هل أنت مستعدّ؟

١ أوجِد العوامل الموجَبة لكلّ من الأعداد الآتية:

(أ) ١٢ ..... ١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢

(ب) ٣٠ ..... ١، ٢، ٣، ٥، ٦، ١٠، ١٥، ٣٠

٢ أوجِد مضاعَفات الأعداد الآتية :

(أ) ٤ ..... ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤، ...

(ب) ٦ ..... ١٢، ١٨، ٢٤، ٣٠، ٣٦، ...

٣ أوجِد العوامل الأولية لكلّ من الأعداد الآتية :

(أ) ٩ ..... ٣

(ب) ١٥ ..... ٣، ٥

٤ أكمِل الجدول الآتي بوضع (✓) في المكان المناسِب :

العدد \ قابلية القسمة	٢	٣	٥
٣٥٦	✓		
٢٢٧١		✓	
٩٠٠	✓	✓	✓

٥ أُذكر ما إذا كان كلّ عدد من الأعداد الآتية عددًا فرديًّا أو عددًا زوجيًّا :

(أ) ٩ ..... فردي

(ب) ٥٨ ..... زوجي

(ج) ٦٠ ..... زوجي

(د) ١٣ ..... فردي

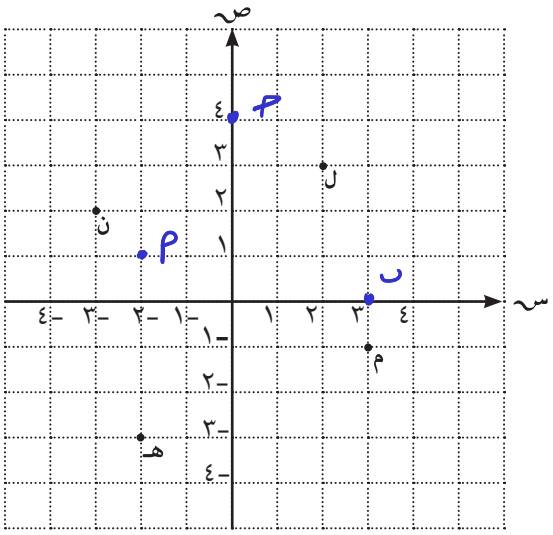
٦ أُذكر ما إذا كان كلّ عدد من الأعداد الآتية عددًا أوليًّا أو غير أوليّ :

(أ) ٢٩ ..... أولي

(ب) ٣٥ ..... غير أولي

(ج) ٧ ..... أولي

(د) ٩ ..... غير أولي



٧ مثِّل كلّ زوج مرتَّب ممّا يلي في المستوى الإحداثي :

أ (-٢ ، ١)

ب (٣ ، ٠)

جـ (٠ ، ٤)

٨ في المستوى الإحداثي المقابِل، أُكتب الزوج المرتَّب الذي يمثّل كلّ نقطة فيما يلي :

ل (٢ ، ٣)

م (٣ ، ١-)

ن (٣- ، ٢)

هـ (٢- ، ٣-)

٩ أُكتب تعبيرًا جبريًّا لكلّ ممّا يلي :

(أ) ك مضافًا إليها العدد ٢.

ك + ٢

(ب) ضعف العدد ص.

٢ ص

(ج) مربّع العدد ن.

ن٢

(د) نصف العدد م.

$\frac{1}{2}$ م

(هـ) ثلث العدد س.

$\frac{1}{3}$ س

هل أنت مستعدّ؟

١ - ١ المجموعات Sets

سوف تتعلّم : مفهوم المجموعة وعناصرها وكتابة المجموعة وتمثيلها .

العبارات والمفردات :

مجموعة	Set	مخطّط ڤن	Venn Diagram
عنصر	Element	المجموعة الخالية ∅	Empty Set
اِنتماء ∈	Belongs to	منتهية	Finite
عدم انتماء ∉	Doesn't Belong to	غير منتهية	Infinite



شارك المنتخب الكويتي لكرة القدم في بطولة كأس العالم عام ١٩٨٢ م ، وكان المنتخب الكويتي يضمّ ١١ لاعبًا أساسيًّا مميَّزًا ؛ منهم : جاسم يعقوب ، فتحي كميل ، فيصل الدخيل ، ... إلخ

المنتخب الكويتي عبارة عن تجمّع من اللاعبين ، وهذا التجمّع يُسمّى مجموعة وكلّ لاعب فيها يمثّل عنصرًا في المجموعة . فمثلًا : أرقام لاعبي المنتخب الكويتي تشكّل مجموعة وكلّ رقم في هذه المجموعة يشكّل عنصرًا .

المجموعة هي تجمّع من الأشياء المتمايزة المحدَّدة تحديدًا تامًّا ، ويُطلق على هذه الأشياء عناصر .

فمثلًا :

- يشكّل « المتعلّمون في ثانوية المباركية للعام الحالي » مجموعة لأنّها محدَّدة تحديدًا تامًّا ، ولكن لا يشكّل « المتعلّمون » مجموعة لأنّهم غير محدَّدين تحديدًا تامًّا .
- « لاعبو فريق كرة القدم الحالي في مدرسة الجهراء الثانوية » يشكّلون مجموعة .
- « المناطق الجميلة في الكويت » لا تشكّل مجموعة .

معلومة مفيدة :



تاريخ مهمّ في ذاكرة الشعب الكويتي عام ١٩٨٢م حين وصل المنتخب الكويتي إلى نهائيات كأس العالم حيث أحضروا ٤ جمال إلى أرض الملعب في إسبانيا اعتزازًا منهم بتاريخهم وتأكيدًا على القوّة والقدرة على التحمّل والصبر وكتبوا عبارة (جمالنا تنتصر) .

مثال (١) :

أجِب عن الأسئلة الآتية :

(أ) هل « المدرّبون » يشكّلون مجموعة أو لا يشكّلون مجموعة؟ ولماذا؟

(ب) هل « دول مجلس التعاون الخليجي » تشكّل مجموعة أو لا تشكّل مجموعة؟ ولماذا؟

الحلّ :

(أ) كلّا ، لا يشكّلون مجموعة ؛ لأنّهم غير محدَّدين تحديدًا تامًّا.

(ب) نعم ، تشكّل مجموعة ؛ لأنّها محدَّدة تحديدًا تامًّا.

دورك الآن (١)

حدِّد ما إذا كان كلّ ممّا يلي يمثّل مجموعة أم لا ، فسِّر إجابتك :

(أ) مضاعَفات العدد ٩ الأصغر من ٢٨ (تمثل لانها محددة تحديدًا تامًا)

(ب) أيّام الأسبوع (تمثل لانها محددة تحديدًا تامًا)

(ج) الأزهار الجميلة (لا تمثل لانها غير محددة تحديدًا تامًا)

(د) الأعداد الكلّية (ط) : ٠ ، ١ ، ٢ ، ... لا تمثل لانها غير محددة تحديدًا تامًا

أُذكر أمثلة لمجموعات أخرى.

(هـ) فصول السنة { صيف ، شتاء ، خريف ، ربيع }

(و) أصابع اليد { خنصر ، بنصر ، وسطى ، سبابة ، ابهام }

تذكّر

يُرمز إلى الأعداد الكلّية (الطبيعية) بالرمز ط ، وإلى الأعداد الصحيحة بالرمز صـ ، وإلى الأعداد الصحيحة الموجَبة بالرمز صـ+ ، وإلى الأعداد الصحيحة السالبة بالرمز صـ- .

ملاحظة :

- يُرمز إلى المجموعة بأحرف مثل : سـ ، صـ ، شـ ، ...
- ويُرمز إلى العناصر بأحرف مثل : س ، ص ، ش ، ... .
- يجب كتابة جميع عناصر المجموعة داخل قوسَين { } مع وضع فاصلة بين كلّ عنصر وآخر .
- يجب عدم تكرار كتابة العنصر نفسه داخل المجموعة .
- لا يُشترط ترتيب كتابة العناصر داخل المجموعة .

فمثلًا: لكتابة مجموعة أحرف كلمة سندس تكون كما يلي : سـ = { س ، د ، ن } .

لاحِظ ما يلي : بعد انتهاء المباراة غادر كلّ اللاعبين الملعب ، وفي هذه الحالة فإنّ مجموعة اللاعبين في الملعب بعد المغادرة لا تحتوي على عناصر .

المجموعة التي لا تحتوي على عناصر (عدد عناصرها يساوي صفرًا) تُسمّى مجموعة خالية ، ويُرمز إليها بالرمز { } أو ∅ وتُقرأ (فاي) .

فمثلًا :

- مجموعة المتعلّمون الذين تقلّ أعمارهم عن ١٠ سنوات في الصفّ الثامن يشكّلون مجموعة خالية .
- مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من ٠ والأصغر من ١ تُسمّى مجموعة خالية .

دورك الآن (٢)

حدِّد أيًّا من المجموعات الآتية تمثّل مجموعة خالية وأيّها لا تمثّل مجموعة خالية .

(أ) مجموعة الأشهر الميلادية التي يزيد عدد أيّامها على ٣١ يومًا (لا تمثل مجموعة خالية)

(ب) مجموعة أرقام العدد ٢٢٠ ١٦٩ (لا تمثل مجموعة خالية)

(ج) مجموعة المكعّبات التي ليس لها رؤوس . (تمثل مجموعة خالية)

عبِّر عن فهمك

هل مجموعة الأعداد الكلّية (الطبيعية) الأصغر من ١ تمثّل مجموعة خالية أم لا ؟ فسِّر إجابتك .

لا تمثل لانها بدأت بالصفر

لاحِظ ما يلي: اللاعب فتحي كميل ينتمي إلى مجموعة لاعبي المنتخب الوطني الكويتي ، في حين أنّ المدرّب لا ينتمي إلى المجموعة نفسها .

فمثلًا : العدد (-٢) لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد الكلّية ، بينما العدد (٢) ينتمي إلى مجموعة الأعداد الكلّية .

لاحِظ ما يلي:

المفهوم	التعريف	الرمز	مثال
ينتمي إلى	وجود العنصر في المجموعة	$\in$	٤ $\in$ { ٤ ، ٢ ، ١ ، ٥ }
لا ينتمي إلى	عدم وجود العنصر في المجموعة	$\notin$	٧ $\notin$ { ٣ ، ٢ ، ٦ ، ٥ }

دورك الآن (٣)

أكمِل كلًّا ممّا يلي بوضع الرمز المناسِب $\in$ أو $\notin$ لتحصل على عبارة صحيحة :

(أ) ن $\notin$ { ا ، هـ ، ج }

(ب) ر $\in$ مجموعة أحرف كلمة حريق

(ج) ٧ $\notin$ { ٧٧ }

(د) ٨ $\in$ { ١ ، ٨ ، ٤ }

لاحِظ أنّ :

العوامل الموجَبة للعدد ١٠ هي : +١ ، +٢ ، +٥ ، +١٠ .

العوامل السالبة للعدد ١٠ هي : -١ ، -٢ ، -٥ ، -١٠ .

عوامل العدد ١٠ هي : ± ١ ، ± ٢ ، ± ٥ ، ± ١٠ .

طرق التعبير عن المجموعة:

إذا كانت س هي مجموعة العوامل الموجَبة للعدد ٨ ، يمكن التعبير عن المجموعة بالطرق الآتية :

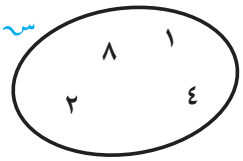
- **الطريقة الأولى : ذكر العناصر** : س = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ }

- **الطريقة الثانية :** الصفة المميِّزة :

(أ) **لفظية :** سـ = مجموعة العوامل الموجَبة للعدد ٨

(ب) **رمزية :** سـ = { أ : أ ∈ صـ ، أ عامل من العوامل الموجَبة للعدد ٨ }

- **الطريقة الثالثة :** تمثيل المجموعة بالرسم بشكل يُسمّى مخطّط (شكل) ڤن



مثال (٢) :

إذا كانت صـ هي مجموعة أرقام العدد ٩٧٣ ٧٠١ ،
فعبِّر عن المجموعة بالطرق الآتية : الصفة المميِّزة (لفظية) - ذكر العناصر - الصفة المميِّزة (رمزية) .

الحلّ :

الصفة المميِّزة (لفظية)	صـ = مجموعة أرقام العدد ٩٧٣ ٧٠١	صـ ٠ ١ ٣ ٧ ٩ مخطّط ڤن
ذكر العناصر	صـ = { ٠ ، ١ ، ٣ ، ٧ ، ٩ }	
الصفة المميِّزة (رمزية)	صـ = { أ : أ ∈ ط ، أ أحد أرقام العدد ٩٧٣ ٧٠١ }	

دورك الآن (٤)

إذا كانت سـ هي مجموعة العوامل الموجَبة للعدد ٦ ،
فعبِّر عن المجموعة بالطرق الآتية : الصفة المميِّزة (لفظية) - ذكر العناصر - الصفة المميِّزة (رمزية) .
أكمِل الجدول الآتي :

الصفة المميِّزة (لفظية)	سـ = مجموعة العوامل الموجبة للعدد ٦	سـ ١ ٣ ٢ ٦ مخطّط ڤن
ذكر العناصر	سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ }	
الصفة المميِّزة (رمزية)	سـ = { أ : أ ∈ ط ، أ أحد العوامل الموجبة للعدد ٦ }	

حلّ وناقِش

أيّ المجموعتَين الآتيتَين يمكن حصر عدد عناصرها ؟ فسِّر إجابتك .

سـ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

ع = مجموعة الأعداد الكلّية الأكبر من أو تساوي ٦

سـ يمكن حصر عدد عناصرها لأنها محددة تحديدًا تامًا

.....

.....

المجموعة المنتهية : هي المجموعة التي يمكن حصر عدد عناصرها .
المجموعة غير المنتهية : هي المجموعة التي لا يمكن حصر عدد عناصرها .

مثال (٣) :

حدِّد أيّ المجموعات الآتية مجموعة منتهية وأيّها مجموعة غير منتهية .

(أ) سـ = مجموعة عوامل العدد ٦

(ب) ل = مجموعة مضاعَفات العدد ٦

(ج) صـ = مجموعة الأعداد الصحيحة

انتبه

ميِّز بين مفهومَي :
- عوامل العدد .
- ومضاعَفات العدد .

الحلّ :

سـ = { ١- ، ٢- ، ٣- ، ٦- ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ } مجموعة منتهية (يمكن حصر عدد عناصرها)

ل = { ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، ... } مجموعة غير منتهية (لا يمكن حصر عدد عناصرها)

صـ = { ... ، ٢- ، ١- ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ... } مجموعة غير منتهية (لا يمكن حصر عدد عناصرها)

دورك الآن (٥)

أكمِل كتابة كلّ من المجموعات الآتية بذكر العناصر ، ثمّ حدِّد أيًّا منها منتهية وأيًّا منها غير منتهية .

(أ) صـ = { ا : ا ∈ ط ، ا مضاعَف من مضاعَفات العدد ١٠ }
صـ = { ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ... } ، صـ مجموعة غير منتهية

(ب) سـ = { ا : ا ∈ صـ ، ا عامل من عوامل العدد ٩ }
سـ = { ١- ، ٩- ، ٣- ، ١ ، ٣ ، ٩ } ، سـ مجموعة منتهية

(ج) ن = { ا : ا ∈ ط ، ا عدد يقبل القسمة على ٢ }،
ن = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ... } ، ن مجموعة غير منتهية

تمارين ذاتية :

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي بوضع الرمز المناسِب ∈ أو ∉ لتصبح كلّ من العبارات الآتية صحيحة:

(أ) ع ∈ { ع ، م ، ل }

(ب) ٩ ∉ { ا : ا ∈ صـ }

(ج) ٢٣ ∉ { ١ ، ٢ ، ٣ }

(د) ق ∈ مجموعة أحرف كلمة فريق

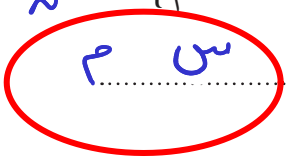
(هـ) ٤ ∉ { ا : ا ∈ ط ، ا عامل أوّلي من عوامل العدد ٢٠ }

(و) ٥ ∉ { ٤٥٥ }

٢ عبِّر عن كلّ مجموعة ممّا يلي بذكر العناصر ومثِّلها بمخطّط ڤن .

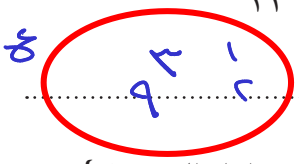
(أ) س = { س : س حرف من أحرف كلمة سمسم }

س = { س ، م }



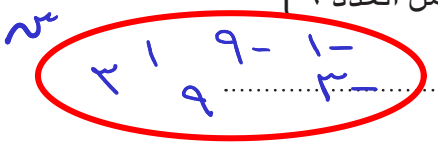
(ب) ع = مجموعة أرقام العدد ١٢٩ ٢٣

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٩ }



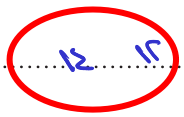
(ج) س = { ٢ : ٢ ∈ ط ، ٢ عامل من عوامل العدد ٩ }

س = { ١- ، ١ ، ٣- ، ٣ ، ٩- ، ٩ }



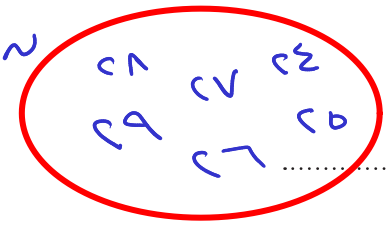
(د) ل = { ٢ : ٢ ∈ صـ ، ٢ عدد زوجي أكبر من ١٠ وأصغر من ١٥ }

ل = { ١٢ ، ١٤ }



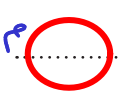
(هـ) ن = { ب : ب ∈ ط ، ٢٣ < ب ≤ ٢٩ }

ن = { ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ }



(و) م = مجموعة الأعداد الكلّية الأكبر من ٨ والأصغر من ٩

م = { } ← مجموعة خالية ∅



٣ حدِّد أيًّا من المجموعات الآتية تمثِّل مجموعة خالية ، وأيّها لا تمثِّل مجموعة خالية .

(أ) س = مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١ ، ٥ وتقبل القسمة على ٦. (لا تمثل)

(ب) ع = { ٢ : ٢ ∈ ط ، ٢ < ٣ }. (لا تمثل)

٤ عبِّر عن كلّ مجموعة ممّا يلي بذكر الصفة المميِّزة (بالصورة الرمزية) .

(أ) س = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ... }

س = { م : م أحد مضاعفات العدد ٣ }

(ب) ع = { ٢ ، ١ ، ٠ ، ١- ، ٢- ، ٣- ، ٤- ، ٥- }

ع = { م : م أحد أعداد الصحيحة التي أكبر من ٦- وأصغر من ٣ }

٥ عبِّر عن كلّ مجموعة ممّا يلي بذكر صفة مميِّزة (بالصورة اللفظية) ، ومثِّلها بمخطّط ڤن .

أ ح = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }

ح : مجموعة الاعداد الأولية الأكبر من ٢ وأصغر من ١٢

ب ن = { م ، ح ، د }

ن : مجموعة حروف كلمة حمد

٦ أُكتب كلًّا من المجموعات الآتية بذكر العناصر ، ثمّ حدِّد ما إذا كانت المجموعة منتهية أم غير منتهية .

أ ص = مجموعة الأعداد الصحيحة

غير منتهية

ب ع = { ا : ا ∈ ط ، ا > ١ }

منتهية

ج ل = { س : س ∈ ص ، س > ٥ }

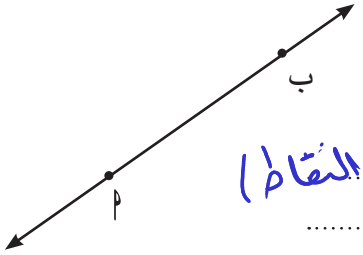
غير منتهية

د س = { ب : ب ∈ ط ، -٣ > ب ≥ ٤ }

منتهية

مهارات تفكير عليا:

٧ هل مجموعة نقاط $\overleftarrow{أب}$ منتهية أو غير منتهية ؟ وضِّح إجابتك .



غير منتهية لانه لا يمكن حصر عناصرها (عدد النقاط)

١ - ٢ المجموعة الجزئية – تساوي مجموعتَين
Subset - Equal Sets

سوف تتعلّم : المجموعة الجزئية وتساوي مجموعتَين .

العبارات والمفردات :

مجموعة جزئية ⊇	Subset	تساوي مجموعتَين	Equal Sets
مجموعة غير جزئية ⊉	Not subset		

اِستكشِف



التعليم في الكويت يُعدّ من أهمّ المجالات التي ترعاها الدولة حيث نصّت المادّة (٤٠) في الدستور الكويتي على أنّ التعليم حقّ للكويتيين ، ويكون التعليم إلزاميًّا مجّانيًّا لجميع الكويتيين من ذكور وإناث من بداية المرحلة الابتدائية حتّى نهاية المرحلة المتوسّطة .

لتكن س هي مجموعة الصفوف التي يكون فيها التعليم في الكويت إلزاميًّا للكويتيين .

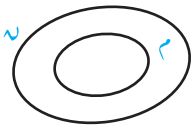
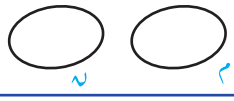
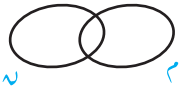
أكمِل ما يلي :

ص هي مجموعة صفوف المرحلة الابتدائية ، ص = { الأوّل ، الثاني ، الثالث ، الرابع ، الخامس }

ع هي مجموعة صفوف المرحلة المتوسّطة ، ع = { السادس ، السابع ، الثامن ، التاسع }

هل كلّ عنصر في ص ينتمي إلى س ؟ وضِّح ذلك .

لتكن م ، ن مجموعتَين مختلفتَين :

المفهوم	التعريف	الرمز	المخطّط
المجموعة الجزئية (الاحتواء)	إذا كان كلّ عنصر من م ينتمي إلى ن ؛ فإنّ م محتواه في ن ، وتُقرأ (م مجموعة جزئية من ن)	م ⊇ ن	
المجموعة غير الجزئية (عدم الاحتواء)	إذا وُجد عنصر من م لا ينتمي إلى ن ؛ فإنّ م ليست محتواه في ن ، وتُقرأ (م ليست مجموعة جزئية من ن)	م ⊉ ن	 

مثال (١) :

إذا كانت :

س = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ }

ص = مجموعة مضاعَفات العدد ٦ الأصغر من ٢٠

ع = مجموعة عوامل العدد ١٨ الموجَبة الأكبر من ١

فأوجِد :

(أ) ص ، ع بذكر العناصر .

(ب) هل ص ⊇ س ؟ ولماذا ؟

(ج) هل ع ⊇ س ؟ ولماذا ؟

الحلّ :

(أ) ص = { ٦ ، ١٢ ، ١٨ }
ع = { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨ }

(ب) ص ⊇ س ؛ لأنّ كلّ عنصر من عناصر ص ينتمي إلى س .

(ج) ع ⊉ س ؛ لأنّ ٢ ∈ ع ، ٢ ∉ س .

معلومة مفيدة :



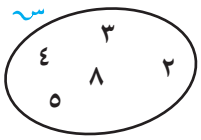
الدستور هو القانون الأعلى في الدولة، ينظّم شكل الحكم، ويكفل حقوق وحريّات المواطنين . وتمّ إقراره في ١١ نوفمبر ١٩٦٢ م في عهد الشيخ المغفور له عبدالله السالم الصباح .

اِنتبِه

- الانتماء يكون بين عنصر ومجموعة ٩ ∈ { ٩ ، ب ، جـ }
- الاحتواء يكون بين مجموعة ومجموعة {٩} ⊆ { ٩ ، ب ، جـ }

دورك الآن (١)

من الشكل المقابِل ، ضَعِ الرمز المناسِب ⊇ ، ⊉ لتحصل على عبارة صحيحة .



(أ) { ٤ ، ٨ } ⊇ س

(ب) { ٣ ، ٧ } ⊉ س

(ج) { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٨ } ⊇ س

(د) { ٥٨ } ⊉ س

(هـ) { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ } ⊇ س

(و) { س : س حلّ المعادلة س + ٢ = ٥ } ⊇ س

عبِّر عن فهمك

يقول راشد : س ⊇ س

(أ) إنّ س مجموعة جزئية (محتواة) في نفسها .

(ب) المجموعة الخالية ∅ مجموعة جزئية (محتواة) من أيّ مجموعة .

هل توافقه الرأي ؟ فسِّر إجابتك .

نعم أوافقه لأن ∅ ⊆ أي مجموعة

ملاحظة :

لأيّ س نجد أنّ :

◄ س ⊇ س ◄ س ⊇ ∅

مثال (٢) :

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، فاكتب جميع المجموعات الجزئية من س ، واذكر عددها .

الحلّ :

(أ) ∅ المجموعة الخالية (مجموعة بدون عناصر)

(ب) { ١ } ، { ٢ } ، { ٣ } مجموعات جزئية أحادية (ذات عنصر واحد)

(ج) { ١ ، ٢ } ، { ٢ ، ٣ } ، { ١ ، ٣ } مجموعات جزئية ثنائية (ذات عنصرَين)

(د) { ١ ، ٢ ، ٣ } مجموعة جزئية ثلاثية (ذات ثلاثة عناصر) وتساوي س

إذًا ، عدد المجموعات الجزئية من س = ٨ مجموعات

عدد المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها ن هو $٢^{ن}$.

عبِّر عن فهمك

ما هو عدد المجموعات الجزئية من المجموعة الخالية؟

صفر $٢^{صفر} = ١$

حُلّ وناقِش

قام معلّم الصفّ بتوزيع مجموعة من الأسئلة على مجاميع المتعلّمين ، وكان نصيب مجموعة محمّد السؤال الآتي :

إذا كانت سـ = مجموعة أحرف كلمة « علّم » ،

صـ = مجموعة أحرف كلمة « معلّم »

فأكمِل ما يلي :

(أ) سـ = { ع ، م ، ل ، ..... }

(ب) صـ = { ك ، م ، ع ، ل ، ..... }

(ج) هل سـ ⊇ صـ ؟ فسِّر . نعم لأن كل عنصر من سـ ينتمي إلى صـ

(د) هل صـ ⊇ سـ ؟ فسِّر . نعم لأن كل عنصر من صـ ينتمي إلى سـ .

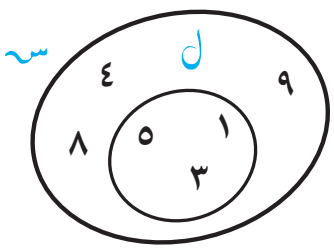
(هـ) ماذا تلاحظ ؟

ألاحظ أنه عندما سـ = صـ ∴ سـ ⊇ صـ و صـ ⊇ سـ

سـ = صـ عندما يكون لهما العناصر نفسها ، أو بمعنى آخر عندما تكون
سـ ⊇ صـ و صـ ⊇ سـ .

مثال (٣) :

من مخطّط فن الموضَّح أمامك ، أجِب عمّا يلي :



(أ) هل ل ⊇ سـ ؟ ولماذا ؟

(ب) هل سـ ⊇ ل ؟ ولماذا ؟

(ج) هل سـ = ل ؟ ولماذا ؟

الحلّ :

(أ) ل ⊇ سـ ؛ لأنّ كلّ عنصر في ل ينتمي إلى سـ .

(ب) سـ ⊉ ل ؛ لأنّ ٤ ∈ سـ و لكن ٤ ∉ ل .

(ج) سـ ≠ ل ؛ لأنّ ل ⊇ سـ ولكن سـ ⊉ ل .

مثال (٤) :

إذا كانت ع = {٦ ، س + ٣ ، ٥}، صـ = {-٢ ، ٥ ، ٦}

وكانت ع = صـ، فأوجِد قيمة س.

الحلّ :

∵ ع = صـ

∴ س + ٣ = -٢

س = -٢ - ٣

س = -٥

لاحِظ أنّ :

- الرمز ∵ يُقرأ « بما أنّ »
- الرمز ∴ يُقرأ « إذًا »

دورك الآن (٢)

أكمِل ما يلي مستخدِمًا الرمز المناسِب = أو ≠ لتصبح العبارة صحيحة :

(أ) { ٣ ، ٥ } ≠ { - ٣ ، - ٥ }

(ب) مجموعة أحرف كلمة « حبر » = مجموعة أحرف كلمة « بحر » .

(ج) { ١ ، ٢ ، ٣ } ≠ { ٣ ٢ ١ }

(د) { ٢ } ≠ مجموعة العوامل الموجَبة للعدد ٦ .

(هـ) مجموعة عوامل العدد ٩ = { ١ ، ٣ ، ٩ ، -١ ، -٣ ، -٩ }

(و) مجموعة أرقام العدد ٥٤١ ٤٠ = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٥ }

تمارين ذاتية :

١ إذا كانت سـ = { أ : أ ∈ ط ، أ عددًا أوليًّا أصغر من ١٠ } ،

ع = { ب : ب ∈ ط ، ب مضاعَف من مضاعَفات العدد ٣ الأصغر من ١٤ }

(أ) فاكتب بطريقة ذكر العناصر كلًّا من سـ ، ع .

سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

ع = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ }

(ب) هل ع ⊇ سـ ؟ ولماذا ؟

لا لأن ٩ ∈ ع ، ٩ ≠ سـ

(ج) هل سـ ⊇ ع ؟ ولماذا ؟

لا لأن ٥ ∈ سـ ، ٥ ≠ ع

٢ إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = مجموعة أرقام العدد ٤٤٣٢

أ فاكتب ص بذكر العناصر . { ٢ ، ٣ ، ٤ }

ب هل س = ص ؟ ولماذا ؟

نعم لأن س ⊂ ص و ص ⊂ س

٣ إذا كانت ش = { ١ ، -٢ ، -٣ ، ٠ ، -١ } ، ك = { أ : أ ∈ ص ، -٤ < أ < ٤ }

أ فاكتب ك بطريقة ذكر العناصر . { -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

ب هل ك = ش ؟ ولماذا ؟ لأن ك ⊂ ش و ش ⊄ ك .

٤ إذا كانت س = { أ : أ ∈ ص ، أ عددًا فرديًّا محصورًا بين ١ ، ٩ } ، ص = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

أ فاكتب س بذكر العناصر . { ٣ ، ٥ ، ٧ }

ب هل ١ ∈ س ؟ فسِّر إجابتك . لا لأن س هي الأعداد الفردية الأكبر من ١ وأصغر من ٩

ج أُذكر المجموعات الجزئية الأحادية والثنائية من س .

الأحادية ← { ٣ } ، { ٥ } ، { ٧ } . الثنائية ← { ٣ ، ٥ } ، { ٣ ، ٧ } ، { ٥ ، ٧ }

د هل س = ص ؟ ولماذا ؟

نعم لأن س ⊂ ص و ص ⊂ س

٥ إذا كانت ن = { ٧ ، ٥ س ، -٣ ، ٣ } ، ع = { ٣ ، هـ + ٢ ، ١٥ ، ٧ }

وكانت ن = ع . فأوجِد قيمة كلّ من س ، هـ .

∵ ن = ع ∴ ٥ س = ١٥

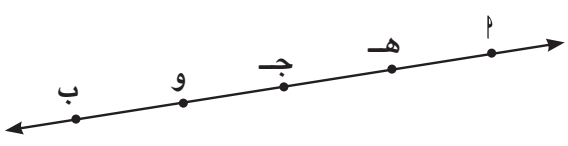
∴ س = ١٥ ÷ ٥ = ٣

∵ ن = ع ∴ هـ + ٢ = -٣

∴ هـ = -٣ - ٢ = -٥

مهارات تفكير عليا :

٦ اِستعِن بالشكل المقابِل ، ثمّ ضَع الرمز المناسِب ∈ ، ∉ ، ⊂ ، ⊄ لتحصل على عبارة صحيحة .



أ جـ ∈ ↔ أ ب

ب أ ∉ ← جـ ب

ج ← جـ و ⊂ ← هـ ب

د ← ب و ⊄ ← جـ أ

٧ إذا كانت { ٤ ، ٥ ، ٧ } ⊇ { ٣ ، س ، ٤ ، ص ، ٨ } ، فإنّ قيمة س + ص تساوي :

أ ٥ ب ٧ ج ٨ د ١٢

∵ س = ٥ أو ٧ ، ص = ٥ أو ٧ ∴ س + ص = ٥ + ٧ = ١٢

١ - ٣ العمليات على المجموعات (تقاطع – اِتّحاد)

Operations on Sets (Intersection - Union)

سوف تتعلّم : إيجاد عناصر المجموعة الناتجة من تقاطع أو اتّحاد مجموعتَين .

العبارات والمفردات :

التقاطع ∩	Intersection	الاتّحاد ∪	Union

حُلّ وناقِش

تشارك وزارة التربية سنويًّا في مسابقات الأولمبياد الخليجي والأولمبياد العربي لمادّتَي العلوم والرياضيات حيث حصد مجموعة من المتعلّمين الكويتيين ميداليات مختلفة على مدى سنوات في هذه المسابقات . ليكن :

سـ هي مجموعة المتعلّمين المشارِكين في مسابقة أولمبياد الرياضيات العربي لهذا العام وهم:

سـ = { ساره ، عليّ ، فاطمه ، مريم ، يوسف }

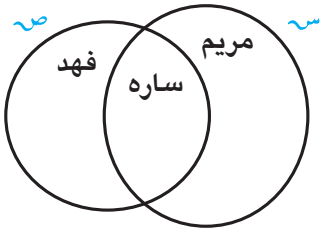
صـ هي مجموعة المتعلّمين المشارِكين في مسابقة أولمبياد الرياضيات الخليجي لهذا العام وهم:

صـ = { فهد ، يوسف ، حصّه ، نوره ، ساره }

١ **اُكتب المجموعة التي تعبّر عن المشارِكين في المسابقتَين معًا.**

.....

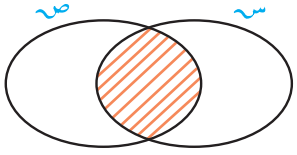
٢ **أكمِل عناصر كلّ من سـ ، صـ في شكل ڤن المقابِل.**



٣ **ظلِّل المنطقة التي تمثّل المتعلّمين المشارِكين في المسابقتَين معًا.**

- المنطقة المشتَرَكة بين سـ ، صـ والتي تضمّ المتعلّمين المشارِكين في المسابقتَين معًا تُسمّى التقاطع .

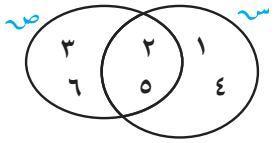
التقاطع بين سـ ، صـ : هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى سـ و تنتمي إلى صـ ؛ أي : تنتمي إلى (المجموعتَين معًا) .

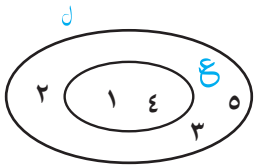
اِسم المجموعة	تُكتب	تُقرأ	المخطّط
التقاطع بين سـ ، صـ	سـ ∩ صـ	سـ تقاطع صـ	

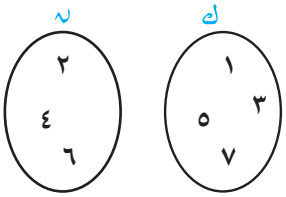
ونعبّر عن التقاطع بالصورة الرمزية $س \cap ص = \{ أ : أ \in س \text{ و } أ \in ص \}$.

مثال (١) :

أوجِد بذكر العناصر كلًّا من المجموعات الآتية ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل التقاطع إن أمكن ذلك .







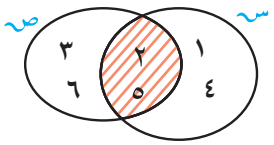
الحلّ :

$س = \{ ١ ، ② ، ٤ ، ⑤ \}$

$ص = \{ ② ، ٣ ، ⑤ ، ٦ \}$

$س \cap ص = \{ ٢ ، ٥ \}$

$ص \cap س = \{ ٢ ، ٥ \}$

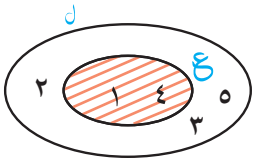


إذًا $س \cap ص = ص \cap س$

$ع = \{ ① ، ④ \}$

$ل = \{ ① ، ٢ ، ٣ ، ④ ، ٥ \}$

$ع \cap ل = \{ ١ ، ٤ \}$



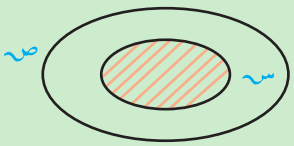
$ع \subseteq ل$ ، $ع \cap ل = ع$

$ك = \{ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ \}$

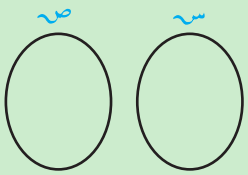
$ن = \{ ٢ ، ٤ ، ٦ \}$

$ك \cap ن = \varnothing$

الحالات الخاصّة لتقاطع مجموعتَين :



١ $س \subseteq ص \Leftarrow س \cap ص = س$



٢ $س \cap ص = \varnothing$

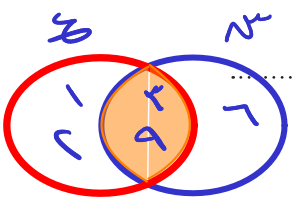
دورك الآن (١)

لتكن س = مجموعة مضاعَفات العدد ٣ الأصغر من ١٠ ، ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٩ }

(أ) أوجِد بذكر العناصر كلًّا من :

س = {٣، ٦، ٩} ، س ∩ ع = {٣، ٩}

(ب) مثِّل كلًّا من س ، ع بمخطّط ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل س ∩ ع .



عبِّر عن فهمك

بيِّن صحّة العبارة الآتية أو خطأها ؛ مع التفسير :

لأيّ مجموعتَين س ، ص إذا كانت ا ∈ (س ∩ ص) فإنّ ا ∈ ص .

.....

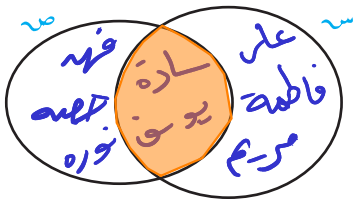
بالرجوع إلى حُلّ وناقِش:

١ أُكتب المجموعة التي تعبّر عن المتعلّمين المشارِكين في أيّ من المسابقتَين .

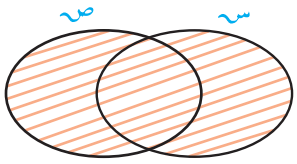
.....

٢ أكمِل عناصر كلّ من س ، ص في شكل ڤن المقابِل :

٣ ظلِّل المنطقة التي تمثّل المتعلّمين المشارِكين في أيّ من المسابقتَين .



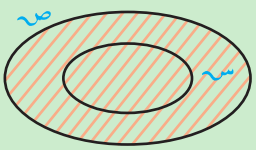
الاتّحاد بين س ، ص : هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى س أو تنتمي إلى ص .

اِسم المجموعة	تُكتب	تُقرأ	المخطّط
الاتّحاد بين س ، ص	س ∪ ص	س اتّحاد ص	

ونعبّر عن الاتّحاد بالصورة الرمزية س ∪ ص = { ا : ا ∈ س أو ا ∈ ص }

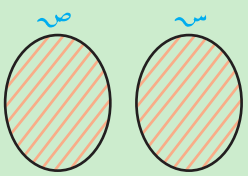
الحالات الخاصّة لاتّحاد مجموعتَين :

١



س ⊇ ص ⇐ س ∪ ص = ص

٢

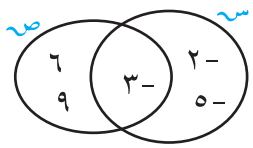


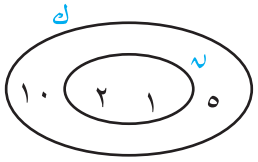
س ∪ ص

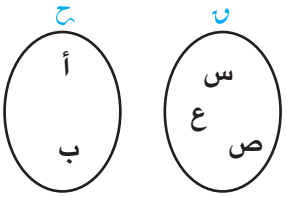
حيث س ∩ ص = ∅

مثال (٢) :

أوجِد بذكر العناصر كلًّا من المجموعات الآتية ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل الاتّحاد .







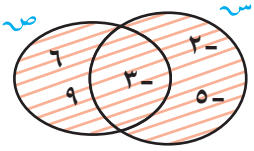
الحلّ :

سـ = { -٢ ، -٣ ، -٥ }

صـ = { -٣ ، ٦ ، ٩ }

سـ ∪ صـ = { -٥ ، -٣ ، -٢ ، ٦ ، ٩ }

صـ ∪ سـ = { -٥ ، -٣ ، -٢ ، ٦ ، ٩ }

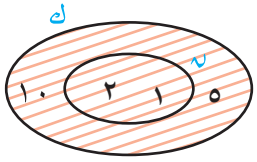


إذًا سـ ∪ صـ = صـ ∪ سـ

نـ = { ١ ، ٢ }

ك = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ١٠ }

نـ ∪ ك = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ١٠ }

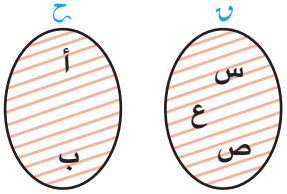


نـ ⊇ ك ، نـ ∪ ك = ك

نـ = { س ، ص ، ع }

حـ = { أ ، ب }

نـ ∪ حـ = { أ ، ب ، س ، ص ، ع }



دورك الآن (٢)

إذا كانت سـ = { أ : أ ∈ ط ، أ عددًا فرديًّا أصغر من ١٠ }

حيث ط هي مجموعة الأعداد الكلّية ،

صـ = مجموعة الأعداد الأوّلية الأصغر من ١٠ ،

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا من :

سـ ، صـ ، سـ ∩ صـ ، سـ ∪ صـ ، ثمّ مثِّل المجموعتَين بشكل ڤن وظلِّل المنطقة التي تمثّل الاتّحاد .

انتبِه

العدد الأوّلي هو العدد الذي له عاملان موجَبان مختلفان فقط ، هما الواحد والعدد نفسه .

(أ) سـ = { ١ ، ..٣.. ، ٥ ، ..٧.. ، ٩ }

(ب) صـ = { ..٢.. ، ٣ ، ..٥.. ، ٧ }

(ج) سـ ∩ صـ = { ٣ ، ..٥.. ، ..٧.. }

(د) سـ ∪ صـ = { ..١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩.. }

عبِّر عن فهمك

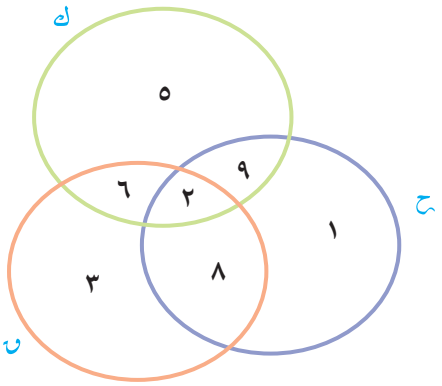
بيِّن صحّة العبارة الآتية أو خطأها ، مع التفسير لأيّ مجموعتَين س ، ص .

إذا كانت أ ∉ ص ، فإنّ أ ∉ (س ∪ ص) .

مثال (٣) :

من مخطّط ڤن الذي أمامك ، أوجد بذكر العناصر كلًّا من :

ح ، ن ، ل ، ح ∩ ن ∩ ح ، ل ، ح ∪ ن ∪ ل



الحلّ :

ح = { ١ ، ٢ ، ٨ ، ٩ }

ن = { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ }

ل = { ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٩ }

ح ∩ ن ∩ ل = { ٢ }

ح ∪ ن ∪ ل = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٩ }

تمارين ذاتية :

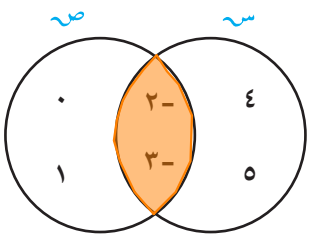
١ بالاستعانة بمخطّط ڤن الموضَّح أكمِل ما يلي ، ثمّ ظلِّل ما يمثّل منطقة التقاطع إن أمكن :

أ) س = { -٣ ، -٢ ، ٤ ، ٥ }

ص = { -٣ ، -٢ ، ١ ، ٦ }

س ∩ ص = { -٣ ، -٢ }

س ∪ ص = { -٣ ، -٢ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

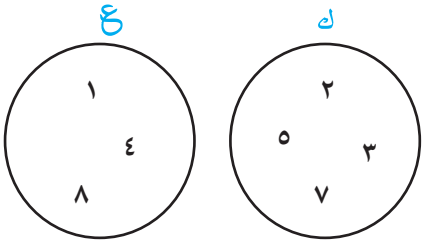


ب) ل = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

ع = { ١ ، ٤ ، ٧ ، ٨ }

ل ∩ ع = ∅

ل ∪ ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ }

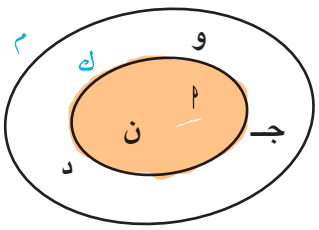


ج) م = { أ ، ب ، و ، ح ، د }

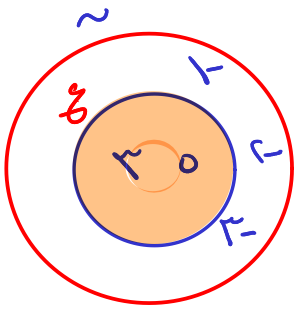
ل = { أ ، ن }

م ∩ ل = { أ ، ن } = ل

م ∪ ل = { أ ، ب ، و ، ن ، د } = م

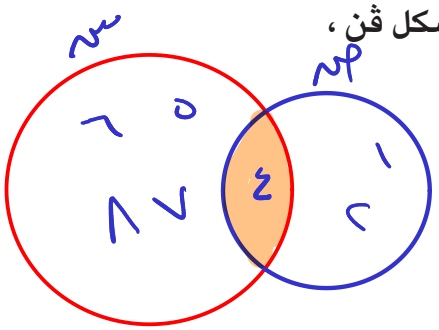


٢ إذا كانت ع = { ١ : ١ ∈ ط ، ١ عاملًا أوّليًّا من عوامل العدد ١٥ } ، ن = { ٥ ، ٣ ، ١- ، ٢- ، ٣- }
فأوجِد بذكر العناصر كلًّا من : ع ، ع ∩ ن ، ع ∪ ن ، مثِّل كلًّا من ع ، ن
بمخطّط ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ع ∪ ن .



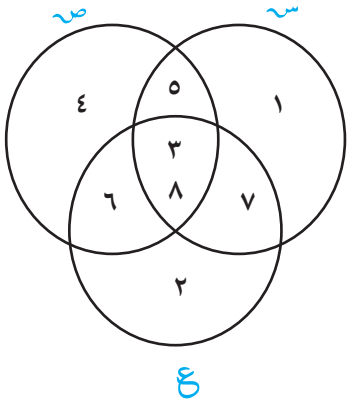
ع = { ٥ ، ٣ }
ع ∩ ن = { ٥ ، ٣ } = ع
ع ∪ ن = { ٥ ، ٣ ، ١ ، ٢- ، ٣- } = ن

٣ إذا كانت سـ = { س : س ∈ ط ، ٤ ≤ س < ٩ } ،
صـ = { ص : ص ∈ صـ ، ص عاملًا موجَبًا من عوامل العدد ٨ } ، فأوجِد بذكر العناصر كلًّا من :
سـ ، صـ ، سـ ∪ صـ ، سـ ∩ صـ ، ومثِّل كلًّا من سـ ، صـ بشكل ڤن ،
ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل سـ ∩ صـ .



سـ = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }
صـ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ }
سـ ∪ صـ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }
سـ ∩ صـ = { ٤ }

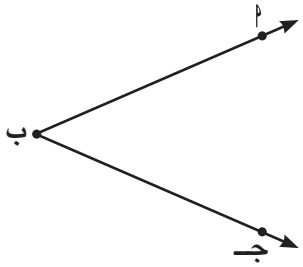
٤ من خلال مخطّط ڤن الذي أمامك ، أكمِل ما يلي :



سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ }
صـ = { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ }
ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }
سـ ∩ صـ = ع = { ٥ ، ٨ }
سـ ∪ صـ = ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

مهارات تفكير عليا :

٥ في الشكل المقابِل ، أكمِل كلًّا ممّا يلي :



← ← ← ←
ب أ ∪ ب جـ = { مجموعة نقاط ب أ + مجموعة نقاط ب جـ }
← ← ← ←
ب أ ∩ ب جـ = { ب }

١ - ٤ مجموعة الفرق Difference Set

سوف تتعلّم : إيجاد مجموعة الفرق بين مجموعتَين .

العبارات والمفردات :

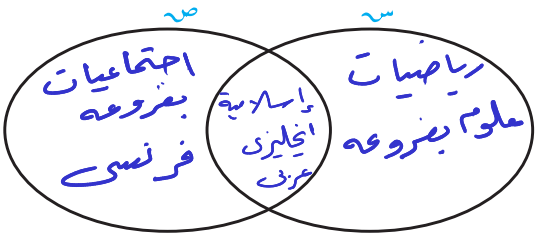
مجموعة الفرق	Difference set

إستكشِف

ينقسم متعلّمو المرحلة الثانوية ابتداء من الصفّ الحادي عشر إلى قسمَين «القسم العلمي» و «القسم الأدبي» ، بحيث تركّز دراستهم أكثر على بعض الموادّ كما أنّ هناك موادّ مشترَكة بينهم .

الموادّ / القسم	إسلامية	رياضيات	علوم بفروعه	إنجليزي	إجتماعيات بفروعه	عربي	فرنسي
القسم العلمي س	✓	✓	✓	✓		✓	
القسم الأدبي ص	✓			✓	✓	✓	✓

١ من خلال الجدول السابق ، مثِّل المجموعتَين باستخدام شكل ڤن .



٢ أُكتب الموادّ التي تُدرَّس في القسم العلمي ولا تُدرَّس في القسم الأدبي .

رياضيات ، علوم بفروعه .....

٣ أُكتب الموادّ التي تُدرَّس في القسم الأدبي ولا تُدرَّس في القسم العلمي .

اجتماعيات بفروعه ، فرنسي .....



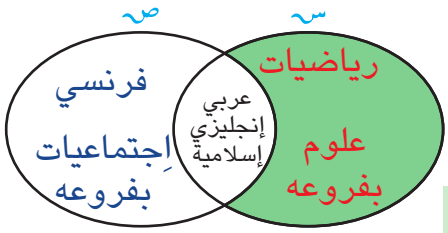
معلومة مفيدة :

مجالات التخصّصات العلمية الجامعية مثل : الطبّ ، الهندسة ، الصيدلة ، الحاسب الآلي ، العلوم البيئية ، المختبرات الطبّية ، الرياضيات التطبيقية ، الذكاء الاصطناعي .

مجالات التخصّصات الأدبية الجامعية مثل : القانون ، الإعلام ، اللغات والترجمة ، إدارة الأعمال ، العلاقات العامّة ، الشريعة ، العلوم السياسية .

من خلال «اِستكشِف السابق» :

- مجموعة الموادّ التي تُدرَّس في القسم العلمي سـ ولا تُدرَّس في القسم الأدبي صـ



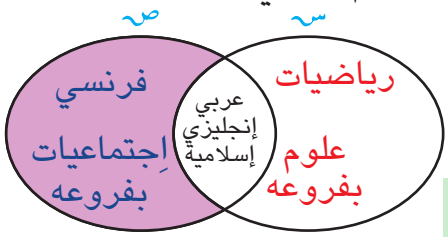
تُسمّى **مجموعة الفرق بين مجموعتَين**

وتُكتب سـ - صـ

وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .

سـ - صـ = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى سـ ولا تنتمي إلى صـ

- وكذلك مجموعة الموادّ التي تُدرَّس في القسم الأدبي صـ ولا تُدرَّس في القسم العلمي سـ



تُسمّى **مجموعة الفرق بين مجموعتَين**

وتُكتب صـ - سـ

وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .

صـ - سـ = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى صـ ولا تنتمي إلى سـ

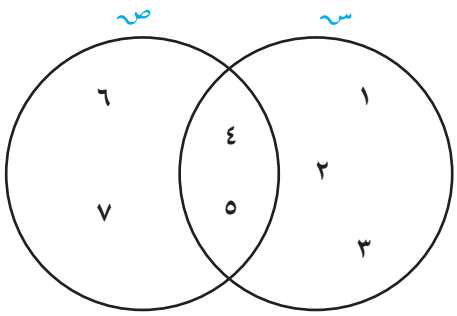
مثال (١) :

من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

(أ) سـ - صـ

(ب) صـ - سـ

(ج) ماذا تلاحظ ؟



الحلّ :

(أ) سـ - صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

(ب) صـ - سـ = { ٦ ، ٧ }

(ج) نلاحظ أنّ سـ - صـ ≠ صـ - سـ

مثال (٢) :

إذا كانت سـ = { أ : أ ∈ صـ ، أ عاملًا من العوامل الموجَبة للعدد ٨ } ،

ع = { ب : ب ∈ صـ ، ١ < ب ≤ ٧ } ، حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة .

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي : سـ ، ع ، سـ - ع ، ع - سـ .

ثمّ مثِّل كلًّا من سـ ، ع بشكل ڤن ، وظلِّل المنطقة التي تمثِّل سـ - ع .

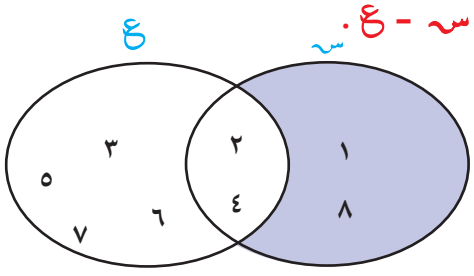
الحلّ :

سـ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ }

ع = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

سـ - ع = { ١ ، ٨ }

ع - سـ = { ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }



مثال (٣) :

إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٥ }

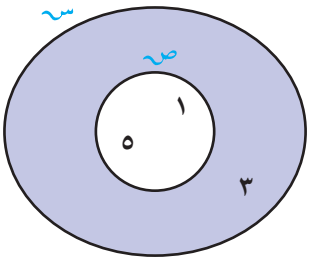
فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

س - ص ، ص - س ، ثمّ مثّل كلًّا من س ، ص بشكل ڤن ، وظلّل المنطقة التي تمثّل س - ص .

الحلّ :

س - ص = { ٣ }

ص - س = ∅



دورك الآن (١)

إذا كانت س = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ع = { ب : ب ∋ ص ، -١ ≤ ب ≤ ٤ } ،

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

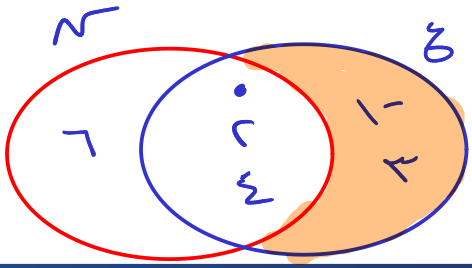
١ فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

ع = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

س - ع = { ٦ }

ع - س = { -١ ، ١ ، ٣ }

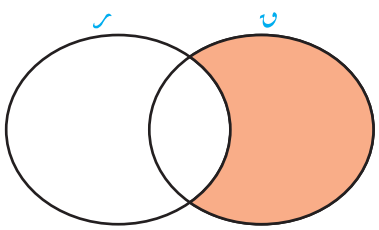
٢ مثّل كلًّا من س ، ع بشكل ڤن ، ثمّ ظلّل المنطقة التي تمثّل ع - س .



دورك الآن (٢)

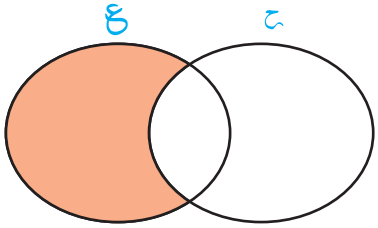
أُكتب ما يمثّله الجزء المظلَّل في كلّ من الأشكال الآتية :

(أ)



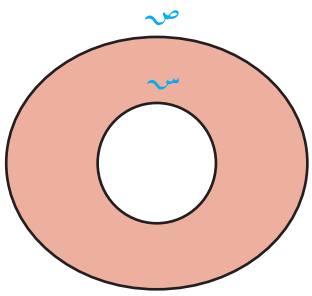
ن - ر

(ب)



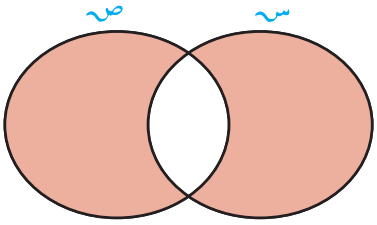
ح - ع

ج



ص - س

د



(س - ص) ∪ (ص - س)

عبّر عن فهمك

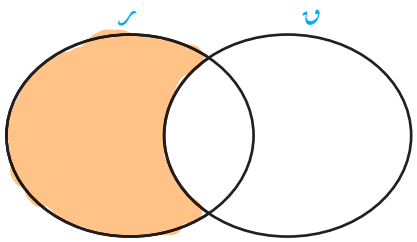
إذا كانت س ⊇ ص ، فأوجِد س - ص . ∅



تمارين ذاتية :

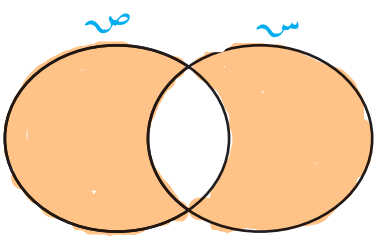
١ ظلِّل المنطقة التي تمثّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال الآتية :

أ



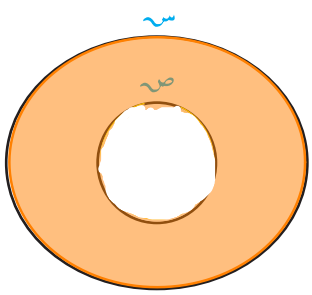
ر - ن

ب



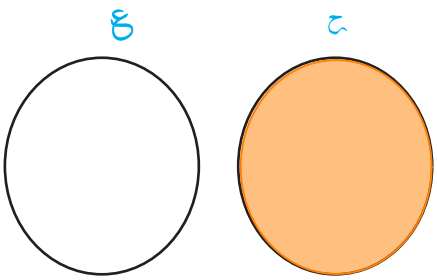
(س - ص) ∪ (ص - س)

ج



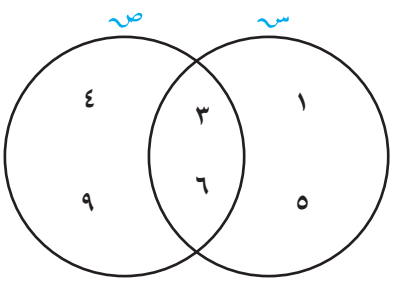
س - ص

د



ح - ع

٢ من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



س = {٦، ٥، ٣، ١}

ص = {٩، ٦، ٤، ٣}

س - ص = {٥، ١}

ص - س = {٩، ٤}

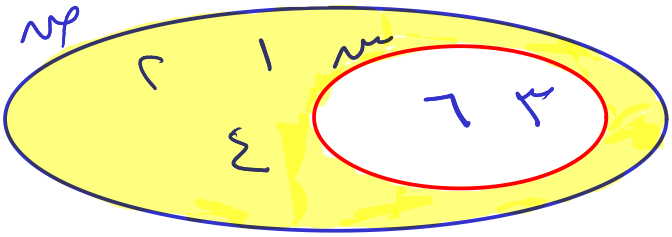
٣ إذا كانت سـ = مجموعة مضاعَفات العدد ٣ الأصغر من ٩ ، صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }
فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

أ سـ = { ٣ ، ٦ } .....

ب سـ - صـ = ∅ .....

ج صـ - سـ = { ١ ، ٢ ، ٤ } .....

مثِّل كلًّا من سـ ، صـ بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل صـ - سـ .



٤ إذا كانت ع = { أ : أ ∈ صـ ، ١ ≤ أ < ٥ } ، حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة .

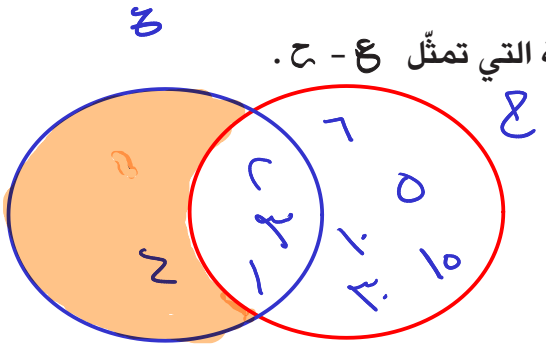
ح = { ب : ب ∈ ط ، ب عامل من العوامل الأوّلية للعدد ٣٠ } ، فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } .....

ح = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٣٠ } .....

ع - ح = { ٤ } .....

مثِّل كلًّا من ع ، ح بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ع - ح .

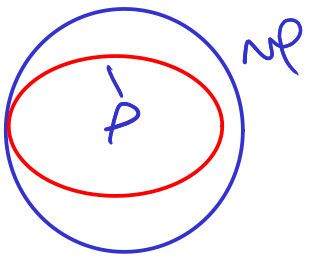


مهارات تفكير عليا :

٥ لتكن ط مجموعة الأعداد الكلّية ، صـ مجموعة الأعداد الصحيحة .

أ أوجِد صـ - ط . مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة { صـ }

ب مثِّل المجموعتَين بشكل ڤن .



١ - ٥ المجموعة الشاملة – المجموعة المتمِّمة
Overall Set - Complement of a Set

سوف تتعلّم : إيجاد المجموعة الشاملة والمجموعة المتمِّمة .

العبارات والمفردات :

المجموعة الشاملة	Overall Set	المجموعة المتمِّمة	Complement of a Set

حُلّ وناقِش

لتكن : س = { أ ، ب ، جـ } ، ص = { ب ، جـ ، د } ، ع = { جـ ، د ، هـ ، ل }

١ **أُكتب مجموعة ي بحيث كلّ من س ، ص ، ع مجموعة جزئية منها .**

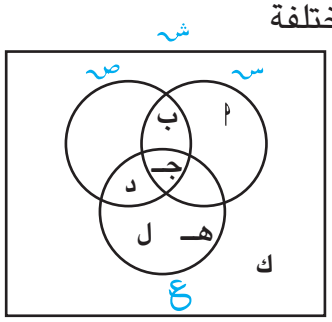
ي = { أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، ل }

٢ **أُكتب مجموعة أخرى م بحيث كلّ من س ، ص ، ع مجموعة جزئية منها .**

م = { أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، ل ، ك ، و }

تُسمّى كلّ من ي ، م ، ... مجموعة شاملة للمجموعات س ، ص ، ع في أمثلة مختلفة

وعادة نرمز إلى المجموعة الشاملة بالرمز ش .



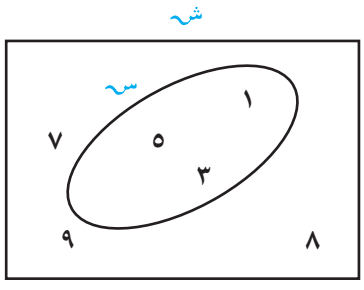
لتكن ش = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ل ، ك }

المجموعة الشاملة لكلّ من س ، ص ، ع

وتُمثَّل بشكل ڤن المقابِل .

دورك الآن (١)

من الشكل المقابِل :



١ **أُكتب بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :**

ش = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

س = { ١ ، ٣ ، ٥ }

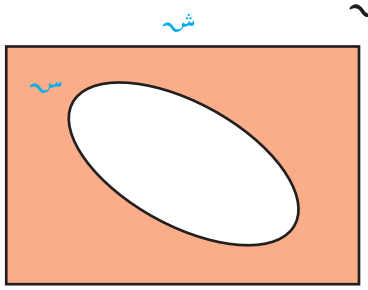
ش - س = { ٧ ، ٨ ، ٩ }

٢ **أكمِل :**

٩ ∈ (ش - س) ، ٣ ∉ (ش - س)

من دورك الآن (١) السابق :

مجموعة العناصر التي تنتمي إلى شـ ولا تنتمي إلى سـ هي شـ - سـ



وتُسمّى مجموعة متمِّمة سـ

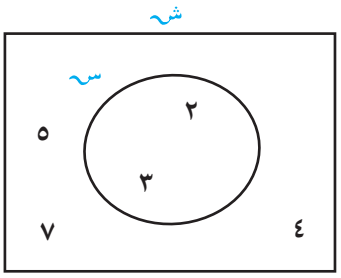
ويُرمَز إليها بالرمز : $\overline{س}$ أو سـَ

وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .

أي أنّ $\overline{س}$ = شـ - سـ

دورك الآن (٢)

من شكل ڤن المقابِل ، أُكتب بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



شـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

سـ = {٣، ٥}

$\overline{س}$ = شـ - سـ

= {١، ٢، ٤، ٥، ٧}

سـ ∩ $\overline{س}$ = ∅

سـ ∪ $\overline{س}$ = شـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

$\overline{\overline{س}}$ = شـ - $\overline{س}$ = سـ

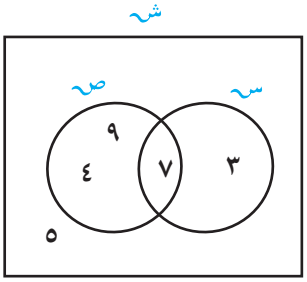
= {٣، ٢}

ويمكن استنتاج أنّ :

• سـ ∩ $\overline{س}$ = ∅	• سـ ∪ $\overline{س}$ = شـ
• شـ - $\overline{س}$ = سـ	• $\overline{\overline{س}}$ = سـ
• شـ ∪ سـ = شـ	• شـ ∩ سـ = سـ
• شـ ∪ $\overline{س}$ = شـ	• شـ ∩ $\overline{س}$ = $\overline{س}$
• $\overline{ش}$ = ∅	• ∅ = شـ

دورك الآن (٣)

من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



شـ = {٣، ٥، ٤، ٧، ٩}

سـ = {٣، ٧}

صـ = {٢، ٧، ٩}

$\overline{س}$ = {٤، ٥، ٩}

صـ = {٣، ٥}

س ∩ صـ = {٥}

س ∪ صـ = {٢، ٣، ٤، ٧، ٩}

س ∪ صـ = {٥}

ماذا تلاحظ؟ نلاحظ أن س ∪ صـ = س ∩ صـ

س ∪ صـ = {٣، ٤، ٥، ٩}

س ∩ صـ = {٧}

س ∩ صـ = {٤، ٥، ٩}

ماذا تلاحظ؟ نلاحظ أن س ∩ صـ = س ∪ صـ

معلومة مفيدة :



« Augustus de Morgan »
عالم رياضيات إنجليزي
وُلد في مدينة مدراس
الهندية عام ١٨٠٦ م حيث كان يعمل
والده ، ثمّ أكمل دراسته في بريطانيا ونبغ
في علوم الرياضيات والفلسفة .

قوانين دي مورغان de Morgan Laws :

◄ س ∪ صـ = س ∩ صـ

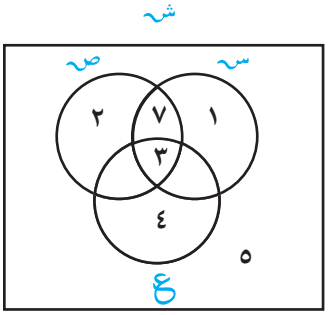
◄ س ∩ صـ = س ∪ صـ

مثال (١) :

من شكل ڤن التالي ، أوجد كلًّا من :

ش ، س ، صـ ، س - ع ،

ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل (صـ - ع) .



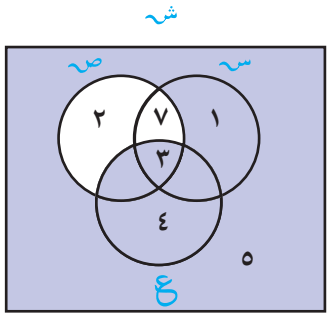
الحلّ :

ش = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}

س = {١ ، ٣ ، ٧}

صـ = {١ ، ٤ ، ٥}

س - ع = {١ ، ٧}



صـ - ع

مثال (٢) :

إذا كانت المجموعة الشاملة شـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

سـ = { أ : أ ∈ ط ، ٢ ≤ أ < ٤ } ،

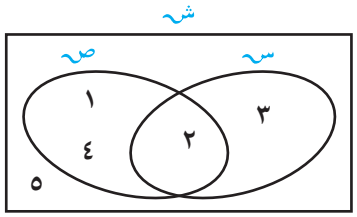
صـ = { ب : ب ∈ ط ، ب عامل من عوامل العدد ٤ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

سـ ، صـ ، $\overline{سـ}$ ، $\overline{صـ}$ ، (سـ ∩ صـ) ، (سـ ∪ صـ) ، $\overline{(سـ \cap صـ)}$

مثِّل كلًّا من شـ ، سـ ، صـ بشكل ڤن .

الحلّ :



سـ = { ٢ ، ٣ }

صـ = { ١ ، ٢ ، ٤ }

$\overline{سـ}$ = { ١ ، ٤ ، ٥ }

$\overline{صـ}$ = { ٣ ، ٥ }

$(\overline{سـ \cap صـ}) = \overline{سـ} \cup \overline{صـ} = \{١ ، ٤ ، ٥\} \cup \{٣ ، ٥\} = \{١ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

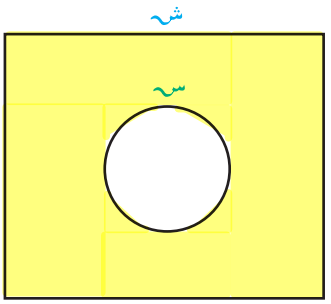
$(\overline{سـ \cup صـ}) = \overline{سـ} \cap \overline{صـ} = \{٥\}$

$(\overline{\overline{سـ \cap صـ}}) = سـ \cap صـ = \{٢\}$

دورك الآن (٤)

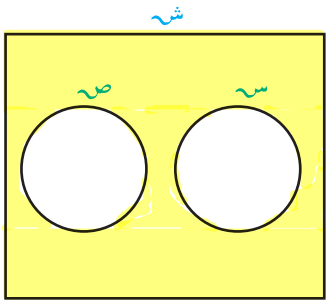
ظلِّل المنطقة التي تمثّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال الآتية :

(أ)



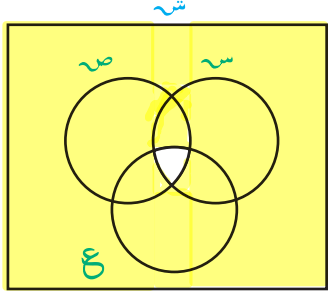
$\overline{سـ}$

(ب)



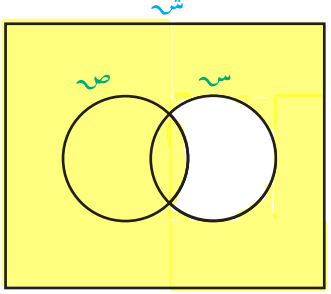
$\overline{سـ \cup صـ}$

(ج)



$(\overline{سـ \cap صـ \cap ع})$

(د)

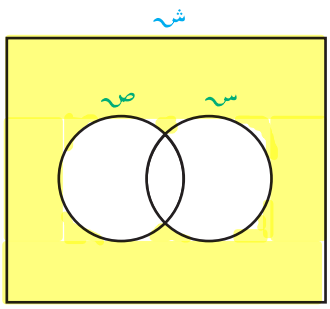


$(\overline{سـ - صـ})$

تمارين ذاتية :

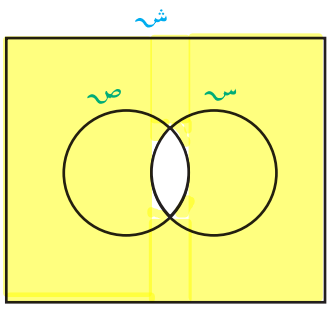
١ ظلِّل المنطقة التي تمثِّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال الآتية :

أ



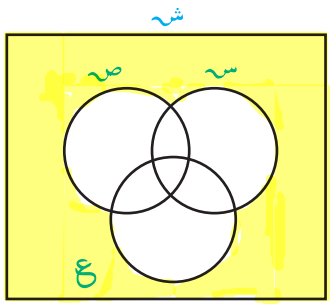
$\overline{س \cup ص}$

ب



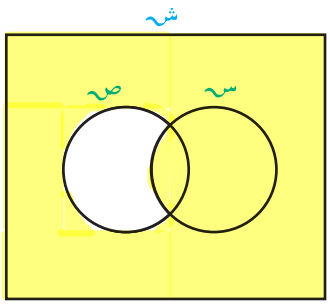
$\overline{س \cap ص}$

ج



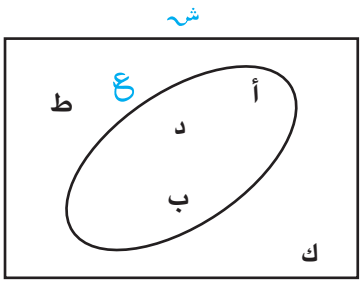
$(\overline{س \cup ص \cup ع})$

د



$ص - \overline{س}$

٢ من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



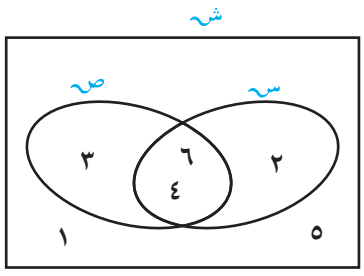
ش = {ط، ك، ب، د، أ}

ع = {أ، ب، د}

$\overline{ع}$ = {ط، ك}

$\overline{\overline{ع}}$ = {أ، ب، د}

٣ من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

س = {٢، ٤، ٦}

ص = {٣، ٤، ٦}

$\overline{س}$ = {١، ٣، ٥} ، $\overline{ص}$ = {١، ٢، ٥}

$(\overline{س \cap ص})$ = $\overline{س} \cup \overline{ص}$

= {١، ٢، ٣، ٥}

$(\overline{س \cup ص})$ = $\overline{س} \cap \overline{ص}$

= {١، ٥}

٤ إذا كانت المجموعة الشاملة ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ،
م = مجموعة الأعداد الفردية الأكبر من ١ والأصغر من ٧ ،
ك = { أ : أ ∈ ط ، أ عدد زوجي ، ١ < أ ≤ ٨ } .

(أ) أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي : م ، ك ، $\overline{م}$ ، $\overline{ك}$ ، ($\overline{م \cap ك}$) ، (م − $\overline{ك}$)

م = { ٣ ، ٥ }

ك = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

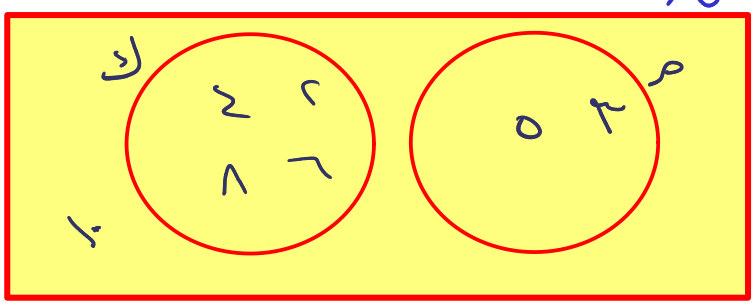
$\overline{م}$ = ش − م = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

$\overline{ك}$ = ش − ك = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ١٠ }

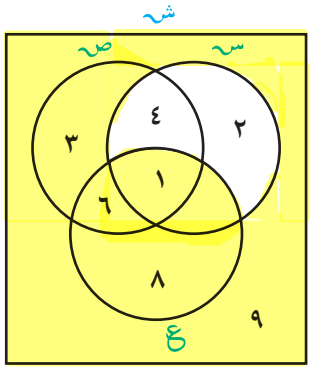
($\overline{م \cap ك}$) = $\overline{م}$ ∪ $\overline{ك}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

(م − $\overline{ك}$) = م ∩ ك = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

(ب) مثِّل كلًّا من ش ، م ، ك بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ($\overline{م \cap ك}$) .



٥ من شكل ڤن المقابل ، أكمِل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



(أ) ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ }

(ب) ص = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }

(ج) $\overline{س}$ = { ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٩ }

(د) ص − ع = { ٣ ، ٤ }

(هـ) ($\overline{س \cap ص}$) = $\overline{س}$ ∪ $\overline{ص}$ = { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٩ }

ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ($\overline{س}$ − ع) .

ع − $\overline{س}$ = { ٤ ، ٢ } ∴ $\overline{ع - س}$ = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٩ }

١ - ٦ الحاصل الديكارتي Cartesian Product

سوف تتعلّم : الحاصل الديكارتي .

العبارات والمفردات :

زوج مرتَّب	Ordered Pair	مخطّط سهمي	Arrow Diagram
حاصل الضرب الديكارتي	Cartesian Product	مخطّط بياني	Graph

إستكشِف

شركة من المشروعات الصغيرة لديها ٣ موظَّفين وهم : حسن وخالد وأمل .



لتكن سـ تمثّل مجموعة موظَّفي الشركة ، صـ تمثّل مجموعة التزامات الشركة نحو موظَّفيها وهي : السكن ، والراتب ، والتأمين الصحّي .

١ كوِّن المجموعة سـ = { حسن ، خالد ، أمل }

٢ كوِّن المجموعة صـ = { السكن ، الراتب ، التأمين }

٣ أكمِل لتوجِد كلّ الأزواج المرتَّبة التي تربط مجموعة الموظَّفين بمجموعة التزامات الشركة .

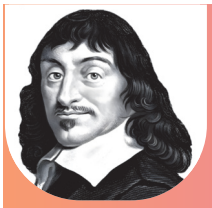
{ (حسن ، السكن) ، (حسن ، الراتب) ، (حسن ، التأمين الصحّي) ،
(خالد ، السكن) ، (خالد ، الراتب) ، (خالد ، التأمين) ،
(أمل ، السكن) ، (أمل ، الراتب) ، (أمل ، التأمين الصحّي) }

- نسمّي مجموعة الأزواج المرتَّبة (العناصر) بالحاصل الديكارتي ونرمز إليه بالرمز سـ × صـ

الحاصل الديكارتي (أو حاصل الضرب الديكارتي) سـ × صـ :
هو مجموعة كلّ الأزواج المرتَّبة (أ ، ب) حيث المسقط الأوّل أ ∈ سـ ، و المسقط الثاني ب ∈ صـ .

أي أنّ : سـ × صـ = { (أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ }
وعدد عناصر سـ × صـ = عدد عناصر سـ × عدد عناصر صـ

معلومة مفيدة :



العالم الفرنسي ديكارت من القرن التاسع عشر رائد الفلسفة الحديثة وصاحب المقولة الشهيرة : أنا أفكّر إذًا أنا موجود .
أُشتُهر بإقامة علاقات مهمّة بين الهندسة والجبر ، ممّا سمح بحلّ المشكلات الهندسية باستخدام المعادلات الجبرية .

مثال (١) :

إذا كانت س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } :

(أ) أوجِد عدد عناصر س × ص .

(ب) أُكتب س × ص بذكر العناصر .

(ج) مثِّل س × ص بمخطّط سهمي وبمخطّط بياني .

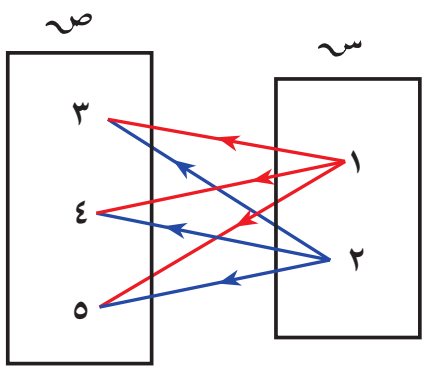
(د) أُكتب ص × س بذكر العناصر .

الحلّ :

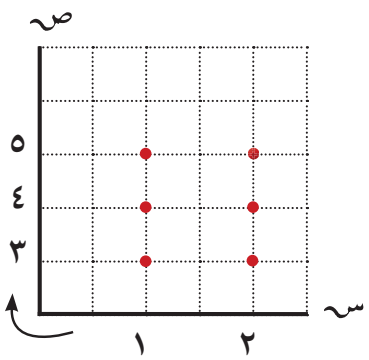
(أ) عدد عناصر س × ص = ٢ × ٣ = ٦ عناصر

(ب) س × ص = { (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) }

(ج)



مخطّط سهمي



مخطّط بياني

(د) ص × س = { (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) }

عبِّر عن فهمك

في المثال السابق :

١ هل (١ ، ٣) ∈ ص × س ؟ لا

٢ هل س × ص = ص × س ؟ لا

٣ هل عدد عناصر س × ص = عدد عناصر ص × س ؟ فسِّر إجابتك .

نعم لأن الضرب عدد العناصر عملية إبدالية
بينما حاصل ضرب الديكارتي ليس عملية إبدالية .

مثال (٢) :

إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } .

(أ) أوجِد عدد عناصر س × س .

(ب) أُكتب س × س بذكر العناصر .

(ج) أُكتب س × س بذكر الصفة المميِّزة .

(د) مثِّل س × س بمخطّط بياني وآخر سهمي .

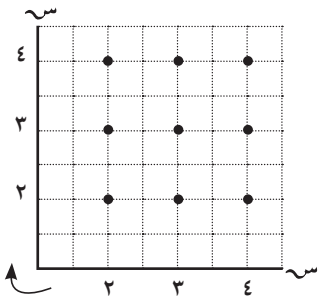
الحلّ :

(أ) عدد عناصر س × س = ٣ × ٣ = ٩ عناصر

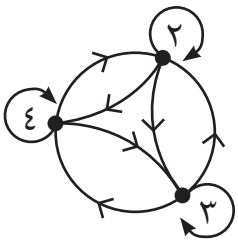
(ب) س × س = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

(ج) الصفة المميِّزة س × س = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س }

(د)



مخطّط بياني

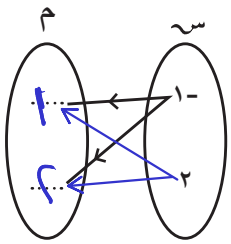


مخطّط سهمي

دورك الآن (١)

إذا كانت س = { -١ ، ٢ } ، م = { ب : ب ∈ صـ ، ٠ < ب ≤ ٢ } حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة ،

فأكمِل ما يلي :



(أ) م = { ١ ، ٢ }

(ب) س × م = { (-١ ، ١) ، (-١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) }

(ج) المخطّط السهمي س × م

(د) (-١ ، ٣) ∉ س × م

دورك الآن (٢)

إذا كانت س × صـ = { (أ ، ٣) ، (أ ، ٤) ، (ب ، ٣) ، (ب ، ٤) } ،

فأوجِد س ، صـ بذكر العناصر .

س = { أ ، ب }

صـ = { ٣ ، ٤ }

تمارين ذاتية :

١ إذا كانت س = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ، ص = { ٤ ، ٦ } ، فاكتب كلًّا من س × ص ، ص × س ، ص × ص بذكر العناصر .

س × ص = { (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٦) ، (٩ ، ٤) ، (٩ ، ٦) }

ص × س = { (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٦) ، (٤ ، ٩) ، (٦ ، ٣) ، (٦ ، ٦) ، (٦ ، ٩) }

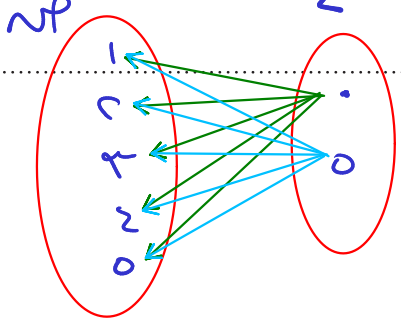
ص × ص = { (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٦) }

٢ إذا كانت س × ص = { (١ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٥ ، ٠) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٥) }.

أ) أُكتب كلًّا من س ، ص بذكر العناصر .

س = { ٠ ، ٥ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }



ب) مثِّل س × ص بمخطّط سهمي .

٣ إذا كانت س = { أ : أ ∈ ط ، أ عددًا أوّليًّا أصغر من ٧ } ، حيث ط مجموعة الأعداد الكلّية ،
ل = { ب : ب ∈ ص ، -٢ < ب ≤ ١ } ، حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

أ) أُكتب كلًّا من س ، ل بذكر العناصر .

س = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

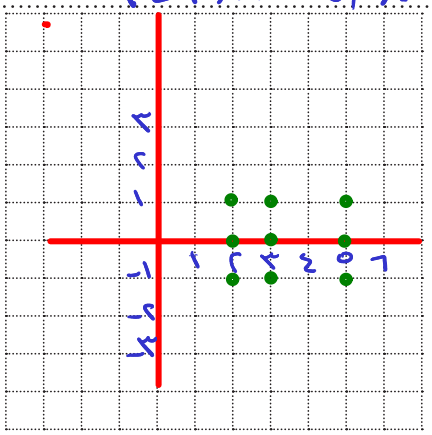
ل = { -١ ، ٠ ، ١ }

ب) أُكتب س × ل بذكر العناصر ، واذكر عدد عناصرها .

س × ل = { (٢ ، -١) ، (٢ ، ٠) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، -١) ، (٣ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (٥ ، -١) ، (٥ ، ٠) ، (٥ ، ١) }

عدد عناصرها = ٣ × ٣ = ٩

ج) مثِّل س × ل بمخطّط بياني .



٤ إذا كانت سـ = { ب : ب ∈ ط ، ب عددًا زوجيًّا أصغر من ٦ }

(أ) أوجِد سـ بذكر العناصر .

سـ = {٢ ، ٤}

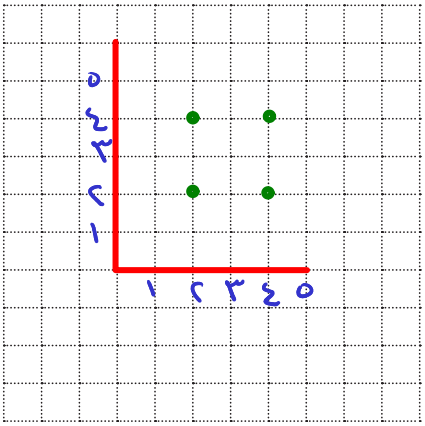
(ب) أُكتب سـ × سـ بذكر العناصر .

سـ × سـ = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤)}

(ج) مثِّل سـ × سـ بمخطّط سهمي وآخر بياني .



مخطّط سهمي



مخطّط بياني

١ - ٧ مفهوم العلاقة The Concept of Relation

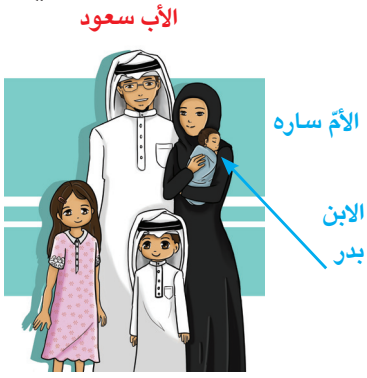
سوف تتعلّم : مفهوم العلاقة وكيفية إيجاد العلاقة بين مجموعة وأخرى .

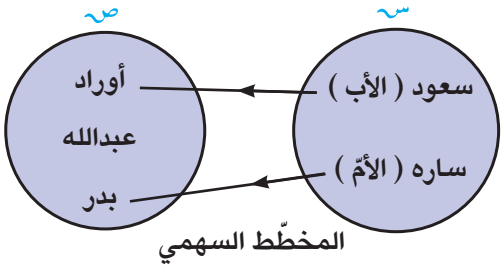
العبارات والمفردات :

علاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى	Relation from a Set to Another
علاقة على مجموعة	Relation on a Set

إستكشِف

تخرّج سعود من الجامعة وحصل على وظيفة مناسِبة ، ثمّ تزوّج ورُزق بعائلة كما هو موضَّح في المخطّط الآتي :





المخطّط السهمي

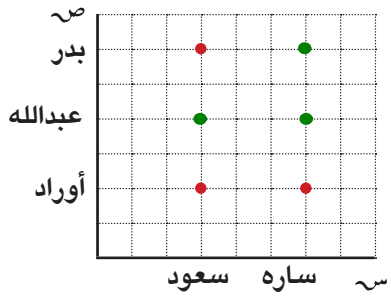
١ إستعِن بالصورة التي أمامك لإكمال المخطّط السهمي الذي يمثّل سـ × صـ .

٢ أُكتب سـ × صـ بذكر العناصر .

سـ × صـ = { (سعود ، أوراد) ، (سعود ، عبدالله) ، (سعود ، بدر) ،

(ساره ، أوراد) ، (ساره ، عبدالله) ، (ساره ، بدر) }

٣ أكمِل التمثيل البياني سـ × صـ المقابِل .



إجعل ع١ هي علاقة « أب » من سـ إلى صـ ،

فمثلًا سعود أب لـ أوراد ، عبدالله ، بدر

وأيضًا ع٢ هي علاقة « أم » من سـ إلى صـ ،

فمثلًا ساره أم لـ أوراد ، عبدالله ، بدر

٤ أكمِل جميع الأزواج المرتَّبة التي تمثّل علاقة (أب) :

ع١ = { (سعود ، أوراد) ، (سعود ، عبدالله) ، (سعود ، بدر) }

٥ أكمِل جميع الأزواج المرتَّبة التي تمثّل علاقة (أمّ) :

ع٢ = { (ساره ، أوراد) ، (ساره ، عبدالله) ، (ساره ، بدر) }

٦ (أ) هل ع١ ⊆ سـ × صـ ؟ نعم

(ب) هل ع٢ ⊆ سـ × صـ ؟ نعم

لتكن سـ ، صـ مجموعتَين غير خاليتَين تكون « ع » علاقة من سـ إلى صـ عندما تكون « ع » مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي سـ × صـ ونعبّر عن ذلك
ع ⊆ سـ × صـ .

مثال (١) :

إذا كانت سـ = { ٣ ، ٥ } ، صـ = مجموعة أرقام العدد ٣٤٤ ٢٢

(أ) أُكتب صـ بذكر العناصر .

(ب) أُكتب حاصل الضرب الديكارتي سـ × صـ .

(ج) أيّ مما يلي يمثّل علاقة من سـ إلى صـ ، مع ذكر السبب :
ع١ = { (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٢) }
ع٢ = { (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٥) }
ع٣ = { (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٢) }
ع٤ = { (٣ ، ٣) }



معلومة مفيدة :

يستخدم العلماء العلاقة بين عمق المحيط وضغط الماء على الجسم ، فكلّما زاد العمق زاد الضغط على الجسم . فجاذبية الأرض تجذب الماء إلى الأسفل ، وهو ما يسبّب الضغط .

الحلّ :

(أ) صـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

(ب) سـ × صـ = { (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) }

(ج) ع١ تمثّل علاقة من سـ إلى صـ لأنّ ع١ ⊆ سـ × صـ
ع٢ لا تمثّل علاقة من سـ إلى صـ لأنّ (٤ ، ٥) ∋ ع٢
ولكن (٤ ، ٥) ∌ سـ × صـ (أُذكر سببًا آخر)
ع٣ تمثّل علاقة من سـ إلى صـ لأنّ ع٣ ⊆ سـ × صـ
ع٤ تمثّل علاقة من سـ إلى صـ لأنّ ع٤ ⊆ سـ × صـ

عبِّر عن فهمك

من مثال (١) إذا كانت ع = { (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٧) ، (٥ ، ٢) } ،
فهل ع تمثّل علاقة من سـ إلى صـ ؟ فسِّر إجابتك .

لا لأنه (٣، ٧) ∌ سـ × صـ .

مثال (٢) :

فيما يلي مجموعة من العلاقات المعرَّفة على س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

أُكتب كلّ علاقة بذكر عناصرها :

(أ) $ع_1$ علاقة « ضعف » من س إلى س .

(ب) $ع_2 = \{ (أ ، ب) : أ ، ب \in س ، أ + ب = ٨ \}$

(ج) $ع_3 = \{ (أ ، ب) : أ ، ب \in س ، ب = أ \}$

(د) $ع_4 = \{ (أ ، ب) : أ ، ب \in س ، أ = \sqrt{ب} \}$

مثِّل $ع_1$ بمخطّط سهمي و $ع_2$ بمخطّط بياني .

الحلّ :

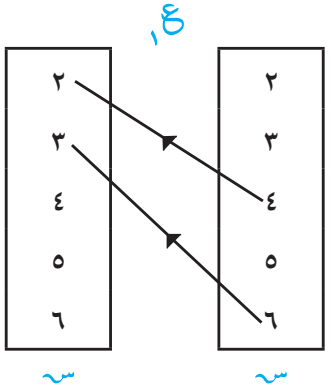
(أ) حيث إنّ ٤ ضعف العدد ٢ ، ٦ ضعف العدد ٣

فإنّ : $ع_1 = \{ (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) \}$

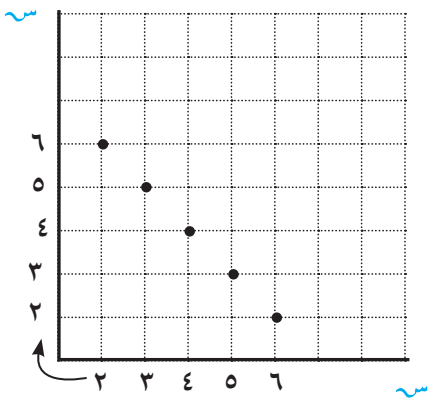
(ب) $ع_2 = \{ (٦ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٦) \}$

(ج) $ع_3 = \{ (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) \}$

(د) $ع_4 = \{ (٢ ، ٤) \}$



مخطّط سهمي



مخطّط بياني

لاحِظ أنّ :

عندما نقول إنّ ع علاقة ضعف ، يعني أنّ في كلّ زوج مرتَّب المسقط الأوّل هو ضعف المسقط الثاني .

تذكَّر

الجذر التربيعي للعدد الموجَب أ هو العدد الذي مربّعه يساوي أ .

ملاحظة :

◄ تكون « ع » علاقة على س إذا كانت ع ⊆ س × س .

عبِّر عن فهمك

من مثال (٢) : أُكتب علاقات أخرى معرَّفة على س .

مثال (٣) :

إذا كانت سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، صـ = { ٣ ، ٤ ، ٨ ، ٩ ، ١٥ }

أوّلًا : $ع_١$ علاقة من سـ إلى صـ

حيث $ع_١$ = { (أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، أ = $\frac{١}{٣}$ ب } .

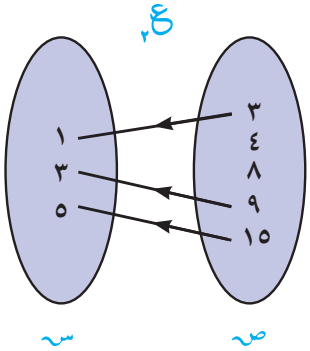
(أ) أُكتب $ع_١$ بذكر العناصر .

(ب) مثِّل $ع_١$ بمخطّط بياني .

ثانيًا : $ع_٢$ ، $ع_٣$ علاقات من صـ إلى سـ

(ج) أُكتب العلاقة $ع_٢$ المبيَّنة في المخطّط السهمي المقابِل : بذكر العناصر ، والصفة المميِّزة .

(د) أُكتب بذكر العناصر $ع_٣$ = { (أ ، ب) : أ ∈ صـ ، ب ∈ سـ ، أ ≥ ب } .

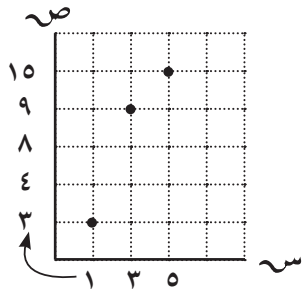


الحلّ :

أوّلًا :

(أ) $ع_١$ = { (١ ، ٣) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) }

(ب)



ثانيًا :

(ج) $ع_٢$ = { (٣ ، ١) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) }

$ع_٢$ = { (أ ، ب) : أ ∈ صـ ، ب ∈ سـ ، أ = ٣ ب }

(د) $ع_٣$ = { (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥) }

انتبه

عندما نقول إنّ ع علاقة ثلث ، يعني أنّ في كلّ زوج مرتَّب المسقط الأوّل يساوي ثلث المسقط الثاني .

عبِّر عن فهمك

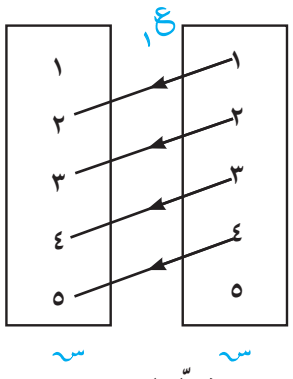
يرى نوّاف أنّ $ع_١$ = $ع_٢$ في مثال (٣) .

هل رأي نوّاف صحيح أو خطأ ؟ فسِّر ذلك.

لا .. غير صحيح

مثال (٤) :

أُكتب العلاقة ع١ ، ع٢ على سـ التي يمثّلهما كلّ من المخطّطَين السهمي والبياني الآتيَين ، بذكر العناصر ثمّ بذكر الصفة المميِّزة .

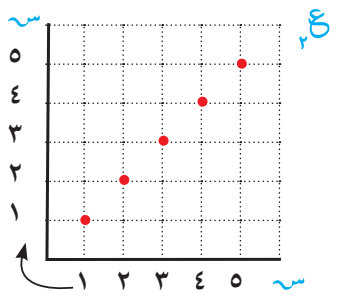


مخطّط سهمي

الحلّ :

ع١ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥) }

ع١ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، ب = أ + ١ }



مخطّط بياني

الحلّ :

ع٢ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

ع٢ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ = ب }

تمارين ذاتية :

١ إذا كانت سـ = { أ ، ب ، جـ } ، صـ = { ٤ ، ٥ ، ٨ } ، فأيّ المجموعات الآتية تمثّل علاقة من سـ إلى صـ ؟ وأيّها تمثّل علاقة من صـ إلى سـ مع ذكر السبب .

(أ) هـ = { (أ ، ٥) ، (أ ، ٤) ، (أ ، ٨) ، (ب ، ٤) }

تمثل علاقة من سـ إلى صـ لانه جميع الازواج المرتبة فيه ∈ سـ × صـ

(ب) د = { (أ ، ٨) ، (أ ، ٥) ، (جـ ، ٨) }

تمثل علاقة من سـ إلى صـ لانه جميع الازواج المرتبة في د ∈ سـ × صـ

(ج) و = { (٤ ، أ) ، (٤ ، جـ) ، (٥ ، ب) ، (٨ ، أ) }

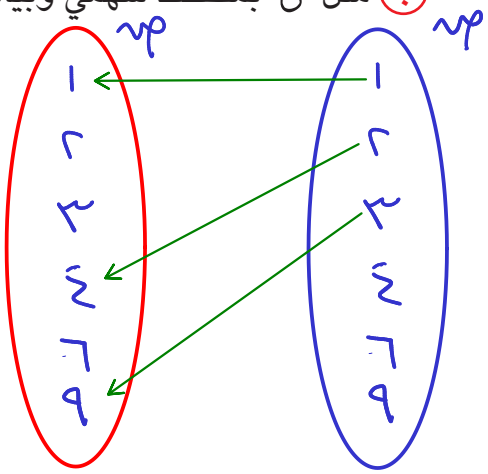
تمثل علاقة من صـ إلى سـ لأنه جميع الازواج المرتبة في هـ ∈ صـ × سـ

٢ لتكن صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٩ }

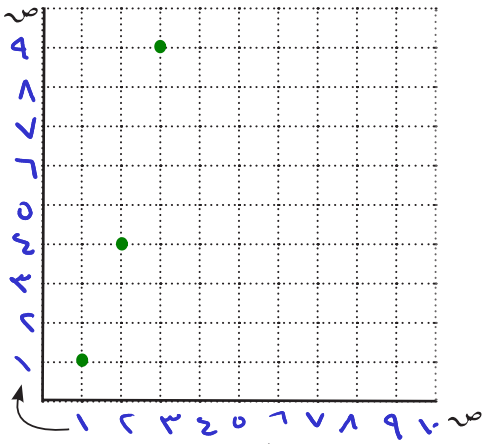
(أ) أُكتب ع علاقة من صـ إلى صـ بذكر العناصر ، حيث ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ صـ ، أ^{٢} = ب }

ع = { (١ ، ١) ، (٣ ، ٩) ، (٢ ، ٤) }

ب) مثِّل ع بمخطّط سهمي وبياني .



مخطّط سهمي



مخطّط بياني

٣ فيما يلي مجموعة من العلاقات المعرَّفة من سـ إلى صـ ، حيث سـ = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ، صـ = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ }. أُكتب كلّ علاقة بذكر عناصرها .

أ) هـ = { (أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، أ < ب }

هـ = { (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩) ، (٦ ، ٩) }

ب) ل = { (أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، ب = أ }

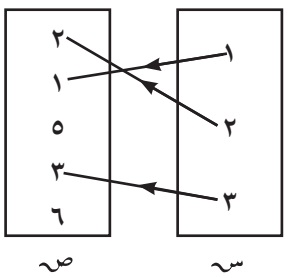
ل = { (٣ ، ٣) ، (٦ ، ٦) ، (٩ ، ٩) }

ج) ع = { (أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، ب = أ + ٦ }

ع = { (٣ ، ٩) ، (٦ ، ١٢) ، (٩ ، ١٥) }

٤ أُكتب العلاقات ع١ ، ع٢ ، ع٣ على المجموعات الممثَّلة بالمخطّطات الآتية ، بذكر العناصر ثمّ بذكر الصفة المميِّزة .

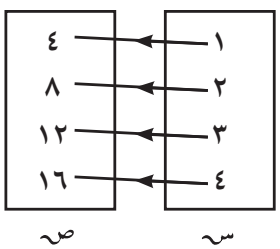
أ) ع١



ع١ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) }

ع١ = { (أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، ب = أ }

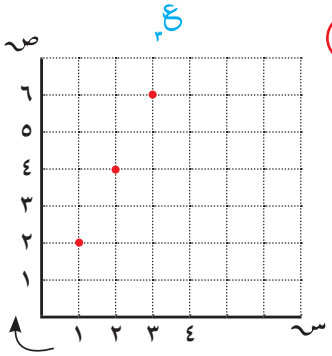
ب) ع٢



ع٢ = { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٨) ، (٣ ، ١٢) ، (٤ ، ١٦) }

ع٢ = { (أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، ب = ٤ أ }

ج) ع٣

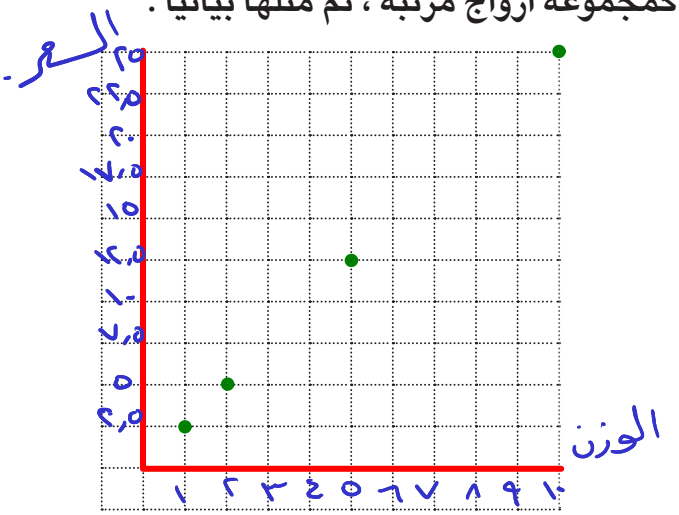


ع٣ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }

ع٣ = { (أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، ب = ٢ أ }

٥ من الجدول الآتي ، أُكتب علاقة (الوزن ، السعر) كمجموعة أزواج مرتَّبة ، ثمّ مثِّلها بيانيًّا .

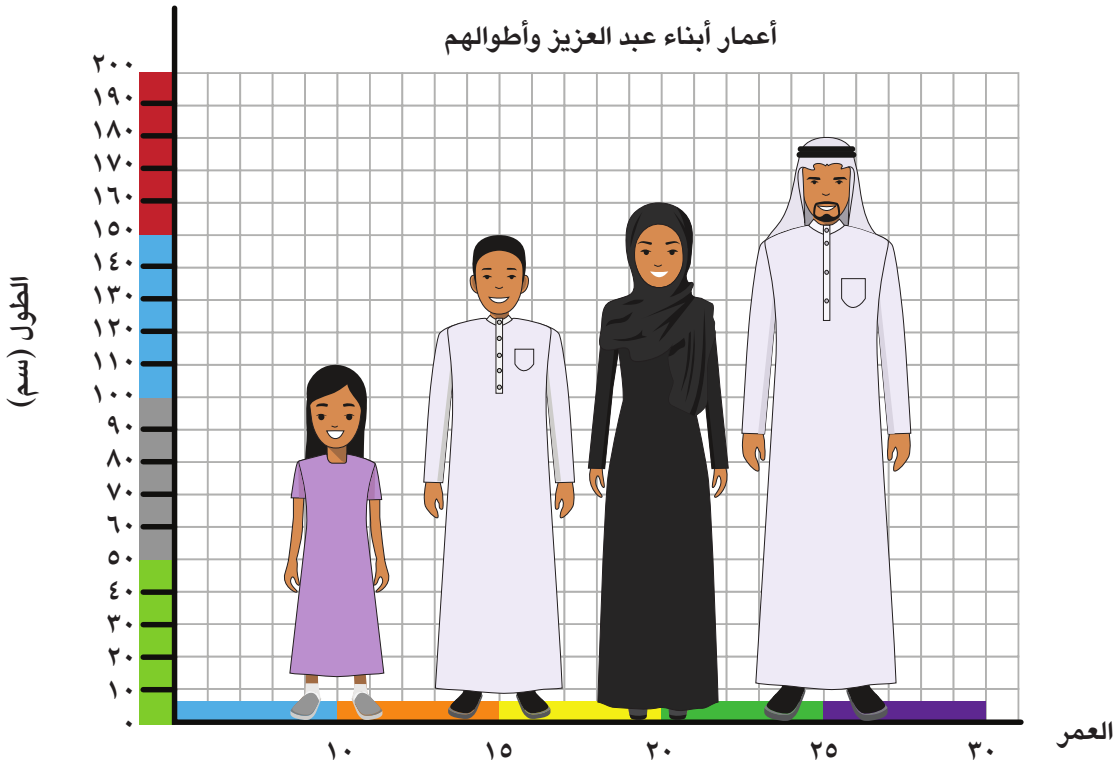
أسعار السمك	
الوزن (كجم)	السعر (دينار)
١	٢,٥
٢	٥
٥	١٢,٥
١٠	٢٥



ع = { (١ ، ٢,٥) ، (٢ ، ٥) ، (٥ ، ١٢,٥) ، (١٠ ، ٢٥) }

ع = { (أ ، ب) : أ هو الوزن ، ب هو السعر ، ب = ٢,٥ أ }

٦ من المخطّط البياني ، عبِّر عن علاقة (العمر ، الطول) لأبناء عبد العزيز بصورة أزواج مرتَّبة .



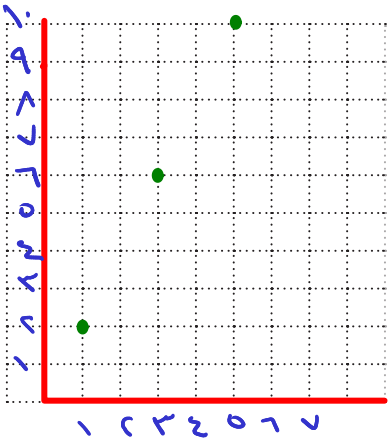
ع = { (١٠ ، ١١٠) ، (١٥ ، ١٥٠) ، (٢٠ ، ١٦٠) ، (٢٥ ، ١٨٠) }

٧ **إذا كانت** سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، صـ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ،

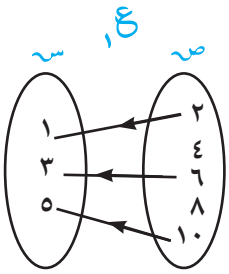
ع = {(أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، أ = $\frac{١}{٢}$ ب } .

(أ) اُكتب ع بذكر العناصر ع = {(١ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ١٠)}

(ب) مثِّل ع بمخطّط بياني .



(ج) اُكتب العلاقة ع$_{١}$ المبيَّنة في المخطّط السهمي الآتي بذكر العناصر والصفة المميِّزة .



ع$_{١}$ = {(١ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ١٠)}

ع$_{١}$ = {(أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، ب = ٢ أ}

(د) هل ع = ع$_{١}$ ؟

لا

تقويم الوحدة التعليمية الأولى
Unit One Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ } ، فأيّ من العبارات الآتية صحيحة .

أ) ١ ∈ س ✓

ب) ٧ ∈ س ✓

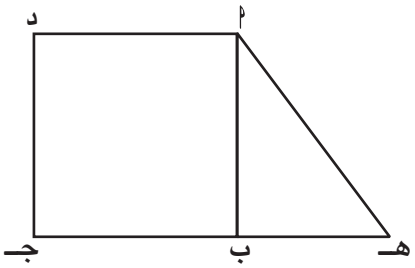
ج) ١ ∉ س ✗

د) ٥٤ ∈ س ✗

هـ) { ١ ، ٣ } ⊇ س ✓

و) { ٧ } ⊄ س ✗

٢ تأمَّل الشكل المقابل ، وضَع الرمز المناسِب ∈ أو ∉ أو ⊇ أو ⊄ .



أ) د ∈ $\overline{\text{د جـ}}$

ب) $\overline{\text{جـ د}}$ ∉ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$

ج) هـ ∉ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

٣ إذا كانت س = مجموعة الأعداد الكلّية الأصغر من ٥ ، ص = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، فهل س = ص ؟
فسِّر إجابتك .

س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

∴ س ≠ ص لأن ٤ ∈ س و ∉ ص

٤ إذا كانت سـ = { أ : أ ∈ ط ، أ < ٦ } ، صـ = { د : د ∈ صـ ، د عاملًا موجَبًا من عوامل العدد ١٢ } ، فأوجِد بذكر العناصر كلًّا من :

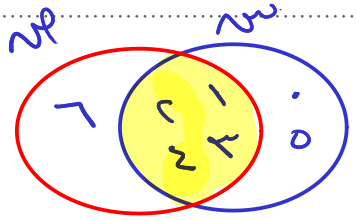
أ سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

ب صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }

ج سـ ∩ صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

د سـ ∪ صـ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ثمّ مثِّل سـ ، صـ بمخطّط ڤن وظلِّل سـ ∩ صـ .



٥ إذا كانت ع = { س : س ∈ ط ، س عددًا زوجيًّا أكبر من ١ وأصغر من ٩ } ، ل = { ٠ ، ٣ ، ٤ ، ٦ } ، ح = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، فأوجِد كلًّا ممّا يلي :

أ ع = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

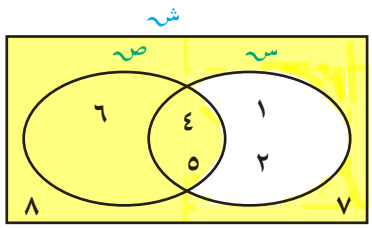
ب ل ∪ ع = { ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

ج ع ∩ ل = { ٤ ، ٦ }

د ل ∪ ع ∪ ح = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ }

هـ ع ∩ ل ∩ ح = { ٤ ، ٦ }

٦ من شكل ڤن أدناه ، أكمِل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ شـ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

ب سـ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ }

ج صـ = { ٤ ، ٥ ، ٦ }

د سـ − صـ = { ١ ، ٢ }

هـ صـ − سـ = { ٦ }

و $\overline{سـ}$ = { ٦ ، ٧ ، ٨ }

ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثِّل (سـ − صـ) .

٧ لتكن المجموعة الشاملة ش = مجموعة الأعداد الكلّية الأصغر من ٥ ،
س = { ا : ا ∈ صـ ، ا ≥ ٤ } ، ع = { ٢ ، ٤ } .

أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

أ ش = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ب س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ج $\overline{س}$ = { ٠ }

د $\overline{ع}$ = { ٠ ، ١ ، ٣ }

هـ س − ع = { ١ ، ٣ }

و ($\overline{س}$ ∩ $\overline{ع}$) = { ٠ }

ز ($\overline{س ∩ ع}$) = { ٠ ، ١ ، ٣ }

ح $\overline{\overline{س}}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

٨ إذا كانت ك = { ا : ا ∈ صـ ، −٢ < ا < ١ } ،
ل = { ب : ب ∈ صـ ، −١ < ب < ٣ }

أ أُكتب كلًّا من ك ، ل بذكر العناصر .

ك = { −١ ، ٠ }

ل = { ٠ ، ١ ، ٢ }

ب أُكتب ك × ل بذكر العناصر .

ك × ل = { (−١ ، ٠) ، (−١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (٠ ، ٢) }

٩ لتكن ع = { (ا ، ب) : ا ، ب ∈ ط ، ا + ب = ٥ } . أُكتب ع بذكر عناصرها .

ع = { (٠ ، ٥) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٥ ، ٠) }

١٠ أُكتب العلاقات الآتية على سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، بذكر عناصرها حيث :

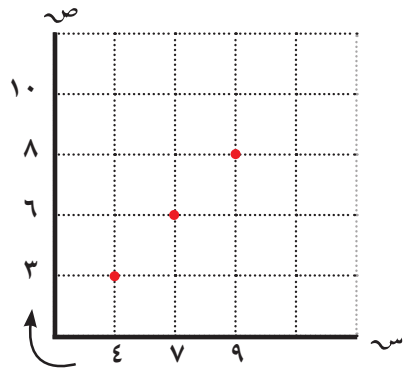
ع١ = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ = $\frac{١}{٢}$ ب }

ع١ = {(٢،١)، (٤،٢)}

ع٢ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ = ب }

ع١ = {(١،١)، (٢،٢)، (٣،٣)، (٤،٤)، (٥،٥)}

١١ اِستعِن بالمخطّط البياني الآتي ، ثمّ أجِب عمّا يلي :



أ أُكتب العلاقة ع ، بذكر العناصر ثمّ بذكر الصفة المميِّزة .

ع = {(٣،٤)، (٦،٧)، (٨،٩)}

ع = {(أ، ب): أ ∈ سـ، ب ∈ سـ، ب = أ + ١}

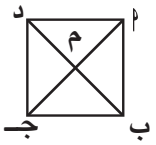
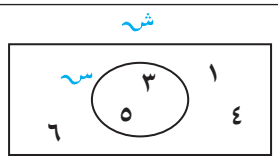
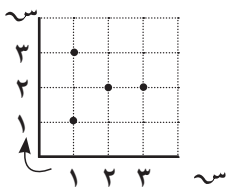
ب أُكتب الحاصل الديكارتي سـ × صـ .

سـ = {٣، ٦، ٨} ، صـ = {٤، ٧، ٩}

∴ سـ × صـ = {(٣،٤)، (٦،٤)، (٨،٤)، (٣،٧)، (٦،٧)، (٨،٧)، (٣،٩)، (٦،٩)، (٨،٩)}

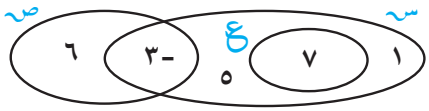
ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١- ١٠) ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ لأيّ مجموعتَين س ، ص ، فإنّ س ∪ ص = س ∩ ص	أ	ب
٢ إذا كانت ٣ ∈ (س ∩ ص) ، فإنّ ٣ ∈ ص	أ	ب
٣ لأيّ مجموعة س يكون ∅ ⊆ س	أ	ب
٤ في الشكل المقابِل ، م ∈ المربّع ا ب جـ د 	أ	ب
٥ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٥ } . فإنّ س - ص = { ٥ }	أ	ب
٦ إذا كانت س ∩ ص = ∅ ، فإنّ س - ص = س	أ	ب
٧ من شكل ڤن المقابِل : $\overline{\overline{س}}$ = { ٣ ، ٥ } 	أ	ب
٨ { ا ، ب } × { ٢ } = { (ا ، ٢) ، (ب ، ٢) }	أ	ب
٩ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩ } وكانت ع علاقة من س ← ص حيث : ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩) } ، فإنّ ع تمثّل علاقة « نصف » .	أ	ب
١٠ التمثيل البياني المقابل يمثّل العلاقة ع = { (١ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٢) } 	أ	ب

في البنود (١١- ٢٢) لكلّ بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

١١ في الشكل المقابل العبارة الصحيحة فيما يلي هي :



أ ع ⊇ صـ

ب ع ⊄ سـ

ج ع ⊇ (سـ ∪ صـ)

د ع ⊇ (سـ ∩ صـ)

١٢ إذا كانت سـ = { ٥ ، ٢ ، ١ - ك } ، صـ = { ٢ ، ٧ ، ٥ } وكان سـ = صـ ، فإنّ ك =

أ -٦ ب ٢

ج ٧ د -٨

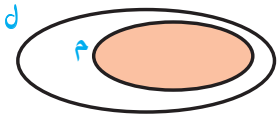
١٣ في الشكل المقابل ، $\overline{أب}$ ⊄



أ $\overleftarrow{أجـ}$ ب $\overleftarrow{ب أ}$

ج $\overleftarrow{ب جـ}$ د $\overleftrightarrow{ب جـ}$

١٤ في الشكل المقابل ، المنطقة المظلَّلة يمكن التعبير عنها بالصورة :



أ م ⊄ ل ب م ∩ ل

ج م ∪ ل د ل ⊇ م

١٥ إذا كانت سـ = { أ : أ ∈ ط ، ٢ ≤ أ < ٦ } ، فإنّ سـ هي :

أ { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ب { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

ج { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } د { ٢ ، ٦ }

١٦ إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، فإنّ المجموعة الجزئية من سـ فيما يلي هي :

أ ٣ ب { ١ ، ٢ ، ٥ } ج { ١ ، ب } د { ١ ، ٢ }

١٧ إذا كانت سـ = { أ : أ ∈ ط ، أ عددًا أوّليًّا < ٦ } ، صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، فإنّ صـ - سـ =

أ { ٥ } ب { ١ ، ٤ }

ج { ٢ ، ٣ } د { ٢ ، ٣ ، ٥ }

١٨ إذا كانت المجموعة الشاملة ش = مجموعة عوامل العدد ٤ ، س = { ١ ، ٢ } ،
فإنّ $\overline{س}$ =

أ { -١ ، -٢ }
ب { ١ ، ٢ }
ج { ٤ }
د { ٤ ، -١ ، -٢ ، -٤ }

١٩ إذا كانت { ٥ ، ٣ ، س ، ٦ } = { ص ، ٧ ، ٦ ، ٣ } ، فإنّ قيمة س - ص تساوي :

أ ٢ ب -٢
ج ١٢ د -١٢

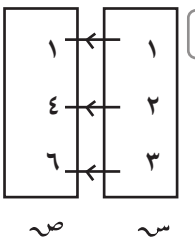
٢٠ إذا كانت س = { أ : أ ∈ صـ ، -٢ < أ ≤ ٥ } ، حيث صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة ،
فإنّ عدد عناصر س × س هو :

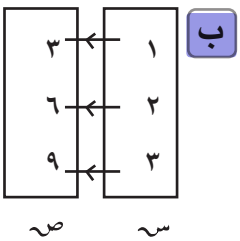
أ ٧ ب ٨
ج $٧^{٢}$ د $٨^{٢}$

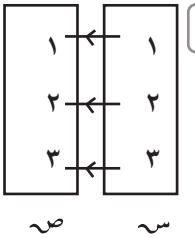
٢١ إذا كانت ع علاقة على صـ ، فإنّ :

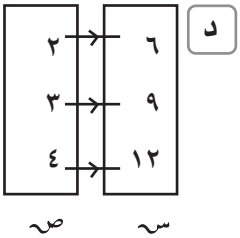
أ ع ⊇ س × صـ ب ع ⊇ صـ × س
ج ع ⊇ س × س د ع ⊇ صـ × صـ

٢٢ المخطّط السهمي الذي يمثّل علاقة «ثلث» من س ⟵ صـ هو :

أ


ب


ج


د


الوحدة التعليمية
الثانية



الأعداد النسبية

الصناعة

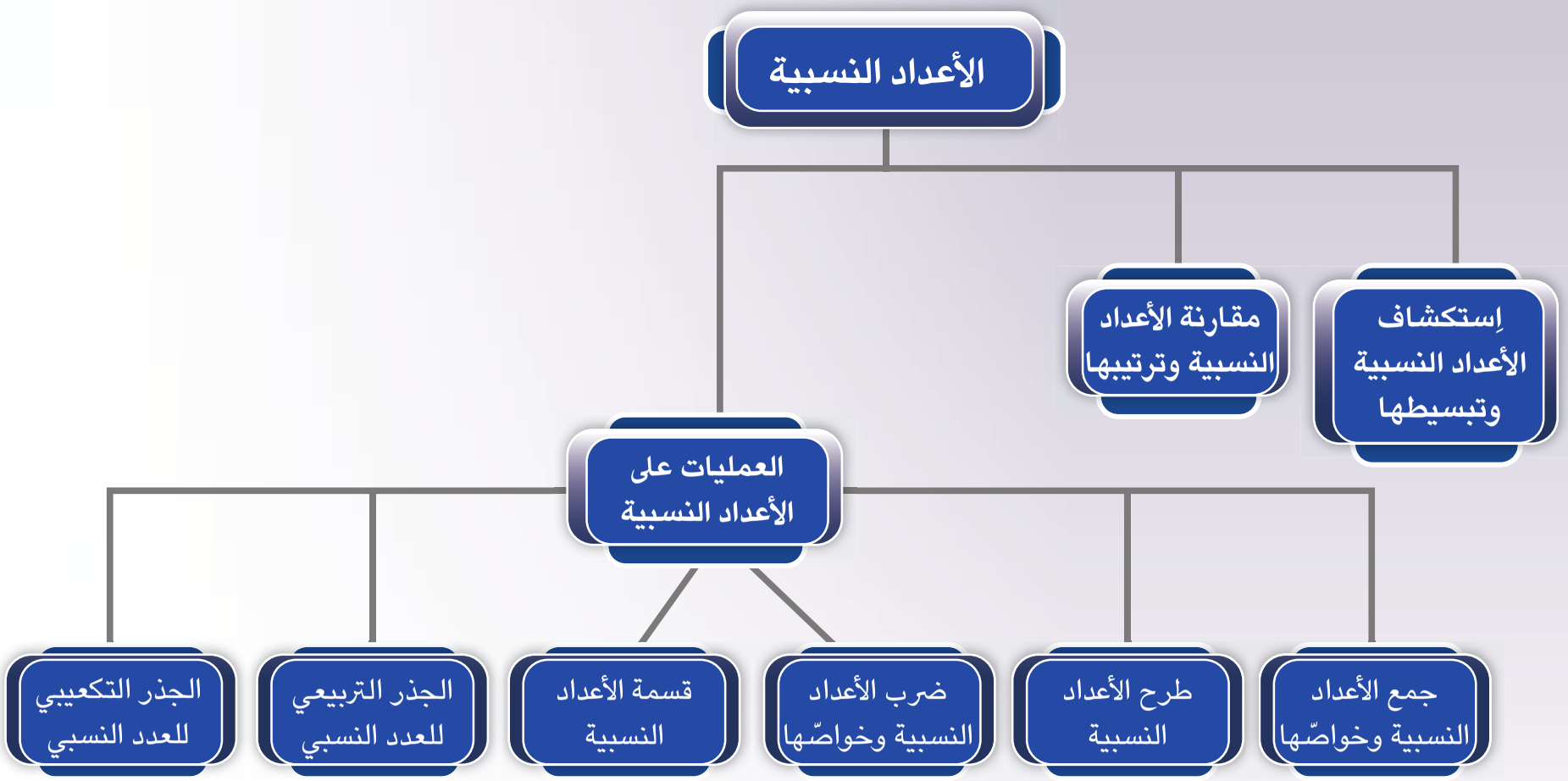
تُعدّ الصناعة من أهمّ مصادر الدخل القومي في دولة الكويت ، وقد أدّت دورًا حيويًّا مهمًّا في الحفاظ على النموّ الاقتصادي .

ولإنتاج السلع، تستخدم المصانع الأعداد النسبية لتحديد كمّية الموادّ التي يجب وضعها للحصول على المنتَج النهائي .



المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
العدّ والجبر	تمثيل الأعداد واستخدامها ضمن أشكال متكافئة متنوّعة ، وإدراك أنّ مختلف أشكال الأعداد تتلاءم مع حالات مختلفة .	العمل الجَماعي - الاستكشاف والتقصّي - الفهم - التذكّر - التعرّف - القراءة - الكتابة - العلاقات - التعدّد - المقارنة والتمييز - الاستنتاج - القوانين
	اِختيار العمليات المناسِبة واستخدامها لحلّ المسائل وتعليل الخيارات .	التعرّف - العمل الجَماعي - التذكّر - الفهم - الاستنتاج - حلّ المشكلات - القراءة - التقويم

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثانية



هل أنت مستعدّ؟

١ أوجِد العامل المشترَك الأكبر (ع. م. أ) لكلّ زوج من الأعداد الآتية:

(أ) ٦ ، ١٢

عوامل العدد ٦ = ١، ٢، ٣، ٦

عوامل العدد ١٢ = ١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢

∴ (ع.م.أ) = ٦

(ب) ٣٥ ، ٢٥

٣٥ = ١، ٥، ٧، ٣٥

٢٥ = ١، ٥، ٢٥

∴ (ع.م.أ) = ٥

(ج) ١٤ ، ٢١

١٤ = ١، ٢، ٧، ١٤

٢١ = ١، ٣، ٧، ٢١

(ع.م.أ) = ٧

٢ ضَع كلًّا ممّا يلي بصورة كسر مركَّب :

(أ) $٤\frac{٣}{٥} = \frac{٢٣}{٥}$

(ب) $١,٧ = \frac{١٧}{١٠}$

(ج) $-٢,٣ = -\frac{٢٣}{١٠}$

٣ أوجِد كلًّا ممّا يلي :

(أ) $|-٤| = ٤$

(ب) $|٢| = ٢$

٤ أكمِل :

(أ) المعكوس الجمعي للعدد ٩- هو ٩

(ب) المعكوس الجمعي للعدد ٣ هو ٣-

٥ قارِن بوضع > أو < أو = فيما يلي :

(أ) ٢٥- < ٨

(ب) ٠ < ٢١

(ج) ١٤- < ٠

(د) ١٢- < ١٥-

٦ أوجِد المضاعَف المشترَك الأصغر (م. م. أ) لكلّ زوج من الأعداد الآتية :

(أ) ٢ ، ٨

مضاعفات العدد ٢ هو ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ...

مضاعفات العدد ٨ هو ٨، ١٦، ٢٤، ...

∴ (م.م.أ) هو ٨

(ب) ٦ ، ٩

٦ = ٦، ١٢، ١٨، ٢٤، ...

٩ = ٩، ١٨، ٢٧، ...

(م.م.أ) = ١٨

(ج) ٥ ، ٧

٥ = ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ...

٧ = ٧، ١٤، ٢١، ٢٨، ٣٥، ...

(م.م.أ) = ٣٥

٧ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

(أ) ٣- + ١٠ = ٧

(ب) ١١ - (٥-) = ١٦

(ج) ٣- × ٤ = ١٢-

د) $-٥ + (-٩) =$ ..... -١٤

هـ) $(-١٥) - ٨ =$ ..... -٢٣

و) $٥ \times (-٧) =$ ..... -٣٥

ز) $١٢ + (-٦) =$ ٦

ح) $(-١٧) - (-٧) =$ ..... -١٠

ط) $(-٦) \times (-٢) =$ ١٢

٨ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $١,٩ + ٣,١٢ =$ ..... $٥,٠٢$

ب) $١٥,٤٢ - ١١,٨ =$ ..... $٣,٦٢$

ج) $٣,٢ \times ٠,٤ =$ ..... $١,٢٨$

٩ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي :

أ) $٤^{٢} =$ ١٦

ب) $٩^{٢} =$ ٨١

ج) $(-٣)^{٢} =$ ٩

د) $\sqrt{٦٤} =$ ٨

هـ) $\sqrt{١٤٤} =$ ١٢

و) $\sqrt{١٦٠٠} =$ ٤٠

١٠ أوجِد الجذر التربيعي للعدد ٣٢٤ باستخدام تحليل العدد إلى عوامله الأوّلية .

$\sqrt{٣٢٤} = \sqrt{١٦ \times ٢٠} = \sqrt{٨١ \times ٤ \times ٤} = \sqrt{٩ \times ٩ \times ٤ \times ٤}$

$\sqrt{٣٢٤} = \sqrt{٩^{٢} \times ٤^{٢}} = ٩ \times ٤ = ١٨$

١١ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي :

أ) $٢^{٣} =$ ٨

ب) $٣^{٣} =$ ٢٧

ج) $٤^{٣} =$ ٦٤

د) $٥^{٣} =$ ١٢٥

هل أنتَ مستعدّ؟

٢ - ١ اِستكشاف الأعداد النسبية وتبسيطها

Exploring and Simplifying Rational Numbers

سوف تتعلّم : الأعداد النسبية وتبسيطها .

العبارات والمفردات :

أعداد نسبية	Rational Numbers	عدد عشري متكرّر (دوري)	Repeating Decimal
عدد عشري منتهٍ	Terminating Decimal		

اِستكشِف



١ حُلّ المعادلة ٤ س = ٣

س = ٣/٤ = ٠,٧٥

.....

٢ هل الناتج ينتمي إلى ط ؟ لا

٣ هل الناتج ينتمي إلى صـ ؟ لا

٤ هل توجد مجموعة تحوي مثل هذا العدد ؟ نعم الأعداد النسبية

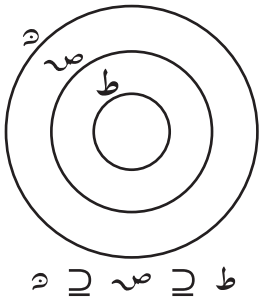
مجموعة الأعداد النسبية ق : هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب ≠ ٠

نعبّر عنها هكذا : ق = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ صـ ، ب ≠ ٠ }

ق = ق+ ∪ { ٠ } ∪ ق-

حيث ق- هي مجموعة الأعداد النسبية السالبة ، ق+ هي مجموعة الأعداد النسبية الموجَبة .

تُعدّ الأعداد الكلّية والأعداد الصحيحة والكسور الاعتيادية والأعداد الكسرية والكثير من الكسور العشرية والأعداد العشرية « أعدادًا نسبية » .



تذكّر

- مجموعة الأعداد الكلّية (الطبيعية) ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }
- مجموعة الأعداد الصحيحة صـ = { ... ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ ، -٣ ، ... }

مثال (١) :

ضَع كلًّا ممّا يلي على صورة $\frac{أ}{ب}$:

(أ) ١٧ (ب) -٥

(ج) $-٠,٧٥$ (د) $٤\frac{٣}{٥}$

(هـ) ٦,٧ (و) $٠,\overline{١٦}$

الحلّ :

(أ) $١٧ = \frac{١٧}{١}$ (ب) $-٥ = \frac{-٥}{١}$

(ج) $-٠,٧٥ = \frac{-٧٥}{١٠٠}$ (د) $٤\frac{٣}{٥} = \frac{٢٣}{٥}$

(هـ) $٦,٧ = \frac{٦٧}{١٠}$ (و) $٠,\overline{١٦} = \frac{١٦}{٩٩} = \frac{٤}{١}$

الأعداد النسبية

الكسور والأعداد الكسرية	عدد عشري منتهٍ	عدد عشري غير منتهٍ متكرّر (دوري) .
مثل : $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٧}{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-١\frac{١}{٢}$	مثل : ١,٦ ، $-٣,٢$ ، ٥,٢	مثل : $٠,\overline{٣}$ ، $٠,\overline{٥٧١}$ ، $-٠,\overline{٦٥}$

وهناك أعداد غير نسبية ستتعرّف عليها بشكل مفصَّل لاحقًا .

وهذه بعض الأمثلة لأعداد غير نسبية :

π ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢}$ ، ٣,١٩٨٠٤٧٥٠٦٨٣ ...

تذكّر

$٠,\overline{٣} = \frac{١}{٣}$ $٠,\overline{٤} = \frac{٤}{٩}$

$٠,\overline{٦} = \frac{٢}{٣}$ $٠,\overline{١٨} = \frac{١٨}{٩٩}$

دورك الآن (١)

ضَع كلًّا ممّا يلي على صورة $\frac{أ}{ب}$:

(أ) ٩ ..... $\frac{٩}{١}$ (ب) $١\frac{١}{٢}$ ..... $\frac{٣}{٢}$

(ج) $-١,٦ = \frac{-١٦}{١٠} = \frac{-٨}{٥}$ (د) $٠,\overline{٧}$ ..... $\frac{٧}{٩}$

عبِّر عن فهمك

هل يمكن وضع العدد $١,\overline{٤}$ على صورة $\frac{أ}{ب}$ ؟ وضِّح إجابتك .

نعم $١,\overline{٤} = ١\frac{٤}{٩} = \frac{١٣}{٩}$

دورك الآن (٢)

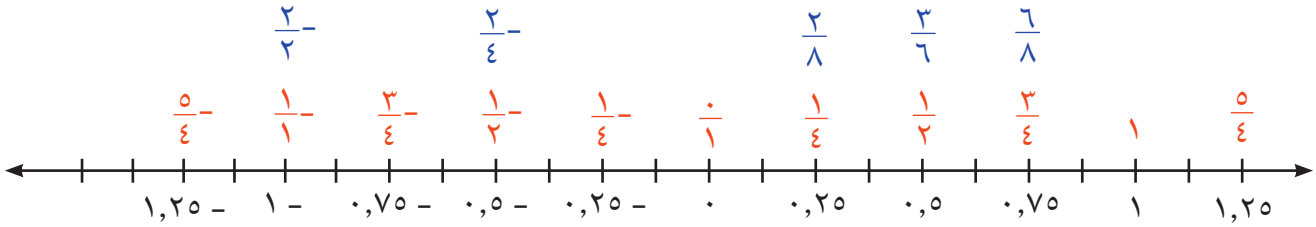
ضَع الرمز المناسب ∋ أو ∌ لتحصل على عبارة صحيحة :

١٧ ..... ∋ ..... ط	١٧ ..... ∋ ..... ص	١٧ ..... ∋ ..... ح
٥ − ..... ∌ ..... ط	٥ − ..... ∋ ..... ص	٥ − ..... ∋ ..... ح
$\frac{٣}{٤}-$ ..... ∌ ..... ط	$\frac{٣}{٤}-$ ..... ∌ ..... ص	$\frac{٣}{٤}-$ ..... ∋ ..... ح
$٠,\overline{٣}$ ..... ∌ ..... ط	$٠,\overline{٣}$ ..... ∌ ..... ص	$٠,\overline{٣}$ ..... ∋ ..... ح

ملاحظة :

كما في الأعداد الصحيحة ، العدد النسبي ومعكوسه الجمعي يكونان على خطّ الأعداد في جهتَين مختلفتَين من الصفر وعلى البعد نفسه .

يمكن تمثيل العدد النسبي على خطّ الأعداد .



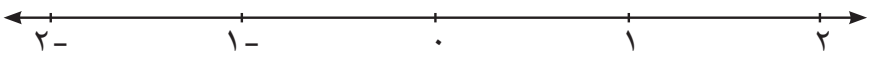
لاحِظ أنّ الأعداد $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٤-}{٨-}$ ، ٠,٥ ، ٠,٥٠٠ كلّها صور مختلفة للعدد النسبي نفسه .

مثال (٢) :

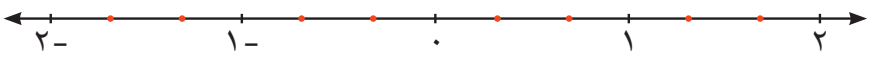
مثِّل الأعداد الآتية على خطّ الأعداد : $١\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٢-}{٣}$ ، $\frac{٤-}{٣}$ ، $\frac{٦-}{٣}$

الحلّ :

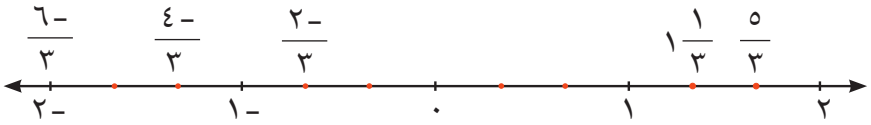
خطوة (١) : نرسم خطّ الأعداد محدِّدين الصفر ووحدات متساوية .



خطوة (٢) : نقسّم كلّ وحدة إلى ٣ أجزاء متساوية تمثّل مقام ٣ .

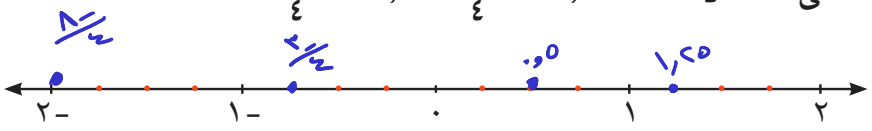


خطوة (٣) : نعيّن النقاط المطلوبة .



دورك الآن (٣)

مثِّل الأعداد الآتية على خطّ الأعداد : ١,٢٥ ، $\frac{-٣}{٤}$ ، ٠,٥ ، $\frac{-٨}{٤}$



دورك الآن (٤)

أكمِل الجدول الآتي :

العدد	٥-	صفر	٣	$\frac{٥-}{٦}$	٠,٧	١,٤-
المعكوس الجمعي	٥	صفر	٣-	$\frac{٥}{٦}$	٠,٧-	١,٤
المطلق	٥	صفر	٣	$\frac{٥}{٦}$	٠,٧	١,٤

لاحِظ أنّ

لا يختلف إيجاد المعكوس الجمعي والمطلَق للأعداد النسبية عنه في الأعداد الصحيحة .

تذكَّر

- يُرمز إلى مطلَق العدد أ بالرمز |أ| .
- المعكوس الجمعي للعدد أ هو -أ .

يكون العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ في أبسط صورة إذا كان :

- ب ∈ صـ+ .
- العامل المشترَك الأكبر للعددَين أ ، ب هو الواحد الصحيح .

مثال (٣) :

أُكتب العدد $\frac{١٢}{-١٨}$ في أبسط صورة .

الحلّ :



بدر : أنا سأبسّط بالقسمة على ٢ ثمّ ٣

$\frac{-١٢}{١٨} = \frac{-١٢ \div ٢}{١٨ \div ٢} = \frac{-٦ \div ٣}{٩ \div ٣} = \frac{-٢}{٣} = -\frac{٢}{٣}$



يوسف : أنا سأبسّط بالقسمة على ٦

$\frac{-١٢}{١٨} = \frac{-١٢ \div ٦}{١٨ \div ٦} = \frac{-٢}{٣} = -\frac{٢}{٣}$

$\frac{-٢}{٣}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ كلاهما في أبسط صورة

ملاحظة :

إذا كان أ ، ب ∈ صـ ، ب ≠ ٠

- $\frac{-أ}{-ب} = \frac{أ}{ب}$
- $\frac{أ}{-ب} = \frac{-أ}{ب} = -\frac{أ}{ب}$
- $\frac{٠}{ب} = ٠$
- $\frac{أ}{ب}$ عدد صحيح عندما أ يقبل القسمة على ب
- $\frac{أ}{٠}$ كمّية غير معرَّفة

تمارين ذاتية :

١ أيّ من الأعداد الآتية نسبي ؟ وأيّها غير نسبي ؟

أ) $\frac{٢٣}{٥}$ ..... نسبي

ب) ١٤,٢ ..... نسبي

ج) −١,٧٥ ..... نسبي

د) ٧,٥٢٣٩٨١٧ ... . غير نسبي

هـ) $١\frac{٧}{٩}$ ..... نسبي

و) $\sqrt{١١}$ ..... غير نسبي

ز) $٠,\overline{١١٣}$ ..... نسبي

ح) $٠,\overline{٦}$ ..... نسبي

ط) $\sqrt{٩}$ ..... نسبي

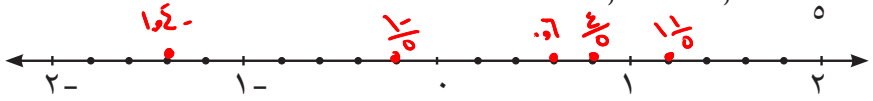
ي) $\frac{\sqrt{٤}}{٥}$ ..... نسبي

ك) π ..... غير نسبي

ل) صفر ..... نسبي

٢ مثِّل الأعداد النسبية الآتية على خطّ الأعداد .

$١\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{-١}{٥}$ ، ٠,٦ ، −١,٤



٣ اُكتب كلًّا ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{١٢}{٢٤} = \frac{١٢ \div ١٢}{٢٤ \div ١٢} = \frac{١}{٢}$

ب) $\frac{-٣٥}{٤٥} = \frac{-٣٥ \div ٥}{٤٥ \div ٥} = -\frac{٧}{٩}$

ج) $\frac{-١٥}{-١٢} = \frac{١٥ \div ٣}{١٢ \div ٣} = \frac{٥}{٤}$

د) $\frac{١٨}{-٢} = -٩$

هـ) $\frac{٣}{٢٥} = \frac{٣}{٢٥}$

و) $\frac{٢٤}{٨} = ٣$

٤ اِختر الإجابة الصحيحة : $\frac{|-٣|}{٥} = \frac{٣}{٥}$

أ) −٠,٠٦

ب) ٠,٠٦

ج) −٠,٦

د) ٠,٦

مهارات تفكير عليا :

في التمارين (٥ - ٦) ، اِختر الإجابة الصحيحة :

٥ العدد النسبي الذي يمكن وضعه على صورة عدد عشري دوري هو :

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

٦ العدد الذي يمثّله س على خطّ الأعداد هو :



(أ) ٢٧,٤ (ب) ٢٧,٨ (ج) ٢٧,٩ (د) ٢٨,٢

٧ في سباق للسيّارات، فاز حمد في ٦ سباقات من أصل ٣٦ سباقًا شارك فيها. أوجِد الكسر العشري الدالّ على نسبة السباقات التي فاز فيها حمد مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من ألف .

∴ الكسر العشري : $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

$= ٠,١٦٦٦٦٦ = ٠,١٦٧$

٢ - ٢ مقارنة الأعداد النسبية وترتيبها
Comparing and Ordering Rational Numbers

سوف تتعلّم : المقارنة بين الأعداد النسبية وترتيبها.

اِستكشِف

تختلف درجات الحرارة في فصل الشتاء في دول العالم، حيث تمّ رصد متوسّط درجات الحرارة في أحد أشهر فصل الشتاء لإحدى السنوات، كما هو موضَّح في الجدول الآتي:





الدول	متوسط درجة الحرارة
روسيا	٧,٣٢-
البوسنة	١,٥٥-
جيبوتي	٢٢,٤
فرنسا	٠
الكويت	١٠

١ أيّ الدول الأكثر برودة؟ وأيّها الأقلّ برودة؟

روسيا أكثر برودة .....

جيبوتي أقل برودة .....

٢ رتِّب درجات الحرارة تصاعديًّا .

-٧,٣٢ < -١,٥٥ < ٠ < ١٠ < ٢٢,٤ .....

.....

معلومة مفيدة :

تُستخدم الأعداد النسبية في التعبير عن درجات الحرارة. نعبّر عن درجة الحرارة تحت الصفر بالأعداد السالبة ودرجة الحرارة فوق الصفر بالأعداد الموجَبة .

لمقارنة عددَين نسبيَّين أو لترتيبهما ، أُكتب العددَين النسبيَّين على شكل عددَين عشريَّين أو على شكل كسرَين لهما المقام نفسه .

مثال (١) :

أ) قارِن بين $\frac{٥}{٩}$ ، $\frac{٧}{١٢}$

ب) قارِن بين $-٢\frac{١}{٤}$ ، $-٢,٥$

الحلّ :

أ) $\frac{٥}{٩} = \frac{٢٠}{٣٦}$ ، $\frac{٧}{١٢} = \frac{٢١}{٣٦}$ أُكتب الكسرَين بعد توحيد المقامات

$\frac{٢٠}{٣٦} < \frac{٢١}{٣٦}$ قارِن بين البسطَين

أي أن $\frac{٥}{٩} < \frac{٧}{١٢}$ قارِن الكسرَين الأصليَّين

ب) • **الطريقة الأولى :** تحويل العدد النسبي من الصورة العشرية إلى الصورة الكسرية .

$-٢,٥ = -٢\frac{٥}{١٠} = -٢\frac{١}{٢}$

$-٢\frac{١}{٤}$ ، $-٢\frac{٢}{٤}$ وحِّد المقامات ثمّ قارن

$-٢\frac{١}{٤} < -٢\frac{٢}{٤}$

إذًا $-٢\frac{١}{٤} < -٢,٥$

• **الطريقة الثانية :** تحويل العدد النسبي من الصورة الكسرية إلى الصورة العشرية .

$-٢\frac{١}{٤} = -٢\frac{٢٥}{١٠٠} = -٢,٢٥$

$-٢,٢٥$ ، $-٢,٥٠$ ساوِ المنازل العشرية ، ثمّ قارِن

$-٢,٢٥ < -٢,٥٠$

إذًا $-٢\frac{١}{٤} < -٢,٥$

تذكَّر

$\frac{١}{٤} = ٠,٢٥$

$\frac{١}{٢} = ٠,٥$

$\frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$

$\frac{١}{٥} = ٠,٢$

$\frac{١}{٨} = ٠,١٢٥$

اِنتبِه

في العدد الكسري السالب نضع (-) أمام الكسر مثلًا :

تكتب $-٢\frac{١}{٢}$

وليس $٢\frac{-١}{٢}$

دورك الآن (١)

ضَع > أو < أو = لتصبح العبارة صحيحة :

أ) $\frac{٣}{٤} > \frac{٢}{٥}$

ب) $٢\frac{١}{٤} > ٢,٥$

ج) $-٠,٠٦ > -\frac{٢}{٥٠}$

د) $\frac{٢}{٣} > ٠,٥$

هـ) $-٥,٠٠٩ < -٠,٠٠١$

و) $٧\frac{١}{٣} = ٧,٣$

ز) $\frac{١}{٣} < \frac{١}{٢}$

ح) $-\frac{١}{٣} > -\frac{١}{٢}$

ط) $٠,٦ > ٠,٤$

ي) $-٠,٦ < -٠,٤$

اِنتبِه

إذا كان لدينا كسران سالبان لهما البسط نفسه ، يكون الكسر ذو المقام الأكبر هو الأكبر ، فمثلًا :

$-\frac{٤}{٩} > -\frac{٤}{٥}$

عبِّر عن فهمك

من خلال «دورك الآن (١)» ماذا تلاحظ في كلّ من :

(أ) البندَين (ز ، ح) ؟ السالب أصغر عبارة عن >، <

(ب) البندَين (ط ، ي) ؟ إذا كان العددان سالبين وكسريين فإنه العدد الأصغر هو الأكبر .

مثال (٢) :

(أ) رتِّب الأعداد الآتية ترتيبًا تنازليًّا : $-٠,٢٥$ ، $٠,٥$ ، ٠ ، $\frac{-١}{٢}$ ، $١\frac{١}{٤}$

(ب) رتِّب الأعداد الآتية ترتيبًا تصاعديًّا : ٢ ، $-٠,\overline{٦}$ ، صفر ، $\left|\frac{-٣}{٤}\right|$

(ج) رتِّب الأعداد $-\frac{٥}{٦}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-٠,٧٥$ ترتيبًا تنازليًّا .

الحلّ :

(أ) الترتيب التنازلي هو : $١\frac{١}{٤}$ ، $٠,٥$ ، ٠ ، $-٠,٢٥$ ، $\frac{-١}{٢}$

(ب) الترتيب التصاعدي هو : $-٠,\overline{٦}$ ، صفر ، $\left|\frac{-٣}{٤}\right|$ ، ٢

(ج) $-٠,٧٥ = -\frac{٣}{٤}$

م . م . أ للمقامات = ١٢

$$-\frac{٥}{٦} = -\frac{١٠}{١٢}$$

$$-\frac{٢}{٣} = -\frac{٨}{١٢}$$

$$-\frac{٣}{٤} = -\frac{٩}{١٢}$$

$$\therefore -\frac{٨}{١٢} > -\frac{٩}{١٢} > -\frac{١٠}{١٢}$$

وعليه، تأخذ الأعداد الترتيب التنازلي الآتي :

$-\frac{٢}{٣}$ ، $-٠,٧٥$ ، $-\frac{٥}{٦}$.

تمارين ذاتية :

١ ضَع > أو < أو = لتصبح العبارة صحيحة :

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ ☐ $-\frac{٢}{٥}$ — $-\frac{١٠}{١٥}$ ، $-\frac{١٢}{١٥}$

(ب) $-٦,٣٧$ ☐ $-٦,٣$

(ج) $-\frac{٣}{٥}$ ☐ $٠,٥١$ — $-٠,٦٠$

(د) $-٩,٠٢$ ☐ -٩٢

(هـ) $\frac{١١}{١٣}$ ☐ $\frac{١١}{٢٥}$

(و) $٢\frac{٣}{٤}$ ☐ $\frac{٥}{٨}$

(ز) $٠,\overline{٣}$ ☐ $\frac{١}{٣}$

(ح) $-٢\frac{١}{٤}$ ☐ $-٤\frac{٢}{٥}$

٢ رتِّب ما يلي ترتيبًا تصاعديًّا :

(أ) $-\frac{٣}{٤}$ ، $-\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{٥}{٨}$ ، ٠ ، -١

$-١ ، ٠ ، -٠,٦٢٥ ، -٠,٣٣ ، -٠,٧٥$

$\therefore -١ < -\frac{٣}{٤} < -\frac{٥}{٨} < -\frac{١}{٣} < ٠$

(ب) $-٠,١٢$ ، $٠,٨٣$ ، ١ ، $-\frac{٣}{٥}$

$-٠,٦$

$\therefore -\frac{٣}{٥} < -٠,١٢ < ٠,٨٣ < ١$

٣ رتِّب ما يلي ترتيبًا تنازليًّا :

$-٦\frac{١}{٣}$ ، $٧\frac{١}{٥}$ ، $-٩,٧$ ، $٧,٢٣$

$٧,٢٣ ، ٧\frac{١}{٥} ، -٦\frac{١}{٣} ، -٩,٧$

٤ صنع بدر مجسَّمًا لمسجد يحوي منارتَين ، اِرتفاع المنارة الأولى ٤٢,٤ سم ، وارتفاع المنارة الثانية $٤٢\frac{٣}{٥}$ سم . قارِن بين الارتفاعَين .

$٤٢,٤$ $٤٢\frac{٣}{٥} = ٤٢,٦$

$\therefore ٤٢,٤ < ٤٢,٦$

∴ المنارة الأولى أصغر من المنارة الثانية

مهارات تفكير عليا :

٥ تبلغ قياسات مجموعة من شاشات أجهزة التلفاز بالبوصة كما يلي: $٣٨,٤\overline{٦}$ ، $٣٨\frac{٢}{٣}$ ، ٣٨,٣ ، $٣٨\frac{٩}{١٦}$

رتِّب هذه القياسات تصاعديًّا .



$٣٨,٣٣ ، ٣٨,٦٦ ، ٣٨,٣٠ ، ٣٨,٥٦$

$٣٨,٣ < ٣٨,٤\overline{٦} < ٣٨\frac{٩}{١٦} < ٣٨\frac{٢}{٣}$

٢ - ٣ جمع الأعداد النسبية وخواصّها

Adding Rational Numbers and Their Properties

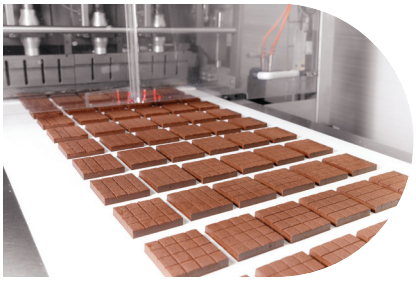
سوف تتعلّم : جمع الأعداد النسبية – خواصّ جمع الأعداد النسبية .

العبارات والمفردات :

خاصّية الإبدال	Commutative Property	خاصّية التوزيع	Distributive Property
خاصّية التجميع	Associative Property		

إستكشِف

تمتلك هلا، وهي سيّدة أعمال كويتية شركة لصناعة الحلويات ولها ٤ أفرع في مناطق مختلفة في دولة الكويت . يوضّح الجدول الميزانية السنوية لهذه الأفرع بآلاف الدنانير الكويتية في سنتَين متتاليتَين .



الأفرع	الفرع (١)	الفرع (٢)	الفرع (٣)	الفرع (٤)
السنة الأولى	+٣,٦	+٢,٣	-١,٥	-١,٠٥
السنة الثانية	+١,٣	-٣,٤	+٤,٥	-٣,٠٥

الربح (+)
الخسارة (-)

من الجدول السابق ، أجِب عمّا يلي :

(أ) حدِّد ما إذا كان الفرع (١) قد حقّق ربحًا أو خسارة خلال السنتَين .

جمعه ربحًا .....

(ب) أوجِد مجموع ما حقّقه الفرع (١) من ربح أو خسارة خلال السَنتَين .

المجموع = (+٣,٦) + (+١,٣)

= +(٣,٦ + ١,٣)

= +٤,٩

إذًا المجموع = ٤,٩ ألف دينار كويتي .

(ج) حدِّد ما إذا كان الفرع (٤) قد حقّق ربحًا أو خسارة خلال السنتَين .

جمعه خسارة .....

تذكَّر

أ ، ب ∈ ص+ فإنّ :

- (+أ) + (+ب)
  = +(أ + ب)
- (-أ) + (-ب)
  = -(أ + ب)

د) أوجِد مجموع ما حقّقه الفرع (٤) من ربح أو خسارة خلال السنتَين .

المجموع = (-١,٠٥) + (-٣,٠٥)

= -(١,٠٥ + ٣,٠٥) = -٤,١

إذًا المجموع = ٤,١ ألف دينار كويتي .



معلومة مفيدة :

يقوم صانعو الحلويات بجمع الأعداد الصحيحة والكسور والكسور العشرية عند تحضير أنواع الحلويات المختلفة .

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

ناتج جمع عددَين نسبيَّين موجَبَين يكون عددًا نسبيًّا موجَبًا .

عند جمع عددَين نسبيَّين سالبَين معًا، نجمع القيمة المطلَقة لكلّ منهما ، ويكون الناتج عددًا سالبًا .

مثال (١) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة لكلّ ممّا يلي :

أ) $\frac{-٣}{٧} + (\frac{-٢}{٧})$

ب) $\frac{-٣}{٨} + (-٥\frac{١}{٢})$

ج) $\frac{٢}{٣} + ٠,٥$

د) $\frac{٣}{٨}١ + ٠,٧$

الحلّ :

أ) $\frac{-٣}{٧} + (\frac{-٢}{٧})$

$= -(\frac{٣}{٧} + \frac{٢}{٧})$

$= -\frac{٥}{٧}$

ب) $\frac{-٣}{٨} + (-٥\frac{١}{٢})$

وحِّد المقامات

$= \frac{-٣}{٨} + (-٥\frac{٤}{٨})$

اِجمع البسط واجمع الصحيح

$= -٥\frac{(٣+٤)}{٨}$

$= -٥\frac{٧}{٨}$

ج) $\frac{٢}{٣} + ٠,٥$

ضَع العددَين في الصورة نفسها

وحِّد المقامات

$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢}$

$= \frac{٤}{٦} + \frac{٣}{٦}$

اِجمع

$= \frac{٧}{٦}$

$= ١\frac{١}{٦}$

د) $\frac{٣}{٨}١ + ٠,٧$

$= ١,٣٧٥ + ٠,٧$

ضَع العدَدين في الصورة نفسها

$= ١,٣٧٥ + ٠,٧٠٠$

ساوِ المنازل العشرية

$= ٢,٠٧٥$

عبِّر عن فهمك

من فقرة «اِستكشِف» ، أيّهما أكبر ؟

(أ) | ٢,٣ | أم | - ٣,٤ | ؟ ثمّ فسِّر إجابتك . | ٣,٤ |

(ب) | ٤,٥ | أم | - ١,٥ | ؟ | ٤,٥ |

بالرجوع إلى (اِستكشِف) السابق :

أوجِد مجموع ما حقّقه الفرع (٣) في السنتَين معًا كما هو موضَّح في الفرع (٢) :

الفرع (٢)

المجموع = + ٢,٣ + (- ٣,٤)

= $\frac{+٢٣}{١٠}$ + ($\frac{-٣٤}{١٠}$)

لاحِظ أنّ العددَين في البسط صحيحان.

= $\frac{-(٣٤-٢٣)}{١٠}$ = $\frac{-١١}{١٠}$ = - $\frac{١١}{١٠}$

إذًا المجموع = - ١,١

الفرع (٣)

المجموع = - (١,٥) + (+٤,٥)

= $\frac{-١٥}{١٠}$ + ... ٤٥/١٠

لاحِظ أنّ العددَين في البسط صحيحان.

= ..... ٣٠/١٠ = ...٣

إذًا المجموع = ...٣

تذكَّر

- أ ، ب ∈ صحـ+ فإنّ:
- (+أ) + (-ب) = + (أ - ب) ، أ > ب
- (+أ) + (-ب) = - (ب - أ) ، أ < ب

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

مجموع عددَين نسبيَّين أحدهما موجَب والآخر سالب هو الفرق بين أكبر قيمة مطلَقة وأصغر قيمة مطلَقة للعددَين، ويكون الناتج :

- **موجَبًا إذا كان العدد الذي قيمته المطلَقة أكبر موجَبًا .**
- **سالبًا إذا كان العدد الذي قيمته المطلَقة أكبر سالبًا .**

مثال (٢) :

أوجِد الناتج :

(أ) ٠,١٥ + (- ٠,٥)

(ب) - $\frac{١}{٦}$ ١ + $\frac{١}{٧}$ ٣

الحلّ :

(أ) ٠,١٥ + (- ٠,٥)

= ٠,١٥ + (- ٠,٥٠) ساوِ المنازل العشرية

= - (٠,٥٠ - ٠,١٥)

= - ٠,٣٥

(ب) - $\frac{١}{٦}$ ١ + $\frac{١}{٧}$ ٣

= - $\frac{٧}{٤٢}$ ١ + $\frac{٦}{٤٢}$ ٣ وحِّد المقامات

= ($\frac{٦}{٤٢}$ ٣ - $\frac{٧}{٤٢}$ ١)

= ($\frac{٤٨}{٤٢}$ ٢ - $\frac{٧}{٤٢}$ ١) = $\frac{٤١}{٤٢}$ ١

دورك الآن (١)

أوجِد الناتج :

(أ) $(\frac{-٥}{٩}) + (\frac{-٢}{٩}) = -(\frac{٥}{٩} + \frac{٢}{٩}) = -\frac{٧}{٩}$

(ب) $(\frac{-٢}{٩}) + (\frac{-٥}{٩}) = -(\frac{٢}{٩} + \frac{٥}{٩}) = -\frac{٧}{٩}$

ماذا تلاحظ في (أ)، (ب) ؟

لكلّ ا، ب ∈ ح ، فإنّ :

ا + ب = ب + ا (الخاصّية الإبدالية لعملية الجمع على ح)

دورك الآن (٢)

أوجِد الناتج :

(أ) $٠ + \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

(ب) $\frac{٢}{٣} + ٠ = \frac{٢}{٣}$

(ج) $-٠,٨ + ٠ = -٠,٨$

(د) $٠ + (-٠,٨) = -٠,٨$

ماذا تلاحظ في (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) ؟

لكلّ ا ∈ ح ، فإنّ :

ا + ٠ = ٠ + ا = ا (خاصّية العنصر المحايِد لعملية الجمع على ح)

دورك الآن (٣)

أوجِد الناتج :

(أ) $\frac{٤}{٥} + (\frac{-٤}{٥}) =$ صفر

(ب) $-٢,٥ + (+٢,٥) =$ صفر

(ج) $٣\frac{٢}{٧} + (-٣\frac{٢}{٧}) =$ صفر

ماذا تلاحظ في (أ)، (ب)، (ج) ؟

لكلّ ا ∈ ح ، فإنّ :

ا + (-ا) = صفر (خاصّية المعكوس الجمعي في ح)

دورك الآن (٤)

أوجِد الناتج :

(أ) $-\frac{٢}{٧} + (٣ + \frac{٢}{٧}) = ٣ + (\frac{-٢}{٧} + \frac{٢}{٧}) = ٣ + ٠ = ٣$

(ب) $٣ + (\frac{-٢}{٧} + \frac{٢}{٧}) = ٣ + ٠ = ٣$

ماذا تلاحظ في (أ)، (ب) ؟

لكلّ ا ، ب ، جـ ∈ ح ، فإنّ :

ا + (ب + جـ) = (ا + ب) + جـ (الخاصّية التجميعية لعملية الجمع على ح)

مثال (٣) :

أوجد ناتج ما يلي موضِّحًا اسم الخاصيّة المستخدَمة في الحلّ :

$١\frac{٢}{٩} + ٣\frac{٥}{٩} + (-١\frac{٢}{٩})$

الحلّ :

$١\frac{٢}{٩} + ٣\frac{٥}{٩} + (-١\frac{٢}{٩})$

$= ١\frac{٢}{٩} + (-١\frac{٢}{٩}) + ٣\frac{٥}{٩}$ الخاصّية الإبدالية

$= (١\frac{٢}{٩} + (-١\frac{٢}{٩})) + ٣\frac{٥}{٩}$ الخاصّية التجميعية

$= صفر + ٣\frac{٥}{٩}$ خاصّية المعكوس الجمعي

$= ٣\frac{٥}{٩}$ خاصّية العنصر المحايِد

عبِّر عن فهمك

قال عبد الرحمن : إنّني أستطيع حلّ السؤال الآتي بعدّة طرق :

$-٤,٥ + ٨\frac{١}{٢} + (-٥\frac{١}{٢})$

هل توافقه الرأي ؟ اُذكر إحدى هذه الطرق .

نعم $٨\frac{١}{٢} - (٤,٥ + ٥,٥) = ٨,٥ - ١٠ = -١,٥$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد الناتج في أبسط صورة .

(أ) $-٧,٢ + (-٣,٥)$

$= -(٧,٢ + ٣,٥)$

$= -١٠,٧$

(ب) $\frac{٣}{٥} + (\frac{-٣}{٥})$

$=$ صفر خاصية المعكوس الجمعي

ج) $\frac{١}{٢} + ٧,٤ = ٠,٥ + ٧,٤ = ٧,٩$

د) $٠ + (\frac{-٢}{١٣}) = \frac{-٢}{١٣}$ العنصر المحايد

هـ) $-\frac{٢}{٣} + ٧ + (-٩\frac{٣}{٧}) = (-\frac{٢٣}{٣}) + (\frac{٦٦}{٧}) - = (\frac{١٩٨}{٢١} + \frac{١٦٧}{٢١}) - = -\frac{١٩٨ - ١٦٧}{٢١} = -\frac{٣٥٩}{٢١} = -١٧\frac{٢}{٢١}$

و) $٦\frac{١}{٨} + (-٣,٧) = ٦,١٢٥ - ٣,٧$
$= ٦,١٢٥ - ٣,٧٠٠$
$= ٢,٤٢٥$

ز) $\frac{-٢}{٩} + (-٠,٣) = (-\frac{٢}{٩}) - (٠,٣ + ٠) = -(٠,٢٢٢ + ٠,٣٠٠)$
$= -٠,٥٢٢$

ح) $٦ + (-٢\frac{٣}{٥}) = ٦ - ٢,٦$
$= ٦,٠ - ٢,٦$
$= ٣,٤$

ط) $|-\frac{٧}{٨} ٤| + (-١\frac{٥}{٨}) = ٤\frac{٧}{٨} - ١\frac{٥}{٨}$
$= \frac{٣٩}{٨} - \frac{١٣}{٨}$
$= \frac{٣٩ - ١٣}{٨} = \frac{٢٦}{٨} = \frac{١٣}{٤} = ٣\frac{١}{٤}$

ي) $\frac{١}{٢} ٣ + (-٨\frac{١}{٦}) = ٣\frac{٣}{٦} - ٨\frac{١}{٦}$
$= \frac{٢١}{٦} - \frac{٤٩}{٦} = \frac{٢١ - ٤٩}{٦} = -\frac{٢٨}{٦} = -٤\frac{٢}{٣}$

ك) $\frac{٣}{٥} ٢ + (-١٤\frac{٢}{٣}) + (-٢\frac{٣}{٥})$
$= (\frac{١٣}{٥} + ٢\frac{٣}{٥}) + (-١٤\frac{٢}{٣})$ المعكوس الجمعي
$= ٥ + (-١٤\frac{٢}{٣})$
$= -٩\frac{٢}{٣}$

ل) $-٤,٦٢ + ٧\frac{٣}{٤} + (-١٣\frac{٤}{٥})$
$= -٤,٦٢ + ٧,٧٥ - ١٣,٨٠$
$= -(٤,٦٢ + ١٣,٨٠) + ٧,٧٥$
$= -١٨,٤٢ + ٧,٧٥ = -١٠,٦٧$

٢ تتضمّن مقادير عمل فطائر $\frac{٥}{٨}$ كيلوجرام من الجوز، $\frac{١}{٢}$ كيلوجرام من البندق.

كم كيلوجرامًا من هذه المكسَّرات يلزمك لعمل الفطائر ؟

$\frac{٥}{٨} + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٨} + \frac{٤}{٨} = \frac{٩}{٨}$

$= ١\frac{١}{٨}$ كيلوجرام


بندق


جوز

مهارات تفكير عليا :

٣ $\frac{٣٥}{١٠٠} + \frac{س}{١٠٠} = \frac{١}{٢}$ فإنّ س =

أ) ٣٥ ب) ٢٥ ج) ١٥ د) ١٠

$\frac{٣٥ + س}{١٠٠} = \frac{١}{٢}$ ، $٢(٣٥ + س) = ١٠٠ \times ١$ ، $٧٠ + ٢س = ١٠٠$ ، $٢س = ١٠٠ - ٧٠$

$\therefore ٢س = ٣٠$ ، $\therefore س = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$

٢ - ٤ طرح الأعداد النسبية
Subtracting Rational Numbers

سوف تتعلّم : طرح الأعداد النسبية .

العبارات والمفردات :

المعكوس الجمعي (النظير الجمعي)	Additive Inverse

اِستكشِف



تستخدم شركة مقاولات في دولة الكويت الذكاء الاصطناعي (AI) لتقوم بتصوير النوافذ، ثمّ إرسال البيانات تلقائيًّا إلى المصنع لتقطيع إطارات النوافذ بحسب القياسات المستخدَمة . تمّ تحديد $٦٥\frac{٣}{٤}$ مترًا من الخشب لعمل إطارات نوافذ منزل ، إذا استُخدم $٣٢\frac{١}{٢}$ مترًا من هذا الخشب للنوافذ الأمامية ، فكم بقي للنوافذ الخلفية ؟

لإيجاد ذلك ، يمكننا التوصّل إلى الناتج بالطريقتَين الآتيتَين :

☑ $٦٥\frac{٣}{٤} - ٣٢\frac{١}{٢}$ ..... (الطّرح)

$= ٦٥\frac{٣}{٤} - ٣٢\frac{٢}{٤}$ .....

$= ٣٣\frac{١}{٤}$ .....

☑ $٦٥\frac{٣}{٤} + (-٣٢\frac{١}{٢})$ (جمع المعكوس الجمعي)

$= ٣٣\frac{١}{٤} + (٣٢\frac{١}{٢} - ٣٢\frac{١}{٢})$ .....

$= ٣٣\frac{١}{٤}$ .....

ماذا تلاحظ ؟ طرح الاعداد النسبية يشبه طرح الاعداد الصحيحة و طرح الكسور .....

إذًا ما بقي للنوافذ الخلفية هو $٣٣\frac{١}{٤}$ مترًا .

تذكَّر

- إذا كان أ ، ب ∈ صـ فإنّ :
  أ - ب = أ + (- ب)
- المعكوس (النظير) الجمعي للعدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ هو $\frac{-أ}{ب}$

$\frac{أ}{ب} + \frac{-أ}{ب}$ = صفر

معلومة مفيدة :



يوظّف الذكاء الاصطناعي (AI) الرياضيات في مجال الصناعة ، لتحسين الأداء وزيادة الكفاءة والإنتاجية وتوفير الطاقة وتقليل التكاليف .

ملاحظة :

- طرح الأعداد النسبية يشبه طرح الأعداد الصحيحة وطرح الكسور .
- لطرح عدد نسبي من آخر ، اِجمع معكوسه الجمعي ،
  لكلّ أ ، ب ∈ ن فإنّه : أ − ب = أ + (− ب)

مثال :

أوجِد الناتج في أبسط صورة لكلّ ممّا يلي :

(أ) $٣\frac{١}{٨} - ٤\frac{٥}{٨}$

الحلّ :

(أ) $٣\frac{١}{٨} - ٤\frac{٥}{٨}$

$= ٣\frac{١}{٨} + \left(-٤\frac{٥}{٨}\right)$

$= ١\frac{٤}{٨} = ١\frac{١}{٢}$ بسِّط

(ب) $|\frac{-٣}{٥}| - ٠,٦-$

الحلّ :

(ب) $|\frac{-٣}{٥}| - ٠,٦-$

$= \frac{٣}{٥} - ٠,٦-$

$= ٠,٦ + (-٠,٦)$

$= -(٠,٦ + ٠,٦)$

$= ١,٢-$

اِستبدِل عملية الطرح بعملية جمع المعكوس الجمعي

(ج) $٦\frac{٢}{٣} - ٢\frac{٢}{٥} -$

الحلّ :

(ج) $٦\frac{٢}{٣} - ٢\frac{٢}{٥} -$

$= -٢\frac{٢}{٥} + \left(-٦\frac{٢}{٣}\right)$

$= -٢\frac{٦}{١٥} + \left(-٦\frac{١٠}{١٥}\right)$ وحِّد المقامات

$= -\left(٢\frac{٦}{١٥} + ٦\frac{١٠}{١٥}\right)$

$= -٨\frac{١٦}{١٥} = -٩\frac{١}{١٥}$ بسِّط

(د) $(-١٢,٩٧٥) - ٨ - \frac{١}{٤}$

الحلّ :

(د) $(-١٢,٩٧٥) - ٨ - \frac{١}{٤}$

$= ١٢,٩٧٥ + ٨\frac{١}{٤}$

$= ١٢,٩٧٥ + ٨,٢٥$

$= +(١٢,٩٧٥ - ٨,٢٥٠)$ ساوِ المنازل العشرية

$= ٤,٧٢٥$

ضَع العددَين في الصورة نفسها إمّا في الصورة العشرية أو في الصورة الاعتيادية .

هـ $٩\frac{١}{٧} - (-٤,\overline{٣})$

الحلّ :

هـ $٩\frac{١}{٧} - (-٤,\overline{٣})$

$= ٩\frac{١}{٧} + ٤,\overline{٣}$

$= ٩\frac{١}{٧} + ٤\frac{١}{٣}$ ضَع العددَين في الصورة نفسها

$= ٩\frac{٣}{٢١} + ٤\frac{٧}{٢١}$ وحِّد المقامات

$= ١٣\frac{١٠}{٢١}$

تذكَّر

- $٠,\overline{٣} = \frac{١}{٣}$
- $٠,\overline{٦} = \frac{٢}{٣}$

و $٣\frac{١}{٥} - (-٢\frac{٣}{٤} + ١\frac{١}{٤})$

الحلّ :

و $٣\frac{١}{٥} - (-٢\frac{٣}{٤} + ١\frac{١}{٤})$

$= ٣\frac{١}{٥} - (-١\frac{٢}{٤})$

$= ٣\frac{١}{٥} + ١\frac{٢}{٤}$

$= ٣\frac{٤}{٢٠} + ١\frac{١٠}{٢٠}$ وحِّد المقامات

$= ٤\frac{١٤}{٢٠} = ٤\frac{٧}{١٠}$ بسِّط

انتبِه

$-(-٩) = ٩$

ز $٢\frac{١}{٤} - ٨\frac{١}{٥}$

الحلّ :

ز $٢\frac{١}{٤} - ٨\frac{١}{٥}$

$= ٢\frac{١}{٤} + (-٨\frac{١}{٥})$

$= -(٨\frac{١}{٥} - ٢\frac{١}{٤})$

$= -(٨\frac{٤}{٢٠} - ٢\frac{٥}{٢٠})$

$= -(٧\frac{٢٤}{٢٠} - ٢\frac{٥}{٢٠})$

$= -٥\frac{١٩}{٢٠}$

انتبِه

$٨ = ٧\frac{٢٠}{٢٠}$

ح $-٣\frac{٢}{٥} - (-٦\frac{١}{٢})$

الحلّ :

ح $-٣\frac{٢}{٥} - (-٦\frac{١}{٢})$

$= -٣\frac{٢}{٥} + (٦\frac{١}{٢})$

$= +(٦\frac{١}{٢} - ٣\frac{٢}{٥})$

$= ٦\frac{٥}{١٠} - ٣\frac{٤}{١٠}$

$= ٣\frac{١}{١٠}$

دورك الآن

لدى عبد الرحمن ٢٨ دينارًا ، اشترى أدوات منزلية بمبلغ ١٣,٢٥ دينارًا . فهل الباقي معه يكفي لشراء أدوات صباغة بمبلغ $١٤\frac{١}{٢}$ دينارًا ؟

الباقي ← ٢٨ − ١٣,٢٥ = ١٤,٧٥

١٤,٧٥ > $١٤\frac{١}{٢}$ ∴ نعم الباقي يكفي لشراء أدوات صباغة بمبلغ $١٤\frac{١}{٢}$ دينارًا

عبِّر عن فهمك

يقول محمد إنّ ناتج : ٥ − ٢,٢٥ هو ٣,٢٥ ، بينما يقول حسين أنّ الناتج هو ٢,٧٥
في رأيك ، أيّهما على صواب؟ وضِّح ذلك.

حسين الصواب ∴ ٥ − ٢,٢٥ = ٢,٧٥

تمارين ذاتية :

توحيد المقام ÷ ٣٥

١ أوجِد الناتج في أبسط صورة لكلّ ممّا يلي:

أ $\frac{٧}{٢٥} - \frac{٧}{٢٠}$ = $\frac{٤ \times ٧}{٤ \times ٢٥} - \frac{٧ \times ٧}{٥ \times ٤٠}$ توحيد المقام

= $\frac{٢٨}{١٠٠} - \frac{٣٥}{١٠٠} = \frac{٣٥-٢٨}{١٠٠} = \frac{٧}{١٠٠}$

= ٠,٠٧

ب $٢\frac{٤}{٧} - ٤\frac{١}{٥}$ = $٢\frac{٥ \times ٤}{٥ \times ٧} - ٤\frac{٧ \times ١}{٧ \times ٥}$

= $٢\frac{٢٠}{٣٥} - ٤\frac{٧}{٣٥} = \frac{٩٠}{٣٥} - \frac{١٤٧}{٣٥}$

= $\frac{١٤٧-٩٠}{٣٥} = \frac{٥٧}{٣٥}$

ج −٥ − (−$٣\frac{٢}{٧}$) = −٥ + $٣\frac{٢}{٧}$

= −$٤\frac{٧}{٧}$ + $٣\frac{٢}{٧}$

= −$١\frac{٥}{٧}$

د $٨\frac{٢}{٣}$ − (−$٥\frac{١}{٤}$) = $٨\frac{٢}{٣}$ + $٥\frac{١}{٤}$

= ٨,٦٦ + ٥,٢٥

= ١٣,٩١

هـ $٥\frac{٣}{٥} - ٣\frac{١}{١٠}$ = $٥\frac{٦}{١٠} - ٣\frac{١}{١٠}$

= $٢\frac{٥}{١٠} = ٢\frac{١}{٢}$

و $٤\frac{٣}{٥}$ − (−$٧\frac{١}{٢} + ١\frac{١}{١٠}$) = $٤\frac{٣}{٥}$ − (−٧,٥ + ١,١)

= ٤,٦ − (−٦,٤) = ٤,٦ + ٦,٤

= ١١

ز |−١,٣| − |−٦,٥٧| = ١,٣ − ٦,٥٧

= ١,٣٠ − ٦,٥٧ = −٥,٢٧

ح −$٧\frac{١}{٤}$ − (−١٢,٩٥) = −٧,٢٥ + ١٢,٩٥

= ٥,٧٠

ط) $١٢,٦٤ - ١٤\frac{٣}{٨}$ ..... $١٤,٣٧٥ - ١٢,٦٤$

$= ١٤,٣٧٥ - ١٢,٦٤$ ..... $= ١,٧٣٥$

ك) $-٧\frac{٣}{٨} - (-٣\frac{٥}{٦})$ ..... $\frac{٥}{٦}٣ + \frac{٣}{٨}٧$

$= ٧,٣٧٥ + ٣,٨٣٣$ ..... $= ٣,٥٤٢$

ي) $-٨,٩ - ١٥,\overline{٣}$ ..... $-٨,٩٠٠ - ١٥,٣٣٣$

$= -(٨,٩٠٠ + ١٥,٣٣٣)$ ..... $= -٢٤,٢٣٣$

ل) $٢\frac{١}{٣} - ٩\frac{١}{٤}$ ..... $٢\frac{١}{٢} - ٩\frac{١}{٤}$

$= ٢,٣٣ - ٩,٢٥$ ..... $= -٦,٩٢$

٢ يمارس سعود وفهد رياضة الجري يوميًّا لمسافة $٦\frac{١}{٤}$ كم من منزلهما إلى الحديقة العامّة . إذا استراحا بعد قطع مسافة ٢,٣ كم ، فما المسافة التي يجب أن يقطعاها ليصلا إلى الحديقة العامّة ؟



..... $٦\frac{١}{٤} - ٢,٣ = ٦,٢٥ - ٢,٣٠$

..... $= ٣,٩٥$ كم

.....

مهارات تفكير عليا :

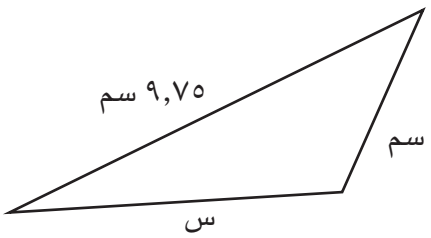
٣ أوجِد الناتج : $|-٣,١ + ١,٠| - ٢٥,١ =$ ..... $|-١,٠٢| - ٢٥,١ = ١,٠٢ - ٢٥,١ = -٢٣,٠٨$

٤ إناء يحتوي على كمّية من الزيت ، استُخدم $\frac{١}{٤}$ كمّية الزيت في اليوم الأوّل ، $\frac{١}{٣}$ كمّية الزيت في اليوم الثاني ، وكان الباقي ٥ لترات ، ما كمّية الزيت في الإناء عندما كان ممتلئًا ؟

كمية الزيت عندما كان ممتلئًا = س ∴ $س = \frac{١}{٤}س + \frac{١}{٣}س + ٥$

، $س = \frac{٤+٣}{١٢}س + ٥$ ، $\frac{٧}{١٢}س = ٥$ ، $\frac{١٢}{٧} \times$ س = ٥ $\times \frac{١٢}{٧}$ ∴ س = $٨\frac{٥}{٧}$ لتر

٥ إذا كان محيط الشكل المرسوم ٢٠,٤٥ سم ، فأوجِد قيمة س .



محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

∴ $٢٠,٤٥ = ٤,٢ + ٩,٧٥ + س$

$٢٠,٤٥ = ١٣,٩٥ + س$

∴ $س = ٢٠,٤٥ - ١٣,٩٥ = ٦,٥٠$ سم

٢ - ٥ ضرب الأعداد النسبية وخواصّها

Multiplying Rational Numbers and Their Properties

سوف تتعلّم : ضرب الأعداد النسبية – خواصّ ضرب الأعداد النسبية .

العبارات والمفردات :

المعكوس (النظير) الضربي	Multiplicative Inverse

حلّ وناقِش

توفّي رجل تاركًا زوجة ، وولدًا، وبنتًا ، وميراثًا قدره ٤٨ ٠٠٠ دينارًا .
تمّ توزيع ميراثه بحسب الشريعة الإسلامية .
أُحسب نصيب الزوجة من الميراث .



نصيب الزوجة = $\frac{١}{٨}$ التركة
الولد : البنت = ٢ : ١

(أ) حدِّد العملية المطلوبة .

ضرب الميراث في نصيب الزوجة .

(ب) نصيب الزوجة = $\frac{١}{٨}$ × ٤٨٠٠٠ = ٦٠٠٠ دينار

ضرب الأعداد النسبية يشبه ضرب الكسور وضرب الأعداد العشرية وضرب الأعداد الصحيحة .
ناتج ضرب عددَين نسبيَّين موجَبَين معًا أو سالبَين معًا يكون عددًا نسبيًّا موجَبًا .
ناتج ضرب عددَين نسبيَّين أحدهما موجَب والآخر سالب يكون عددًا نسبيًّا سالبًا .

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ ∈ ص ، فإنّ : $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times جـ}{ب \times د}$

معلومة مفيدة :



تُستخدم الرياضيات بشكل أساسي لتقسيم التركة بين الورثة بدقّة وعدالة ، بحسب ما ورد في القرآن الكريم والسنّة النبوية .

مثال (١) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي:

أ) $\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٧}$

الحلّ :

$\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٧}$

$= \frac{٢ \times ٣}{٥ \times ٧} = \frac{٦}{٣٥}$

ب) $\frac{-٧}{٩} \times \frac{-٥}{٨}$

الحلّ :

$\frac{-٧}{٩} \times \frac{-٥}{٨}$

$= \frac{(-٧) \times (-٥)}{٩ \times ٨} = \frac{٣٥}{٧٢}$

تذكّر

$(+٢) \times (+٣) = +٦$

$(-٢) \times (-٣) = +٦$

$(+٢) \times (-٣) = -٦$

$(-٢) \times (+٣) = -٦$

اِنتبِه

عند ضرب الأعداد النسبية، لا نحتاج إلى توحيد المقامات .

مثال (٢) :

أوجِد ناتج $-١,٢ \times ٣\frac{٣}{٤}$ بطريقتَين .

الحلّ :

الطريقة الأولى :

$-١,٢ \times ٣\frac{٣}{٤}$

$= -١\frac{٢}{١٠} \times ٣\frac{٣}{٤}$ (ضَع العددَين في الصورة نفسها)

$= -\frac{١٢}{١٠} \times \frac{١٥}{٤}$

$= -\frac{(١٢) \times ١٥}{١٠ \times ٤}$ بسِّط ثمّ اضرب

$= -\frac{٩}{٢} = -٤\frac{١}{٢}$

الطريقة الثانية :

$-١,٢ \times ٣\frac{٣}{٤}$

$= -١,٢ \times ٣,٧٥$ (ضَع العددَين في الصورة نفسها)

$= -٤,٥٠٠$

$= -٤,٥$

$$\begin{array}{r} ٣٧٥ \\ \times\ ١٢ \\ \hline ٧٥٠ \\ + \quad ٣٧٥٠ \\ \hline ٤٥٠٠ \end{array}$$

تذكّر

$٢ \times ٥ = ١٠$

$٤ \times ٢٥ = ١٠٠$

$٨ \times ١٢٥ = ١٠٠٠$

تذكّر

لتحديد موضع الفاصلة العشرية في ناتج الضرب، نجمع عدد الأرقام الواقعة يمين الفاصلة العشرية في كلا العاملَين .

دورك الآن (١)

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي ، وضَعه في أبسط صورة .

أ) $\frac{-٤}{٥} \times \frac{-٣}{٨} = \frac{٣ \times ٤}{٨ \times ٥} = \frac{١٢}{٤٠} = \frac{٣}{١٠} = ٠,٣$

ب) $\frac{-٤}{٥} \times \frac{-٣}{٨} = \frac{١٢}{٤٠} = \frac{٣}{١٠} = ٠,٣$

قارِن بين الإجابتَين في (أ) و (ب) . ماذا تلاحظ ؟

لكلّ ا ، ب ∈ ح ، فإنّ :

ا × ب = ب × ا (الخاصّية الإبدالية في عملية الضرب على ح)

دورك الآن (٢)

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي ، وضَعه في أبسط صورة .

(أ) $\frac{٧}{٣} \times \left(\frac{-٥}{٧} \times \frac{١}{٥} \right)$ ..... $= \frac{-١}{٣} = \frac{-١}{٧} \times \frac{٧}{٣}$

(ب) $\left(\frac{٧}{٣} \times \frac{-٥}{٧} \right) \times \frac{١}{٥}$ ..... $= \left(\frac{-٥}{٣} \right) \times \frac{١}{٥} = \frac{-١}{٣}$

قارِن بين الإجابتَين في (أ) و (ب) . ماذا تلاحظ ؟

لكلّ ا ، ب ، جـ ∈ ح ، فإنّ :

(ا × ب) × جـ = ا × (ب × جـ) (خاصّية التجميع لعملية الضرب على ح)

دورك الآن (٣)

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

(أ) $١ \times \frac{١}{٩} =$ ..... $\frac{١}{٩}$

(ب) $١ \times ٢\frac{١}{٢} -$ ..... $= -٢\frac{١}{٢}$

(ج) $\frac{-٢}{٥} \times ٠ =$ ..... صفر

(د) $٠ \times ٣\frac{١}{٤} -$ ..... $= ٠$ صفر

ممّا سبق ، ماذا تلاحظ ؟

لكلّ ا ∈ ح ، فإنّ :

ا × ١ = ١ × ا = ا (خاصّية العنصر المحايِد لعملية الضرب على ح)

ا × ٠ = ٠ × ا = ٠ (خاصّية الضرب في صفر لعملية الضرب على ح)

دورك الآن (٤)

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

(أ) $\frac{٢}{٩} \times \frac{٩}{٢} =$ ..... ١ .....

(ب) $\frac{-٣}{٧} \times \frac{-٧}{٣} =$ ..... ١ +

ماذا تلاحظ ؟

لكلّ $\frac{أ}{ب} \in ص$ ، فإنّ :

(١) المعكوس الضربي للعدد $\frac{أ}{ب}$ هو $\frac{ب}{أ}$ ، $أ \neq ٠$

(٢) $\frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{أ} = \frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{أ} = ١$ (خاصّية المعكوس الضربي لعملية الضرب على ص)

دورك الآن (٥)

أكمِل الجدول الآتي :

العدد	$٠,\overline{٣}$	٥	$\frac{-٩}{٤}$	$-١\frac{٧}{١٢}$	$-٠,٩$	$٣\frac{١}{٢}$
العدد في صورة $\frac{أ}{ب}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٥}{١}$	$\frac{-٩}{٤}$	$-\frac{١٩}{١٢}$	$-\frac{٩}{١٠}$	$\frac{٧}{٢}$
المعكوس الضربي	$\frac{٣}{١} = ٣$	$\frac{١}{٥}$	$-\frac{٤}{٩}$	$-\frac{١٢}{١٩}$	$-\frac{١٠}{٩}$	$\frac{٢}{٧}$

دورك الآن (٦)

أوجِد الناتج ، وضَعه في أبسط صورة .

$\frac{٢}{٩} \times (١\frac{١}{٤} + ٢\frac{١}{٢})$

الطريقة الأولى :

$\frac{٢}{٩} \times (١\frac{١}{٤} + ٢\frac{١}{٢})$

$= \frac{٢}{٩} \times (\frac{٥}{٤} + \frac{٥}{٢})$

$= \frac{٢}{٩} \times \frac{١٠+٥}{٤}$

$= \frac{٢}{٩} \times \frac{١٥}{٤}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٦}$

الطريقة الثانية :

$\frac{٢}{٩} \times (١\frac{١}{٤} + ٢\frac{١}{٢})$

$= (\frac{٢}{٩} \times ١\frac{١}{٤}) + (\frac{٢}{٩} \times ٢\frac{١}{٢})$

$= (\frac{٢}{٩} \times \frac{٥}{٤}) + (\frac{٥}{٤} \times \frac{٥}{٩})$

$= (\frac{٥}{١٠} \times \frac{١}{٩}) + (\frac{٥}{٢} \times \frac{٥}{٩})$

$= \frac{٥}{١٨} + \frac{٥}{٩} = \frac{١٠+٥}{١٨} = \frac{١٥}{١٨} = \frac{٥}{٦}$

تذكّر

لكلّ أ ، ب ، جـ ∈ ص

فإنّ : أ × (ب + جـ) =

(أ × ب) + (أ × جـ)

ماذا تلاحظ ؟

لكلّ أ ، ب ، جـ ∈ ص ، فإنّ :

أ × (ب + جـ) = (أ × ب) + (أ × جـ) (الخاصّية التوزيعية لعملية الضرب على الجمع في ص)

عبِّر عن فهمك

هل عملية الضرب تتوزّع على عملية الطرح في ص ؟ فسِّر إجابتك .

تمارين ذاتية :

١ أكمِل الجدول الآتي :

العدد	$\frac{٢}{٥}$	-٧	$-٠,٧$	$\overline{٠,٦}$	$-٢\frac{١}{٤}$	٣,٧٥
العدد في صورة $\frac{أ}{ب}$	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{-٧}{١}$	$-\frac{٧}{١٠}$	$\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٩}{٤}$	$\frac{٣٧٥}{١٠٠}$
المعكوس الضربي	$\frac{٥}{٢}$	$-\frac{١}{٧}$	$-\frac{١٠}{٧}$	$\frac{٣}{٢}$	$-\frac{٤}{٩}$	$\frac{١٠٠}{٣٧٥}$

٢ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة .

أ) $-٠,٦ \times \frac{١}{٣}$

$= -\frac{٦}{١٠} \times \frac{١}{٣} = -\frac{٢}{١٠} = -\frac{١}{٥}$

ب) $-١,٨ \times (-١\frac{١}{٦})$

$= -\frac{١٨}{١٠} \times (-\frac{٧}{٦}) = +\frac{١٨}{١٠} \times \frac{٧}{٦} = \frac{٣}{١٠} \times \frac{٧}{١} = \frac{٢١}{١٠} = ٢,١$

ج) $\frac{-٣}{٥} \times (\frac{١٥}{-٩})$

$= \frac{-٣}{٥} \times (-\frac{١٥}{٩}) = \frac{-٣}{٥} \times (-\frac{٥}{٣}) = -١ \times -١ = +١$

د) $٢\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٥}$

$= \frac{٥}{٢} \times \frac{٢}{٥} = ١$

هـ) $٢\frac{١}{٤} \times (-١\frac{١}{٣})$

$= \frac{٩}{٤} \times (-\frac{٤}{٣}) = -٣ \times ١ = -٣$

و) $١,٦ \times (-٢\frac{١}{٥})$

$= \frac{١٦}{١٠} \times (-\frac{١١}{٥}) = -\frac{١٧٦}{٥٠} = -\frac{٨٨}{٢٥}$

ز) $٤,١ \times ١,٤$

$\frac{٤١}{١٠} \times \frac{٧}{٥} = \frac{٢٨٧}{٥٠}$

ط) $\frac{٣}{٧} \times \left(\frac{٥}{٩} + \frac{٤}{٩}\right)$

$\frac{٣}{٧} \times \frac{(٥+٤)}{٩} = \frac{٣}{٧} \times \frac{٩}{٩}$

$= \frac{٣}{٧} \times ١ = \frac{٣}{٧}$

ك) $٢\frac{١}{٥} \times \left(١\frac{١}{٤} + \frac{٢}{٥}\right)$

$\left(\frac{٥}{٤} + \frac{٢}{٥}\right) \times \frac{١١}{٥} = \frac{٢٥+٨}{٢٠} \times \frac{١١}{٥}$

$= \frac{٢٢}{٢٥} + \frac{١١}{٤} = \frac{٨٨+٢٧٥}{١٠٠} = ٣,٥٣$

م) $\frac{١}{٢} \times \left(-٣\frac{١}{٥}\right) + \frac{-١}{٢} \times \left(-٣\frac{١}{٥}\right)$

$\frac{١}{٢} \times \left(-٣\frac{١}{٥}\right) + \left(٣\frac{١}{٥}\right) \times \frac{١}{٢}$

= صفر ... خاصية العكوس الجمعي

ح) $٢\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٦}$

$\frac{٨}{٣} \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٢}$

ي) $\left(٣\frac{١}{٢} + ٢\frac{١}{٣}\right) \times \frac{٣}{٧}$

$\left(\frac{٧}{٢} + \frac{٧}{٣}\right) \times \frac{٣}{٧}$

$= \frac{٣}{٧} \times \frac{٢١}{٦} + \frac{٣}{٧} \times \frac{١٤}{٦} = \frac{٣}{٦} + ١ = \frac{٣}{٦} + \frac{٦}{٦} = \frac{٩}{٦} = ١\frac{٣}{٦}$

ل) $\left(-٢\frac{٧}{٩} + ١\frac{٢}{٣}\right) \times (-٠,٩)$

$(-٢,٧٧ + ١,٦٦) \times (-٠,٩٠)$

$(-١,١١) \times (-٠,٩) = +٠,٩٩٩$

ن) $\frac{١}{٥} \times \left(\frac{٥}{٦} - \frac{٥}{٧}\right)$

$\frac{١}{٥} \times \frac{٥}{٧} - \frac{١}{٥} \times \frac{٥}{٦}$

$= \frac{١}{٧} - \frac{١}{٦} = \frac{٦-٧}{٤٢} = \frac{١}{٤٢}$

٣ يبلغ طول قطعة من الخشب $١\frac{١}{٤}$ متر ، قطع النجّار $\frac{٢}{٣}$ من هذه القطعة لاستخدامها في صنع خزانة ، فما طول قطعة الخشب الباقية ؟



$١\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٤} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٦}$ متر

مهارات تفكير عليا :

٤ قامت هدى وعائشة بتقسيم ٥٦٠ عملة بينهما ، إذا حصلت هدى على $\frac{٣}{٨}$ من العملات ، فكم عدد العملات التي ستحصل عليها عائشة؟

عملات هدى + عملات عائشة = ٥٦٠

$\therefore س + \frac{٣}{٨} \times ٥٦٠ = ٥٦٠$

$\therefore س = ٥٦٠ - \frac{٣}{٨} \times ٥٦٠ = (١ - \frac{٣}{٨}) ٥٦٠ = \frac{٥}{٨} \times ٥٦٠ = ٣٥٠$ عملة

٥ اِشترى وليد ٦ أسهم من شركة بسعر ١٢,٥ دينارًا للسهم الواحد ، وشارك فيها في البورصة، وبعد أسبوع باع جميع الأسهم بسعر $\frac{٣}{٤}$ ٩٠ دينارًا .



- حدِّد ما إذا كان وليد قد ربح أو خسر في البورصة.

ثمن الأسهم = $٦ \times ١٢,٥ = ٦ \times ١٢\frac{١}{٢} = ٧٥$ دينارًا

$\therefore ٩٠\frac{٣}{٤} > ٧٥$ ... وليد قد ربح من البورصة.

- كم المبلغ الذي خسره أو ربحه ؟

$٩٠\frac{٣}{٤} - ٧٥ = ٩٠,٧٥ - ٧٥ = ١٥,٧٥$ دينارًا

٢ - ٦

قسمة الأعداد النسبية
Dividing Rational Numbers

سوف تتعلّم : قسمة الأعداد النسبية .

حُلّ وناقِش

في شهر رمضان المبارك ، تطوّع سعد مع مجموعة من أصدقائه بتجميع وجبات إفطار صائم وتوزيعها على الصائمين ابتغاء للأجر . إذا كان الوزن الإجمالي للوجبات $١٦\frac{١}{٢}$ كجم وكان وزن الوجبة الواحدة $\frac{٣}{٤}$ كجم .



فما عدد الوجبات التي تمّ توزيعها ؟

لإيجاد عدد الوجبات ، اِتّبِع الخطوات الآتية :

(أ) حدِّد العملية المطلوبة : وزن الوجبات ÷ وزن الوجبة الواحدة

(ب) عدد الوجبات = $١٦\frac{١}{٢} \div \frac{٣}{٤} = \frac{٣٣}{٢} \times \frac{٤}{٣} = ٢٢$

إذًا ، عدد الوجبات = ٢٢ وجبة .

تعلم أنّ عمليتَي الضرب والقسمة كلّ منهما عملية عكسية للأخرى . تساعدنا معرفة قواعد ضرب الأعداد النسبية على تعرّف قواعد قسمة الأعداد النسبية .

لقسمة عدد نسبي على آخر غير الصفر ، اِضرب في المعكوس الضربي للعدد الآخر واتّبِع قاعدة ضرب الأعداد النسبية .

معلومة مفيدة :



يزيد معدَّل التبرّع لدى الأسر الكويتية بنسبة ٥٠٪ خلال شهر رمضان المبارك عن بقية الأشهر . زيادة نسبية موجَبة تعبّر عن روح العطاء في رمضان .

تذكَّر

$$\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ}$$

حيث أ ، ب ، جـ ، د ∈ ص

ب ، جـ ، د ≠ صفر

دورك الآن (١)

أكمِل الجدول الآتي :

العدد	٦	$-٥\frac{٢}{٧}$	٤,٨
العدد في صورة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$	$\frac{٦}{١}$	$-\frac{٣٧}{٧}$	$\frac{٤٨}{١٠}$
المعكوس الضربي	$\frac{١}{٦}$	$-\frac{٧}{٣٧}$	$\frac{١٠}{٤٨}$

تذكَّر

- المعكوس الضربي لـ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ هو $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ حيث أ ، ب ≠ صفر
- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = ١$

عبِّر عن فهمك

(أ) هل للصفر معكوس جمعي ؟ هو هو الصفر لانه العنصر المحايد .

(ب) هل للصفر معكوس ضربي ؟ لا

مثال (١) :

أوجِد ناتج القسمة في كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $٢\frac{٥}{٦} \div \frac{١}{٣}$

الحلّ :

$٢\frac{٥}{٦} \div \frac{١}{٣}$

$= \frac{١٧}{٦} \div \frac{١}{٣}$ (حوِّل العدد الكسري إلى كسر مركَّب)

$= \frac{١٧}{٦} \times \frac{٣}{١}$

$= \frac{١٧ \times \cancel{٣}^{١}}{\cancel{٦}^{٢} \times ١}$

$= \frac{١٧}{٢}$

$= ٨\frac{١}{٢}$

(ب) $(-٢,٨٤) \div (\frac{-٢}{٥})$

الحلّ :

$(-٢,٨٤) \div (\frac{-٢}{٥})$

$= (-٢,٨٤) \div (-٠,٤)$ (حوِّل إلى الصورة العشرية ثمّ اقسم)

$= (-٢٨,٤) \div (-٤)$

$= ٧,١$

انتبِه

عند القسمة على عدد عشري ، اِضرب كلًّا من المقسوم والمقسوم عليه في قوى العدد ١٠ والتي تجعل المقسوم عليه عددًا كليًّا.

ج) $٥\frac{٥}{٨} \div (-٣\frac{٣}{٤})$

الحلّ :

$٥\frac{٥}{٨} \div (-٣\frac{٣}{٤})$

$= \frac{٤٥}{٨} \div \frac{(-١٥)}{٤}$

$= \frac{٤٥}{٨} \times (\frac{-٤}{١٥})$

$= \frac{{}^{٣}\cancel{٤٥} \times (-٤)^{-١}}{{}^{٢}\cancel{٨} \times {}^{١}\cancel{١٥}}$

$= \frac{-٣}{٢} = -١\frac{١}{٢}$

د) $-٧ \div (-٣\frac{١}{٢})$

الحلّ :

$-٧ \div (-٣\frac{١}{٢})$

$= -\frac{٧}{١} \div \frac{(-٧)}{٢}$

$= -\frac{٧}{١} \times \frac{(-٢)}{٧}$

$= \frac{(-٧)^{-١} \times (-٢)}{{}^{١}\cancel{٧} \times ١} = ٢$

مثال (٢) :

شهدت جزيرة عوهة تغيّرًا في درجة الحرارة بمقدار $-٩\frac{٣}{٨}$ ° خلال خمسة أيّام . أوجِد متوسّط التغيّر في درجة الحرارة في اليوم الواحد .

الحلّ :



متوسّط التغيّر في درجة الحرارة في اليوم الواحد $= -٩\frac{٣}{٨} \div ٥$

$= \frac{-٧٥}{٨} \div \frac{٥}{١}$

$= \frac{-٧٥}{٨} \times \frac{١}{٥}$

$= \frac{(-٧٥)^{-١٥}}{٨ \times {}^{١}\cancel{٥}} = \frac{-١٥}{٨} = -١\frac{٧}{٨}$

∴ متوسّط التغيّر في درجة الحرارة في اليوم الواحد هو $-١\frac{٧}{٨}$ °

دورك الآن (٢)



أرادت ندى تصميم نموذج لعلم دولة الكويت القديم .

إذا كان العلم الواحد يحتاج إلى $\frac{١}{٤}$ ١ متر من القماش الأحمر ،

فما عدد الأعلام التي يمكن صنعها باستخدام $\frac{١}{٤}$ ٦ أمتار من القماش نفسه؟

(أ) حدِّد العملية المطلوبة : عدد أمتار القماش ÷ قماش العلم الواحد

(ب) عدد الأعلام = $٦\frac{١}{٤} \div ١\frac{١}{٤} = \frac{٢٥}{٤} \div \frac{٥}{٤}$

$= \frac{٢٥}{٤} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٥}{١} \times \frac{١}{١} = ٥$ أعلام

عبِّر عن فهمك

هل ناتج قسمة عدد نسبي على آخر نسبي يقع كلّ منهما بين ٠ ، ١ يكون دائمًا عددًا أكبر من واحد صحيح ؟ ناقِش صحّة العبارة ، موضِّحًا رأيك بأمثلة .

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة .

(أ) $\frac{٢}{٧} \div \frac{٣}{٨}$

$\frac{٨}{٣} \times \frac{٤}{٧} = \frac{١٦}{٢١}$

(ب) $\frac{٢}{١٥} \div \frac{-٤}{٥}$

$\frac{١٥}{٤} \times \frac{-٤}{١٥} = -\frac{٢}{١} \times \frac{٣}{١} = -٦$

(ج) $\frac{٩}{١٦} \div (-٣)$

$\frac{٩}{١٦} \times (\frac{١}{٣}-) = \frac{٣}{١٦} - = (-١) \times \frac{٣}{١٦}$

(د) $١٢\frac{١}{٤} \div (-٤\frac{٢}{٣})$

$\frac{٤٩}{٤} \div (\frac{١٤}{٣}-) = \frac{٤٩}{٤} \times (\frac{٣}{١٤}-) = \frac{٧}{٤} \times (\frac{٣}{٢}-) = -٢\frac{١}{٨}$

(هـ) $٤٩ \div ٤\frac{٩}{١٠}$

$٤٩ \div \frac{٤٩}{١٠} = ٤٩ \times \frac{١٠}{٤٩} = ١٠$

(و) $٢,٨ \div \frac{-١٢}{٢٥}$

$\frac{١٢}{٢٥}- \div \frac{٢٨}{١٠} = \frac{١٢}{٢٥}- \times \frac{١٠}{٢٨} = \frac{٦}{٣٥}- = \frac{٢}{٧} \times \frac{٣}{٥}-$

(ز) $٨,٣٦ \div (-٠,٤)$

$\frac{٨٣٦}{١٠٠} \div (\frac{٤}{١٠}-) = \frac{٨٣٦}{١٠٠} \times \frac{١٠}{٤}(-) = \frac{٢٠٩}{١٠}(-) = -٢٠,٩$

(ح) $-\frac{٦}{٧} \div (-١١)$

$(\frac{١}{١١}) \times \frac{٥٥}{٧} = \frac{٥}{٧} \times ١ = \frac{٥}{٧}$



٢ يُراد تفريغ $\frac{١}{٢}$ ١٦ لترًا من الزيت في عبوّات سعّة كلّ منها $\frac{١}{٢}$ ١ لتر . كم عدد العبوّات الكاملة اللازمة لتفريغ الزيت كلّه ؟

عدد العبوات = تفريغ جميع العبوات ÷ سعة كل منها

∴ عدد العبوات = $١٦\frac{١}{٢} \div ١\frac{١}{٢} = \frac{٣٣}{٢} \div \frac{٣}{٢}$

$= \frac{٣٣}{٢} \times \frac{٢}{٣} = ١١$ عبوة

٣ رصدت إحدى الهيئات مبلغ ١٣٥ دينارًا للحفل الختامي ، إذا ساهم كلّ مشترِك بمبلغ ٤,٥ دنانير، فكم عدد الأشخاص الذين ساهموا في الحفل ؟

عدد الأشخاص المساهمين = إجمالي مبلغ الحفل ÷ مبلغ المشترك الواحد

∴ عدد الأشخاص = $١٣٥ \div ٤,٥ = ١٣٥ \div \frac{٤٥}{١٠}$

$= ١٣٥ \times \frac{١٠}{٤٥} = ٣ \times ١٠ = ٣٠$ مشترك

مهارات تفكير عليا :

٤ يصمّم فهد $\frac{٢}{٣}$ صفحة في برنامج الفوتوشوب خلال $\frac{١}{٢}$ ساعة . كم صفحة يصمّمها في ٦ ساعات ؟

∴ $\frac{٢}{٣}$ صفحة ← $\frac{١}{٢}$ ساعة ∴ الصفحة = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$ ساعة

∴ زمن استغراق تصميم صفحة واحدة = $\frac{٣}{٤}$ ساعة

∴ عدد الصفحات = عدد الساعات ÷ زمن الصفحة الواحدة = $٦ \div \frac{٣}{٤} = \frac{٤}{١} \times ٦ = ٢٤$ صفحات



٥ يريد معلّم إجراء تجربة في المختبر مع ٢٠ متعلّمًا من متعلّمي الصفّ الثامن ، بحيث ينفّذها كلّ متعلّم على حدة .

إذا كان كلّ متعلّم يحتاج إلى $\frac{٣}{٤}$ كوب من الخلّ وكان لدى المعلّم ١٥ كوبًا من الخلّ ، فهل كمّية الخلّ تكفي المتعلّمين جميعًا ؟ فسّر إجابتك .

عدد الأكواب = $٢٠ \times \frac{٣}{٤} = ٥ \times ٣ = ١٥$

∴ كمية الخل تكفي المتعلمين جميعًا

٢ - ٧ الجذر التربيعي للعدد النسبي

Square Root of Rational Number

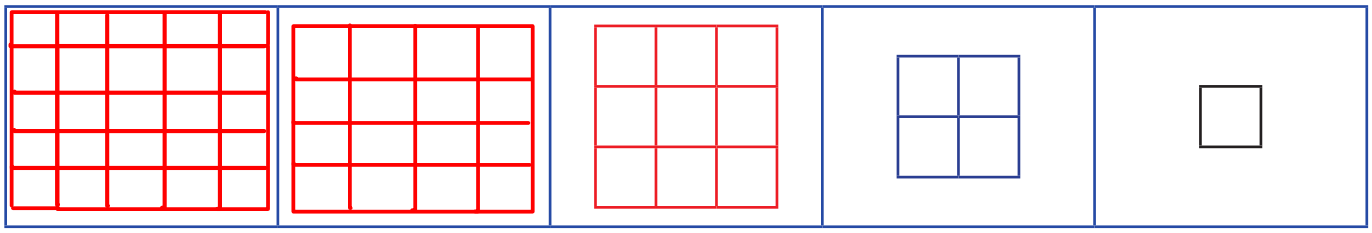
سوف تتعلّم : إيجاد الجذر التربيعي لعدد نسبي موجَب .

العبارات والمفردات :

مربّع العدد	Square of a Number	الجذر التربيعي	Square Root

إستكشِف

١ أكمِل نمط البلاطات المربّعة الآتية حتّى تصل إلى ٥ بلاطات في كلّ ضلع .



٢ أكمِل الجدول الآتي :

عدد البلاطات في كلّ ضلع	١	٢	٣	٤	٥
العدد الكلّي للبلاطات في كلّ مربّع	١	٤	٩	١٦	٢٥

تذكّر

مساحة المنطقة المربّعة
= طول الضلع × نفسه = ل × ل
= ل^{٢}

٣ اِفترِض أنّ مربّعًا فيه ٣٦ بلاطة ، ما عدد البلاطات في كلّ ضلع ؟

٣٦ ÷ ٦ = ٦ بلاطات

٤ ما العلاقة بين عدد البلاطات في كلّ ضلع وعدد البلاطات في المربّع ؟

عدد البلاطات كل ضلع = $\frac{١}{٦}$ عدد البلاطات في المربع

تعميم: لأيّ عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ يكون :

مربّع العدد $= \left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢} = \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} = \frac{أ \times أ}{ب \times ب} = \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}}$

تذكّر

مربّع العدد ٢ $= (٢)^{٢}$
$= ٢ \times ٢ = ٤$

دورك الآن (١)

أكمِل الجدول الآتي :

العدد	٣	٧	٨-	٩	١٠	٢ ١/٢ -	٠,٩	٠,٩-	٢/٥
مربّعه	٩	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠	٢٥/٤	٠,٨١	٠,٨١	٤/٢٥

ملاحظة :

◄ مربّع أيّ عدد نسبي لا يساوي الصفر ، هو دائمًا عدد نسبي موجَب ،
إذا كان أ ∋ ص ، أ ≠ ٠ ، فإن أ^{٢} > ٠

عبِّر عن فهمك

يوجَد عددان مختلفان مربّع كلّ منهما يساوي ٦٤/٢٥ ، فما هما ؟ تحقَّق من إجابتك .

٨/٥ ، -٨/٥

دورك الآن (٢)

ضَع كلًّا ممّا يلي على صورة $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢}$:

(أ) $\frac{٢٥}{٤٩} = \frac{(٥)^{٢}}{(٧)^{٢}} = \left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢}$

(ب) $٢\frac{١}{٤} = \frac{٩}{٤} = \frac{(٣)^{٢}}{(٢)^{٢}} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$

(ج) $٠,٦٤ = \frac{٦٤}{١٠٠} = \frac{(٨)^{٢}}{(١٠)^{٢}} = \left(\frac{٨}{١٠}\right)^{٢}$

(د) $١,٤٤ = \frac{١٤٤}{١٠٠} = \frac{(١٢)^{٢}}{(١٠)^{٢}} = \left(\frac{١٢}{١٠}\right)^{٢}$

الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجَب أ :

هو العدد الذي مربّعه يساوي أ .

- لكلّ عدد نسبي موجَب أ جذران ، أحدهما موجَب ($\sqrt{أ}$)
والآخر سالب ($-\sqrt{أ}$) (وستقتصر دراستنا على الجذر الموجَب للعدد النسبي) .

لاحِظ من دورك الآن (١) أنّ :
٠,٩ هو الجذر التربيعي الموجَب للعدد ٠,٨١
-٠,٩ هو الجذر التربيعي السالب للعدد ٠,٨١

دورك الآن (٣)

أكمِل الجدول الآتي :

العدد (أ)	٤	١٦	٢٥	٣٦	١٢١	١٤٤
الجذر التربيعي الموجَب ($\sqrt{أ}$)	٢	٤	٥	٦	١١	١٢
السبب	$(٢)^{٢} = ٢ \times ٢$	$(٤) = ٤ \times ٤$	$(٥) = ٥ \times ٥$	$(٦) = ٦ \times ٦$	$(١١)^{٢} = ١٢١$	$(١٢) = ١٢ \times ١٢$

مثال (١) :

أوجِد كلًّا ممّا يلي :

(أ) $\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$

الحلّ :

$$\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٤ \times ٤}{٥ \times ٥}} = \sqrt{\frac{(٤)^{٢}}{(٥)^{٢}}} = \sqrt{\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}}$$

$$= \frac{٤}{٥}$$

(ب) $-\sqrt{٠,٨١}$

الحلّ :

$$-\sqrt{٠,٨١} = -\sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = -\sqrt{\frac{٩ \times ٩}{١٠ \times ١٠}} = -\sqrt{\frac{(٩)^{٢}}{(١٠)^{٢}}}$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{٩}{١٠}\right)^{٢}} = -\frac{٩}{١٠} = -٠,٩$$

(ج) $\sqrt{٤٩٠٠}$

الحلّ :

$$\sqrt{٤٩٠٠} = \sqrt{٧٠ \times ٧٠} = \sqrt{(٧٠)^{٢}} = ٧٠$$

مثال (٢) :

أوجِد الجذر التربيعي لكلّ من الأعداد الآتية :

(أ) $\sqrt{٥\frac{١}{١٦}}$

الحلّ :

$$\sqrt{٥\frac{١}{١٦}} = \sqrt{\frac{٨١}{١٦}} = \sqrt{\frac{٩ \times ٩}{٤ \times ٤}} = \sqrt{\frac{(٩)^{٢}}{(٤)^{٢}}} = \sqrt{\left(\frac{٩}{٤}\right)^{٢}} = \frac{٩}{٤} = ٢\frac{١}{٤}$$

(ب) $\sqrt{٣٢٤}$

الحلّ :

٣٢٤	٢
١٦٢	٢
٨١	٣
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

$$\sqrt{٣٢٤} = \sqrt{١٨ \times ١٨}$$

$$= \sqrt{(١٨)^{٢}} = ١٨$$

تذكّر

عند تحليل العدد إلى عوامله الأوّلية، نقسم على ٢ أو ٣ أو ٥ أو ٧ أو ..... .

حلِّل : ١٩٦ إلى عوامله الأوّلية .

١٩٦	٢
٩٨	٢
٤٩	٧
٧	٧
١	

$$١٩٦ = (٢)^{٢} \times (٧)^{٢}$$

مثال (٣) :

أوجِد عددَين صحيحَين متتاليَين يقع بينهما العدد $\sqrt{٢٣,٢٥}$

الحلّ :

نعلم أنّ : $١٦ < ٢٣,٢٥ < ٢٥$

$$\sqrt{١٦} < \sqrt{٢٣,٢٥} < \sqrt{٢٥}$$

$$٤ < \sqrt{٢٣,٢٥} < ٥$$

إذًا ، العدد $\sqrt{٢٣,٢٥}$ يقع بين العددَين ٤ ، ٥

تذكّر

- $(٤)^{٢} = ١٦$
- $(٥)^{٢} = ٢٥$

عبِّر عن فهمك

أعطِ أمثلة عن جذور تربيعية أخرى تقع بين العددَين ٤ ، ٥ .

الجذور المحصورة بين $\sqrt{١٦}$ و $\sqrt{٢٥}$ ← $\sqrt{١٧}$ ، $\sqrt{١٨}$ ، ..... $\sqrt{٢٤}$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد كلًّا ممّا يلي:

أ) $\sqrt{\frac{٢٢٥}{٦٤}}$ = $\frac{١٥}{٨}$

ب) $\sqrt{٣\frac{٦}{٢٥}}$ = $\frac{٩}{٥}$

ج) $-\sqrt{٠,٢٠٢٥}$ = $-\frac{٤٥}{١٠٠}$

٢ أوجِد الجذر التربيعي لكلّ من الأعداد الآتية :

أ) ١,٩٦ = $\frac{١٤}{١٠}$ = ١,٤

ب) ٢٥٦ = ١٦

ج) $١٢\frac{٢٤}{٢٥}$ = $\frac{١٨}{٥}$

٣ أوجِد عددَين صحيحَين متتاليَين يقع بينهما العدد :

أ) $\sqrt{٥٢}$ ... $٧ < \sqrt{٥٢} < ٨$ ∴ العددان ٧ ، ٨

ب) $\sqrt{١٣,٥}$ ... $٣ < \sqrt{١٣,٥} < ٤$ ∴ العددان ٣ ، ٤

في التمارين من (٤ - ٧) ، ظلِّل دائرة الإجابة الصحيحة :

٤ $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢}$ =

أ) $\frac{-١}{٤}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{١}{٨}$

٥ $\sqrt{(٣)^{٢}+(٤)^{٢}}$ =

أ) ٧ ب) ٥ ج) ٢٥ د) ٤

٦ ما العدد الذي جذره التربيعي = ٩ ؟

أ) ٩ ب) ٣ ج) ٨١ د) ٢٧

٧ $\sqrt{١\frac{٩}{١٦}}$ = $\frac{٥}{٤}$ = $١\frac{١}{٤}$

أ) $١\frac{٣}{٤}$ ب) $١\frac{٤}{٣}$ ج) $١\frac{١}{٤}$ د) $\frac{٤}{٥}$

٨ أوجِد طول ضلع المربّع الذي مساحته $\frac{٤}{٩}$ ١٣ سم^{٢} .

مساحة المربع = طول الضلع في نفسه

∴ م = س × س = $\frac{٤}{٩}$ ١٣

∴ س^{٢} = $\frac{١٢١}{٩}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ س = $\sqrt{\frac{١١ \times ١١}{٣ \times ٣}}$ = $\frac{\sqrt{(١١)^{٢}}}{\sqrt{(٣)^{٢}}}$ = $\frac{١١}{٣}$ = ٣$\frac{٢}{٣}$ سم

مهارات تفكير عليا :

٩ صندوق على شكل مكعّب مساحته الجانبية ١٩٦ دسم^{٢} . أُحسب طول حرفه .



المساحة الجانبية للمكعب = مساحة المربع × ٤

= ل^{٢} × ٤ = ٤ل^{٢} ∴ حيث ل هو طول ضلع المكعب

∴ ٤ل^{٢} = ١٩٦ ∴ ل^{٢} = $\frac{١٩٦}{٤}$ = ٤٩

∴ ل = $\sqrt{٤٩}$ = $\sqrt{٧ \times ٧}$ = $\sqrt{(٧)^{٢}}$ = ٧ دسم

١٠ تمّ تبليط أرضية غرفة مربّعة الشكل بـ ٧٢ بلاطة بيضاء اللون و٧٢ بلاطة سوداء اللون ، (علمًا بأنّ جميع البلاطات مربّعة الشكل ومتطابقة) ، فكم عدد البلاطات في كلّ صفّ ؟



إجمالي بلاط أرضية الغرفة = ٧٢ + ٧٢ = ١٤٤ بلاطة

∴ طول ضلع الغرفة (صف أو عمود الغرفة) = الجذر التربيعي لمساحة المربع

∴ ل = $\sqrt{١٤٤}$ = $\sqrt{١٢ \times ١٢}$ = $\sqrt{(١٢)^{٢}}$ = ١٢ بلاطة من الصف .

٢ - ٨ الجذر التكعيبي للعدد النسبي
Cubic Root of Rational Number

سوف تتعلّم : إيجاد الجذر التكعيبي لعدد نسبي .

العبارات والمفردات :

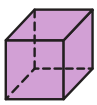
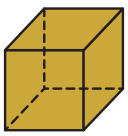
الجذر التكعيبي	The Cubic Root

إستكشِف



أرادت فاطمة تنظيم خزانة ملابسها باستخدام صناديق مكعّبة الشكل ذات أحجام مختلفة ، فاستخدمت صندوق حجمه ٨ وحدات مكعّبة لوضع الأحزمة والنظّارات ، وصندوقًا آخر حجمه ٢٧ وحدة مكعّبة لوضع المناشف ، وصندوقًا حجمه ١٢٥ وحدة مكعّبة لوضع الحقائب . أرادت حساب طول حرف كلّ صندوق من هذه الصناديق المكعّبة لتجهيز مكان مناسِب لها داخل خزانتها الخاصّة .

ساعِد فاطمة في معرفة طول كلّ ضلع بإكمال الجدول الآتي :

الشكل	صندوق النظّارات والأحزمة 	صندوق المناشف 	صندوق الحقائب 
حجمه	٨ وحدات مكعّبة	٢٧ وحدة مكعّبة	١٢٥ وحدة مكعّبة
الحجم بالصورة الأسّية	$٨ = ٢ \times ٢ \times ٢ = (٢)^{٣}$	$٢٧ = ٣ \times ٣ \times ٣ = (٣)^{٣}$	$١٢٥ = ٥ \times ٥ \times ٥ = (٥)^{٣}$
طول الحرف	٢ وحدة طول	٣ وحدة طول	٥ وحدة طول

تذكَّر

- مكعّب العدد ل $= ل^{٣}$
$= ل \times ل \times ل$
فمثلًا مكعّب العدد ٢ $= (٢)^{٣}$
$= ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$

دورك الآن (١)

أكمِل الجدول الآتي :

العدد	١	٣	٤	٦-	٧	٩-	ص-
مكعّبه	١	٢٧	٦٤	٢١٦-	٣٤٣	٧٢٩-	$ص^{٣}-$

تعميم: لأيّ عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ يكون :

مكعّب العدد $\frac{أ}{ب} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{٣} = \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} = \frac{أ \times أ \times أ}{ب \times ب \times ب} = \frac{أ^{٣}}{ب^{٣}}$

الجذر التكعيبي للعدد النسبي أ : هو العدد الذي مكعّبه أ ويُرمز إليه بالرمز $\sqrt[٣]{أ}$.

ملاحظة :

- لإيجاد $\sqrt[٣]{أ}$ نحلّل العدد أ إلى عوامله الأوّلية ، ونضعه على الصورة $أ = ب^{٣}$
- الجذر التكعيبي لعدد نسبي موجَب هو عدد موجَب ، فمثلًا $\sqrt[٣]{٨} = ٢$
- الجذر التكعيبي لعدد نسبي سالب هو عدد سالب ، فمثلًا $\sqrt[٣]{-٨} = -٢$

دورك الآن (٢)

أكمِل الجدول الآتي :

العدد (أ)	٨	١٢٥-	٢١٦	٣٤٣	١٠٠٠-
الجذر التكعيبي ($\sqrt[٣]{أ}$)	$\sqrt[٣]{٨} = ٢$	$\sqrt[٣]{-١٢٥} = -٥$	$\sqrt[٣]{٢١٦} = ٦$	$\sqrt[٣]{٣٤٣} = ٧$	$\sqrt[٣]{-١٠٠٠} = -١٠$
السبب	$٨ = (٢)^{٣}$	$-١٢٥ = (-٥)^{٣}$	$٢١٦ = (٦)^{٣}$	$٣٤٣ = (٧)^{٣}$	$-١٠٠٠ = (-١٠)^{٣}$

عبِّر عن فهمك

هل كلّ عدد نسبي جذره التكعيبي هو عدد نسبي ؟ أعط مثالًا على ذلك .

لا ... ليس كل العدد النسبي هو العدد الذي يمكن كتابته على صورة كسر $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، مثال: العدد النسبي ٣ ∴ $\sqrt[٣]{٣} = \frac{\sqrt[٣]{٣}}{١}$ البسط ليس عدد صحيح

دورك الآن (٣)

أوجِد كلًّا ممّا يلي :

أ) $\sqrt[٣]{\frac{١٢٥}{٢٧}} = \sqrt[٣]{\frac{٥ \times ٥ \times ٥}{٣ \times ٣ \times ٣}} = \sqrt[٣]{\frac{(٥)^{٣}}{(٣)^{٣}}} = \sqrt[٣]{\left(\frac{٥}{٣}\right)^{٣}} = \frac{٥}{٣}$

ب) $\sqrt[٣]{-٠,٠٦٤} = \sqrt[٣]{\frac{-٦٤}{١٠٠٠}} = \sqrt[٣]{\frac{(-٤)^{٣}}{(١٠)^{٣}}} = -\frac{٤}{١٠} = -٠,٤$

اِنتبِه

- $\sqrt{٦٤} = ٨$
- $\sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

مثال (١) :

أوجِد الجذر التكعيبي لكلّ من الأعداد الآتية :

أ) $-١٥\frac{٥}{٨}$

الحلّ :

$$\sqrt[٣]{-١٥\frac{٥}{٨}} = \sqrt[٣]{\frac{-١٢٥}{٨}} = \frac{\sqrt[٣]{(-٥)^{٣}}}{\sqrt[٣]{(٢)^{٣}}} = \sqrt[٣]{\left(\frac{-٥}{٢}\right)^{٣}}$$

$$= \frac{-٥}{٢} = -٢\frac{١}{٢}$$

ب) ٣,٣٧٥

الحلّ :

$$\sqrt[٣]{٣,٣٧٥} = \sqrt[٣]{\frac{٣٣٧٥}{١٠٠٠}} = \frac{\sqrt[٣]{٣ \times ٥)^{٣}}}{\sqrt[٣]{(١٠)^{٣}}} = \sqrt[٣]{\frac{(١٥)^{٣}}{(١٠)^{٣}}}$$

$$= \sqrt[٣]{\left(\frac{١٥}{١٠}\right)^{٣}}$$

$$= \frac{١٥}{١٠} = ١,٥$$

٣	٣ ٣٧٥
٣	١ ١٢٥
٣	٣٧٥
٥	١٢٥
٥	٢٥
٥	٥
	١

اِنتبِه

$\sqrt[٣]{(-٢)^{٣}} = -٢$

مثال (٢) :

أوجِد ناتج ما يلي :

$٥\sqrt{٣٦} - ٤\sqrt[٣]{-٢٧}$

الحلّ :

$$٥\sqrt{٣٦} - ٤\sqrt[٣]{-٢٧} = ٥ \times ٦ - ٤(-٣) = ٣٠ - (-١٢)$$

$$= ٣٠ + ١٢ = ٤٢$$

تذكَّر

ترتيب العمليات الحسابية :

١) ما داخل الأقواس

٢) الأسس والجذور

٣) الضرب والقسمة

٤) الجمع والطرح

تمارين ذاتية :

١ أوجِد الجذر التكعيبي لكلّ من الأعداد الآتية :

أ) $\sqrt[3]{٠,٢١٦}$ = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

ب) $\sqrt[3]{-\frac{٢٧}{٨}}$ = $\frac{-٣}{٢}$

ج) $\sqrt[3]{-٠,١٢٥}$ = $\frac{-٥}{١٠}$ = $-\frac{١}{٢}$ = -٠,٥

د) $\sqrt[3]{-٤٢\frac{٧}{٨}}$ = $\frac{-٧}{٢}$

هـ) $\sqrt[3]{٢,٧٤٤}$ = $\frac{١٤}{١٠}$ = ١,٤

٢ ٧٤٤
٢ ١٣٧٢
٢ ٦٨٦
٧ ٣٤٣
٧ ٤٩
٧ ٧
١

٢ مكعّب حجمه ٦٤ سم^{٣} . أوجِد طول حَرفه .

$ل^{٣}$ = ٦٤ ∴ $ل = \sqrt[3]{٦٤} = \sqrt[3]{٤ \times ٤ \times ٤} = \sqrt[3]{٤^{٣}}$ = ٤ سم

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $٣\sqrt[3]{-٦٤} + ٢\sqrt[3]{١٢٥}$

$= ٣ \times (-٤) + ٢ \times ٥ = -١٢ + ١٠ = -٢$

ب) $٢\sqrt[3]{٢٧} + ٣\sqrt[3]{-٨}$

$= ٢ \times ٣ + ٣ \times (-٢) = ٦ - ٦ =$ صفر

في التمارين من (٤ - ٨) ، ظلِّل دائرة الإجابة الصحيحة :

٤ $\sqrt[3]{(-٠,٠٤)^{٣}}$ = -٠,٠٤

أ) ٠,٠٤ ب) -٠,٠٤ ج) ٠,٠١٦ د) ٤

٥ $\sqrt[3]{\frac{-٣٤٣}{٢٧٠٠٠}} = \frac{-٧}{٣٠}$

أ) $\frac{٧}{٣٠}$ ب) $\frac{٣٠}{٧}$ ج) $\frac{-٧}{٣٠}$ د) $\frac{-٣٠}{٧}$

٦ $\frac{\sqrt[3]{١٢٥}}{\sqrt[3]{٢٥}} = \sqrt[3]{\frac{٥}{٢٥}} = \frac{٥}{٥} = ١$

أ) ٥ ب) ١ ج) $\frac{١}{٥}$ د) ٠,١

٧ $\sqrt[3]{٠,٠٠٨} =$ $\left(\frac{١}{١٠٠}\right)^{\frac{٣}{٣}} = \frac{(٢)^{٣}}{(١٠)^{٣}} = \frac{٢}{١٠}$

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٠٢ (ج) ٠,٨ (د) ٢

٨ $\sqrt[3]{ب^{٣}} =$ ب

(أ) $ب^{٣}$ (ب) $ب^{٢}$ (ج) ب (د) – ب

مهارات تفكير عليا :

٩ ظلّل دائرة الإجابة الصحيحة:

مكعّب حجمه ٨ م^{٣} . فإنّ مساحة أحد أوجهه تساوي :

$ل^{٣} = ٨$ م^{٣} ∴ $ل = \sqrt[3]{(٢)^{٣}}$ م ∴ $ل^{٢} = (٢)^{٢}$ م^{٢} = ٤ م^{٢}

(أ) ٢ م^{٢} (ب) ٤ م (ج) ٤ م^{٢} (د) ٨ م^{٢}

١٠ صنع محمّد صندوقًا مكعّب الشكل حجمه ٦٤ دسم^{٣}، وصنعت أخته نور صندوقًا آخر أصغر منه ومكعّب الشكل أيضًا ، إذا كان طول ضلع صندوق نور يساوي نصف طول ضلع صندوق أخيها محمّد ، فما هو حجم صندوق نور ؟



نفرض أن طول ضلع مكعب نور هو س

وطول ضلع مكعب محمد هو ص

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ص

∴ حجم المكعب = $س^{٣} = (\frac{١}{٢} ص)^{٣}$

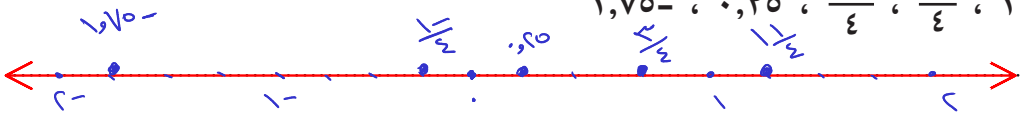
$س^{٣} = \frac{١}{٨} \times ص^{٣}$ = $\frac{١}{٨} \times ٦٤$ = ٨ دسم^{٣}

تقويم الوحدة التعليمية الثانية
Unit Two Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ مثِّل الأعداد النسبية الآتية على خطّ الأعداد:

$1\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{-1}{4}$ ، ٠,٢٥ ، -١,٧٥



٢ رتِّب الأعداد الآتية ترتيبًا تصاعديًّا :

$5\frac{1}{3}$ ، $-5\frac{1}{5}$ ، ٥,٢٥ ، -٥,٤

٥,٤- ، ٥,٢٥ ، ٥,٢ ، ٥,٢٣

الترتيب ٥,٤- < ٥١/٥ < ٥,٢٥ < ٥١/٣

٣ رتِّب الأعداد الآتية ترتيبًا تنازليًّا :

$\frac{3}{4}$ ، $\frac{-3}{5}$ ، ٠,٨ ، -٠,٨

٠,٨- ، ٠,٦- ، ٠,٨ ، ٠,٧٥

الترتيب ٠,٨ > ٣/٤ > ٣/٥- > ٠,٨-

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) -٥,٦٣ - (-٢,٠٧٣) = -٥,٦٣ + ٢,٠٧٣ = -٣,٥٥٧

ب) -٥,٤ + $3\frac{1}{3}$ = -٥,٤ + ٣,٣٣٣ = -٢,٠٦٧

ج) $-6\frac{5}{8} + 3\frac{5}{6}$ = $\frac{53}{8} + \frac{23}{6}$ = $\frac{-159+92}{24}$ = $\frac{-67}{24}$

د) $-10\frac{2}{3} + 18\frac{1}{5}$ = ١٨,٢٠٠ - ١٠,٦٦٦ = ٧,٥٣٤

هـ) $2\frac{1}{6} \times 1\frac{2}{3}$ = $\frac{13}{6} \times \frac{5}{3}$ = $\frac{65}{18}$

و) $5\frac{1}{7} \div (-1\frac{1}{7})$ ..... $\frac{36}{7} \div (-\frac{8}{7}) = \frac{36}{7} \times (-\frac{7}{8}) = -\frac{9}{2} = -1\frac{1}{2}$

ز) $1\frac{1}{6} \times (\frac{6}{7} - \frac{3}{14})$ ..... $\frac{7}{6} \times (\frac{12}{14} - \frac{3}{14}) = \frac{7}{6} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{4}$

ح) $5\frac{1}{6} + 6\frac{7}{9} + 3\frac{2}{3}$ ..... $= \frac{31}{6} + \frac{61}{9} + \frac{11}{3} = (\frac{31}{6} + \frac{61}{9}) + \frac{11}{3} = (\frac{93+122}{18}) + \frac{11}{3} = \frac{215}{18} + \frac{11}{3} = \frac{215+66}{18} = \frac{281}{18} = 15\frac{11}{18}$

٥ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $\sqrt{0,0064}$ ..... $= \sqrt{\frac{64}{10000}} = \sqrt{\frac{8 \times 8}{100 \times 100}} = \frac{8}{100} = 0,08$

ب) $\sqrt{\frac{81}{100}}$ ..... $= \sqrt{\frac{9 \times 9}{10 \times 10}} = \frac{9}{10} = 0,9$

ج) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ ..... $= \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \sqrt[3]{\frac{4 \times 4 \times 4}{3 \times 3 \times 3}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

٦ يريد جاسم صناعة عطر في المنزل ، وذلك بخلط $9\frac{1}{2}$ جرامات من العطر المركَّز ، و ٣٩,٨ جرامًا من الكحول الأبيض، و ٠,٤٥ جرام من الصندل للتثبيت.



أ) ما كمّية الجرامات التي استخدمها في صناعة العطر ؟

$9\frac{1}{2} + 39,8 + 0,45 = 9,5 + 39,8 + 0,45 = 49,75$ جرامًا

ب) إذا كان جاسم يريد عمل $\frac{3}{4}$ الكمّية ، فما الكمّية اللازمة من الجرامات التي يحتاج إليها ؟

$\frac{3}{4} \times 49,75 = \frac{3}{4} \times 49\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{199}{4} = \frac{597}{16} = 37\frac{5}{16}$

٧ خزّان ماء على شكل مكعّب ، حجمه ١٢٥ مترًا مكعّبًا . أوجِد طول حرفه .

$ل^3 = 125$ م^3 ..... $ل = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} = 5$ م

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٤) ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $\frac{٧}{١٠}$ هو المعكوس الضربي للعدد $١\frac{٣}{٧}$	[أ]	[ب]
٢ $٠,٥ + (-٠,١٥) = ٠,٢$	[أ]	[ب]
٣ $٠,٦ = ٠,٦$	[أ]	[ب]
٤ $\frac{-٧}{١٥} - (\frac{-٣}{١٥}) = \frac{-١٠}{١٥}$	[أ]	[ب]

في البنود (٥ - ١٠) لكلّ بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة :

٥ ناتج $\frac{٢}{٥} \times \frac{٥}{٧} \times \frac{٧}{٩}$ يساوي :

[أ] $\frac{٢}{٩}$ [ب] $\frac{٥}{٩}$ [ج] $\frac{٧}{٩}$ [د] $\frac{٥}{٧}$

٦ $\frac{١}{٢} \div \frac{١}{٤} =$

[أ] $\frac{١}{٨}$ [ب] ٢ [ج] ٨ [د] $\frac{١}{٢}$

٧ $\sqrt{٩٠٠} =$

[أ] ٣٠٠ [ب] ٣ [ج] ٣٠ [د] ٩٠

٨ $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}} =$

[أ] $\frac{١}{٨}$ [ب] $\frac{٣}{٢}$ [ج] $\frac{٣}{٨}$ [د] $\frac{٩}{٤}$

٩ العددان الصحيحان المتتاليان اللذان يقع بينهما $\sqrt{٧}$ هما :

أ ٦ ، ٨ ب ٣ ، ٤ ج ٢ ، ٣ د ١ ، ٢

١٠ الأعداد المرتَّبة ترتيبًا تصاعديًّا هي :

أ $-\frac{١}{٩}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، ٠ ، ٠,٧

ب $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٩}$ ، ٠ ، ٠,٧

ج ٠,٧ ، ٠ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٩}$

د ٠ ، ٠,٧ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٩}$

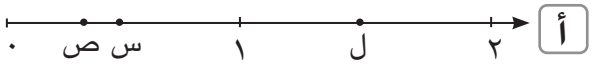
مهارات تفكير عليا :

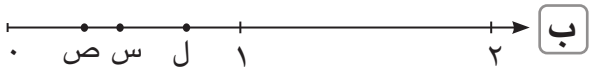
في البند (١١) أربعة اختيارات، واحد منها فقط صحيح، ظلِّل الإجابة الصحيحة.

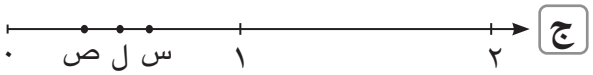


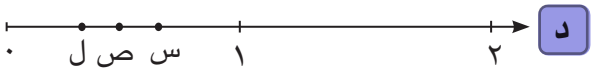
١١ ليكن س ، ص عددَين نسبيَّين على خطّ الأعداد الموضَّح أعلاه ، س × ص = ل .

أيّ ممّا يلي يمثّل موقع العدد ل على خطّ الأعداد ؟

أ


ب


ج


د


حاصل ضرب أي عددين كسريين أصغر منه أصغرهما

مثال: نضع س = $\frac{١}{٢}$ ، ص = $\frac{٢}{٣}$

∴ س × ص = $\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$

$\frac{١}{٢} > \frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣} > \frac{١}{٣}$

و) $\frac{1}{7}\ 5 \div (-1\ \frac{1}{7}) =$ $\frac{36}{7} \div (-\frac{8}{7}) = \frac{36}{7} \times (-\frac{7}{8}) = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$

ز) $1\ \frac{1}{6} \times (\frac{3}{14} - \frac{6}{7}) =$ $\frac{7}{6} \times (\frac{3-12}{14}) = \frac{7}{6} \times \frac{9}{14} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

ح) $-2\ \frac{2}{3} + 3\ \frac{7}{9} + 6\ \frac{1}{6} + 5 =$ $-3\ \frac{12}{18} + 3\ \frac{14}{18} + 6\ \frac{3}{18} + 5 = 8\ \frac{3+14-12}{18} = 8\ \frac{5}{18}$

٥ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $\sqrt{0,0064} = \sqrt{(0,08)(0,08)} = 0,08$

ب) $\sqrt{\frac{81}{100}} = \sqrt{\frac{9 \times 9}{10 \times 10}} = \frac{9}{10}$

ج) $\sqrt[3]{2\ \frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \sqrt[3]{\frac{4 \times 4 \times 4}{3 \times 3 \times 3}} = \frac{4}{3}$

٦ يريد جاسم صناعة عطر في المنزل ، وذلك بخلط $\frac{1}{2}$ ٩ جرامات من العطر المركَّز ، و ٣٩,٨ جرامًا من الكحول الأبيض، و ٠,٤٥ جرام من الصندل للتثبيت.



أ) ما كمّية الجرامات التي استخدمها في صناعة العطر ؟

$9\frac{1}{2} + 39,8 + 0,45$

$= 9,500 + 39,800 + 0,450 = 49,750$ جرامًا

ب) إذا كان جاسم يريد عمل $\frac{3}{4}$ الكمّية ، فما الكمّية اللازمة من الجرامات التي يحتاج إليها ؟

$\frac{3}{4} \times 49,750 = \frac{3}{4} \times 49\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{199}{4} = \frac{597}{16} = 37\frac{5}{16}$ جرامًا

٧ خزّان ماء على شكل مكعّب ، حجمه ١٢٥ مترًا مكعّبًا . أوجِد طول حرفه .

الحجم $= (\text{طول الحرف})^3$ $\therefore$ طول الحرف $= \sqrt[3]{\text{الحجم}}$

$\therefore$ طول الحرف $= \sqrt[3]{125} = 5$ مترات .

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٤) ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $\frac{٧}{١٠}$ هو المعكوس الضربي للعدد $١\frac{٣}{٧}$	[أ]	[ب]
٢ $٠,٥ + (-٠,١٥) = ٠,٢$	[أ]	[ب]
٣ $٠,٦ = ٠,\overline{٦}$	[أ]	[ب]
٤ $\frac{-٧}{١٥} - (\frac{-٣}{١٥}) = \frac{-١٠}{١٥}$	[أ]	[ب]

في البنود (٥ - ١٠) لكلّ بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة :

٥ ناتج $\frac{٢}{٥} \times \frac{٥}{٧} \times \frac{٧}{٩}$ يساوي :

[أ] $\frac{٢}{٩}$ [ب] $\frac{٥}{٩}$ [ج] $\frac{٧}{٩}$ [د] $\frac{٥}{٧}$

٦ $\frac{١}{٢} \div \frac{١}{٤} =$

[أ] $\frac{١}{٨}$ [ب] ٢ [ج] ٨ [د] $\frac{١}{٢}$

٧ $\sqrt{٩٠٠} =$

[أ] ٣٠٠ [ب] ٣ [ج] ٣٠ [د] ٩٠

٨ $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}} =$

[أ] $\frac{١}{٨}$ [ب] $\frac{٣}{٢}$ [ج] $\frac{٣}{٨}$ [د] $\frac{٩}{٤}$

٩ العددان الصحيحان المتتاليان اللذان يقع بينهما $\sqrt{٧}$ هما :

أ ٦ ، ٨ ب ٣ ، ٤ ج ٢ ، ٣ د ١ ، ٢

١٠ الأعداد المرتَّبة ترتيبًا تصاعديًّا هي :

أ $-\frac{١}{٩}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، ٠ ، ٠,٧

ب $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٩}$ ، ٠ ، ٠,٧

ج ٠,٧ ، ٠ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٩}$

د ٠ ، ٠,٧ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٩}$

مهارات تفكير عليا :

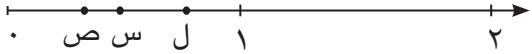
في البند (١١) أربعة اختيارات، واحد منها فقط صحيح، ظلِّل الإجابة الصحيحة.

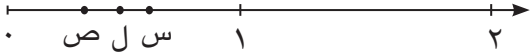


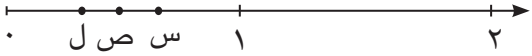
١١ ليكن س ، ص عددَين نسبيَّين على خطّ الأعداد الموضَّح أعلاه ، س × ص = ل .

أيّ ممّا يلي يمثّل موقع العدد ل على خطّ الأعداد ؟

أ


ب


ج


د


عندما يكون س ، ص عددين كسريين فإن حاصل ضربهما يكون أقل من أصغريهما .

مثال : س = $\frac{٢}{٣}$ ، ص = $\frac{١}{٢}$

∴ ل = ص × س = $\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$

$\frac{٢}{٣} > \frac{١}{٢} > \frac{١}{٣}$

المشروع الأوّل:
الرياضيات في حياتنا

يستخدم المتعلّمون مفهوم المجموعات لتصنيف الأعداد من واقع الحياة وفق صفات مشترَكة ، ويمثّلها بشكل رياضي صحيح.

متوسط أسعار الذهب في السوق الكويتي		
الوحدة	السعر بالدينار الكويتي	السعر بالدولار الأميركي
الذهب عيار ٢٤	١٢,٥٦	٤١,٢٥
الذهب عيار ٢٢	١١,٥١	٣٧,٨٢
الذهب عيار ٢١	١٠,٩٩	٣٦,١٠
الذهب عيار ١٨	٩,٤٢	٣٠,٩٤
الذهب عيار ١٤	٧,٣٣	٢٤,٠٦
الذهب عيار ١٢	٦,٢٨	٢٠,٦٣
أسعار أوقية الذهب	٣٩٠,٥٨	١٢٨٣
أسعار جنيه الذهب	٨٧,٩١	٢٨٨,٧٩
أسعار كيلو الذهب	١٢٥٥٩	٤١٢٥٤
متوسط أسعار الذهب في الكويت اليوم الإثنين الموافق ٢٩ أبريل ٢٠١٩		

خطّة العمل :

توظيف مفهوم المجموعات في تصنيف الأعداد في حياتنا اليومية.

خطوات تنفيذ المشروع :



- **جمع البيانات :** يقوم المتعلّمون بجمع مجموعة من الأعداد من واقع الحياة ، مثل أرقام لوحات السيّارات، درجات الاختبارات ، أو أسعار من السوق .



- **تصنيف الأعداد:** يصنّف المتعلّمون هذه الأعداد إلى مجموعات حسب خصائصها الرياضية ، مثلًا:
(عدد زوجي، عدد فردي ، عدد أوّلي ، وعدد يقبل القسمة على ٥) .
- **ربط النتائج:** يستخرج المتعلّمون مجموعتَي التقاطع والاتّحاد للبيانات .
- **تمثيل المجموعات:** يمثّل المتعلّمون هذه المجموعات في شكل ڤن .

علاقات وتواصل :

تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة التصنيف والتمثيل .

عرض العمل :

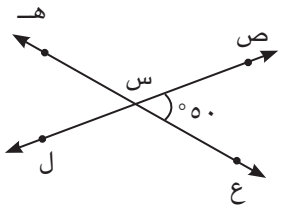
تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

هل أنت مستعدّ ؟

١ صِل كلّ عبارة في العمود (أ) بما يناسبها من العمود (ب) :

(أ)	(ب)
$٨^{٢}$	١٣
$١٥^{٢}$	٦٤
$\sqrt{١٢١}$	٢٢٥
$\sqrt{١٦٩}$	١١

٢ من الشكل المقابِل ، أكمِل كلًّا ممّا يلي :



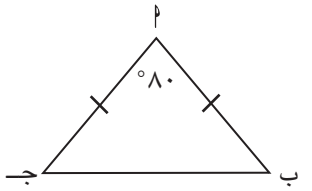
ق (هـ س̂ ل) = ... ٥٠°

السبب : ..... زاويتان متقابلتان بالرأس

٣ المثلّث أ ب جـ ، مثلّث متطابق الضلعَين ،

إذا كان ق (أ̂) = ٨٠° ،

فأوجِد قياس كلّ من : (ب̂) ، (جـ̂) مع ذكر السبب .



ق (أ̂) + ق (ب̂) + ق (جـ̂) = ١٨٠°

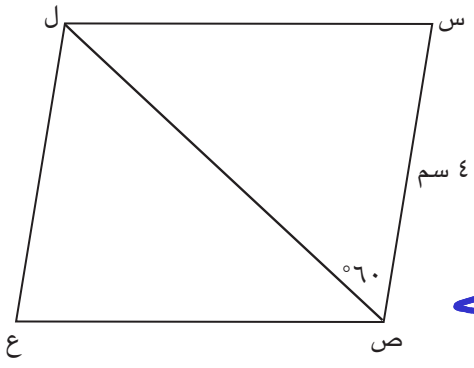
∴ ٢ ق (ب̂) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

ق (ب̂) = ق (جـ̂) = ٥٠° لأنه المثلث متطابق الضلعين

٤ س ص ع ل متوازي أضلاع ، إذا كان س ص = ٤ سم

ق (س ص̂ ل) = ٦٠° .

فأوجِد كلًّا ممّا يلي :



(أ) ق (ص ل̂ ع) = ... ٦٠°

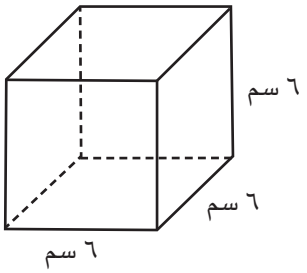
السبب : ..... بالتبادل

(ب) ل ع = ... ٤ سم

السبب : ..... كل ضلعين متقابلين في متوازي أضلاع متطابقان

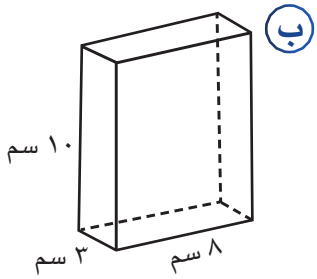
٥ أوجِد حجم المجسَّمات الآتية :

(أ)



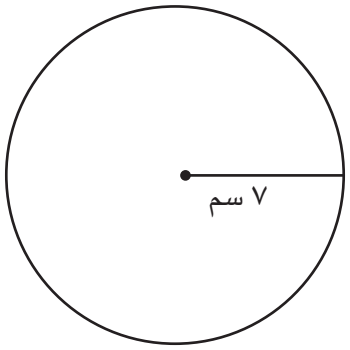
الحجم = ٦ × ٦ × ٦ = ٣٦ = ٢١٦ سم٣

(ب)



الحجم = ١٠ × ٨ × ٣ = ٢٤٠ سم٣

٦ أوجِد مساحة المنطقة الدائرية (اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) .



مساحة الدائرة = π نق٢

$= \frac{٢٢}{٧} \times ٧^{٢} = ٢٢ \times ٧ = ١٥٤$ سم٢

٧ أوجِد مساحة منطقة مستطيلة الشكل طولها ٥ م وعرضها ٢ م .

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$= ٥ \times ٢ = ١٠$ أمتار

هل أنتَ مستعدٌ ؟

٣ - ١ نظرية فيثاغورث وعكسها

Pythagorean Theorem and its Reciprocal

سوف تتعلّم : نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها ، عكس نظرية فيثاغورث .

العبارات والمفردات :

نظرية فيثاغورث	Pythagorean Theorem
عكس نظرية فيثاغورث	Reciprocal of Pythagorean Theorem

إستكشِف (١)

في الجدول الآتي ثلاثة مثلّثات قائمة الزاوية ، معلومة أطوال أضلاعها بوحدات الطول .

تمّ إنشاء مناطق مربّعة على كلّ ضلع من أضلاع المثلّث باستخدام الوحدات المربّعة .

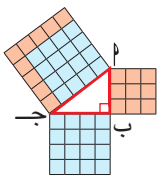
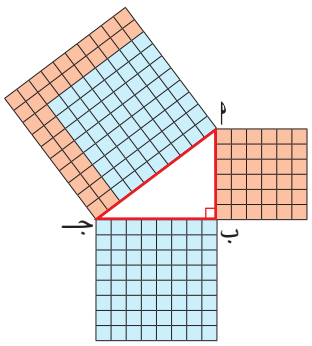


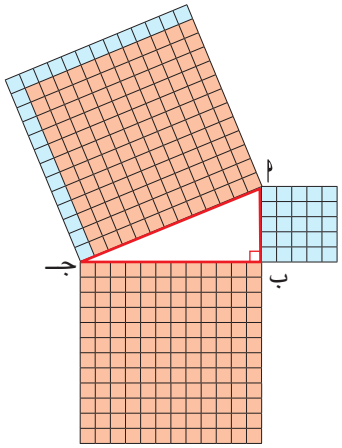
معلومة مفيدة :

يستخدم المهندسون المعماريون نظرية فيثاغورث في البناء والتصميم مثل تصميم الأسقف المائلة والسلالم .

- **قارِن مجموع مساحتَي المربّعَين المنشأَين على ضلعَي القائمة بمساحة المربّع المنشأ على الوتر . ماذا تلاحظ ؟** أ لاحظ أن مجموع مساحتي المربعين على ضلعي القائمة = مساحة المربع على الوتر

- **أكمِل الجدول الآتي :**

المثلّث	(أ ب)^{٢}	(ب جـ)^{٢}	(أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}	(أ جـ)^{٢}
	٣ × ٣ = ٩	٤ × ٤ = ١٦	٩ + ١٦ = ٢٥	٥ × ٥ = ٢٥
	٦ × ٦ = ٣٦	٨ × ٨ = ٦٤	٣٦ + ٦٤ = ١٠٠	١٠ × ١٠ = ١٠٠

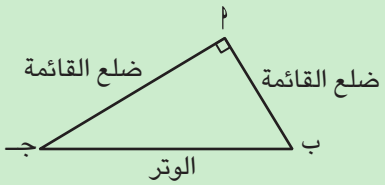
المثلّث	(أ ب)^{٢}	(ب جـ)^{٢}	(أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}	(أ جـ)^{٢}
	٥×٥ ٢٥ =	١٢×١٢ ١٤٤ =	١٦٩ = ١٤٤ + ٢٥	١٣×١٣ ١٦٩ =

• قارِن مجموع مربّعَي طولَي ضلعَي القائمة بمربّع طول الوتر . ماذا تلاحظ ؟ أ لاحظ أن

مجموع مساحتَي المربعين على ضلعَي القائمة = مساحة المربع على الوتر

نظرية فيثاغورث في المثلّث القائم الزاوية يكون مربّع طول الوتر مساوِيًا لمجموع مربّعَي طولَي الضلعَين الآخرَين .

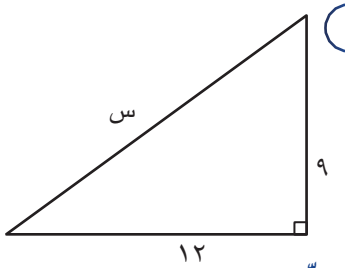
Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ⇐ (ب جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢}



مثال (١) :

أوجِد قيمة المجهول في كلّ ممّا يلي :

(أ)



الحلّ :

∵ المثلّث قائم الزاوية

∴ س^{٢} = (٩)^{٢} + (١٢)^{٢}

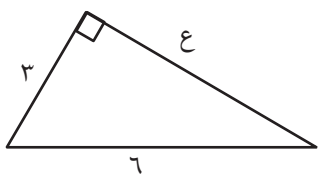
س^{٢} = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥

(بأخذ الجذر التربيعي للطرفَين)

س = $\sqrt{٢٢٥}$

س = ١٥ وحدة طول

(ب)



الحلّ :

∵ المثلّث قائم الزاوية

∴ (٦)^{٢} = (ع)^{٢} + (٣)^{٢}

٣٦ = (ع)^{٢} + ٩

(باستخدام العملية العكسية)

ع^{٢} = ٣٦ − ٩ = ٢٧

ع = $\sqrt{٢٧}$ وحدة طول

تذكّر

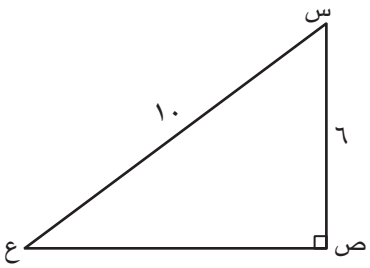
في المثلّثات قائمة الزاوية ضلعا القائمة هما الضلعان اللذان يشكّلان الزاوية القائمة ، والوتر هو أطول ضلع في المثلّث وهو الضلع المقابِل للزاوية القائمة .

اِنتبه

س^{٢} = ٢٢٥

∴ س = ١٥ أو س = −١٥ مرفوضة لأنّ الأطوال موجَبة .

مثال (٢) :



س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، وفيه :

س ص = ٦ وحدات طول ، س ع = ١٠ وحدات طول .

أوجِد ص ع .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، س ص = ٦ وحدات طول ، س ع = ١٠ وحدات طول

المطلوب : إيجاد ص ع .

البرهان : ∵ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص

∴ $(\text{س ع})^{٢} = (\text{س ص})^{٢} + (\text{ص ع})^{٢}$

$(١٠)^{٢} = (٦)^{٢} + (\text{ص ع})^{٢}$ (باستخدام العملية العكسية)

$(\text{ص ع})^{٢} = (١٠)^{٢} - (٦)^{٢}$

$(\text{ص ع})^{٢} = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفَين)

∴ ص ع = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ وحدات طول

دورك الآن (١)

إذا كانت المدينة (ب) تقع شرق المدينة (أ) بمسافة ١٥ كم ، وكانت المدينة (جـ) تقع شمال المدينة (أ) بحيث تبعد عن المدينة (ب) مسافة ٢٥ كم ، فأوجِد المسافة بين المدينَتين (أ) ، (جـ) .



المعطَيات : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، ب جـ = ٢٥ كم ، أ ب = ١٥ كم

المطلوب : إيجاد أ جـ

البرهان : ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ

∴ $(\text{ب جـ})^{٢} = (\text{أ جـ})^{٢} + (\text{أ ب})^{٢}$

$٦٢٥ = (\text{أ جـ})^{٢} + ٢٢٥$

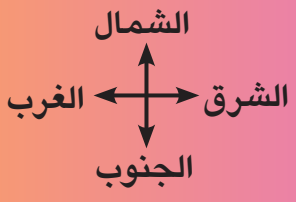
$(\text{أ جـ})^{٢} = ٦٢٥ - ٢٢٥ = ٤٠٠$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفَين)

∴ أ جـ = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠

∴ المسافة بين المدينتَين (أ) ، (جـ) هي ٢٠ كم

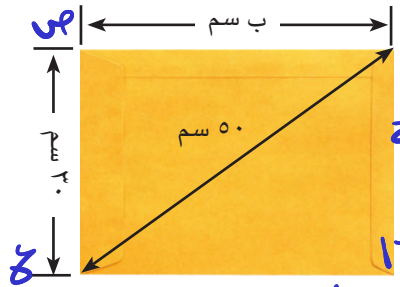
معلومة مفيدة :

الجهات الأصلية .



عبِّر عن فهمك

يُصنَّف المغلَّف أنّه كبير إذا تجاوز طوله ٣٥ سم ،
هل المغلَّف الموضَّح في الشكل المقابِل يُصنَّف على أنّه كبير ؟



∵ المغلف على شكل مستطيل ∴ ب = ص ع قائم الزاوية
∴ (س ع)² = (ص ع)² + (ص س)²
(٥٠)² = (٣٠)² + ب²
∴ ب² = ٢٥٠٠ − ٩٠٠ = ١٦٠٠
∴ ب = ٤٠ سم ∴ المغلف كبير لأنه طوله تجاوز ٣٥ سم

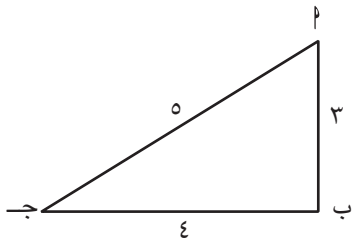
اللوازم
منقلة

لاحِظ أنّ :
في أيّ مثلّث تكون الزاوية الأكبر قياسًا هي المقابِلة للضلع الأطول .

اِستكشِف (٢)

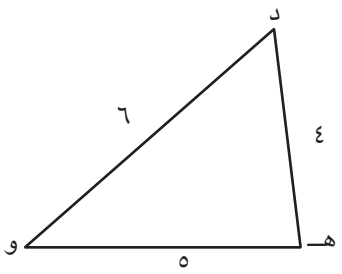
فيما يلي عدّة مثلّثات معلومة أطوال أضلاعها .

- **قارِن مربّع طول الضلع الأطول بمجموع مربّعَي طولَي الضلعَين الآخرَين في كلّ من المثلّثات الآتية .**
- **باستخدام المنقلة ، أوجِد قياس الزاوية المقابِلة لأكبر الأضلاع طولًا ، ثمّ قارِنها بقياس الزاوية القائمة .**



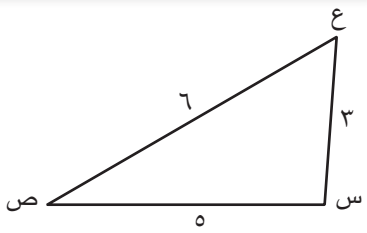
(أ جـ)² = ٢٥
(أ ب)² + (ب جـ)²
= ٩ + ١٦ = ٢٥
(أ جـ)² = (أ ب)² + (ب جـ)²
ق (∠ ب) = ٩٠°

ماذا تلاحظ ؟ مربع الوتر = مجموع مربعين ضلعي القائمة
يلون ∠ب = ٩٠°



(دو)² = ٣٦
(دهـ)² + (هـ و)²
= ١٦ + ٢٥ = ٤١
(د و)² > (د هـ)² + (هـ و)²
ق (∠ هـ) > ٩٠°

ماذا تلاحظ ؟ مربع الوتر < مجموع مربعين ضلعي القائمة
يلون ∠هـ > ٩٠°



(ع ص)² = ٣٦
(ع ص)² + (س ص)²
= ٩ + ٢٥ = ٣٤
(ع ص)² < (ع س)² + (س ص)²
ق (∠ س) < ٩٠°

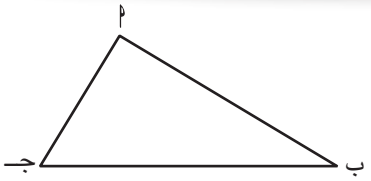
ماذا تلاحظ ؟ مربع الوتر < مجموع مربعين ضلعي القائمة
يلون ∠س < ٩٠°

ممّا سبق ، نصل إلى ما نسمّيه عكس نظرية فيثاغورث :

عكس نظرية فيثاغورث إذا كان مربّع طول الضلع الأطول في مثلّث مساوِيًا لمجموع مربّعَي طولَي الضلعَين الآخرَين ، فإنّ هذا المثلّث قائم الزاوية وتكون الزاوية القائمة هي المقابِلة للضلع الأطول .

بالرموز :

إذا كان (ب جـ)² = (أ جـ)² + (أ ب)² ، فإنّ :
Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ .



من خلال « اِستكشِف (٢) » :

ملاحظة :

لأيّ مثلث أ ب جـ حيث $\overline{أجـ}$ الضلع الأكبر طولًا يكون :

- $(أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} \iff \Delta$ أ ب جـ قائم الزاوية في ب .
- $(أجـ)^{٢} > (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} \iff \Delta$ أ ب جـ حادّ الزوايا .
- $(أجـ)^{٢} < (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} \iff \Delta$ أ ب جـ منفرج الزاوية في ب .

مثال (٣) :

في الحالات الآتية ، حدِّد نوع المثلّث بالنسبة إلى زواياه :

(أ) ٥ وحدات طول ، ١٢ وحدة طول ، ١٣ وحدة طول

الحلّ :

$(١٣)^{٢} = ١٦٩$

$(٥)^{٢} + (١٢)^{٢}$

$= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$

$\because (١٣)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢}$

$\therefore$ المثلّث قائم الزاوية

(ب) ٥ وحدات طول ، ٥ وحدات طول ، ٧ وحدات طول

الحلّ :

$(٧)^{٢} = ٤٩$

$(٥)^{٢} + (٥)^{٢}$

$= ٢٥ + ٢٥ = ٥٠$

$\because (٧)^{٢} > (٥)^{٢} + (٥)^{٢}$

$\therefore$ المثلّث حادّ الزوايا

(ج) ٥ وحدات طول ، ٧ وحدات طول ، ٩ وحدات طول

الحلّ :

$(٩)^{٢} = ٨١$

$(٥)^{٢} + (٧)^{٢}$

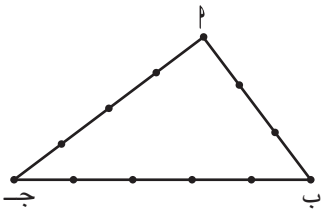
$= ٢٥ + ٤٩ = ٧٤$

$\because (٩)^{٢} > (٥)^{٢} + (٧)^{٢}$

$\therefore$ المثلّث منفرج الزاوية

دورك الآن (٢)

اِستخدم المصريون القدامى أحبالًا ذات عقد تكوّن مثلّثًا تبلغ أطوال أضلاعه بوحدات الطول ٣ ، ٤ ، ٥ على التوالي ، لمساعدتهم على تشكيل الزوايا القائمة في أثناء بناء الأهرامات . وضِّح كيف يعمل هذا النظام .



مربّع طول الضلع الأطول $(ب جـ)^{٢} = (\ldots ٥ \ldots)^{٢} = \ldots ٢٥ \ldots$

مجموع مربّعَي طولَي الضلعَين الآخرَين :

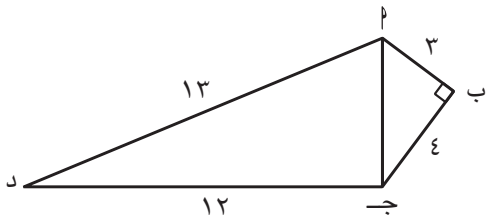
$(\ldots أ ب \ldots)^{٢} + (\ldots أ ح \ldots)^{٢} = \ldots ٩ \ldots + \ldots ١٦ \ldots = \ldots ٢٥ \ldots$

نلاحظ أنّ : $(ب جـ)^{٢} = (\ldots أ ب \ldots)^{٢} + (\ldots أ ح \ldots)^{٢}$

$\therefore$ النظام يكوّن مثلّثًا ..... قائمًا .....



مثال (٤) :



في الشكل المقابِل : ق ($\overset{\wedge}{ب}$) = ٩٠° ،

أ ب = ٣ وحدات طول ، ب جـ = ٤ وحدات طول ،

جـ د = ١٢ وحدة طول ، أ د = ١٣ وحدة طول .

أوجِد طول $\overline{أ جـ}$ ، ثمّ أثبِت أنّ Δ أ جـ د قائم الزاوية .

الحلّ :

المعطَيات : ق ($\overset{\wedge}{ب}$) = ٩٠° ، أ ب = ٣ وحدات طول ،

ب جـ = ٤ وحدات طول ،

جـ د = ١٢ وحدة طول ، أ د = ١٣ وحدة طول .

المطلوب : (١) إيجاد طول $\overline{أ جـ}$.

(٢) إثبات أنّ Δ أ جـ د قائم الزاوية .

البرهان : ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ جـ)^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفَين)

∴ أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول

في Δ أ جـ د : (أ د)^{٢} = (١٣)^{٢} = ١٦٩

، (جـ د)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢}

= ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩

∵ (١٣)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢}

∴ (أ د)^{٢} = (جـ د)^{٢} + (أ جـ)^{٢}

∴ مربّع طول الضلع الأطول يساوي مجموع مربّعَي طولَي الضلعَين الآخرَين .

∴ المثلّث أ جـ د قائم الزاوية في جـ .

انتبِه

- مربّع العدد هو حاصل ضرب العدد في نفسه .
- الجذر التربيعي للعدد الموجَب أ هو العدد الذي مربّعه يساوي أ .

لاحِظ أنّ :

الرمز ∴ يُقرأ إذًا

الرمز ∵ يُقرأ بما أنّ

دورك الآن (٣)

سلّم طوله ٥ أمتار يرتكز على حائط رأسي ، بحيث تبعد قمّته عن سطح الأرض بمقدار ٤ أمتار ، وتبعد قاعدة السلّم عن الحائط ٣ أمتار .



أثبِت أنّ Δ ا ب جـ قائم الزاوية .

المعطَيات : ا م = ٥ م ، ا ب = ٤ م ، ب م = ٣ م

المطلوب : إثبات أن Δ ا ب م قائم الزاوية

البرهان : باستخدام عكس نظرية فيثاغورث

(ا م)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥

(ا ب)^{٢} + (ب م)^{٢} = (٤)^{٢} + (٣)^{٢} = ٢٥

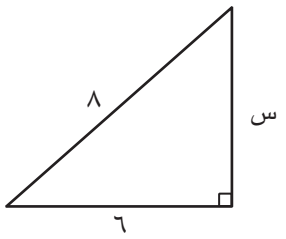
∵ (٥)^{٢} = (٤)^{٢} + (٣)^{٢}

∴ Δ ا ب جـ قائم الزاوية .

تمارين ذاتية :

١ أوجِد قيمة المجهول في كلّ ممّا يلي :

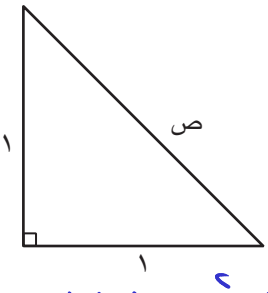
(أ)



س^{٢} + ٦^{٢} = ٨^{٢} ، س^{٢} = ٦٤ − ٣٦

∴ س^{٢} = ٢٨ ، ∴ س = $\sqrt{٢٨}$ = ٢$\sqrt{٧}$

(ب)

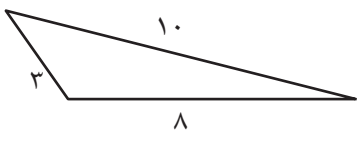


ص^{٢} = ١ + ١ = ٢

ص = $\sqrt{٢}$

٢ في كلّ ممّا يلي ، حدِّد نوع المثلّث بالنسبة إلى زواياه :

(أ)

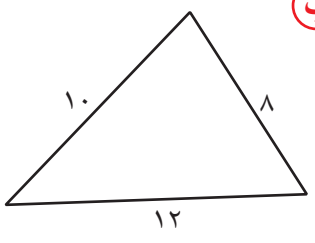


١٠^{٢} = ٨^{٢} + ٦^{٢} = ٦٤ + ٩ = ٧٣

∴ ١٠^{٢} > ٨^{٢} + ٣^{٢}

∴ المثلث منفرج الزاوية

(ب)

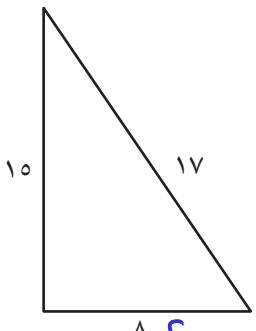


١٢^{٢} = ١٤٤ ، ١٠^{٢} + ٨^{٢} = ١٠٠ + ٦٤ = ١٦٤

∴ ١٢^{٢} < ١٠^{٢} + ٨^{٢}

∴ المثلث حاد الزاوية

(ج)



١٧^{٢} = ٢٨٩

١٥^{٢} + ٨^{٢} = ٢٢٥ + ٦٤ = ٢٨٩

∴ ١٧^{٢} = ١٥^{٢} + ٨^{٢}

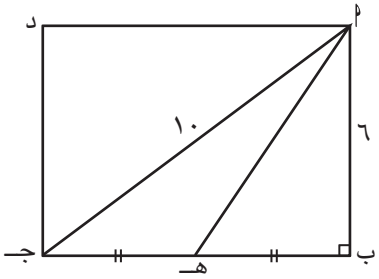
∴ المثلث قائم الزاوية

٣ أ ب جـ د مستطيل فيه :

أ جـ = ١٠ وحدات طول ، أ ب = ٦ وحدات طول ،

هـ منتصف ب جـ . أوجِد بالبرهان طول كلّ من :

ب جـ ، ب هـ ، أ هـ .



∵ أ ب د مستطيل ∴ م(∠ب) قائمة = ٩٠°

∴ Δ أ ب د قائم الزاوية ∴ (أ جـ)² = (أ ب)² + (ب د)²

∴ (ب د)² = (أ جـ)² − (أ ب)² = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤ ، ∴ ب د = ٨ وحدات

∵ هـ منتصف ب د ∴ ب هـ = ٨ ÷ ٢ = ٤ وحدات طول

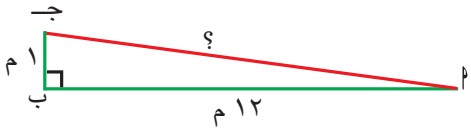
∵ Δ أ ب هـ قائم الزاوية ∴ (أ هـ)² = (أ ب)² + (ب هـ)² = ٣٦ + ١٦ = ٥٢

∴ أ هـ = $\sqrt{٥٢}$

١٣٧ =

٤ تحرص جميع مؤسسات الدولة إلى توفير مسار آمن ومناسب لذوي الهمم وفق معايير الأمن والسلامة العالمية . ما طول مسار الكرسيّ المتحرّك الموضَّح في الشكل المقابِل بالأمتار ؟



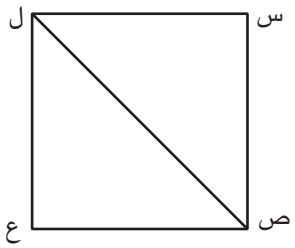


(أ جـ)² = (أ ب)² + (ب د)²

(أ جـ)² = ١٤٤ + ١ = ١٤٥

∴ أ جـ = $\sqrt{١٤٥}$ م

٥ تبلغ مساحة فناء مربّع الشكل ٨١ وحدة مربّعة ، ويتضمّن ممرًّا قطريًّا .



(أ) أوجِد طول ضلع الفناء .

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

∴ ٨١ = (طول الضلع)²

∴ طول الضلع = $\sqrt{٨١}$ = ٩ وحدات

(ب) أوجِد طول الممرّ القطري .

(ل م)² = ٩² + ٩² = ٨١ + ٨١ = ١٦٢

∴ ل م = $\sqrt{١٦٢}$ = ٩ $\sqrt{٢}$ وحدة .

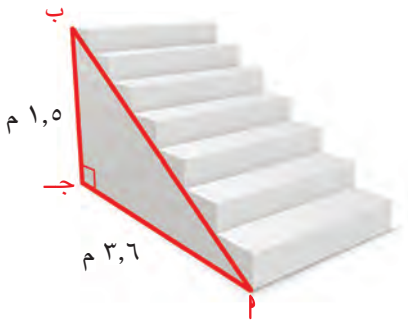
مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة :

٦ تحدّد كلّ مجموعة من الأعداد الآتية أطوال أضلاع مثلّث .
حدِّد المجموعة التي لا تناسب المجموعات الأخرى .

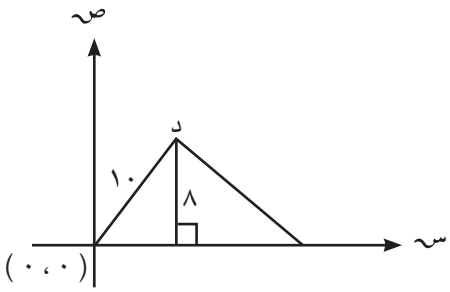
أ) ٣ ، ٤ ، ٥
ب) ٣ ، ٥ ، ٧
ج) ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥
د) ٦ ، ٨ ، ١٠

٧ إذا كان ارتفاع سلّم منزل هو ١,٥ م ، وقاعدته ٣,٦ م كما هو موضَّح في الشكل ، فما البعد بين النقطتَين : أ ، ب ؟



أ) ٣,٩ م
ب) ٣,٣ م
ج) ٣ م
د) ٥ م

٨ إحداثيّا النقطة د هما :



أ) (٨ ، ٦)
ب) (٦ ، ٨)
ج) (٨ ، ١٠)
د) (١٠ ، ٨)

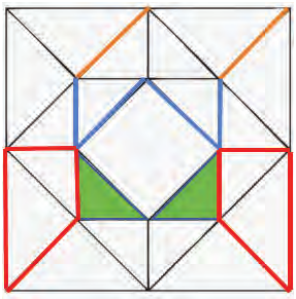
٣ - ٢ التطابق Congruency

سوف تتعلّم : تطابق (قطعتَين مستقيمتَين – زاويتَين – مضلّعَين – مثلّثَين) .

العبارات والمفردات :

التطابق	Congruency	رمز التطابق ≅	Congruency sign ≅

إستكشِف

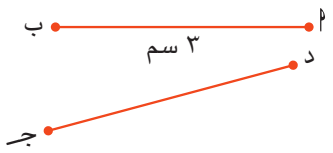


تدرس نوف الفنّ التجريدي متخصّصة بالتجريد الهندسي ، وباعتبار أنّ جزءًا من مشروعها هو تصميم لوحة ذات أشكال متطابقة فقد استخدمت الأدوات الهندسية لتصميم هذه اللوحة . إحتاجت نوف إلى رسم قطع مستقيمة متطابقة وزوايا متطابقة وأشكال هندسية متطابقة . بالاستعانة بالورق الشفّاف ، ساعِد نوف على التحقّق ممّا يلي :

اللوازم

ورق شفّاف – أدوات هندسية

- تطابق القطعتَين المستقيمتَين الموضَّحتَين في الشكل المقابِل (اللون البرتقالي)

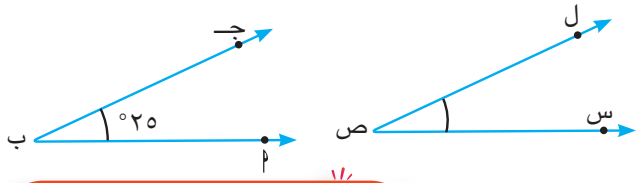


حاوِل مطابقة $\overline{أب}$ على $\overline{جـ د}$ بحيث النقطة أ تنطبق على ..... ،

والنقطة ب تنطبق على ..... إذًا $\overline{أب}$ تطابق ..... .

وتُكتب ..... ≅ .....

- تطابق الزاويتَين الموضَّحتَين في الشكل المقابِل (اللون الأزرق)



حاوِل مطابقة $\angle أ ب جـ$ مع $\angle س ص ل$ بحيث :

تنطبق النقطة ب على النقطة .....

وينطبق $\overrightarrow{ب أ}$ على ..... فإنّ $\overrightarrow{ب جـ}$ ينطبق على .....

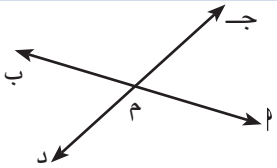
إذًا $\angle أ ب جـ$ تطابق ..... وتكتب ..... ≅ .....

لاحِظ أنّ :

- $\overline{أب}$ ≅ $\overline{جـ د}$ تعني أب = جـ د .
- $\angle أ$ ≅ $\angle ب$ تعني ق ($\angle أ$) = ق ($\angle ب$) .

عبِّر عن فهمك

من الشكل المقابل ، أوجِد زاويتَين متطابقتَين ،
ووضِّح سبب التطابق .

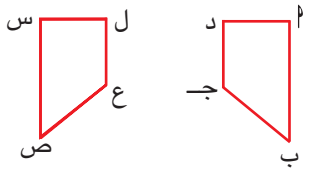


$\hat{أ}م\hat{ب} \cong \hat{جـ}م\hat{د}$

زاويتان متقابلتان بالرأس

من خلال « إستكشِف السابق » :

إستعِن بالورق الشفّاف للتحقّق من تطابق المضلّعَين أ ب جـ د ، س ص ع ل ، وكذلك من تطابق المثلّثَين ك ل م ، حـ ي ط ،
ثمّ أكمِل كلًّا ممّا يلي :



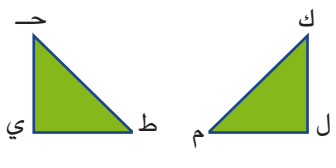
$\overline{أب} \cong \overline{سل}$ ، $\hat{أ} \cong \hat{س}$

$\overline{ب جـ} \cong \overline{لع}$ ، $\hat{ب} \cong \hat{ل}$

$\overline{جـ د} \cong \overline{ع ص}$ ، $\hat{جـ} \cong \hat{ع}$

$\overline{د أ} \cong \overline{ص س}$ ، $\hat{د} \cong \hat{ص}$

إذًا المضلّع أ ب جـ د $\sim$ المضلّع س ص ع ل



$\overline{ك ل} \cong \overline{حـ ي}$ ، $\hat{ك} \cong \hat{حـ}$

$\overline{ل م} \cong \overline{ي ط}$ ، $\hat{ل} \cong \hat{ي}$

$\overline{م ك} \cong \overline{ط حـ}$ ، $\hat{م} \cong \hat{ط}$

إذًا Δ ك ل م $\sim$ Δ حـ ي ط

تذكَّر

نراعي ترتيب الرموز عند كتابة عبارة التطابق .

عمومًا يتطابق مضلّعان **إذا و فقط إذا كان :**

- أضلاعهما المتناظرة متطابقة .
- زواياهما المتناظرة متطابقة .

تذكَّر

للمثلّث ستّة عناصر :
ثلاثة أضلاع ، ثلاث زوايا .

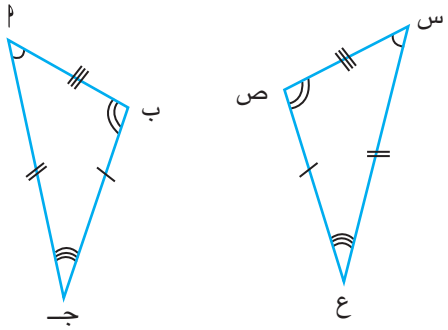
وبما أنّ المثلّثات حالة خاصّة من المضلّعات لذلك :

إذا تطابق مثلّثان ، فإنّ :

- أضلاعهما المتناظرة متطابقة .
- زواياهما المتناظرة متطابقة .

تُكتب عبارة التطابق بحيث تظهر الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه ، ففي الرسم أدناه نكتب :

Δ أ ب جـ $\cong$ Δ س ص ع .



Δ أ ب جـ $\cong$ Δ س ص ع

الرأس أ يناظر الرأس س
الرأس ب يناظر الرأس ص
الرأس جـ يناظر الرأس ع

دورك الآن

في الشكل المقابِل Δ أ ب جـ $\cong$ Δ د هـ و .

أكمِل ما يلي حسب المعطَيات بالرسم :

أ) أ $\cong$ د

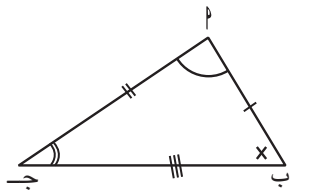
ب) جـ $\cong$ و

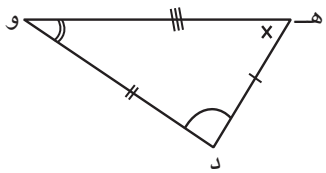
ج) هـ $\cong$ ب

د) $\overline{\text{ب جـ}}$ $\cong$ $\overline{\text{هـ و}}$

هـ) $\overline{\text{أ ب}}$ $\cong$ $\overline{\text{د هـ}}$

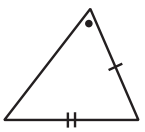
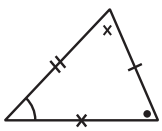
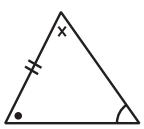
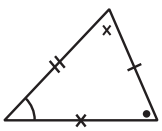
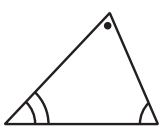
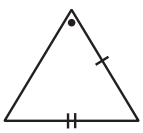
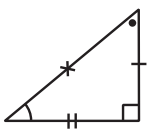
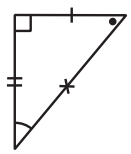
و) $\overline{\text{أ جـ}}$ $\cong$ $\overline{\text{د و}}$





تمارين ذاتية :

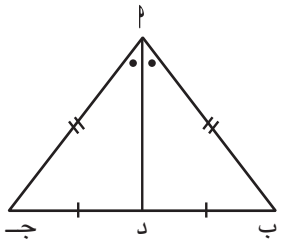
١ في الجدول التالي ، حدِّد المثلّثَين المتطابقَين :

المثلّث / المجموعة	الأوّل	الثاني	الثالث	الرابع	المثلّثان المتطابقان
١					الثاني والرابع
٢					الثالث والرابع

٢ إذا كان Δ أ ب جـ ≅ Δ س ص ع ، فحدِّد العناصر المتطابقة فيهما .

∠أ ≅ ∠س	$\overline{أب} \cong \overline{سص}$
∠ب ≅ ∠ص	$\overline{بجـ} \cong \overline{صع}$
∠جـ ≅ ∠ع	$\overline{أجـ} \cong \overline{سع}$

٣ في الشكل المقابِل : Δ أ ب جـ وبحسب المعطَيات على الرسم ، أكمِل ما يلي :



(أ) $\overline{أب}$ ≅ $\overline{أص}$

(ب) $\overline{بد}$ ≅ $\overline{جـ د}$

(ج) $\overline{أد}$ (ضلع مشترَك)

(د) ∠ب أ د ≅ ∠ص أ د

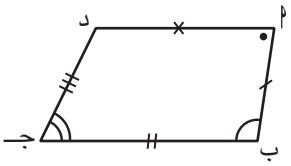
(هـ) ∠ب ≅ ∠ص

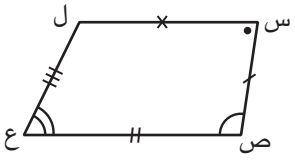
(و) ∠أ د ب ≅ ∠أ د ص

السبب : $\overline{أد}$ ينصف قاعدة $\overline{بص}$ المثلث المتطابق الضلعين

(ز) Δ أ د ب ≅ Δ أ د ص

٤ من الشكلَين أ ب جـ د ، س ص ع ل ، أكمِل ما يلي حسب المعطَيات على الرسم :





(أ) ∠أ ≅ ∠س

(ب) ∠ب ≅ ∠ص

(ج) ∠د ≅ ∠ل

(د) ∠جـ ≅ ∠ع

(هـ) $\overline{أب}$ ≅ $\overline{سص}$

(و) $\overline{جـد}$ ≅ $\overline{ع ل}$

(ز) $\overline{د أ}$ ≅ $\overline{ل س}$

(ح) $\overline{بأ}$ ≅ $\overline{صس}$ أو $\overline{سص}$

(ط) المضلع أ د ص ب ≅ المضلع س ع ل ص

٣ - ٣ تطابق مثلّثَين بثلاثة أضلاع
Congruent Triangles with SSS

سوف تتعلّم : تطابق مثلّثَين بثلاثة أضلاع .

العبارات والمفردات :

ضلع (ض)	Side (S)	تطابق مثلّثَين بثلاثة أضلاع	Congruent Triangles with Three Side
زاوية (ز)	Angle (A)		



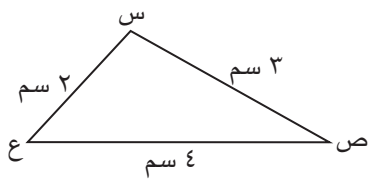
تمّ تصميم مطعم أبراج الكويت من الداخل بأشكال هندسية مبتكرة تعتمد على تكرار المثّلثات المتطابقة ، مما يُضفي طابعًا عصريًّا ومتناسقًا يعكس دقّة وجمال الهندسة المعمارية الحديثة .

اِستكشِف

١ باستخدام ورق شفّاف ، أُرسم المثلّث ا ب جـ الذي فيه :

ا ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، ا جـ = ٢ سم .

٢ طابِق بين المثلّث الذي رسمته والمثلّث س ص ع الموضَّح في الشكل أدناه .



اللوازم

ورق شفّاف - أدوات هندسية

يتطابق المثلّثان إذا تطابق كلّ ضلع في أحدهما مع نظيره في المثلّث الآخر .

يُعبَّر عن ذلك (ضلع ، ضلع ، ضلع) ويُرمز إليها (ض . ض . ض)

معلومة مفيدة :

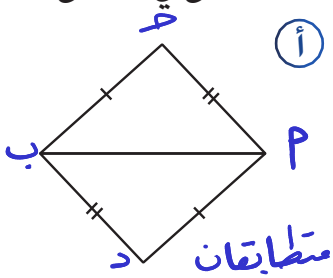


إنّ هذا النمط الهندسي لا يُستخدم فقط لأغراض جمالية ، بل يحقّق أيضًا توزيعًا متوازنًا للإضاءة والصوت داخل الفراغ ، ويمنح الهيكل الداخلي صلابة إنشائية عالية ، ممّا يعكس التقاء الفنّ بالوظيفة في العمارة الحديثة .

دورك الآن

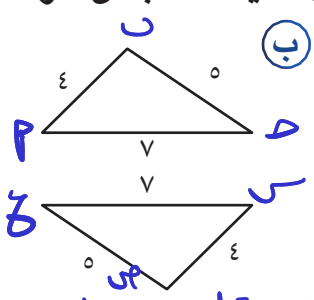
هل المثلّثان في كلّ من الأشكال الآتية متطابقان ؟ ولماذا ؟

(أ)



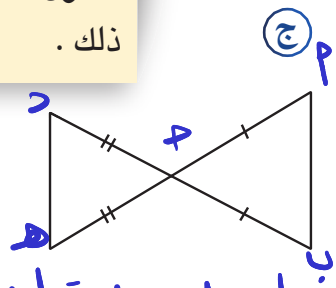
نعم متطابقان
لأنه : م ب ضلع مشترك
م ب ≅ م د
ب ح ≅ د ح
م ح ≅ م ح

(ب)



نعم متطابقان لأنه
م ب ≅ ص س
ب ح ≅ س ع
م ح ≅ ص ع

(ج)



لا، ليسا متطابقين

اِنتبِه

اِعتبِر أنّ الأضلاع لها وحدة الطول نفسها ما لم يُذكر غير ذلك .

مثال (١) :

يُعتبر جسر (ميلو) في فرنسا أطول جسر معلَّق في العالم ، وهو تحفة هندسية حيث يعتمد تصميمه على المثلّثات المتطابقة . إذا عُلم أنّ :

$\overline{ع\,ن} \cong \overline{هـ\,ن}$ ، $\overline{ع\,و} \cong \overline{هـ\,و}$ ، $ق(\hat{ع}) = ٦٥°$

فأثبِت أنّ : $\Delta\, ع\,ن\,و \cong \Delta\, هـ\,ن\,و$ ، ثمّ أوجِد $ق(\hat{هـ})$



الحلّ :

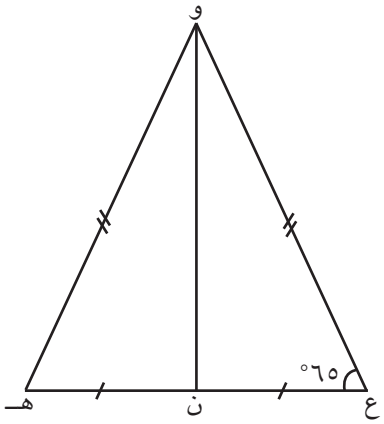
المعطَيات :

$\overline{ع\,ن} \cong \overline{هـ\,ن}$ ، $\overline{ع\,و} \cong \overline{هـ\,و}$ ، $ق(\hat{ع}) = ٦٥°$

المطلوب :

(١) إثبات أنّ : $\Delta\, ع\,ن\,و \cong \Delta\, هـ\,ن\,و$

(٢) إيجاد $ق(\hat{هـ})$



البرهان :

$\Delta\, ع\,ن\,و$ ، $\Delta\, هـ\,ن\,و$ فيهما :

(١) $\overline{ع\,ن} \cong \overline{هـ\,ن}$ (معطى)

(٢) $\overline{ع\,و} \cong \overline{هـ\,و}$ (معطى)

(٣) $\overline{ن\,و}$ ضلع مشترَك

∴ $\Delta\, ع\,ن\,و \cong \Delta\, هـ\,ن\,و$ (ض . ض . ض)

وينتج من التطابق أنّ $\hat{هـ} \cong \hat{ع}$

∴ $ق(\hat{هـ}) = ٦٥°$

لاحِظ أنّ :

$\overline{ن\,و}$ ضلع مشترَك

تعني : $\overline{ن\,و} \cong \overline{ن\,و}$

ملاحظة :

عند إثبات تطابق مثلّثَين نحتاج إلى إثبات تطابق ثلاثة عناصر مثل (ض . ض . ض) ، ونستنتج بعد ذلك تطابق العناصر الثلاثة الباقية (الزوايا الثلاث) .

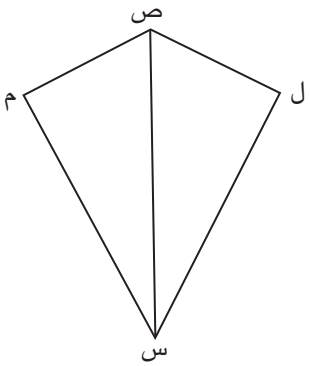
مثال (٢) :



خلال الاحتفال بالأعياد الوطنية لدولة الكويت ، يُطلق فريق الكويت للطائرات الورقية عددًا من الطائرات بألوان علم البلاد . يوضّح الشكل المقابِل شكل إحدى الطائرات الورقية .

إذا عُلم أنّ : $\overline{ص م} \cong \overline{ص ل}$ ، $\overline{م س} \cong \overline{ل س}$

فأثبِت أنّ :



(١) Δ ص م س $\cong$ Δ ص ل س

(٢) $\overleftarrow{ص س}$ ينصّف (ل $\hat{ص}$ م)

الحلّ :

المعطَيات :

(١) $\overline{ص م} \cong \overline{ص ل}$

(٢) $\overline{م س} \cong \overline{ل س}$

المطلوب :

إثبات أنّ :

(١) Δ ص م س $\cong$ Δ ص ل س

(٢) $\overleftarrow{ص س}$ منصِّف (ل $\hat{ص}$ م)

البرهان :

Δ ص م س ، Δ ص ل س فيهما :

(١) $\overline{ص م} \cong \overline{ص ل}$ (معطى)

(٢) $\overline{م س} \cong \overline{ل س}$ (معطى)

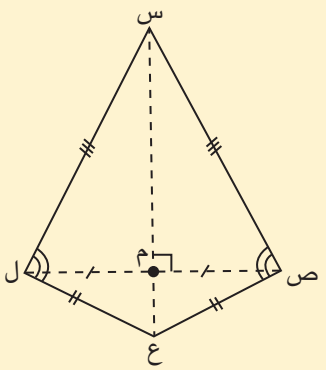
(٣) $\overline{ص س}$ ضلع مشترَك

∴ Δ ص م س $\cong$ Δ ص ل س (ض . ض . ض)

وينتج من التطابق أنّ ق (م $\hat{ص}$ س) = ق (ل $\hat{ص}$ س)

∴ $\overleftarrow{ص س}$ ينصّف (ل $\hat{ص}$ م)

لاحِظ أنّ :



(طائرة ورقية)

تذكَّر

منصِّف الزاوية يقسم الزاوية إلى زاويتَين متساويتَين بالقياس (متطابقتَين) .

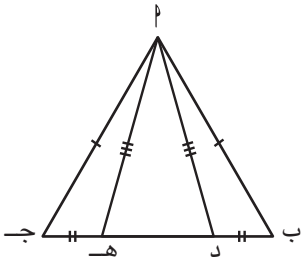
عبِّر عن فهمك

هل كلّ المثلّثات المتطابقة الأضلاع متطابقة ؟ فسِّر ذلك .

نعم لأنه معنى المثلث المتطابق أنه يكون متطابق فى أضلاعه وزواياه

تمارين ذاتية :

١ في الشكل المقابِل :



$\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ، $\overline{أد} \cong \overline{أهـ}$ ، $\overline{بد} \cong \overline{جـهـ}$

أثبِت أنّ :

(١) $\Delta أبد \cong \Delta أجـهـ$

(٢) $\angle بأد \cong \angle جـأهـ$

(١) ∵ $\overline{أد} \cong \overline{أهـ}$ ، $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ، $\overline{بد} \cong \overline{جـهـ}$

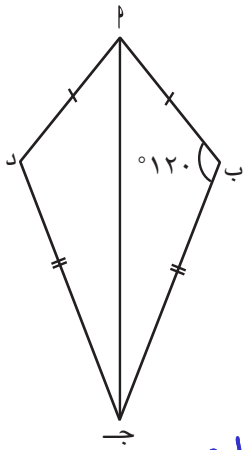
∴ $\Delta أبد \cong \Delta أجـهـ$ (ض . ض . ض)

(٢) ∵ $\Delta أبد \cong \Delta أجـهـ$

∴ $\angle بأد \cong \angle جـأهـ$

٢ الشكل المقابِل أ ب جـ د شكل رباعي فيه

أ ب = أ د ، ب جـ = د جـ ، ق ($\angle أبجـ$) = ١٢٠°



أثبِت أنّ :

(١) $\Delta أبجـ \cong \Delta أدجـ$

(٢) ق ($\angle أدجـ$) = ١٢٠°

(٣) $\overline{أجـ}$ منصِّف ($\angle بأد$)

(١) ∵ $\overline{أب} \cong \overline{أد}$ ، $\overline{بجـ} \cong \overline{دجـ}$ ، $\overline{أجـ}$ ضلع مشترك

∴ $\Delta أبجـ \cong \Delta أدجـ$ (ض . ض . ض)

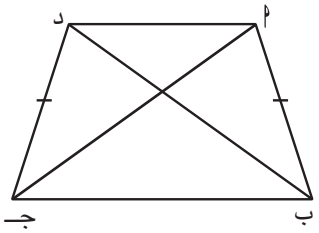
(٢) ∵ $\Delta أبجـ \cong \Delta أدجـ$

∴ ق ($\angle أدجـ$) ≅ ق ($\angle أبجـ$) = ١٢٠°

ويُنتج من التطابق أن ق ($\angle بأجـ$) ≅ ق ($\angle دأجـ$)

∴ $\overline{أجـ}$ منصف ($\angle بأد$)

٣ أ ب جـ د شبه منحرِف متطابق الضلعَين .



أثبِت أنّ : Δ أ ب جـ ≅ Δ د جـ ب .

(علمًا بأنّ قطرَي شبه المنحرِف المتطابق الضلعَين متطابقان) .

∴ $\overline{أب} \cong \overline{دجـ}$

$\overline{بجـ}$ ضلع مشترك

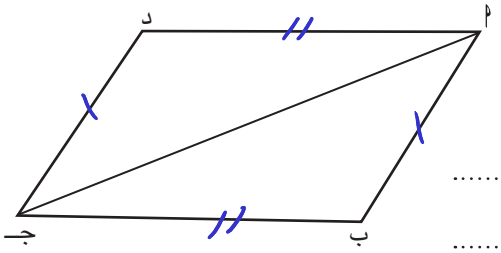
$\overline{أجـ} \cong \overline{دب}$ (ض . ض . ض)

∴ Δ أ ب جـ ≅ Δ د جـ ب

تذكَّر

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .

٤ متوازي أضلاع أ ب جـ د ، $\overline{أجـ}$ قطر فيه .



أثبِت أنّ : Δ أ ب جـ ≅ Δ جـ د أ .

∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع

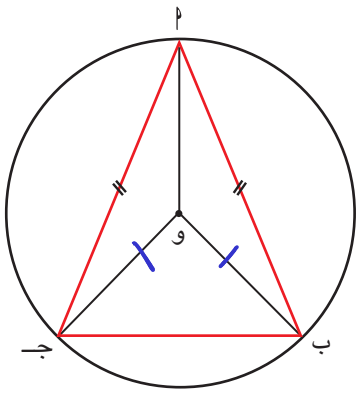
∴ $\overline{أب} \cong \overline{دجـ}$ ، $\overline{أد} \cong \overline{بجـ}$ ، $\overline{أجـ}$ ضلع مشترك

∴ Δ أ ب جـ ≅ Δ جـ د أ (ض . ض . ض)

مهارات تفكير عليا :

٥ في الشكل المقابل ، دائرة مركزها و ،

$\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$.



أثبِت أنّ : Δ أ ب و ≅ Δ أ جـ و .

∴ $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$

∴ $\overline{بو} \cong \overline{جو}$ (نصفا قطر الدائرة)

∴ $\overline{أو}$ ضلع مشترك . (ض . ض . ض)

∴ Δ أ ب و ≅ Δ أ جـ و

تذكَّر

أنصاف أقطار الدائرة متطابقة .

٣ - ٤ تطابق مثلّثَين بضلعَين والزاوية المحدَّدة بهما
Congruent Triangles with SAS

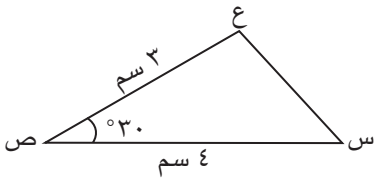
سوف تتعلّم : تطابق مثلّثَين بضلعَين والزاوية المحدَّدة بهما .



تُستخدم المثلّثات المتطابقة في تصميم الكثير من المباني لتحقيق تناظر بصري وجاذبية في التصميم ، سواء في النوافذ ، الواجهات ، أو في الأبنية ذات الأسقف المرتفعة .

اِستكشِف

١ باستخدام ورق شفّاف ، أُرسم المثلّث أ ب جـ الذي فيه :
أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم ، ق ($\hat{ب}$) = ٣٠° .



اللوازم
ورق شفّاف - أدوات هندسية

٢ طابِق بين المثلّث الذي رسمته والمثلّث س ص ع الموضَّح في الشكل أمامك .

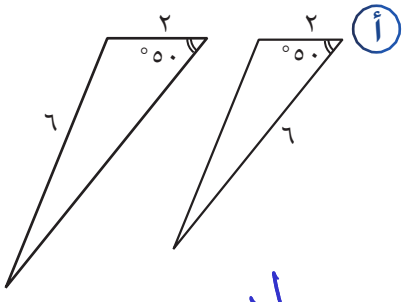
يتطابق المثلّثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحدَّدة بهما في أحد المثلّثَين مع نظائرها في المثلّث الآخر . يُعبَّر عن ذلك (ضلع ، زاوية ، ضلع) ويُرمز إليها (ض . ز . ض) .



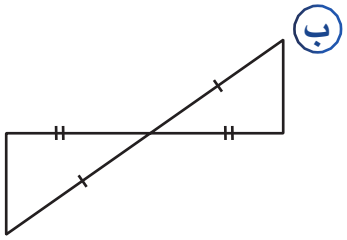
معلومة مفيدة :
يستخدم النجّارون الكثير من المثلّثات المتطابقة في تنفيذ الديكور .

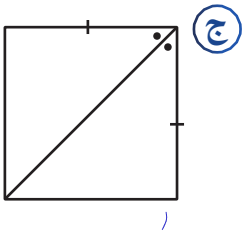
دورك الآن (١)

هل المثلّثان في الأشكال الآتية متطابقان ؟

أ)


لا

ب)

نعم

ج)

نعم

مثال (١) :



تمثّل الصورة أحد الأكواخ الجميلة في إحدى المناطق الريفية في قارّة أوروبّا ، وتحتوي الواجهة الأمامية لهذا الكوخ على المثلّثَين الموضَّحَين في الرسم .
إذا كان $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ منصِّف زاوية الرأس (ب $\hat{أ}$ جـ) ،
فأثبِت أنّ المثلّثَين ب أ و ، جـ أ و متطابقان .

الحلّ :

المعطَيات :

(١) $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ،

(٢) $\overleftarrow{أو}$ منصِّف (ب $\hat{أ}$ جـ)

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ ب أ و $\cong \Delta$ جـ أ و

البرهان :

Δ ب أ و ، Δ جـ أ و فيهما :

(١) $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ (معطى)

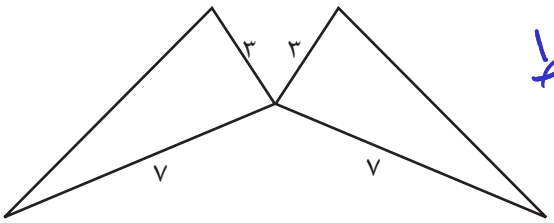
(٢) ق (ب $\hat{أ}$ و) = ق (جـ $\hat{أ}$ و) ($\overleftarrow{أو}$ منصِّف زاوية الرأس (ب $\hat{أ}$ جـ))

(٣) $\overline{أو}$ ضلع مشترَك

∴ Δ ب أ و $\cong \Delta$ جـ أ و (ض . ز . ض)

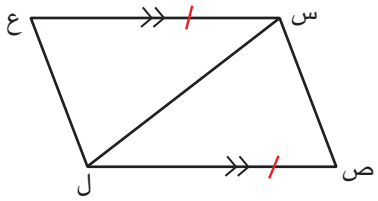
عبِّر عن فهمك (١)

في الشكل المقابِل ، هل المثلّثان متطابقان ؟
فسِّر إجابتك .



لا ، لا بد تحقق شرطان فقط
ولم يتحقق الثالث

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل: $\overline{س ع} \cong \overline{ل ص}$ ، $\overline{س ع} \parallel \overline{ل ص}$.

أثبِت أنّ :

(١) Δ ل س ع $\cong$ Δ س ل ص .

(٢) س ص = ل ع .

الحلّ :

المعطَيات :

(١) $\overline{س ع} \cong \overline{ل ص}$ ،

(٢) $\overline{س ع} \parallel \overline{ل ص}$

المطلوب :

إثبات أنّ :

(١) Δ س ل ص $\cong$ Δ ل س ع ،

(٢) س ص = ل ع

البرهان :

Δ ل س ع ، Δ س ل ص فيهما :

(١) $\overline{س ع} \cong \overline{ل ص}$ (معطى)

(٢) ق (ل $\hat{س}$ ع) = ق (س $\hat{ل}$ ص) (بالتبادل والتوازي)

(٣) $\overline{س ل}$ ضلع مشترَك

∴ Δ ل س ع $\cong$ Δ س ل ص (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنّ س ص = ل ع

تذكَّر

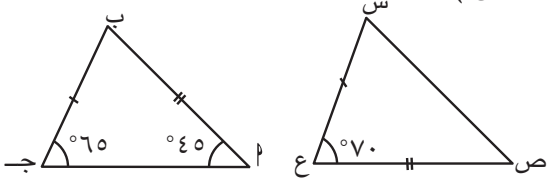
- // رمز التوازي .
- إذا توازى مستقيمان وقطعهما قاطع ، فإنّ :
  - الزوايا المتبادلة متطابقة .
  - الزوايا المتناظرة متطابقة .
  - الزوايا المتحالفة متكاملة .

عبِّر عن فهمك (٢)

قال نايف : إنّ Δ س ص ع $\cong$ Δ جـ أ ب (ض . ز . ض)

وقال تركي : إنّ المعلومات غير كافية لبيان أنّ المثلّثَين متطابقان . أيّهما على صواب ؟

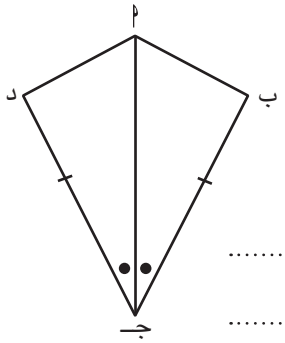
فسِّر ذلك . نايف الصواب .



لأن يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحددة لهما .

تمارين ذاتية :

١ في الشكل المجاور : ق (أ جـ ب) = ق (أ جـ د) ، $\overline{ب جـ} \cong \overline{د جـ}$



(أ) أثبت أنّ : Δ أ ب جـ ≅ Δ أ د جـ .

(ب) برهن أنّ : أ $\hat{ب}$ جـ ≅ أ $\hat{د}$ جـ .

∵ $\overline{ب هـ} = \overline{د هـ}$

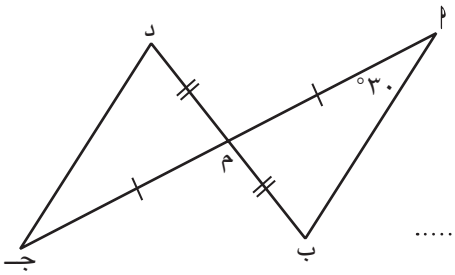
ق (أ $\hat{هـ}$ ب) = ق (أ $\hat{هـ}$ د)

$\overline{أ هـ}$ ضلع مشترك . (ض . ز . ض)

∴ Δ أ ب هـ ≅ Δ أ د هـ

∵ Δ أ ب هـ ≅ Δ أ د هـ ∴ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (أ $\hat{د}$ هـ)

٢ من خلال المعطَيات على الشكل المقابِل .



(أ) أثبِت أنّ: Δ أ م ب ≅ Δ جـ م د .

(ب) أوجِد ق (جـ $\hat{}$) .

∵ $\overline{أ م} = \overline{جـ م}$

$\overline{ب م} = \overline{د م}$

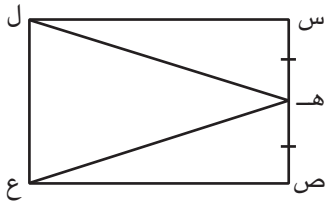
ق (أ $\hat{م}$ ب) = ق (جـ $\hat{م}$ د) بالتقابل بالرأس .

∴ Δ أ م ب ≅ Δ جـ م د (ض . ز . ض)

∵ Δ أ م ب ≅ Δ جـ م د

∴ ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{أ}$) = ٣٠°

٣ في الشكل المقابِل : س ص ع ل مستطيل ، هـ منتصف $\overline{س ص}$.



أثبِت أنّ : هـ ل = هـ ع .

∵ س ص ع ل مستطيل

∴ $\overline{س ل} = \overline{ص ع}$

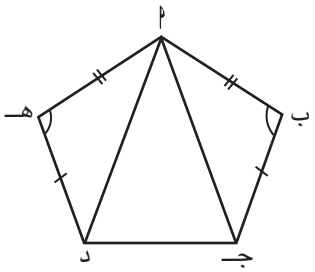
$\overline{س هـ} = \overline{ص هـ}$

ق ($\hat{س}$) = ق ($\hat{ص}$) = ٩٠ (من خواص المستطيل)

∴ Δ ل س هـ ≅ Δ ع ص هـ (ض . ز . ض)

ونستنتج عن التطابق أن $\overline{هـ ل} = \overline{هـ ع}$.

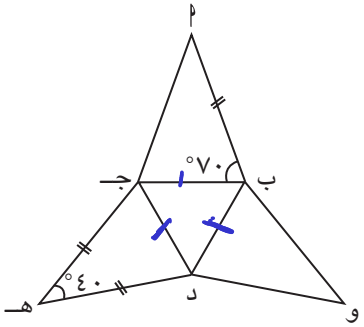
٤ من خلال المعطَيات الموضَّحة على الشكل المقابِل ،
أثبِت أنّ : المثلّث ا جـ د متطابق الضلعَين .



∵ $\overline{ا ب} \cong \overline{ا هـ}$
∵ $\overline{ب جـ} \cong \overline{هـ د}$
∵ ق(∠ب) ≅ ق(∠هـ) (مق . ز . مق)
∴ Δ ا ب جـ ≅ Δ ا هـ د
ومنه ينتج عن التطابق أن $\overline{ا جـ} \cong \overline{ا د}$
∵ $\overline{ا جـ} \cong \overline{ا د}$ ∴ Δ ا جـ د متطابق الضلعين .

مهارات تفكير عليا :

٥ في الشكل المقابِل : Δ ب جـ د متطابق الأضلاع ،
$\overline{ا ب} \cong \overline{جـ هـ} \cong \overline{د هـ}$ ، ق(∠ا ب̂ جـ) = ٧٠° ،
ق(∠د هـ̂ جـ) = ٤٠°



أثبِت أنّ : Δ ا ب جـ ≅ Δ هـ جـ د .

∵ Δ ب جـ د متطابق الأضلاع
∴ $\overline{ب جـ} \cong \overline{جـ د}$ ← (١)
في Δ هـ جـ د
∵ $\overline{جـ هـ} \cong \overline{د هـ}$
∴ ق(∠هـ جـ̂ د) = ق(∠هـ د̂ جـ)
∴ ق(∠جـ د̂ هـ) + ق(∠هـ د̂ جـ) = ١٨٠ − ٤٠
∴ ق(∠هـ جـ̂ د) = ١٨٠ − ٤٠ = ١٤٠°
∴ ق(∠هـ د̂ جـ) = ٧٠°
∴ ق(∠ا ب̂ د) = ق(∠هـ د̂ جـ) = ٧٠° ← (٢)
∵ $\overline{ا ب} \cong \overline{هـ جـ}$ ← (٣)
∴ من (١) ، (٢) ، (٣)
∴ Δ ا ب جـ ≅ Δ هـ جـ د .

تذكَّر

زاويتا القاعدة في المثلّث المتطابق الضلعَين متطابقتان ، والعكس صحيح .

٣ - ٥ تطابق مثلّثَين بزاويتَين وضلع واصل بين رأسَيهما
Congruent Triangles with ASA

سوف تتعلّم : تطابق مثلّثَين بتطابق زاويتَين وضلع واصل بين رأسَيهما .

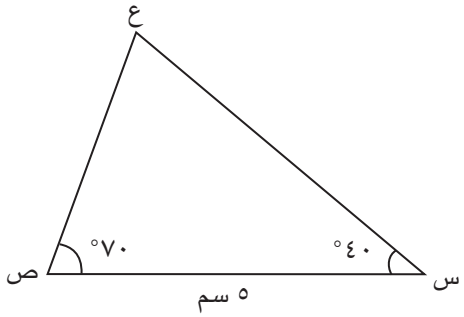


يعتمد تصميم واجهة كلّية العلوم الحياتية على تطابق المثلّثات بطرق هندسية احترافية جمالية تحقّق عدّة مميّزات منها التهوية الطبيعية ، والإضاءة ، والظلال ما يخلق بيئة مريحة وصحّية .

اِستكشِف

١ باستخدام الورق الشفّاف ، أُرسم المثلّث أ ب جـ الذي فيه :
أ ب = ٥ سم ، ق ($\hat{أ}$) = ٤٠° ، ق ($\hat{ب}$) = ٧٠° .

٢ طابِق المثلّث الذي رسمته مع المثلّث س ص ع الموضَّح في الشكل أمامك .



اللوازم
ورق شفّاف - أدوات هندسية

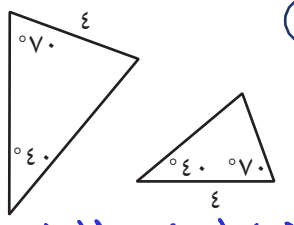
تذكَّر
من حالات تطابق مثلّثَين :
- (ض . ض . ض)
- (ض . ز . ض)

يتطابق المثلّثان إذا تطابقت زاويتان والضلع الواصل بين رأسَيهما في أحد المثلّثَين مع نظائرهما في المثلّث الآخر ، ويُعبَّر عن ذلك (زاوية ، ضلع ، زاوية) ، ويُرمز إليها (ز . ض . ز)

دورك الآن (١)

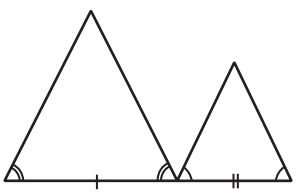
هل المثلّثان في كلّ من (أ) ، (ب) ، (ج) متطابقان ؟ فسِّر ذلك .

(أ)



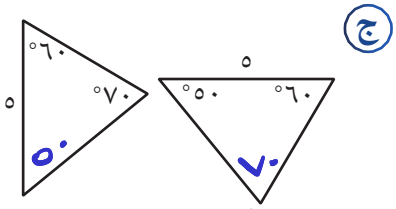
لا، لإن الضلع الواصل بين الزاويتين لم يتطابق

(ب)



لا، لأن لم يتحقق شروط التطابق .

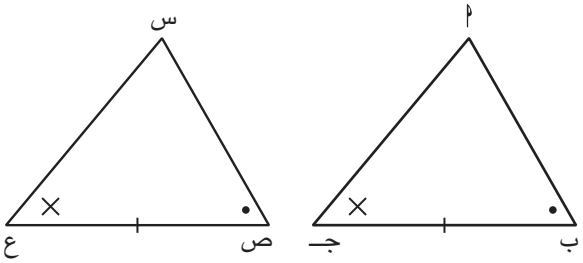
(ج)



نعم، لأن تطابق بها زاويتان وضلع واصل بينهما

دورك الآن (٢)

من المعطَيات الموضَّحة في الرسم ، أكمِل كلًّا ممّا يلي :



في Δ أ ب جـ ، Δ ..... ≅ Δ .....

(أ) ق (∠ ب) = ... = ق (∠ .....)

(ب) ..... = ق (∠ ع)

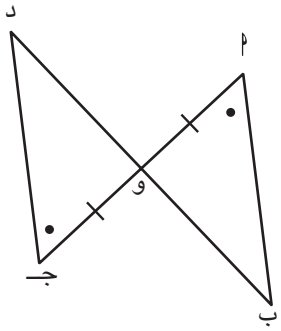
(ج) ب جـ = ...

∴ يتطابق المثلّثان (..... ، ..... ، .....)

ينتج من التطابق أنّ ق (∠ أ) = ... ،

..... ≅ س ص ، أ جـ ≅ .....

مثال (١) :



في الشكل المقابِل :

أثبِت أنّ : Δ أ ب و ≅ Δ جـ د و .

الحلّ :

المعطَيات :

(١) $\overline{أ و} \cong \overline{جـ و}$

(٢) ∠ أ ≅ ∠ جـ

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ أ ب و ≅ Δ جـ د و .

البرهان :

Δ أ ب و ، Δ جـ د و فيهما :

(١) ق (∠ أ) = ق (∠ جـ) (معطى)

(٢) أ و = جـ و (معطى)

(٣) ق (∠ أ و ب) = ق (∠ جـ و د) (بالتقابل بالرأس)

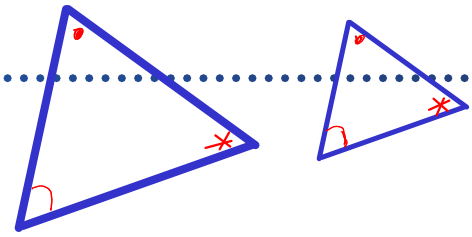
∴ Δ أ ب و ≅ Δ جـ د و (ز . ض . ز)

تذكَّر

إذا تقاطع مستقيمان ، فإنّ الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة .

عبِّر عن فهمك

إذا تطابقت ثلاث زوايا في أحد المثلّثَين مع نظائرها في المثلّث الآخر ، فهل يتطابق المثلّثان ؟
أُرسم مثلّثَين لدعم إجابتك .

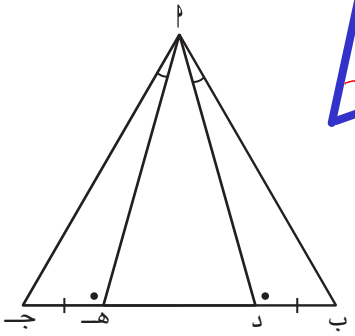


لا
لأن الأضلاع يمكن أن تكون غير متطابقة.

مثال (٢) :

في الشكل المقابل ، أثبِت أنّ :

Δ ا ب د ≅ Δ ا جـ هـ .



الحلّ :

المعطَيات :

(١) $\overline{ب د} \cong \overline{جـ هـ}$ ،

(٢) ق (ا $\hat{د}$ ب) = ق (ا $\hat{هـ}$ جـ) ،

(٣) ق (ب $\hat{ا}$ د) = ق (جـ $\hat{ا}$ هـ)

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ ا ب د ≅ Δ ا جـ هـ .

البرهان :

في Δ ا ب د ، Δ ا جـ هـ فيهما :

(١) $\overline{ب د} \cong \overline{جـ هـ}$ (معطى)

(٢) ق (ا $\hat{د}$ ب) = ق (ا $\hat{هـ}$ جـ) (معطى)

(٣) ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$) (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)

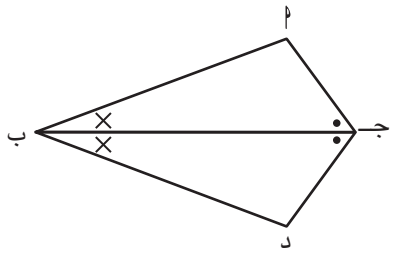
∴ Δ ا ب د ≅ Δ ا جـ هـ (ز . ض . ز)

تذكَّر

إذا تطابقت زاويتان في مثلّث مع نظائرهما في المثلّث الآخر ، فإنّ الزاوية الثالثة في كلَيهما تكون متطابقة . (لأنّ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة تساوي ١٨٠°) .

تمارين ذاتية :

١ في الشكل المقابل ، ليكن $\overline{جـ ب}$ منصّف الزاويتَين جـ ، ب



(١) أثبِت أنّ : Δ أ جـ ب $\cong \Delta$ د جـ ب .

(٢) برهِن أنّ : أ جـ = د جـ .

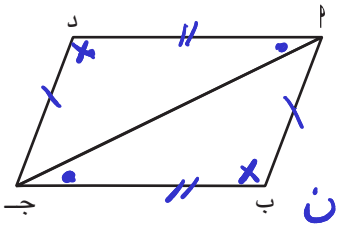
∵ ق(∠ أ ب جـ) ≅ ق(∠ د ب جـ)

ق(∠ أ جـ ب) ≅ ق(∠ د جـ ب) ، $\overline{ب جـ}$ ضلع مشترك

∴ Δ أ ب جـ ≅ Δ د ب جـ (ز . ض . ز)

ويلتج عن التطابق أن $\overline{أ جـ} = \overline{د جـ}$

٢ أ ب جـ د متوازي أضلاع . وظِّف حالة التطابق (زاويتان وضلع واصل بين رأسَيهما) لإثبات تطابق Δ أ ب جـ ، Δ جـ د أ .



∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق(∠ د أ جـ) = ق(∠ أ جـ ب) بالتبادل

ق(∠ ب) = ق(∠ د) زاويتان متقابلتان متطابقتان

ب جـ = أ د

∴ Δ أ ب جـ ≅ Δ جـ د أ (ز . ض . ز)

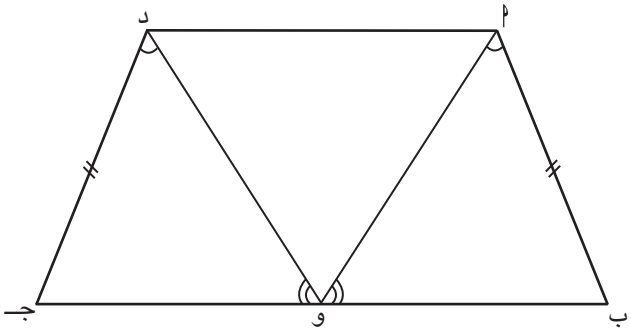
٣ من الشكل المقابل : (ب $\hat{أ}$ و) ≅ (جـ $\hat{د}$ و) ، $\overline{أ ب} \cong \overline{د جـ}$ ،

(أ $\hat{و}$ ب) ≅ (د $\hat{و}$ جـ)

أثبِت أنّ :

(١) Δ أ ب و ≅ د جـ و

(٢) و منتصف $\overline{ب جـ}$.



∵ ق(∠ ب أ و) ≅ ق(∠ جـ د و) معطى

ق(∠ أ و ب) ≅ ق(∠ د و جـ) معطى

$\overline{أ ب} \cong \overline{د جـ}$ معطى

∴ Δ أ ب و ≅ Δ د جـ و (ز . ض . ز)

ويلتج عن التطابق أن $\overline{ب و} \cong \overline{جـ و}$

∵ $\overline{ب و} \cong \overline{جـ و}$ ∴ و منتصف $\overline{ب جـ}$

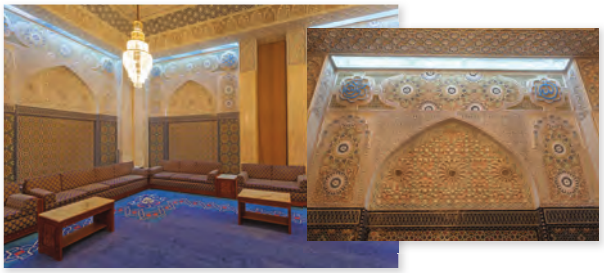
٣ - ٦

تطابق مثلّثَين قائمَي الزاوية
Congruency of Right Triangles (HL)

سوف تتعلّم : تطابق مثلّثَين قائمَي الزاوية بتطابق وتر وأحد ضلعَي القائمة .

العبارات والمفردات :

زاوية قائمة	Right Angle	مثلّث قائم الزاوية	Right-Angled Triangle
وتر	Hypotenuse	ضلع الزاوية القائمة	Leg



يقع المسجد الكبير في وسط مدينة الكويت ، ويمكن مشاهدة الكثير من الزخارف ذات الطابع الهندسي الإسلامي على الجدران والأرضيات والأسقف والتي تدخل فيها الأشكال الهندسية المتطابقة ومنها المثلّثات .

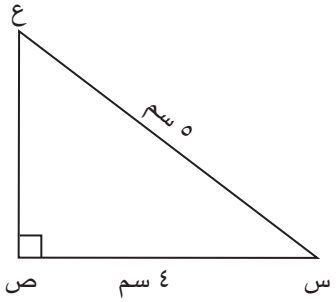
إستكشِف

اللوازم

ورق شفّاف – أدوات هندسية

١ باستخدام الورق الشفّاف ، أُرسم المثلّث أ ب جـ القائم في ($\hat{ب}$) والذي فيه : أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٥ سم .

٢ طابِق بين المثلّث الذي رسمته والمثلّث س ص ع الموضَّح في الشكل أمامك .

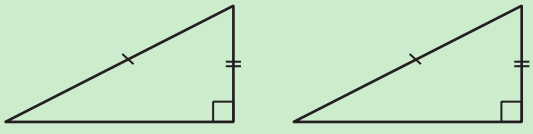


معلومة مفيدة :



المسجد الكبير هو أكبر مسجد في الكويت من حيث المساحة حيث تبلغ مساحته حوالي ٤٥٠٠٠ م^{٢} ، وقام بتصميمه المعماري الكويتي محمّد حمّود الصالح بالتعاون مع شركات عالمية .

يتطابق مثلّثان قائما الزاوية إذا تطابق وتر وضلع في أحدهما مع نظائرهما في المثلّث الآخر ، ويُعبَّر عن ذلك (زاوية قائمة ، وتر ، ضلع) ويُرمز إليها (◺ . و . ض)

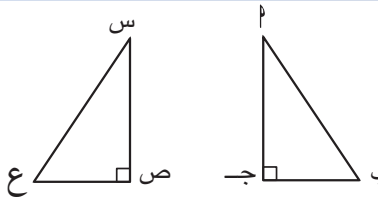


تذكَّر

لأيّ مثلّث أ ب جـ قائم الزاوية في ب يكون $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ضلعَي القائمة ، $\overline{أ جـ}$ وتر المثلّث .

عبِّر عن فهمك (١)

أمامك مثلّثان ، ما الحدّ الأدنى من المعلومات التي يمكن استخدامها لإثبات أنّ المثلّثَين متطابقان ؟

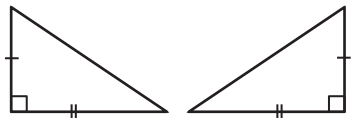


الحد الادنى معلومة الوتر واحد ضلعي القائمة

دورك الآن (١)

في كلّ من الأشكال الآتية المثلّثان متطابقان ، حدِّد حالة التطابق :

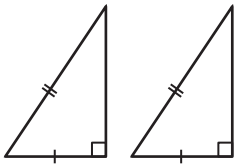
(أ)



ضلعان وزاوية

(ض . ز . ض)

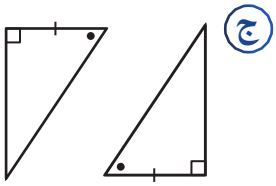
(ب)



وتر وضلع

(∠ . و . ض)

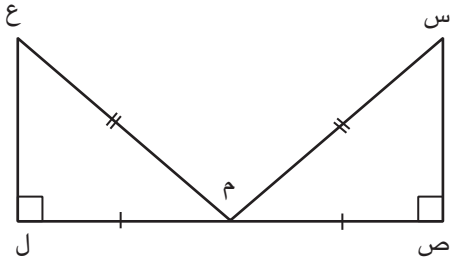
(ج)



زاويتان وضلع

(ز . ض . ز)

مثال (١) :



في الشكل المقابِل ، برهِن أنّ : Δ س ص م ≅ Δ ع ل م .

الحلّ :

المعطَيات :

($\hat{ص}$) ، ($\hat{ل}$) زاويتان قائمتان

$\overline{س م} \cong \overline{ع م}$

$\overline{ص م} \cong \overline{ل م}$

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ س ص م ≅ Δ ع ل م

البرهان :

Δ س ص م ، Δ ع ل م فيهما :

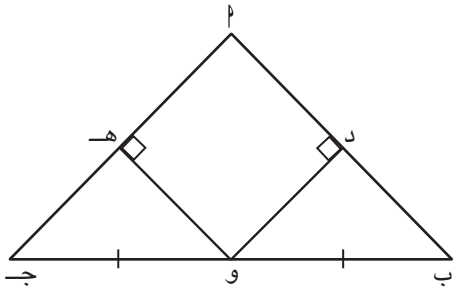
(١) ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{ل}$) = ٩٠° (معطى)

(٢) $\overline{س م} \cong \overline{ع م}$ (معطى)

(٣) $\overline{ص م} \cong \overline{ل م}$ (معطى)

∴ Δ س ص م ≅ Δ ع ل م (∠ . و . ض)

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل :

أ د و هـ مربّع ، ب و = جـ و .

أثبِت أنّ :

(١) $\overset{\wedge}{ب} \cong \overset{\wedge}{جـ}$

(٢) Δ أ ب جـ متطابق الضلعَين .

الحلّ :

المعطَيات :

أ د و هـ مربّع ، ب و = جـ و

المطلوب :

إثبات أنّ : (١) $\overset{\wedge}{ب} \cong \overset{\wedge}{جـ}$

(٢) Δ أ ب جـ متطابق الضلعَين .

البرهان :

Δ د ب و ، Δ هـ جـ و فيهما :

(١) ب و = جـ و (معطى)

(٢) د و = هـ و (من خواصّ المربّع)

(٣) ∠ (و $\overset{\wedge}{د}$ ب) = ∠ (و $\overset{\wedge}{هـ}$ جـ) = ٩٠° لأنّ

∠ (و $\overset{\wedge}{د}$ ب) = ٩٠° بالتجاور مع (و $\overset{\wedge}{د}$ أ) على خطّ مستقيم

∠ (جـ $\overset{\wedge}{هـ}$ و) = ٩٠° بالتجاور مع (أ $\overset{\wedge}{هـ}$ و) على خطّ مستقيم

∴ Δ د ب و ≅ Δ هـ جـ و (∠ . و . ض)

وينتج من التطابق أنّ : $\overset{\wedge}{ب} \cong \overset{\wedge}{جـ}$ ..... (١)

∵ Δ أ ب جـ فيه :

∠ ($\overset{\wedge}{ب}$) = ∠ ($\overset{\wedge}{جـ}$) (زاويتا القاعدة متطابقتان)

∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعَين ..... (٢)

تذكَّر

من خواصّ المربّع

- زواياه الأربع قوائم .
- أضلاعه الأربعة متطابقة .

تذكَّر

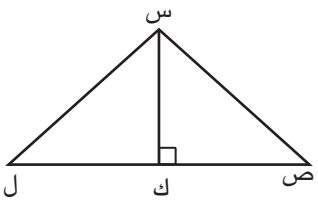
زاويتا القاعدة في مثلّث متطابقتان ⟺ المثلّث متطابق الضلعَين .

عبِّر عن فهمك (٢)

في Δ س ص ل ، $\overline{س ك} \perp \overline{ص ل}$

ما الحدّ الأدنى من المعلومات التي يمكن إضافتها لإثبات أنّ :

المثلّثَين س ص ك ، س ل ك متطابقان .



أن $\overline{س ص} \cong \overline{س ل}$

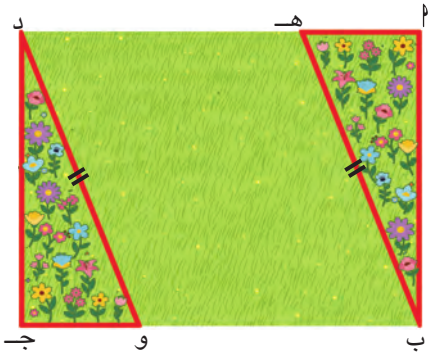
تذكَّر

في المثلّث المتطابق الضلعَين ، القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلّث والعمودية على القاعدة تنصّفها .

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل مخطّط لحديقة على شكل مستطيل ، يُراد زراعة أزهار في حوضَين على شكل مثلّثَين .

أثبِت أنّ حوضَي الأزهار متطابقان ، موظِّفًا المعطَيات الموجودة على الرسم .



أكمِل كلًّا ممّا يلي :

المعطَيات :

أ ب جـ د ..مستطيل.. ، ..$\overline{ب هـ}$.. ≅ ..$\overline{د و}$..

المطلوب :

إثبات أنّ : ..Δ أ ب هـ.. ≅ ..Δ جـ د و..

البرهان :

Δ أ ب هـ ، Δ جـ د و فيهما :

(١) ق ($\hat{أ}$) = ق (..جـ..) = ٩٠° من خواصّ ..المستطيل.. (زواياه الأربع ..قائمة..)

(٢) $\overline{أ ب}$ ≅ ..$\overline{جـ د}$.. من خواصّ ..المستطيل.. (كلّ ضلعَين متقابلَين ..متطابقان..)

(٣) $\overline{ب هـ}$ ≅ ..$\overline{د و}$.. (معطى)

∴ Δ أ ب هـ ..≅.. Δ جـ د و (..ك.. ..و.. ..ض..) وينتج أنّ حوضَي الأزهار متطابقان .

تذكَّر

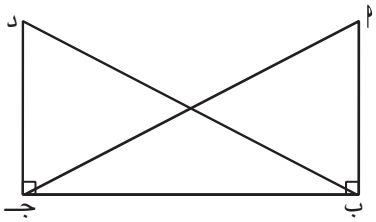
من خواصّ المستطيل :

- زواياه الأربع قوائم
- كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .

تمارين ذاتية :

١ في الشكل المقابل : $\overline{أب} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{د جـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، أجـ = ب د ،

أثبت أنّ : ب $\hat{أ}$ جـ ≅ جـ $\hat{د}$ ب .



∵ أم = ب م (الوتر)

ب م ضلع مشترك

ق(ب) = ق(جـ) = ٩٠° (ق . و . ض)

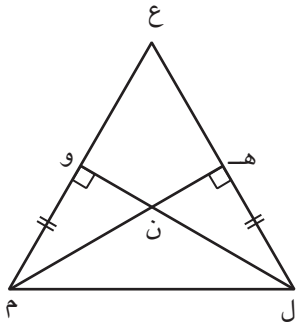
∴ Δ أ م ب ≅ Δ د م ب

وينتج عن التطابق أن ب $\hat{أ}$ م ≅ جـ $\hat{د}$ ب

٢ في الشكل المقابل :

أثبت أنّ : (أ) Δ ل و م ≅ Δ م هـ ل

(ب) $\overline{ع ل}$ ≅ $\overline{ع م}$



∵ ق(ل $\hat{و}$ م) ≅ ق(م $\hat{هـ}$ ل) = ٩٠°

ل م ضلع مشترك (الوتر)

ل هـ ≅ م و (و . ق . ض)

∴ Δ ل و م ≅ Δ م هـ ل وينتج عن التطابق أن ل و = م هـ

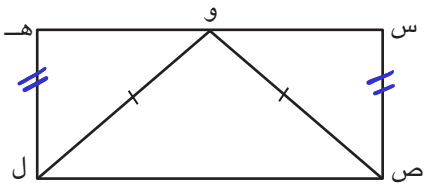
∵ ل و = م هـ ، ل ع ⊥ م ، م هـ ⊥ ع ل

∴ Δ ع ل م متطابق الساقين ∴ $\overline{ع ل}$ ≅ $\overline{ع م}$

٣ في الشكل المقابل :

س ص ل هـ مستطيل ، و ص ل مثلّث متطابق الضلعَين .

وظِّف التطابق لإثبات أنّ : و منتصف $\overline{س هـ}$.



∵ س ص ≅ هـ ل

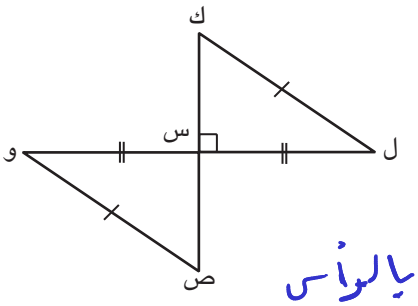
و ص ≅ و ل

ق(س $\hat{ص}$ و) ≅ ق(هـ $\hat{ل}$ و) = ٩٠° (ق . و . ض)

∴ Δ س ص و ≅ Δ هـ ل و وينتج عن التطابق أن س و ≅ هـ و

∴ و منتصف $\overline{س هـ}$

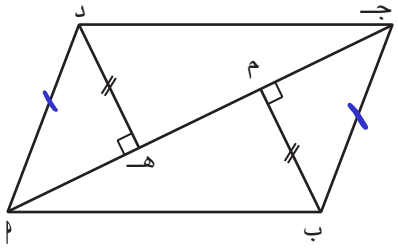
٤ في الشكل المقابِل :



برهِن أنّ : Δ ك ل س ≅ ص و س

∵ ك س ≅ ص س
ل س ≅ و س (ض . و . ض)
∴ م(∠ ل س ك) ≅ م(∠ و س ص) = ٩٠° بالتقابل بالرأس
∴ Δ ك ل س ≅ Δ ص و س

٥ صمّم عبد الكريم لوحة من الفسيفساء كما في الشكل المقابِل ، وأراد إثبات أنّ : Δ جـ م ب ، Δ أ هـ د متطابقان .
ساعِده على إثبات ذلك .
(علمًا بأنّ الشكل جـ ب أ د متوازي أضلاع)

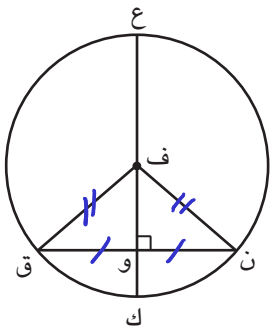


∵ ب جـ د أ متوازي أضلاع
∴ ب جـ ≅ د أ
م ب ≅ هـ د
م(∠ جـ م ب) ≅ م(∠ أ هـ د) = ٩٠° (ض . و . ض)
∴ Δ ب م جـ ≅ Δ د هـ أ

مهارات تفكير عليا :

٦ دائرة مركزها ف ، ع ك ⊥ ن ق .

وظِّف التطابق لإثبات أنّ : و منتصف ن ق .



∵ ف ن ≅ ف ق = نصف قطر الدائرة
م(∠ ف و ن) ≅ م(∠ ف و ق) = ٩٠°
ف و ضلع مشترك (ض . و . ض)
∴ Δ ف و ن ≅ Δ ف و ق وينتج من التطابق أن ن و ≅ ق و ∴ و منتصف ن ق

٣ - ٧ حجم المنشور القائم – حجم الأسطوانة الدائرية القائمة
Volume of Rectangular Prism and Cylinder

سوف تتعلّم : إيجاد حجم المنشور القائم وحجم الأسطوانة الدائرية القائمة .

العبارات والمفردات :

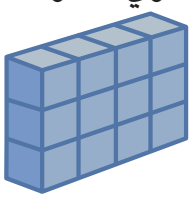
المنشور القائم	Right Prism	الأسطوانة الدائرية القائمة	Right Circular Cylinder

إستكشِف

حجم المنشور الرباعي القائم المبيَّن في الشكل المجاور يساوي ١٢ وحدة مكعّبة .

أعِد تكوين شكلَين للمنشور الرباعي القائم نفسه بحيث حجم كلّ منهما ١٢ وحدة مكعّبة ،

ثمّ أكمِل الجدول الآتي :



اللوازم

مكعّبات

المنشور	الطول (وحدة طول)	العرض (وحدة طول)	الارتفاع (وحدة طول)	الحجم (وحدة طول مكعّبة)	مساحة القاعدة (وحدة طول مربّعة)
أ	٤	١	٣	١٢	٤
ب	٣	٤	١	١٢	١٢
ج	١	٣	٤	١٢	٣

١ صِف العلاقة بين حجم المنشور (ح) وأبعاده الثلاثة : الطول (ل) ، العرض (ض) ، الارتفاع (ع) .

حجم المنشور = الطول × العرض × الارتفاع

٢ صِف العلاقة بين مساحة القاعدة (م) والارتفاع (ع) من جهة ، وحجم المنشور (ح) من جهة أخرى .

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

تذكَّر

مساحة المنطقة المربّعة = ل × ل = ل^{٢}

مساحة المنطقة المستطيلة = ل × ض

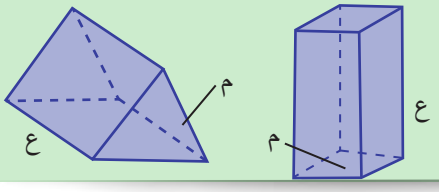
مساحة المنطقة الدائرية = π نق^{٢}

حجم المكعّب = ل × ل × ل = ل^{٣}

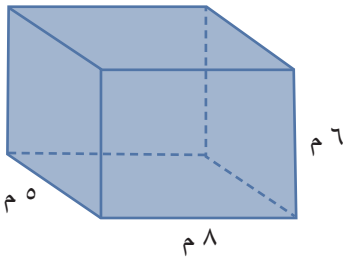
حجم شبه المكعّب = ل × ض × ع

حجم المنشور القائم (ح) هو ناتج ضرب مساحة القاعدة (م) في الارتفاع (ع) .

ح = م × ع



مثال (١) :



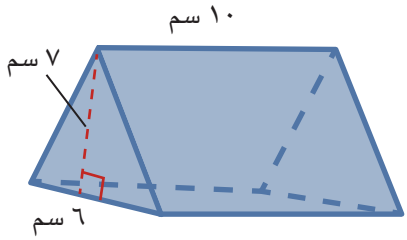
أوجِد حجم المنشور الرباعي القائم المبيَّن في الشكل المجاوِر .

الحلّ :

ح = م × ع	حجم المنشور
ح = (ل × ض) × ع	القاعدة منطقة مستطيلة ، لذلك م = ل × ض
ح = (٨ × ٥) × ٦	اِرتفاع المنشور = ٦
ح = ٢٤٠	

فيكون حجم المنشور ٢٤٠ م^{٣}

مثال (٢) :



أوجِد حجم المنشور الثلاثي القائم المبيَّن في الشكل المجاوِر .

الحلّ :

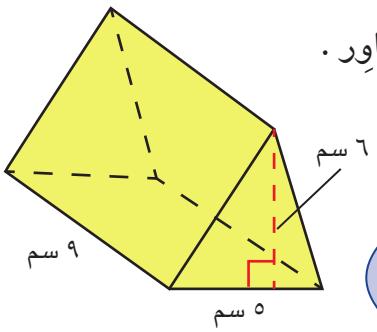
ح = م × ع	حجم المنشور
ح = $\left(\frac{١}{٢} \times ب \times ع\right)$ × ع	القاعدة منطقة مثلّثة ، لذلك م = $\frac{١}{٢} \times ب \times ع$
ح = $\left(\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٧\right)$ × ١٠	اِرتفاع المنشور = ١٠
ح = ٢١٠	بسِّط

فيكون الحجم ٢١٠ سم^{٣}

عبِّر عن فهمك

أوجد كلّ من حمد وعامر حجم المنشور القائم المبيَّن في الشكل المجاوِر .

فأيّهما توصّل إلى الإجابة الصحيحة ؟ فسِّر إجابتك .



حمد

ح = م × ع

ح = (٩ × ٥) × ٦

ح = ٢٧٠ سم^{٣}

عامر

ح = م × ع

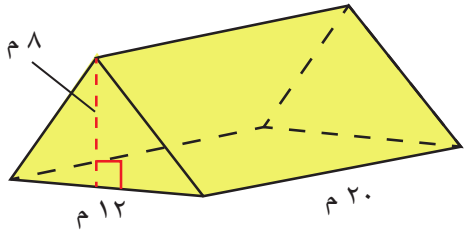
ح = $\left(\frac{١}{٢} \times ٥ \times ٦\right)$ × ٩

ح = ١٣٥ سم^{٣}

عامر هو الصواب، لأنه مساحة القاعدة = مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٦

دورك الآن (١)

أوجِد حجم المنشور الثلاثي القائم المبيَّن في الشكل المجاور .

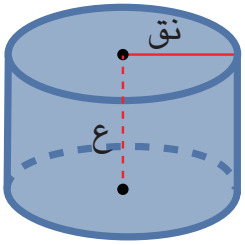


حجم المنشور (ح) = م × ع

= ($\frac{1}{2}$ × ٨ × ١٢) × ٢٠

= ٤٨ × ٢٠ = ٩٦٠ م^{٣}

حجم الأسطوانة الدائرية القائمة :



الأسطوانة مجسَّم قاعدتاه دائرتان متطابقتان ومتوازيتان متّصلتان معًا بسطح جانبي منحنٍ .

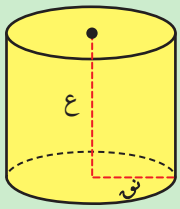
ويمكن استخدام الصيغة ح = م × ع لإيجاد حجم أسطوانة ، كما هو في المنشور القائم .

التعبير اللفظي : حجم الأسطوانة (ح) هو ناتج ضرب مساحة القاعدة (م) في الارتفاع (ع) .

الرموز : ح = م × ع

مساحة قاعدة الأسطوانة (م) = π نق^{٢}

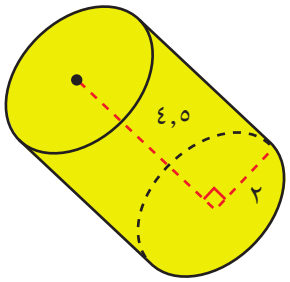
حيث نق = طول نصف القطر ؛ وعليه فإنّ :



حجم الأسطوانة الدائرية القائمة (ح) = م × ع

= π نق^{٢} × ع

مثال (٣) :



أوجِد حجم الأسطوانة الدائرية القائمة المبيَّنة في الشكل المجاور :
(باعتبار أنّ π = ٣,١٤)

الحلّ :

ح = م × ع — حجم الأسطوانة

ح = (π نق^{٢}) × ع — القاعدة منطقة دائرية ، لذلك م = π نق^{٢}

ح = (٣,١٤ × ٢^{٢}) × ٤,٥ — الإرتفاع = ٤,٥

ح = ١٢,٥٦ × ٤,٥ = ٥٦,٥٢

∴ الحجم = ٥٦,٥٢ وحدة مكعّبة .

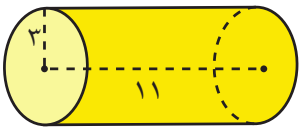
اِنتبِه

لتحديد موضع الفاصلة العشرية في ناتج الضرب ، نجمع عدد المنازل العشرية في كلا العاملَين .

دورك الآن (٢)

أوجِد حجم كلّ أسطوانة دائرية قائمة في كلّ ممّا يلي :

(أ)



اِستخدِم $\pi = ٣,١٤$

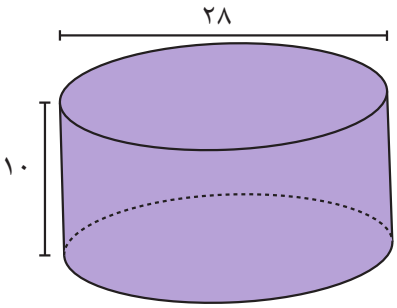
حجم الأسطوانة = م × ع

= π نق^{٢} × ع

= ٣,١٤ × ٣ × ٣ × ١١

= ٣١٠,٨٦

(ب)



اِستخدِم $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

حجم الأسطوانة = م × ع

= π نق^{٢} × ع

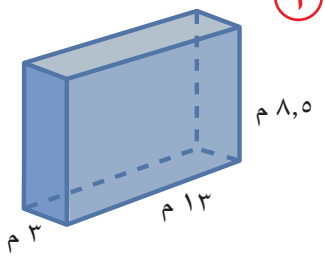
= $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤ × ١٠

= ٦١٦٠

تمارين ذاتية :

١ أوجِد حجم كلّ منشور قائم ممّا يلي :

(أ)

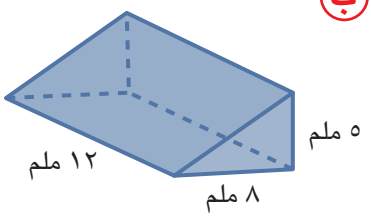


حجم = ق × ف × ل

= ٨,٥ × ٣ × ١٣

= ٣٣١,٥ م^{٣}

(ب)

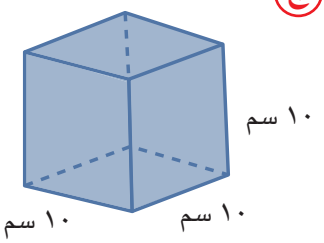


حجم = ق × م

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨ × ٥

= ٢٤٠ ملم^{٣}

(ج)



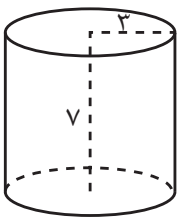
حجم = ل^{٣}

= ١٠^{٣}

= ١٠٠٠ سم^{٣}

٢ أوجِد حجم كلّ أسطوانة دائرية قائمة ممّا يلي :

(أ) (باعتبار أنّ $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

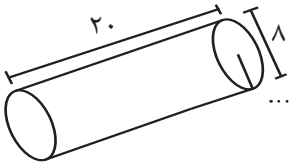


حجم = ق × π نق^{٢} × ع = ٣ × ٣ × ٣ × ٧

= ٣ × ٣ × ٣ × ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$

= ٩ × ٢٢ = ١٩٨

نق = ٤



ب (باعتبار أنّ π = ٣,١٤)

حجم = ٤ × ٣ = ٤ × نق² × π

= ٢٠ × ٤ × ٤ × ٣,١٤

= ١٠٠٤,٨

٣ صومعة (مخزن) للغلال على شكل أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٩ أمتار ، وطول قطر قاعدتها ٤,٢ أمتار ، كم عدد الأمتار المكعّبة التي يمكن للصومعة تخزينها ، مقرّبًا الناتج إلى أقرب م³ ؟ (باعتبار أنّ π = ٣,١٤)

نق = ٤,٢ ÷ ٢ = ٢,١ متر

حجم = ٤ × ٣ = ٤ × نق² × π

= ٩ × ٢,١ × ٢,١ × ٣,١٤

= ٦٦,٦٢٦ ≈ ١٢٥ مترًا مكعبًا

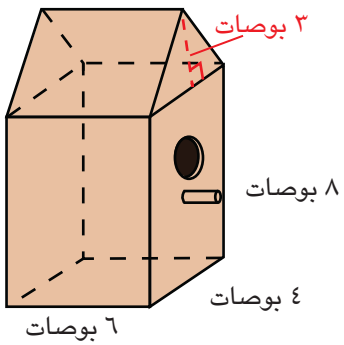
معلومة مفيدة :



صومعة الغلال : هي مبنى كبير يُستخدم لتخزين الحبوب (كالشعير والأرزّ والقمح) للمحافظة عليها من الرطوبة والحشرات والتلف ، وعادة ما يكون على شكل برج أسطواني طويل .

مهارات تفكير عليا :

٤ صمّم نجّار قفصًا للطيور الصغيرة كما في الشكل المجاور ، أوجِد حجم القفص .



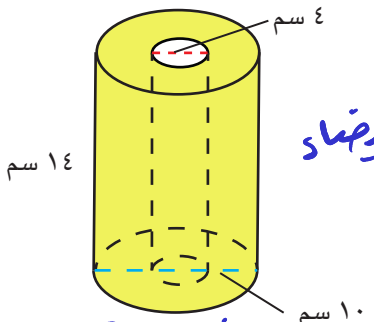
حجم القفص = حجم متوازي المستطيلات + حجم المثلث

= ٤ × ٣ + ٤ × ½ × ٣ × ٤ × ٦ + ٨ × ٦ × ٤

= ١٩٢ + ٣٦ = ٢٢٨ بوصة

٥ يبّين الشكل المقابِل أبعاد لفّة مناشف ورقية جديدة . فما حجمها ؟ (باعتبار أنّ π = ٢٢/٧)

نق = ٢٢



نق = ٢٥

حجم اللفة = حجم الاسطوانة الصغرى - حجم الاسطوانة البيضاء

= ٤ × ٣ - ٤ × ٣

= ٤ × نق² × π - ٤ × نق² × π

= ٤ × π (نق² - نق²) = ٤ × ٢٢/٧ × ١٤ (٢٥ - ٤)

= ٢١ × ٢ × ٢٢ = ٩٢٤ سم³

٨ - ٣ حجم المخروط الدائري القائم
Volume of a Right Circular Cone

سوف تتعلّم : إيجاد حجم المخروط الدائري القائم .

العبارات والمفردات :

المخروط الدائري القائم	Right Circular Cone

اِستكشِف



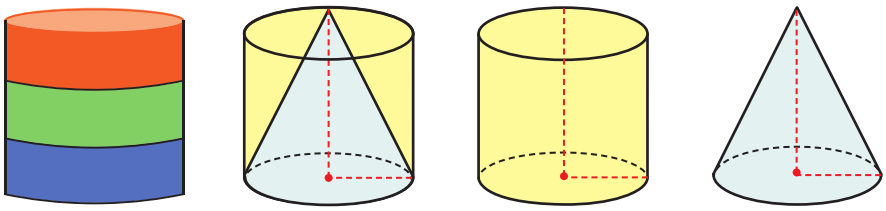
سبق أن تعلّمت كيفية حساب حجم المنشور القائم وحجم الأسطوانة الدائرية القائمة .

هل تستطيع إيجاد حجم المخروط الدائري القائم بدلالة حجم الأسطوانة التي لها نفس مساحة قاعدته ونفس ارتفاعه ؟

هيّا نقوم بالتجربة الآتية لنستكشف ذلك .

الأدوات المستخدَمة :

مخروط بلاستيكي شفّاف وأسطوانة بلاستيكية شفّافة لهما الارتفاع نفسه وطول نصف قطر القاعدة نفسه ، رمل ملوَّن بألوان مختلفة .



خطوات عمل التجربة :

١ اِملأ المخروط (بالرمل الأزرق مثلًا) تمامًا حتّى الحافّة .

٢ أُسكب الرمل في الأسطوانة .

٣ كرِّر هذه العملية واملأ المخروط حتّى الحافّة برمل ملوَّن بلون آخر (الأخضر مثلًا) ، ثمّ اسكبه داخل الأسطوانة .

٤ كرِّر العملية حتّى تمتلئ الأسطوانة .

تذكَّر

حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

ماذا تلاحظ ؟

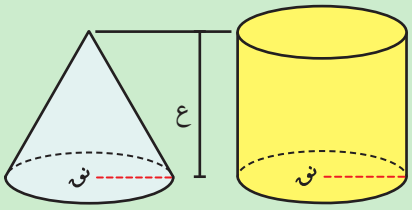
بعد ٣ مرّات من ملء المخروط وسكبه ، ستجد أنّ الأسطوانة امتلأت تمامًا .

إذًا ، نلاحظ : أنّ حجم المخروط ..... حجم الأسطوانة المشتركة معه بالقاعدة والارتفاع .

حجم المخروط الدائري القائم هو $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة الدائرية القائمة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع .

$ح_{مخروط} = \frac{١}{٣} \times (م \times ع) = \frac{١}{٣} \times (\pi نق^{٢} \times ع)$ ،

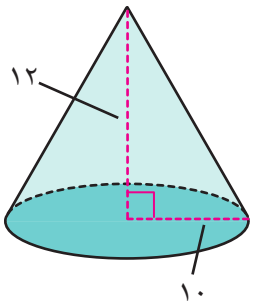
حيث م مساحة القاعدة ، ع الارتفاع .



مثال (١) :

أوجِد حجم المخروط الدائري القائم المبيَّن في الشكل المجاوِر :

(اِجعل $\pi = ٣,١٤$)



الحلّ :

$ح = \frac{١}{٣} \times م \times ع$ حجم المخروط الدائري القائم

$ح = \frac{١}{٣} \times (\pi نق^{٢}) \times ع$ القاعدة منطقة دائرية ، لذلك $م = \pi نق^{٢}$

$ح = \frac{١}{٣} \times (٣,١٤ \times ١٠^{٢}) \times ١٢$ الإرتفاع = ١٢

$ح = \frac{١}{٣} \times ٣١٤ \times ١٢$

$ح = ١٢٥٦$

∴ الحجم = ١٢٥٦ وحدة مكعّبة .

تذكَّر

مساحة المنطقة الدائرية = $\pi نق^{٢}$

عبِّر عن فهمك

قال عبدالله : إنّ حجم المخروط يساوي ثلث حجم أيّ أسطوانة .

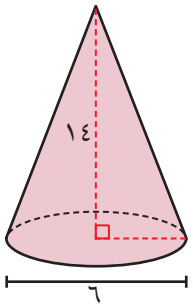
فهل ما قاله عبدالله صحيح ؟ وضِّح ذلك .

خطأ يجب أن تكون قائمة

دورك الآن

أوجِد حجم المخروط الدائري القائم المبيَّن في الشكل المجاوِر :

(اِجعل $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \pi نق^{٢} ع$

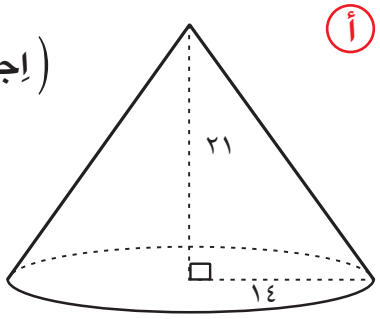
$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ٣ \times ١٤$

$= ٢ \times ٣ \times ٢٢ = ١٣٢$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد حجم كلّ مخروط دائري قائم ممّا يلي :

أ (اِجعل $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

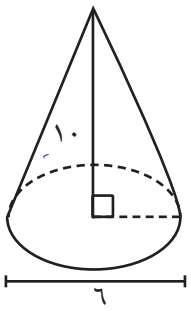


حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ع

= $\frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ \times ١٤ \times ٢١$

= ٤٣١٢

ب (اِجعل $\pi = ٣,١٤$)



حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ع

= $\frac{١}{٣} \times ٣,١٤ \times ٦ \times ٦ \times ١٠$

= ٣٧٦ر٩

٢ أوجِد حجم مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٢٠ سم ، وارتفاعه ٣٠ سم (بدلالة π) .

نق = ١٠ سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ع

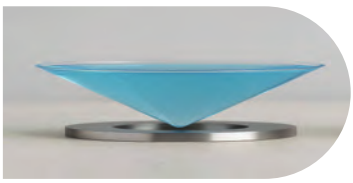
= $\frac{١}{٣} \times \pi \times ١٠ \times ١٠ \times ٣٠$

= $\pi \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠$

= ١٠٠٠ π سم^{٣}

مهارات تفكير عليا :

٣ إناء على شكل مخروط دائري قائم ، يسع ٣,١٤ مل ، إذا عُلم أنّ طول نصف قطر قاعدته = ١٠ سم ، فكم يكون ارتفاعه ؟ (اِجعل $\pi = ٣,١٤$)



حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ع

$\frac{١}{٣} \times ٣,١٤ \times ١٠ \times ١٠ \times$ ع = ٣,١٤

∴ ع = $\frac{٣,١٤}{٣,١٤ \times ١٠٠ \times \frac{١}{٣}}$ = $\frac{١}{١٠٠ \times \frac{١}{٣}}$

ع = ٠,٠٣ سم

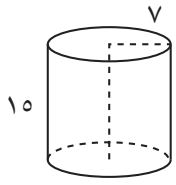
لاحِظ أنّ :

حجم المخروط يساوي حجم السائل المملوء فيه بالكامل .

تقويم الوحدة التعليمية الثالثة
Unit Three Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ أوجِد حجم كلّ أسطوانة دائرية قائمة في كلّ ممّا يلي :

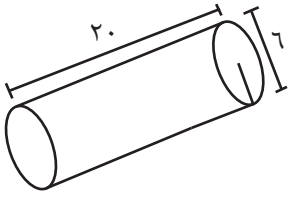
(أ) 

(اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} ع

$= \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ١٥$

$= ٢٣١٠$

(ب) 

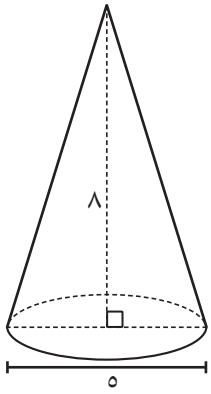
(اِعتبِر $\pi = ٣,١٤$)

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} ع

$= ٣,١٤ \times ٣ \times ٣ \times ٢٠$

$= ٥٦٥,٢$

٢ أوجِد حجم المخروط الدائري القائم المرسوم أمامك . (اِعتبِر $\pi = ٣,١٤$)

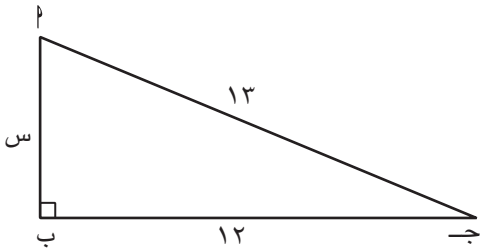


حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

$= \frac{١}{٣} \times ٣,١٤ \times ٢,٥ \times ٢,٥ \times ٨$

$= \frac{١}{٣} \times ٥٢,٣ = ٥٢\frac{١}{٣}$

٣ أوجِد طول ضلع القائمة في المثلّث القائم أ ب جـ المرسوم أمامك :



$(١٣)^{٢} = س^{٢} + (١٢)^{٢}$

$\therefore س^{٢} = ١٦٩ - ١٤٤ = ٢٥$

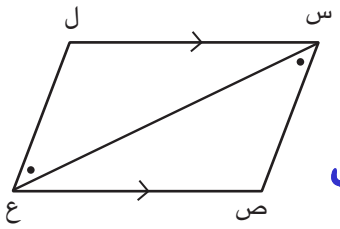
$\therefore س = \sqrt{٢٥} = ٥$

٤ أثبِت أنّ : Δ أ ب جـ قائم الزاوية ، حيث أ ب = ٧ وحدات طول ،
أ جـ = ٢٤ وحدة طول ، ب جـ = ٢٥ وحدة طول .

$(ب جـ)^{٢} = ٦٢٥$ ، $(أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = ٤٩ + ٥٧٦ = ٦٢٥$

$\therefore (ب جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢}$ ، $\therefore \Delta$ أ ب جـ قائم الزاوية

٥ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ :



(أ) Δ س ص ع ≅ Δ ع ل س

∵ س ل // ص ع ∴ ق(∠ ل س ع) ≅ ق(∠ ص ع س) بالتبادل

∴ ق(∠ ص س ع) ≅ ق(∠ ل ع س) (معطى)

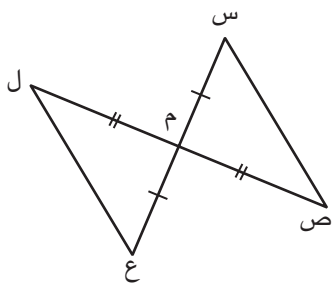
∴ ع س ضلع مشترك ∴ Δ س ص ع ≅ Δ ع ل س (ز . ض . ز)

(ب) ق (ص) = ق (ل)

∴ Δ س ص ع ≅ Δ ع ل س

∴ ق(∠ ص) = ق(∠ ل)

٦ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ : Δ س م ص ≅ Δ ع م ل



∵ س م ≅ م ع

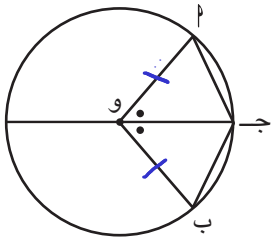
ص م ≅ م ل

ق(∠ س م ص) ≅ ق(∠ ل م ع) (ض . ز . ض)

∴ Δ س م ص ≅ Δ ع م ل

٧ في الشكل المقابِل ، دائرة مركزها و ،

أثبِت أنّ : أ جـ = ب جـ .



∵ و أ ≅ و ب = نق

و جـ ضلع مشترك (ض . ز . ض)

ق(∠ أ و جـ) ≅ ق(∠ ب و جـ)

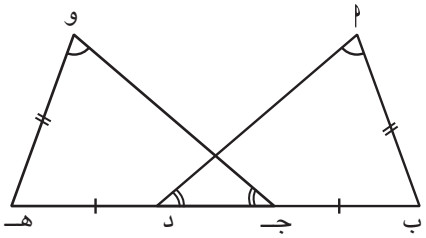
∴ Δ أ و جـ ≅ Δ ب و جـ ويلجَ عن التطابق

أن أ جـ = ب جـ

٨ في الشكل المقابل : $\overline{أب} \cong \overline{وهـ}$ ، $\overline{ب جـ} \cong \overline{هـ د}$

$ق(\angle أ) = ق(\angle و)$ ، $ق(\angle وجـهـ) = ق(\angle أدب)$

أثبت أنّ : $\overline{أد} \cong \overline{وجـ}$



∵ $\triangle$ وهـ جـ $\cong$ $\triangle$ أدب

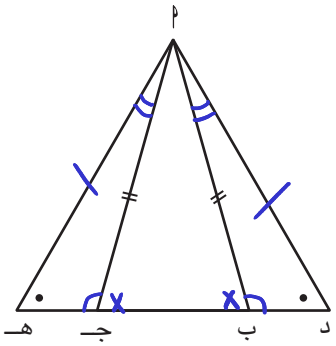
∴ $\triangle$ أ ب د $\cong$ $\triangle$ وهـ جـ

وينتج من التطابق أن $\overline{أد} \cong \overline{وجـ}$

٩ في الشكل المقابل :

$\overline{أب} = \overline{أجـ}$ ، $ق(\angle أدب) = ق(\angle أهـجـ)$

أثبت أنّ : المثلّثين أ ب د ، أ جـ هـ متطابقان .



∵ $\overline{أب} = \overline{أجـ}$ ← (١)

∴ $\triangle$ أ ب د ≅ $\triangle$ أ جـ هـ متطابقان

∵ $ق(\angle أ) = ق(\angle أ)$ ← (٢)

∴ $ق(\angle أدب) = ق(\angle أهـجـ)$ ← (٣)

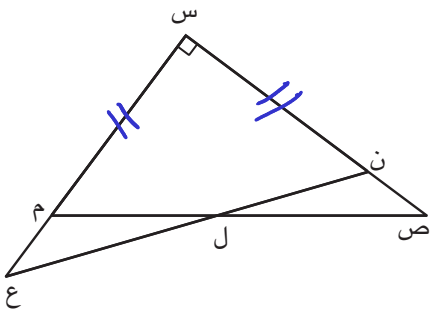
من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن

∴ $\triangle$ أ ب د ≅ $\triangle$ أ جـ هـ (ز . ض . ز)

١٠ في الشكل المقابل : إذا كان س ن = س م ، ن ع = ص م ،

$\overline{س ع} \perp \overline{س ص}$ ،

فأثبت أنّ : $\triangle$ س ص م ≅ $\triangle$ س ع ن .



∵ س ن ≅ س م

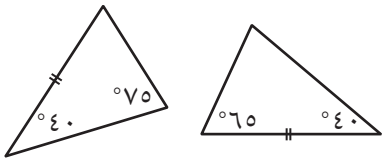
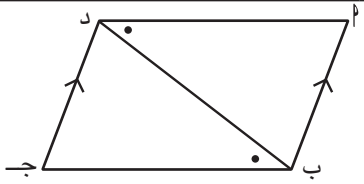
ن ع ≅ م ص

$ق(\angle س) = ٩٠°$ زاوية مشتركة

∴ $\triangle$ س ص م ≅ $\triangle$ س ع ن ($\triangle$. و . ض)

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١- ٤) ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المثلّث الذي أطوال أضلاعه ٣ وحدات طول ، ٦ وحدات طول ، ٥ وحدات طول مثلّث قائم الزاوية .	أ	**ب**
٢ إذا كان حجم أسطوانة دائرية قائمة يساوي ٩٩ وحدة مكعّبة ، فإنّ حجم المخروط المشترَك معها بالقاعدة والارتفاع يساوي ٣٣ وحدة مكعّبة .	**أ**	ب
٣ المثلّثان في الشكل المقابِل متطابقان . 	**أ**	ب
٤ في الشكل المقابِل : $\overline{أب} \cong \overline{جـ د}$. 	**أ**	ب

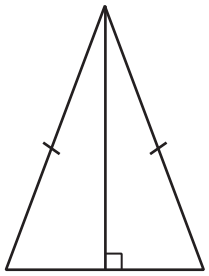
في البنود (٥- ١٠) لكلّ بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٥ مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٣٣ سم^{٢} وارتفاعه ١٠ سم يكون حجمه :

أ ٣٣٠ سم^{٣} **ب** ١١٠ سم^{٣}

ج ١١٠٠ سم^{٣} د ١١,١ سم^{٣}

٦ في الشكل المقابِل ، يتطابق المثلّثان بـ :



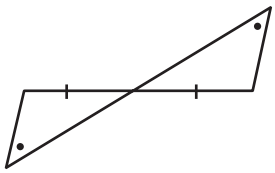
أ (ض . ض . ض) فقط

ب (ض . ز . ض) فقط

ج (ز . ض . ز) فقط

د جميع ما سبق

٧ في الشكل المقابِل ، يتطابق المثلّثان بـ :



أ (ض . ض . ض)

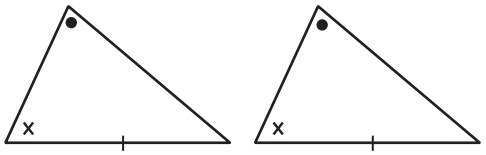
ب (ض . ز . ض)

ج (ز . ض . ز)

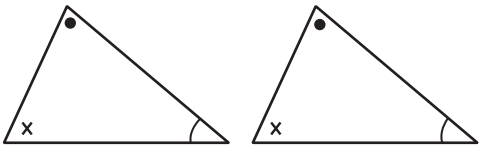
د (∠ . و . ض)

٨ المثلّثان المتطابقان فيما يلي هما :

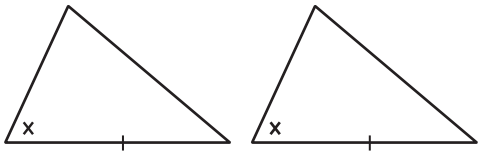
أ



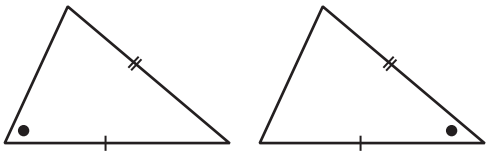
ب



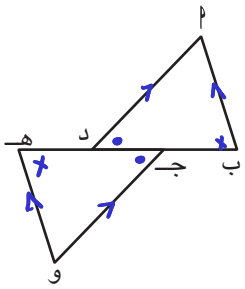
ج



د



٩ في الشكل المقابِل ، إذا كان Δ أ ب د ≅ Δ و هـ جـ ، فإنّ :



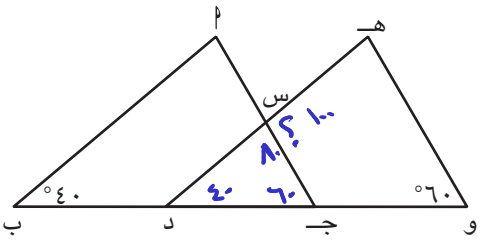
أ ب جـ = د هـ

ب (أ) ≅ (هـ)

ج ب جـ = جـ د

د ق (أ د جـ) = ق (جـ هـ و)

١٠ في الشكل المقابِل : المثلّثان أ ب جـ ، هـ د و متطابقان .
فإنّ قياس (هـ س جـ) =



أ ١٢٠°

ب ٦٠°

ج ١٤٠°

د ١٠٠°

الوحدة التعليمية
الرابعة



النسبة والتناسب – التحويلات الهندسية

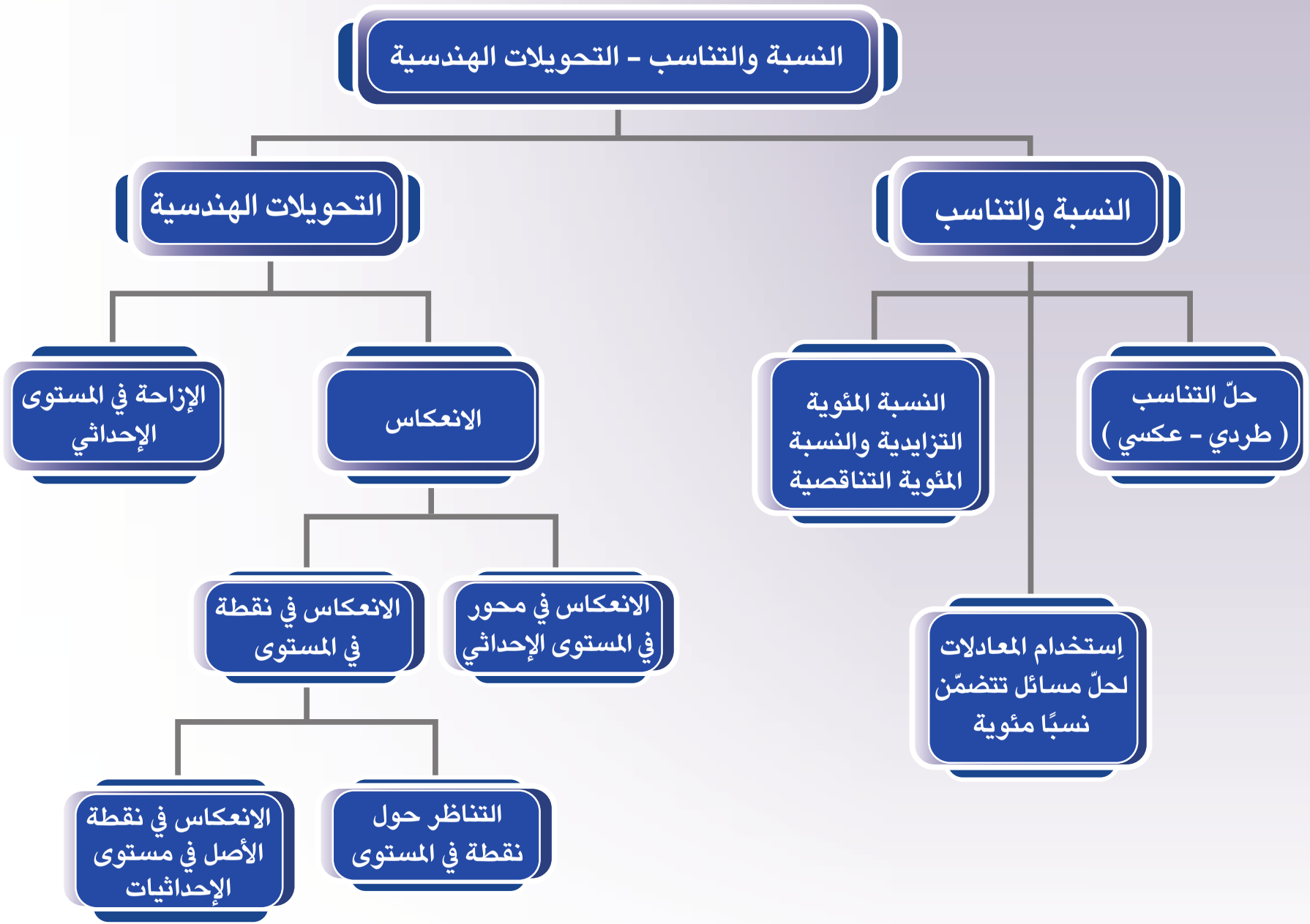
النفط

اُكتُشف احتياطي النفط في الكويت عام ١٩٣٨ م ، وتُعدّ نسبته ١٠٪ من إجمالي الاحتياطي العالمي ، وعلى ذلك فإنّ ٩٠٪ من عائدات الحكومة تأتي من صناعة البترول ، ويُعدّ حقل برقان أكبر الحقول النفطية في الكويت ، وهو ثاني أكبر حقل نفط في العالم ، وهو من أهمّ صادرات الكويت ، وعلى ذلك تُعدّ الكويت السابعة في قائمة أكبر مصدِّري النفط في العالم .



المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
العدّ والجبر	إمكانية تحديد علاقات التناسب في المسائل الرياضية .	العمل الجَماعي - الفهم - التذكّر - التعرّف - العلاقات - حلّ المشكلات - القراءة - القوانين - التحليل والتركيب - التقويم
الهندسة والقياس	تطبيق التحويلات الهندسية واستخدامها في تطوير الحسّ المكاني واستخدام التماثل في تحليل مواقف رياضية .	العمل الجَماعي - التذكّر - الفهم - التعرّف - الوسائط - النمذجة - التحويل - التخيّل والتصوّر - التقويم - الاستدلال - التحليل والتركيب
	تحديد المواقع ووصف العلاقات المكانية باستخدام هندسة الإحداثيات وأنظمة تمثيل أخرى .	العمل الجَماعي - التذكّر - التعرّف - الفهم - التعاون - التحويل - العلاقات - الاستدلال - القوانين
	تمثيل التحويلات الهندسية وربطها بالتطابق والتناظر .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التعاون - التحويل - العلاقات - الاستدلال

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الرابعة



هل أنت مستعدّ؟

١ حُلّ التناسب فيما يلي :

أ) $\frac{٤}{س} = \frac{١٢}{١٨}$ ..... ∴ ١٢س = ٤ × ١٨ ∴ س = ٦

ب) $\frac{ص}{١٢} = \frac{٥}{٣}$ ..... ∴ ٣ص = ٥ × ١٢ ∴ ص = ٢٠

٢ أوجِد كلًّا ممّا يلي :

أ) ٣٠٪ من ٦٠٠ ..... $\frac{٣٠}{١٠٠} \times ٦٠٠ = ١٨٠$

ب) ١٥٪ من ٢٢ ..... $\frac{١٥}{١٠٠} \times ٢٢ = ٣٫٣$

ج) ٦٫٤٪ من ٧٥ ..... $\frac{٦٫٤}{١٠٠} \times ٧٥ = ٤٫٨$

د) $\frac{١}{٣}$٣٣٪ من ١٢٠ ..... $\frac{١}{٣} \times ٣٣ = \frac{١٢٠}{١٠٠} \times \frac{١٠٠}{٣} = \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٠٠}{٣} = ٤٠$

٣ عيِّن النقاط الآتية في المستوى الإحداثي أمامك .

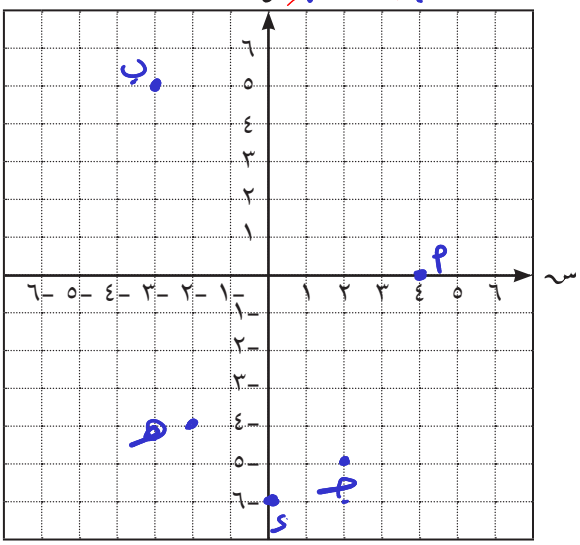
أ) أ (٤ ، ٠)

ب) ب (-٣ ، ٥)

ج) جـ (٢ ، -٥)

د) ء (٠ ، -٦)

هـ) هـ (-٢ ، -٤)



٤ أُكتب إحداثيَّي كلّ من النقاط التي تمثّل :

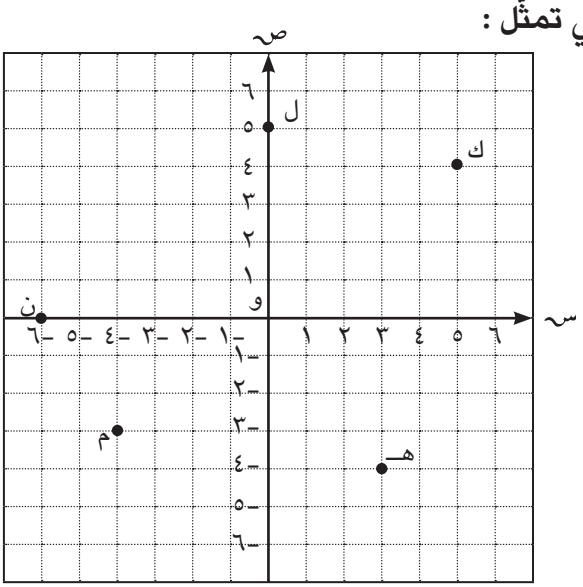
أ) ل (٠ ، ٥)

ب) م (-٤ ، -٣)

ج) ن (-٦ ، ٠)

د) ك (٥ ، ٤)

هـ) هـ (٣ ، -٤)



١ - ٤ حلّ التناسب (طردي – عكسي)
Solving Proportion (Direct - Inverse)

سوف تتعلّم : حلّ التناسب – حلّ التناسب (طردي – عكسي) .

العبارات والمفردات :

التناسب	Proportion	تناسب طردي	Direct Proportion
تساوي نسبتَين	Equivalent Ratios	تناسب عكسي	Inverse Proportion

اِستكشِف (١) :



تمارس مريم مع صديقتها ساره كلّ يوم رياضة المشي ، إذا علمت أنّ مريم تحرق ٦٠ سعرة حرارية مقابِل المشي لمدّة ١٠ دقائق ، فكم سعرة حرارية ستحرق مريم إذا مشت بالسرعة نفسها مقابِل المشي لمدّة ٢٠ دقيقة ؟ ٣٠ دقيقة ؟ ٤٠ دقيقة ؟ ٥٠ دقيقة ؟

عدد دقائق المشي	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠
عدد السعرات الحرارية المحترقة	٦٠	١٢٠	١٨٠	٢٤٠	٣٠٠

نلاحظ أنّ : $\frac{١٠}{٦٠} = \frac{٢٠}{١٢٠} = \frac{٣٠}{١٨٠} = \frac{٤٠}{٢٤٠} = \frac{٥٠}{٣٠٠}$ (نسمّي هذا تناسبًا) .

ونلاحظ أيضًا العكس بأنّ : $\frac{٦٠}{١٠} = \frac{١٢٠}{٢٠} = \frac{١٨٠}{٣٠} = \frac{٢٤٠}{٤٠} = \frac{٣٠٠}{٥٠}$ (نسمّي هذا تناسبًا) .

من الجدول نلاحظ أنّ : عدد دقائق المشي **يتناسب** مع مقدار السعرات الحرارية المحترقة .

التناسب : هو تساوي نسبتَين أو أكثر.

معلومة مفيدة :



تؤكّد الدراسات أنّ المشي المنتظم يحسّن تدفّق الدم إلى الدماغ ، ممّا يعزّز القدرة على التركيز والتفكير المنطقي ويخفّف التوتّر ويحسّن من جودة النوم ، فالمشي مفيد لجسمك وعقلك .

مثال (١) :

صندوق فيه عدد من الكرات البيضاء والكرات الحمراء ، إذا كانت نسبة عدد الكرات البيضاء إلى الكرات الحمراء هي ٧ : ٣ وكان عدد الكرات الحمراء هو ٢٤ كرة ، فكم عدد الكرات البيضاء ؟

الحلّ :

نفرض أنّ عدد الكرات البيضاء = س

$\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات الحمراء}} = \frac{٧}{٣}$ ،

$\frac{س}{٢٤} = \frac{٧}{٣}$ ضرب تقاطعي

$س = \frac{٧ \times ٢٤}{٣} = ٥٦$ بسِّط

إذًا عدد الكرات البيضاء = ٥٦ كرة

تذكَّر

- **النسبة بين مقدارَين :** قسمة المقدار الأوّل على المقدار الثاني أو بالعكس .
- إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ، فإنّ : $أ \times د = ب \times جـ$

دورك الآن (١)

حُلّ التناسب .

أ) $\frac{٥}{٢} = \frac{٢}{س}$

$س = \frac{٢ \times ٢}{٥}$

$س = \frac{٤}{٥}$

ب) $\frac{١٠,٥}{٠,٥} = \frac{س}{٤}$

$س = \frac{١٠,٥ \times ٤}{٠,٥}$

$س = ٨٤$

ج) $\frac{٦}{ن - ١} = \frac{١}{٢}$

$(ن - ١) = \frac{٢ \times ٦}{٦}$

$ن - ١ = ١٢$

$ن = ١ + ١٢$

$ن = ١٣$

من « اِستكشِف (١) » نلاحظ أنّ : كلّما زاد عدد دقائق المشي بنسبة معيَّنة ، زاد في المقابِل عدد السعرات الحرارية المحترقة بالنسبة نفسها . هذا النوع من التناسب يُسمّى **تناسبًا طرديًّا** .

التناسب الطردي : الكمّية ص تتغيّر طرديًّا بتغيّر الكمّية س إذا كانت $\frac{ص}{س}$ = عددًا ثابتًا .

ويكون :

١) ص = عددًا ثابتًا × س .

٢) $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$

٣) كلّ زيادة في س يقابلها زيادة في ص ، كذلك كلّ نقص في س يقابله نقص في ص بنسبة ثابتة .

والآن ، هل يمكنك معرفة عدد السعرات الحرارية المحترقة خلال ٧٥ دقيقة ؟

لمعرفة عدد السعرات الحرارية المحترقة خلال ٧٥ دقيقة ، نكوّن التناسب كالآتي :

لنفرض أنّ عدد السعرات الحرارية المحترقة هو س .

الدقائق	حرق السعرات
١	٦
٧٥	س

زيادة ↓ زيادة ↓

نوع التناسب ..طردي.....

$\frac{١}{٦} = \frac{٧٥}{س}$ (الضرب التقاطعي)

$س = \frac{٦ \times ٧٥}{١} = ٤٥٠$

إذًا عدد السعرات الحرارية المحترقة خلال ٧٥ دقيقة هو ٤٥٠ سعر حراري

تذكّر

- **المعدّل :** هو مقارنة بين كمّيتَين لهما وحدات قياس مختلفة .
- **معدّل الوحدة :** هو مقارنة لوحدة واحدة .

مثال (٢) :

في أحد عروض مهرجان الخضار ، بلغ ثمن ٣ كيلوجرامات من التفّاح ٤٢٠ فلسًا ، إذا أردنا شراء ٥ كيلوجرامات من التفّاح من النوع نفسه ، فكم يبلغ ثمنها ؟

الحلّ :

لنفرض أنّ ثمن كيلوجرام من التفّاح هو س .

كيلوجرام التفّاح	فلس
٣	٤٢٠
٥	س

زيادة ↓ زيادة ↓

نوع التناسب طردي

$\frac{٣}{٥} = \frac{٤٢٠}{س}$

$س = \frac{٥ \times ٤٢٠}{٣}$

$س = ٧٠٠$

إذًا يبلغ ثمن ٥ كيلوجرامات من التفّاح من النوع نفسه ٧٠٠ فلس .

معلومة مفيدة :



للتفّاح فوائد كثيرة منها أنّه :

- مضادّ للأكسدة .
- مفيد لصحّة القلب .
- يقي من هشاشة العظام .
- يخلّص الجسم من السموم .
- يساعد على حرق الدهون .
- ينظّم مستوى السكّر .
- يمدّ الجسم بالطاقة والحيوية .

دورك الآن (٢)

يستخدم زورق خفر السواحل في جولته اليومية الاعتيادية ما يقارب ١٢ لترًا من الوقود ليسير مسافة ٢٤ كم ، فما المسافة التي يسيرها باستخدام ٢٢ لترًا من الوقود ؟

علمًا بأنّ معدّل الاستهلاك هو نفسه (عند ثبات السرعة) .



لاحِظ أنّ :

كلّما زادت المسافة ، زاد استهلاك الوقود .

١٢ / ٢٤ = ٢٢ / س ← ١/٢ = ٢٢/س

س = ٢ × ٢٢ = ٤٤ كم

اِستكشِف (٢) :



تستخدم شركات النفط الحفّارات لحفر آبار النفط ، إذا كانت ٣ حفّارات تحفر البئر في ١٦ يومًا ، فكم يومًا نحتاج لحفر البئر نفسه إذا استخدمنا ١٢ حفّارة من النوع نفسه وبالكفاءة نفسها ؟

ماذا تتوقّع ؟ أيزيد عدد الأيّام أم يقلّ ؟

لنفرض أنّ عدد الحفّارات هو س .

عدد الحفّارات	الأيّام	
٣	١٦	حالة أولى
١٢	س	حالة ثانية

زيادة ← عدد الحفّارات ، نقصان ← الأيّام

١ / ٤ = ٣ / ١٢ = س / ١٦

١/٤ = س/١٦ ← س = ١٦/٤

∴ س = ٤ أيام ← ينقص عدد الأيام

لاحِظ أنّه إذا زاد عدد الحفّارات سيقابله نقص في عدد الأيّام ، وهذا النوع من التناسب يُسمّى **تناسبًا عكسيًّا** .

التناسب العكسي : الكمّية ص تتغيّر عكسيًّا بتغيّر الكمّية س إذا كانت ص × س = عددًا ثابتًا .

ويكون :

١ ص = عددًا ثابتًا × ١/س

٢ ص١/ص٢ = س٢/س١

٣ كلّ زيادة في س يقابلها نقص في ص وكلّ نقص في س يقابله زيادة في ص بنسبة ثابتة .

معلومة مفيدة :



تمّ اكتشاف أوّل حقل نفطي في الكويت في عهد الشيخ / أحمد الجابر الصباح في منطقة برقان في عام ١٩٣٨ .

مثال (٣) :

تقطع سيّارة المسافة من مدينة (أ) إلى مدينة (ب) في زمن قدره ٣٠ دقيقة عندما كانت تسير بسرعة ١٠٠ كم / ساعة ، فما الزمن اللازم لقطع المسافة نفسها إذا سارت بسرعة ١٢٠ كم/ ساعة ؟

الحلّ :

لنفرض أنّ الزمن المطلوب هو س .

سرعة	زمن
١٠٠	٣٠
١٢٠	س

سرعة ← زيادة ، زمن ← نقصان

نوع التناسب عكسي

$$\frac{\text{السرعة في الحالة الأولى (١٠٠)}}{\text{السرعة في الحالة الثانية (١٢٠)}} = \frac{\text{الزمن في الحالة الثانية (س)}}{\text{الزمن في الحالة الأولى (٣٠)}}$$

$$\frac{١٠٠}{١٢٠} = \frac{س}{٣٠}$$

$$س = \frac{١٠٠ \times ٣٠}{١٢٠}$$

$$س = ٢٥$$

إذًا الزمن هو ٢٥ دقيقة .

لاحِظ أنّ :

- السرعة = المسافة / الزمن

اِنتبِه

كلّما زادت السرعة ، قلّ الزمن اللازم عند ثبات المسافة .

تمارين ذاتية :

١ حُلّ التناسبات :

أ) $\frac{١٨}{ص} = \frac{٢٧}{٦}$

ب) $\frac{س}{٩٠} = \frac{٤,٢}{٣٠}$

ج) $\frac{٦}{ل - ١} = \frac{١}{٣}$



٢ قامت إحدى المجموعات في الصفّ الثامن بنشاط عن طريقة صناعة الصابون الرغوي في مختبر العلوم ، حيث كانت نسبة هيدروكسيد البوتاسيوم إلى الزيت ١ : ٥ على الترتيب .
إذا كانت كمّية هيدروكسيد البوتاسيوم ٣٧,٢ مل ، فكم تكون كمّية الزيت في الصابون الرغوي ؟

$\frac{١}{٥} = \frac{٣٧٫٢}{س}$ ∴ $س = ٥ \times ٣٧٫٢$

$٣٧٫٢ \times ٥$

$١٨٦٫٠$

∴ $س = ١٨٦$ مل .

∴ كمية الزيت = ١٨٦ مل .

في التمارين (٣ - ٥) ، حدِّد نوع التناسب ، ثمّ أوجِد المطلوب .



٣ إذا استغرق تحميل ٥ فيديوهات تعليمية ٤٠ دقيقة ، فكم يستغرق تحميل ١٥ فيديو تعليمي بسرعة الإنترنت نفسها علمًا بأنّ جميع الفيديوهات لها المدّة نفسها .

تناسب طردي

$\frac{٥}{١٥} = \frac{٤٠}{س}$ ، $\frac{١}{٣} = \frac{٤٠}{س}$

∴ $س = ٤٠ \times ٣ = ١٢٠$ دقيقة



٤ يلزم ١٤ عاملًا لجني محصول الطماطم من مساحة محميّة زراعية في ١٢ ساعة . إذا كانت قدرات العمّال متساوية في الحالتَين فاحسب عدد العمّال اللازم لجني المحصول خلال ٨ ساعات لمساحة المحميّة الزراعية نفسها .

$\frac{١٤}{س} = \frac{١٢}{٨}$ ، $\frac{٣}{٢} = \frac{١٤}{س}$

∴ $س = \frac{٢ \times ١٤}{٣} = \frac{٢٨}{٣} = ٩\frac{١}{٣}$

٥ يمتلئ خزّان ماء في ١٢ ساعة بواسطة صنبورَين . إذا تمّ فتح ٣ صنابير بالكفاءة نفسها فكم ساعة يحتاج هذا الخزّان ليمتلئ ؟

$\frac{١}{٣} = \frac{س}{١٢}$

∴ $س = \frac{١ \times ١٢}{٣} = ٤$ ساعات .

٤ ـ ٢ اِستخدام المعادلات لحلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية

Using Equations to Solve Percentages Problems

سوف تتعلّم : اِستخدام المعادلات لحلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية .

حُلّ وناقِش



يتكوّن كوب عصير من خليط (برتقال وشمندر وجزر) . إذا كان مقدار عصير البرتقال هو ١٤٤ مل ، وهو ما يمثّل نسبة ٦٠٪ من خليط العصير .

(أ) ما مقدار خليط العصير في الكوب ؟ .....

لنفرض أنّ كمّية خليط العصير في الكوب هي س .

أكمِل ما يلي : ٦٠٪ × ..... = ١٤٤

س = ١٤٤ / ٦٠٪ = ١٤٤ / ٦٠ × ١٠٠ = ١٤٤ / ٦٠ × ١٠٠ = ٢٤ × ١٠ = ٢٤٠ مل

.....

فتكون كمّية خليط العصير في الكوب تساوي ٢٤٠ مل .....

(ب) إذا كان مقدار عصير الجزر في الكوب = ٧٢ مل ، فما النسبة المئوية التي تمثّل مقدار عصير الجزر ؟ .....

لنفرض أنّ النسبة المئوية لعصير الجزر هي ص .

أكمِل ما يلي : ص × ٢٤٠ = ٧٢

ص = ٧٢ / ٢٤٠ × ١٠٠ = ٣ / ١٠ × ١٠٠ = ٣ × ١٠ = ٣٠٪

.....

إذًا نسبة عصير الجزر تساوي ٣٠٪ .....

تذكّر

- المعكوس الضربي للعدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ هو $\frac{ب}{أ}$ حيث أ ≠ ٠
- النسبة المئوية من عدد = النسبة المئوية × العدد

معلومة مفيدة :



تُستخدم النسب المئوية عند تحضير خليط العصائر ، وذلك لتحديد كمّية كلّ نوع في الخليط بدقّة ، بحيث يكون المجموع ١٠٠٪ ، وذلك يسهّل عملية زيادة الكمّية لأضعاف المرّات مع الحفاظ على المذاق والتركيز .

عبّر عن فهمك

بالرجوع إلى « حُلّ وناقِش » :

هل يمكنك بطريقة ذهنية أن تحسب النسبة المئوية التي تمثّل مقدار عصيرالشمندر في الخليط ؟

نعم

مثال (١) :

في إحدى المدارس يتناول ٥٦٠ متعلّمًا إفطارهم قبل الذهاب إلى المدرسة ويمثّلون ٧٠٪ من عدد متعلّمي المدرسة ، فما عدد متعلّمي المدرسة ؟

الحلّ :

لنفرض أنّ عدد متعلّمي المدرسة هو س فإنّ :

$٧٠٪ \times س = ٥٦٠$

$\frac{٧٠}{١٠٠} \times س = ٥٦٠$

$\frac{٧٠}{١٠٠} \times \frac{١٠٠}{٧٠} \times س = \frac{١٠٠}{٧٠} \times ٥٦٠$

$س = \frac{٥٦٠ \times ١٠٠}{٧٠}$

$س = ٨٠٠$

إذًا عدد متعلّمي المدرسة هو ٨٠٠ متعلّم .

معلومة مفيدة :



أهمّية وجبة الإفطار :

- تنشيط الدماغ
- تحسين الطاقة
- دعم الصحّة
- رفع التحصيل الدراسي

مثال (٢) :

(أ) **ما العدد الذي يمثّل ٣٠٠٪ من العدد ٢,١ ؟**

الحلّ :

لنفرض أنّ العدد هو ن فإنّ :

$ن = ٣٠٠٪ \times ٢,١$

$ن = \frac{٣٠٠}{١٠٠} \times ٢,١$

$ن = ٣ \times ٢,١ = ٦,٣$

إذًا العدد هو ٦,٣

(ب) **ما العدد الذي ٤٠٪ منه هو ٦٠ ؟**

الحلّ :

لنفرض أنّ العدد هو ن فإنّ :

$٤٠٪ \times ن = ٦٠$

$\frac{٤٠}{١٠٠} \times ن = ٦٠$

$ن = \frac{١٠٠}{٤٠} \times ٦٠$

$ن = ١٥٠$ إذًا العدد هو ١٥٠

اِنتبِه

في مسائل النسبة المئوية ، ميِّز بين اللفظَين :

- من
- منه

تذكَّر

النسبة المئوية = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكلّ}} \times ١٠٠ \%$

مثال (٣) :

ما النسبة المئوية التي تمثّل قيمة ٣٦ من ١٢٠ ؟

الحلّ :

لنفرض أنّ النسبة المئوية هي ن فإنّ :

ن من ١٢٠ = ٣٦

ن × ١٢٠ = ٣٦

ن × ١٢٠ × $\frac{١}{١٢٠}$ = ٣٦ × $\frac{١}{١٢٠}$ اِستخدِم المعكوس الضربي

ن = $\frac{٣}{١٠}$

ن = ٠,٣ بالقسمة وتحويل الكسر العشري إلى نسبة مئوية

ن = ٣٠ ٪

مثال (٤) :



بيعت إحدى ساعات اليد بتخفيض قدره ٢٠ ٪ من ثمنها الأصلي ، إذا كان ثمنها بعد التخفيض هو ٢٨ دينارًا ، فما ثمنها الأصلي قبل التخفيض ؟

الحلّ :

النسبة المئوية للبيع = ١٠٠ ٪ – النسبة المئوية للتخفيض

= ١٠٠ ٪ – ٢٠ ٪ = ٨٠ ٪

إذا كان الثمن الأصلي س ، فإنّ :

٨٠ ٪ × س = ٢٨

$\frac{٨٠}{١٠٠}$ × س = ٢٨

$\frac{٨٠}{١٠٠}$ × $\frac{١٠٠}{٨٠}$ × س = ٢٨ × $\frac{١٠٠}{٨٠}$ اِستخدِم المعكوس الضربي

س = $\frac{٢٨ \times ١٠٠}{٨٠}$ = ٣٥ بسِّط

إذًا ثمنها الأصلي قبل التخفيض = ٣٥ دينارًا

تمارين ذاتية :

١ أوجِد النسبة المئوية التي تمثّل ٣٥ من ٧٥

٢ أوجِد النسبة المئوية التي تمثّل ١٠ من ٤٠

٣ ما العدد الذي يمثّل ٤٥ ٪ من ٨٠ ؟

٤ ما العدد الذي يمثّل ٦٠ ٪ من ١٩٠ ؟

٥ ما العدد الذي ٥٠ ٪ منه هو ٤٠٠ ؟

٦ ١٢ ٪ من عدد ما يُعطي ٩ . فما هو العدد ؟

٧ في إحدى الشركات المتميّزة يمارس ١١٠ موظّفين الرياضة قبل الذهاب إلى العمل ، ويمثّلون ٥٥ ٪ من عدد موظّفي الشركة ، فما عدد موظّفي الشركة ؟

٨ أجرى محلّ للأثاث تخفيضًا بنسبة ٤٠ ٪ على طاولة سعرها الأصلي ٩٠ دينارًا ، فبكم سيبيع الطاولة بعد التخفيض ؟



٤ - ٣ النسبة المئوية التزايدية والنسبة المئوية التناقصية
Percent Increase and Percent Decrease

سوف تتعلّم : حلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية ونسبًا مئوية تناقصية .

العبارات والمفردات :

النسبة المئوية التزايدية Percent Increase

النسبة المئوية التناقصية Percent Decrease

إستكشِف

تمّ افتتاح أحد المواقع الإلكترونية عام ٢٠٢٣ م .

يوضّح الجدول المقابِل عدد زوّار الموقع خلال ثلاث سنوات .

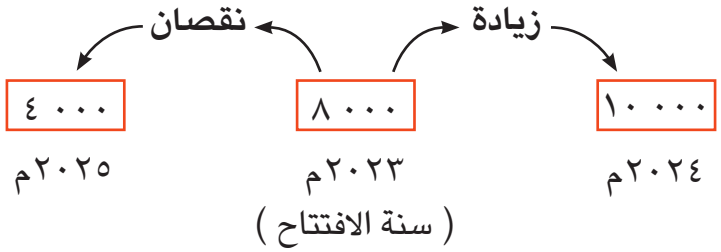
السنة	عدد الزوار
٢٠٢٣ م	٨٠٠٠
٢٠٢٤ م	١٠٠٠٠
٢٠٢٥ م	٤٠٠٠

١ أجِب عمّا يلي :

(أ) هل زاد أم نقص عدد الزوّار في ٢٠٢٤ م عن سنة الافتتاح ؟ ..... زاد

(ب) هل زاد أم نقص عدد الزوّار في ٢٠٢٥ م عن سنة الافتتاح ؟ ..... نقص

٢ من المخطّط التالي ، أجِب عن الأسئلة الآتية :



(أ) ما النسبة المئوية للزيادة لعدد الزوّار في العام ٢٠٢٤ م ؟

مقدار الزيادة = ١٠٠٠٠ - ٨٠٠٠ = ٢٠٠٠

نلاحِظ أنّ :

٨٠٠٠ (الأصل) تمثّل ١٠٠ ٪

٢٠٠٠ (مقدار الزيادة) تمثّل س ٪

نكوّن تناسبًا $\frac{٢٠٠٠}{٨٠٠٠} = \frac{س}{١٠٠}$

$س = \frac{٢٠٠٠ \times ١٠٠}{٨٠٠٠} = ٢٥$ ٪

إذًا النسبة المئوية للزيادة = ٢٥ ٪ (التزايدية)

معلومة مفيدة :



فهم التغيّرات باستخدام النسب المئوية يُعطي رؤى واضحة تساعد على تطوير المواقع الإلكترونية وزيادة فاعليتها .

(ب) ما النسبة المئوية للنقصان لعدد الزوّار في العام ٢٠٢٥ م ؟

مقدار النقصان = ٨ ٠٠٠ – ٤ ٠٠٠ = ٤ ٠٠٠

نلاحِظ أنّ :

٨ ٠٠٠ ← تمثّل ← ١٠٠ ٪ (الأصل)

٤٠٠٠ ← تمثّل ← س ٪ (مقدار النقصان)

نكوّن تناسبًا $\frac{\text{س}}{١٠٠} = \frac{٤٠٠٠}{٨٠٠٠}$

$\text{س} = \frac{٤٠٠٠ \times ١٠٠}{٨٠٠٠} = ٥٠ ٪$

إذًا النسبة المئوية للنقصان = ٥٠ ٪ **(التناقصية)**

النسبة المئوية للتغيّر $= \frac{\text{مقدار التغيّر}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠ ٪$

التغيّر يكون إمّا بالزيادة أو بالنقصان .

مثال (١) :

اِشترى محمّد جهاز حاسوب بخصم ١٥ ٪ ومقدار هذا الخصم ٢٢٥ دينارًا كويتيًّا ، فما ثمن الحاسوب الأصلي ؟ وكم دفع محمّد للجهاز ؟

الحلّ :

لنفرض أنّ ثمن الحاسوب الأصلي = س

النسبة المئوية للتغيّر (الخصم) $= \frac{\text{مقدار التغيّر (الخصم)}}{\text{السعر الأصلي}} \times ١٠٠ ٪$

$١٥ ٪ = \frac{٢٢٥}{\text{س}} \times ١٠٠ ٪$

$\frac{١٥}{١٠٠} = \frac{٢٢٥}{\text{س}} \Leftarrow \text{س} = \frac{٢٢٥ \times ١٠٠}{١٥}$

إذًا ثمن الحاسوب الأصلي = ١ ٥٠٠ دينار

إذًا الثمن الذي دفعه للشراء = ١ ٥٠٠ – ٢٢٥ = ١ ٢٧٥ دينارًا

اِنتبِه

ثمن الشراء =

السعر الأصلي – مقدار الخصم

دورك الآن (١)

موظَّف راتبه ١ ٢٠٠ دينارًا . إذا زاد راتبه بنسبة ٥٪ ، فما هو مقدار الزيادة بالدينار ؟ وكم أصبح راتبه بعد الزيادة ؟

النسبة المئوية للزيادة = ٥٪ = $\frac{٥}{١٠٠}$ ∴ $\frac{س}{١٢٠٠} = \frac{٥}{١٠٠}$

∴ س = $\frac{١٢٠٠ \times ٥}{١٠٠}$ = ١٢ × ٥ = ٦٠ دينارًا

∴ الراتب أصبح = ١٢٠٠ + ٦٠ = ١٢٦٠ دينارًا

مثال (٢) :

في أحد المحلّات التجارية كان عدد الزبائن يوم الثلاثاء ٦٠٠ شخص ، وفي يوم الأربعاء انخفض العدد إلى ٤٥٠ شخصًا .

(أ) أوجِد النسبة المئوية للانخفاض في عدد الزبائن ليوم الأربعاء .

الحلّ :

مقدار (النقصان) = ٦٠٠ − ٤٥٠ = ١٥٠

النسبة المئوية التناقصية = $\frac{١٥٠}{٦٠٠} \times ١٠٠٪ = ٢٥٪$

إذًا النسبة المئوية للانخفاض (التناقصية) = ٢٥٪

(ب) إذا زاد عدد الزبائن ليوم الخميس بنسبة ٦٠٪ عن يوم الثلاثاء ، فأوجِد مقدار الزيادة في عدد الزبائن ليوم الخميس ، ثمّ أوجِد العدد الكلّي للزبائن في هذا اليوم .

الحلّ :

لنفرض أنّ الزيادة في عدد الزبائن هو س

النسبة المئوية التزايدية = $\frac{\text{مقدار الزيادة}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠٪$

٦٠٪ = $\frac{س}{٦٠٠} \times ١٠٠٪$

$\frac{س}{٦٠٠} = \frac{٦٠}{١٠٠}$

س = $\frac{٦٠ \times ٦٠٠}{١٠٠}$

س = ٣٦٠

إذًا مقدار الزيادة في عدد الزبائن هو ٣٦٠

إذًا العدد الكلّي للزبائن يوم الخميس = ٦٠٠ + ٣٦٠ = ٩٦٠ شخصًا

انتبه

١٠٠٪ = $\frac{١٠٠}{١٠٠}$ = ١

انتبه

القيمة النهائية =
القيمة الأصلية + مقدار الزيادة

مثال (٣) :



جهاز رياضي سعره الأصلي ١٢٠ دينارًا
يُضاف إليه نسبة ١٢ ٪ خدمة توصيل .
فما ثمنه عند التوصيل ؟

الحلّ :

لنفرض أنّ س هي مقدار الزيادة .

$$\text{١٢٪} = \frac{\text{س}}{\text{١٢٠}} \times \text{١٠٠٪}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{١٢٠}} = \frac{\text{١٢}}{\text{١٠٠}}$$

$$\text{س} = \frac{\text{١٢٠} \times \text{١٢}}{\text{١٠٠}} = \frac{\text{١٤٤٠}}{\text{١٠٠}}$$

إذًا (س) مقدار الزيادة = ١٤,٤ دينارًا

إذًا الثمن عند التوصيل = ١٢٠ + ١٤,٤ = ١٣٤,٤ دينارًا

انتبه

١٢٪ خدمة التوصيل تعني
١٢٪ من قيمة الفاتورة

دورك الآن (٢)

إذا كان سعر جرام الذهب ٣٠ دينارًا ، ثمّ انخفض بنسبة ٦٪
فما هو مقدار انخفاض سعر جرام الذهب ؟ وكم أصبح سعره بعد الزيادة ؟

النسبة المئوية للتغير = ٦٪ = $\frac{\text{س}}{\text{٣٠}} \times \text{١٠٠٪}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{٣٠}} = \frac{\text{٦}}{\text{١٠٠}}$

∴ س = $\frac{\text{٣٠} \times \text{٦}}{\text{١٠٠}}$ = ١٫٨ دينارًا

∴ السعر بعد الانخفاض = ٣٠ − ١٫٨ = ٢٨٫٢ دينارًا

تمارين ذاتية :



١ باعت إحدى المكتبات خلال مهرجان هلا فبراير ٦٠٠ كتاب ، ثمّ باعت ٤٥٠ كتابًا في شهر مارس ، بيِّن نوع التغيّر ما إذا كان زيادة أم نقصانًا ، ثمّ أوجِد النسبة المئوية للتغيّر .

نقصان = ٦٠٠ − ٤٥٠ = ١٥٠ كتابًا

النسبة المئوية للتغير = $\frac{١٥٠}{٦٠٠} \times ١٠٠ = \frac{١}{٤} \times ١٠٠ = ٢٥\%$



٢ معدّل تساقط الأمطار سنويًّا في الكويت خلال شهر فبراير هو ٢٤ مم ، وخلال شهر مارس ٢١ مم . بيِّن نوع التغيّر من زيادة أو نقصان ، ثمّ أوجِد النسبة المئوية للتغيّر في معدّل تساقط الأمطار خلال الشهرَين .

نقصان = ٢٤ − ٢١ = ٣

النسبة المئوية للتغير = $\frac{٣}{٢٤} \times ١٠٠ = \frac{١}{٨} \times ١٠٠ = ١٢,٥\%$



٣ تحوي علبة من الحليب المخصَّصة للدعاية نسبة زيادة مجّانية ٣٠ ٪ عمّا تحويه العلبة الأصلية ، إذا كانت سعة علبة الحليب الأصلية ٤ لترات ، فما السعة الزائدة عن العلبة الأصلية ؟ وما سعة علبة العروض ؟

$\frac{س}{٤} = ٣٠\%$ ∴ $س = \frac{٣٠}{١٠٠} \times ٤ = \frac{٣٠}{٢٥} \times ١ = \frac{٦}{٥} = ١,٢$ لتر

∴ سعة علبة العروض = ٤ + ١,٢ = ٥,٢ لتر

٤ يبلغ عدد سكّان مدينة ما ٨٠ ٠٠٠ نسمة في أحد الأعوام . إذا زاد عددهم بنسبة ١٢٪ في العام التالي ، فكم يصبح عدد السكّان بعد الزيادة ؟

نسبة الزيادة = ١٢ ٪ = $\frac{س}{٨٠٠٠٠} \times ١٠٠\%$ ∴ $\frac{س}{٨٠٠٠٠} \times ١ = \frac{١٢}{١٠٠}$

∴ $س = \frac{٨٠٠٠٠ \times ١٢}{١٠٠} = ٩٦٠٠$ نسمة

عدد السكان بعد الزيادة = ٨٠٠٠٠ + ٩٦٠٠ = ٨٩ ٦٠٠ نسمة .

٤ - ٤

الانعكاس – التناظر حول نقطة
Reflection - Symmetry at the Point

سوف تتعلّم : الانعكاس في محور – الانعكاس في نقطة في (المستوى – المستوى الإحداثي) – التناظر حول نقطة .

العبارات والمفردات :

التحويل الهندسي	Transformation	الانعكاس في نقطة	Reflection of a Point
الانعكاس في محور	Reflection in an Axis	التناظر حول نقطة	Symmetry at the Point

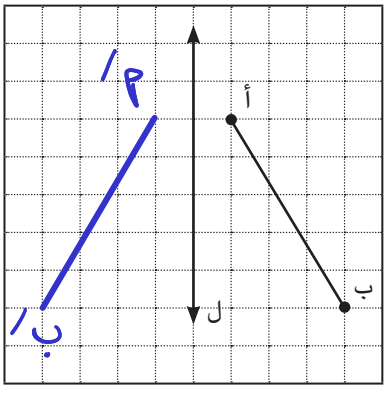


الانعكاس في الطبيعة يخلق صورًا ساحرة تشبه اللوحات الفنّية ، ويمنح المشهد توازنًا وتناظرًا يُبهر العين .

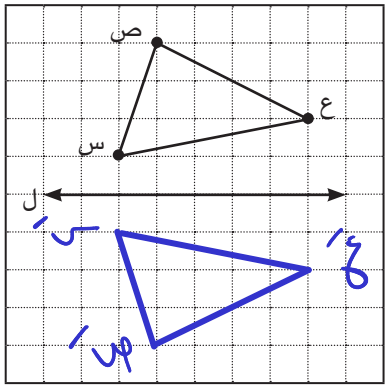
اِستكشِف (١) :

١ أُرسم صورة كلّ ممّا يلي بالانعكاس في المحور ل .

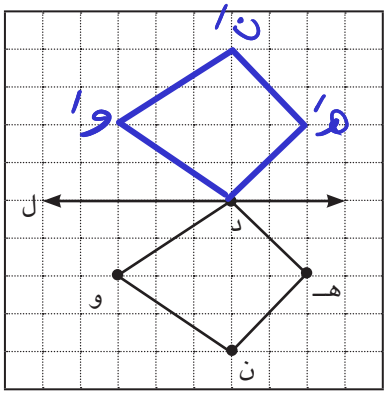
(أ)



(ب)



(ج)



تذكَّر

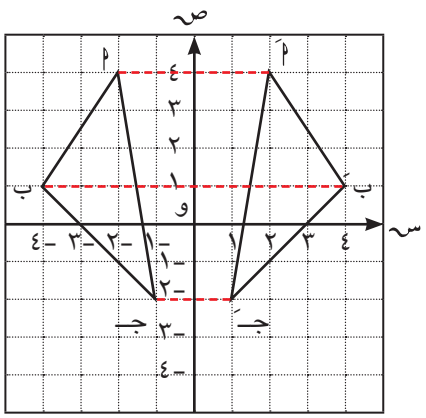
إذا كانت النقطة واقعة على محور الانعكاس ، فإنّ صورتها تكون النقطة نفسها وتُسمّى نقطة صامدة .

٢ في المستوى الإحداثي حدِّد نوع الانعكاس في كلّ من الأشكال الآتية ، ثمّ اكتب إحداثيَّي كلّ نقطة وصورتها :

تذكَّر

(س ، ص) زوج مرتَّب
س: الإحداثي السيني
ص: الإحداثي الصادي

(أ)



انعكاس في المحور ص

أ (ـ٢ ، ٤) ← أَ (٢ ، ٤)

ب (ـ٤ ، ١) ← بَ (٤ ، ١)

جـ (ـ١ ، ـ٢) ← جـَ (١ ، ـ٢)

وبصورة عامّة :

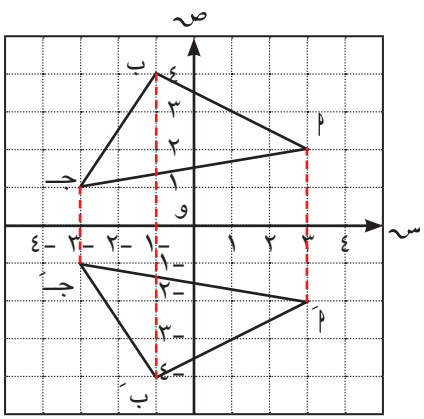
(س ، ص) ← (بالانعكاس في محور الصادات) (ـ س ، ص)

وتُكتب : (س ، ص) $\xrightarrow{ع_{س}}$ (ـ س ، ص)

لاحِظ أنّ :

- الانعكاس في المحور الصادي يغيّر الإحداثي السيني للنقطة إلى معكوسه الجمعي .

(ب)



انعكاس في المحور س

أ (٣ ، ٢) ← أَ (٣ ، ـ٢)

ب (ـ١ ، ٤) ← بَ (ـ١ ، ـ٤)

جـ (ـ٣ ، ١) ← جـَ (ـ٣ ، ـ١)

وبصورة عامّة :

(س ، ص) ← (بالانعكاس في محور السينات) (س ، ـ ص)

وتُكتب : (س ، ص) $\xrightarrow{ع_{س}}$ (س ، ـ ص)

لاحِظ أنّ :

- الانعكاس في المحور السيني يغيّر الإحداثي الصادي للنقطة إلى معكوسه الجمعي .

دورك الآن (١)

أكمِل ما يلي من دون رسم:

أ) (٤ ، -٦) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ (-٤ ، -٦)

ب) (٤ ، -٦) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ (٤ ، ٦)

ج) (٠ ، ٧) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ (٠ ، -٧)

د) (٠ ، -٧) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ (٠ ، ٧)

هـ) (-٨ ، ٠) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ (٨ ، ٠)

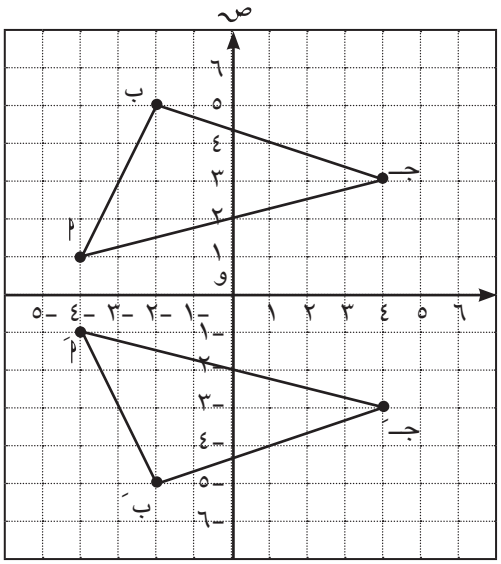
و) (٨ ، ٠) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ (-٨ ، ٠)

ز) (-٥ ، ٦) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ (-٥ ، -٦)

ح) (-٥ ، ٦) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ (٥ ، -٦)

مثال (١) :

إذا كانت أ (-٤ ، ١) ، ب (-٢ ، ٥) ، جـ (٣ ، ٤) رؤوس المثلّث أ ب جـ . فأوجِد صورة كلّ من أ ، ب ، جـ ، بالانعكاس في محور السينات ، ثمّ ارسم المثلّث أ ب جـ وصورته .



الحلّ :

(س ، ص) $\xrightarrow{\text{بالانعكاس في محور السينات}}$ (س ، -ص)

أ (-٤ ، ١) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ أَ (-٤ ، -١)

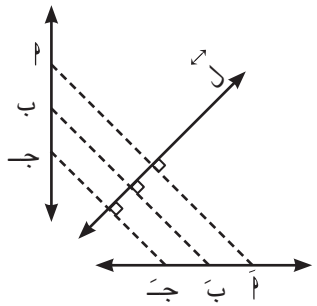
ب (-٢ ، ٥) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ بَ (-٢ ، -٥)

جـ (٣ ، ٤) $\xrightarrow{\text{ع}_{س}}$ جـَ (٣ ، -٤)

خواصّ الانعكاس في محور

١ الانعكاس في محور يحافظ على الاستقامة .

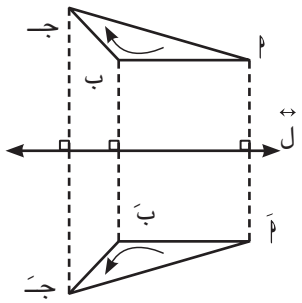
٢ الانعكاس في محور يحافظ على البينية .



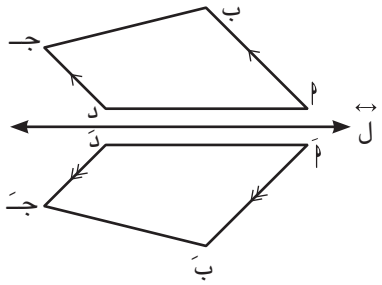
٣ الانعكاس في محور يحافظ على قياس الزوايا .

٤ الانعكاس في محور يحافظ على الأطوال .

٥ الانعكاس في محور يعكس الاتّجاه الدوراني .



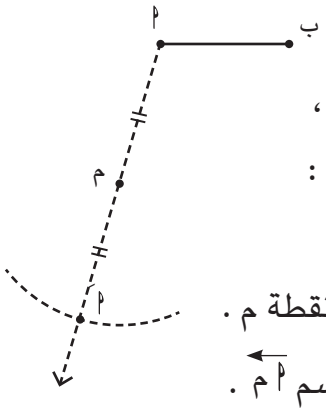
٦ الانعكاس في محور يحافظ على التوازي .



الانعكاس في نقطة في المستوى

اِستكشِف (٢) :

في الشكل المجاور :



رُسمت كلّ من $\overline{أب}$ والنقطة م في المستوى ،

م $\notin \overline{أب}$ ، رسمنا $\overleftarrow{أم}$ ونأخذ عليه أَ بحيث :

أ م = أ أَ م .

نسمّي أَ صورة النقطة أ بالانعكاس في النقطة م .

- باستخدام المسطرة ، أُرسم $\overleftarrow{ب م}$ كما رُسم $\overleftarrow{أم}$.
- باستخدام الفرجار ، قِس طول ب م .
- بنفس فتحة الفرجار ثبِّت السنّ عند م ،

ثمّ ارسم قوسًا يقطع $\overleftarrow{ب م}$ في نقطة ولتكن بَ .

- صِل أَ ، بَ لتحصل على $\overline{أَبَ}$.

نسمّي أَ ، بَ صورتَي النقطتَين أ ، ب بالانعكاس في النقطة م .

وأيضًا $\overline{أَبَ}$ صورة $\overline{أب}$ بالانعكاس في النقطة م .

اللوازم :

- فرجار
- مسطرة

تذكَّر

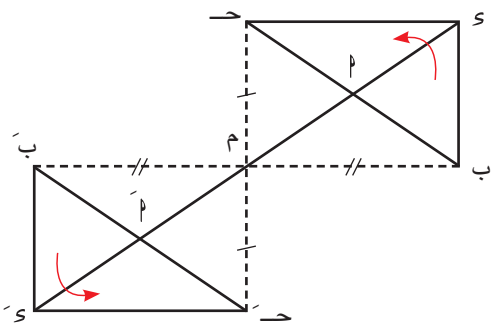
عندما تغيّر موضع أو أبعاد شكل ما بنسبة معيَّنة في المستوى ، فإنّك بذلك تُجري تحويلًا هندسيًّا .

لاحِظ أنّ : ١ $\overline{أَبَ}$ // $\overline{أب}$

٢ أَبَ = أب

الانعكاس في نقطة مثل م : هو تحويل هندسي يعيّن لكلّ نقطة أ في المستوى صورة أَ $\in \overleftarrow{أم}$ بحيث تكون أ م = أَ م . والنقطة الوحيدة التي تقترن بنفسها هي النقطة م التي تُسمّى **مركز الانعكاس** ، حيث **م نقطة صامدة** .

خواصّ الانعكاس في نقطة :



١ الانعكاس في نقطة يحافظ على الاستقامة .

٢ الانعكاس في نقطة يحافظ على البينية .

٣ الانعكاس في نقطة يحافظ على قياس الزوايا .

٤ الانعكاس في نقطة يحافظ على الأطوال .

٥ الانعكاس في نقطة يحافظ على الاتّجاه الدوراني .

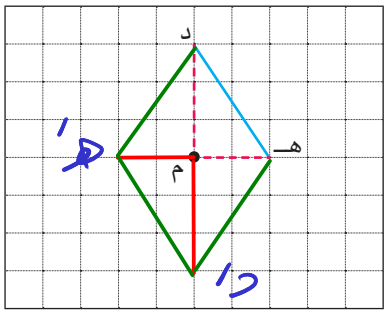
٦ الانعكاس في نقطة يحافظ على التوازي .

التناظر حول نقطة في المستوى

اِستكشِف (٣) :

من الشكل المقابِل ، أكمِل رسم الشكل الرباعي د هـ دَ هـَ ، بحيث دَ صورة د بالانعكاس في النقطة م ، هـَ صورة هـ بالانعكاس في النقطة م .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :



د ⟵ د' .....

هـ ⟵ هـ' .....

دَ ⟵ د .....

هـَ ⟵ هـ .....

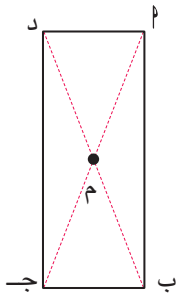
∴ الشكل الرباعي د هـ دَ هـَ ⟵ الشكل الرباعي د هـ د' هـ' ..... بالانعكاس في النقطة م .

ممّا سبق ، نجد أنّ الشكل الرباعي د هـ دَ هـَ متناظر حول النقطة م (نقطة تقاطع قطرَيه).

يُقال لشكل هندسي إنّه متناظر حول نقطة إذا كانت صورته بالانعكاس في هذه النقطة هي الشكل نفسه .

دورك الآن (٢)

أيّ الأشكال الآتية متناظر حول نقطة ملتقى قطرَيه ؟ وضِّح ذلك .

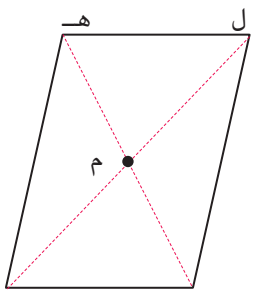


(مستطيل)

نعم ، لأن

م م = م هـ

د م = م ب

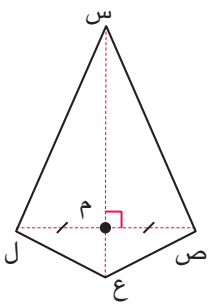


(متوازي أضلاع)

نعم لأنه

ل م = م ب

هـ م = م و



(طائرة ورقية)

ل ، ب ، س ، ع م ≠ ص م

تذكَّر

- من خواصّ المستطيل أنّ القطرَين ينصّف كلّ منهما الآخر وهما متطابقان .
- في متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .

معلومة مفيدة



في الطائرة الورقية القطران متعامدان فقط .

الانعكاس في نقطة الأصل في مستوى الإحداثيات

إستكشِف (٤) :

إستعِن بالمستوى الإحداثي المجاور ، وباستخدام المسطرة والفرجار كما في «إستكشِف(٢)» السابق ، أوجِد صور النقاط الآتية بالانعكاس في النقطة و (نقطة الأصل) :

أ (٣ ، ٥) ← أَ (٣- ، ٥-)

ب (٤- ، ٢-) ← بَ (٤ ، ٢)

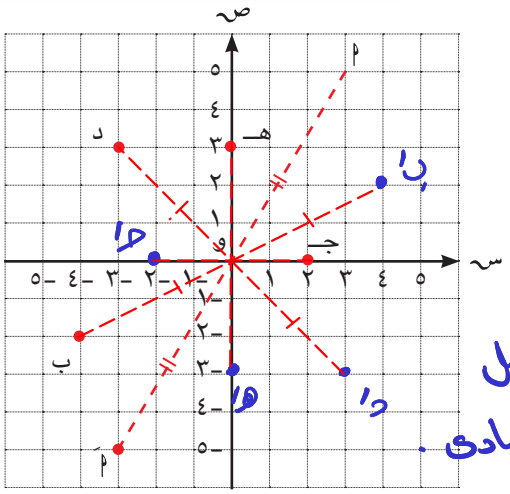
جـ (٢ ، ٠) ← جـَ (٢- ، ٠)

د (٣- ، ٣) ← دَ (٣ ، ٣-)

هـ (٠ ، ٣) ← هـَ (٠ ، ٣-)

اللوازم :

- فرجار
- مسطرة



ماذا تلاحظ ؟ أن صورة الانعكاس في نقطة الأصل تتم تحويل المعكوس الجمعي للإحداثي السيني والصادي .

في المستوى الإحداثي الانعكاس في نقطة الأصل هو تحويل هندسي يعيّن لكلّ نقطة في المستوى صورة إحداثيها السيني وإحداثيها الصادي هما المعكوس الجمعي للإحداثي السيني والصادي لهذه النقطة .

عمومًا : الانعكاس في نقطة الأصل (و) : أ (س ، ص) $\xrightarrow{ع_و}$ أَ (- س ، - ص)

مثال (٢) :

إذا كان Δ لَ مَ نَ هو صورة Δ ل م ن بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت ل (٠ ، ٢) ، م (٣ ، ٤) ، ن (٤- ، ٤) ، فعيِّن إحداثيات الرؤوس لَ ، مَ ، نَ ، ثمّ ارسم المثلّثَين في مستوى الإحداثيات .

الحلّ :

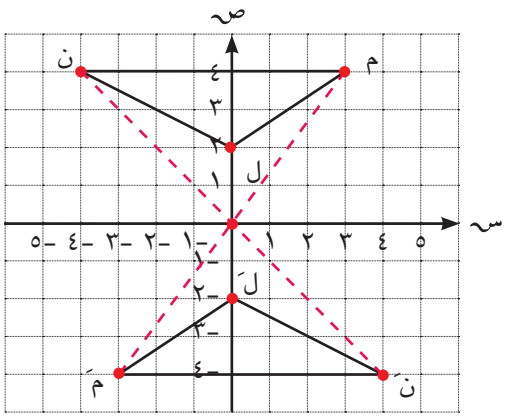
بالانعكاس في و(ع و) :

(س ، ص) $\xrightarrow{ع_و}$ (- س ، - ص)

ل (٠ ، ٢) ← لَ (٠ ، ٢-)

م (٣ ، ٤) ← مَ (٣- ، ٤-)

ن (٤- ، ٤) ← نَ (٤ ، ٤-)

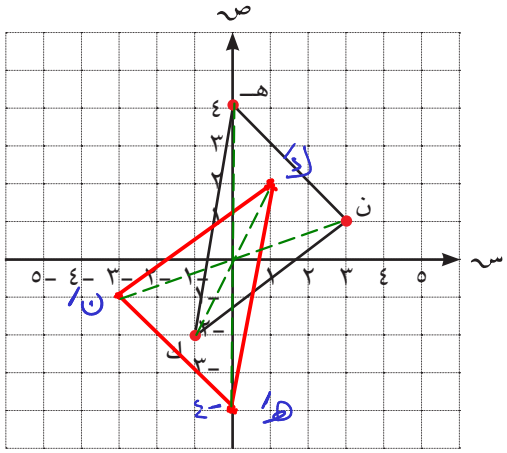


ملاحظة :

الشكل الهندسي وصورته بالانعكاس في نقطة متطابقان .

دورك الآن (٣)

إذا كان Δ هـ كَ نَ هو صورة Δ هـ ك ن بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت هـ (٠ ، ٤) ، ك (-١ ، -٢) ، ن (٣ ، ١) ، فعيِّن إحداثيات الرؤوس هـَ ، كَ ، نَ ، ثمّ ارسم Δ هـَ كَ نَ في مستوى الإحداثيات .



هـ (٠ ، ٤) ⟵ هـَ (٠ ، -٤)

ك (-١ ، -٢) ⟵ كَ (١ ، ٢)

ن (٣ ، ١) ⟵ نَ (-٣ ، -١)

عبّر عن فهمك

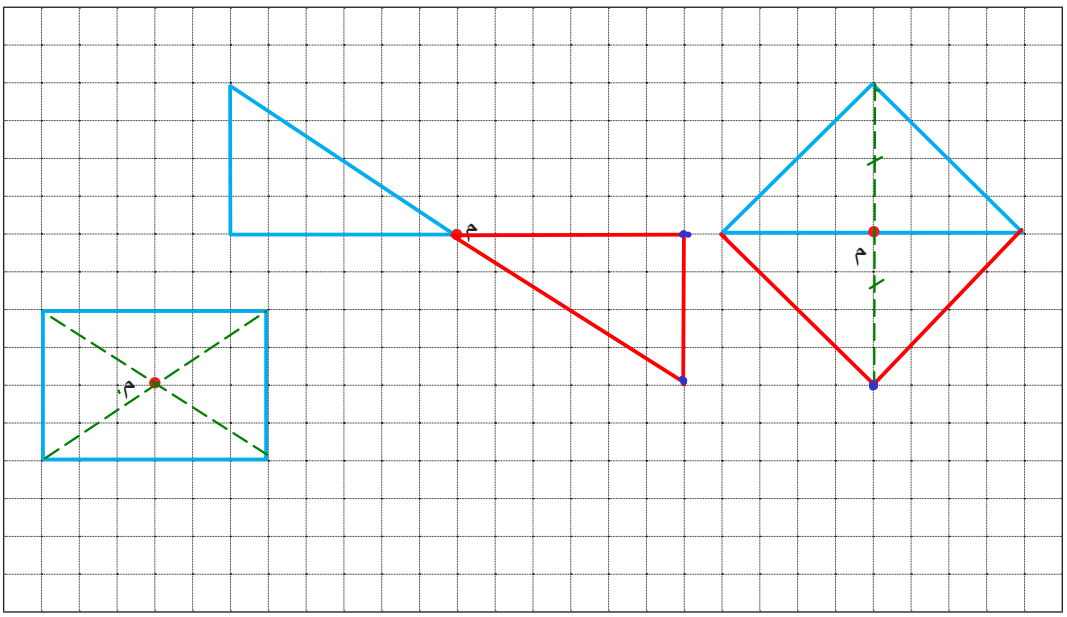
يرى خالد أنّ الانعكاس في نقطة الأصل يكافئ انعكاسًا في المحور السيني يليه انعكاس في المحور الصادي أو العكس . فهل رأي خالد صحيح ؟ فسِّر ذلك .

نعم لأنه الانعكاس فى نقطة الأصل يكافئ تحويل المعكوس الجمعى للإحداثى السينى ثم الصادى والعكس.

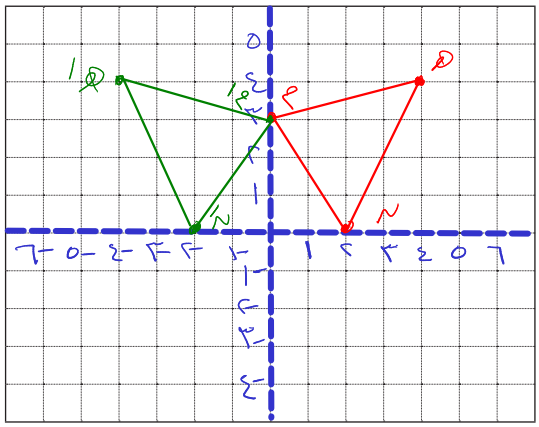
(س ، ص) ⟵ (-س ، -ص)

تمارين ذاتية :

١ أُرسم صورة كلّ شكل من الأشكال الآتية بالانعكاس في النقطة م .

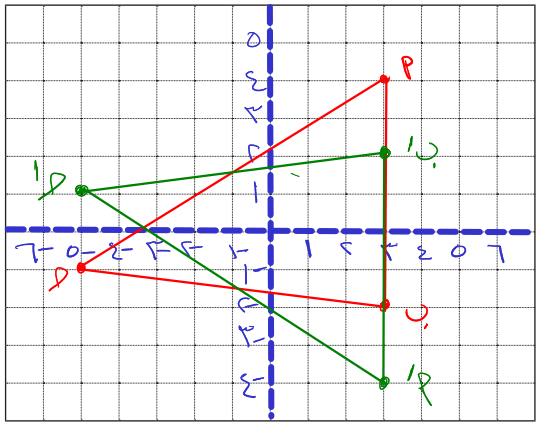


٢ إذا كانت م (٠ ، ٣) ، ن (٢ ، ٠) ،
هـ (٤ ، ٤) ، فأوجِد صورة كلّ من
م ، ن ، هـ بالانعكاس في محور الصادات ،
ثمّ ارسم المثلّث م ن هـ وصورته .



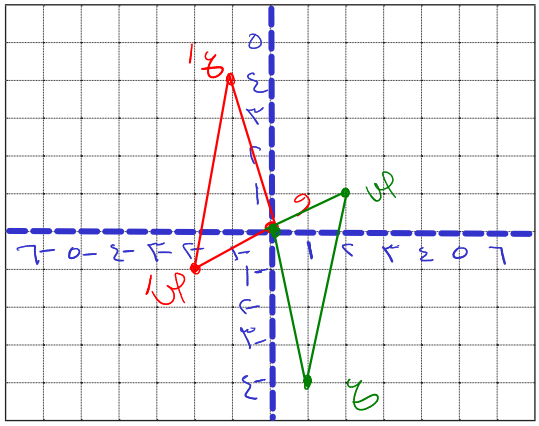
م (٣، ٠) ـــ ع ص ← م' (-٣، ٠)
ن (٢، ٠) ـــ ع ص ← ن' (-٢، ٠)
هـ (٤، ٤) ـــ ع ص ← هـ' (-٤، ٤)

٣ إذا كان Δ أ ب جـ هو صورة
Δ أ ب جـ بالانعكاس في محور السينات ،
وكانت أ (٣ ، ٤) ، ب (٣ ، -٢) ، جـ (-٥ ، -١) ،
فعيِّن إحداثيات الرؤوس أ' ، ب' ، جـ' ،
ثمّ ارسم المثلّثَين في مستوى الإحداثيات .



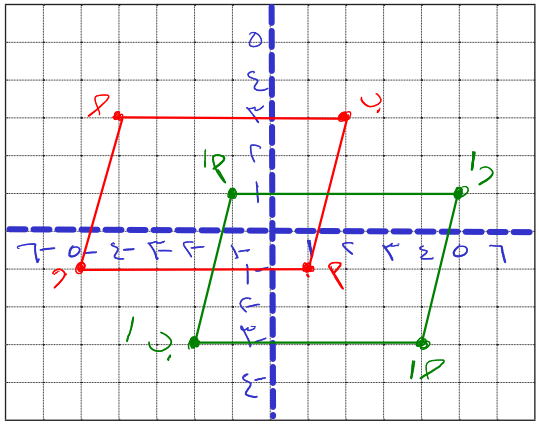
أ (٣، ٤) ـــ ع س ← أ' (٣، -٤)
ب (٣، -٢) ـــ ع س ← ب' (٣، ٢)
جـ (-٥، -١) ـــ ع س ← جـ' (-٥، ١)

٤ إذا كان Δ و صَ عَ هو صورة Δ و ص ع بالانعكاس
في نقطة الأصل (و) ، وكانت و (٠ ، ٠) ،
صَ (-٢ ، -١) ، عَ (-١ ، ٤) ، فعيِّن إحداثيات
الرؤوس و ، ص ، ع ،
ثمّ ارسم المثلّثَين في مستوى الإحداثيات .



و (٠، ٠) ـــ ع و ← و (٠، ٠)
صَ (-٢، -١) ـــ ع و ← ص (٢، ١)
عَ (-١، ٤) ـــ ع و ← ع (١، -٤)

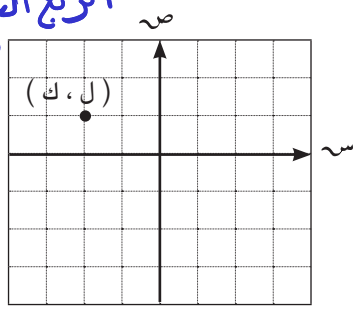
٥ إذا كان الشكل الرباعي أَ بَ جـَ دَ هو صورة الشكل الرباعي أ ب جـ د بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت أ (١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (-٤ ، ٣) ، د (-٥ ، -١) .
فعيِّن إحداثيات الرؤوس أَ ، بَ ، جـَ ، دَ ،
ثمّ ارسم الشكلَين الرباعيَّين في مستوى الإحداثيات .



أ (١،-١) ← أ'(-١،١) ، ب(٢،٣) ← ب'(-٢،-٣)
جـ(-٤،٣) ← جـ'(٤،-٣) ، د(-٥،-١) ← د'(٥،١)

مهارات تفكير عليا :

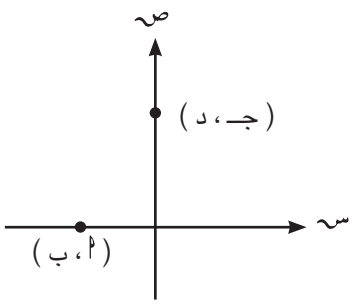
٦ في المستوى الإحداثي المرسوم ، عُيِّنت النقطة (ل ، ك) فيه .
فأيّ العبارات الآتية ليست صحيحة ؟



الربع الثاني (-،+)

(أ) ل × ك < ٠
(ب) ل > ك
(ج) ل + ك = ٠
(د) ك عدد موجَب

٧ بالنظر إلى الشكل المرسوم ، فإنّ ناتج كلّ ممّا يلي مساوٍ للصفر ما عدا :



(أ) أ × ب
(ب) أ × جـ
(ج) أ × د
(د) ب × جـ

٤ ـ ٥ الإزاحة في المستوى الإحداثي
Translation in a Coordinate Plane

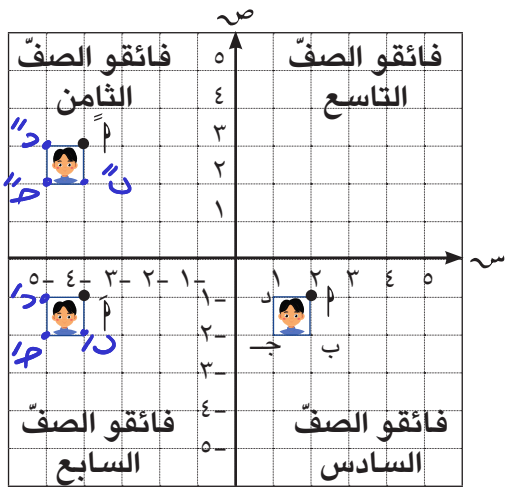
سوف تتعلّم : رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي – كتابة قاعدة الإزاحة .

العبارات والمفردات :

الإزاحة	Translation

اِستكشِف (١)

أعدّ قسم الرياضيات لوحة شرف لفائقي الرياضيات على شكل شبكة إحداثية تُرتَّب فيها صور الطلّاب المتفوّقين حيث تُمثَّل صورة كلّ طالب بنقطة على مستوى الإحداثيات. إذا كانت هذه المواضع التي أخذتها صورة أحمد من الصفّ السادس إلى الصفّ الثامن فالنقطة :



أ (٢ ، ـ١) تمثّل موقع أحد رؤوس صورة أحمد عند تفوّقه في الصفّ السادس ،

أَ (ـ٤ ، ـ١) تمثّل موقع أحد رؤوس صورة أحمد عند تفوّقه في الصفّ السابع ،

أً (ـ٤ ، ٣) تمثّل موقع أحد رؤوس صورة أحمد عند تفوّقه في الصفّ الثامن ،

صِف التغيّر الذي حُدِّد للصورة ، وأكمِل كلًّا ممّا يلي :

١ أ (٢ ، ـ١) ← أَ (ـ٤ ، ـ١)

٢ أَ (ـ٤ ، ـ١) ← أً (ـ٤ ، ٣)

٣ أ (٢ ، ـ١) ← أً (ـ٤ ، ٣)

لاحِظ التغيير في كلّ من الإحداثي السيني والصادي لكلّ نقطة مع صورتها ، ثمّ أكمِل كلًّا ممّا يلي :

٤ أ (٢ ، ـ١) ← أً (٢ ـ ٦ ، ـ١ + ٤)

٥ هل يمكنك تطبيق ذلك على النقاط ب ، جـ ، د ؟

ب (٢ ، -٢) ⟵ ب′ (-٤ ، ٢)

جـ (١ ، -٢) ⟵ جـ′ (-٥ ، ٢)

د (١ ، -١) ⟵ د′ (-٥ ، ٣)

٦ ماذا تلاحظ ؟ (س ، ص) ⟵ (س - ٦ ، ص + ٤)

٧ هل تغيّرت أبعاد صورة أحمد خلال إزاحتها في لوحة الشرف ؟

لا ، لم تتغير

الإزاحة هي : تحويل هندسي يسمح لنا بالحصول على صورة أيّ شكل من خلال نقل كلّ نقطة فيه مسافة ثابتة على خطّ مستقيم وفي اتّجاه محدَّد ، ولا تغيّر الإزاحة من الشكل وقياساته .

وتكون الإزاحة في اتّجاه محورَي الإحداثيات وفق الجدول الآتي :

النقطة	صورة النقطة تحت تأثير الإزاحة	
(س ، ص)	الإزاحة جهة **اليمين** بمقدار (أ) وحدة (س + أ ، ص)	الإزاحة **إلى أعلى** بمقدار (ب) وحدة (س ، ص + ب)
	الإزاحة جهة **اليسار** بمقدار (أ) وحدة (س - أ ، ص)	الإزاحة **إلى أسفل** بمقدار (ب) وحدة (س ، ص - ب)

دورك الآن (١)

أوجِد صورة النقطة أ (-٣ ، ٥) تحت تأثير إزاحة ٤ وحدات إلى اليمين ، ثمّ وحدتَين ونصف إلى الأسفل .

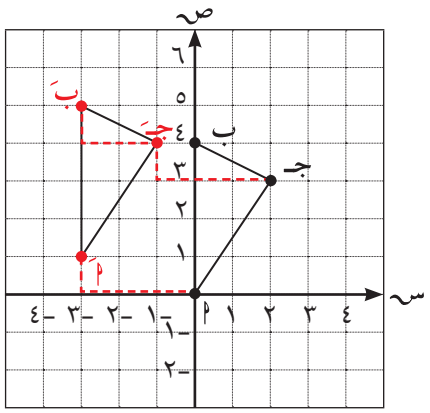
القاعدة : (س ، ص) ⟵ (س + ٤ ، ص - ٢,٥)

أ (-٣ ، ٥) ⟵ أ′ (-٣ + ٤ ، ٥ - ٢,٥)

أ (-٣ ، ٥) ⟵ أ′ (١ ، ٢,٥)

مثال (١) :

في المستوى الإحداثي ، أُرسم المثلّث أ ب جـ الذي رؤوسه هي أ (٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤) ، جـ (٢ ، ٣) ثمّ ارسم صورة المثلّث أ ب جـ تحت تأثير إزاحة ثلاث وحدات إلى اليسار ثمّ وحدة واحدة إلى الأعلى :



الحلّ :

(س ، ص) ⟵ (س - ٣ ، ص + ١)

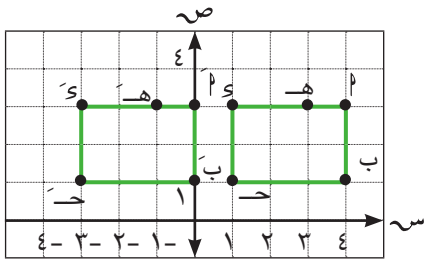
أ (٠ ، ٠) ⟵ أَ (- ٣ ، ١)

ب (٠ ، ٤) ⟵ بَ (- ٣ ، ٥)

جـ (٢ ، ٣) ⟵ جـَ (- ١ ، ٤)

مثال (٢) :

صِف التحويل الذي ينقل المستطيل أ ب حـ ء إلى المستطيل أَ بَ حـَ ءَ ، ثمّ اكتب القاعدة بصورة رمزية .



الحلّ :

التحويل هو إزاحة الى اليسار بمسافة قدرها ٤ وحدات .

م (س ، ص) ⟵ مَ (س - ٤ ، ص)

خواصّ الإزاحة في المستوى الإحداثي

ومن « المثال ٢ » السابق ، نلاحظ أنّ :

النقطة هـ تقع بين أ ، ء والنقطة هـَ أيضًا تقع بين أَ ، ءَ

وعمومًا فالإزاحة تحافظ على البينية

النقاط أ ، هـ ، ء على استقامة واحدة ، وكذلك النقاط أَ ، هـَ ، ءَ على استقامة واحدة .

وعمومًا فالإزاحة تحافظ على الاستقامة

أ ب = أَ بَ ، ب حـ = بَ حـَ ، حـ ء = حـَ ءَ ، أ ء = أَ ءَ

وعمومًا فالإزاحة تحافظ على قياسات الأطوال

ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{أَ}$) ، ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{بَ}$) ، ق ($\hat{حـ}$) = ق ($\hat{حـَ}$) ، ق ($\hat{ء}$) = ق ($\hat{ءَ}$)

وعمومًا فالإزاحة تحافظ على قياس الزوايا

لاحِظ : $\overline{أب}$ // $\overline{ء حـ}$ وكذلك $\overline{أ'ب'}$ // $\overline{ء'حـ'}$

وبالمثل $\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$ وكذلك $\overline{أ'ء'}$ // $\overline{ب'حـ'}$

وعمومًا فالإزاحة تحافظ على التوازي

مثال (٣) :

إذا كانت م' (-٣ ، ٥) هي صورة النقطة م (٢ ، ١) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، فأوجِد قاعدة الإزاحة ثمّ تحقّق من صحّتها .

الحلّ :

نعلم أنّ قاعدة الإزاحة هي : (س ، ص) ⟵ (س + أ ، ص + ب)

م (٢ ، ١) ⟵ م' (٢ + أ ، ١ + ب)

∵ م (٢ ، ١) ⟵ م' (-٣ ، ٥)

(الإحداثي السيني)	(الإحداثي الصادي)
∴ ٢ + أ = -٣	∴ ١ + ب = ٥
أ = -٣ - ٢	ب = ٥ - ١
أ = -٥	ب = +٤
(٥ وحدات إلى اليسار)	(٤ وحدات إلى الأعلى)

(س ، ص) ⟵ (س - ٥ ، ص + ٤)

التحقّق : (٢ ، ١) ⟵ (٢ - ٥ ، ١ + ٤)

∴ (٢ ، ١) ⟵ م' (-٣ ، ٥)

دورك الآن (٢)

أكمِل الجدول الآتي :

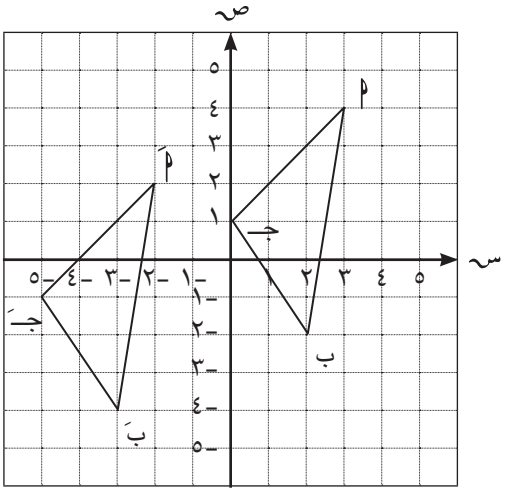
القاعدة	(س ، ص) ⟵ (س + ٣ ، ص - ٢)			
النقطة	(-١ ، ٥)	(-٣ ، -٤)	(٠ ، .....)	(..... ، ٣)
الصورة	(٢ ، .....)	(٠ ، .....)	(..... ، ٣)	(١ ، -١)

تمارين ذاتية :

١ أوجِد صورة النقطة (١ ، -٢) تحت تأثير إزاحة ٤ وحدات إلى اليمين ووحدتَين إلى الأعلى .

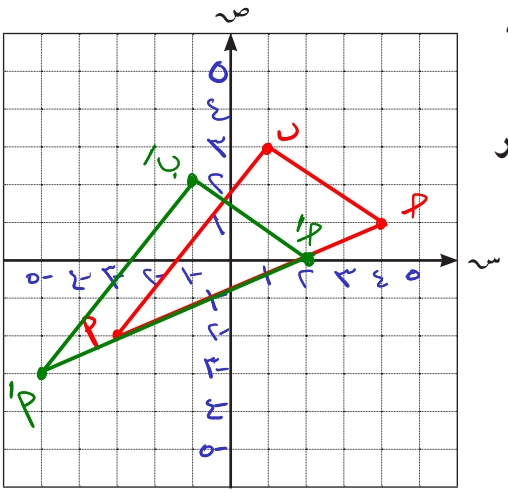
(س + ٤ ، ص + ٢) ← (١ + ٤ ، -٢ + ٢) ← (٥ ، ٠)

٢ صِف الإزاحة التي تنقل المثلّث أ ب جـ إلى المثلّث أَ بَ جـَ ، ثمّ اكتب القاعدة بصورة رمزية .



صورة النقط تحركت تحت تأثير إزاحة
٥ وحدات إلى اليسار ووحدتين إلى الأسفل
∴ (س ، ص) ← (س - ٥ ، ص - ٢)

٣ في المستوى الإحداثي ، أُرسم المثلّث أ ب جـ الذي رؤوسه هي أ (-٣ ، -٢) ، ب (١ ، ٣) ، جـ (٤ ، ١) ، ثمّ ارسم صورة المثلّث أ ب جـ تحت تأثير إزاحة وحدتَين إلى اليسار ثمّ وحدة واحدة إلى الأسفل .



أَ (-٣ ، ٥)
بَ (٢ ، ١)
جـَ (٠ ، ٢)

(س ، ص) ← (س - ٢ ، ص - ١)

٤ إذا كانت مَ (-٤ ، ٢) هي صورة م (٠ ، -١) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، فأوجِد القاعدة بصورة رمزية لهذه الإزاحة ، ثمّ تحقَّق من صحّتها .

(س ، ص) ← (س + م ، ص + ن)

∴ (-٤ ، ٢) ← (٠ + م ، -١ + ن = ٢)

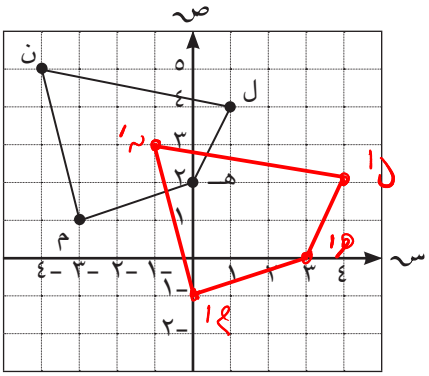
∴ م = -٤ ، ن = ٣

∴ القاعدة (س ، ص) ← (س - ٤ ، ص + ٣) ،

التحقق : (-٤ ، ٢ ، ٣) ← (٠ ، -١)

٥ أُرسم صورة الشكل ل هـ م ن بإزاحة حسب القاعدة :

(س ، ص) ← (س + ٣ ، ص - ٢)



ل (١ ، ٤) ← (٤ ، ٢) لَ

هـ (٠ ، ٣) ← (٣ ، ٠) هـَ

م (-٣ ، ١) ← (٠ ، -١) مَ

ن (-٤ ، ٥) ← (-١ ، ٣) نَ

تقويم الوحدة التعليمية الرابعة
Unit Four Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ حُلّ التناسب :

أ) $\frac{٤}{٩} = \frac{١٠}{س}$

$س = \frac{١٠ \times ٩}{٤} = ٢٢,٥$

ب) $\frac{س - ١}{٤} = ١,٧$

$س - ١ = ٦,٨$

$\therefore س = ١ + ٦,٨ = ٧,٨$

٢ تدور آلة طابعة ٢٠ دورة فتطبع ٣٢٠ ورقة ، فكم ورقة تطبع إذا دارت ١٤ دورة ؟

$\frac{٢٠}{١٤} = \frac{٣٢٠}{س}$ ، $س = \frac{٣٢٠ \times ١٤}{٢٠} = ١٦ \times ١٤ = ٢٢٤$ ورقة

٣ طائرة تطير بسرعة ٤٠٠ كم / ساعة قطعت مسافة بين دولتَين خلال ٥ ساعات . إذا طارت بسرعة ١٠٠٠ كم / ساعة ، فكم ساعة تحتاج لتقطع المسافة نفسها ؟

$\frac{٤٠٠}{١٠٠٠} = \frac{٥}{س}$ ، $\frac{٢}{٥} = \frac{٥}{س}$ ، $\therefore س = ٢$ ساعة

٤ ما العدد الذي ١٢ ٪ منه هو ٣٦ ؟

$٣٦ = س \times ٪١٢$ ، $\frac{٣٦}{س} = \frac{١٢}{١٠٠}$ ، $\therefore س = ٣ \times ١٠٠ = ٣٠٠$

٥ بيعت إحدى الساعات بتخفيض ٤٠ ٪ من ثمنها الأصلي ، إذا كان ثمنها بعد التخفيض هو ٥٤ دينارًا ، فما ثمنها الأصلي قبل التخفيض ؟

$١٠٠ - ٤٠ = ٦٠ ٪$ ، $\frac{٥٤}{س} = \frac{٦٠}{١٠٠}$ ، $\frac{٥٤}{س} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{١٨}{س} = \frac{١}{٥}$ ، $\therefore س = ٥ \times ١٨ = ٩٠$ دينار

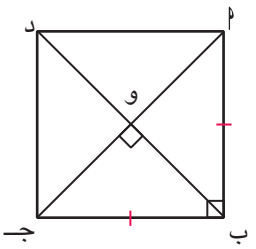
٦ باعت إحدى المكتبات ٢٠٠ كتاب في شهر يونيو ، و١٧٥ كتابًا في شهر يوليو . بيِّن نوع التغيّر من زيادة أو نقصان ، ثمّ أوجِد النسبة المئوية للتغيّر .

نقصان $= ٢٠٠ - ١٧٥ = ٢٥$

النسبة المئوية للتغير $= \frac{٢٥}{٢٠٠} \times ١٠٠ = ١٢,٥ ٪$

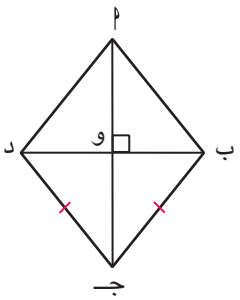
٧ أيّ الأشكال الآتية متناظر حول نقطة ملتقى قطرَيه (أقطاره) ؟ ولماذا ؟

(مربّع)



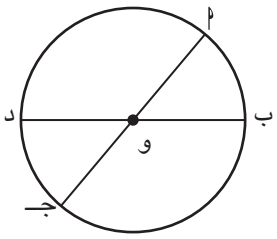
نعم متناظر
لأنه و ب = و د
و أ = و جـ

(معيَّن)



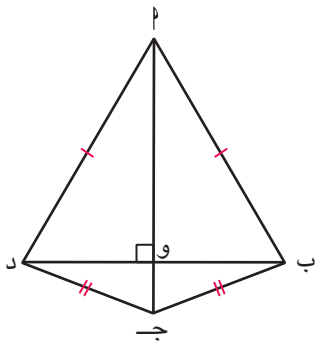
نعم متناظر
لأنه و أ = و جـ
و ب = و د

(دائرة)



نعم متناظر
لأنه و أ = و جـ
و ب = و د

(طائرة ورقية)

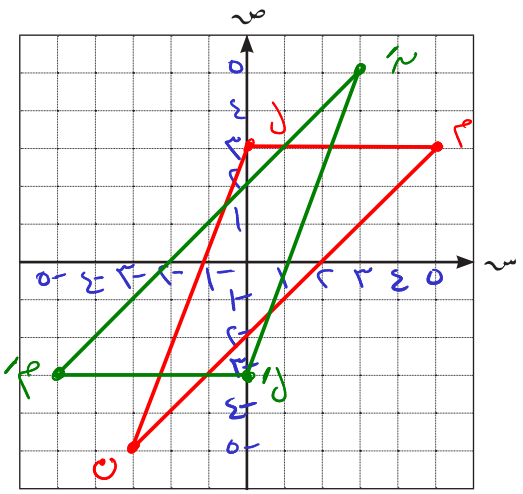


لا ، غير متناظر
لأن و أ ≠ و جـ

٨ أكمِل الجدول الآتي :

النقطة	صورتها بالانعكاس في المحور السيني	صورتها بالانعكاس في المحور الصادي	صورتها بالانعكاس في نقطة الأصل
أ (٤ ، ٥)	(٤- ، ٥-)	(٤- ، ٥)	(٤- ، ٥-)
ب (-٢ ، ٧)	(٢- ، ٧-)	(٢ ، ٧)	(٢ ، ٧-)
جـ (-٥ ، -٦)	(٥- ، ٦)	(٥ ، ٦-)	(٥ ، ٦)
د (٠ ، ٩)	(٠ ، ٩-)	(٠ ، ٩)	(٠ ، ٩-)
هـ (-٥ ، ٠)	(٥- ، ٠)	(٥ ، ٠)	(٥ ، ٠)

٩ إذا كان المثلّث لَ مَ نَ هو صورة المثلّث ل م ن بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت ل (٠ ، ٣) ، م (٥ ، ٣) ، ن (-٣ ، -٥) فعيِّن إحداثيات الرؤوس لَ ، مَ ، نَ ، ثمّ ارسم المثلّثَين في مستوى الإحداثيات .

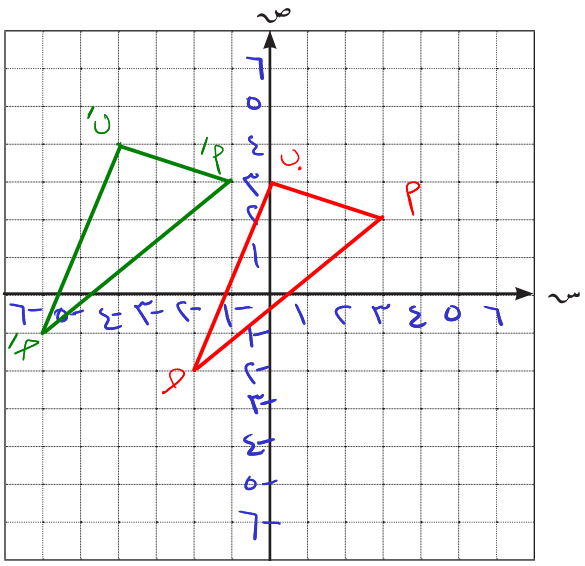


ل (٠ ، ٣-) ← (٠ ، ٣) ل'
م (٥ ، ٣) ← (٥- ، ٣-) م'
ن (-٣ ، -٥) ← (٣ ، ٥) ن'

١٠ أكمِل الجدول الآتي :

القاعدة	(س ، ص) ⟵ (س - ٢ ، ص + ٥)				
النقطة	(٢ ، ٤)	(..٦-.. ، ..٧..)	(٠ ، ٣)	(..٩-.. ، ..٨-..)	(١ - ، ١)
الصورة	(..٢.. ، ..٧..)	(٨ - ، ١٢)	(..١.. ، ..٥..)	(١١ - ، ٣ -)	(..١-.. ، ..٤..)

١١ مثلّث أ ب جـ رؤوسه هي :
(٣ ، ٢) ، (٠ ، ٣) ، (- ٢ ، - ٢) ،
أوجِد صور رؤوسه بعد الإزاحة تبعًا للقاعدة :
(س ، ص) ⟵ (س - ٤ ، ص + ١) ،
ثمّ ارسم المثلّثَين في مستوى الإحداثيات .



أ(٢،٣) ← أ'(-٢،٤)
ب(٠،٣) ← ب'(-٤،٤)
جـ(-٢،-٢) ← جـ'(-٦،١)

١٢ حصل التأثير بتحويل هندسي على المثلّث أ ب جـ فكان :
للنقطة أ (٢ ، -٣) صورة هي د (٠ ، -٢) ،
للنقطة ب (١ ، ٤) صورة هي هـ (-١ ، ٥) ،
للنقطة جـ (-٢ ، ١) صورة هي ل (-٤ ، ٢) .

أ هل المثلّث د هـ ل هو إزاحة للمثلّث أ ب جـ ؟

نعم

ب إذا كان كذلك ، فما هي قاعدة هذه الإزاحة ؟ وإذا لم يكن كذلك ، فبيِّن السبب .

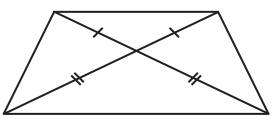
(٢، -٣) ← (٢-٢، -٣+٠) = (٠، -٢)

الإزاحة تحرك وحدتين إلى اليسار و وحدة إلى الأعلى

∴ (س، ص) ← (س-٢، ص+١)

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١-٦) ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ إذا كانت سلمى تتقاضى ٢٥,٥٠٠ دينارًا في العمل لمدّة ٥ ساعات ، فإنّ ما تتقاضاه مقابِل ساعة عمل واحدة تساوي ٥,١٠٠ دنانير .	**أ**	ب
٢ تستهلك سيّارة ٣٠ لترًا من البنزين لتقطع مسافة ١٨٠ كم ، إذا استهلكت ١٦٠ لترًا من البنزين عند قطعها مسافة ٩٦٠ كم ، فإنّ نوع التناسب بين هذه القِيَم هو تناسب عكسي .	أ	**ب**
٣ إذا قرأ بدر ٢٠٠ صفحة في زمن قدره ٦ ساعات ، فإنّ الزمن الذي يستغرقه لقراءة ٥٠٠ صفحة بالمعدّل نفسه هو ١٥ ساعة .	**أ**	ب
٤ المربّع متناظر حول نقطة ملتقى قطرَيه .	**أ**	ب
٥ صورة النقطة أ (٢ ، ٣) بالانعكاس في نقطة الأصل يكافئ إزاحة النقطة أ حسب القاعدة (س - ٤ ، ص - ٦) .	**أ**	ب
٦ في الشكل المجاوِر ، الشكل متناظر حول نقطة تلاقي قطرَيه . 	أ	**ب**

في البنود (٧-١٧) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٧ سعر لعبة كمبيوتر ٤ دنانير . إذا كانت خدمة التوصيل ٦ ٪ ، فإنّ ثمن التكلفة الكلّية بالدينار يساوي :

أ) ٤ × ٠,٠٦ ب) ٤ + ٠,٠٦

ج) ٤ + ٠,٢٤ د) ٤ × ٠,٢٤

٨ إذا كان $\frac{\text{س}}{٩٠} = \frac{٧٥}{١٥٠}$ ، فإنّ س =

أ) ٤٥ ب) ٤,٥

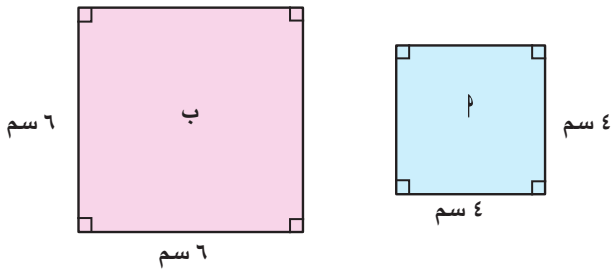
ج) ٠,٤٥ د) ١٨٠

٩ عدد ما ٣٠ ٪ منه هو ٤٥ ، فإنّ العدد هو :

أ) ١٥ ب) ٧٥

ج) ١٥٠ د) ٢٥٠

١٠ النسبة المئوية للزيادة في مساحة الشكل (ب) عن مساحة الشكل (أ) هي :



أ) ٨٠ ٪ ب) ١٢٥ ٪

ج) ٥٠ ٪ د) ٥٥,٥ ٪

١١ إذا كانت قيمة التذكرة العادية لحضور أمسية شعرية هي ٧ دنانير ، ويُمنح المتعلّمون تخفيضًا قدره ٢٥٪ من ثمن التذكرة ، فإنّ ثمن التذكرة بعد التخفيض :

أ) ٨,٧٥ دنانير ب) ٧ دنانير

ج) ٥,٢٥٠ دنانير د) ١,٧٥٠ دينار

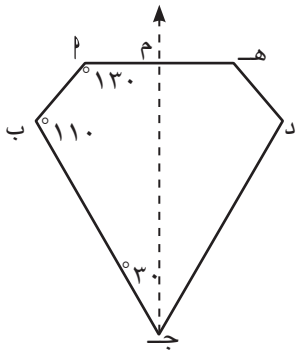
١٢ أجاب أحمد عن ٦٠٪ من أسئلة امتحان إجابة صحيحة وأخطأ في عشرة أسئلة فقط ، فكم كان عدد أسئلة الامتحان ؟

أ ١٥ ب ٢٠
ج ٢٥ د ٣٠

١٣ يقطع متسابق ١٥٪ من مسافة السباق في ٣ دقائق ، فكم سيلزمه ليقطع مسافة السباق ؟

أ ١٥ دقيقة ب ١٨ دقيقة
ج ٢٠ دقيقة د ٣٠ دقيقة

١٤ إذا كان م محور تناظر للشكل المرسوم ، فإنّ قياس (ب $\hat{جـ}$ د) = ...



أ ٣٠° ب ٥٠°
ج ٦٠° د ٧٠°

١٥ صورة النقطة ع (-٢ ، -٤) بالانعكاس في نقطة الأصل (و) هي :

أ (٢ ، -٤) ب (-٢ ، ٤)
ج (٢ ، ٤) د (٤ ، ٢)

١٦ صورة النقطة هـ (-٤ ، -١) باستخدام قاعدة الإزاحة (س ، ص) ⟵ (س + ٥ ، ص - ٤) هي :

أ هـَ (١ ، ٣) ب هـَ (١ ، -٥)
ج هـَ (٩ ، -٥) د هـَ (٩ ، ٥)

١٧ إذا كانت مَ (-٥ ، ٩) هي صورة النقطة م (٢ ، ٥) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، فإنّ قاعدة هذه الإزاحة هي :

أ (س ، ص) ⟵ (س + ٧ ، ص - ٤)
ب (س ، ص) ⟵ (س - ٧ ، ص + ٤)
ج (س ، ص) ⟵ (س + ٤ ، ص + ٧)
د (س ، ص) ⟵ (س - ٤ ، ص - ٧)

المشروع الثاني :
الرياضيات والفنّ



يتعلّم المتعلّمون من خلال هذا المشروع كيف يُستخدم الانعكاس في الرياضيات لتصميم لوحات فنّية متماثلة ، حيث يتمّ رسم شكل معيَّن ثمّ انعكاسه حول محور معيَّن (أفقي أو رأسي) ليظهر الشكل المتماثل وكأنّه صورة في المرآة .

خطّة العمل :

يُوظَّف الانعكاس في رسم لوحة فنّية .

خطوات تنفيذ المشروع :

- **تجهيز الأدوات :** قُم بتجهيز الأدوات التي ستحتاجها في المشروع وهي : ورق رسم بياني - ألوان - مسطرة .
- **رسم الشكل الأساسي :** قُم بتحديد ورسم الشكل الذي سوف تستخدمه في رسم لوحتك الفنّية .
- **رسم انعكاس الشكل :** قُم بعمل انعكاس حول محور أو نقطة حسب احتياجك ، بالعدد الذي تحتاجه لتكوين تصميم لوحتك الفنّية الخاصّة بك .
- **لون الأشكال :** اِستخدِم الألوان الجذّابة التي تُعطي لوحتك تناسقًا وجمالًا .

علاقات وتواصل :

تتبادل المجموعات اللوحات الفنّية مع كتابة إهداء خاصّ لزملائها .

عرض العمل :

تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات الحلّ .