٠ ، -٢)

٢ أُرسم المثلّث ع م ل الذي رؤوسه : ع (٠ ، -٤) ، م (-٣ ، ٠) ، ل (٢ ، ١) ، ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ٢٧٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة .



ع (٠ ، -٤) $\xrightarrow{د(و، ٢٧٠^\circ)}$ ع′ (-٤ ، ٠)

م (-٣ ، ٠) $\xrightarrow{د(و، ٢٧٠^\circ)}$ م′ (٠ ، ٣)

ل (٢ ، ١) $\xrightarrow{د(و، ٢٧٠^\circ)}$ ل′ (١ ، -٢)

٣ ليكن ت (و ، م) تكبيرًا حيث (و) نقطة الأصل ، ب ⟵ بَ ، جـ ⟵ جـَ .
أوجِد معامل التكبير أو التصغير (م) في كلّ من الحالات الآتية :

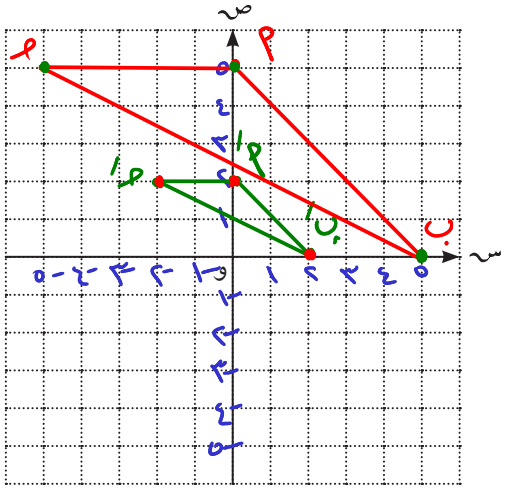
أ) ب (٤ ، ٨) ، بَ (١ ، ٢)

م = $\frac{١}{٤}$

ب) ب جـ = ٣ سم ، بَ جـَ = ٢٧ سم

م = $\frac{٢٧}{٣}$ = ٩

٤ أُرسم Δ أ ب جـ الذي رؤوسه هي : أ (٠ ، ٥) ، ب (٥ ، ٠) ، جـ (− ٥ ، ٥) ،
ثمّ ارسم صورته بتكبير ت (و ، $\frac{٢}{٥}$) .



أ (٥ ، ٠) ت (و ، $\frac{٢}{٥}$) ← أ' (٢ ، ٠)

ب (٥ ، ٠) ت (و ، $\frac{٢}{٥}$) ← ب' (٢ ، ٠)

جـ (− ٥ ، ٥) ت (و ، $\frac{٢}{٥}$) ← جـ' (− ٢ ، ٢)

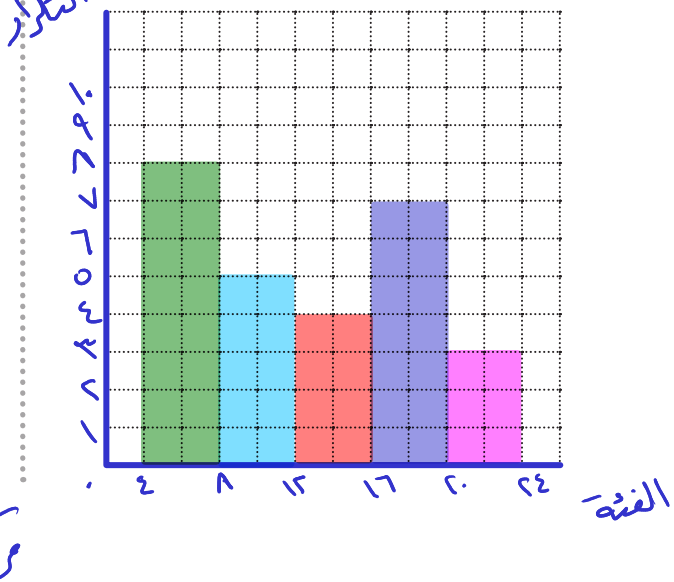
Δ أ ب جـ ت (و ، $\frac{٢}{٥}$) ← Δ أ' ب' جـ'

٥ من الجدول التكراري الآتي :

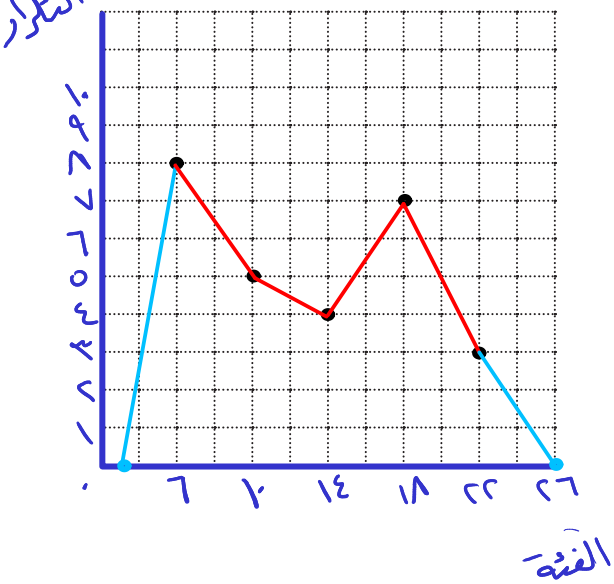
الفئة	−٤	−٨	−١٢	−١٦	−٢٠
التكرار	٨	٥	٤	٧	٣
مركز الفئة	٦	١٠	١٤	١٨	٢٢

(أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ب) مثِّل البيانات السابقة بمدرَّج تكراري .



(ج) مثِّل البيانات السابقة بمضلّع تكراري .

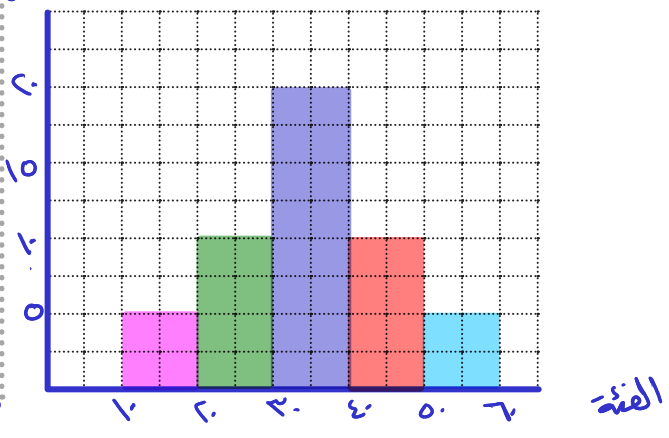


٦ من الجدول التكراري الآتي :

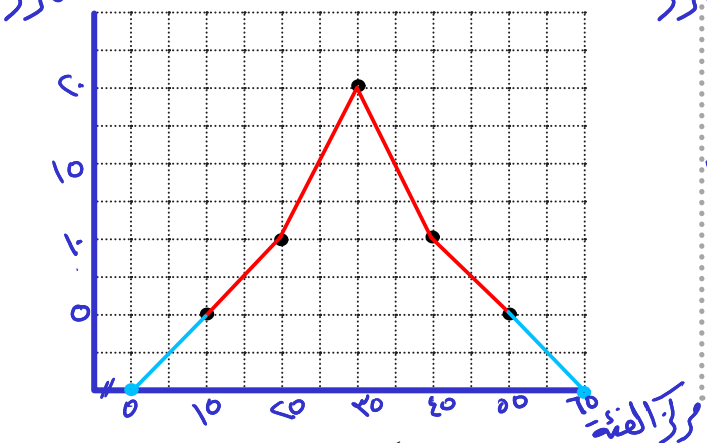
الفئة	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
التكرار	٥	١٠	٢٠	١٠	٥
مركز الفئة	١٥	٢٥	٣٥	٤٥	٥٥

(أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

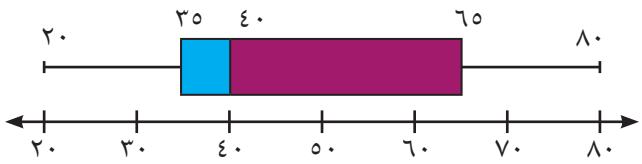
(ب) مثِّل البيانات السابقة بمدرَّج تكراري .



(ج) مثِّل البيانات السابقة بمضلّع تكراري .



٧ يبيّن مخطّط الصندوق ذي العارضتَين مجموعة من البيانات ، أوجد كلًّا ممّا يلي :



(أ) المدى = ... ٨٠ - ٢٠ = ٦٠ .....

(ب) الوسيط = ... ٤٠ .....

(ج) الأرباعي الأدنى = ... ٣٥ .....

(د) الأرباعي الأعلى = ... ٦٥ .....

٨ جاءت أوزان عدد من متعلّمي الصفّ التاسع بالكيلوجرام كما يلي :

٦٥ ، ٥٧ ، ٥٩ ، ٦١ ، ٥٠ ، ٦٧ ، ٦٤ ، ٦٦ ، ٦٠ ، ٦٣ ، ٦٩

الترتيب ٥٠، ٥٧، ٥٩، ٦٠، ٦١، ٦٣، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٦٧، ٦٩

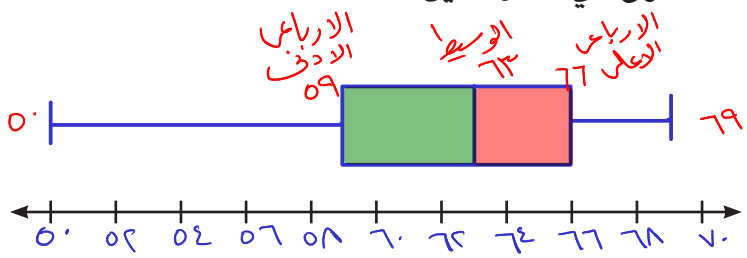
أوجِد كلًّا من :

(أ) الوسيط = ٦٣

(ب) الأرباعي الأدنى = ٥٩

(ج) الأرباعي الأعلى = ٦٦

(د) أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين .



٩ أوجِد احتمال وقوع الأحداث التي ترجيحها كالآتي :

(أ) ١ : ٧ ..... $\frac{١}{٨}$ .....

(ب) ٦ : ٥ ..... $\frac{٦}{١١}$ .....

١٠ يحتوي كيس على ٨ كرات زرقاء و٣ كرات خضراء و٤ كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء .
سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا.

أوجِد كلًّا ممّا يلي :

(أ) ل (زرقاء) ..... $\frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

(ب) ل (بيضاء) ..... $\frac{١}{١٦}$

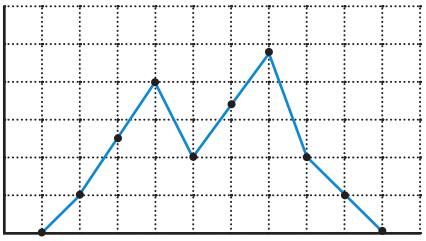
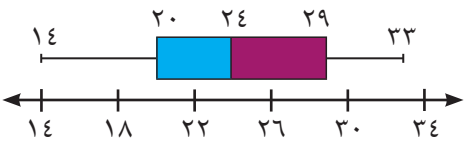
(ج) ل (ليست خضراء) ..... $\frac{١٣}{١٦}$

(د) ترجيح (سحب كرة زرقاء) ..... $\frac{٨}{٨} = ١$

(هـ) ترجيح (سحب كرة حمراء) ..... $\frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٨) ، ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

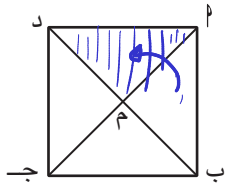
١ د (و ، -٣٠°) يكافئ د (و ، ٣٣٠°)	[أ]	[ب]
٢ الدوران تحويل هندسي لا يحافظ على الأبعاد .	[أ]	[ب]
٣ التكبير تحويل هندسي لا يحوي نقاطًا صامدة .	[أ]	[ب]
٤ مثلّث أطوال أضلاعه ٥ سم ، ٦ سم ، ٣ سم ، فإنّ محيط صورته تحت تأثير تكبير ت (و ، ٢) هو ٢٨ سم .	[أ]	[ب]
٥ طول الفئة (٤ - ٩) هو ٥	[أ]	[ب]
٦ أسلوب التمثيل في الشكل المجاور هو : المدرَّج التكراري . 	[أ]	[ب]
٧ في مخطّط الصندوق ذي العارضتَين المقابِل ، الأرباعي الأعلى لهذه البيانات هو ٢٠ 	[أ]	[ب]
٨ عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ ، يفوز عيد بنقطة إذا ظهر عدد أوّلي ، ويفوز فهيد بنقطة إذا ظهر عدد زوجي ، فإنّ هذه اللعبة عادلة .	[أ]	[ب]

في البنود (٩ - ١٨) ، لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٩ شكل هندسي مساحته ٢ سم^{٢} ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ما هي ٥٠ سم^{٢} ، فإنّ معامل التكبير هو :

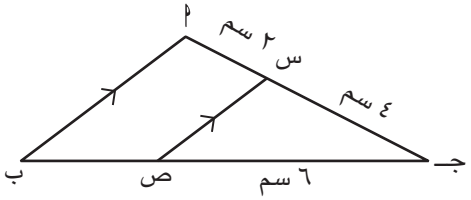
[أ] ٢٥ [ب] ١٢,٥ [ج] ٥ [د] ١٠٠

١٠ ﺃ ب جـ د مربّع تقاطع قطرَيه في النقطة م ، صورة Δ ﺃ ب م بدوران د (م ، - ٢٧٠°) هي :



أ Δ ب جـ م
ب Δ ﺃ ب م
ج Δ جـ د م
د Δ د ﺃ م

١١ في الشكل المقابِل : إذا كانت س ص صورة ﺃ ب بتكبير مركزه جـ ، فإنّ معامله هو :



أ $\frac{٢}{٣}$
ب $\frac{٣}{٢}$
ج $\frac{١}{٢}$
د ٢

١٢ إذا كانت النقطة جـ (١ ، ٢) هي صورة النقطة ﺃ بتصغير ت (و ، $\frac{١}{٣}$) ، فإنّ ﺃ هي :

أ ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)
ب (٣ ، ١)
ج (٦ ، ٣)
د (٥ ، ٣)

١٣ مركز الفئة الثالثة هو :

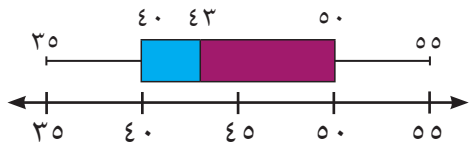
الفئة	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦
التكرار	٦	١٨	١٨	١٠

أ ١٨
ب ٢٠
ج ٢٢
د ٢٤

١٤ في البيانات الإحصائية ، إذا كان مركزا فئتَين متتاليتَين هما ١٥ ، ٢٥ على الترتيب ، فإنّ طول الفئة يساوي :

أ ١٠
ب ١٥
ج ٢٠
د ٢٥

١٥ في مخطّط الصندوق ذي العارضتَين التالي ، المدى لهذه البيانات هو :



أ ٥٠
ب ٤٣
ج ٤٠
د ٢٠

١٦ إذا كان الترجيح لحدث ما يساوي ٢ : ٣ ، فإنّ احتمال وقوع هذا الحدث يساوي :

أ $\frac{٢}{٥}$ ب $\frac{٢}{٣}$ ج $\frac{٣}{٢}$ د $\frac{٣}{٥}$

١٧ إذا كان احتمال وقوع حدث ما $\frac{٥}{١٣}$ ، فإنّ ترجيح هذا الحدث هو :

أ ٨ : ١٣ ب ٥ : ١٨ ج ٨ : ٥ د ٥ : ٨

١٨ ترجيح ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة هو :

أ ١ : ٣ ب ١ : ٢ ج ٢ : ١ د ٣ : ١