



الإمارات العربية المتحدة  
وزارة التربية والتعليم



عام التسامح

المتقدم

2018 - 2019

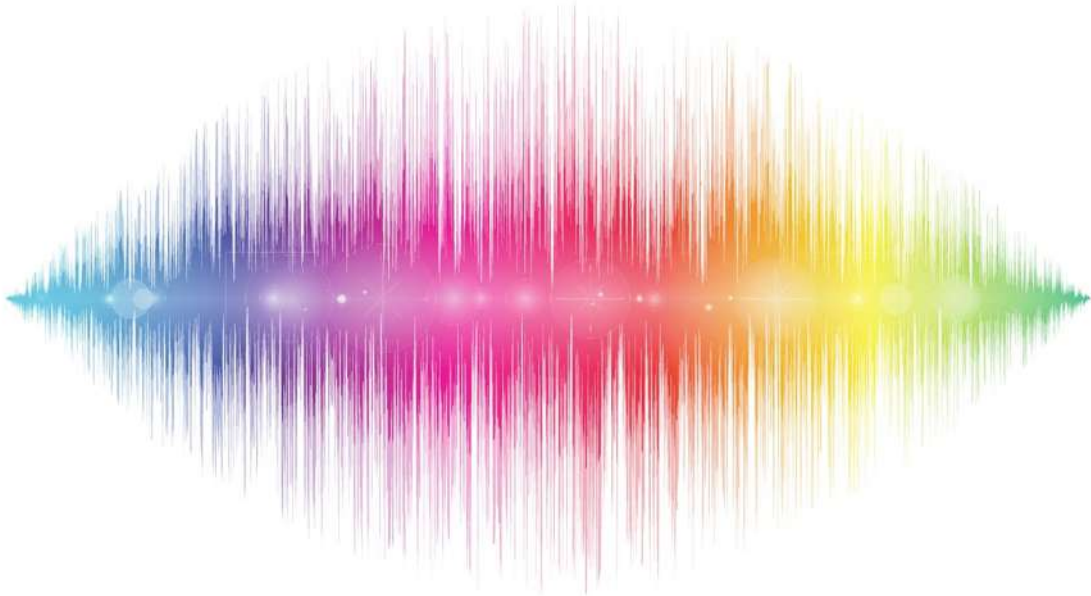
11



McGraw-Hill Education

الفيزياء

نسخة الإمارات العربية المتحدة



Mc  
Graw  
Hill  
Education

McGraw-Hill Education

# الفيزياء

نسخة الإمارات العربية المتحدة

للف 11 المتقدّم

مجلد 3



**Project: UAE Science Grade 11 Advanced Physics, Year 3, Volume 3**

FM. Front Matter, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014

8. Systems of Particles and Extended Objects, Chapter 8, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014

9. Circular Motion, Chapter 9, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014

10. Rotation, Chapter 10, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014

11. Static Equilibrium, Chapter 11, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014

12. Gravitation, Chapter 12, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014

13. Relativity, Chapter 35, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014

صورة الغلاف: Mix3r/Shutterstock.com

[mheducation.com/prek-12](http://mheducation.com/prek-12)



جميع الحقوق محفوظة © للعام 2019 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education. بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعتته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

النسخة الإلكترونية

طُبِعَ في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-52-688402-2 (نسخة الطالب)  
MHID: 1-52-688402-X (نسخة الطالب)

رقم النشر الدولي: 978-1-52-688400-8 (نسخة الطالب)  
MHID: 1-52-688400-3 (نسخة الطالب)



**صاحب السمو الشيخ خليفة بن زايد آل نهيان  
رئيس دولة الإمارات العربية المتحدة، حفظه الله**

**” يجب التزوّد بالعلوم الحديثة والمعارف الواسعة، والإقبال عليها  
بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال  
الألفية الثالثة من تحقيق نقلة حضارية واسعة.“**

من أقوال صاحب السمو الشيخ خليفة بن زايد آل نهيان



# المحتويات الموجزة

## الصورة العامة

- 1 نظرة عامة
- 2 الحركة في خط مستقيم
- 3 الحركة في بعدين وثلاثة أبعاد
- 4 القوة
- 5 الطاقة الحركية والشغل والقدرة
- 6 طاقة الوضع وحفظ الطاقة
- 7 كمية الحركة والتصادمات
- 8 الأجسام الجاسئة
- 9 الحركة الدائرية
- 10 الدوران المحوري
- 11 الاتزان السكوني
- 12 الجاذبية
- 13 النسبية

**الملحق A: تمهيد الرياضيات A-1**

**الملحق B: خواص العناصر A-9**

## نبذة عن المؤلفين

**فولف جايج باور** وُلد في ألمانيا وحصل على الدكتوراه في الفيزياء النووية النظرية من جامعة غيسن عام 1987. بعد حصوله على منحة لمرحلة ما بعد الدكتوراه في معهد كاليفورنيا للتكنولوجيا، انضم إلى كلية ولاية جامعة ميشيغان عام 1988. كما عمل في الوقت ذاته في المختبر الوطني للمسرّع الدوراني فائق التوصيل (NSCL). وقد تضمنت أبحاثه العمل على مجموعة كبيرة من الموضوعات في الفيزياء النظرية والفيزياء الحاسوبية مثل درجة الحرارة العالية فائقة التوصيل وانعجارات المستعر الأعظم، لكنه أولى اهتمامًا خاصًا لموضوع التصادمات النووية النسبوية. ولعل أكثر ما اشتهر به هو عمله المتعلق بمراحل انتقال المادة النووية في تصادمات الأيونات الثقيلة. في السنوات الأخيرة، ركّز الدكتور باور في أبحاثه ومحاضراته على القضايا المتعلقة بالطاقة، بما في ذلك موارد الوقود الأحفوري وطرق الاستخدام الفعال للطاقة، وخاصةً موارد الطاقة البديلة والطاقة التي لا تزيد من انبعاثات ثاني أكسيد الكربون. وفي عام 2009، أسس معهد البحوث السيرانية المساعدة وكان أول مدير له حتى عام 2013. وفي الوقت الحالي، يعمل رئيسًا لقسم الفيزياء والفلك ويشغل منصب أستاذ متميز في جامعة ميشيغان.



**غراي د. ويستفال** بدأ حياته المهنية في مركز الدراسات النووية في جامعة تكساس بمدينة أوستن حيث حصل على درجة الدكتوراه في الفيزياء النووية التجريبية عام 1975. بعد ذلك، انتقل إلى مختبر لورانس بيركلي الوطني (LBL) في مدينة بيركلي بولاية كاليفورنيا لإكمال عمله في مرحلة ما بعد الدكتوراه في مجال فيزياء الطاقة النووية العالية، وقد ظل بعدها يعمل عالمًا في المختبر. في أثناء عمله في مختبر لورانس بيركلي الوطني، اشتهر الدكتور ويستفال على المستوى الدولي، وذلك لعمله المتعلق بنموذج كرة اللهب النووية واستخدام التجزئة لإنتاج نواة غير مستقرة. في عام 1981، انضم الدكتور ويستفال إلى المختبر الوطني للمسرّع الدوراني فائق التوصيل (NSCL) بجامعة ميشيغان (MSU) كأستاذ باحث؛ حيث صمم كاشف جامعة ميشيغان *MSU 4p* وأنشأه وأداره. أنتجت أبحاثه التي استخدم فيها كاشف جامعة ميشيغان *4p* الكثير من المعلومات المتعلقة باستجابة المادة النووية عند انضغاطها خلال انهيار المستعر الأعظم. وفي عام 1987، انضم د. ويستفال إلى قسم الفيزياء والفلك بجامعة ميشيغان. لكنه لم يتوقف عن متابعة أبحاثه في المختبر الوطني للمسرّع الدوراني فائق التوصيل (NSCL). أما في عام 1994، فانضم د. ويستفال إلى مجموعة تعاون المتتبع اللولبي في مصادم الأيونات الثقيلة بسرعات النسبية (STAR Collaboration) في مختبر بروكهافن الوطني في لونغ آيلاند بنيويورك. وفي عام 2003، عُيّن أستاذًا متميزًا في جامعة ميشيغان.

**الشراكة بين ويستفال وباور** تعاون الدكتوران باور ويستفال في العمل على أبحاث الفيزياء النووية وأبحاث تدريس الفيزياء لمدة تزيد على عقدين من الزمان. بدأت هذه الشراكة عام 1998. حينها كان كلا المؤلفين يلقي خطابًا في مؤتمر واحد وقررا أن يذهبا إلى التزلج معًا بعد انتهائهما. في هذه المناسبة، عيّن ويستفال د. باور لينضم إلى جامعة ميشيغان (وذلك ببعض التهديد يدفعه من الزلاجة إذا رفض). وقد حصلوا على تمويل من مؤسسة العلوم الوطنية لتطوير أساليب جديدة للتدريس وأنشطة المختبر. كما أصدرا أفراس مضموطة عن الفيزياء لطلابهما في مدرسة ليمان بريغز وشاركا في تأليف كتاب مدرسي عن الفرض المضغوط يُسمى *cliXX Physik*. في عام 1992، كانا من أوائل الداعمين لاستخدام الإنترنت في التدريس والتعلم من خلال تطوير الإصدار الأول من نظام الواجب المنزلي عبر الإنترنت. وفي السنوات التالية، كان لهما دور فعال في إنشاء شبكة التعلم عبر الإنترنت بالاشتراك مع شبكة التعليم العالمية (CAPA). ويستخدم هذه الشبكة الآن ما يزيد على 70 جامعة وكلية في الولايات المتحدة وجميع أنحاء العالم. وبدايةً من عام 2008، شارك باور ويستفال مع فريق من المدرسين والمهندسين والفيزيائيين ممن يبحثون في استخدام التعلم بمساعدة الأقران في تدريس منهج الفيزياء التمهيدي. تلقى هذا المشروع تمويلًا من مؤسسة العلوم الوطنية وبرنامج توسيع المواهب في العلوم والتقنية والهندسة والرياضيات، ويتضمن هذا الكتاب المدرسي أفضل أساليب المشروع وممارساته.

**إهداء** إننا نهدي هذا الكتاب إلى عائلاتنا، فلولا صبرهم وتشجيعهم ودعمهم، ما تمكنا من إتمامه.

# رسالة من المؤلفين

**يسعدنا** أن نقدم لكم الإصدار الثاني من كتاب الفيزياء. إن الفيزياء من العلوم المزدهرة والحيوية. فهي تطرح تحديات فكرية والعديد من مسائل البحث بشأن موضوعات مختلفة، بدايةً من أكبر المجرات وحتى أصغر الجسيمات دون الذرية. لقد تمكّن علماء الفيزياء من تزويدها بالفهم وتوضيح الاتساق والنظام الذي يكمن في عالمنا. كما أنهم وضحو أنّ العالم يمكن التوقع به، وسيستكملون هذا المسعى الذي سيأخذنا إلى المستقبل المثير.

لكننا عندما نطالع معظم الكتب التمهيدية الحالية في الفيزياء. نجد أنّ كلاً منها يسرد قصة مختلفة؛ حيث تُقدّم الفيزياء بصفتها علماً مكتماً حدثت التطورات المهمة فيه إما في عصر نيوتن أو في بداية القرن العشرين. أمّا الفيزياء "المعاصرة"، فلا نطالعها إلا في نهاية الكتب القياسية، وغالباً نجد أنّ عرضها يقتصر على تناول الاكتشافات التي ظهرت خلال سبعينيات القرن العشرين.

**إنّ دافعنا في كتابة هذا الكتاب هو تغيير ذلك المفهوم من خلال تضمين الفيزياء المعاصرة المثيرة على مدار الكتاب.** فالفيزياء من العلوم التي تتسم بالتغير بشكل مدهش؛ حيث يحفل دائماً بالاكتشافات والتطبيقات الفارقة التي تغير من حياتنا. ولمساعدة الطلاب على إدراك ذلك، يجب أن نخبرهم قصة الفيزياء بالكامل وذلك من خلال تضمين الفيزياء المعاصرة في هذا المقرر الذي يستند إلى حساب التفاضل والتكامل. وقد عملنا على تحقيق ذلك بدايةً من الفصل الدراسي الأول. حيث تتوفر العديد من الفرص لاستكشاف الفيزياء المعاصرة من خلال تضمين النتائج الحديثة من علم الحركة غير الخطية ونظرية الفوضى والتعقيد وأبحاث الفيزياء عالية الطاقة في هذا المنهج التمهيدي. ولأننا نجري العديد من الأبحاث في هذه المجالات، فإننا نعلم أنّه يمكن للطلاب فهم أساسيات العديد من النتائج الحديثة في هذه المجالات:

النتائج الحديثة في الطاقة المتجددة والبيئة والهندسة والطب والتكنولوجيا توضح الإثارة الفكرية التي تتسم بها الفيزياء، مما يشجع الطلاب ويتعشّج الأرواح في الصفوف الدراسية فيسوّّل ذلك على المعلم مهمته ويجعلها مهمة ممتعة. وبصفة خاصة، فإننا نعتقد أنّ مناقشة موضوع عام مثل موضوع الطاقة سيكون فرصة جيدة لنجذب انتباه الطلاب واهتمامهم. فالمفاهيم المتعلقة بموارد الطاقة (الوقود الأحفوري والطاقات المتجددة والطاقات النووية وغير ذلك) وكذلك كفاءة الطاقة وتخزين الطاقة وموارد الطاقة البديلة والتأثيرات البيئية التي تترتب على اختيارات أنواع إمدادات الطاقة (مثل الاحتراز العالمي وتحمّص المحيطات)، من المفاهيم التي يسهل على الطلاب فهمها في مستوى المنهج التمهيدي في الفيزياء. لقد اتضح لنا أنّ مناقشة موضوع الطاقة هو أكثر ما يثير اهتمام الطلاب، لذا فقد تناولنا جوانب مختلفة لموضوع الطاقة على مدار هذا الكتاب.

وبالإضافة إلى التعرف على عالم الفيزياء المدهش، سيستفيد الطلاب استفادةً كبيرة، حيث سيكتسبون القدرة على **حل المسائل والتفكير المنطقي في مختلف المواقف**. تقوم الفيزياء على مجموعة من الأفكار الأساسية التي تُعد أساساً للعلوم جميعها. ونحن نعلم ذلك ولذا فإننا نقدم في هذا الكتاب طريقة مفيدة لحل المسائل (موضحة في الوحدة 1)، وهي تُستخدم على مدار الكتاب بأكمله. تتضمن هذه الطريقة صيغة متعددة الخطوات كنا قد طورناها مع طلابنا في الصفوف الدراسية؛ لكنّ إثنان المفاهيم لا يقتصر على ذلك فحسب، بل يتضمن تطبيقها كذلك، ولهذا السبب، طلبنا من عشرات المساهمين في الكتاب ممن يعملون في جامعات البلد البارزة، أن يبذلوا أفضل ما في وسعهم في التمارين الموجودة في نهاية كل وحدة. وقد أضفنا إلى هذا الإصدار حوالي 400 تمرين بمعطيات متعددة، بحيث تسمح للطلاب بتناول المسألة الواحدة من أكثر من منظور مختلف.

في عام 2012، نشر مجلس البحث الوطني إطاراً لتعليم العلوم من مرحلة رياض الأطفال إلى الثانوية. ويتناول هذا الإطار التطبيقات الأساسية في العلوم والهندسة والمفاهيم التي توجد تطبيقاتها في المجالات والأفكار الأساسية في مجالات التخصصات الأربعة (في الفيزياء، توجد المادة وتفاعلاتها والحركة والاستقرار والطاقة والبوجات وتطبيقاتها في نقل المعلومات). وقد صممتنا الإصدار الثاني من هذا الكتاب لربط دراسة الطلاب للفيزياء بهذا الإطار. وقدّمنا جزء التأكيد من مراجعة المفاهيم وأسئلة للاختبار الذاتي في كل وحدة.

مع وضع كل ذلك في الاعتبار، إضافةً إلى رغبتنا في كتابة كتاب شيق، فقد صممتنا ما نأمل أن يكون أداةً لكي يستخدم الطلاب مخطبتهم وإعدادهم بشكل أفضل لتلقي دورات في المستقبل في المجالات التي يختارونها (وبالطبع فإننا نأمل أن يتخصص بعض الطلاب في دراسة الفيزياء). إنّ التعقيبات التي قدمها لنا ما يزيد على 400 شخص، بما فيهم مجلس من المستشارين والعديد من المساهمين والمراجعين والمشاركين في مجموعة التركيز وكذلك الاختبار الميداني لأفكارنا مع 6000 طالب تقريباً من الطلاب الذين يدرسون منهج الفيزياء التمهيدي في جامعة ميشيغان، قد ساعدتنا مساعدةً كبيرة في إنجاز هذا المشروع الضخم. فخالص الشكر لكم جميعاً!

— فولف جاتج ياور وغراي د. ويستفال




# المحتويات

كيفية استخدام هذا الكتاب *xii*  
شكر وتقدير *xvi*

## الصورة العامة 1

### الجزء 1: ميكانيكا الجسيمات النقطية

#### 1 نظرة عامة 1

- 
- 1 لماذا ندرس الفيزياء؟ 2
  - 1.2 التعامل مع الأعداد 3
  - 1.3 النظام الدولي للوحدات 4
  - 1.4 المتاييس في عالمنا 8
  - 1.5 الاستراتيجيات العامة لحل المسائل 10
  - 1.6 التجهيات 17
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 26  
أسئلة الاختيار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 27

#### 4 القوة 91



- 4.1 أنواع القوى 92
  - 4.2 متجه قوة الجاذبية والوزن والكتلة 94
  - 4.3 محصلة القوة 96
  - 4.4 قوانين نيوتن 97
  - 4.5 الحبال والبكرات 99
  - 4.6 تطبيق قوانين نيوتن 103
  - 4.7 قوة الاحتكاك 108
  - 4.8 تطبيقات قوة الاحتكاك 113
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 119  
أسئلة الاختيار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 120

#### 5 الطاقة الحركية والشغل والقدرة 128



- 5.1 الطاقة في حياتنا اليومية 129
  - 5.2 الطاقة الحركية 131
  - 5.3 الشغل 132
  - 5.4 الشغل المبذول من قوة ثابتة 133
  - 5.5 الشغل المبذول من قوة متغيرة 139
  - 5.6 قوة الزنبرك 140
  - 5.7 القدرة 144
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 148  
أسئلة الاختيار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 150

#### 6 طاقة الوضع وحفظ الطاقة 154



- 6.1 طاقة الوضع 155
  - 6.2 القوى المحافظة والقوى غير المحافظة 157
  - 6.3 الشغل وطاقة الوضع 160
  - 6.4 طاقة الوضع والقوة 161
  - 6.5 حفظ الطاقة الميكانيكية 164
  - 6.6 الشغل والطاقة لقوة الزنبرك 168
  - 6.7 القوى غير المحافظة ونظرية الشغل - الطاقة 173
  - 6.8 طاقة الوضع والاستقرار 178
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 181  
أسئلة الاختيار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 182

#### 2 الحركة في بعد واحد 38



- 2.1 مقدمة إلى علم الكينماتيكا 33
  - 2.2 متجه الموقع ومتجه الإزاحة والمسافة 33
  - 2.3 متجه السرعة المتجهة والسرعة المتجهة المتوسطة والسرعة 36
  - 2.4 متجه العجلة 39
  - 2.5 حلول الكمبيوتر وصيغ الفرق 41
  - 2.6 إيجاد الإزاحة والسرعة المتجهة من العجلة 42
  - 2.7 الحركة بعجلة ثابتة 43
  - 2.8 التسقوط الحُر 50
  - 2.9 تقليص الحركة في أكثر من بُعد إلى بُعد واحد 55
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 58  
أسئلة الاختيار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 59

#### 3 الحركة في بعدين وثلاثة أبعاد 66



- 3.1 أنظمة الإحداثيات ثلاثية الأبعاد 67
  - 3.2 السرعة المتجهة والعجلة في بعدين أو ثلاثة أبعاد 68
  - 3.3 حركة المقذوفات المثالية 68
  - 3.4 أقصى ارتفاع ومدى للمقذوف 72
  - 3.5 حركة المقذوفات الواقعية 79
  - 3.6 الحركة النسبية 80
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 84  
أسئلة الاختيار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 85



## 11 الاتزان السكوني 324

- 11.1 شروط الاتزان 325
- 11.2 أمثلة تتضمن الاتزان السكوني 326
- 11.3 استقرار الهياكل 336
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 341
- أسئلة الاختبار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 342



## 12 الجاذبية 350

- 12.1 قانون نيوتن للجاذبية 351
- 12.2 الجاذبية بالقرب من سطح الأرض 356
- 12.3 الجاذبية داخل الأرض 358
- 12.4 طاقة الوضع الجاذبية 360
- 12.5 قوانين كبلر وحركة الكواكب 365
- 12.6 مدارات القمر الصناعي 370
- 12.7 المادة المظلمة 374
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 376
- أسئلة الاختبار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 377



## 13 النسبية 384

- 13.1 المكان والزمن وسرعة الضوء 385
- 13.2 تمدد الزمن وتقلص الطول 389
- 13.3 تحويل لورنتز 396
- 13.4 كمية الحركة والطاقة النسبيتين 402
- 13.5 النسبية العامة 409
- 13.6 النسبية في حياتنا اليومية؛ نظام GPS 411
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 412
- أسئلة الاختبار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 413

**الملاحق A: تمهيد الرياضيات A1**

**الملاحق B: خواص العناصر A9**

اجابات لاسئلة و مسائل مختارة SA-3



## 7 كمية الحركة والتصادمات 188

- 7.1 كمية الحركة الخطية 189
- 7.2 الدفع 191
- 7.3 حفظ كمية الحركة الخطية 194
- 7.4 التصادمات المرنة في بُعد واحد 196
- 7.5 التصادمات المرنة في بُعدين أو ثلاثة أبعاد 199
- 7.6 التصادمات اللامرنة تمامًا 203
- 7.7 التصادمات اللامرنة جزئيًا 211
- 7.8 البلياردو والفوضى 212
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 214
- أسئلة الاختبار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 215

## الجزء 2: الأجسام غير النقطية والمادة والحركة الدائرية



## 8 الأجسام الجاسئة 225

- 8.1 مركز الكتلة ومركز الثقل 226
- 8.2 كمية حركة مركز الكتلة 229
- 8.3 حركة الصواريخ 233
- 8.4 تحديد مركز الكتلة 237
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 246
- أسئلة الاختبار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 247



## 9 الحركة الدائرية 254

- 9.1 الإحداثيات القطبية 255
- 9.2 الإحداثيات الزاوية 256
- 9.3 السرعة الزاوية والتردد الزاوي والزمن الدوري 258
- 9.4 العجلة الزاوية والمركزية 261
- 9.5 القوة المركزية 264
- 9.6 الحركة الدائرية والخطية 269
- 9.7 أمثلة أخرى على الحركة الدائرية 273
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 276
- أسئلة الاختبار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 278



## 10 الدوران المحوري 284

- 10.1 الطاقة الحركية للدوران المحوري 285
- 10.2 حساب عزم الغصور الذاتي 286
- 10.3 التدرج دون انزلاق 293
- 10.4 عزم الدوران 297
- 10.5 قانون نيوتن الثاني للدوران المحوري 298
- 10.6 الشغل المبدول من عزم الدوران 303
- 10.7 كمية الحركة الزاوية 306
- 10.8 المبادرة 313
- 10.9 كمية الحركة الزاوية المكمية 314
- ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 314
- أسئلة الاختبار من متعدد/أسئلة مفاهيمية/تمارين/تمارين بمعطيات متعددة 316



# كيفية استخدام هذا الكتاب

## مهارات حل المسائل: تعلم التفكير مثل العلماء

ربما تكون أهم المهارات التي يمكن للطلاب أن يتعلمها من منهج الفيزياء هي القدرة على حل المسائل والتفكير الناقد في أي موقف. تقوم الفيزياء على أساس مجموعة من الأفكار الأساسية التي يمكن تطبيقها على العديد من المواقف والمشكلات. في هذا الكتاب الذي ألفه باور وويستفال، يركز المؤلفان على حل المسائل ويقدمان لها طريقة كانا قد اختبراها في الصفوف الدراسية قبل استخدامها في هذا الكتاب. وهذه الطريقة تتمثل في صيغة متعددة الخطوات.

## طريقة حل المسائل

### المسائل المحلولة

إن المسائل المحلولة البرقية عبارة عن مسائل محلولة بالكامل، ويتبع كل منها طريقة الخطوات السبع الموضحة في القسم 1.5. تبدأ كل مسألة محلولة منها بعبارة المسألة ويلبها الحل الكامل. كما تُستخدم طريقة الخطوات السبع في الربط

### مسألة محلولة 13.2 الجسيمات الموجودة في المسرع

افترض أن لديك الكترونا وجسيم ألفا (نواة ذرة هيليوم) يتحركان عبر جزء من أنبوب شعاعي داخل مسرع الجسيمات، وتحركت الجسيمات في الاتجاه نفسه. تبلغ سرعة الإلكترون  $0.830c$  وسرعة جسيم ألفا  $0.750c$ . وراقب هاتين السرعتين لملاحظ ثابت في المختبر.

#### المسألة

ما سرعة جسيم ألفا كما لوحظت من الإلكترون، بدلالة سرعة الضوء؟

#### الحل

**فكر** يتخلى الإلكترون بسرعة جسيم ألفا خطأ لأنه أسرع. وفقا لقياس الملاحظ الثابت في المختبر يمكن أن يميل المرء إلى بناء الاستدلالات من النوع  $v_{\alpha} = v_{\alpha} + v_{\alpha}$  ولكن مع توفر تحويل السرعة النسبية أصبح من السهل كثيرا حل هذه المسألة بهذه الطريقة. افترض أن جميع السرعات المتجهة المعطاة تقع في اتجاه  $x$  الموجب. كل ما علينا التنبؤ به هو أن تكون حذرين تجاه السرعات التي تحدهما بوصفها  $v_1$  و  $v_2$  و  $v_3$  يمكننا بعد ذلك استخدام المعادلة 13.17 أو المعادلة 13.18 لإيجاد الإجابة.

#### رسم الشكل 13.13

عبارة عن رسم لإلكترون يعبر جسيم ألفا

**ابحث** لدينا منطقتا إسناد، منطقتا أصلي  $F$  ومنطقة أصل على الأرض ومنطقة  $F'$  تتنقطة أصل على الإلكترون. يتحركان بسرعة متجهة ثابتة  $V$  بالنسبة إلى المختبر. إن إيجاد السرعة المتجهة  $v_1'$  لجسيم ألفا في منطقتا الإلكترون يتضمن التحويل النسبي للسرعات المتجهة. حيث إن السرعة المتجهة  $v_2$  لجسيم ألفا في منطقتا المختبر معلومة بالفعل. يمكننا بعد ذلك استخدام المعادلة 13.17 لتحقيق هدفنا في إيجاد

$$v_1' = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{vu_1}{c^2}}$$

**بسط** لا يوجد الكثير لتبسيطه في هذه الحالة. ونفكر معظم العمل هنا في تحديد أي كمية يتم قياسها في أي منطقتا وتحديد السرعة النسبية الصحيحة للمنطقتا.

$$v_1' = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{vu_1}{c^2}} = \frac{0.750c - 0.830c}{1 - \frac{(0.830c)(0.750c)}{c^2}} = -0.2119205c.$$

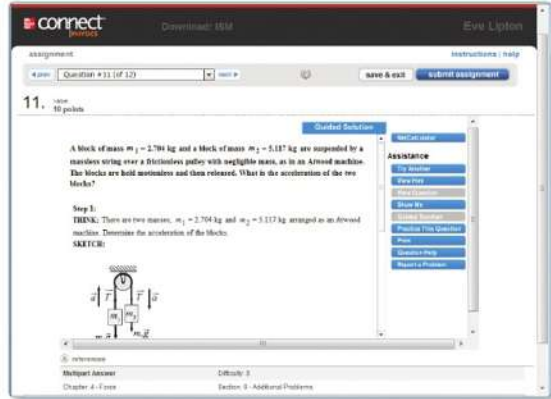
**قرب** سنقرب النتيجة إلى ثلاثة أرقام معنوية.

$$v_1' = -0.212c.$$

**تحقق ثانية** العلامة السالبة للسرعة المتجهة جسيم ألفا كما يراها الإلكترون منطقية لأن جسيم ألفا سيبدو وكأنه يتحرك في الاتجاه  $x$  العكس، إذا حسبنا السرعة النسبية بين الإلكترون وجسيم ألفا بشكل غير نسبي، فنستحصل على

$$v_{rel} = v_{alpha} - v_{electron} = 0.750c - 0.830c = -0.080c.$$

بالنظر إلى الحقل، يمكننا أن نرى أن المعامل  $1/(1 - uv/c^2)$  يمدد فرق السرعة المتجهة غير النسبية. عندما نسحب السرعات المتجهة للإلكترون وجسيم ألفا جزءا كبيرا من سرعة الضوء، يصبح هذا المعامل أكبر من 1، وسيكون مقدار فرق السرعة المتجهة النسبية أكبر من مقدار فرق السرعة غير النسبية. ومن ثم، تبدو النتيجة التي توصلنا إليها منطقية.



بالفيزياء. تُوضَّح الخطوات السبع المعتادة في إرشادات الحل مع مساعدة إضافية إذا كنت تحتاج إليها.

## مثال 9.1

### تحديد موقع نقطة باستخدام الإحداثيات الديكارتية والتقريبية

نقطة موقعها محدد بالإحداثيات الديكارتية (4,3)، كما هو موضح في الشكل 9.4.

#### المسألة

كيف يمكننا تمثيل موقع هذه النقطة بالإحداثيات القطبية؟

#### الحل

باستخدام المعادلة 9.1، يمكننا حساب الإحداثيات القطبية:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

باستخدام المعادلة 9.2، يمكننا حساب الإحداثيات القطبية:

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(3/4) = 0.64 \text{ rad} = 37^\circ.$$

لذا يمكننا التعبير عن موقع النقطة  $P$  بالإحداثيات القطبية بالصيغة التالية  $(5, 37^\circ)$  أو  $(5, 0.64 \text{ rad})$ . لاحظ أنه يمكننا أن نحدد الموقع نفسه عن طريق جمع أي منزايات صحيحة لـ  $2\pi \text{ rad}$  أو  $360^\circ$  على  $\theta$ .  
 $(r, \theta) = (5, 0.64 \text{ rad}) = (5, 37^\circ) = (5, 2\pi \text{ rad} + 0.64 \text{ rad}) = (5, 360^\circ + 37^\circ)$ .

## الأمثلة

أما الأمثلة الموجزة (عبارة المسألة والحل فقط)، فتركز على نقطة معينة أو مفهوم معين. كما تمثل هذه الأمثلة حلقة وصل بين الأمثلة المحلولة بالكامل (بالخطوات السبع) ومسائل الواجب المنزلي.

## إرشادات حل المسائل: قوانين نيوتن

نيوتن الثاني في ذلك الاتجاه. وستساوي محصلة القوة كتلة الجسم مضروبة في تسارعه.

4. عندما نحلل نتجه قوة إلى مركبات على طول اتجاهات الإحداثيات، انتبه إلى الاتجاه الذي يتخمن جيب زاوية محددة والاتجاه الذي يتخمن جيب التمام. لا نعلم نفاً على المسائل السابقة ونعتقد أن كل المركبات في الاتجاه  $x$  تتضمن جيب التمام؛ لأنك ستجد مسائل تتضمن فيها مركبة  $x$  جيب زاوية. اعتمد على التعريفات الواضحة للزوايا واتجاهات الإحداثيات وهندسة الوقت المحدد. حيث تظهر الزاوية نفسها في كثير من الأحيان عند نقاط مختلفة وبين مستقيمات مختلفة في المسألة. ينتج عن هذا عادة مثلثات متشابهة. تخوّن غالباً على زوايا قائمة، إذا سميت رسماً بيانياً لمسألة تحتوي على زاوية عامة  $\theta$ . فحاول أن تستخدم زاوية ليست قريبة من  $45^\circ$ . لأنه لا يصعب التمييز بين مثل هذه الزاوية وتمثيلها في رسمك.

5. تحقق دائماً من إجاباتك النهائية، هل تبدو الوحدات متطابقة؟ هل المقادير معقولة؟ إذا غيرت متغيراً لتقرب من قيمة حدية، فهل ستقدم إجاباتك توقعاً صحيحاً كما سيحدث؟ يمكنك تقدير إجابة المسألة أحياناً باستخدام تقريبات القيمة الأسية. كما ناقشنا في الوحدة 1، فمثل هذا التقدير يكشف غالباً ما إذا ارتكبت خطأً حسابياً أو إذا كتبت صيغة غير صحيحة.

6. دائماً تكون قوة الاحتكاك مضادة لاتجاه الحركة ومؤثر في اتجاه مواز لسطح التلامس، وتكون قوة الاحتكاك السكوني مضادة للاتجاه الذي ستحرك فيه الجسم في حالة عدم وجود قوة احتكاك. لاحظ أن قوة الاحتكاك الحركي تساوي دائماً ضرب معامل الاحتكاك في القوة العمودية. بينما تكون قوة الاحتكاك السكوني أقل من ذلك التناح أو مساوية له.

تعدّ تحليل الموقف من حيث القوى والحركة مهارة للعبة في الفيزياء، كما أن التطبيق الصحيح لقوانين نيوتن من الأساليب بالغة الأهمية. ستساعدك الإرشادات التالية في حل مسائل الميكانيكا من خلال قوانين نيوتن الثلاثة، كما أنها تشكل جزءاً من استراتيجية الخطوات السبع لحل كل أنواع مسائل الفيزياء. وهي وثيقة الصلة بخطوات الرسم وفكّر وابتكر.

1. قد يساعدك الرسم البياني الكلي على التصور المرئي للموقف وتحديد المفاهيم المتضمنة، ولتكنك ستحتاج أيضاً إلى مخطط الجسم الحر المتصل لكل جسم لتحديد القوى المؤثرة في هذا الجسم لا في غيره، ونقطة إنشاء مخططات الجسم الحر الصحيحة متناحاً حل كل المسائل في الميكانيكا، سواء أُنصبت أجساماً ساكنة (غير متحركة) أم أجساماً متحركة. تذكر أنه يجب ألا تتضمن أي من مخططات الجسم الحر الناتجة عن قانون نيوتن الثاني باعتبارها قوة.

2. وبعد اختيار النظام الإحداثي المناسب، فعادة ما يُترق اختيار النظام الإحداثي بين المعادلات المبسطة جداً والمعادلات الصعبة للغاية. وفي أغلب الأحيان، يكون من المفيد اختيار محور على طول اتجاه عجلة الجسم نفسه، إن وجدت، وفي مسائل الأجسام الساكنة، سيكون من المفيد عادة توجيه محور على طول سطح. سواء أكان أفقياً أو مائلاً. وبعد اختيار النظام الإحداثي الأكثر ملاءمة، مهارة مكتسبة تحصل عليها عن طريق خبرتك التي تزيد مع حل العديد من المسائل.

3. بمجرد اختيار الاتجاهات الإحداثيات، حدد ما إذا كان الموقف يتضمن المرحلة في أحد الاتجاهين، فعلى سبيل المثال، إذا لم تحدث عجلة في اتجاه  $x$ ، فمحددنا بتطبيق قانون نيوتن الأول في هذا الاتجاه، وسأوي مجموع القوى (محصلة القوى) صفراً إذا حدثت العجلة في اتجاه محدد، على سبيل المثال، في الاتجاه  $x$ ، فمحددنا بتطبيق قانون

## إرشادات حل المسائل

ترد إرشادات حل المسائل قبل مجموعة التمارين الموجودة في نهاية الوحدة وهي تلخص المهارات أو الأساليب المهمة التي يمكن أن تساعدك في حل المسائل المتعلقة بمحتوى الوحدة. إنّ النهج المتمثل في هذا الكتاب، هو أنّ الفيزياء تقوم على أساس مجموعة من الأفكار الأساسية التي يمكن تطبيقها على العديد من المواقف والمشكلات، لذا يؤكد الكتاب على أنه لا توجد طريقة واحدة لحل جميع المسائل وبمساعدة على استخدام التفكير الناقد بشأن الطريقة الأكثر فعالية في حل المسائل قبل أن تبدأ في الحل.

## مجموعات التمارين وأسئلة نهاية الوحدة

إلى جانب توفير إرشادات وأمثلة واستراتيجيات لحل المسائل، يقدم هذا الكتاب أيضاً مجموعة كبيرة من الأسئلة والتمارين في نهاية الوحدة. وتتضمن كل وحدة أنواعاً عديدة من الأسئلة مثل أسئلة الاختيار من متعدد والأسئلة المفاهيمية والتمارين (في كل قسم) والتمارين الإضافية (ليست حسب الأقسام "مفتاح للحل") وتمارين بمعطيات متعددة، وتوضع على التمرينات الصعبة علامة نقطة واحدة. أما التمرينات الأكثر صعوبة فتوجد عليها علامة نقطتين.

## تهييد مبادئ التفاضل والتكامل

يفترض الكتاب معرفة الطالب بالفيزياء والرياضيات في مستوى المرحلة الثانوية. من المفضل أن يكون الطلاب قد درسوا مقرراً تهيديتاً في التفاضل والتكامل قبل أن يبدأوا في دراسة هذه المقر. ويمكن دراسة المقررين في الوقت ذاته، ولنسهل ذلك الأمر، يورد الكتاب تهييداً لمبادئ التفاضل والتكامل في أحد الملاحق، بحيث يقدم النتائج الأساسية للتفاضل والتكامل بدون ذكر الاشتقاقات الصعبة.

## محة عامة عن الوحدة

في بداية كل وحدة، توجد لمحة عامة توضح عناوين الأقسام التي ترد في الوحدة. كما تتضمن أيضًا عناوين الأمثلة والمسائل المحلولة في الوحدة. ومن ثم، تستطيع في نظرة سريعة، أن تعرف ما إذا كانت الوحدة تتضمن موضوعًا أو مثالًا أو مسألة محددة.

## ما سنتعلمه/ ما تعلمناه

صُممت كل وحدة من هذا الكتاب بتصميم ندوة بحثية جيدة. وقد قيل في ما سبق "أخيرهم ما سوف تخبرهم به، ثم أخيرهم به، ثم أعد عليهم ما أخيرتهم!" تبدأ كل وحدة بفترة **ما سنتعلمه** — وهي ملخص سريع للغطاء الأساسية بدون أي معادلات. وفي نهاية كل وحدة، ستجد **ما تعلمناه/ دليل المذاكرة للاختبار** وهما يتضمنان المفاهيم الأساسية بما في ذلك المعادلات الرئيسية.

### ما سنتعلمه

- كمية الحركة لجسم ما هي ناتج ضرب كتلته في سرعته المتجهة، وكمية الحركة كمية متجهة وتكون في اتجاه متجه السرعة المتجهة نفسه.
- يمكن التعبير عن قانون نيوتن الثاني بصيغة عامة كما يلي: محصلة القوى المؤثرة في جسم ما تساوي مشتقة الزمن لكمية حركة الجسم.
- يطلق على التغير في كمية الحركة الدفع، ويُقصد به تكامل محصلة القوى التي تسبب تغير كمية الحركة بالنسبة إلى الزمن.
- في كل التصادمات، يتم حفظ كمية الحركة.
- بالإضافة إلى حفظ كمية الحركة، تتميز التصادمات المرنة أيضًا بخاصية حفظ الطاقة الحركية الإجمالية.
- في التصادمات اللامرنة تمامًا، يتم التخلص من أقصى قدر من الطاقة الحركية وتنتقل الأجسام المتصادمة معًا. ومن ثم، لا يتم حفظ الطاقة الحركية الإجمالية، لكن يتم حفظ كمية الحركة.
- التصادمات التي ليست مرنة وليست لامرنة تمامًا هي تصادمات لامرنة جزئية، ويتناسب التغير في الطاقة الحركية مع مربع معامل الارتداد.
- يتم حفظ كمية الحركة على الجالات بعيدة المدى مثل قذائف الجسيمات، حيث تُستخدم في اكتشاف الجسيمات الجديدة ونظرية النوى التي تُستخدم لإنتاج أنه لا يمكن توقع أنماط التلصق على المدى البعيد.

## تقديم المفاهيم

تُشرح المفاهيم في النص الذي يسبق أي شروحات رياضية أو صيغ أو اشتقاقات، وذلك لترسيخ السبب في ضرورة وجود المفهوم أو الكمية وأهميتها. إضافة إلى أهمية تحديدها بدقة، وبعد ذلك، ينتقل المؤلفان من شرح المفاهيم والتعريفات إلى الصيغ والمصطلحات الدقيقة.

## سؤال الاختبار الذاتي 5.3

الكتلة معلقة عموديًا من الزنبرك عند إزاحة من موضع الاتزان. تُسحب الكتلة إلى أسفل قليلاً وبعد ذلك يتم تحريرها للسكون. ارسم مخطط الجسم الحر للكتلة في كل من الحالات التالية:

- الكتلة عند إزاحة من موضع الاتزان.
- الكتلة عند أعلى نقطة عمودية لها.
- الكتلة عند أدنى نقطة عمودية لها.

## أسئلة الاختبار الذاتي

في كل وحدة، تركز مجموعة من الأسئلة على المفاهيم الرئيسية في النص، وذلك لتشجيع الطلاب على تنمية حوار داخلي. وهذه الأسئلة ستساعد الطلاب على استخدام التفكير الناقد بشأن ما قرؤوه للتو وتحديد ما إذا كانوا يفهمون المفهوم، إضافةً إلى وضع قائمة بأسئلة للمتابعة يسألونها في الصف. توجد إجابات أسئلة الاختبار الذاتي في نهاية كل وحدة.

## مراجعة المفاهيم

صُممت مراجعة المفاهيم كي تُستخدم مع تكنولوجيا نظام الإجابة الشخصية. وسوف تظهر في النص حتى تبدأ في التفكير بشأن المفاهيم، لكن الإجابات ستكون متاحة للمعلمين فقط.

## دليل الحلول للطلاب

يحتوي دليل الحلول للطلاب على إجابات وحلول أسئلة معينة من أسئلة نهاية الوحدة والتارين (المميزة برقم أزرق). وجميع الأسئلة المحلولة في الوحدات من 1 إلى 13، تتبع طريقة الخطوات السبع لحل المسائل، والتي يوضحها القسم 1.5. وفي الوحدات من 14 إلى 40، يقتصر استخدام طريقة الخطوات السبع على التمرينات الصعبة (نقطة واحدة) والتمرينات الصعبة جدًا (نقطتان). أما الأسئلة العادية (بدون نقاط)، فتتوفر لها حلول مختصرة.

## مراجعة المفاهيم 6.7

أي من الرسومات الأربعة يمثل نقطة اتزان مستقرة للكرة على السطح الداعم لها؟



(a)



(b)



(c)



(d)



# شكر وتقدير

الكتاب وملحقاته باحترافية حتى أخرجوه للنشر. وكل فرد منهم يستحق منا خالص التقدير والعرفان. وأخيرًا، لم تكن لتبدل كل هذا الجهد لولا دعم عائلانا الذين ساعدونا على العمل في هذا الكتاب خلال العديد من الأمسيات والعطلات وحتى الأعياد والإجازات. لذا نأمل أن يكون صبرهم وتشجيعهم حق ثماره. وشكرهم من قلوبنا لمساندتهم إيانا حتى تمكّنّا من إكمال هذا الكتاب.

—فولفجانج باور  
—غراي د. ويستفال

## المراجعون والمستشارون والمشاركون في الإصدار الثاني

نيثا أبرامزون، جامعة كاليفورنيا للتقنية - بومونا  
روبال البريدج، جامعة فاندربيلت  
ديبني أماراسوريا كلية نورثويست  
مايكل ج. أندريسن جامعة كاليفورنيا - سان دييغو  
أرليت بالجون، جامعة سان دييغو  
تشارلز بيتش، كلية ويسليان  
وارد بيرمان جامعة كاليفورنيا - ريفرسايد  
أنجيلا بيسلي، جامعة فيرفيلد  
غاي بيلوك، جامعة ماساتشوستس  
جيف بودارت، كلية تشيولا  
كيتيث بولاند، جامعة أوهايو  
بروس بولون، جامعة هاملاين  
لوكا بومبيلي، جامعة ولاية ميسيسيبي  
غراي د. برانوم، جامعة فريديس  
تشارلز بوركهارت، كلية سان لويس الأهلية - فلوريسانت فالي  
دانكان كارلميث، جامعة ويسكونسن - ماديسون  
ريان كيس، كلية إلزابيث تاون الأهلية التقنية  
جورج كافرييس، كلية ولاية فارمينجديل  
سوميترا شانتواديابي كلية جورجيا هيلاندز  
شيدونغ تشين، جامعة سيدارفيل  
سكوت كريتيندن، جامعة جنوب كارولاينا  
دانييل دالافيف، كلية نيوجيرسي  
دانييل ديل، جامعة وايومنغ  
ديبانغا دوتا، جامعة ولاية ميسيسيبي  
س. فيشر، جامعة جورج ماسون  
جوهان فرانك، جامعة ولاية لويزيانا  
ستوارت غابيزو، جامعة شيكاغو  
ريتشارد غيلدرمان، جامعة غرب كنتاكي  
مارغريت غيبيرت، كلية ويليام ريني هاربر

إنّ إنتاج كتاب كالذي تمسكونه بين أيديكم، لم يكن ليتحقق لولا المجهود العظيم الذي بذله عدد هائل من الأفراد المتفانين. أولاً وقبل كل شيء، نود أن نشكر فريق التحرير والتسويق الموهوب من McGraw-Hill. حيث عمل على الإصدار الأول والثاني من هذا الكتاب: مارتي لانج وكينت بيترسون وتوماس تيمب وريان بلانكنشيب وماري هارلي وليز ريكير وداريل بروفلودت وليزا نيكس ودان والاس، ونخص بالشكر، مايكل لانج وإيف ليتون وبيل ويلش وكيرت رينولدس وديب هاش. فقد قدموا لنا الكثير من المساعدات وبشئى الطرق، كما أنهم حرصوا على تشجيعنا بعد انتهاء كل مرحلة من مراحل المراجعة. إنّ روح الفريق التي يتمتعون بها وحس الدعابة والتعاؤل اللامتناهي، شجعنا على استكمال مسيرتنا وجعل من الساعات الطويلة التي أمضيها في إنتاج الكتاب، وقتًا ممتعًا.

كما ساعدنا محررو التطوير ريتشارد هاينز ودايفيد تشيلتون وماري هارلي وإيف ليتون، في العمل على التعليقات والاقتراحات الكثيرة التي تلقيها من المراجعين من أجل تحسين الكتاب. لذا، فإنهم يستحقون وهم وسائر المراجعين والمستشارين، حقلًا كبيرًا من الثناء والتقدير لعملهم على تحسين جودة المخطوطة النهائية وكذلك زملاؤنا في كلية الفيزياء والفلك بجامعة ميشيغان؛ ألكساندرا جيد وأليكس براون وبرنارد بوب وكارل شميت وتشونغ بي ريان وك.ب. يوان ودان ستامب وإد براون وهندريك شاتز وكريس ستاروستا وليزا لايبودس ومايكل هاريسون ومايكل مور ورينهارد شوينهورست وسلامة أحمد وس.ب. ماهانتي وسكوت برانت وستان شرابير وفينور ناجي وتوماس دوجيت، فقد ساعدونا مساعداً عظيمة، حيث درسوا لصفوفهم البحتوى الذي طورناه وأمدونا بتعليقاتهم القيمة بشأن النقاط الجيدة والنقاط التي تحتاج إلى التعديل؛ ولذا فإننا نشكرهم جميعًا، كما نشكر كل من ساهموا في وضع المسائل، فقد بذلوا مجهودات عظيمة، ونخص بالشكر ريتشارد هالشتين الذي تولى مهمة تنظيم عمل جميع المساهمين.

وفي هذه المرحلة، عند تسليم النسخة النهائية إلى الناشر، اضطلع فريق جديد بأكله من المحترفين بالعمل، وأضاف تعديلات جديدة هي التي حولت هذه النسخة إلى كتاب، أما كيرت نورلين وفريق من LaurelTech (وهي فرع من diacriTech)، فقد اضطلعوا بالعمل على مسائل الواجب المنزلي ومراجعة جميع التمارين والأعداد والمعادلات التي كتبناها، كما نشكر فريق البحث عن الصور، وتحديدًا داني ميلدانغ الذي عمل على تحسين جودة الصور المستخدمة في الكتاب بدرجة كبيرة، وجعلوا من عملية الاختيار وقتًا ممتعًا ونشكر أيضًا فريق Precision Graphics الذي استخدم رسومنا الأصلية لكنه حسن جودتها بدرجة كبيرة مع الحفاظ على دقة الحسابات التي أنتجت هذه الرسوم، أما محررة الكتاب جين هوفر، فقد جمعت العمل كله في النهاية، حيث تفتّت ما كتبناه وجعلته سهل الفهم والقراءة. أما فريق التصميم من McGraw-Hill وفريق الإنتاج الذي يتكون من جين كلين ودايفيد هاش وكاري برغر وساندي لودوفيسي وتامي جوران وجودي دايفيد وماري باورز وشيري بادن وأدنيث دور فقد أشرفوا على



ب. شيفتيز، جامعة سليبري روك - بنسلفانيا  
 أناندا شاستري، جامعة ولاية مينيسوتا - مورهد  
 مارلين سيمون، جامعة أوبورن  
 دافيد سليمر، جامعة لاندر  
 ليه سميت، جامعة سينسنتي  
 ستيفينسترون، جامعة جنوب كارولينا  
 بوجين سوردوتوفيتش، جامعة أوكلاند  
 جون ت. تافيرن، جامعة سامفورد  
 مايكل تاكستون، جامعة تاويزن التقنية  
 كينثيا تريفيزان، أكاديمية كاليفورنيا البحرية - جامعة كاليفورنيا  
 ماريان تولوف، جامعة لوك هافن - بنسلفانيا  
 ك. فيليسايريس، جامعة سنترال فلوريدا  
 دافيد فيردولك، كلية الميرا  
 مارغريت ويلينغ، كلية بيرس - لوس أنجلوس  
 جوزف ويست، كلية ويسليان - ويست فرجينيا  
 ويلدون ج. ويلسون، جامعة سنترال أوكلاهاما  
 ماتيو وود، معهد فلوريدا للتقنية  
 سكوت پوست، ذا سيتادل  
 تود يونغ، كلية ولاية ويان

أواد جرجس جامعة نورث كارولينا- شارلوت  
 جيمس غرينغ، معهد فلوريدا للتقنية  
 باتريك ك. غيونز، جامعة واشنطن - سانت لويس  
 جيمس غيلبيرت، جامعة ولاية روز  
 ك. غولد، جامعة جنوب كاليفورنيا  
 إدوين إ. هاتش، الثالث، معهد روتنستر للتقنية  
 مارتن هاكورت، جامعة ولاية أيداهو  
 روب هاغود، كلية واشنطنو الأهلية  
 جيم هام، كلية بيغ بيند الأهلية  
 أثولا هيرت، جامعة سليبري روك - بنسلفانيا  
 سكوت هيلدريث، كلية شابوت  
 باربرا هولينغ، جامعة كاليفورنيا للتقنية - بومونا  
 ريتشارد هولاند، جامعة جنوب إلينوي وكلية جنوب شرق إلينوي  
 جورج إيفو، جامعة كاليفورنيا - لوس أنجلوس  
 ساي لبار، جامعة واشنطن - سانت لويس  
 هوارد جاكسون، جامعة سينسنتي  
 أمين جزائري، جامعة جورج ماسون  
 كريغ جينسن، كلية نورثرن فيرجينيا الأهلية  
 روبرت جونسون، جامعة كاليفورنيا - سانتا كروز  
 سكوت كيندي، جامعة أندرسن  
 تيموثي كيد، جامعة نورثرن ألبا  
 بانغسو كيم، جامعة ومعهد فيرجينيا التقنية  
 يونغ إ. كيم، جامعة بورديو  
 بريان كورلين، معهد روتنستر للتقنية  
 زلتكو كونيوف، جامعة تكساس - سان أنتونيو  
 إتشبيروكوفو، جامعة تكساس - سان أنتونيو  
 إلتا كراچكو، جامعة نبراسكا - لينكولن  
 راتنابولي كولاسيري، جامعة تاويزن التقنية  
 ألين لانز، جامعة أوبورن  
 كوان لي، جامعة سانت لويس الأهلية - ميراميك  
 تود ر. ليف، جامعة كلود كانتوي الأهلية  
 بيدرام ليلابادي، جامعة نورث كارولينا - شارلوت  
 ستيف ليلينغ، جامعة لونغ أيلاند - سي داهليو بوست  
 مايكليزا، جامعة أوهايو  
 جورج لوبيز، جامعة تكساس - إلباسو  
 هونغ لو، جامعة ولاية نيويورك - بافلو  
 كينغشوك ماجومدار، جامعة ولاية غراند فاللي  
 ليود ماكاروفيتز، كلية ولاية فارمينجديل  
 بيت ماكاروفيتز، جامعة فلوريدا الدولية  
 بروس ماسون، جامعة أوكلاهاما - نورمان  
 كلايسا ماكبرايد، جامعة ناشفيل الأهلية  
 آرثر ميرز، جامعة ولاية ألبا  
 رودي ميشالاك، جامعة وايومنغ  
 جونانان موريس، جامعة سانت لويس الأهلية - فوريسيت بارك  
 ل. كينت موريسون، جامعة نيومكسيكو  
 ريتشارد موات، جامعة ولاية نورث كارولينا  
 راجماني نارايانان، جامعة فلوريدا الدولية  
 بيتر د. بيرسانس، معهد رينسيلر للتقنية  
 روبرت فولبين، كلية ولاية ترينيداد  
 مايكل بوليتانو، جامعة ماركيت  
 أمي يوب، جامعة كليمنسون  
 ج. ألبرت بوبسون، الاين كلية ويسليان - ويست فرجينيا  
 تومي راغلاند، جامعة نيو ميكسيكو - تاوس  
 روبرتو راموس، جامعة دريكسل  
 ب. راسموسن، جامعة تكساس - دالاس  
 دافيد ريد، جامعة شيكاغو  
 آدم رينغستورف، جامعة بورديو - كالوميه  
 مارك زبرايت، كلية بيرمينغهام الجنوبية  
 جينا سورسي، كلية هيندس الأهلية

## المستشارون والمشاركون والمراجعون والمنحون للإصدار الأول

الحسان العوض جامعة حائل - المملكة العربية السعودية  
 محمد عبد النعم، جامعة الملك فهد للبترول والمعادن، ظهران،  
 المملكة العربية السعودية  
 نينا أبرامازون، جامعة كاليفورنيا للتقنية - بومونا  
 إدوارد أدولسون، جامعة ولاية أوهايو  
 موهان أغراوال، جامعة الألباما الزراعية والميكانيكية  
 سلامة أحمد، جامعة ولاية ميشيغان  
 ألبرت أنيمان، جامعة ماساتشوستس في لويل  
 بول أفيري، جامعة فلوريدا  
 دافيد ت. بانون، جامعة ولاية أوريغون  
 ماركو باناغليا، جامعة بيريكلي - كاليفورنيا ومختبر بيركلي لورانس  
 الوطني  
 رينيه بلويد، جامعة ولاية ويان  
 دوغلاس ر. بريغان روتجرز، جامعة ولاية نوجيرسي  
 كارلوس برنولافي، جامعة تكساس الزراعية والميكانيكية - كومبريس  
 لوكا بيرتو، جامعة كاليفورنيا - لوس أنجلوس  
 بيتر بيرسودورف، جامعة ولاية سان جوزيه  
 سوبد باتاشاريا، معهد ساها للضياء النووية، كولكاتا، الهند  
 هلموت بيريتز، معهد جورجيا للتقنية  
 كين توماس بولاند، جامعة ولاية أوهايو  
 ريتشاردبون، جامعة فلوريدا الدولية  
 ديتير بريل، جامعة ميريلاند - كلية بارك  
 أليكس براون، جامعة ولاية ميشيغان  
 إد براون، جامعة ولاية ميشيغان  
 جيسون براون، جامعة كليمنسون  
 رونالد براون، جامعة كاليفورنيا التقنية - سان لويس أوبيسيو  
 براتونج، كامبل، جامعة يونغ بريغام  
 دانتان كارلسميث، جامعة ويسكونسن - ماديسون  
 نول كيسن، جامعة نوتردام  
 جون سيرنيه، جامعة ولاية نيويورك - بافلو  
 رالف شامبرلين، جامعة ولاية أريزونا  
 ك. كيلفن تشانغ، جامعة تكساس التقنية  
 ك. تشرش، جامعة ميامي أوهايو- أوكسفورد  
 يوجينيا شوكان، جامعة كليمنسون  
 روبرت كلير، جامعة كاليفورنيا - ريفرسايد  
 روي كليرك، جامعة ميشيغان

- ج. م. كولينز، جامعة ماركييت  
برينت أ. كوربين، جامعة كاليفورنيا - لوس أنجلوس  
ستيغاني كوتو، جامعة ولاية بنسلفانيا  
وليام داويك، كلية ميلواكي للهندسة  
مايك ديتين، جامعة كاليفورنيا - أيرفاين  
جون ديفلين، جامعة ميشيغان - ديربورن  
جون دينادرو، جامعة دريكسل  
فيغوس ر. دريجونيس، جامعة كليسون  
مايك دويسون، جامعة كولورادو - بولدر  
نوماسدراغرت، جامعة ولاية ميشيغان  
مايكل دوفرونيس، جامعة هاواي - مانوا  
دايفيد إلمور، جامعة بورو  
روبرت إندورف، جامعة سينسيناتي  
دايفيد إرمر، جامعة ولاية ميسيسيبي  
هارولد إيفينسن، جامعة ويسكنسن - بلاتيفيل  
ليزا ل. إيفريت، جامعة ويسكنسن - ماديسون  
غاس إيفراد، جامعة ميشيغان  
مايكل فامبانو، جامعة ميشيغان الغربية  
فرانك فيرون، جامعة دريكسل  
ليونارد فاين غولد، جامعة دريكسل  
راي فراي، جامعة أوريغون  
أليكساندراجيد، جامعة ولاية ميشيغان  
ج. ويليام فراي، جامعة كاليفورنيا - ريفرسايد  
ستوارت غايسز، جامعة شيكاغو  
ك. غولد، جامعة جنوب كاليفورنيا  
ب. غرينشتاين، جامعة كاليفورنيا - سان دييغو  
جون ب. غروب، جامعة ولاية سان جوزيه  
شي جان غو، الجامعة الصينية في هونغ كونغ، شانتن، الأقاليم  
الجديدة، هونغ كونغ  
إدوين إ. هانتش، الثالث، معهد روتشستر للتقنية  
ناصر م. حمدان، الجامعة الأمريكية في الشارقة  
جون هاردي، جامعة تكساس الزراعية والميكانيكية  
كاثلين أ. هاربر، جامعة دنيسون  
دايفيد هاريسون، جامعة تورنتو  
مايكل هاريسون، جامعة ولاية ميشيغان  
ريتشارد هانز، جامعة إنديانا  
ساتوشي هيناتا، جامعة أوبورن  
لورنت هودجز، جامعة ولاية أيوا  
جون هوبكينز، جامعة ولاية بنسلفانيا  
جورج ك. هورتون، جامعة روتجرز  
ت. ويليام هوك، جامعة ميامي - أوهايو  
إريك هودسون، معهد ماساتشوستس للتقنية  
يونغ هاه، جامعة ولاية ساوث داكوتا  
مصطفى حسين، الأكاديمية العربية للعلوم والهندسة، مصر  
أ. ك. هايدر، جامعة نوتردام  
دايفيد ك. إنغرام، جامعة أوهايو - أثينا  
ديان جاكوب، جامعة ميشيغان الشرقية  
أ. ك. جين، إلبات، روركي  
رونجنينغ جين، جامعة تينيسي - نوكسفيل  
كيت ل. جونز، جامعة تينيسي  
ستيفني إ. جونز، جامعة يونغ بريغام  
تركي كامون، جامعة تكساس الزراعية والميكانيكية  
ليف كابلان، جامعة تولين  
جوزيف كابوستا، جامعة مينيسوتا  
كاثلين كاش، جامعة كيس وسترن ريسرف  
سانفورد كيرن، جامعة ولاية كولورادو  
إريك كينكاكاون، جامعة غونزاغا  
إلين كيريكاتريك، معهد روز هالمن للتقنية  
كارستن نودسن، جامعة الدنمارك التقنية  
بريان د. كوبرلين، معهد روتشستر للتقنية
- و. دافيد كالب، الثالث، معهد جورجيا للتقنية  
أجلال كومار، جامعة جنوب الهادي، فيجي  
فريد كاتر، جامعة كاليفورنيا - سانتا كروز  
ديفيد لامب، جامعة تكساس التقنية  
ليزا لايدوس، جامعة ولاية ميشيغان  
أندريه لوكليو، جامعة كورنيل  
باتريك ر. لوكليو، جامعة آلاباما  
لويس ليهر، جامعة ولاية لويزيانا - باتون روج  
بيدرام ليلابادي، جامعة نورث كارولينا - شارلوت  
مايكل ليوا، جامعة ولاية أوهايو  
م.أك لوهدي، جامعة تكساس التقنية  
صامويل إ. لوفلاندر، جامعة روان  
صامويل لوغ، جامعة فيرجينيا للتقنية  
س. ب. ماهانت، جامعة ولاية ميشيغان  
أ. جيمس مالمان، كلية ميلواكي للهندسة  
بيت ماكوارفيتز، جامعة فلوريدا الدولية  
دانيل مارلو، جامعة برينستون  
بروس ماسون، جامعة أوكلاهاما  
مارتن ماكهيو، جامعة لويولا  
مايكل مكلنتري، معهد روز هالمن للتقنية  
دايفيد مكلنتير، جامعة ولاية أوريغون  
بروس ميلادو، جامعة ويسكنسن - ماديسون  
مارينا ميلنر-بولوتن، جامعة ريسون - تورونتو  
ك. فريد مور، جامعة تكساس - أوستن  
مايكل مور، جامعة ولاية ميشيغان  
جيفري مورغان، جامعة نورث أيوا  
كيران مولن، جامعة أوكلاهاما  
نظير مصطفي، جامعة الإمام  
نشالي مايلز، جامعة تكساس التقنية  
تيمور ناجي، جامعة ولاية ميشيغان  
ريزا نجات، جامعة ماكماستر  
كيرت نيلسون، جامعة غونزاغا  
مارك نيوپاور، جامعة إلينوي في أوربانا - تشامبين  
سيندي نير، جامعة ولاية ترين  
كريف أوجيلفي، جامعة ولاية أيوا  
برادفورد ج. أور، جامعة ولاية ميشيغان  
كارور بادمانانهان، جامعة ولاية ويان  
جيكوماس بارفين، جامعة ولاية سان جوزيه  
جاكولين باو، جامعة كاليفورنيا - لوس أنجلوس  
تود بيدلار، كلية لوثر  
ليو بيلونين، فيرجينيا التقنية  
أمي يوب، جامعة كليسون  
برنارد يوب، جامعة ولاية ميشيغان  
ك. بورسيجان، جامعة بونديشيري - بوندشيري  
سكوت برات، جامعة ولاية ميشيغان  
إيرل بروهوفسكي، جامعة بوردو  
كلود برونو، جامعة ولاية ويان  
وانغ كينغ هاي، جامعة سينغافورة الوطنية  
كودنيليو رابلو، جامعة كيتريغ  
يوهان رافلسكي، جامعة أريزونا  
كينيث ج. راغان، جامعة ماكجيل  
روبرتو راموس، جامعة دريكسل  
أيان ريدماونت، جامعة سانت لويس  
لوانس ب. ريس، جامعة يونغ بريغام  
أندرو ج. ريفرز، جامعة نورثويسترن  
جيمس و. رولف، جامعة يوسطن  
فيليب روز، جامعة ميريلاند  
تشونغ يو روان، جامعة ولاية ميشيغان  
دورافاكا روبينيك، جامعة ولاية لويزيانا  
هوميرا ساداغياني، جامعة كاليفورنيا للتقنية - بومونا

يانغ سان، جامعة نورث دام  
 ستيغن سوينغل، كلية سيتي سان فرانسيسكو  
 مريجسيد، معهد روز هالمن للتقنية  
 غريغوري نارليه، جامعة ميشيغان  
 مارشال تومسن، جامعة ميشيغان الشرقية  
 دوغلاس ك. ناسي، جامعة ولاية بنسلفانيا  
 سومديف تياجي، جامعة دريكسل  
 بريم فيشنافا، جامعة كيترينغ  
 إريك و. فارنس، جامعة أريزونا  
 جون فاسوت، جامعة بايلور  
 غونام فيموري، جامعة إنديانا - جامعة بورديو - إنديانا بوليس  
 ثاد ووكر، جامعة ويسكونسن - ماديسون  
 فوكيانغ وانغ، جامعة بورديو  
 دايفيد ج. ويب، جامعة كاليفورنيا - دايفيس  
 كيرت ويستفيلد، جورجيا للتقنية  
 فريد ويتفيلد، جامعة نيولين  
 غراي ويليامز، جامعة كاليفورنيا - لوس أنجلوس  
 سان يانغ، جامعة نورث دام  
 ل. يو، جورجيا للتقنية  
 بيبي يونغر، كلية البيهارل  
 ك. ب. يوان، جامعة ولاية ميشيغان  
 أندرو زانغويل، معهد جورجيا للتقنية  
 جينز زورن، جامعة ميشيغان - أن آر بور  
 مايكل زودوف، جامعة مينيسوتا

إرتان ساليك، جامعة كاليفورنيا للتقنية - يومونا  
 أوتو ساتكي، جامعة ولاية أريزونا  
 سيرجي سافراسوف، جامعة كاليفورنيا - دايفيس  
 هندريك شانز، جامعة ولاية ميشيغان  
 كارل شميت، جامعة ولاية ميشيغان  
 ستان شرايبر، جامعة ولاية ميشيغان  
 جون شرودر، معهد رينسبار للتقنية  
 رينهارد شوينهورست، جامعة ولاية ميشيغان  
 كونات سيباستيان، جامعة ماساتشوستس - لويل  
 بيورن سيل، جامعة ولاية نورتلاند  
 جيري شاكوف، جامعة نيولين  
 رالف شبل، جامعة ترنت  
 عرفان صديقي، جامعة كاليفورنيا - بيركلي  
 رافيندرا كومار سينها، كلية دلهي للهندسة  
 مارلين ل. سيمون، جامعة أوبورن  
 أليكس سمول، جامعة كاليفورنيا للتقنية - يومونا  
 ليه سميت، جامعة سينسنتي  
 تود سميت، جامعة دايتون  
 شيان نينغ سونغ، كلية ريتشلاند  
 جيف سونير، جامعة سيمون فريسر - ساري سنترال  
 نشاد إ. سوسوليك، جامعة كليمسون  
 كريس ستاروستا، جامعة ولاية ميشيغان  
 دونأ و. ستوكس، جامعة هيوستن  
 جيمس ستون، جامعة بوسطن  
 مايكل ج. ستروس، جامعة أوكلاهاما  
 دان ستامب، جامعة ولاية ميشيغان

# 8

## الأجسام الجاسئة



الشكل 8.1 صورة لمحطة الفضاء الدولية التغطت من المكوك الفضائي ديسكفري.

- 226 ما سنتعلمه**
- 226 8.1 مركز الكتلة ومركز الثقل**
- 226 مركز الكتلة المشترك بين جسمين
- 226 مسألة محلولة 8.1 مركز كتلة الأرض والقمر
- 228 مركز الكتلة المشترك بين عدة أجسام
- 229 مثال 8.1 حاويات الشحن
- 229 8.2 كمية حركة مركز الكتلة
- 230 الارتداد
- 230 مسألة محلولة 8.2 ارتداد المدفع
- 231 مثال 8.2 خرطوم إطفاء الحريق
- 232 الحركة العامة لمركز الكتلة
- 233 8.3 حركة الصاروخ
- 234 مثال 8.3 إطلاق صاروخ إلى المريخ
- 234 مسألة محلولة 8.3 إطلاق صاروخ دافع
- 236 8.4 تحديد مركز الكتلة
- 237 أنظمة الإحداثيات غير الديكارتيّة ثلاثية الأبعاد
- 238 التكاملات الحجمية
- 239 مثال 8.4 حجم الأسطوانة
- 240 مثال 8.5 مركز الكتلة
- 242 جسم نصف كروي
- 242 مسألة محلولة 8.4 مركز كتلة قرص فيه فجوة
- 243 مركز الكتلة للأجسام أحادية البعد وثلاثية الأبعاد
- 244 مسألة محلولة 8.5 مركز كتلة قضيب طويل ورفيع
- 245 246 ما تعلمناه/ دليل المذاكرة للاختبار
- 247 إرشادات حل المسائل
- 247 أسئلة الاختبار من متعدد
- 248 أسئلة مفاهيمية
- 248 تمارين
- 253 تمارين بمعطيات متعددة

**تمثل** المحطة الفضائية الدولية (ISS). الموضحة في الشكل 8.1. إنجازًا هندسيًا استثنائيًا. حيث تُغل علماء الفضاء بشكل مستمر منذ عام 2000. تدور هذه المحطة حول الأرض بسرعة تزيد عن  $7.5 \text{ km/s}$ . في مدار يتراوح بين  $320 \text{ km}$  و  $350 \text{ km}$  فوق سطح الأرض. عندما يتعقب المهندسون المحطة الفضائية الدولية، فإنهم يتعاملون معها باعتبارها جسيمًا نقطيًا. رغم أن حجمها يساوي  $109 \text{ m}$  في  $73 \text{ m}$  في  $25 \text{ m}$  تقريبًا. ومن المفترض أن هذه النقطة تمثل مركز المحطة. لكن كيف يحدد المهندسون المركز بالضبط؟

لكل جسم نقطة تتركز فيها كتلة الجسم كلها. بل أحيانًا لا تكون هذه النقطة. التي تُسمى مركز الكتلة. داخل الجسم. نوضح هذه الوحدة كيفية تحديد موقع مركز الكتلة وكيفية استخدامها لتبسيط العمليات الحسابية بما فيها حفظ كمية الحركة. افترضنا في وحدات سابقة أنه يمكن التعامل مع الأجسام باعتبارها جسيمات. وتوضح هذه الوحدة لماذا ينتج هذا الافتراض. كما نتناول هذه الوحدة مناقشة تأثيرات كمية الحركة في الحالات التي تختلف فيها كتلة الجسم وسرعته المتجهة أيضًا. يحدث ذلك أثناء الدفع الصاروخي. حيث تكون كتلة الوقود غالبًا أكبر من كتلة الصاروخ نفسه.

## ما سنتعلمه

- إنّ مركز الكتلة هو نقطة على الجسم تتركز فيها كتلة هذا الجسم كلها.
- يُحدّد موقع مركز الكتلة المشترك بين جسمين أو أكثر بحساب مجموع متجهات مواقع الأجسام مضروبة في كتلتها.
- توضح ميكانيكا الحركة الانتقالية لمركز كتلة جسم غير نقطي.
- كمية حركة مركز الكتلة تساوي مجموع متجهات كمية الحركة الخطية لأجزاء النظام. وتساوي مشتقة الزمن لها محصلة القوى الخارجية المؤثرة في النظام. صياغة موسعة من القانون الثاني لنيوتن.
- يجب أن تراعي تحليلات حركة الصاروخ الأنظمة متغيرة الكتلة. حيث يؤدي هذا التغيّر إلى اعتماد سرعة الصاروخ المتجهة اعتمادًا لوغاريتميًا على نسبة الكتلة الابتدائية إلى النهائية.
- يمكن تحديد موقع مركز كتلة جسم غير نقطي عن طريق تكامل كثافته الكتلية على حجمه الكلي والضرب في المنتج الإحداثي ثم القسمة على الكثافة الكلية.
- إذا كان للجسم مستوى تماثل، فإنّ مركز الكتلة يقع في هذا المستوى. وإذا كان للجسم أكثر من مستوى تماثل واحد، فإنّ مركز الكتلة يقع على الخط المستقيم أو نقطة تقاطع المستويات.

## 8.1 مركز الكتلة ومركز الثقل

حتى الآن، مثلنا موقع الجسم بإحداثيات نقطة واحدة. لكن ليس بالضرورة أن تعني عبارة مثل "توجد سيارة على بُعد  $x = 3.2 \text{ m}$ ". أنّ جسم السيارة كله موجود عند هذه النقطة. إذا، ماذا يعني استخدام إحداثي نقطة واحدة معينة لتمثيل جسم غير نقطي؟ تعتمد الإجابات عن هذه الأسئلة على الحالة المعينة التي يُستخدم فيها هذا النظام الإحداثي. في سباق السيارات، يُمثّل موقع السيارة بإحداثيات الجزء الأمامي للسيارة. عندما تغير هذه النقطة خط النهاية، يحسم السباق. أما في لعبة كرة القدم، فلا يُحتسب الهدف إلا إذا عبرت الكرة كلها خط المرمى، وفي هذه الحالة، يكون من المنطقي تمثيل موقع كرة القدم بإحداثيات الجزء الخلفي للكرة. إلا أن هذه الأمثلة ما هي إلا حالات استثنائية. أما في معظم الحالات، فيكون اختيار نقطة تمثل موقع الجسم غير النقطي أمرًا طبيعيًا. تُسمى هذه النقطة **مركز الكتلة**.

### التعريف

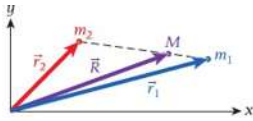
إنّ **مركز الكتلة** هو نقطة على الجسم تتركز فيها كتلة هذا الجسم كلها.

ومن ثمّ، يكون مركز الكتلة أيضًا نقطة على الجسم تتركز عندها قوة الجاذبية التي تؤثر في الجسم كله. إذا كنا نعتقد أن الكتلة كلها تتركز عند هذه النقطة عند حساب القوة الناتجة عن الجاذبية، فمن الممكن تسمية هذه النقطة **مركز الثقل**. وهو مصطلح يمكن استخدامه غالبًا كبديل لمركز الكتلة. (تحريًا للدقة، يجب أن نلاحظ أن هذين المصطلحين يشيران إلى شيء واحد فقط في الحالات التي تكون فيها قوة الجاذبية ثابتة في كل مكان على الجسم. في الوحدة 12، سنرى أن هذا لا ينطبق على الأجسام الكبيرة للغاية).

من المناسب أن نذكر هنا أنه إذا كانت الكثافة الكتلية للجسم ثابتة، فإن مركز الكتلة (مركز الثقل) سيكون في المركز الهندسي للجسم. ومن ثمّ فمن المنطقي أن نخمن أن مركز الثقل يكون في منتصف الجسم بالنسبة إلى معظم الأجسام التي نراها في حياتنا اليومية. وسوف تثبت الاشتقاقات الواردة في هذه الوحدة صحة هذا التخمين.

### مركز الكتلة المشترك بين جسمين

إذا كان لدينا جسمان متماثلان متساويان في الكتلة وأردنا أن نجد مركز الكتلة المشترك بينهما، فمن المنطقي أن نترض أن مركز الكتلة المشترك لهذا النظام يرتكز تحديداً. باعتبار التماثل. في منتصف المسافة بين مركزي الكتلة لهذين الجسمين. وإذا كانت كتلة أحد الجسمين أكبر من الأخرى، فمن المنطقي



**الشكل 8.2** موقع مركز الكتلة لنظام مكون من كتلتين  $m_1$  و  $m_2$ . حيث  $M = m_1 + m_2$ .

### مراجعة المفاهيم 8.1

في الحالة الموضحة في الشكل 8.2، ما المقادير النسبية للكتلتين  $m_1$  و  $m_2$ ؟

$$m_1 < m_2 \quad (a)$$

$$m_1 > m_2 \quad (b)$$

$$m_1 = m_2 \quad (c)$$

(d) لا يمكن تحديد أي الكتلتين أكبر استناداً إلى المعلومات المتوفرة في الشكل فقط.

### مراجعة المفاهيم 8.2

زجاجة أسطوانية لتوابل السلطة المصنوعة من الزيت والخل. نصفها من الخل (بكتافة كتلية  $1.01 \text{ g/cm}^3$ ) والنصف الآخر من الزيت (بكتافة كتلية  $0.910 \text{ g/cm}^3$ ) موضوعة على طاولة. في البداية، كان الزيت منفضلاً عن الخل. حيث كان يطفو فوق الخل. فُرِجَت الزجاجة حتى اختلط الزيت بالخل تمامًا. ثم وُضعت مرة أخرى على الطاولة. ما مقدار تغير ارتفاع مركز كتلة توابل السلطة نتيجة للخلط؟

(a) أعلى.

(b) أقل.

(c) عند نفس الارتفاع.

(d) لا تتوفر معطيات كافية للإجابة عن هذا السؤال.

أيضاً ننفترض أن مركز الكتلة المشترك يكون أقرب إلى الجسم ذي الكتلة الأكبر. لذا، لدينا صيغة عامة لتحديد موقع مركز الكتلة  $\vec{R}$  للكتلتين  $m_1$  و  $m_2$  ومركز كتلتهما في الموقعين  $\vec{r}_1$  و  $\vec{r}_2$  في نظام إحداثي ثنائي (الشكل 8.2).

$$(8.1) \quad \vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

تنص هذه المعادلة على أن متجه موقع مركز الكتلة هو متوسط متجهات مواقع الأجسام مضروبة في كتلتها. يتفق مثل هذا التعريف مع الدليل التجريبي الذي ذكرناه للتو. سنستخدم هذه المعادلة الآن كتعريف عملي ونعمل على تحقيق نتائجها تدريجياً. وفي موضع آخر من هذه الوحدة وفي الوحدات التالية، سنستخدم أسباباً أخرى تفسر منطقياً هذا التعريف. لاحظ أنه يمكننا أن نكتب مباشرة معادلة المتجهات 8.1 بالإحداثيات الديكارتية كالتالي:

$$(8.2) \quad X = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad Y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad Z = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

في الشكل 8.2، يتركز موقع مركز الكتلة تحديداً على الخط المستقيم (الخط الأسود المتقطع) الذي يصل بين الكتلتين. هل هذه نتيجة عامة — هل يتركز مركز الكتلة دائماً على هذا الخط؟ إذا كانت الإجابة نعم، فلماذا؟ وإذا كانت الإجابة لا، فما الشرط المعين اللازم توفره لتحقيق ذلك؟ الإجابة هي أن هذه نتيجة عامة مع كل الأنظمة المكونة من جسمين؛ يتركز مركز الكتلة لهذا النظام على الخط الذي يصل بين الجسمين دائماً. لكي نرى ذلك، يمكننا وضع نقطة أصل النظام الإحداثي على إحدى الكتلتين في الشكل 8.2، ولكن  $m_1$ . يمكننا دائماً نقل نقطة أصل النظام الإحداثي دون أن يؤدي ذلك إلى تغير النتائج الفيزيائية). باستخدام المعادلة 8.1، ستري أن  $\vec{R} = \vec{r}_2 m_2 / (m_1 + m_2)$ . لأنه بسبب هذا الاختيار على النظام الإحداثي، نحدد قيمة  $\vec{r}_1$  كصفر. ومن ثم، يشترك المتجهان  $\vec{R}$  و  $\vec{r}_2$  في الاتجاه نفسه، لكن يكون  $\vec{R}$  أقصر بعامل مقداره  $1 < m_2 / (m_1 + m_2)$ . وهذا يوضح أن  $\vec{R}$  يتركز دائماً على الخط المستقيم الذي يصل بين الكتلتين.

## مركز كتلة الأرض والقمر

### مسألة محلولة 8.1

تبلغ كتلة الأرض  $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ ، وتبلغ كتلة القمر  $7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$ . ويدور القمر حول الأرض على مسافة تبعد  $384,000 \text{ km}$ . أي أن مركز القمر يبعد مسافة مقدارها  $384,000 \text{ km}$  عن مركز الأرض. كما هو موضح في الشكل 8.3a.

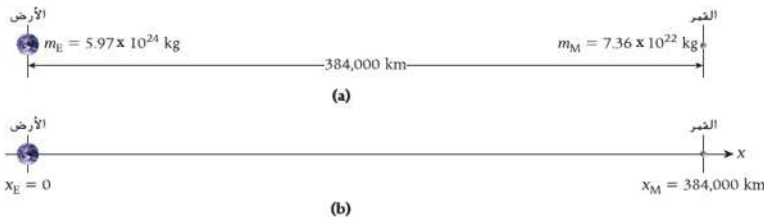
#### المسألة

ما المسافة التي يبعدها مركز كتلة نظام الأرض والقمر عن مركز الأرض؟

#### الحل

فكر يمكن تحديد مركز كتلة نظام الأرض والقمر بوضع مركز الأرض عند النقطة  $x = 0$  ووضع مركز القمر عند النقطة  $x = 384,000 \text{ km}$ . سيتركز مركز كتلة نظام الأرض والقمر على طول الخط الذي يصل بين مركز الأرض ومركز القمر (كما هو موضح في الشكل 8.3a).

ارسم يوضح الشكل 8.3b رسماً بيانياً بقياس للأرض والقمر.



**الشكل 8.3** (a) يدور القمر حول الأرض على بُعد  $384,000 \text{ km}$  عنها (الرسم بمقياس نسبي). (b) يوضح الرسم أن الأرض تقع عند  $x_E = 0$  والقمر يقع عند  $x_M = 384,000 \text{ km}$ .

يتبع

**ابحث** نحدد محور  $X$  ونضع الأرض عند النقطة  $X_E = 0$  والقمر عند النقطة  $X_M = 384,000$  km. يمكننا استخدام المعادلة 8.2 للتوصل إلى تعبير للإحداثي  $X$  لمركز كتلة نظام الأرض والقمر:

$$X = \frac{X_E m_E + X_M m_M}{m_E + m_M}$$

**بسّط** بما أننا وضعنا نقطة أصل النظام الإحداثي عند مركز الأرض. فإننا حدّدنا أنّ  $X_E = 0$ . وينتج عن ذلك أنّ

$$X = \frac{X_M m_M}{m_E + m_M}$$

**احسب** عند التعويض بالقيم العددية. نجد أنّ إحداثي  $X$  لمركز كتلة نظام الأرض والقمر يصبح كما يلي:

$$X = \frac{X_M m_M}{m_E + m_M} = \frac{(384,000 \text{ km})(7.36 \times 10^{22} \text{ kg})}{5.97 \times 10^{24} \text{ kg} + 7.36 \times 10^{22} \text{ kg}} = 4676.418 \text{ km}$$

**قَرِّب** كانت كل القيم العددية معطاة بثلاثة أرقام معنوية. لذا سنقرب النتيجة لتصبح  $X = 4680$  km.

**تحقّق ثانية** تظهر النتيجة بوحدّة الكيلومتر، وهي الوحدّة الصحيحة للتعبير عن الموقع. كما أنّ مركز كتلة نظام الأرض والقمر قريب من مركز الأرض. وهذه المسافة صغيرة مقارنة بالمسافة بين الأرض والقمر. وهذا منطقي لأن كتلة الأرض أكبر بكثير من كتلة القمر. في الواقع، تقل هذه المسافة عن نصف قطر الأرض.  $R_E = 6370$  km. ويدور كل من الأرض والقمر بالفعل حول مركز الكتلة المشترك. لذا تبدو الأرض وكأنها تتحرك حركة تذبذبية أثناء دوران القمر حولها.

### مركز الكتلة المشترك بين عدة أجسام

يمكن تعميم تعريف مركز الكتلة في المعادلة 8.1 إلى مجموع أجسام  $n$  ذات كتل مختلفة،  $m_i$ . موجودة في مواقع مختلفة،  $\vec{r}_i$ . في هذه الحالة العامة، نجد أنّ

$$(8.3) \quad \vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \cdots + \vec{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i,$$

حيث تمثل  $M$  الكتلة الجُمعة لكل أجسام  $n$ :

$$(8.4) \quad M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

بكتابة المعادلة 8.3 بالمركّبات الديكارتية، نحصل على

$$(8.5) \quad X = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n x_i m_i, \quad Y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n y_i m_i, \quad Z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n z_i m_i.$$

يكون موقع مركز الكتلة نقطة ثابتة بالنسبة إلى الجسم أو نظام الأجسام ولا يعتمد على موقع النظام الإحداثي المستخدم لتوضيحه. يمكننا توضيح ذلك بأخذ نظام المعادلة 8.3 وتحريكه بمقدار  $\vec{r}_0$  وسينتج لنا موضع مركز كتلة جديد،  $\vec{R} + \vec{R}_0$  باستخدام المعادلة 8.3. نجد أنّ

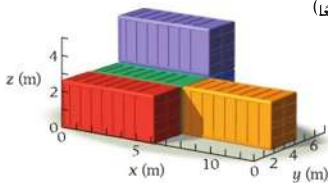
$$\vec{R} + \vec{R}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (\vec{r}_0 + \vec{r}_i) m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \vec{r}_0 + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i$$

لذا، فإن  $\vec{R}_0 = \vec{r}_0$ ، ولا يتغير موقع مركز الكتلة بالنسبة إلى النظام. يمكننا الآن تحديد مركز كتلة مجموعة من الأجسام في المثال التالي.

## حاويات الشحن

## مثال 8.1

تأتي حاويات الشحنات الكبيرة، التي يمكن نقلها بالشاحنات أو القطارات أو السفن، بأحجام قياسية. من أكثر الحاويات شيوعاً من حيث الحجم الحاوية التي مساحتها 20' وفقاً للمعيار الدولي ISO، والتي يبلغ طولها 6.1 m وعرضها 2.4 m وارتفاعها 2.6 m. ويسمح بأن تكون كتلة هذه الحاوية (بما تحويه طبقاً) ما يصل إلى 30,400 kg.



الشكل 8.4 حاويات شحن مرتبة على ظهر سفينة حاويات.

## المسألة

ترتكز حاويات الشحن الخمس الموضحة في الشكل 8.4 على سطح سفينة حاويات. وتبلغ كتلة كل حاوية 9,000 kg. باستثناء الحاوية الحمراء التي تبلغ كتلتها 18,000 kg، إذا افترضنا أن لكل حاوية مركز كتلة في مركزها الهندسي. فما إحداثي X وإحداثي Y لمركز الكتلة المشترك بين الحاويات؟ استخدم النظام الإحداثي المبين في الشكل لتوضيح موقع مركز الكتلة هذا.

## الحل

نحتاج إلى حساب المركبات الديكارتية الفردية لمركز الكتلة. لذا سنستخدم المعادلة 8.5. ويبدو أنه ليس شمة طريقة مختصرة يمكننا استخدامها لنسب طول كل حاوية (61 m) وعرض كل حاوية (2.4 m) وكتلة الحاوية الخضراء (9,000 kg)  $m_0$ . عندئذٍ تكون كتلة الحاوية الحمراء  $2m_0$  وتتكون كتلة كل الحاويات الأخرى هي  $m_0$ . أولاً، نحتاج إلى حساب الكتلة المجمعة،  $M$ . وفقاً للمعادلة 8.4 فإن

$$\begin{aligned} M &= m_{\text{red}} + m_{\text{green}} + m_{\text{orange}} + m_{\text{blue}} + m_{\text{purple}} \\ &= 2m_0 + m_0 + m_0 + m_0 + m_0 \\ &= 6m_0. \end{aligned}$$

بالنسبة إلى الإحداثي X لمركز الكتلة المشترك. نجد أنّ

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_{\text{red}}m_{\text{red}} + x_{\text{green}}m_{\text{green}} + x_{\text{orange}}m_{\text{orange}} + x_{\text{blue}}m_{\text{blue}} + x_{\text{purple}}m_{\text{purple}}}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\ell(2m_0) + \frac{1}{2}\ell(m_0) + \frac{3}{2}\ell(m_0) + \frac{1}{2}\ell(m_0) + \frac{1}{2}\ell(m_0)}{6m_0} \\ &= \frac{\ell\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}{6} \\ &= \frac{2}{3}\ell = 4.1 \text{ m}. \end{aligned}$$

في الخطوة الأخيرة، عوضنا بالقيمة 6.1 m عن  $\ell$ . بالطريقة نفسها، يمكننا حساب الإحداثي Y:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{y_{\text{red}}m_{\text{red}} + y_{\text{green}}m_{\text{green}} + y_{\text{orange}}m_{\text{orange}} + y_{\text{blue}}m_{\text{blue}} + y_{\text{purple}}m_{\text{purple}}}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{2}w(2m_0) + \frac{3}{2}wm_0 + \frac{3}{2}wm_0 + \frac{5}{2}wm_0 + \frac{5}{2}wm_0}{6m_0} \\ &= \frac{w\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right)}{6} \\ &= \frac{3}{2}w = 3.6 \text{ m}. \end{aligned}$$

قد عوضنا مرة أخرى بالقيمة العددية 2.4 m في الخطوة الأخيرة. لاحظ أننا قمنا بتقريب كل من إحداثي مركز الكتلة إلى رقمين معنويين ليتوافقا مع القيم المعطاة.

## سؤال الاختبار الذاتي 8.1

حدّد الإحداثي Z لمركز كتلة الحاويات المرتبة في الشكل 8.4.

## 8.2 كمية حركة مركز الكتلة

يمكننا الآن أخذ مشتقة الزمن لمتجه موضع مركز الكتلة لإيجاد  $\vec{v}$ ، متجه السرعة المتجهة لمركز الكتلة. نأخذ مشتقة الزمن من المعادلة 8.3:

$$(8.6) \quad \vec{v} \equiv \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \vec{p}_i.$$



حتى الآن، افترضنا أن الكتلة الكلية،  $M$ ، والكتل  $m_i$  للأجسام الفردية تبقى ثابتة. (في موضع لاحق من هذه الوحدة، سنهمل هذا الافتراض وندرس نتائج حركة الصاروخ). تمثل المعادلة 8.6 تعبيراً لمتجه السرعة المتجهة لمركز الكتلة،  $\vec{V}$ ، وبضرب كلا طرفي المعادلة في  $M$  نحصل على

$$(8.7) \quad \vec{P} = M\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i.$$

وبذلك نجد أن كمية حركة مركز الكتلة،  $\vec{P}$ ، هي حاصل ضرب الكتلة الكلية،  $M$ ، والسرعة المتجهة لمركز الكتلة،  $\vec{V}$ ، وهي مجموع كل المتجهات الفردية لكمية الحركة.

بأخذ مشتقة الزمن لكلا طرفي المعادلة 8.7 نحصل على القانون الثاني لنيوتن لإيجاد مركز الكتلة:

$$(8.8) \quad \frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} (M\vec{V}) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

في الخطوة الأخيرة، استخدمنا النتيجة من الوحدة 7، وهي أن مشتقة الزمن لكمية حركة الجسم  $i$  تساوي القوة المحصلة،  $\vec{F}_i$ ، المؤثرة فيه. لاحظ أنه إذا كانت الجسيمات (الأجسام) في نظام تبذل قوى بعضها على بعض، فإن هذه القوى لا تمثل قوة محصلة أخرى تضاف إلى مجموع القوى في المعادلة 8.8. لماذا؟ طبقاً للقانون الثالث لنيوتن، تكون القوتان اللتان يبذلهما الجسمان بعضهما على بعض متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه. لذا، فإن مجموعهما يساوي صفراً، وبذلك نحصل على القانون الثاني لنيوتن الخاص بمركز الكتلة:

$$(8.9) \quad \frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}_{\text{net}}.$$

حيث  $\vec{F}_{\text{net}}$  هي مجموع كل القوى الخارجية المؤثرة في نظام الجسيمات.

لمركز الكتلة العلاقات نفسها بين الموقع والسرعة المتجهة وكمية الحركة والقوة والكتلة التي نشأت للجسيمات المتقطعة. لذا من الممكن اعتبار مركز كتلة الجسم غير النقطي أو مجموعة الأجسام جسيماً نقطياً. يبرر هذا الاستنتاج التقريب الذي استخدمناه في الوحدات السابقة التي تناولت تمثيل الأجسام كثقاط.

## الارتداد

عند إطلاق رصاصة من بندقية، فإن البندقية **ترتد**؛ أي أنها تتحرك في الاتجاه المعاكس للاتجاه الذي أطلقت فيه الرصاصة، كما يتضح هذا المبدأ الفيزيائي نفسه عندما تكون جالساً في قارب ساكن وتلقي جسماً خارج القارب، حيث يتحرك القارب في الاتجاه المعاكس للاتجاه الذي ألقيت فيه الجسم. كما نشعر بالتأثير نفسه عندما تكون واقفاً على لوح تزلج ثم تلقي كرة ثقيلة نوعاً ما). يُعرف تأثير الارتداد المعروف هذا بنتيجة القانون الثالث لنيوتن.

### ارتداد المدفع

### مسألة محلولة 8.2

أطلقت قذيفة مدفع كتلتها 13.7 kg نحو هدف يبعد 2.30 km عن مدفع كتلته 249.0 kg. وكان أقصى مدى للمدفع هو المسافة 2.30 km، كما كان الهدف والمدفع عند مستوى ارتفاع واحد، وكان المدفع مرتكزاً على سطح أفقي.

#### المسألة

ما السرعة المتجهة التي سيرتد بها المدفع؟

#### الحل

**فكر** أولاً، نعرف أن المدفع لا يرتد إلا في اتجاه أفقي، لأن القوة العمودية التي تبذلها الأرض عليه ستمنعه من اكتساب مركبة سرعة متجهة إلى أسفل. ونحن نستخدم الحقيقة التي تنص على أن مركبة المحور  $x$  لكمية حركة مركز كتلة النظام (المدفع والقذيفة) لا تتغير أثناء إطلاق القذيفة لأن انفجار البارود داخل المدفع، الذي يؤدي إلى تحرك المدفع، لا يُنشئ إلا قوى داخل النظام، كما لا تنشأ مركبة قوة خارجية في الاتجاه الأفقي لأن كلتا القوتين الخارجيتين (القوة العمودية والجاذبية) رأسية، وتتغير مركبة المحور  $y$  لسرعة

مركز الكتلة المتجهة لأنه لا تنشأ مركبة محصلة قوى خارجية في اتجاه المحور  $y$  عندما تزيد القوة العمودية لمنع المدفع من الانفراس في الأرض. ونظرًا لأن التغذية والمدفع يكونان في حالة سكون ابتدائية، تكون قيمة كمية حركة مركز الكتلة لهذا النظام صفرًا في البداية، وتبقى مركبة المحور  $x$  صفرًا بعد إطلاق التغذية.

**رسم** يمثل الشكل 8.5a رسمًا تخطيطيًا للمدفع قبل إطلاق التغذية مباشرة. ويوضح الشكل 8.5b متجه السرعة المتجهة للتغذية،  $\vec{v}_2$ ، بما في ذلك مركبة المحور  $x$  ومركبة المحور  $y$ .

**ابحث** باستخدام المعادلة 8.7 التي يشير فيها الرقم 1 إلى المدفع والرقم 2 إلى التغذية، نحصل على

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2.$$

وبالنسبة إلى المركبة الأفقية للسرعة المتجهة، سيكون لدينا

$$(i) \quad v_{1,x} = -\frac{m_2}{m_1}v_{2,x}.$$

يمكننا الحصول على المركبة الأفقية للسرعة المتجهة الابتدائية للتغذية (عند الإطلاق) من خلال المعلومة التي تنص بأن مدى المدفع هو 2.30 km. في الوحدة 3، رأينا أنه يجري الربط بين مدى المدفع والسرعة المتجهة الابتدائية في المعادلة  $R = (v_0^2/g)(\sin 2\theta_0)$ . أقصى مدى تصل إليه التغذية عندما  $\theta_0 = 45^\circ$  وهو  $\theta_0 = 45^\circ$ ، فعندما  $R = v_0^2/g \Rightarrow v_0 = \sqrt{gR}$ . وجمع هذين الناتجين، يمكننا ربط أقصى مدى بالمركبة الأفقية للسرعة المتجهة الابتدائية للتغذية كما يلي:

$$(ii) \quad v_{2,x} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

**بسط** بالتعويض من المعادلة (ii) في المعادلة (i)، سنحصل على النتيجة التي نريد التوصل إليها

$$v_{1,x} = -\frac{m_2}{m_1}v_{2,x} = -\frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

**احسب** بالتعويض عن الرموز بالأرقام المغطاة في بيان المسألة، نحصل على

$$v_{1,x} = -\frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{gR}{2}} = -\frac{13.7 \text{ kg}}{249 \text{ kg}}\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(2.30 \times 10^3 \text{ m})} = -5.84392 \text{ m/s}.$$

**قرب** بتقريب الإجابة إلى ثلاثة أرقام معنوية، نحصل على

$$v_{1,x} = -5.84 \text{ m/s}.$$

**تحقق ثانية** تعني إشارة السالب أنّ المدفع يتحرك في الاتجاه المعاكس لاتجاه إطلاق التغذية، وهذا منطقي. يجب أن تكون السرعة المتجهة الابتدائية للتغذية أكبر بكثير من سرعة المدفع لأن كتلة المدفع أكبر بكثير. كانت السرعة المتجهة الابتدائية للتغذية

$$v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(2.3 \times 10^3 \text{ m})} = 150 \text{ m/s}.$$

كما أن قيمة الناتج الذي أوجدناه للسرعة المتجهة للمدفع أقل بكثير من السرعة المتجهة الابتدائية للتغذية، ويبدو هذا منطقيًا أيضًا.

يمكن أن يكون خروج الكتلة من النظام مستمرًا فيؤدي إلى ارتداد مستمر. لتأمل في اندفاع الماء من خرطوم إطفاء الحريق كمثل على ذلك.

## خرطوم إطفاء الحريق

### مثال 8.2

#### المسألة

ما مقدار القوة،  $F$ ، التي تؤثر في رجل إطفاء يحمل خرطوم إطفاء حريق يُخرج 360 L من الماء في الدقيقة بسرعة ابتدائية  $v = 39.0 \text{ m/s}$ ، كما هو مبين في الشكل 8.6؟

تبع



**الشكل 8.6** تدفق الماء من خرطوم إطفاء الحريق بسرعة متجهة  $v$ .

### الحل

لنقم أولاً بإيجاد الكتلة الكلية للماء الخارج في الدقيقة. نبلغ الكثافة الكتلية للماء  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1.000 \text{ kg/L}$ . ولأن  $\Delta V = 360 \text{ L}$ . نحصل على الكتلة الكلية للماء الخارج في الدقيقة من خلال:

$$\Delta m = \Delta V \rho = (360 \text{ L})(1.000 \text{ kg/L}) = 360 \text{ kg}.$$

لذا، تكون كمية حركة الماء  $\Delta p = v \Delta m$ . ومن تعريف متوسط القوة:  $F = \Delta p / \Delta t$ . نجد أن

$$F = \frac{v \Delta m}{\Delta t} = \frac{(39.0 \text{ m/s})(360 \text{ kg})}{60 \text{ s}} = 234 \text{ N}.$$

تُعد هذه قوة هائلة. ولهذا السبب، يحرص رجال الإطفاء على عدم إقالات الخرطوم أثناء الإطفاء لما يترتب على ذلك من خطورة بالغة؛ فقد تتحرك هنا وهناك بسرعة كبيرة جداً مما يتسبب في حدوث إصابات.

### مراجعة المفاهيم 8.3

يستخدم خرطوم إطفاء الحريق في المثال 8.2 لرش رغوة لإطفاء الحرائق (تبلغ كثافتها الكتلية نصف الكثافة الكتلية للماء) بمعدل التدفق نفسه. وهو  $360 \text{ L/min}$  وبالسرعة الابتدائية نفسها. وهي  $39.0 \text{ m/s}$ . يكون مقدار القوة المبذولة على رجل الإطفاء الذي يحمل الخرطوم في هذه الحالة

(a) أربعة أضعاف القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

(b) ضعف القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

(c) مساوياً لمقدار القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

(d) نصف القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

(e) ربع القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

### الحركة العامة لمركز الكتلة

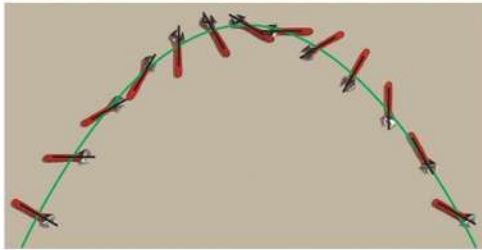
يمكن أن يكون للأجسام الصلبة غير النقطية حركات تبدو معقدة لأول وهلة. وتُعدّ رياضة القفز العالي مثالاً لهذه الحركات. أثناء الألعاب الأولمبية في المكسيك عام 1968، فاز البطل الأمريكي ديك فوسبوري لألعاب القوى بالميدالية الذهبية عندما استخدم طريقة جديدة في القفز العالي، والتي أصبحت تُعرف فيما بعد بقفزة فوسبوري (انظر الشكل 8.7). عند تنفيذ هذه الطريقة كما ينبغي، يتمكن اللاعب من تجاوز العارضة مع بقاء مركز كتلته لأسفل، مما يزيد من ارتفاع القفزة بصورة فعلية.

يوضح الشكل 8.8a مفتاح ربط يتحرك بشكل دائري في الهواء، حيث أخذت له مجموعة من اللقطات المتعددة على فترات زمنية متساوية بين كل لقطة وأخرى. رغم أنّ هذه الحركة تبدو معقدة، فإنه يمكننا أن نستخدم ما نعرفه عن مركز الكتلة لإجراء تحليل بسيط ودقيق لهذه الحركة. إذا افترضنا أن كتلة مفتاح الربط مركزة في نقطة، فإن هذه النقطة ستتحرك في شكل قطع مكافئ في الهواء تحت تأثير الجاذبية، كما ناقشنا ذلك في الوحدة 3. يدخل في هذه الحركة دوران المفتاح حول مركز كتلته، ترى هذا المسار الذي على شكل قطع مكافئ بوضوح في الشكل 8.8b. حيث يمر خط (أخضر) على شكل قطع مكافئ عبر موقع مركز كتلة المفتاح في كل لقطة. كما يظهر خط مستقيم أسود يتحرك حركة دائرية بمعدل ثابت حول مركز كتلة المفتاح. ترى بوضوح أن متجه المفتاح يحاذي دائماً الخط المستقيم الأسود، مما يشير إلى أن المفتاح يدور بمعدل ثابت حول مركز كتلته (ستحلل هذه الحركة الدورانية في الفصل 10).

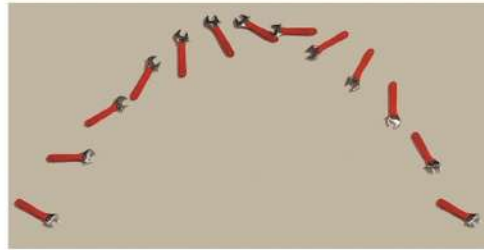
تمكّننا الأساليب الموضحة هنا من تحليل الكثير من المسائل المعقدة بما فيها حركة الأجسام الصلبة من حيث توضيح حركة مركز كتلة الجسم ودوراته حول مركز كتلته.



**الشكل 8.7** اللاعب الأمريكي ديك فوسبوري لحظة تخطيه عارضة القفز العالي في نهائيات الألعاب الأولمبية في المكسيك في 20 أكتوبر عام 1968.



(b)



(a)

**الشكل 8.8** (a) مجموعة من الصور الرقمية ناتجة عن لقطات متعددة لمفتاح ربط لحظة إلقائه في الهواء. (b) مجموعة الصور نفسها في الجزء (a)، لكن مع تراكب مسار القطع المكافئ لحركة مركز الكتلة.

## 8.3 حركة الصاروخ

كان المثال 8.2 حول خرطوم إطفاء الحريق أول حالة درسناها تتضمن تغيُّر كمية الحركة بسبب تغيُّر الكتلة لا السرعة المتجهة. لكن تُعدّ حركة الصاروخ من الحالات الأخرى المهمة التي تتضمن تغيُّر كمية الحركة بسبب تغيُّر الكتلة. حيث تتضمن هذه الحركة خروج جزء من كتلة الصاروخ عبر فوهة أو فوهات خلفية. كما أن حركة الصاروخ من الحالات المهمة التي توضح تأثير الارتداد الذي جرت منافسته في القسم 8.2. حيث لا "يدفع" الصاروخ شيئاً. بل يكتسب دفعه إلى الأمام بإخراج الوقود المستهلك من الجزء الخلفي وفقاً لقانون حفظ كمية الحركة الكلية.

لكي نتوصل إلى تعبير لجزء الصاروخ، سنبدأ أولاً بالتفكير في إخراج كميات منفصلة من الكتلة خارج جسم الصاروخ. ثم يمكننا التوصل إلى النهاية المستمرة. لنستخدم نموذج لعبة صاروخ يتحرك في الفضاء بين النجوم، دافقاً نفسه إلى الأمام عن طريق إطلاق قذائف من الجزء الخلفي (الشكل 8.9). (سنفترض أن هذا الصاروخ يتحرك في الفضاء بين النجوم بحيث يمكننا التعامل معه ومع مركباته كنظام معزول يمكن أن نهمل القوى الخارجية عنه). في البداية، يكون الصاروخ في حالة سكون. وتكون الحركة كلها في اتجاه المحور  $x$ . لذا يمكننا استخدام رمز الحركة في بُعد واحد، بحيث توضح علامتا مركبتي المحور  $x$  للسرعة المتجهة (اللتان سنشير إليهما بالسرعتين المتجهتين للتبسيط) اتجاه هاتين السرعتين. لكل قذيفة كتلة مقدارها  $\Delta m$ ، وتكون الكتلة الابتدائية للصاروخ شاملة القذائف  $m_0$ ، وتُطلق كل قذيفة بسرعة  $v_c$  بالنسبة إلى مركز الكتلة المشترك بين الصاروخ والقذائف، فتنتج كمية حركة للقذيفة مقدارها  $v_c \Delta m$ .

بعد إطلاق القذيفة الأولى، تقل كتلة الصاروخ بمقدار  $\Delta m - m_0$ . ولا يغير إطلاق القذيفة من كمية حركة مركز كتلة النظام (الصاروخ والقذيفة). (نذكر أنّ هذا نظام معزول. أي لا توجد محصلة قوى خارجية تؤثر فيه). لذا يكتسب الصاروخ كمية حركة ارتداد في اتجاه معاكس لكمية حركة القذيفة. ومن ثمّ يمكن إيجاد كمية حركة القذيفة بالمعادلة

$$(8.10) \quad p_c = v_c \Delta m,$$

ويمكن إيجاد كمية حركة الصاروخ بالمعادلة

$$p_r = (m_0 - \Delta m)v_1,$$

حيث تمثل  $v_1$  سرعة الصاروخ المتجهة بعد إطلاق القذيفة. ولأن كمية الحركة تكون محفوظة، يمكننا أن نكتب المعادلة  $0 = p_r + p_c$ . ثم نعوض عن  $p_r$  و  $p_c$  من التعبيرين السابقين:

$$(m_0 - \Delta m)v_1 + v_c \Delta m = 0.$$

ونحدد التغيُّر في السرعة المتجهة،  $\Delta v_1$ ، للصاروخ بعد إطلاق قذيفة واحدة من خلال التعبير

$$(8.11) \quad v_1 = v_0 + \Delta v = 0 + \Delta v = \Delta v_1,$$

حيث إنّ الافتراض بأن الصاروخ كان في حالة سكون في البداية يعني أنّ  $v_0 = 0$ . وهذا يعطينا السرعة المتجهة لارتداد الصاروخ الناتجة عن إطلاق قذيفة واحدة:

$$(8.12) \quad \Delta v_1 = - \frac{v_c \Delta m}{m_0 - \Delta m}.$$

ثمّ يمكننا، في نظام الصاروخ المتحرك، أن نطلق قذيفة أخرى. وسيؤدي إطلاق قذيفة أخرى إلى تناقص كتلة الصاروخ من  $m_0 - \Delta m$  إلى  $m_0 - 2\Delta m$ ، وسينتج عن ذلك سرعة ارتداد متجهة إضافية يمكن إيجادها من خلال التعبير

$$\Delta v_2 = - \frac{v_c \Delta m}{m_0 - 2\Delta m}.$$



الشكل 8.9 نموذج لعبة للدفع الصاروخي؛ إطلاق قذائف.

عندئذ ستزيد السرعة المتجهة الكلية للصاروخ إلى  $v_2 = v_1 + \Delta v_2$ . بعد إطلاق عدد  $n$  من القذائف . نحصل على التغيُّر في السرعة المتجهة من خلال التعبير

$$(8.13) \quad \Delta v_n = -\frac{v_c \Delta m}{m_0 - n \Delta m}.$$

وهكذا، تكون معادلة إيجاد السرعة المتجهة للصاروخ بعد إطلاق عدد  $n$  من القذائف هي

$$v_n = v_{n-1} + \Delta v_n.$$

تُسمى هذه المعادلة، التي حددت الحد  $n$  المتناهية، يُعْتَرَفُ فيها عن كل حد في صورة دالة للحدود السابقة. العلاقة التكرارية. ويمكن حل هذه المعادلة بطريقة بسيطة باستخدام الكمبيوتر. لكن يمكننا استخدام تقريب مفيد للغاية مع الحالة التي يكون فيها تناقص الكتلة لكل وحدة زمنية ثابتًا وصغيرًا مقارنة بـ  $m$  كتلة الصاروخ الكلية (اعتمادًا على الزمن). وعند هذه النقطة، نحصل عليها من المعادلة 8.13

$$(8.14) \quad \Delta v = -\frac{v_c \Delta m}{m} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta m} = -\frac{v_c}{m}.$$

تمثل  $v_c$  هنا سرعة خروج القذيفة، وعند النهاية  $\Delta m \rightarrow 0$ ، نحصل على المشتقة من خلال التعبير

$$(8.15) \quad \frac{dv}{dm} = -\frac{v_c}{m}.$$

وسيكون حل هذه المعادلة التفاضلية كما يلي:

$$(8.16) \quad v(m) = -v_c \int_{m_0}^m \frac{1}{m'} dm' = -v_c \ln m' \Big|_{m_0}^m = v_c \ln \left( \frac{m_0}{m} \right).$$

يمكنك التأكد من أنَّ المعادلة 8.16 ستكون بالفعل حل المعادلة 8.15 من خلال حساب اشتقاق المعادلة 8.16 بالنسبة إلى  $m$ .

إذا كانت  $m_f$  هي القيمة الابتدائية للكتلة الكلية في زمن  $t_f$  وكانت  $m_i$  هي الكتلة النهائية في زمن لاحق، فيمكننا استخدام المعادلة 8.16 للحصول على  $v_f = v_c \ln (m_0/m_f)$  و  $v_i = v_c \ln (m_0/m_i)$  للسرعتين المتجهتين الابتدائية والنهائية للصاروخ. ثم باستخدام خاصية اللوغاريتمات،  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$  سنجد الفرق بين هاتين السرعتين المتجهتين:

$$(8.17) \quad v_f - v_i = v_c \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right) - v_c \ln \left( \frac{m_0}{m_i} \right) = v_c \ln \left( \frac{m_i}{m_f} \right).$$

### مثال 8.3 إطلاق صاروخ إلى المريخ

يتضمن أحد المشروعات المقترحة لإرسال رواد الفضاء إلى المريخ تجميع مركبة فضائية في مدار حول الأرض، بحيث لا تضطر المركبة الفضائية إلى التغلب على مقدار كبير من الجاذبية الأرضية عند إطلاقها. افترض أنَّ الحمولة المصافية لهذه المركبة الفضائية تبلغ 50,000 kg . وتحمل 2,000,000 kg من الوقود وتُخرج الوقود المستهلك بسرعة 23.5 km/s. (تُنْتِج الأنواع الحالية من الوقود المستهلك الكيميائي للصاروخ سرعة قصوى تبلغ 5 km/s تقريبًا. لكن من المتوقع أن يُنتج الدفع الصاروخي الكهرومغناطيسي سرعة تبلغ 40 km/s تقريبًا).

#### المسألة

ما السرعة النهائية التي يمكن أن تصل إليها هذه المركبة الفضائية بالنسبة إلى سرعتها المتجهة الابتدائية في مدارها حول الأرض؟

#### الحل

باستخدام المعادلة 8.17 والتعويض بالأرقام المعطاة في المسألة، نجد أنَّ

$$v_f - v_i = v_c \ln \left( \frac{m_i}{m_f} \right) = (23.5 \text{ km/s}) \ln \left( \frac{2,050,000 \text{ kg}}{50,000 \text{ kg}} \right) = (23.5 \text{ km/s})(\ln 41) = 87.3 \text{ km/s}.$$

### مراجعة المفاهيم 8.4

إذا تضاعفت الحمولة الصافية لسفينة الفضاء الواردة في المثال 8.3 من 50,000 kg إلى 100,000 kg. فستكون السرعة النهائية التي تصل إليها سفينة الفضاء

(a) مساوية للسرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3

(b) أقل قليلاً من السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3 لكن أكثر من نصفها.

(c) أعلى قليلاً من السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3

(d) نصف السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3

(e) أقل من نصف السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3

على سبيل المقارنة، كان الصاروخ ساتورن 5 متعدد المراحل الذي حمل رواد فضاء إلى القمر في أواخر الستينيات وأوائل السبعينيات قادراً على الوصول إلى سرعة تبلغ حوالي 12 km/s فقط. ورغم توفر التقنيات المتقدمة مثل الدفع الكهرومغناطيسي، فما زال وصول رواد الفضاء إلى المريخ يستغرق عدة أشهر. حتى في أفضل الظروف، على سبيل المثال، استغرق مارس روفر 207 أيام في رحلته من الأرض إلى المريخ. تتدّر وكالة ناسا أنّ الإشعاع الذي يتعرض له رواد الفضاء في مثل هذه البعثة يتوق الحد الأقصى للجرعة السنوية المسموح بها للعاملين في مجال الإشعاع بما يعادل 10 إلى 20 مرة، مما يؤدي إلى زيادة احتمال الإصابة بالسرطان وظف الدماغ. ولم تُفترَح أي آلية واقية لحماية رواد الفضاء من هذا الخطر حتى الآن.

توجد طريقة أخرى ربما تكون أكثر سهولة للتفكير في حركة الصاروخ، وهي العودة إلى تعريف كمية الحركة بأنها حاصل ضرب الكتلة في السرعة المتجهة وحساب مشتقة الزمن لإيجاد القوة، إلا أن كتلة الجسم الآن يمكن أن تتغير أيضاً:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

(تمثل الخطوة الأخيرة في هذه المعادلة استخدام قاعدة حاصل الضرب في التفاضل من حساب التفاضل والتكامل). وإذا لم تؤثر أي قوة خارجية في الجسم ( $\vec{F}_{\text{net}} = 0$ ) فعندئذٍ سنجد أنّ

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v} \frac{dm}{dt}$$

في حالة حركة الصاروخ (كما هو موضَّح في الشكل 8.10)، نجد أنّ معدل تدفق الوقود المستهلك،  $dm/dt$ ، ثابت ويؤدي إلى تغيير كتلة الصاروخ. يتحرك الوقود المستهلك بسرعة متجهة ثابتة،  $\vec{v}_c$ ، بالنسبة إلى الصاروخ، لذا نجد أنّ

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = -\vec{v}_c \frac{dm}{dt}$$

تُسمى الصيغة  $v_c(dm/dt)$  دفع الصاروخ. ويُقاس بوحدة النيوتن لأنها قوة:

(8.18)

$$\vec{F}_{\text{thrust}} = -\vec{v}_c \frac{dm}{dt}$$

بلغ الدفع الذي أنتجته محركات صاروخ المكوك الفضائي ومعززاته ما يقرب من 30.4 MN (30.4 ميغا نيوتن، أو ما يقرب من 3,175,146.59 كيلوجراماً). كما كانت الكتلة الكلية الابتدائية للمكوك الفضائي، بما في ذلك الحمولة الصافية وخزانات الوقود ووقود الصاروخ، أكبر قليلاً من مليوني kg؛ لذلك، كانت محركات صاروخ المكوك الفضائي ومعززاته قادرة على إنتاج عجلة ابتدائية مقدارها

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{3.04 \times 10^7 \text{ N}}{2.0 \times 10^6 \text{ kg}} = 15 \text{ m/s}^2$$

تكفي هذه العجلة لإقلاع المكوك من منصة الإطلاق متقابل عجلة الجاذبية ( $-9.81 \text{ m/s}^2$ ). وبمجرد أن يرتفع المكوك وتقل كتلته، يُنتج عجلة أكبر. وعند استهلاك الوقود، يتم خنق المحركات الرئيسية مرة أخرى لضمان عدم تجاوز العجلة 3g (ثلاثة أضعاف عجلة الجاذبية) لتجنب تلف الحمولة أو إصابة رواد الفضاء.



الشكل 8.10 حركة الصاروخ.

### مسألة محلولة 8.3 إطلاق صاروخ دافع

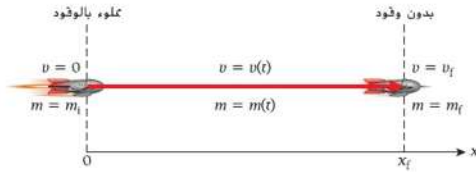
#### المسألة

افترض أن الكتلة الابتدائية لمركبة فضائية هي  $1,850,000 \text{ kg}$  وبدون الوقود المستهلك، تبلغ كتلة المركبة الفضائية  $50,000 \text{ kg}$ . وقد صُمم الصاروخ المشغل للمركبة الفضائية لإخراج الوقود المستهلك بسرعة  $25 \text{ km/s}$  بالنسبة إلى الصاروخ بمعدل ثابت يبلغ  $15,000 \text{ kg/s}$ . في البداية، كانت المركبة الفضائية في وضع سكون في الفضاء ثم تحركت في خط مستقيم. ما المسافة التي تستقطعها المركبة الفضائية قبل أن يستهلك صاروخها كمية الوقود المستهلك كلها ويتوقف؟

#### الحل

**فكر** تساوي الكتلة الكلية للوقود المستهلك كتلة المركبة الفضائية الكلية مطروحاً منها كتلة المركبة الفضائية بعد إخراج الوقود المستهلك كله. ويخرج الصاروخ الوقود المستهلك بمعدل ثابت، لذا يمكننا حساب الزمن الذي يعمل خلاله الصاروخ. عند استهلاك الوقود المستهلك، تقل كتلة المركبة الفضائية وترداد سرعتها. إذا بدأت المركبة الفضائية من وضع السكون، فيمكن الحصول على السرعة  $v(t)$  في أي زمن أثناء عمل الصاروخ من المعادلة 8.17. مع استبدال الكتلة النهائية للمركبة الفضائية بكتلتها عند هذا الزمن. ويمكن إيجاد المسافة المقطوعة قبل استهلاك كمية الوقود المستهلك كلها من خلال تكامل السرعة كدالة للزمن.

**الرسم** يظهر رسم تخطيطي لرحلة المركبة الفضائية في الشكل 8.11.



**الشكل 8.11** العمليات المختلفة لسفينة الفضاء أثناء تشغيل الصاروخ.

**ابحث** نرسم لمعدل إخراج الوقود المستهلك بالرمز  $r_p$ . إذا، يمكن إيجاد الزمن  $t_{\max}$  الذي سيعمل خلاله الصاروخ من خلال المعادلة

$$t_{\max} = \frac{(m_i - m_f)}{r_p},$$

حيث  $m_i$  هي الكتلة الابتدائية للمركبة الفضائية و  $m_f$  هي كتلة المركبة الفضائية بعد إخراج كمية الوقود المستهلك كلها. تساوي المسافة الكلية التي تقطعها المركبة الفضائية في هذه الفترة الزمنية تكامل السرعة على الزمن:

$$(i) \quad x_f = \int_0^{t_{\max}} v(t) dt.$$

أثناء عمل الصاروخ، تُحدّد كتلة المركبة الفضائية في زمن  $t$  من خلال المعادلة

$$m(t) = m_i - r_p t.$$

يتم إيجاد سرعة المركبة الفضائية في أي زمن معين بعد بدء عمل الصاروخ وقبل استهلاك كمية الوقود كلها كما يلي (قارن بالمعادلة 8.17)

$$(ii) \quad v(t) = v_c \ln \left( \frac{m_i}{m(t)} \right) = v_c \ln \left( \frac{m_i}{m_i - r_p t} \right) = v_c \ln \left( \frac{1}{1 - r_p t / m_i} \right)$$

حيث  $v_c$  هي سرعة إخراج الوقود المستهلك بالنسبة إلى الصاروخ.

**بسط** نعوض الآن من المعادلة (ii) الخاصة بتغيّر سرعة المركبة الفضائية مع الزمن في المعادلة (i) ونحصل على

$$(iii) \quad x_f = \int_0^{t_{\max}} v(t) dt = \int_0^{t_{\max}} v_c \ln \left( \frac{1}{1 - r_p t / m_i} \right) dt = -v_c \int_0^{t_{\max}} \ln \left( 1 - \frac{r_p t}{m_i} \right) dt.$$

لأن  $\int \ln(1 - ax) dx = \frac{ax - 1}{a} \ln(1 - ax) - x$  نجد بحساب التكامل أن

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{\max}} \ln(1 - r_p t / m_i) dt &= \left[ \left( \frac{r_p t / m_i - 1}{r_p / m_i} \right) \ln(1 - r_p t / m_i) - t \right]_0^{t_{\max}} \\ &= \left( \frac{r_p t_{\max} / m_i - 1}{r_p / m_i} \right) \ln(1 - r_p t_{\max} / m_i) - t_{\max} \\ &= (t_{\max} - m_i / r_p) \ln(1 - r_p t_{\max} / m_i) - t_{\max} \end{aligned}$$

إذا، تبلغ المسافة المقطوعة

$$x_f = -v_c \left[ (t_{\max} - m_i / r_p) \ln(1 - r_p t_{\max} / m_i) - t_{\max} \right]$$

**احسب** يبلغ الزمن الذي يعمل خلاله الصاروخ

$$t_{\max} = \frac{m_i - m_f}{r_p} = \frac{1,850,000 \text{ kg} - 50,000 \text{ kg}}{15,000 \text{ kg/s}} = 120 \text{ s}$$

بالتعويض بالقيم العددية في العامل  $1 - r_p t_{\max} / m_i$  نجد أن

$$1 - \frac{r_p t_{\max}}{m_i} = 1 - \frac{15,000 \text{ kg/s} \cdot 120 \text{ s}}{1,850,000 \text{ kg}} = 0.027027$$

وبهذا نجد قيمة المسافة المقطوعة كما يلي

$$\begin{aligned} x_f &= - (25 \times 10^3 \text{ m/s}) \left[ -(120 \text{ s}) + \left\{ (120 \text{ s}) - (1.85 \times 10^6 \text{ kg}) / (15 \times 10^3 \text{ kg/s}) \right\} \ln(0.027027) \right] \\ &= 2.69909 \times 10^6 \text{ m} \end{aligned}$$

**قَرِّب** لأن سرعة الوقود المستهلك مكونة من رقمين معنويين فقط، نحتاج إلى التقريب إلى تلك الدقة:

$$x_f = 2.7 \times 10^6 \text{ m}$$

**تحقق ثانية** للتحقق ثانية من قيمة المسافة المقطوعة التي أوجدناها، نستخدم المعادلة 8.17 لحساب السرعة المتجهة النهائية للمركبة الفضائية:

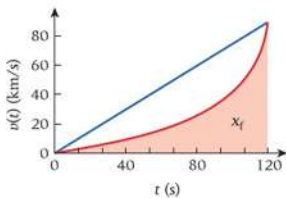
$$v_f = v_c \ln \left( \frac{m_i}{m_f} \right) = (25 \text{ km/s}) \ln \left( \frac{1.85 \times 10^6 \text{ kg}}{5 \times 10^4 \text{ kg}} \right) = 90.3 \text{ km/s}$$

إذا تسارعت المركبة الفضائية بمعدل ثابت، فستزداد السرعة خطياً مع الزمن. كما هو مبين في الشكل 8.12، وسيكون متوسط السرعة أثناء إخراج الوقود المستهلك  $\bar{v} = v_f / 2$  وبحساب متوسط السرعة هذا وضربه في ذلك الزمن، نجد أن

$$x_{a-\text{const}} \approx \bar{v} t_{\max} = (v_f / 2) t_{\max} = (90.3 \text{ km/s}) (120 \text{ s}) / 2 = 5.4 \times 10^6 \text{ m}$$

وهذه المسافة التقريبية أكبر من القيمة التي أوجدناها، لأنه في العملية الحسابية، تزداد السرعة المتجهة مع الوقت حتى تصل إلى القيمة  $90.3 \text{ km/s}$ . يبلغ التقريب حوالي ضعف المسافة المحسوبة، مما يثبت أننا توصلنا إلى قيمة قريبة على الأقل.

يبين الشكل 8.12 الحل الدقيق لـ  $v(t)$  (المنحنى الأحمر). تمثل المسافة المقطوعة،  $x_f$ ، في المنطقة أسفل المنحنى الأحمر. يبين الخط الأزرق الحالة التي تؤدي فيها العجلة الثابتة إلى السرعة المتجهة النهائية نفسها. كما ترى، تساوي المساحة أسفل الخط الأزرق ضعف المساحة أسفل المنحنى الأحمر تقريباً. ولأننا حسبنا المساحة أسفل الخط الأزرق،  $x_{a-\text{const}}$ ، ووجدنا أنها تساوي ضعف القيمة التي حسبناها تقريباً، يمكننا إذاً أن نثق في صحة تفسيرنا  $\square$



**الشكل 8.12** مقارنة الحل الدقيق لـ  $v(t)$  (المنحنى الأحمر) بحل العجلة الثابتة (الخط الأزرق).

## 8.3 حساب مركز الكتلة

حتى الآن، لم نتناول سؤالاً أساسياً، ألا وهو: كيف نحسب موقع مركز الكتلة لجسم ذي شكل عشوائي؟ للإجابة عن هذا السؤال، لنعم بإيجاد موقع مركز كتلة المطرقة المبيّنة في الشكل 8.13 للقيام بذلك. يمكننا تمثيل المطرقة بمكعبات صغيرة متطابقة الحجم، كما هو مبين في الجزء السفلي من الشكل. تكون



مراكز المكعبات هي نفسها مراكز الكتلة، وهي موضحة بنقاط حمراء. وتمثل الأسهم الحمراء متجهات مواقع المكعبات. إذا قبلنا مجموعة المكعبات كتقريب مناسب للمطرقة، فيمكننا استخدام المعادلة 8.3 لإيجاد مركز كتلة مجموعة المكعبات، ومن ثمّ مركز كتلة المطرقة.

لاحظ أنه ليس لكل المكعبات الكتلة نفسها. لأن كثافة الخشب تختلف كثيراً عن كثافة الرأس الحديدي. نحدّد العلاقة بين الكثافة الكتلية ( $\rho$ ) والكتلة والحجم بالمعادلة

$$(8.19) \quad \rho = \frac{dm}{dV}.$$

إذا كانت الكثافة الكتلية منتظمة في كل أنحاء الجسم، فسيكون لدينا

$$(8.20) \quad \rho = \frac{M}{V} \quad (\rho \text{ للثابت}).$$

وحيثما يمكننا استخدام الكثافة الكتلية وإعادة كتابة المعادلة 8.3

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) V_i.$$

لقد افترضنا هنا أنّ الكثافة الكتلية لكل مكعب صغير منتظمة (لكن بظل ثمة احتمال بأن تختلف من مكعب إلى آخر) وأنّ لكل مكعب الحجم  $V$  (الصغير) نفسه.

يمكننا الحصول على تقريب أفضل بكثير عن طريق تقليص حجم كل مكعب واستخدام عدد أكبر من المكعبات. من المفترض أن هذا الإجراء يبدو مألوفاً للغاية بالنسبة إليك، لأن هذا هو ما نقوم به تماماً في حساب التفاضل والتكامل للوصول إلى نهاية تكامل. من هذه النهاية، نحصل على موقع مركز الكتلة لجسم ذي شكل عشوائي:

$$(8.21) \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV.$$

يتمد تكامل الحجم ثلاثي الأبعاد هنا على الحجم الكلي للجسم محل البحث.

بأتي السؤال التالي. وهو: ما النظام الإحداثي الذي يجب اختياره لحساب هذا التكامل؟ قد لا يكون قد سبق لك أن رأيت تكاملاً ثلاثي الأبعاد من قبل وربما كنت تتعامل فقط مع التكاملات أحادية البعد ذات الصيغة  $\int f(x) dx$ . لكن يمكن اختزال جميع التكاملات ثلاثية الأبعاد التي سنستخدمها في هذه الوحدة إلى ثلاثة تكاملات (على الأكثر) أحادية البعد متتالية، والتي يمكن حساب معظمها بطريقة بسيطة للغاية، بشرط اختيار نظام الإحداثيات المناسب.

## أنظمة الإحداثيات غير الديكارتية ثلاثية الأبعاد

قدمت الوحدة 1 نظام إحداثيات متعامدة ثلاثي الأبعاد، وهو النظام الإحداثي الديكارتي. بالإحداثيات  $x$  و  $y$  و  $z$ . لكن في بعض التطبيقات، يكون من الأبسط رياضياً تمثيل متجه الموقع في نظام إحداثي آخر. يقدم هذا القسم باختصار اثنين من الأنظمة الإحداثية ثلاثية الأبعاد شائعة الاستخدام يمكن استخدامها لتحديد متجه في مساحة ثلاثية الأبعاد: الإحداثيات الكروية والإحداثيات الأسطوانية.

**الإحداثيات الكروية.** في الإحداثيات الكروية، يُمثّل متجه الموقع  $\vec{r}$  من خلال تحديد طوله،  $r$ ؛ وزاويته القطبية بالنسبة إلى المحور  $z$  الموجب،  $(\theta)$ ؛ وزاوية السميت لإسقاط المتجه على المستوى  $xy$  بالنسبة إلى المحور  $x$  الموجب،  $(\phi)$  (الشكل 8.14).

يمكننا الحصول على الإحداثيات الديكارتية للمتجه  $\vec{r}$  من إحداثياته الكروية عن طريق التحويل

$$(8.22) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$



الشكل 8.13 حساب مركز كتلة المطرقة.

## مراجعة المفاهيم 8.5

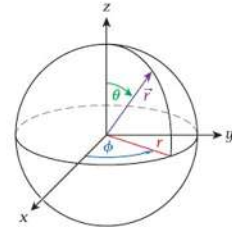
إذا كان لدينا جسم ذو كثافة كتلية متغيرة  $\rho(\vec{r})$  وإحداثي مركز كتلة  $\vec{R}$  واستبدلناه بجسم له الشكل نفسه لكن بكثافة كتلية متغيرة ضعف الكثافة الكتلية للجسم الأول عند كل نقطة، فسيكون إحداثي مركز الكتلة الجديد

$$\vec{R} \quad (a)$$

$$2\vec{R} \quad (b)$$

$$\vec{R}/2 \quad (c)$$

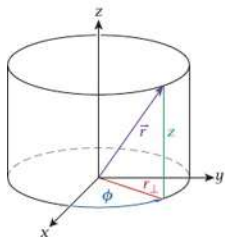
(d) أي مما سبق، حسب شكل الجسمين.



الشكل 8.14 نظام إحداثيات كروي ثلاثي الأبعاد.

ويكون التحويل العكسي من الإحداثيات الديكارتية إلى الكروية كما يلي

$$(8.23) \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \cos^{-1} \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ \phi &= \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$



الشكل 8.15 نظام إحداثي أسطواني ثلاثي الأبعاد.

**الإحداثيات الأسطوانية.** يمكن اعتبار الإحداثيات الأسطوانية بسيطاً بين نظام الإحداثيات الديكارتية والكروية. حيث يكون الإحداثي الديكارتية  $z$  ثابتاً بينما يُستبدل الإحداثيان الديكارتيان  $x$  و  $y$  بالإحداثيين  $r_{\perp}$  و  $\phi$  (الشكل 8.15). يُحدّد الإحداثي  $r_{\perp}$  هنا طول إسقاط متجه الموقع  $\vec{r}$  على المستوى  $xy$ . حيث يقيس المسافة العمودية إلى المحور  $z$ . كما هو الحال في الإحداثيات الكروية، تكون زاوية إسقاط المتجه على المستوى  $xy$  بالنسبة إلى المحور  $x$  الموجب.

نحصل على الإحداثيات الديكارتية من الإحداثيات الأسطوانية كما يلي

$$(8.24) \quad \begin{aligned} x &= r_{\perp} \cos \phi \\ y &= r_{\perp} \sin \phi \\ z &= z. \end{aligned}$$

ويكون التحويل العكسي من الإحداثيات الديكارتية إلى الأسطوانية كما يلي

$$(8.25) \quad \begin{aligned} r_{\perp} &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \\ z &= z. \end{aligned}$$

كقاعدة ثابتة، يجب أن تستخدم النظام الإحداثي الديكارتية في محاولتك الأولى لوصف أي حالة فيزيائية. إلا أن النظامين الإحداثيين الأسطواني والكروي يُفضلان غالباً عند التعامل مع الأجسام التي يكون لها تماثل حول نقطة أو خط. في جزء لاحق من هذه الوحدة، سنستخدم النظام الإحداثي الأسطواني لإجراء تكامل حجم ثلاثي الأبعاد. سنتناقش الوحدة 9 الإحداثيات القطبية التي يمكن اعتبارها إحداثيات ثنائية الأبعاد مكافئة لأي من الإحداثيين الأسطواني أو الكروي. وأخيراً، في الوحدة 10، سنستخدم الإحداثيين الكروي والأسطواني مرة أخرى لحل المسائل التي تكون إلى حد ما أكثر تعقيداً وتتطلب استخدام التكامل.

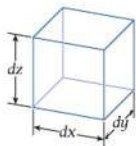
## التكاملات الحجمية

رغم أن حساب التفاضل والتكامل مطلوب بشكل أساسي في الفيزياء. فإن جامعات كثيرة تسمح للطلاب بأخذ دورات تمهيدية في الفيزياء وحساب التفاضل والتكامل في آن واحد. بوجه عام، ينجح هذا النهج، لكن عندما يواجه الطلاب تكاملات متعددة الأبعاد في الفيزياء، يكتشفون غالباً أنها المرة الأولى التي يرون فيها هذا الرمز. إذاً، فلنراجع الإجراء الأساسي للقيام بهذه التكاملات.

إذا أردنا تكامل أي دالة على حجم ثلاثي الأبعاد، فإننا نحتاج إلى إيجاد تعبير لعنصر الحجم  $dV$  في مجموعة مناسبة من الإحداثيات. ويجب أن تستخدم دائماً أنظمة إحداثيات متعامدة ما لم يكن هناك سبب قوي لعدم استخدامها. وتُعد الأنظمة، الديكارتية والأسطوانية والكروية، هي أنظمة الإحداثيات المتعامدة ثلاثية الأبعاد الأكثر استخداماً.

من الأسهل إلى حد كبير التعبير عن عنصر الحجم  $dV$  بالإحداثيات الديكارتية؛ فهو ببساطة حاصل ضرب العناصر الإحداثية الثلاثة (الشكل 8.16). حيث يكون تكامل الحجم ثلاثي الأبعاد المكتوب بالإحداثيات الديكارتية كما يلي

$$(8.26) \quad \int_V f(\vec{r}) dV = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(\vec{r}) dx dy dz.$$



الشكل 8.16 عنصر الحجم بالإحداثيات الديكارتية.

في هذه المعادلة، يمكن أن تكون دالة عشوائية للموقع. ويُرمز إلى الحدود السفلى والعليا للإحداثيات الفردية بـ  $x_{\min} \cdot x_{\max}$  . . . . . الأسلوب المعتاد هو حل التكامل الداخلي الأبعد أولاً ثم الأقرب فالأقرب. وهذا يعني، بالنسبة إلى المعادلة 8.26، أن نحل التكامل على  $x$  أولاً ثم التكامل على  $y$  ثم التكامل على  $z$ . لكن يمكن بدء الحل بأي ترتيب آخر. ومن الطرق الصحيحة أيضاً لكتابة التكامل في المعادلة 8.26 الطريقة

$$(8.27) \quad \int_V f(\vec{r}) dV = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left( \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f(\vec{r}) dz \right) dy \right) dx,$$

وبهذا يكون ترتيب التكامل الآن  $x, y, z$ . لماذا قد يحدث ترتيب التكامل فرقاً؟ إن الحالة الوحيدة التي يكون فيها ترتيب التكامل مهماً هي عندما تكون حدود التكامل في إحداثي معين معتمدة على أحد الإحداثيين الآخرين أو كليهما. سنتناول المثال 8.4 هذه الحالة. لأن الزاوية  $\phi$  هي أحد إحداثيات نظام الإحداثيات الأسطوانية، لا يكون عنصر الحجم على شكل مكعب. بالنسبة إلى زاوية تناضلية معينة،  $d\phi$ ، يعتمد حجم عنصر الحجم على مدى بعد موقع عنصر الحجم عن المحور  $z$ . يزيد هذا الحجم خطياً بمسافة  $r_{\perp}$  من المحور  $z$  (الشكل 8.17) ويمكن إيجادها من خلال المعادلة

$$(8.28) \quad dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\phi dz.$$

وعندئذ يكون تكامل الحجم كما يلي

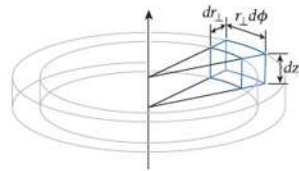
$$(8.29) \quad \int_V f(\vec{r}) dV = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} \left( \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f(\vec{r}) r_{\perp} dr_{\perp} \right) d\phi \right) dz$$

مرة أخرى، يمكن اختيار ترتيب التكامل الذي يُسهّل الحل إلى أقصى درجة ممكنة. وأخيراً، في الإحداثيات الكروية، نستخدم المتغيرين الزاويتين،  $\theta$  و  $\phi$  (الشكل 8.18). في هذه الحالة، يعتمد حجم عنصر الحجم لقيمة معينة للإحداثيات التفاضلية على المسافة  $r$  إلى نقطة الأصل وكذا الزاوية بالنسبة إلى المحور  $\theta = 0$  (المساوي للمحور  $z$  في الإحداثيات الديكارتية أو الأسطوانية). ويُعبّر عن عنصر الحجم التفاضلي في الإحداثيات الكروية كما يلي

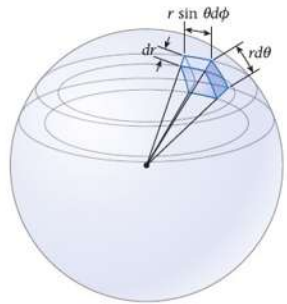
$$(8.30) \quad dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

ومن ثمّ يكون التكامل الحجمي بالإحداثيات الكروية هو

$$(8.31) \quad \int_V f(\vec{r}) dV = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left( \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} \left( \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} f(\vec{r}) \sin \theta d\theta \right) d\phi \right) r^2 dr$$



الشكل 8.17 عنصر الحجم بالإحداثيات الأسطوانية.



الشكل 8.18 عنصر الحجم بالإحداثيات الكروية.

## مثال 8.4 حجم الأسطوانة

حتى نوضح لماذا قد يكون من الأبسط استخدام إحداثيات غير ديكارتية في حالات معينة، سنستخدم تكاملات حجمية لإيجاد حجم أسطوانة نصف قطرها  $R$  وارتفاعها  $H$ . نحتاج إلى تكامل الدالة  $f(\vec{r}) = 1$  على الأسطوانة كلها للوصول إلى الحجم.

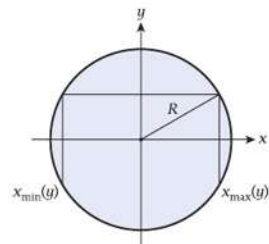
### المسألة

استخدم تكاملاً حجمياً لإيجاد حجم أسطوانة قائمة ارتفاعها  $H$  ونصف قطرها  $R$ .

### الحل

في الإحداثيات الديكارتية، نضع نقطة أصل النظام الإحداثي عند مركز القاعدة الدائرية للأسطوانة (السطح السفلي). بحيث يكون الشكل الذي نحتاج إلى إيجاد التكامل عليه في المستوى  $xy$  دائرة نصف قطرها  $R$  (الشكل 8.19). ومن ثمّ يكون التكامل الحجمي بالإحداثيات الديكارتية هو

$$(i) \quad \int_V dV = \int_0^H \left( \int_{y_{\min}(y)}^{y_{\max}(y)} \left( \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} dx \right) dy \right) dz.$$



الشكل 8.19 السطح السفلي لأسطوانة قائمة نصف قطرها  $R$ .

يجب إجراء التكامل الداخلي الأبعد أولاً وبطريقة بسيطة:

$$(ii) \quad \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} dx = x_{\max}(y) - x_{\min}(y).$$

تعتمد حدود التكامل على  $y$ :  $x_{\max} = \sqrt{R^2 - y^2}$  و  $x_{\min} = -\sqrt{R^2 - y^2}$ . لذلك، سيكون حل المعادلة (ii) هو  $2\sqrt{R^2 - y^2}$ .  $x_{\max}(y) - x_{\min}(y)$  يعوّض بذلك في المعادلة (i) ونحصل على

$$(iii) \quad \int_V dV = \int_0^H \left( \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - y^2} dy \right) dz.$$

وتكون قيمة التكامل الداخلي من هذين التكاملين هي

$$\int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - y^2} dy = \left( y\sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \tan^{-1} \left( \frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right) \right)_{-R}^R = \pi R^2.$$

يمكنك التحقق من هذا الناتج بالبحث عن التكامل المحدد في جدول تكامل. وبالتعويض بهذا الناتج في المعادلة (iii). نصل في النهاية إلى الحل:

$$\int_V dV = \int_0^H \pi R^2 dz = \pi R^2 \int_0^H dz = \pi R^2 H.$$

كما ترى، كان الوصول إلى حجم الأسطوانة أصعب بالإحداثيات الديكارتية. فماذا عن استخدام الإحداثيات الأسطوانية؟ طبقاً للمعادلة 8.29، يكون التكامل الحجمي هو

$$\begin{aligned} \int_V f(\vec{r}) dV &= \int_0^H \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r_{\perp} dr_{\perp} \right) d\phi \right) dz = \int_0^H \left( \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} R^2 \right) d\phi \right) dz \\ &= \frac{1}{2} R^2 \int_0^H \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) dz = \frac{1}{2} R^2 \int_0^H 2\pi dz = \pi R^2 \int_0^H dz = \pi R^2 H. \end{aligned}$$

في هذه الحالة، كان من الأسهل كثيراً استخدام الإحداثيات الأسطوانية. نتيجة لهندسة الجسم الذي احتجنا إلى إيجاد التكامل عليه.

## سؤال الاختبار الذاتي 8.2

باستخدام الإحداثيات الكروية، أثبت أن حجم الكرة  $V$  التي نصف قطرها  $R$  هو  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

يمكننا الآن العودة إلى مسألة حساب موقع مركز كتلة الجسم. بالنسبة إلى المركبات الديكارتية لمتجه الموقع، نجد أنّ، من المعادلة 8.21

$$(8.32) \quad X = \frac{1}{M} \int_V x \rho(\vec{r}) dV, \quad Y = \frac{1}{M} \int_V y \rho(\vec{r}) dV, \quad Z = \frac{1}{M} \int_V z \rho(\vec{r}) dV.$$

إذا كانت الكثافة الكتلية للجسم كله عاملاً ثابتاً،  $\rho(\vec{r}) \equiv \rho$ ، فيمكننا حذف هذا العامل الثابت من التكامل والحصول على حالة خاصة من المعادلة 8.21 للكثافة الكتلية الثابتة:

$$(8.33) \quad \vec{R} = \frac{\rho}{M} \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \quad (\rho \text{ ثابت}),$$

حيث استخدمنا المعادلة 8.20 في الخطوة الأخيرة. في المركبات الديكارتية، نحصل لهذه الحالة على:

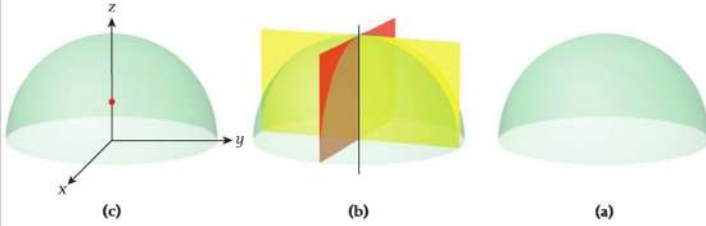
$$(8.34) \quad X = \frac{1}{V} \int_V x dV, \quad Y = \frac{1}{V} \int_V y dV, \quad Z = \frac{1}{V} \int_V z dV.$$

توضح المعادلتان 8.33 و 8.34 أن أي جسم له مستوى تماثل يكون مركز كتلته في هذا المستوى. والجسم الذي يكون له ثلاثة مستويات تماثل عمودية بعضها على بعض (مثل أسطوانة أو متوازي مستطيلات أو جسم كروي)، سيفع مركز كتلته عند تقاطع هذه المستويات الثلاثة، وهو المركز الهندسي. ويوضح المثال 8.5 هذه النظرية بشكل أكثر تفصيلاً.

## مثال 8.5 مركز الكتلة لجسم نصف كروي

### المسألة

افترض أن جسمًا صلبًا نصف كروي كثافته الكتلية ثابتة ونصف قطره  $R_0$  (الشكل 8.20a). أين يقع مركز كتلته؟



**الشكل 8.20** تحديد مركز الكتلة: (a) جسم نصف كروي؛ (b) مستويات التماثل ومحور التماثل؛ (c) نظام إحداثي موضح فيه موقع مركز الكتلة بنقطة حمراء.

### الحل

كما هو موضح في الشكل 8.20b، يمكن أن تقسم مستويات التماثل هذا الجسم إلى أجزاء متساوية ومتماثلة. يوضح الشكل مستويين متعامدين باللونين الأحمر والأصفر، إلا أن أي مستوى يمر عبر محور التماثل الرأسي (الموضح بالخط الأسود الرفيع) يكون مستوى تماثل. نضع الآن النظام الإحداثي بحيث يكون أحد المحورين ( $Z$  في هذه الحالة) متطابقًا مع محور التماثل هذا، وبهذا نتأكد من أن مركز الكتلة يقع على هذا المحور تمامًا. لأن التوزيع الكتلي متماثل ومكاملات المعادلة 8.33 أو 8.34 قوى فردية لـ  $x$ ، يجب أن تكون قيمة تكامل  $X$  أو  $Y$  صفرًا، ولا سيما أن:

$$\int_{-a}^a x dx = 0 \quad \text{جميع قيم الثابت } a.$$

يضمن وضع النظام الإحداثي، بحيث يكون المحور  $Z$  هو محور التماثل، أن  $X = Y = 0$ . ويوضح هذا في الشكل 8.20c، حيث تقع نقطة أصل النظام الإحداثي عند مركز السطح السفلي الدائري للجسم نصف الكروي.

نحتاج الآن إلى إيجاد قيمة التكامل الثالث في المعادلة 8.34:

$$Z = \frac{1}{V} \int_V z dV.$$

حجم الجسم نصف الكروي يساوي نصف حجم الكرة، أو

$$(i) \quad V = \frac{2\pi}{3} R_0^3$$

لإيجاد قيمة تكامل  $Z$ ، نستخدم الإحداثيات الأسطوانية. الموضح فيها عنصر الحجم التفاضلي (انظر المعادلة 8.28) حيث  $dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\phi dz$ . ثم يتم إيجاد قيمة التكامل كما يلي:

$$\begin{aligned} \int_V z dV &= \int_0^{R_0} \left( \int_0^{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \left( \int_0^{2\pi} z r_{\perp} d\phi \right) dr_{\perp} \right) dz = \int_0^{R_0} z \left( \int_0^{\sqrt{R_0^2 - z^2}} r_{\perp} \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) dr_{\perp} \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^{R_0} z \left( \int_0^{\sqrt{R_0^2 - z^2}} r_{\perp} dr_{\perp} \right) dz = \pi \int_0^{R_0} z (R_0^2 - z^2) dz \\ &= \frac{\pi}{4} R_0^4. \end{aligned}$$

من خلال ضرب هذا الناتج في تعبير حجم الجسم نصف الكروي من المعادلة (i)، نحصل على الإحداثي  $Z$  لمركز الكتلة:

$$Z = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{3}{2\pi R_0^3} \frac{\pi R_0^4}{4} = \frac{3}{8} R_0.$$

**الشكل 8.21** جسيان مركز كتلة كل منهما (موضح بالنقطة الحمراء) خارج توزيعه الكتلي: (a) كعكة؛ (b) الكبد. يظهر محور تماثل الكبد المرتد في شكل خط منقطع.



لاحظ أنه ليس من الضروري أن يقع مركز كتلة الجسم داخل الجسم دائماً. يتضمن الشكل 8.21 مثالين واضحين لذلك. باعتبار التماثل، نجد أنّ مركز كتلة الكعكة (الشكل 8.21a) يقع في منتصف الفجوة تماماً. عند نقطة بعيدة عن جسم الكعكة. وبالمثل، نجد أنّ مركز كتلة خشبة الكبد المرتد (الشكل 8.21b) يقع على محور التماثل المتقطع في نقطة بعيدة عن الجسم.

## مركز كتلة قرص فيه فجوة

## مسألة محلولة 8.4

### المسألة

أين يقع مركز كتلة قرص فيه فجوة مستطيلة الشكل (الشكل 8.22)؟ علماً بأن ارتفاع القرص يساوي  $h = 11.0$  cm ونصف قطره يساوي  $R = 11.5$  cm، ويبلغ عرض الفجوة المستطيلة  $w = 7.0$  cm وطولها  $d = 8.0$  cm. وأن نقطة منتصف الجانب الأيمن من الفجوة تتطابق مع المحور المركزي للقرص.

### الخط

**فكر** يمكن حل هذه المسألة من خلال كتابة صيغ رياضية تصف الأبعاد الهندسية الثلاثة للقرص ذي الفجوة. ثم إيجاد التكاملات الحجمي للحصول على إحداثيات مركز الكتلة. إلا أن ذلك سيعطينا عدة تكاملات معقدة. أو يمكننا حل هذه المسألة بطريقة أسهل من خلال التعامل مع القرص ذي الفجوة على أنه قرص صلب ينقصه فجوة مستطيلة الشكل. بمعنى أننا سنتعامل مع الفجوة على أنها جسم صلب له كتلة سالبة. باستخدام تماثل كل من القرص الصلب والفجوة، يمكننا تحديد إحداثيات مركز كتلة كل من القرص الصلب والفجوة. ثم يمكننا الجمع بين هذه الإحداثيات. باستخدام المعادلة 8.1، لإيجاد مركز كتلة القرص ذي الفجوة.

### الرسم

يوضح الشكل 8.23a منظوراً علوياً للقرص ذي الفجوة. مع تحديد المحورين  $X$  و  $Y$ . ويضع الشكل 8.23b مستويي التماثل للقرص ذي الفجوة. يتوافق أحدهما مع المستوى  $X-Y$ . ويضع الآخر على طول المحور  $X$  وعمودياً على المستوى  $X-Y$ . ويظهر خط تقاطع هذين المستويين بميلاً بالحرف  $A$ .

**ابحث** يجب أن يقع مركز الكتلة على طول خط تقاطع مستويي التماثل. لذا، فإننا نعلم أنّ مركز الكتلة لا بد أن يقع على طول المحور  $X$  فقط. يقع مركز كتلة القرص بدون الفجوة عند نقطة أصل النظام الإحداثي عند  $X_c = 0$ . وحجم القرص الصلب يساوي  $V_d = \pi R^2 h$ . إذا كانت الفجوة جسماً صلباً له الأبعاد نفسها  $(h = 11.0$  cm,  $w = 7.0$  cm,  $d = 8.0$  cm). فإن حجم هذا الجسم سيساوي  $V_h = hwd$ . إذا كان هذا الجسم الصلب التخيلي يقع في موضع الفجوة. فسيقع مركز كتلته في منتصف هذه الفجوة عند  $X_h = -3.5$  cm. سنضرب الآن كلا من الحجمين في  $r$ . أي الكثافة الكتلية للمادة المصنوع منها القرص. لإيجاد الكتلتين المقابلتين وتحديد كتلة الفجوة. ثم سنستخدم المعادلة 8.1 لإيجاد الإحداثي  $X$  لمركز الكتلة.

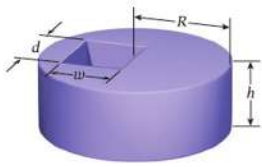
$$(i) \quad X = \frac{X_d V_d \rho - X_h V_h \rho}{V_d \rho - V_h \rho}$$

يُعدّ التعامل مع الفجوة على أنها جسم صلب له شكل الفجوة ثم استخدام حجمه في العمليات الحسابية مع تعيين كتلته والكثافة السالبة من الطرق الشائعة في الفيزياء الذرية ودون الذرية. سنعرض إلى ذلك مرة أخرى عند استكشاف الفيزياء الذرية (في الوحدة 37) والفيزياء النووية وفيزياء الجسيمات (في الوحدات 39 و 40).

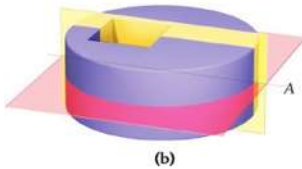
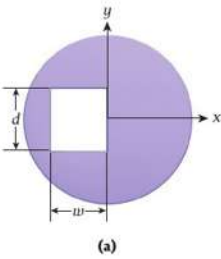
**بسط** يمكننا تبسيط المعادلة (i) إذا كنا نعرف أنّ  $X_h = 0$  وأن  $r$  عامل مشترك:

$$X = \frac{-X_h V_h}{V_d - V_h}$$

يتبع



**الشكل 8.22** منظر ثلاثي الأبعاد للقرص ذي الفجوة المستطيلة.



**الشكل 8.23** (a) منظر علوي للقرص ذي الفجوة. وموضح عليه النظام الإحداثي المحدد. (b) مستويي التماثل للقرص ذي الفجوة.

$$\text{عند التعويض بالتعبيرات التي أوجدناها لـ } V_d \text{ و } V_h \text{، نحصل على}$$

$$X = \frac{-x_h V_h}{V_d - V_h} = \frac{-x_h (hwd)}{\pi R^2 h - hwd} = \frac{-x_h wd}{\pi R^2 - wd}$$

بتحديد مساحة القرص في المستوى  $x-y$  لتكون  $A_d = \pi R^2$  ومساحة الفجوة في المستوى  $x-y$  لتكون  $A_h = wd$ . سنكتب

$$X = \frac{-x_h wd}{\pi R^2 - wd} = \frac{-x_h A_h}{A_d - A_h}$$

**احسب** بالتعويض بالقيم المعطاة. سنجد أن مساحة القرص تساوي

$$A_d = \pi R^2 = \pi (11.5 \text{ cm})^2 = 415.475 \text{ cm}^2,$$

وأن مساحة الفجوة تساوي

$$A_h = wd = (7.0 \text{ cm})(8.0 \text{ cm}) = 56 \text{ cm}^2.$$

لذا، فإنه عند الأخذ في الاعتبار أن  $x_h = -3.5 \text{ cm}$ ، نجد أن مركز كتلة القرص ذي الفجوة يقع عند

$$X = \frac{-x_h A_h}{A_d - A_h} = \frac{-(-3.5 \text{ cm})(56 \text{ cm}^2)}{(415.475 \text{ cm}^2) - (56 \text{ cm}^2)} = 0.545239 \text{ cm}.$$

**قَرِّب** بتقريب الناتج إلى رقمين معنويين. سنجد أن الإحداثي  $X$  لمركز كتلة القرص ذي الفجوة يساوي

$$X = 0.55 \text{ cm}.$$

**تحقق ثانية** نتحاز هذه النقطة إلى بين مركز القرص الصلب قليلاً. بمسافة تساوي جزءاً صغيراً من نصف قطر القرص. تبدو هذه النتيجة منطقية، لأنه إذا اقتطع جزء من القرص بيسار النقطة  $X = 0$ ، فسيزاح مركز الثقل إلى اليمين، تمامًا كما نتج لنا.

### مركز الكتلة للأجسام أحادية البعد وثنائية الأبعاد

لا تركز كل المسائل التي تتضمن حساب مركز الكتلة على الأجسام ثلاثية الأبعاد. على سبيل المثال، قد نريد حساب مركز كتلة جسم ثنائي الأبعاد مثل لوحة معدنية مسطحة. يمكننا كتابة معادلات إحداثيات مركز كتلة الجسم ثنائي الأبعاد الذي يُمثل الكثافة الكتلية لمساحته (أو كتلته لكل وحدة مساحة) من خلال تعديل تعبيرات إيجاد  $X$  و  $Y$  الواردة في المعادلة 8.32:

$$(8.35) \quad X = \frac{1}{M} \int_A x \sigma(\vec{r}) dA, \quad Y = \frac{1}{M} \int_A y \sigma(\vec{r}) dA,$$

حيث تساوي الكتلة

$$(8.36) \quad M = \int_A \sigma(\vec{r}) dA.$$

إذا كانت الكثافة الكتلية لمساحة الجسم ثابتة، فإن  $\sigma = M/A$ . ومن ثمّ يكون بإمكاننا إعادة كتابة المعادلة 8.35 لإيجاد إحداثيات مركز كتلة الجسم ثنائي الأبعاد بدلالة المساحة  $A$ ، وإحداثيات  $X$  و  $Y$ :

$$(8.37) \quad X = \frac{1}{A} \int_A x dA, \quad Y = \frac{1}{A} \int_A y dA,$$

حيث يمكن إيجاد قيمة المساحة الكلية من المعادلة

$$(8.38) \quad A = \int_A dA.$$

إذا كان الجسم أحادي البعد فعلاً، مثل قضيب طويل ورفيع طوله  $L$  وكثافته الكتلية الخطية (أو كتلته لكل وحدة طول)  $\lambda(x)$ . فإنه يمكن إيجاد إحداثي مركز الكتلة من خلال المعادلة

$$(8.39) \quad X = \frac{1}{M} \int_L x \lambda(x) dx,$$

حيث تساوي الكتلة

$$(8.40) \quad M = \int_L \lambda(x) dx.$$

إذا كانت الكثافة الكتلية الخطية للقضيب ثابتة، فمن المؤكد أن مركز الكتلة يقع عند المركز الهندسي — منتصف القضيب — مما يعني أننا لا نحتاج إلى إجراء المزيد من العمليات الحسابية لإيجاده.

## مركز كتلة قضيب طويل ورفيع

## مسألة محلولة 8.5

### المسألة

يقع قضيب طويل ورفيع على امتداد المحور  $X$ . حيث يقع أحد طرفي القضيب عند  $x = 1.00 \text{ m}$  ويقع الطرف الآخر عند  $x = 3.00 \text{ m}$ . ويمكن إيجاد الكثافة الكتلية الخطية للقضيب من خلال المعادلة  $\lambda(x) = ax^2 + b$ . حيث  $a = 0.300 \text{ kg/m}^3$  و  $b = 0.600 \text{ kg/m}^3$ . أوجد كتلة القضيب والإحداثي  $X$  لمركز كتلته.

### الحل

**فكّر** الكثافة الكتلية الخطية للقضيب ليست منتظمة، بل تعتمد على الإحداثي  $X$ . ومن ثمّ، فإنه لإيجاد الكتلة نحتاج إلى إيجاد تكامل الكثافة الكتلية الخطية على طول القضيب. لإيجاد مركز الكتلة، نحتاج إلى إيجاد تكامل الكثافة الكتلية الخطية مضروباً في المسافة في الاتجاه  $X$ . ثم نقسم الناتج على كتلة القضيب.

**الرسم** يوضح الشكل 8.24 القضيب الطويل الرفيع موضوعاً على امتداد المحور  $X$ .



**الشكل 8.24** قضيب طويل ورفيع على امتداد المحور  $X$ .

**ابحث** يمكن إيجاد قيمة كتلة القضيب من خلال إيجاد تكامل الكثافة الكتلية الخطية  $\lambda$  على طول القضيب بدءاً من  $x_1 = 1.00 \text{ m}$  وحتى  $x_2 = 3.00 \text{ m}$  (انظر المعادلة 8.40).

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + b) dx = \left[ a \frac{x^3}{3} + bx \right]_{x_1}^{x_2}.$$

لإيجاد الإحداثي  $X$  لمركز كتلة القضيب  $X$ ، نحسب حاصل ضرب تكامل الكتلة التفاضلية في  $X$  ثم نقسم الناتج على الكتلة التي أوجدنا قيمتها للتو (انظر المعادلة 8.39).

$$X = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x) x dx = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + b) x dx = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} (ax^3 + bx) dx = \frac{1}{M} \left[ a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

**بسط** بالتعويض بالنهايتين العلوية والسفلية  $x_2$  و  $x_1$  في المعادلة، نحصل على كتلة القضيب:

$$M = \left[ a \frac{x^3}{3} + bx \right]_{x_1}^{x_2} = \left( a \frac{x_2^3}{3} + bx_2 \right) - \left( a \frac{x_1^3}{3} + bx_1 \right) = \frac{a}{3} (x_2^3 - x_1^3) + b(x_2 - x_1).$$

وبالطريقة نفسها، نحصل على الإحداثي  $X$  لمركز كتلة القضيب:

$$X = \frac{1}{M} \left[ a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{M} \left\{ \left( a \frac{x_2^4}{4} + b \frac{x_2^2}{2} \right) - \left( a \frac{x_1^4}{4} + b \frac{x_1^2}{2} \right) \right\}$$

والذي يمكن تبسيطه إلى

$$X = \frac{1}{M} \left\{ \frac{a}{4} (x_2^4 - x_1^4) + \frac{b}{2} (x_2^2 - x_1^2) \right\}.$$

تبيح



**احسب** بالتعويض بالقيم العددية المعطاة. نستطيع حساب كتلة الغضيب:

$$M = \frac{0.300 \text{ kg/m}^3}{3} \left( (3.00 \text{ m})^3 - (1.00 \text{ m})^3 \right) + (0.600 \text{ kg/m})(3.00 \text{ m} - 1.00 \text{ m}) = 3.8 \text{ kg}.$$

ومن خلال القيم العددية. نجد أن الإحداثي  $X$  للغضيب يساوي

$$X = \frac{1}{3.8 \text{ kg}} \left\{ \frac{0.300 \text{ kg/m}^3}{4} \left( (3.00 \text{ m})^4 - (1.00 \text{ m})^4 \right) + \frac{0.600 \text{ kg/m}}{2} \left( (3.00 \text{ m})^2 - (1.00 \text{ m})^2 \right) \right\}$$

$$= 2.210526316 \text{ m}.$$

**قَرِّب** تمَّ تحديد كل القيم العددية في المسألة لتتكون من ثلاثة أرقام معنوية فقط. لذا سنقرب النتائج لتصبح

$$M = 3.80 \text{ kg}$$

$$X = 2.21 \text{ m}$$

**تحقق ثانية** للتحقق ثانية من أن قيمة كتلة الغضيب التي أوجدناها صحيحة. سنفترض أن الكثافة الكتلية خطية ثابتة مساوية للكثافة الكتلية الخطية التي أوجدنا قيمتها بتحديد  $x = 2 \text{ m}$  (منتصف الغضيب) في تعبير إيجاد  $l$  المعطى في المسألة والذي يساوي

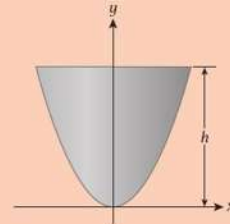
$$\lambda = (0.3 \cdot 4 + 0.6) \text{ kg/m} = 1.8 \text{ kg/m}.$$

ومن ثمَّ، فإن  $m \approx 2 \text{ m} \times 1.8 \text{ kg/m} = 3.6 \text{ kg}$  وهو ناغ قريب إلى حد معقول من الناغ الذي أوجدناه للكتلة سابقًا  $M = 3.80 \text{ kg}$ .

للتحقق ثانية من أن قيمة الإحداثي  $X$  لمركز كتلة الغضيب صحيحة. سنفترض مجددًا أن الكثافة الكتلية الخطية ثابتة. ومن ثمَّ، سيضع مركز الكتلة عند منتصف الغضيب. أي أن  $X \approx 2 \text{ m}$ . بينما الإحداثي الذي أوجدناه هو  $X = 2.21 \text{ m}$ . أي أنه يقع إلى يمين مركز الغضيب قليلًا. بالنظر إلى دالة الكثافة الكتلية الخطية. نجد أن الكتلة الخطية للغضيب تزداد جهة اليمين. مما يعني أن مركز كتلة الغضيب لا بد أن يكون على يمين المركز الهندسي للغضيب. لذا، فإن الناغ الذي توصلنا إليه يبدو منطقيًا.

### سؤال الاختبار الذاتي 8.3

افترضنا صفيحة ارتفاعها  $h$  من لوحة معدنية رقيقة ذات كثافة كتلية منتظمة، كما هو موضح في الشكل. ومحدّد  $y = 2x^2$  الحد السفلي للصفيحة. أثبت أن مركز كتلة هذه الصفيحة يقع عند  $x = 0$  و  $y = \frac{3}{5}h$ .



### ما تعلمناه دليل المذاكرة للاختبار

- إن مركز الكتلة هو نقطة على الجسم تتركز فيها كتلة هذا الجسم كلها.
- يمكن تحديد مركز كتلة جسم ذي شكل عشوائي من خلال المعادلة  $\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$  حيث تكون الكثافة الكتلية للجسم  $\rho = \frac{dm}{dV}$  ويمتد التكامل على حجم الجسم بالكامل  $V$ . و  $M$  كتلته الكلية.
- عندما تكون الكثافة الكتلية منتظمة عبر الجسم بالكامل. بحيث  $\vec{R} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$  ، فإنها تقع مركز الكتلة عند  $\vec{R} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$ .
- إذا كان للجسم مستوى تماثل، فلا بد أن يقع مركز الكتلة في هذا المستوى.
- يمكن تحديد موقع مركز كتلة مجموعة من الأجسام من خلال حساب المتوسط الكتلي المرجح لمواقع مراكز كتل الأجسام.  $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \dots + \vec{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i$ .
- يمكن وصف حركة جسم صلب غير نقطي بحركة مركز كتلته.
- يمكن إيجاد سرعة الصاروخ كدالة لكتلته بواسطة المعادلة  $v_f - v_i = v_c \ln(m_i / m_f)$  حيث يعبر الحرف  $v_c$  عن الكتلة والسرعة الابتدائيتين، ويعبر الحرف  $f$  عن الكتلة والسرعة النهائيةيتين.
- يمكن إيجاد السرعة المتجهة لمركز كتلة مجموعة من الأجسام من موضع:  $\vec{V} \equiv \frac{d}{dt} \vec{R}$
- كمية حركة مركز كتلة مجموعة من الأجسام هو  $\vec{P} = M\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$  وتخضع كمية الحركة هذه للقانون الثاني لنيوتن:  $\frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} (M\vec{V}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_{net}$
- لا ينتج عن القوى الداخلية بين الأجسام محصلة قوى (فيحصلتها تكون صفراً لأنها دائماً تكون متساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه). ومن ثمَّ فإنها لا تغير كمية حركة مركز الكتلة.
- تُعدّ حركة الصاروخ مثالاً للحركة التي تتغير خلالها كتلة الجسم المتحرك. يمكن إيجاد معادلة حركة الصاروخ في الفضاء بين النجوم من خلال  $\vec{F}_{thrust} = m\vec{a} = -\vec{v}_c \frac{dm}{dt}$  حيث  $\vec{v}_c$  هي السرعة المتجهة للوقود المستهلك بالنسبة إلى الصاروخ و  $\frac{dm}{dt}$  هو معدل تغير الكتلة نتيجة لتدفق الوقود المستهلك.

## إجابات أسئلة الاختبار الذاتي

8.1

ثم نحسب تكامل الزاوية القطبية:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = [\phi]_0^{2\pi} = 2\pi$$

وأخيراً:

$$V = 4\pi \int_0^R r^2 dr = 4\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$dA = 2x(y)dy; y = 2x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y/2} \quad \mathbf{8.3}$$

$$2x(y) = 2\sqrt{y/2} = \sqrt{2y}; dA = \sqrt{2y}dy$$

$$Y = \frac{\int_0^h y\sqrt{2y} dy}{\int_0^h \sqrt{2y} dy} = \frac{\sqrt{2} \int_0^h y^{3/2} dy}{\sqrt{2} \int_0^h y^{1/2} dy} = \frac{\left[ \frac{y^{5/2}}{5/2} \right]_0^h}{\left[ \frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^h}$$

$$Y = \frac{3}{5} h. \quad (X = 0, \text{ بالنسبة}).$$

$$Z = \frac{z_{\text{red}}m_{\text{red}} + z_{\text{green}}m_{\text{green}} + z_{\text{orange}}m_{\text{orange}} + z_{\text{blue}}m_{\text{blue}} + z_{\text{purple}}m_{\text{purple}}}{M}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}h2m_0 + \frac{1}{2}hm_0 + \frac{1}{2}hm_0 + \frac{1}{2}hm_0 + \frac{1}{2}hm_0}{6m_0}$$

$$= \frac{h(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{6} = \frac{2}{3}h = 1.7 \text{ m.}$$

**8.2** نستخدم الإحداثيات الكروية وتكامل الزاوية  $\theta$  من 0 إلى  $\pi$ . والزاوية  $\phi$  من 0 إلى  $2\pi$ . والإحداثي الشعاعي  $r$  من 0 إلى  $R$ .

$$V = \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin\theta d\theta \right) d\phi \right) r^2 dr$$

نحسب أولاً تكامل زاوية السم:

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta = [-\cos\theta]_0^\pi = -[\cos(\pi) - \cos(0)] = 2$$

$$V = 2 \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) r^2 dr$$

### إرشادات حل المسائل: مركز الكتلة وحركة الصاروخ

الطرق المناسبة لتحليل التصادمات تعيين مناطق إسناد مع وجود نقطة الأصل عند مركز الكتلة.

**4.** غالباً ما يكون من الصعب تقاضي استخدام التكامل عند تحديد موقع مركز الكتلة. وفي هذه الحالة، يُفضل التفكير بعناية في أبعاد الجسم المتضمن في الحالة التي لدينا، واختيار النظام الإحداثي المناسب (الديكارتي أو الأسطوانتي أو الكروي).

**5.** في المسائل التي تتضمن حركة الصواريخ، لا يمكنك استخدام معادلة  $F = ma$ . لأن كتلة الصاروخ لا تظل ثابتة.

**1.** الخطوة الأولى في تحديد موقع مركز كتلة جسم أو نظام يتكون من مجموعة جسيمات هي إيجاد مستويات التماثل. فلا بد أن يقع مركز الكتلة على مستوى التماثل، أو على خط تقاطع مستويين تماثل، أو عند نقطة تقاطع أكثر من مستوى تماثل.

**2.** بالنسبة إلى الأشكال المعقدة، يمكنك تفكيك الجسم إلى أشكال هندسية أبسط. ثم تحدد موقع مركز الكتلة لكل شكل على حدة. ثم تجمع بعد ذلك مراكز الكتلة الفردية التي أوجدتها للحصول على مركز كتلة كلي باستخدام المتوسط المرجح للمسافات والكتل. مع معاملة الفجوات كأجسام ذات كتلة سالبة.

**3.** يمكن التعامل مع حركة أي جسم كترابك حركة مركز كتلته (وفقاً للقانون الثاني لنيوتن) ودوران الجسم حول مركز الكتلة. من

### أسئلة الاختبار من متعدد

- 8.2** عند احتلال نواة البروموت 208 وهي في وضع السكون، ينتج التالسيوم 204 وجسيم ألفا (نواة الهيليوم 4) الأعداد الكتلية للبروموت 208 والتالسيوم 204 والهيليوم 4 هي 208 و 204 و 4 على التوالي. (العدد الكتلي هو العدد الكلي للبروتونات والنيوترونات الموجودة في النواة). ستقوى الطاقة الحركية لنواة التالسيوم
- (a) مساوية للطاقة الحركية لجسيم ألفا.  
 (b) أقل من الطاقة الحركية لجسيم ألفا.  
 (c) أكبر من الطاقة الحركية لجسيم ألفا.

- 8.1** وقف رجل على جليد عديم الاحتكاك وألقى خضبة الكيد فاستدارت وعادت إليه. اختر العبارة الصحيحة:
- (a) لأن كمية حركة النظام المتكون من الرجل والكيد تكون محفوظة، سيصل الرجل إلى وضع السكون مسكاً بالكيد عند الموضع نفسه الذي ألقى منه الكيد في البداية.  
 (b) من المستحيل أن يتمكن الرجل من إلغاء الكيد في هذه الحالة.  
 (c) من الممكن أن يتمكن الرجل من إلغاء الكيد. لكن لأنه يقف على جليد عديم الاحتكاك عند إلغاء الكيد، فلن يعود الكيد إليه مرة أخرى.  
 (d) لا تحفظ كمية الحركة الكلية للنظام المتكون من الرجل والكيد. لذا فإن الرجل سينزلق إلى الوراء عند إمساكه بالكيد عندما يعود إليه مرة أخرى.

التغلطين على الأرض في الوقت نفسه. إذا سقطت القطعة التي كتلتها 1 kg على بعد 180 m من المتجنيق، فكم ستبعد القطعة التي كتلتها 2 kg عن المتجنيق عند سقوطها على الأرض؟ تجاهل مقاومة الهواء.

- (a) 20 m (b) 60 m  
(c) 100 m (d) 120 m  
(e) 180 m

**8.10** كتلتان نظمتان واقعتان في المستوى نفسه. وتبلغ المسافة بين الكتلة 1 ومركز الكتلة 3.0 m، بينما تبلغ المسافة بين الكتلة 2 ومركز الكتلة 1.0 m. أوجد  $m_2/m_1$ . نسبة الكتلة 1 إلى الكتلة 2.

- (a) 4/3 (b) 3/4  
(c) 7/4 (d) 4/7  
(e) 3/1 (f) 1/3

**8.11** زجاجة أسطوانية لتوابل السلطة مصنوعة من الزيت والخل. يشغل الخل ثلث حجمها ( $\rho = 1.01 \text{ g/cm}^3$ ) ويشغل الزيت الثلثين الآخرين ( $\rho = 0.910 \text{ g/cm}^3$ ). موضوعة على طاولة في وضع السكون. في البداية، كان الزيت منفصلاً عن الخل. حيث كان يطفو فوق الخل. فزجت الزجاجة حتى اختلط الزيت بالخل تماماً. ثم وضعت مرة أخرى على الطاولة. ما مقدار تغير ارتفاع مركز كتلة التوابل السلطة نتيجة للخلط؟

- (a) أعلى.  
(b) أقل.

(c) عند الارتفاع نفسه.

**8.12** قضيب أحادي البعد تختلف كثافته الخطية حسب الموضع وفقاً للعلاقة  $\lambda(x) = cx$  حيث  $c$  قيمة ثابتة و  $x = 0$  هو موضع الطرف الأيسر من القضيب. أين تتوقع أن يقع مركز كتلة القضيب؟

- (a) في منتصف القضيب  
(b) على يسار منتصف القضيب  
(c) على يمين منتصف القضيب  
(d) عند الطرف الأيمن من القضيب  
(e) عند الطرف الأيسر من القضيب

**8.13** يُستخدم خرطوم حديقة للماء دلو سعته 20 L خلال 1 min. وتبلغ سرعة تدفق الماء خارج الخرطوم 1.05 m/s. ما مقدار القوة المؤثرة في الشخص الذي يحمل الخرطوم؟

- (a) 0.35 N (b) 2.1 N  
(c) 9.8 N (d) 12 N  
(e) 21 N

**8.14** يُستخدم خرطوم حديقة للماء دلو سعته 20 L خلال 1 min. وتبلغ سرعة تدفق الماء خارج الخرطوم 2.35 m/s. ومؤثر القوة  $F$  في الشخص الذي يحمل الخرطوم. بينما يوجد خرطوم آخر يمكنه ملء الدلو نفسه خلال 2 min. مع تدفق الماء خارج الخرطوم بالسرعة نفسها. سيكون مقدار القوة المؤثرة في الشخص الذي يحمل هذا الخرطوم هو

- (a)  $4/F$  (b)  $2/F$   
(c)  $F$  (d)  $2F$   
(e)  $4F$

**8.15** افترض أنه تم إطلاق صاروخ في فراغ في الفضاء الخارجي. أي العبارات التالية صحيحة؟

- (a) لن ينتج الصاروخ أي دفع لانعدام مقاومة الهواء.  
(b) سينتج الصاروخ في الفراغ الدفع نفسه الذي يمكن أن ينتجه في وجود الهواء.  
(c) سينتج الصاروخ في الفراغ نصف مقدار الدفع الذي يمكن أن ينتجه في وجود الهواء.  
(d) سينتج الصاروخ في الفراغ ضعف مقدار الدفع الذي يمكن أن ينتجه في وجود الهواء.

**8.16** يقع مركز كتلة الشمس وكوكب المشتري

- (a) عند مركز الشمس تماماً.  
(b) بالقرب من مركز الشمس.  
(c) عند مركز كوكب المشتري تماماً.  
(d) بالقرب من مركز كوكب المشتري.  
(e) في منتصف المسافة بين الشمس وكوكب المشتري.

**8.3** جسيان كتلتاهما  $m_1$  و  $m_2$  يتحركان على طول محور  $x$  في الاتجاه الموجب بالسرعتين  $v_1$  و  $v_2$ . على التوالي. حيث  $v_1$  أقل من  $v_2$ . تكون سرعة مركز كتلة هذا النظام المتكون من جسيمين

- (a) أقل من  $v_1$ .  
(b) مساوية لـ  $v_1$ .  
(c) مساوية لمتوسط السرعتين  $v_1$  و  $v_2$ .  
(d) أكبر من  $v_1$  وأقل من  $v_2$ .  
(e) أكبر من  $v_2$ .

**8.4** تحركت قذيفة مدفعية في مسار على شكل قطع مكافئ عند انجبارها في الجو. وخطت الغزبية إلى شظايا كثيرة جداً. أي العبارات التالية صحيحة (حدد كل ما ينطبق)؟

- (a) ستزيد قوة الانجبار من كمية حركة النظام المتكون من الشظايا. ومن ثم لن تُحفظ كمية حركة الغزبية أثناء الانجبار.  
(b) قوة الانجبار قوة داخلية. ومن ثم لن تتغير كمية الحركة الكلية للنظام.  
(c) سيستمر مركز كتلة النظام المتكون من الشظايا في التحرك في المسار الابتدائي على شكل قطع مكافئ حتى تلامس الشظية الأخيرة الأرض.  
(d) سيستمر مركز كتلة النظام المتكون من الشظايا في التحرك في المسار الابتدائي على شكل قطع مكافئ حتى تلامس الشظية الأولى الأرض.  
(e) سيكون مركز كتلة النظام المتكون من الشظايا مسار يعتمد على عدد الشظايا وسرعاتها المتجهة بعد الانجبار مباشرة.

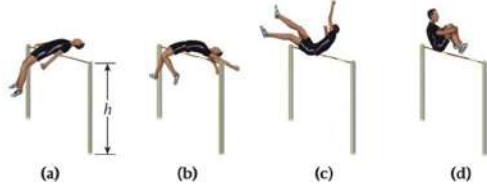
**8.5** يسبح رائد فضاء كتلته 80 kg بعيداً عن مركبته الفضائية. ويبعد 15.0 m عن المركبة. ويوجد في حالة سكون بالنسبة إليها. وعندما حاول العودة إليها. ألقى جسماً كتلته 500 g بسرعة 8.0 m/s في اتجاه معاكس لمكان وجود المركبة. ما مقدار الوقت الذي سيستغرقه رائد الفضاء للعودة إلى المركبة؟

- (a) 1 s (b) 10 s  
(c) 20 s (d) 200 s  
(e) 300 s

**8.6** وجدت نفسك في وسط بحيرة. عالماً في طوف مجأة كتلته 300 kg (كما في ذلك كتلتك). وليس معك أي شيء سوى مجموعة من كرات البولينج كتلتها 7 kg وكرات تنس كتلتها 55 g. باستخدام معرفتك لمفهوم الدفع الصاروخي. قررت البدء في ذف الكرات من طوف النجاة لتحرك في اتجاه الشاطئ. أي من الخيارات التالية سيؤمّنك من الوصول إلى الشاطئ بشكل أسرع؟

- (a) ذف كرات التنس بسرعة 35 m/s بمعدل كرة تنس واحدة في الثانية.  
(b) ذف كرات البولينج بسرعة 0.5 m/s بمعدل كرة بولينج واحدة كل 3 s  
(c) ذف كرة تنس وكرّة بولينج بشكل متزامن. حيث ستتحرك كرة التنس بسرعة 15 m/s وكرّة البولينج بسرعة 0.3 m/s. بمعدل كرة تنس واحدة وكرّة بولينج واحدة كل 4 s  
(d) لا تتوفر معلومات كافية لتحديد ذلك

**8.7** توضع الأشكال للاعب فزر عال يستخدم أساليب مختلفة ليتمكن من تحطى العارضة. ما الأسلوب الذي سيكسب اللاعب من تحقيق أعلى فقرة لتحطى العارضة؟

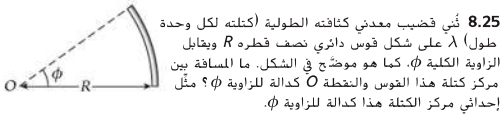


**8.8** يقع مركز كتلة الجسم الصلب غير المنتظم دائياً

- (a) عند المركز الهندسي للجسم. (c) كلاهما.  
(b) مكان ما داخل الجسم. (d) لا شيء مما سبق

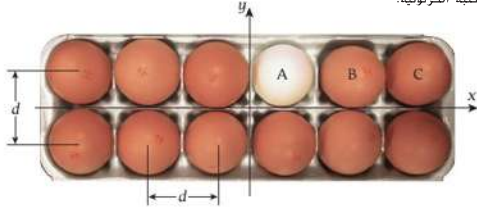
**8.9** يقذف متجنيق موجود على أرض مستوية حجراً كتلته 3 kg مسافة أفقية مدارها 100 m. وعند ذف حجر آخر كتلته 3 kg بالطريقة نفسها. تحطم الحجر في الهواء إلى قطعتين. إحداهما كتلتها 1 kg والأخرى كتلتها 2 kg. فسقطت كلتا

## أسئلة مفاهيمية



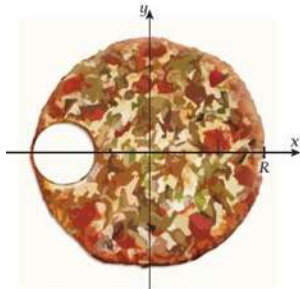
**8.25** بُني قضيب معدني كثافته الطولية  $\lambda$  لكلته لكل وحدة طول  $\lambda$  على شكل قوس دائري نصف قطره  $R$  وبزاوية الزاوية الكلية  $\phi$ . كما هو موضح في الشكل. ما المسافة بين مركز كتلة هذا القوس والنقطة  $O$  كدالة للزاوية  $\phi$  مثل إحداثي مركز الكتلة هذا كدالة للزاوية  $\phi$ .

**8.26** تحتوي العلب الكرتونية الموضحة في الشكل على دزينة من البيض. كتلة كل منها  $m$  ويقع مركز كتلة البيض عند منتصف العلب الكرتونية. وهو نفس موضع نقطة أصل النظام الإحداثي الديكارتي الموضح في الشكل. أين يقع مركز كتلة البيض المتبقي. بدلالة المسافة  $d$  بين كل بيضتين. في كل من الحالات التالية؟ اجعل كتلة العلب الكرتونية.



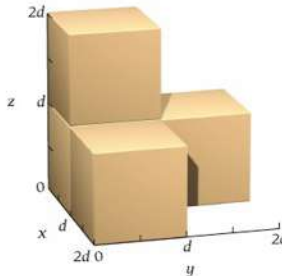
- (a) عند إزالة البيضة A فقط.  
 (b) عند إزالة البيضة B فقط.  
 (c) عند إزالة البيضة C فقط.  
 (d) عند إزالة البيضات الثلاث A و B و C.

**8.27** اقتطعت قطعة دائرية نصف قطرها  $R/4$  من أحد جوانب بيتزا دائرية الشكل نصف قطرها  $R$ . كما هو موضح في الشكل. أين يقع مركز كتلة البيتزا بعد الفجوة الناتجة؟



**8.28** افترض أنك وضعت ساعة رملية قديمة الطراز. بحيث يكون الرمل في الجزء السفلي من الساعة. على ميزان تحليلي حساس للغاية لتحديد كتلتها. ثم قلبت الساعة (مع ارتداد قطرات نظيفة للغاية عند التعامل معها) ووضعتها مرة أخرى على الميزان. وتردد أن تتوقع ما إذا كانت قراءة الميزان أقل من القراءة السابقة أم أكبر منها أم تساويها. ما الذي تحتاج إلى حسابه للاجابة عن هذا السؤال؟ اشرح بعناية ما ينبغي عليك حسابه وما الذي ستشير إليه النتائج. لا داعي لإجراء العمليات الحسابية بالعمل.

**8.17** أطلقت قذيفة في الهواء، وانضجرت بعدما سلطت مسافة صغيرة من رحلتها. كيف يؤثر الانضجار في حركة مركز كتلة القذيفة؟



**8.18** أوجد مركز كتلة الكميات المتماثلة منتظمة الشكل الموضحة بالترتيب الموضح في الشكل. يمثل  $d$  طول أضلاع كل مكعب.

**8.19** تم إطلاق نموذج لصاروخ يبلغ مده الأفقي  $100 \text{ m}$ . فانقسم الصاروخ إلى جزأين متساويين بسبب انفجار صغير. ماذا يمكنك أن تقول عن مواضع سقوط الشظايا على الأرض؟

**8.20** هل من الممكن أن يقع مركز كتلة جسم عند نقطة خارج الجسم. أي عند نقطة بعيدة عن الجسم نفسه؟ اشرح.

**8.21** هل من الممكن أن تتعرض لكتلتان لتصادم بحيث تكون الطاقة الحركية للنظام المكون من الكتلتين أكبر من الطاقة الحركية لكل كتلة على حدة؟ اشرح.

**8.22** أثبت أن مركز كتلة لوحة معدنية رقيقة على شكل مثلث متساوي الأضلاع يقع عند تقاطع ارتفاعات المثلث من خلال العمليات الحسابية المباشرة والاستنتاج الفيزيائي.

**8.23** علية مياه غازية كتلتها  $m$  وارتفاعها  $L$  تمتلئة بمياه غازية كتلتها  $M$ . تم عمل ثقب في الجزء السفلي من العلية لتفريغها من المياه الغازية.

(a) ما مركز كتلة النظام المكون من العلية والمياه الغازية المتبقية داخلها إذا كان مستوى المياه الغازية في العلية هو  $h$ . حيث  $0 < h < L$ ؟  
 (b) ما الحد الأدنى لقيمة مركز الكتلة عند تفريغ العلية من المياه الغازية تمامًا؟

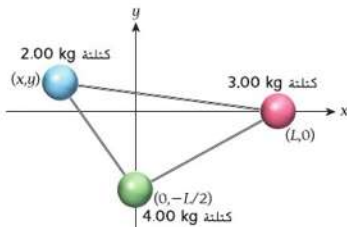
**8.24** يسبح رائد فضاء كتلته  $M$  في الفضاء على مسافة ثابتة  $D$  من مركبته الفضائية فانقطع حبل الأمان الخاص به. ويحمل رائد الفضاء صندوق أدوات كتلته  $M/2$  يحتوي على مطرقة كبيرة وثقبلة كتلتها  $M/4$ . أي أن الكتلة الإجمالية هي  $3M/4$ . يمكن لرائد الفضاء إلغاء الأدوات بالسرعة  $V$  التي تتناسب مع سرعته النهائية بعد إلغاء كل من الغرضين. ويريد رائد الفضاء العودة إلى مركبته الفضائية في أسرع وقت ممكن.

(a) للوصول إلى السرعة النهائية الغصوى. هل ينبغي على رائد الفضاء أن يلقي الغرضين معًا أم يلقيهما منفصلين. واحدًا في كل مرة؟ اشرح.  
 (b) للوصول إلى السرعة الغصوى. هل سيكون من الأفضل إلغاء المطرقة أولاً أم إلغاء صندوق الأدوات أولاً. أم أن الترتيب لن يشكل فرقًا؟ اشرح.

(c) أوجد السرعة الغصوى التي يمكن أن يبدأ عندها تحرك رائد الفضاء نحو المركبة؟

## تمارين

**8.30** إحداثيات مركز كتلة الجسم غير النقطي الموضح في الشكل هي  $(L/4, -L/5)$ . ما إحداثيات الكتلة التي تبلغ  $2.00 \text{ kg}$ ؟



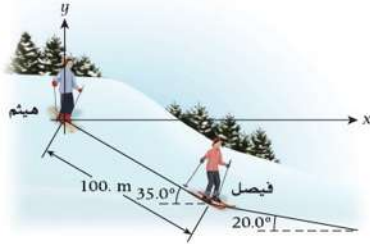
يشير اللون الأزرق لرقم المسألة إلى توفر الإجابة عنها في دليل حلول الطالب. تشير علامة النقطه الواحدة • والنقطتين •• إلى زيادة مستوى صعوبة المسألة.

## القسم 8.1

**8.29** ابحث عن المعلومات الخاصة بمركز كتلة الأجسام في النظام الشمسي فيما يلي. يمكنك البحث عن البيانات اللازمة على الإنترنت أو في الجداول الواردة في الوحدة 12 من هذا الكتاب. افترض تماثل توزيع الكتلة بشكل كروي بالنسبة إلى الأجسام محل البحث.

(a) حدّد المسافة بين مركز كتلة النظام المكون من الأرض والقمر والمركز الهندسي للأرض.  
 (b) حدّد المسافة بين مركز كتلة النظام المكون من الشمس وكوكب المشتري والمركز الهندسي للشمس.

8.36• بدأ المتزلجان فيصل وهيمم التزلج من وضع السكون من نقطتين مختلفتين على الثل في الوقت نفسه. فزلج هيمم، الذي تبلغ كتلته  $88.0 \text{ kg}$ ، من أعلى الثل إلى الأسفل بزاوية ميل مقدارها  $35.0^\circ$ . وبدأ فيصل، الذي كتلته  $64.0 \text{ kg}$ ، التزلج من نقطة أقل انحدارًا بزاوية ميل مقدارها  $20.0^\circ$ . إذا كان طول الجزء المنحدر  $100 \text{ m}$ . فحّدذ العجلة والسرعة المتجهة ومتجهات الموقع لمركز الكتلة المشترك بين فيصل وهيمم كدالة للزمن قبل أن يصل هيمم إلى الجزء الأقل انحدارًا.



8.37• يجري تحليل العديد من التصادمات النووية التي تتم دراستها في المختبرات في مناهج إسناد مختبري. إذا تحرك بروتون كتلته  $1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  بسرعة مقدارها  $70.0\%$  من سرعة الضوء،  $c$ . واصطدم بنواة قصدير ( $^{116}\text{Sn}$ ) كتلتها  $1.9240 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ ، فما سرعة مركز الكتلة بالنسبة إلى مناهج الإسناد المختبري؟ أوجد السرعة بدلالة سرعة الضوء  $c$ .

8.38• يتكون نظام من جسيمين. يقع الجسم الأول الذي كتلته  $2.00 \text{ kg}$  عند  $(2.00 \text{ m}, 6.00 \text{ m})$ ، وتبلغ سرعته المتجهة  $(4.00 \text{ m/s}, 2.00 \text{ m/s})$ . بينما يقع الجسم الثاني الذي كتلته  $3.00 \text{ kg}$  عند  $(1.00 \text{ m}, 4.00 \text{ m})$ ، وتبلغ سرعته المتجهة  $(4.00 \text{ m/s}, 0)$ .

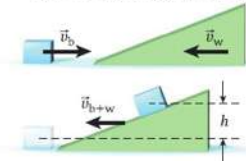
(a) حّدذ الموقع والسرعة المتجهة لمركز كتلة النظام.  
(b) ارسم الموقع ومتجهات السرعة المتجهة لكل جسيم على حدة وللمركز الكتلة.

8.39• يمكن خرطوم إطفاء حريق قطره  $4.00 \text{ cm}$  رش الماء بسرعة متجهة مقدارها  $10.0 \text{ m/s}$ . لاستمرار تدفق الماء من الخرطوم بشكل أفقي، ما مقدار القوة الأفقية التي يجب أن يبذلها رجل الإطفاء على الخرطوم ليبقى ثابتًا؟

8.40•• يتزلق قالب كتلته  $m_b = 1.20 \text{ kg}$  نحو اليمين بسرعة مقدارها  $2.50 \text{ m/s}$  على سطح أفقي عديم الاحتكاك. كما هو موضح في الشكل، "فاصطدم" بونك كتلته  $M_w$ ، يتحرك نحو اليسار بسرعة مقدارها  $1.10 \text{ m/s}$ . وكان الونك ذا شكل يسمح بانزلاق القالب بسهولة على سطحه (عديم الاحتكاك) المصنوع من التطنون عند التناهيما. بالنسبة إلى السطح الأفقي، تحرك القالب والونك بسرعة متجهة

مشتركة  $v_{bw}$  في اللحظة التي توفف فيها القالب عن الانزلاق على سطح الونك.

(a) إذا ارتفع مركز كتلة المكعب فاحسب  $h = 0.370 \text{ m}$ .  
(b) فكم تبلغ كتلة الونك؟  
(c) ما المقصود بـ  $v_{bw}$ ؟



### القسم 8.3

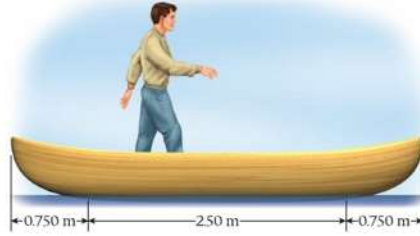
8.41• الخصائص المهمة حركات الصواريخ خاصة الدفع النوعي. المعروفة بالدفع الكلي (التكامل الزمني للدفع) لكل وحدة وزن أرضي للوقود/المؤكسد المستهلك. (يرجع استخدام الوزن بدلًا من الكتلة. في هذا التعريف إلى أسباب تاريخية مجردة.)

(a) إذا كان محرك صاروخ يعمل في فضاء شاسع بسرعة عادم من الفوهة تبلغ  $v$ ، فاحسب الدفع النوعي لهذا المحرك.  
(b) تبلغ سرعة العادم العادية لنموذج محرك الصاروخ  $v_{\text{toy}} = 800 \text{ m/s}$ . وتبلغ سرعة عادم أفضل محركات الصواريخ الكيميائية حوالي  $v_{\text{chem}} = 4.00 \text{ km/s}$ . احسب قيم الدفع النوعي لهذه المحركات وقارن بينها.

8.31• يقف بهلوانات صغار في وضع سكون على منصة أفقية دائرية مرتكزة على حامل عند نقطة منتصفها. لذا من المفترض أن تقع نقطة الأصل للنظام الإحداثي الديكارتي ثنائي الأبعاد عند منتصف المنصة. ويقف بهلونان كتلته  $30.0 \text{ kg}$  عند  $(3.00 \text{ m}, 4.00 \text{ m})$ . بينما يقف بهلون آخر كتلته  $40.0 \text{ kg}$  عند  $(-2.00 \text{ m}, -2.00 \text{ m})$ . افترض أن البهلوانات يقفون في وضع سكون في مواقعهم. فأين يجب أن يقف بهلون كتلته  $20.0 \text{ kg}$  بحيث يكون مركز كتلة النظام المكون من البهلوانات الثلاثة عند نقطة الأصل وتكون المنصة متوازنة؟

### القسم 8.2

8.32• يقف رجل كتلته  $55.0 \text{ kg}$  في زورق يطفو على سطح الماء كتلته  $65.0 \text{ kg}$  وطوله  $4.00 \text{ m}$ . فمسار هذا الرجل من نقطة تبعد  $0.750 \text{ m}$  عن مؤخرة الزورق إلى نقطة تبعد  $0.750 \text{ m}$  عن مقدمة الزورق. إذا افترضنا أن الاحتكاك بين الزورق وسطح الماء ضئيل جدًا. فما مقدار المسافة التي سيجريها الزورق؟



8.33• يدفع طفل شاحنة لعبة كتلتها  $3.50 \text{ kg}$  مباشرة نحو سيارة لعبة ثابتة كتلتها  $2.00 \text{ kg}$  بسرعة  $4.00 \text{ m/s}$ . فتعزّض كل من السيارة والشاحنة لتصادم مرن.

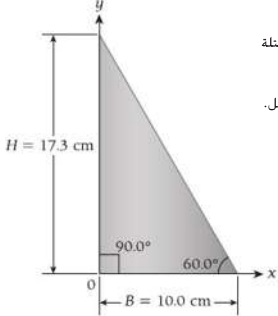
(a) ما مقدار السرعة المتجهة لمركز كتلة النظام المكون من اللعبتين؟  
(b) ما السرعتان المتجهتان للشاحنة والسيارة بالنسبة إلى مركز كتلة النظام المكون من اللعبتين قبل التصادم وبعده؟

8.34• يعززم سائق دراجة نارية مخاطر الانطلاق بالدراجة من أحد طرفي عربة قطار مسطحة. والتسارع نحو الطرف الآخر من العربة. ثم التمزق من العربة إلى منصة. تبلغ كتلة السائق والدراجة معًا  $350 \text{ kg}$  ويبلغ طولها معًا  $2.00 \text{ m}$ . بينما تبلغ كتلة العربة  $1500 \text{ kg}$  ويبلغ طولها  $20.0 \text{ m}$ . افترض أن الاحتكاك بين عجلات العربة والقضبان ضئيل جدًا وأنه يمكن أن تنطلق الدراجة بالسائق في الهواء مع وجود مقاومة هواء ضئيلة جدًا. وكانت العربة ملائمة للمنصة في البداية. إذا سألك منظمو العرض عن المسافة التي ستجدها العربة عن المنصة عندما يصل سائق الدراجة النارية المخاطر إلى الطرف الآخر من العربة. فماذا ستكون إجابتك؟



8.35•• بدأ من وضع السكون. يقف طالبان على زلاجتين كتلتها  $10.0 \text{ kg}$  غير مواجهتين لبعضهما على الجليد. ويتبادلان إلقاء كرة طيية كتلتها  $5.00 \text{ kg}$  بينهما. تبلغ كتلة الطالب الذي على اليسار  $50.0 \text{ kg}$  ويمكنه إلقاء الكرة بسرعة نسبية مقدارها  $10.0 \text{ m/s}$ . بينما تبلغ كتلة الطالب الذي على اليمين  $45.0 \text{ kg}$  ويمكنه إلقاء الكرة بسرعة نسبية مقدارها  $12.0 \text{ m/s}$ . (افترض انعدام الاحتكاك بين الجليد والزلاجتين وانعدام مقاومة هواء.)

(a) إذا ألقى الطالب الذي على اليسار الكرة بشكل أفقي إلى الطالب الذي على اليمين، فما سرعة تحرك الطالب الذي على اليسار نحو اليمين بعد إلقاء الكرة؟  
(b) ما سرعة تحرك الطالب الذي على اليمين بعد التناط الكرة مباشرة؟  
(c) إذا ألقى الطالب الذي على اليمين الكرة مرة أخرى إلى زميله، فما سرعة تحرك الطالب الذي على اليسار بعد التناط الكرة من زميله؟  
(d) ما السرعة التي سيجريها الطالب الذي على اليمين بعد إلقاء الكرة؟



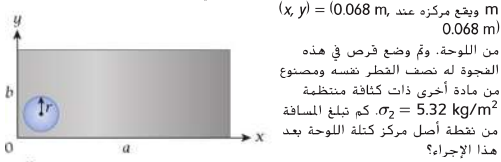
**8.49•** أوجد الإحداثيين  $x$  و  $y$  لمركز كتلة لوحة مستوية مثلثة الشكل ارتفاعها  $H = 17.3$  cm وطول قاعدتها  $B = 10.0$  cm. كما هو موضح في الشكل.

**8.50•** يمكن وصف كثافة فضيب طويل طوله 100 m باستخدام دالة الكثافة الخطية

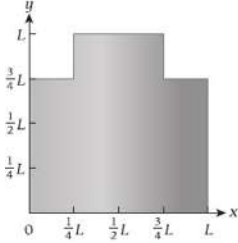
$\lambda(x) = 100 \text{ g/m} + 10.0x \text{ g/m}^2$   
 يقع أحد طرفي الفضيب عند  $x = 0$  بينما يقع الطرف الآخر عند  $x = 100$  m. حدد (a) الكتلة الكلية للفضيب و (b) إحداثي مركز الكتلة.

**8.51•** لوحة رقيقة مستطيلة الشكل ذات كثافة مساحة منتظمة  $\sigma_1 = 1.05 \text{ kg/m}^2$  طولها

$a = 0.600$  m وعرضها  $b = 0.250$  m. وتقع الزاوية اليسرى السفلية عند نقطة الأصل  $(0, 0)$ . فاقطع جزء دائري نصف قطره  $r = 0.0480$  m ويقع مركزه عند  $(x, y) = (0.068 \text{ m}, 0.068 \text{ m})$



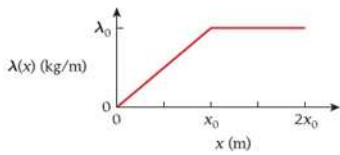
من اللوحة. وتم وضع قرص في هذه الفجوة له نصف القطر نفسه ومصنوع من مادة أخرى ذات كثافة منتظمة  $\sigma_2 = 5.32 \text{ kg/m}^2$  كم تبلغ المسافة من نقطة أصل مركز كتلة اللوحة بعد هذا الإجراء؟



**8.52•** تقع الزاوية اليسرى السفلية للوحة معدنية مربعة منتظمة الشكل طول ضلعها  $L = 5.70$  cm وكتلتها  $0.205$  kg عند الإحداثيين  $(0, 0)$ . كما هو موضح في الشكل. فاقطع مربعان طول ضلع كل منهما  $L/4$  من اللوحة.

(a) أوجد الإحداثي  $x$  لمركز الكتلة؟  
 (b) أوجد الإحداثي  $y$  لمركز الكتلة؟

**8.53•** تم غميش الكثافة الكتلية الخطية  $\lambda(x)$  لجسم أحادي البعد بيانياً. أين يقع مركز كتلة هذا الجسم في التمثيل البياني؟



### تمارين إضافية

**8.54** أطلق مدفع كتلته  $750$  kg فذنبته كتلتها  $15.0$  kg بسرعة  $250$  m/s. ابتداءً من العهوه. وكان المدفع مركباً على عجلات بحيث يكون الاحتكاك الناتج عن ارتفاعه ضئيلاً للغاية. كم تبلغ سرعة الذنبية بالنسبة إلى الأرض بعد إطلاقها من المدفع مباشرة؟

**8.55** تبلغ المسافة بين ذرة كربون ( $1 \text{ u} = 12.0 \text{ u}$ ;  $m = \text{وحدة كتلة ذرية}$ ) وذرة أكسجين ( $m = 16.0 \text{ u}$ ) في جزيء أول أكسيد الكربون (CO)  $1.13 \times 10^{-10}$  m. كم تبلغ المسافة بين ذرة الكربون ومركز كتلة الجزيء؟

**8.56** من طرق اكتشاف الكواكب خارج المجموعة الشمسية البحث عن دليل غير مباشر على الكوكب من خلال الحركة التذبذبية لنجمه حول مركز كتلة النظام المكون من النجم والكوكب. افترض أن النظام الشمسي يتكون بشكل أساسي من الشمس والمشتري فقط. كم سيكون مقدار الحركة التذبذبية للشمس؟ أي كم ستبلغ المسافة

**8.42•** خرج رائد فضاء من محطة الفضاء الدولية ليسير في الفضاء. وكان إجمالي كتلته شاملة كتلة بدلة الفضاء وكتلة كل معداته  $115$  kg. فحدث تسرب بسيط في نظام الدفع الخاص به، فتسرب  $7.00$  g من الغاز في كل ثانية في الفضاء بسرعة  $800$  m/s. وقد لاحظ التسرب بعد  $6.00$  s من بدايته. فما مقدار الحركة التي تحركها رائد الفضاء من موقعه الأصلي في الفضاء نتيجة لتسرب الغاز خلال هذا الوقت؟

**8.43•** البجعة الصافية لصاروخ في الفضاء الخارجي  $5190.0$  kg ويحمل  $1.551 \times 10^5$  kg من الوقود. ويمكن أن يخرج الصاروخ الوقود المستهلك بسرعة  $5.600$  km/s. افترض أن الصاروخ بدأ من وضع السكون ثم زادت سرعته إلى السرعة المتجهة النهائية ثم بدأ رحلته. فكم الوقت الذي استغرقه لقطع مسافة  $3.82 \times 10^3$  km (المسافة بين الأرض والقمير تقريباً)؟

**8.44•** تم لف سلسلة منتظمة الشكل ذات كتلة  $1.32$  kg لكل متر على طاولة. وتم سحب أحد طرفيها لأعلى بمعدل سرعة ثابت  $0.470$  m/s.

(a) احسب القوة المحصلة المبذولة على السلسلة.  
 (b) في حالة رفع جزء من السلسلة بطوله  $0.150$  m عن الطاولة، ما مقدار القوة المبذولة على الطرف المرفوع؟

**8.45•** أنتج محرك سفينة فضاء دفقاً يبلغ  $53.2$  MN بسرعة متجهة للوقود المستهلك تبلغ  $4.78$  km/s.

(a) أوجد معدل خروج  $(dm/dt)$  الوقود المستهلك.  
 (b) إذا كانت الكتلة الابتدائية  $2.12 \times 10^6$  kg والكتلة النهائية  $7.04 \times 10^4$  kg، فأوجد السرعة النهائية لسفينة الفضاء (افترض أن السرعة الابتدائية صفر وأن مجال الجاذبية صغير بحيث يمكن تجاهله).  
 (c) أوجد متوسط العجلة حتى الاحتراق (الوقت الذي يتعد فيه الوقود؛ افترض أن معدل تدفق الكتلة ثابت حتى هذا الوقت).

**8.46•** اضطلعت عربية على مسار هوائي عميق الاحتكاك بتعمل تدفق الماء الخارج من آلة غسل تعمل بضغط الغاز مثبتة على العربية. ويوجد خزان ماء سعة  $1.00$  m<sup>3</sup> على العربية لتزويد آلة الغسل التي تعمل بالضغط بالماء. تبلغ كتلة العربية التي تشمل كتلة المشغل الموجود عليها وكتلة آلة الغسل التي تعمل بالضغط ووقودها وكتلة خزان الماء الخارج  $400$  kg. ويمكن توجيه المياه بتحويل الصمام إلى الخلف أو إلى الأمام. وفي كلا الاتجاهين، تخرج آلة الغسل التي تعمل بالضغط  $200$  L من الماء في الدقيقة بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ  $25.0$  m/s.

(a) إذا بدأت العربية من وضع السكون. فكم الوقت المستغرق اللازم حتى يتحول الصمام من الخلف (دفع أمامي) إلى الأمام (دفع خلفي) لتعود العربية إلى وضع السكون؟

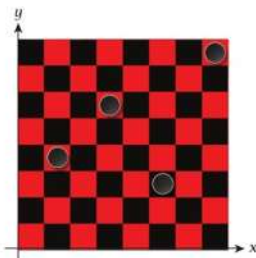
(b) كم تبلغ كتلة العربية في هذا الوقت وكم تبلغ سرعتها المتجهة؟ (لتبسيط: تجاهل انخفاض الكتلة الناتج عن الغاز المستهلك بواسطة آلة الغسل التي تعمل بضغط الغاز؟)

(c) ما مقدار دفع هذا "الصاروخ"؟

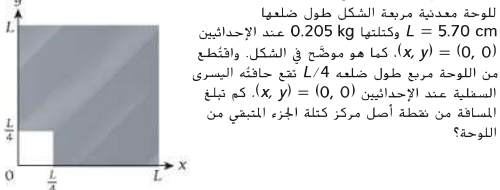
(d) كم تبلغ عجلة العربية قبل تحوّل الصمام مباشرة؟

### القسم 8.4

**8.47** تبلغ مساحة لوحة شطرنج مربعة  $32.0$  cm في  $32.0$  cm وتبلغ كتلتها  $100$  g. وتوجد أربع قطع شطرنج كتلتها  $20.0$  g عليها. كما هو موضح في الشكل. بالنسبة إلى نقطة الأصل الموجودة في الزاوية السفلية اليسرى من اللوحة. أين مركز كتلة النظام المكون من لوحة الشطرنج وقطع الشطرنج؟



**8.48•** تقع الزاوية اليسرى السفلية



للوحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها  $L = 5.70$  cm وكتلتها  $0.205$  kg عند الإحداثيين  $(0, 0)$ . كما هو موضح في الشكل. واقطع من اللوحة مربع طول ضلعه  $L/4$  تقع حافته اليسرى السفلية عند الإحداثيين  $(0, 0)$ . كم تبلغ المسافة من نقطة أصل مركز كتلة الجزء المتبقي من اللوحة؟

(c) إذا أُطلق الصاروخ نفسه في الفضاء السحيق، حيث تكون قوة الجاذبية ضئيلة للغاية، فكم سيكون صافي التغيّر في سرعة الصاروخ وقت احتراق الوقود؟

• **8.66** أوجد موقع مركز كتلة قضيب أحادي البعد طولها  $L$  وكثافته الخطية  $\lambda(x) = cx$  حيث  $c$  قيمة ثابتة. (أتمتج، ستحتاج إلى حساب الكتلة بدلالة  $c$  و  $L$ .)

• **8.67** أوجد مركز كتلة لوحة مستطيلة طولها  $20.0\text{ cm}$  وعرضها  $10.0\text{ cm}$ . علماً بأن كثافة الكتلة تختلف خطياً على امتداد الطول. فمقد أحد الطرفين، تبلغ  $5.00\text{ g/cm}^2$ . وعند الطرف الآخر تبلغ  $20.0\text{ g/cm}^2$ .

• **8.68** تطفو قطعة خشبية منتظمة الشكل طولها  $2.50\text{ m}$  وكتلتها  $91.0\text{ kg}$  على سطح الماء. ويذف رجل كتلته  $72.0\text{ kg}$  على هذه القطعة على مسافة  $22.0\text{ m}$  من أحد الطرفين. وعند الطرف الآخر، تذف ابنته التي تبلغ كتلتها  $(m = 20.0\text{ kg})$  على مسافة  $1.00\text{ m}$  من هذا الطرف.

(a) أوجد مركز كتلة هذا النظام.

(b) إذا ففز الأب عن القطعة الخشبية إلى الخلف في الاتجاه العاكس لابنته (بسرعة متجهة  $v = 3.14\text{ m/s}$  بالنسبة إلى الماء)، فكم تبلغ السرعة الابتدائية للقطعة الخشبية والطفلة؟

• **8.69** كلتكم أحد التحابين بإجراء تحليل هندسي لأحد أعماله الفنية الذي يتكون من صفائح معدنية منتظمة الشكل ومتماثلة السمك والكثافة وملحمة ببعضها. كما هو مبين في الشكل، باستخدام تقاطع المحاورين الموضّح كتشكلة أصل للنظام الإحداثي. حدد الإحداثيات الديكارية لمركز كتلة هذه القطعة الفنية.

• **8.70** نظير طائرة نفاثة بسرعة  $223\text{ m/s}$  في مستوى أفقي. يسحب المحرك الهواء بمعدل  $80.0\text{ kg/s}$  ويحرك وقوداً بمعدل  $3.00\text{ kg/s}$ . وتخرج غازات العادم بمعدل  $600\text{ m/s}$  بالنسبة إلى سرعة الطائرة. أوجد مقدار دفع محرك الطائرة النفاثة.

• **8.71** تم تثبيت دلو على لوح تزلق يتدرج على طريق أفقي بدون احتكاك. وسقط المطر رأسياً في الدلو، فامتأل الدلو بالماء، وبلغت الكتلة الكلية للوح التزلق والدلو والماء  $M = 10.0\text{ kg}$ . ثم أصبح معدل ماء المطر الذي يسقط في الدلو مساوياً لمعدل الماء الذي يتسرب في الوقت نفسه من ثقب موجود في الجزء السفلي للدلو، وهو  $\lambda$   $100\text{ kg/s}$ . في البداية، كانت سرعة حركة الدلو ولوح التزلق  $v_0$ . كم الوقت المستغرق قبل أن تنخفض هذه السرعة إلى النصف؟

• **8.72** أطلق مدفع كتلته  $1000\text{ kg}$  فذيفة كتلتها  $30.0\text{ kg}$  بزوايا مقدارها  $25.0^\circ$  أعلى المستوى الأفقي بسرعة  $500\text{ m/s}$  بالنسبة إلى الأرض. كم تبلغ السرعة المنجهة لارتداد المدفع؟

• **8.73** تحركت كتلتان،  $m_1 = 2.00\text{ kg}$  و  $m_2 = 3.00\text{ kg}$ ، في المستوى  $xy$ . وتم إيجاد السرعة المنجهة لمركز الكتلة المشترك والسرعة المنجهة للكتلة 1 بالنسبة إلى الكتلة 2 بالمتجهين  $(-1.00, +2.40)\text{ m/s}$  و  $(+5.00, +1.00)\text{ m/s}$  بالمتجه  $\vec{i}_{cm}$  حدّد

- (a) كمية الحركة الكلية للنظام
- (b) كمية حركة الكتلة 1
- (c) كمية حركة الكتلة 2

• **8.74** تقود سفينة فضاء كتلتها الكلية  $1000\text{ kg}$  محاولاً الالتحام مع محطة فضائية في الفضاء السحيق، للتنسيب. افترض أنّ المحطة ثابتة بينما تتحرك سفينةك بسرعة  $1.00\text{ m/s}$  باتجاه المحطة. وأصبح كل منهما في محاذة الآخر تماماً للالتحام. ويوجد في مقدمة السفينة صاروخ كائج صغير لتخفيف سرعتها، ويحرك هذا الصاروخ وقوداً بمعدل  $1.00\text{ kg/s}$  وبسرعة متجهة للعادم تبلغ  $100\text{ m/s}$  بالنسبة إلى الصاروخ. افترض أنه تُبقي في السفينة وقود كتلته  $20.0\text{ kg}$  وأن السفينة على مسافة كافية للالتحام.

- (a) ما مقدار الدفع الابتدائي الذي يبذله الصاروخ الكائج على السفينة؟ وما اتجاه الدفع؟
- (b) لأغراض السلامة أثناء الالتحام، تسج وكالة ناسا بسرعة قصوى للالتحام مقدارها  $0.0200\text{ m/s}$ . إذا افترضنا أنك أطلقت الصاروخ الكائج عند زمن  $t = 0$  بدفع واحد مستمر، فما مقدار الوقود (بالكيلوجرام) الذي يجب حرقه لتخفيف سرعة السفينة بالنسبة إلى المحطة الفضائية؟
- (c) لكم من الوقت يجب عليك الاستمرار في تشغيل الصاروخ الكائج؟
- (d) إذا كانت كتلة محطة الفضاء  $5.00 \times 10^5\text{ kg}$  (قريبة من قيمة كتلة المحطة

التي ستتحركها إلى الأمام وإلى الخلف بسبب دورانها حول مركز كتلة النظام المكون من الشمس والمشتري. وما مقدار المسافة التي تفصل مركز الكتلة عن مركز الشمس؟

• **8.57** تمّد السفينة الحربية الأمريكية *مونتان* سفينة ضخمة حيث تبلغ كتلتها  $61,976,139.9\text{ kg}$  وحمل 12 مدفعاً عيار  $40.6$  سنتيمتراً يمكنها إطلاق قذائف

تصل كتلتها إلى  $1224.7\text{ kg}$  بسرعة  $701\text{ m/s}$ . إذا أطلقت السفينة الحربية ثلاث قذائف (في الاتجاه نفسه)، فكم سيتغير السرعة المنجهة لارتداد السفينة؟

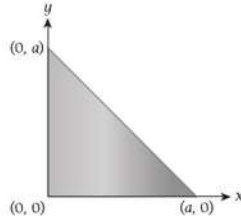
• **8.58** وضعت ثلاث كرات متماثلة كتلتها  $m$  بالترتيب الموضّح في الشكل. أوجد موقع مركز الكتلة.

• **8.59** يقف كل من حمدان ( $61.0\text{ kg}$ ) وسيف ( $44.0\text{ kg}$ ) على حلبة تزلق ذات سطح عمدي الاحتكاك تقريباً للترزلق عليها. ودفعت حمدان سيفاً فتزلق سيف بسرعة  $1.20\text{ m/s}$  (بالنسبة إلى حلبة التزلق).

- (a) كم تبلغ السرعة التي ارتد بها حمدان؟
- (b) احسب التغيّر في الطاقة الحركية للنظام المكون من حمدان وسيف.
- (c) الطاقة  $Q$  تفنى ولا تستحدث، ما مصدر الطاقة الحركية النهائية لهذا النظام؟

• **8.60** استخدم لاعب بيسبول مضرباً كتلته  $m_{bat}$  لضرب كتلة كتلتها  $m_{ball}$ . وقبل أن يضرب الكرة مباشرة، كانت السرعة المنجهة الابتدائية للمضرب  $35.0\text{ m/s}$  والسرعة المنجهة الابتدائية للكرة  $-30.0\text{ m/s}$  (لكان الاتجاه الموجب على طول محور  $x$  الموجب). وتعرض المضرب والكرة لتصادم مرّن أحادي البعد. أوجد سرعة الكرة بعد التصادم. إذا افترضنا أن  $m_{bat}$  أكبر بكثير من  $m_{ball}$ ، إذا سيكون مركز كتلة الجسمين عند المضرب بشكل أساسي.

• **8.61** يستطيع طالب كتلته  $40.0\text{ kg}$  أن يرمي كرة كتلتها  $5.00\text{ kg}$  بسرعة نسبية تبلغ  $10.0\text{ m/s}$ . وكان الطالب واقفاً في وضع السكون على عربة كتلتها  $10.0\text{ kg}$  يمكن أن تتحرك دون أن تُحدّد احتكاكاً. إذا رمى الطالب الكرة في اتجاه أفقي، فكم ستكون السرعة المنجهة لها بالنسبة إلى الأرض؟



• **8.62** أوجد موقع مركز كتلة ورقة ثنائية الأبعاد ذات كثافة ثابتة  $\sigma$  وتأخذ شكل مثلث متساوي الساقين (انظر الشكل).

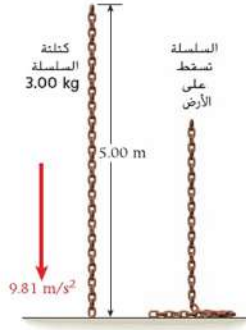
• **8.63** تتكون المحلوة الصافية لصاروخ من كتلة  $4390.0\text{ kg}$  ووقود كتلته  $1.761 \times 10^5\text{ kg}$ . افترض أنّ الصاروخ بدأ من وضع السكون في الفضاء الخارجي

ثم زادت سرعته إلى السرعة المنجهة النهائية ثم بدأ رحلته. ما السرعة التي يجب أن يخرج بها الوقود المستهلك لقطع رحلة من الأرض إلى القمر. مسافة  $3.82 \times 10^5\text{ km}$ .  $7.00\text{ h}$ ؟

• **8.64** مدفع كتلته  $350\text{ kg}$  يتحرك بحرية على مستوى أفقي عمدي الاحتكاك بسرعة  $7.50\text{ m/s}$ . وأطلق قذيفة كتلتها  $15.0\text{ kg}$  بزوايا  $55.0^\circ$  أعلى المستوى الأفقي. وكانت السرعة المنجهة للذخيرة بالنسبة إلى المدفع بالمقدار الذي لا يتحرك عنده المدفع لحظة الإطلاق. ما مقدار السرعة المنجهة للذخيرة بالنسبة إلى المدفع؟

• **8.65** تبلغ الكتلة الابتدائية للصاروخ ساتورن 5، الذي استُخدم لإطلاق سفينة الفضاء *أبولو* أثناء رحلتها إلى القمر  $M_0 = 2.80 \times 10^6\text{ kg}$  وتبلغ الكتلة النهائية له  $M_1 = 8.00 \times 10^5\text{ kg}$  ويحرك وقوداً بمعدل ثابت لمدة  $160\text{ s}$ . وتبلغ سرعة العادم بالنسبة إلى الصاروخ حوالي  $v = 2700\text{ m/s}$ .

- (a) أوجد عجلة الصاروخ إلى أعلى، أثناء مغادرته منصة الإطلاق (بينما تكون كتلته هي الكتلة الابتدائية).
- (b) أوجد عجلة الصاروخ إلى أعلى بمجرد أن ينتهي حرق الوقود (عندما تكون كتلته هي الكتلة النهائية).



الضائبة الدولية)، فما مقدار السرعة المتجهة النهائية للحلقة بعد النحام سنية الغضاء بها، التي تصل سرعتها إلى  $0.0200 \text{ m/s}$ ؟

● 8.75 تم إمساك سلسلة كتلتها  $3.00 \text{ kg}$  وطولها  $5.00 \text{ m}$  من أحد طرفيها بحيث يكون طرفها السفلي ملائماً للأرضية (انظر الشكل). ثم أسقط الطرف العلوي للسلسلة، ما مقدار القوة التي تبذلها السلسلة على الأرضية عند وصول آخر حلقة فيها على الأرض؟

## تمارين إعطيات متعددة

- 8.76 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة  $21.45 \text{ km/s}$ ، وينتج الحرك الأيوني دفقا بمقدار  $1.187 \times 10^{-2} \text{ N}$ . ما معدل استهلاك وقود المحرك؟
- 8.77 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة  $23.75 \text{ km/s}$ ، ويبلغ معدل استهلاك وقود المحرك  $5.082 \times 10^{-7} \text{ kg/s}$ . فما مقدار الدفع الناتج؟
- 8.78 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون لينتج دفقا بمقدار  $1.229 \times 10^{-2} \text{ N}$ ، ويبلغ معدل استهلاك وقود المحرك  $4.718 \times 10^{-7} \text{ kg/s}$ . ما مقدار سرعة طرد أيونات الزينون من المحرك؟
- 8.79 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي كتلته  $2149 \text{ kg}$  (شاملة كتلة الوقود التي تبلغ  $23.37 \text{ kg}$ ) القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة  $28.33 \text{ km/s}$ . إذا كان الحرك الأيوني يعمل باستمرار أثناء توجيهه في الاتجاه نفسه حتى يستهلك كمية الوقود كلها، فما التغير الذي يطرأ على سرعة القمر الصناعي؟
- 8.80 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي كتلته  $2161 \text{ kg}$  (شاملة كتلة الوقود) القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة  $20.61 \text{ km/s}$ ، وكان الحرك الأيوني يعمل باستمرار أثناء توجيهه في الاتجاه نفسه حتى يستهلك كمية الوقود المتوفرة كلها، وبلغ التغير في سرعة القمر الصناعي  $236.4 \text{ m/s}$ . ما مقدار الوقود المتوفر للمحرك؟
- 8.81 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة  $22.91 \text{ km/s}$ ، وكان الحرك الأيوني يعمل باستمرار أثناء توجيهه في الاتجاه نفسه حتى يستهلك كمية الوقود المتوفرة كلها التي تبلغ  $25.95 \text{ kg}$ . وبلغ التغير في سرعة القمر الصناعي  $275.0 \text{ m/s}$ . ما مقدار كتلة القمر الصناعي والوقود قبل بدء تشغيل الحرك؟
- 8.82 يجلس صياد كتلته  $75.19 \text{ kg}$  في قارب صيد كتلته  $28.09 \text{ kg}$  ومعه صندوق أدوات كتلته  $13.63 \text{ kg}$ . وكان القارب والجمولة في وضع السكون بالقرب من الرصيف، ثم قذف الصياد صندوق الأدوات باتجاه الرصيف بسرعة  $2.911 \text{ m/s}$  بالنسبة إلى الرصيف. ما مقدار سرعة ارتداد الصياد والقارب؟
- 8.83 يجلس صياد كتلته  $77.49 \text{ kg}$  في قارب صيد كتلته  $28.31 \text{ kg}$  ومعه صندوق أدوات كتلته  $14.27 \text{ kg}$ . وكان القارب والجمولة في وضع السكون بالقرب من الرصيف، ثم قذف الصياد صندوق الأدوات باتجاه الرصيف فارتد هو والقارب بسرعة  $0.3516 \text{ m/s}$ . ما مقدار السرعة التي قذف بها الصياد صندوق الأدوات عند ملاحظته من الرصيف؟
- 8.84 يجلس صياد في قارب صيد كتلته  $28.51 \text{ kg}$  ومعه صندوق أدوات كتلته  $14.91 \text{ kg}$ . وكان القارب والجمولة في وضع السكون بالقرب من الرصيف، ثم قذف الصياد صندوق الأدوات باتجاه الرصيف، حيث اقترب بسرعة بلغت  $3.303 \text{ m/s}$  فارتد هو وقاربه بسرعة  $0.4547 \text{ m/s}$ . كم تبلغ كتلة الصياد؟
- 8.85 يتحرك بروتون كتلته  $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$  بسرعة  $1.823 \times 10^6 \text{ m/s}$  باتجاه جسيم ألفا كتلته  $6.645 \times 10^{-27} \text{ kg}$  في وضع السكون. ما مقدار سرعة مركز كتلة النظام المكون من البروتون وجسيم ألفا؟
- 8.86 يتحرك مركز الكتلة لبروتون كتلته  $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$  وجسيم ألفا كتلته  $6.645 \times 10^{-27} \text{ kg}$  بسرعة  $5.509 \times 10^5 \text{ m/s}$ . ما مقدار سرعة البروتون في منط (إسناد مخبري إذا كان جسيم ألفا في وضع السكون؟



# 9

## الحركة الدائرية



**الشكل 9.1** يُمَرضُ جهاز الطرد المركزي التابع لوكالة ناسا الذي يولد عجلة مقدارها 20 g رواد الفضاء والمعدات لقوى g مشابهة لتلك القوى التي توجد أثناء إطلاق الصاروخ.

**في** مركز أيميس للأبحاث في مطار موفيت بولاية كاليفورنيا. تشغّل ناسا جهاز طرد مركزي ضخماً موضحاً في الشكل 9.1. من خلال تحريك الأجسام في مسار دائري، يُنتج جهاز الطرد المركزي هذا قوى جاذبية اصطناعية أقوى عشرين مرة من القوى التي نشاهدها على الأرض. في هذه الوحدة، ندرس الحركة الدائرية ونرى كيف تشارك القوة في تكوين دورات مما جعلنا نفهم كيف يعمل جهاز الطرد المركزي التابع لناسا الذي يولد عجلة مقدارها 20g. تستند هذه المناقشة إلى مفاهيم القوة والسرعة المتجهة والعجلة الواردة في الـ 3 و 4. ستجمع الوحدة 10 هذه الأفكار مع بعض المفاهيم المأخوذة من الوحدات بداية من 5 إلى 8 مثل الطاقة وكمية الحركة. يتشابه الكثير مما سنتعلمه في وحدتي الحركة الدائرية والدوران مع المواد السابقة التي تتناول الحركة الخطية والقوة والطاقة. ونظرًا لأن معظم الأجسام لا تتحرك في خطوط مستقيمة تمامًا، سنطبق مفاهيم الحركة الدائرية مرات عديدة في الوحدات التالية.

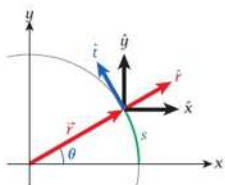
- 255 ما سنتعلمه
- 255 9.1 الإحداثيات القطبية
- 256 9.2 الإحداثيات الزاوية
- 256 والإزاحة الزاوية
- 257 مثال 9.1 تحديد موقع نقطة باستخدام الإحداثيات الديكارتية والقطبية
- 257 طول القوس
- 257 مثال 9.2 مسار على القرص المضغوط
- 258 9.3 السرعة الزاوية والتردد الزاوي
- 258 والزمن الدوري
- 259 السرعة الزاوية والسرعة الخطية
- 260 مثال 9.3 الدوران المداري للأرض والدوران الجوي لها
- 261 9.4 العجلة الزاوية والمركزية
- 262 مثال 9.4 جهاز الطرد المركزي فائق السرعة
- 263 مثال 9.5 العجلة المركزية الناتجة عن الدوران الجوي للأرض
- 263 مثال 9.6 مشغل الأقراص المضغوطة
- 264 9.5 القوة المركزية
- 265 البندول المخروطي
- 266 مسألة محلولة 9.1 تحليل عربة أفقانية
- 267 مسألة محلولة 9.2 لعبة الملاهي هل توجد قوة طاردة مركزية؟
- 269 9.6 الحركة الدائرية والخطية
- 270 العجلة الزاوية الثابتة
- 271 مثال 9.7 رمي المطرقة
- 272 مسألة محلولة 9.3 الحداقة
- 273 9.7 أمثلة أخرى على الحركة الدائرية
- 273 مثال 9.8 سباق فورمولا 1
- 275 مسألة محلولة 9.4 سباق ناسكار
- 276 ما تعلمناه / دليل المذاكرة للاختبار
- 277 إرشادات حل المسائل
- 278 أسئلة الاختبار من متعدد
- 279 أسئلة مفاهيمية
- 280 تمارين
- 283 تمارين بمعطيات متعددة

## ما سنتعلمه

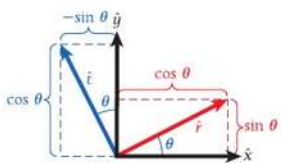
- يمكن وصف حركة الأجسام التي تتحرك في دائرة وليس في خط مستقيم باستخدام إحداثيات قائمة على نصف القطر والزاوية بدلاً من استخدام الإحداثيات الديكارتية.
- توجد علاقة بين الحركة الخطية والحركة الدائرية.
- يمكن وصف الحركة الدائرية بدلالة الإحداثيات الزاوية والتردد الزاوي والزمن الدوري.
- أي جسم يتحرك حركة دائرية له سرعة زاوية وعجلة زاوية.



**الشكل 9.2** الحركة الدائرية في المستوى الأفقي والرأسي.



**الشكل 9.3** النظام الإحداثي القطبي للحركة الدائرية.



**الشكل 9.4** العلاقة بين متجهات الوحدات القطرية والمماسية الموضحة في الشكل 9.2، ومتجهات الوحدات الديكارتية وجيب الزاوية وجيب تمام الزاوية.

## 9.1 الإحداثيات القطبية

في الوحدة 3، ناقشنا الحركة في بُعدين. وفي هذه الوحدة، نتناول حالة خاصة للحركة في مستوى ثنائي الأبعاد: حركة جسم على طول محيط دائرة. وعلى وجه التحديد، سندرس فقط الحركة الدائرية للأجسام التي يمكن اعتبارها جسيمات نقطية. في الوحدة 10 التي نتناول الدوران المحوري، سنستعرض في شرح هذه الحالة وسندرس أيضًا الأجسام غير النقطية.

تُعد الحركة الدائرية شائعة بصورة مذهلة. يمثل ركوب دوامة الخيل أو أي من ألعاب مدينة الملاهي الأخرى المتعددة حركة دائرية. ينطوي سباق سيارات إندي أيضًا على حركة دائرية، عندما تبدل السيارات بين الحركة على امتداد الأجزاء المستقيمة والأجزاء نصف الدائرية من المضمار. كما تعمل مشغلات الأقراص المضغوطة و DVD أيضًا في حركة دائرية على الرغم من أن هذه الحركة عادة ما تكون مختفية عن العين.

أثناء **الحركة الدائرية لجسم ما**، يتغير الإحداثيان  $x$  و  $y$  له باستمرار، لكن نظل المسافة من الجسم إلى مركز المسار الدائري نفسها. يمكننا الاستفادة من هذه الحقيقة عن طريق استخدام **الإحداثيات القطبية** لدراسة الحركة الدائرية. يوضح الشكل 9.3 متجه الموقع،  $\vec{r}$ ، لجسم ما في حركة دائرية. يتغير هذا المتجه كدالة زمنية، لكن يتحرك رأسه دائمًا على محيط دائرة معينة. يمكننا أن نحدد  $\vec{r}$  عن طريق إيجاد المركبتين  $x$  و  $y$  له. لكن يمكننا تحديد المتجه نفسه عن طريق إيجاد عددين آخرين: زاوية  $\vec{r}$  بالنسبة إلى المحور  $x$ ،  $\theta$ ، وطول  $r = |\vec{r}|$  (الشكل 9.3).

يحدد حساب المثلثات العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية  $x$  و  $y$  والإحداثيات القطبية  $r$  و  $\theta$ :

$$(9.1) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(9.2) \quad \theta = \tan^{-1}(y/x).$$

يتم التحويل العكسي من الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية عن طريق

$$(9.3) \quad x = r \cos \theta$$

$$(9.4) \quad y = r \sin \theta.$$

تمثل البزعة الرئيسية لاستخدام الإحداثيات القطبية لتحليل الحركة الدائرية في عدم تغير  $r$  على الإطلاق. حيث يظل كما هو طالما أن رأس المتجه  $\vec{r}$  يتحرك على امتداد المسار الدائري. ومن ثمَّ يمكننا اختزال وصف الحركة ثنائية الأبعاد على محيط دائرة ما إلى مسألة أحادية البعد تتضمن الزاوية  $\theta$ .

يوضح الشكل 9.3 أيضًا متجهات الوحدة في الاتجاهين القطري والمماسي،  $\hat{r}$  و  $\hat{\theta}$ ، بالترتيب. وتكون الزاوية بين  $\hat{r}$  و  $\hat{\theta}$  هي الزاوية  $\theta$  مرة أخرى. لذا يمكن كتابة المركبات الديكارتية لمتجه الوحدة القطري كما يلي (راجع الشكل 9.4):

$$(9.5) \quad \hat{r} = \frac{x}{r} \hat{x} + \frac{y}{r} \hat{y} = (\cos \theta) \hat{x} + (\sin \theta) \hat{y} \equiv (\cos \theta, \sin \theta).$$

يمكننا الحصول على المركبات الديكارتية لمتجه الوحدة المماسي بالطريقة نفسها (راجع الشكل 9.4 مرة أخرى ولاحظ أن متجهي الوحدة المماسي والقطري دائمًا ما يكونان متعامدين على بعضهما؛ لذا تكون الزاوية بين متجه الوحدة المماسي والمحور  $y$  هي نفسها بين متجه الوحدة القطري والمحور  $x$ ).

$$(9.6) \quad \hat{\theta} = \frac{-y}{r} \hat{x} + \frac{x}{r} \hat{y} = (-\sin \theta) \hat{x} + (\cos \theta) \hat{y} \equiv (-\sin \theta, \cos \theta)$$

(لاحظ أنه دائمًا يوضع على رمز متجه الوحدة المماسي رأس سهم،  $\hat{t}$ . ومن ثمَّ يمكن تمييزه بسهولة عن الزمن،  $t$ ). ويمكن التحقق بشكل مباشر من أن متجهي الوحدة القطري والمماسي متعامدان على بعضهما من خلال إيجاد ناتج الضرب القياسي لهما:

$$\hat{r} \cdot \hat{t} = (\cos \theta, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) = -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0.$$

يمكننا أيضًا التحقق من أن طول متجهي الوحدة هذين يساوي 1. على النحو المطلوب:

$$\hat{r} \cdot \hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\hat{t} \cdot \hat{t} = (-\sin \theta, \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

في النهاية، من المهم التأكيد على أنه بالنسبة إلى الحركة الدائرية، يوجد فرق كبير بين متجهات الوحدة للإحداثيات القطبية ومتجهات الوحدة للإحداثيات الديكارتية وهو، تظل متجهات الوحدة الديكارتية ثابتة مع الزمن، بينما يغير متجهي الوحدة القطري والمماسي اتجاههما أثناء عملية الحركة الدائرية. ويرجع ذلك إلى اعتماد هذين المتجهين على الزاوية  $\theta$  التي تستند إلى زمن الحركة الدائرية.

## 9.2 الإحداثيات الزاوية والإزاحة الزاوية

تمكَّنتنا الإحداثيات القطبية من وصف الحركة الدائرية وتحليلها، حيث يبقى بعد الجسم المتحرك عن نقطة الأصل ( $r$ ) ثابتة وتختلف الزاوية  $\theta$  كدالة زمنية،  $\theta(t)$ . كما أشرنا من قبل، تقاس الزاوية  $\theta$  بالنسبة إلى محور  $X$  الموجب. ويكون لأي نقطة على محور  $X$  الموجب زاوية  $\theta = 0$ . كما يوحى التعريف الوارد في المعادلة 9.2، ينتج عن أي حركة في عكس اتجاه عقارب الساعة بعيدًا عن محور  $X$  الموجب وباتجاه محور  $Y$  الموجب قيم موجبة للزاوية  $\theta$ . وبالعكس، ينتج عن أي حركة في اتجاه عقارب الساعة بعيدًا عن محور  $X$  الموجب وباتجاه محور  $Y$  السالب قيم سالبة للزاوية  $\theta$ .  
تمثل الدرجات ( $^\circ$ ) والراديان (rad) أكثر الوحدات استخدامًا لقياس الزوايا. تُحدّد هذه الوحدات أن الزاوية التي تقاس بدائرة واحدة كاملة تساوي  $360^\circ$  وهذا ما يُعادل  $2\pi$  rad. ومن ثمَّ، يكون تحويل الوحدة بين قياسي الزاوية هو

$$\theta \text{ (درجات)} = \frac{180}{\pi} \theta \text{ (راديان)} \Leftrightarrow \theta \text{ (راديان)} = \frac{\pi}{180} \theta \text{ (درجات)}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ.$$

كما هو الحال مع الموقع الخطي  $x$ ، يمكن أن يكون للزاوية  $\theta$  قيم موجبة وسالبة. لكن تُعد الزاوية  $\theta$  دورية، حيث تؤدي دورة كاملة حول الدائرة ( $2\pi$  rad أو  $360^\circ$ ) إلى إعادة إحداثي الزاوية  $\theta$  إلى النقطة نفسها في الفراغ؛ ومثلما تُعرّف الإزاحة الخطية،  $\Delta x$ ، بأنها الفرق بين الموقعين،  $x_2$  و  $x_1$ ، فإن الإزاحة الزاوية،  $\Delta \theta$ ، هي الفرق بين الزاويتين:

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1.$$

### مثال 9.1

#### تحديد موقع نقطة باستخدام الإحداثيات الديكارتية والقطبية

نقطة موقعها محدّد بالإحداثيات الديكارتية (4,3)، كما هو موضح في الشكل 9.5.

#### المسألة

كيف يمكننا تمثيل موقع هذه النقطة بالإحداثيات القطبية؟

#### الحل

باستخدام المعادلة 9.1، يمكننا حساب الإحداثي القطري:

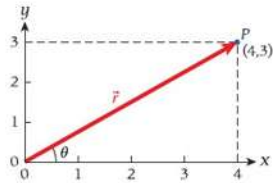
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

باستخدام المعادلة 9.2، يمكننا حساب الإحداثي الزاوي:

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(3/4) = 0.64 \text{ rad} = 37^\circ.$$

لذا يمكننا التعبير عن موقع النقطة  $P$  بالإحداثيات القطبية بالصيغة التالية  
( $r, \theta$ ) = (5, 0.64 rad) = (5, 37°)

لاحظ أنه يمكننا أن نحدد الموقع نفسه عن طريق جمع (أي مضاعفات صحيحة لـ)  $2\pi$  rad أو  $360^\circ$  على  $\theta$ :  
( $r, \theta$ ) = (5, 0.64 rad) = (5, 37°) = (5, 2\pi rad + 0.64 rad) = (5, 360° + 37°).



**الشكل 9.5** نقطة عند (4,3) في نظام الإحداثي الديكارتية.

## سؤال الاختبار الذاتي 9.1

استخدم الإحداثيات القطبية وحساب التفاضل والتكامل لإثبات أن محيط دائرة نصف قطرها  $R$  يساوي  $2\pi R$ .

## سؤال الاختبار الذاتي 9.2

استخدم الإحداثيات القطبية وحساب التفاضل والتكامل لإثبات أن مساحة دائرة نصف قطرها  $R$  يساوي  $\pi R^2$ .

## طول القوس

يوضح الشكل 9.3 أيضًا (باللون الأخضر) المسار على محيط الدائرة الذي يقطعه رأس المتجه  $\vec{r}$  أثناء الانتقال من الزاوية صفر إلى الزاوية  $\theta$ . يُطلق على هذا المسار طول القوس  $s$ . ويرتبط بنصف القطر والزاوية بالعلاقة

$$(9.7) \quad s = r\theta.$$

حل هذه العلاقة عددياً، بتعيين قياس الزاوية بوحدة الراديان. وتمثل حقيقة أن محيط دائرة يساوي  $2\pi r$  حالة خاصة للمعادلة 9.7 حيث  $\theta = 2\pi \text{ rad}$ . وفقاً لدورة واحدة كاملة حول الدائرة، ولطول القوس وحدة نصف القطر نفسها.

بالنسبة إلى الزوايا الصغيرة التي قياسها درجة أو أقل، يكون جيب الزاوية (مقرباً إلى أربعة أرقام معنوية) مساوياً للزاوية المقاسة بالراديان. وبسبب هذه الحقيقة فضلاً عن الحاجة إلى استخدام المعادلة 9.7 لحل المسائل، يمثل الراديان الوحدة المفضلة لقياس الإحداثيات الزاوية. لكن استخدام وحدة الدرجات شائع، ويستخدم هذا الكتاب كلتا الوحدتين.

## مسار على القرص المضغوط

## مثال 9.2

في الشكل 9.5 يمثل مسار على القرص المضغوط. وهو مسار حلزوني يبدأ عند نصف قطر داخلي  $r_1 = 25 \text{ mm}$  وينتهي بنصف قطر خارجي  $r_2 = 58 \text{ mm}$ . والتباعد بين الحلقات المتتالية للمسار ثابتة.  $\Delta r = 1.6 \mu\text{m}$ .

### المسألة

كم يبلغ الطول الإجمالي لهذا المسار؟

### الحل 1. بدون استخدام حساب التفاضل والتكامل

يكون المسار دائرياً بشكل كامل تقريباً عند نصف قطر  $r$  بين  $r_1$  و  $r_2$  ونظراً لأن تباعد المسار هو  $\Delta r = 1.6 \mu\text{m}$  والمسافة بين الأجزاء الداخلية والخارجية  $33 \text{ mm} = (58 \text{ mm}) - (25 \text{ mm})$ . نجد أن المسار يدور إلى ما يصل مجموعه

$$n = \frac{r_2 - r_1}{\Delta r} = \frac{3.3 \times 10^{-2} \text{ m}}{1.6 \times 10^{-6} \text{ m}} = 20,625 \text{ times.}$$

(لاحظ أننا لم نقرب هذه النتيجة المتوسطة!) تزداد أنصاف أقطار الـ 20,625 دائرة هذه بشكل خطي من  $25 \text{ mm}$  إلى  $58 \text{ mm}$ . ومن ثمَّ تزداد محيطات هذه الدوائر  $(2\pi r)$  أيضاً بشكل خطي. إذاً متوسط نصف قطر هذه الدوائر يساوي  $\bar{r} = \frac{1}{2}(r_2 + r_1) = 41.5 \text{ mm}$  ومتوسط المحيط يساوي

$$\bar{c} = 2\pi\bar{r} = (2\pi)(41.5 \text{ mm}) = 0.2608 \text{ m.}$$

بتعيين علينا الآن أن نضرب متوسط المحيط هذا في عدد الدوائر للحصول على النتيجة:

$$L = n\bar{c} = (20,625)(0.2608 \text{ m}) = 5.4 \text{ km}$$

مُقرّبة إلى رقمين معنويين. وبهذا يكون طول مسار ما على قرص مضغوط أكبر من  $13.3 \text{ mi}$ .

### الحل 2. باستخدام حساب التفاضل والتكامل

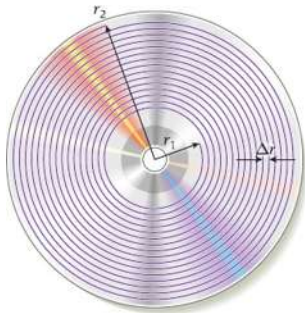
بما أن التباعد بين حلقات المسار المتتالية ثابت،  $\Delta r = 1.6 \mu\text{m}$ . إذاً كثافة المسار (أي عدد دورات المسار في الاتجاه القطري لكل وحدة طول عند تحركه للخارج من النقطة الداخلية) تساوي  $1/\Delta r = 625,000 \text{ m}^{-1}$ . يكون المسار دائرياً بشكل كامل تقريباً عند نصف قطر  $r$  بين  $r_1$  و  $r_2$ . يبلغ طول هذه القطعة من المسار الحلزوني  $2\pi r$ . لكن تزداد أطوال الحلقات بصورة ثابتة عند الحركة إلى الخارج. نحصل على إجمالي طول المسار عن طريق حساب تكامل طول كل حلقة من  $r_1$  إلى  $r_2$ . مضروباً في عدد الحلقات لكل وحدة طول:

$$L = \frac{1}{\Delta r} \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr = \frac{1}{\Delta r} \pi r^2 \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\Delta r} \pi (r_2^2 - r_1^2) \\ = (625,000 \text{ m}^{-1}) \pi \left( (0.058 \text{ m})^2 - (0.025 \text{ m})^2 \right) = 5.4 \text{ km.}$$

ويكون هذا الحل الذي يستند إلى حساب التفاضل والتكامل مُرضياً حيث يتوافق مع الحل الذي حصلنا عليه دون استخدام حساب التفاضل والتكامل. قد ترغب في التفكير في الشروط التي يتعين تحقيقها لتجنب استخدام حساب التفاضل والتكامل في هذه الحالة. (بالنسبة إلى قرص DVD، تكون كثافة المسار أعلى بمعامل 2.2، مما يجعل طول المسار  $12 \text{ km}$  تقريباً).

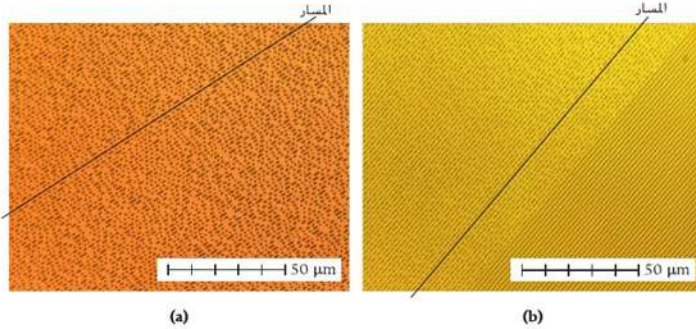
يوضح الشكل 9.7 جزءاً صغيراً من مسارات قرصين مضغوطين بتكبير 500 مرة. يوضح الشكل 9.7a قرصاً مضغوطاً مجهزاً في المصنع به تنوعات ألومنيوم فردية واضحة. يوجد

- يتبع



الشكل 9.6 المسار على قرص مضغوط.

في الشكل 9.7b قرص مضغوط قابل للقراءة والكتابة يحترق عندما يحفز الليزر تغير الطور (ستتناول الوحدة 34 الخاصة بالبصريات الموجية هذه العملية) في المسار المستمر. يوضح الجزء السفلي الأيمن من هذه الصورة جزءاً من القرص المضغوط الذي لم يكتب عليه شيء حتى الآن.



**الشكل 9.7** صور مجهرية (تكبير  $\times 500$ ) لـ (a) قرص مضغوط مجهز في المصنع و(b) قرص مضغوط قابل للقراءة والكتابة. تشير الخطوط المتصلة إلى اتجاه المسارات.

### 9.3 السرعة الزاوية والتردد الزاوي والزمن الدوري

عرفنا أن السرعة المتجهة لجسم ما هي تغير الإحداثيات الخطية للجسم مع الزمن. وبالمثل، فإن **السرعة الزاوية لجسم** هي تغير الإحداثي الزاوي للجسم مع الزمن. يحدد متوسط مقدار السرعة الزاوية من العلاقة

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

يستخدم هذا التعريف الرمز  $\theta_2 \equiv \theta(t_2)$  و  $\theta_1 \equiv \theta(t_1)$  ويشير الخط الأفقي فوق رمز السرعة الزاوية  $\omega$  إلى متوسط الزمن مرة أخرى. بحساب نهاية هذه العبارة الرياضية عند اقتراب الفترة الزمنية من الصفر، نصل إلى القيمة اللحظية لمقدار السرعة الزاوية:

$$(9.8) \quad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

إن الوحدة الأكثر شيوعاً لقياس السرعة الزاوية هي راديان في الثانية (rad/s). بينما لا تستخدم وحدة الدرجة في الثانية بشكل عام.

السرعة الزاوية كمية متجهة، وتكون في الاتجاه نفسه لمحور يمر بمركز المسار الدائري وعمودية على مستوى الدائرة. (يُطلق على هذا المحور محور الدوران كما ستناقش ذلك مزيد من التفصيل في الوحدة 10). يسمح هذا التعريف بوجود احتمالين للاتجاه الذي يمكن أن يشير إليه المتجه  $\vec{\omega}$ : أعلى أم أسفل. أو مواز لمحور الدوران أو مواز له ومضاد له في الاتجاه. تساعدنا قاعدة اليد اليمنى في تحديد الاتجاه الصحيح: عندما تشير الأصابع إلى اتجاه الدوران على طول محيط الدائرة، يشير الإبهام إلى اتجاه  $\vec{\omega}$ . كما هو موضح في الشكل 9.7.

تقيس السرعة الزاوية مدى سرعة تغير الزاوية  $\theta$  مع الزمن. وهناك كمية أخرى، تُعرف باسم **التردد، f**، تُحدد مدى سرعة تغير هذه الزاوية مع الزمن. على سبيل المثال، يوضح عدد rpm في عداد السرعة في سيارتك عدد دورات المحرك في الدقيقة ومن ثم يُحدد تردد لفة المحرك. يوضح الشكل 9.8 عداد سرعة وحدته  $1000 \text{ rev/min}$ . أي يصل المحرك إلى الخط الأحمر عند الدوران 6000 لفة في الدقيقة، إذاً، يقيس التردد، f، عدد الدورات في وحدة زمنية وليس الراديان في وحدة زمنية كما تفعل السرعة الزاوية. يرتبط التردد بمقدار السرعة الزاوية،  $\omega$ ، من خلال العلاقة

$$(9.9) \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow \omega = 2\pi f.$$

هذه العلاقة منطقية حيث تتطلب الدورة الواحدة الكاملة حول دائرة ما تغير الزاوية بمقدار  $2\pi$  راديان (انتبه إلى أن كلاً من التردد والسرعة الزاوية لهما وحدة معكوس الزاوي نفسها ويمكن الخلط بينهما بسهولة).



**الشكل 9.8** قاعدة اليد اليمنى لتحديد اتجاه متجه السرعة الزاوية.



**الشكل 9.9** يقيس عداد السرعة في سيارة ما تردد دورات المحرك (عدد الدورات في الدقيقة).

نظراً لشيوع استخدام وحدة معكوس الثانية، تم إطلاق اسم معين عليها وهو **الهرتز** (Hz). نسبة إلى عالم الفيزياء الألماني هاينريش رودولف هرتز (1857-1894)،  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ . يعرّف **الزمن الدوري للدوران**،  $T$ ، بأنه معكوس التردد:

$$(9.10) \quad T = \frac{1}{f}.$$

يُقاس الزمن الدوري الفترة الزمنية بين حالتين متتاليتين تكون للزاوية فيهما القيمة نفسها؛ أي الوقت المستغرق للمرور مرة واحدة حول الدائرة. ووحدة قياس الزمن الدوري هي وحدة الزمن نفسها وهي الثانية (s)، ومن خلال العلاقات بين الزمن الدوري والتردد وبين التردد والسرعة الزاوية، نحصل أيضاً على:

$$(9.11) \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

### السرعة الزاوية والسرعة الخطية

إذا أوجدنا مشتقة الزمن لمتجه الموقع، فسنحصل على متجه السرعة الخطية. لإيجاد السرعة الزاوية، من الأنسب كتابة متجه الموقع القطري بالإحداثيات الديكارتية وإيجاد مشتقات الزمن لكل مركبة:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = (r \cos \theta, r \sin \theta) = r(\cos \theta, \sin \theta) = r\hat{r} \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \left( \frac{d}{dt}(r \cos \theta), \frac{d}{dt}(r \sin \theta) \right).$$

بالنسبة إلى الحركة على طول دائرة ما، يمكننا استخدام حقيقة أن المسافة  $r$  إلى نقطة الأصل لا تتغير مع الزمن لكنها تظل ثابتة. ينتج عن هذا

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left( \frac{d}{dt}(r \cos \theta), \frac{d}{dt}(r \sin \theta) \right) = \left( r \frac{d}{dt}(\cos \theta), r \frac{d}{dt}(\sin \theta) \right) \\ &= \left( -r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \\ &= (-\sin \theta, \cos \theta) r \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

استخدمنا هنا قاعدة السلسلة في التفاضل بدءاً من الخطوة التالية إلى الأخيرة ثم حللنا باستخراج العامل المشترك  $r d\theta/dt$ . نعرف بالفعل أن مشتقة الزمن للزاوية تساوي السرعة الزاوية (انظر المعادلة 9.8). بالإضافة إلى ذلك، لاحظنا أن المتجه  $(-\sin \theta, \cos \theta)$  يمثل متجه الوحدة المماسي (انظر المعادلة 9.6). ومن ثمّ، نحصل على العلاقة التالية بين السرعة الزاوية والخطية للحركة الدائرية:

$$(9.12) \quad \vec{v} = r\omega\hat{t}.$$

(يمثل  $\hat{t}$  رمز متجه الوحدة المماسي وليس له علاقة بالزمن،  $t$ )

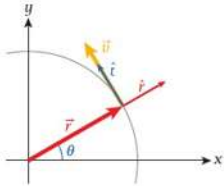
بما أن متجه السرعة يشير إلى اتجاه المماس للمسار في أي زمن محدد، يكون هذا المتجه مماساً لمحيط الدائرة دائماً، ويشير إلى اتجاه الحركة. كما هو موضح في الشكل 9.10. لذا يكون متجه السرعة عمودياً دائماً على متجه الموقع الذي يشير إلى الاتجاه القطري. إذا كان المتجهان متعامدين على بعضهما، فسيكون ناتج ضربهما القياسي صفراً. لذا فإنه بالنسبة إلى الحركة الدائرية، يكون دائماً

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = (r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot (-r\omega \sin \theta, r\omega \cos \theta) = 0.$$

إذا أوجدنا القيم المطلقة لطرفي المعادلة 9.12 الأيسر والأيمن، فسنحصل على علاقة مهمة بين مقادير السرعات الخطية والزاوية للحركة الدائرية:

$$(9.13) \quad v = r\omega.$$

تذكر أن هذه العلاقة تنطبق فقط على مقادير السرعات الخطية والزاوية. لكن تشير متجهاتها إلى اتجاهات مختلفة، وبالنسبة إلى الحركة الدائرية المنتظمة، تكون المتجهات متعامدة على بعضها، وتشير  $\vec{v}$  إلى اتجاه محور الدوران ويكون  $\vec{r}$  مماساً للدائرة.



**الشكل 9.10** السرعة الخطية والمتجهات الإحداثية.

### مراجعة المفاهيم 9.1

إذا كان نصف قطر عجلات الدراجة  $R$ ، وتسير الدراجة بسرعة  $v$ ، فأني من التعبيرات التالية نصف السرعة الزاوية للإطار الأمامي؟

$$\begin{aligned} \omega &= Rv \quad (d) & \omega &= \frac{1}{2}Rv^2 \quad (a) \\ \omega &= v/R \quad (e) & \omega &= \frac{1}{2}vR^2 \quad (b) \\ & & \omega &= R/v \quad (c) \end{aligned}$$

### مثال 9.3 الدوران المداري للأرض والدوران الجوري لها

#### المسألة

تدور الأرض حول الشمس وكذلك تدور حول محورها الذي يمتد من القطب إلى القطب. أوجد السرعات الزاوية لهذه الحركات وكذلك تردداتها وسرعاتها الخطية.

#### الحل

تتحرك أي نقطة على سطح الأرض حركة دائرية حول محور الدوران (من القطب إلى القطب) بزمن دوران مدته يوم واحد، ويتم التعبير عن هذه الفترة بالثواني بالعلاقة

$$T_{\text{Earth}} = 1 \text{ day} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ day}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ s.}$$

تتحرك الأرض حول الشمس في مسار إهليلجي، وهو قريب جدًا من الشكل الدائري. لذا ستعامل مدار الأرض كالحركة الدائرية. تساوي الفترة المدارية لحركة الأرض حول الشمس عامًا واحدًا. عندما نغير عن هذه الفترة بالثواني، نحصل على

$$T_{\text{Sun}} = 1 \text{ year} \cdot \frac{365 \text{ days}}{1 \text{ year}} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ day}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 3.15 \times 10^7 \text{ s.}$$

لكننا الحركتين الدائرتين سرعة زاوية ثابتة. لذا يمكننا أن نستخدم  $f/1 = \omega$  و  $2\pi f = \omega$  للحصول على الترددات والسرعات الزاوية:

$$f_{\text{Earth}} = \frac{1}{T_{\text{Earth}}} = 1.16 \times 10^{-5} \text{ Hz; } \omega_{\text{Earth}} = 2\pi f_{\text{Earth}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$f_{\text{Sun}} = \frac{1}{T_{\text{Sun}}} = 3.17 \times 10^{-8} \text{ Hz; } \omega_{\text{Sun}} = 2\pi f_{\text{Sun}} = 1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/s.}$$

لاحظ أن الفترة التي استخدمناها وهي 24 ساعة كطول ليوم واحد تعادل طول الفترة التي تستغرقها الشمس للوصول إلى الموقع نفسه في السماء. إذا أردنا تحديد الترددات والسرعات الزاوية بمزيد من الدقة، فستعين علينا استخدام اليوم الطلعي؛ بما أن الأرض تتحرك حول الشمس كل يوم، فإن الزمن الذي تستغرقه بالفعل لإكمال دورة واحدة وإعادة النجوم إلى الموقع نفسه في سماء الليل هو اليوم الفلكي، ويتكون من 23 h و 56 min وأكثر قليلًا من 4 s أو 86,400 s  $(1 - 1/366.242) \cdot 86,400 \text{ s} = 86,164.09 \text{ s}$ . لقد استخدمنا حقيقة أن الأرض تستغرق جزءًا من اليوم إضافة إلى 365 يومًا لإكمال دورة حول الشمس، وهذا هو سبب أهمية السنوات الكبيسة).

لنوجد الآن السرعة الخطية التي تدور بها الأرض حول الشمس. ولأننا نفترض أن الحركة دائرية، يتم تحديد العلاقة بين السرعة المدارية والسرعة الزاوية من خلال  $v = r\omega$ . للحصول على إجابة، نحتاج إلى معرفة نصف قطر المدار. نصف قطر هذا المدار هو المسافة بين الأرض والشمس.  $r_{\text{Earth-Sun}} = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$ . لذا تكون السرعة المدارية الخطية، أي السرعة التي تتحرك بها الأرض حول الشمس، هي

$$v = r\omega = (1.49 \times 10^{11} \text{ m})(1.99 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}) = 2.97 \times 10^4 \text{ m/s.}$$

أكثر من 106,216 kph!

تريد الآن إيجاد سرعة نقطة ما على سطح الأرض وهي تدور بالنسبة إلى مركز الأرض. نلاحظ أن النقاط التي توجد عند خطوط عرض مختلفة تتفاوت في مسافاتها عن محور الدوران، كما هو موضح في الشكل 9.11. عند خط الاستواء، يكون نصف قطر الدوران  $r = R_{\text{Earth}} = 6380 \text{ km}$  وبعيدًا عن خط الاستواء، يكون نصف قطر الدوران كدالة لزاوية خط العرض هو  $r = R_{\text{Earth}} \cos \theta$ . انظر الشكل 9.11 (يستخدم الحرف  $\theta$ ، للتعبير عن زوايا خط العرض هنا لمنع الخلط بينها وبين الحرف  $\theta$  الذي يستخدم للتعبير عن الحركة في دائرة). بوجه عام، نحصل على الصيغة التالية لسرعة الدوران:

$$\begin{aligned} v &= \omega r = \omega R_{\text{Earth}} \cos \theta \\ &= (7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})(6.38 \times 10^6 \text{ m})(\cos \theta) \\ &= (464 \text{ m/s})(\cos \theta). \end{aligned}$$

عند الأقطاب، حيث  $\theta = 90^\circ$ ، تكون سرعة الدوران صفرًا، وعند خط الاستواء، حيث  $\theta = 0^\circ$ ، تكون السرعة  $464 \text{ m/s}$ . في سياتل، حيث  $\theta = 47.5^\circ$ ، تتحرك النقطة بسرعة  $v = 313 \text{ m/s}$  وفي ميامي، حيث  $\theta = 25.7^\circ$ ، تكون سرعتها  $v = 418 \text{ m/s}$ .



**الشكل 9.11** يشير الخط الرأسى إلى محور دوران الأرض. تتحرك النقاط الموجودة على خطوط العرض المختلفة على سطح الأرض بسرعات متفاوتة.

## 9.4 العجلة الزاوية والمركزية

**العجلة الزاوية لجسم** هي معدل التغير في سرعته الزاوية، ويرمز إليها بالحرف اليوناني  $\alpha$ . يتشابه تعريف مقدار العجلة الزاوية مع تعريف العجلة الخطية. ويحدد متوسطها الزمني من العلاقة

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

يتم الحصول على المقدار اللحظي للعجلة الزاوية بحساب النهاية عند اقتراب الفترة الزمنية من الصفر:

$$(9.14) \quad \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

كما أوجدنا العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية، يمكننا أيضًا إيجاد العلاقة بين العجلة المماسية والعجلة الزاوية. نبدأ بتعريف متجه العجلة الخطية بأنه مشتقة الزمن لمتجه السرعة الخطية. ثم نعوض بتعبير السرعة الخطية في الحركة الدائرية من المعادلة 9.12:

$$(9.15) \quad \vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(v\hat{t}) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{t} + v\left(\frac{d\hat{t}}{dt}\right).$$

في الخطوة الأخيرة هنا. استخدمنا قاعدة نايج الضرب في التفاضل. ومن ثم يكون للعجلة في الحركة الدائرية مكونان. ينتج الجزء الأول من التغير في مقدار السرعة المتجهة، وهذه هي **العجلة المماسية**. ويرجع الجزء الثاني إلى حقيقة أن متجه السرعة دائمًا يشير إلى الاتجاه المماسي ومن ثم يتعين عليه أن يغير اتجاهه باستمرار مع تحرك رأس متجه الموقع القطري حول الدائرة وهذه هي **العجلة القطرية**. لنتلق نظرة على كل مكون على حدة. أولًا يمكننا حساب مشتقة السرعة الخطية بالنسبة للزمن،  $v$ . باستخدام العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية في المعادلة 9.13. واستخدام قاعدة نايج الضرب مرة أخرى:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\omega + r\frac{d\omega}{dt}.$$

نظرًا لأن  $r$  ثابت للحركة الدائرية،  $dr/dt = 0$ . يكون الحد الأول في الجمع في الطرف الأيمن يساوي صفرًا. ومن خلال المعادلة 9.14.  $d\omega/dt = \alpha$ . لذا سيكون الحد الثاني في الجمع يساوي  $r\alpha$ . ومن ثم يرتبط التغير في السرعة بالعجلة الزاوية من خلال العلاقة

$$(9.16) \quad \frac{dv}{dt} = r\alpha.$$

لكن متجه العجلة في المعادلة 9.15 له مركبة ثانية تتناسب طرديًا مع مشتقة الزمن لمتجه الوحدة المماسي. وفيما يخص هذه الكمية، نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{t} &= \frac{d}{dt} (-\sin\theta, \cos\theta) = \left(\frac{d}{dt}(-\sin\theta), \frac{d}{dt}(\cos\theta)\right) \\ &= \left(-\cos\theta \frac{d\theta}{dt}, -\sin\theta \frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{d\theta}{dt}(\cos\theta, \sin\theta) \\ &= -\omega\hat{r}. \end{aligned}$$

ومن ثم نجد أن مشتقة الزمن لمتجه الوحدة المماسي يعاكس اتجاه متجه الوحدة القطري. ومن خلال هذه النتيجة، يمكننا أخيرًا أن نكتب متجه العجلة الخطية للمعادلة 9.15 بالصورة:

$$(9.17) \quad \vec{a}(t) = r\alpha\hat{t} - v\omega\hat{r}.$$



بالنسبة إلى الحركة الدائرية، نلاحظ مرة أخرى أن متجه العجلة له مركبتان فيزيائيتان (الشكل 9.11): ننتج المركبة الأولى من التغيير في السرعة وتكون في الاتجاه المماسي وتنتج المركبة الثانية من التغيير المستمر في اتجاه متجه السرعة وتكون في الاتجاه القطري السالب نحو مركز الدائرة. تكون المركبة الثانية موجودة حتى في حالة استمرار الحركة الدائرية بسرعة ثابتة، إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة، فستكون العجلة الزاوية المماسية صفراً. لكن يستمر تغير اتجاه متجه السرعة مع تحرك الجسم في مساره الدائري. يُطلق على العجلة التي تغير اتجاه متجه السرعة دون تغيير مقداره اسم **العجلة المركزية** (كلمة مركزة تعني أنها "تكون في اتجاه المركز") وتكون في الاتجاه القطري الداخلي. إذاً، يمكننا كتابة المعادلة 9.17 لعجلة جسم يتحرك بحركة دائرية على أنها مجموع العجلة المماسية والعجلة المركزية:

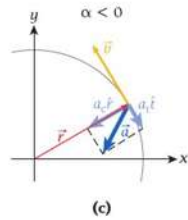
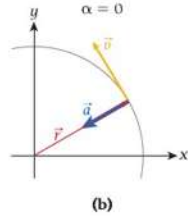
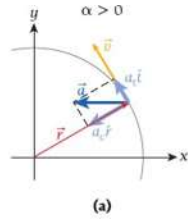
$$(9.18) \quad \vec{a} = a_t \hat{t} - a_c \hat{r}.$$

مقدار العجلة المركزية هو

$$(9.19) \quad a_c = v\omega = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

يمكن ببساطة التعويض عن التعبير الأول للعجلة المركزية في المعادلة 9.19 من المعادلة 9.17 حيث يكون معامل متجه الوحدة في الاتجاه القطري السالب. يتم الحصول بعد ذلك على التعبيرين الثاني والثالث للعجلة المركزية من العلاقة بين السرعات الخطية والزاوية ونصف القطر (المعادلة 9.13). فيما يخص مقدار العجلة في الحركة الدائرية، من المعادلتين 9.17 و 9.19، يصبح لدينا

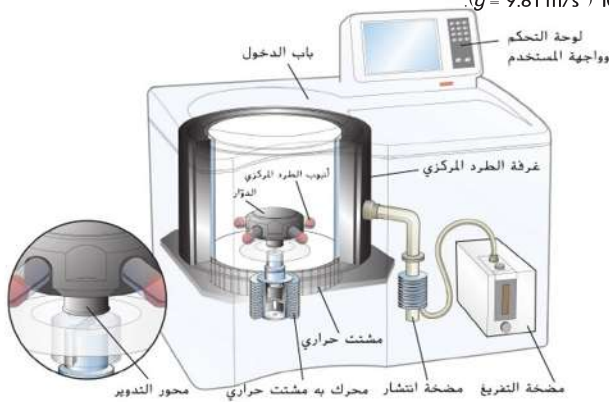
$$(9.20) \quad a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}.$$



**الشكل 9.12** العلاقات بين العجلة الخطية والعجلة المركزية والعجلة الزاوية مع السرعة المتزايدة (a) والسرعة الثابتة (b) والسرعة المتناقصة. (c)

### مثال 9.4 جهاز الطرد المركزي فائق السرعة

يعد جهاز الطرد المركزي فائق السرعة من أهم المعدات في مختبرات الطب الأحيائي (الشكل 9.13). تستخدم هذه المَعْدَة لفصل المواد (مثل المواد الغروانية أو البروتينات) التي تتكون من جسيمات مختلفة الكتل من خلال عملية الترسيب (تفوق الجسيمات الأكثر ضخامة إلى القاع). بدلاً من الاعتماد على عجلة الجاذبية للقيام بالترسيب، يستخدم جهاز الطرد المركزي فائق السرعة العجلة المركزية الناتجة عن الدوران السريع لتسريع العملية. يمكن أن تصل قيم العجلة المركزية في بعض أجهزة الطرد المركزي فائقة السرعة إلى  $10^6 g$  ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).



**الشكل 9.13** مخطط مجزأ لجهاز الطرد المركزي فائق السرعة.

### المسألة

إذا اردت توليد عجلة مركبة بمقدار 840,000 مثل عجلة الجاذبية الارضية في عينة تدور على بُعد 23.5 cm من محور دوران جهاز الطرد المركزي فائق السرعة. فما التردد الذي يتعين عليك إدخاله إلى عناصر التحكم؟ ما السرعة الخطية التي تتحرك بها العينة بعد ذلك؟

### الحل

تُعدّ العجلة المركزية من العلاقة  $a_c = \omega^2 r$  وترتبط السرعة الزاوية بالتردد من خلال المعادلة 9.11:  $\omega = 2\pi f$ . لذا تكون العلاقة بين التردد والعجلة المركزية هي  $a_c = (2\pi f)^2 r$  أو

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_c}{r}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(840,000)(9.81 \text{ m/s}^2)}{0.235 \text{ m}}} = 942 \text{ s}^{-1} = 56,500 \text{ rpm.}$$

فيما يخص السرعة الخطية للعينة داخل جهاز الطرد المركزي. نجد أن

$$v = r\omega = 2\pi r f = 2\pi(0.235 \text{ m})(942 \text{ s}^{-1}) = 1.39 \text{ km/s.}$$

تُستخدم أنواع أخرى من أجهزة الطرد المركزي يُطلق عليها أجهزة الطرد المركزي الغازية في عملية تخصيب اليورانيوم. في هذه العملية. يتم فصل النظيرين  $^{235}\text{U}$  و  $^{238}\text{U}$  المختلفين في الكتلة بما يزيد قليلاً عن 1%. يحتوي اليورانيوم الطبيعي على ما يزيد عن 99% من النظير  $^{238}\text{U}$  غير الضار. لكن في حال تخصيب اليورانيوم ليحتوي على ما يزيد عن 90% من النظير  $^{235}\text{U}$ . يمكن استخدامه للأسلحة النووية. يجب أن تدور أجهزة الطرد المركزي الغازية المستخدمة في عملية التخصيب بمعدل 100,000 rpm تقريباً. الأمر الذي يتسبب في ضغط ضخم على الآليات هذه الأجهزة وموادها ويجعل من الصعب تصميمها وتصنيعها. لمنع انتشار الأسلحة النووية. يحاط تصميم أجهزة الطرد المركزي بكتمان شديد.

### العجلة المركزية الناتجة عن الدوران الجوري للأرض

### مثال 9.5

نظراً لدوران الأرض. تتحرك النقاط الموجودة على سطحها بسرعة زاوية ومن المثير حساب العجلة المركزية المقابلة. يمكن لهذه العجلة أن تغير قليلاً القيمة المعروفة للعجلة الناتجة عن الجاذبية على سطح الأرض.

يمكننا التعويض ببيانات الأرض في المعادلة 9.19 لإيجاد مقدار العجلة المركزية:

$$\begin{aligned} a_c &= \omega^2 r = \omega^2 R_{\text{Earth}} \cos \vartheta \\ &= (7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 (6.38 \times 10^6 \text{ m})(\cos \vartheta) \\ &= (0.034 \text{ m/s}^2)(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

لقد استخدمنا هنا الرمز نفسه كما في المثال 9.3. حيث تشير  $\vartheta$  إلى زاوية خط العرض بالنسبة إلى خط الاستواء. توضح النتيجة التي حصلنا عليها أن العجلة المركزية الناتجة عن الدوران الجوري للأرض تغير عجلة الجاذبية الفعلية الملاحظة على سطح الأرض بعامل يتراوح بين 0.34 بالمائة (عند خط الاستواء) وصفر (عند الأقطاب). باستخدام سياتل وميامي كامثلة. نحصل على عجلة مركزية مقدارها  $0.02 \text{ m/s}^2$  لسياتل وعجلة مركزية مقدارها  $0.03 \text{ m/s}^2$  لميامي. تُعد هذه القيم صغيرة نسبياً مقارنة بالقيمة المقدمة لعجلة الجاذبية.  $9.81 \text{ m/s}^2$ . لكن لا يمكن إهمالها دائماً.

### سؤال الاختبار الذاتي 9.3

أقصى قيمة للعجلة المركزية الناتجة عن الدوران الجوري للأرض هي  $300g$  مركزية على سطح الأرض. لتفترض أنك تقريباً. هل يمكنك تحديد قيمة العجلة المركزية الناتجة عن دوران الأرض حول الشمس؟

### مراجعة المفاهيم 9.2

يولد دوران الأرض حول مركزها عجلة مركزية على سطح الأرض. لتفترض أنك كتبت واقفاً على خط الاستواء وتوقفت الأرض عن الدوران الجوري. عند توقف الأرض. فإنيك

- ستشعر بخفة وزنك قليلاً عن ذي قبل.
- ستشعر بثقل وزنك قليلاً عن ذي قبل.
- سترتفع عن سطح الأرض.
- لن تستطيع معرفة ما إذا كانت الأرض لا تزال تدور أم لا.

### مشغل الأقراص المضغوطة

### مثال 9.6

### المسألة

في مثال 9.2 وجدنا أن طول أحد مسارات الأقراص المضغوطة 5.4 km. إذا كان القرص المضغوط يمكنه تخزين 74 min من المقاطع الموسيقية. فما السرعة الزاوية والعجلة المماسية للقرص عندما يدور داخل أحد مشغلات الأقراص المضغوطة. مع افتراض أن السرعة الخطية ثابتة؟

### الحل

بما أن طول المسار 5.4 km ويتعين عليه أن يمر بشعاع الليزر الذي يعرّفه في فترة زمنية قدرها  $\Delta t = 74 \text{ min} = 4440 \text{ s}$ . تكون سرعة مرور المسار بالفناري  $v = (5.4 \text{ km}) / (4440 \text{ s}) = 1.216 \text{ m/s}$ . من مثال 9.2. علمنا أن المسار حلزوني وبه 20,625 حلقة تبدأ من

- يتبع

نصف قطر داخلي  $r_1 = 25 \text{ mm}$  وتصل إلى نصف قطر خارجي  $r_2 = 58 \text{ mm}$ . عند كل قيمة من قيم نصف القطر  $r$ ، يمكننا أن نشبه المسار الحلزوني بدائرة، كما فعلنا في مثال 9.2. ومن ثمّ يمكننا استخدام العلاقة بين السرعات الخطية والزاوية التي يتم التعبير عنها في المعادلة 9.13 لإيجاد السرعة الزاوية كدالة لنصف القطر:

$$v = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}.$$

بالتعويض بقيم  $v$  و  $r$ ، نحصل على

$$\omega(r_1) = \frac{1.216 \text{ m/s}}{0.025 \text{ m}} = 48.64 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega(r_2) = \frac{1.216 \text{ m/s}}{0.058 \text{ m}} = 20.97 \text{ s}^{-1}.$$

وهذا يعني أن مشغل الأقراص المضغوطة ينبغي أن يبطئ معدل دوران القرص أثناء تشغيله. ويكون متوسط العجلة الزاوية أثناء هذه العملية هو

$$\alpha = \frac{\omega(r_2) - \omega(r_1)}{\Delta t} = \frac{20.97 \text{ s}^{-1} - 48.64 \text{ s}^{-1}}{4440 \text{ s}} = -6.2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-2}.$$

## سؤال الاختبار الذاتي 9.4

قارن بين العجلة المركزية لقرص مضغوط يدور في مشغل وعجلة الماسية.

## 9.5 القوة المركزية

القوة المركزية،  $\vec{F}_c$ ، ليست قوة أساسية في الطبيعة لكنها ببساطة قوة محصلة متجهة نحو الداخل لازمة لتوفير العجلة المركزية اللازمة للحركة الدائرية. وينبغي أن تتجه إلى الداخل نحو مركز الدائرة. ومقدارها يساوي ناتج ضرب كتلة الجسم والعجلة المركزية اللازمة لدفعه إلى مسار دائري:

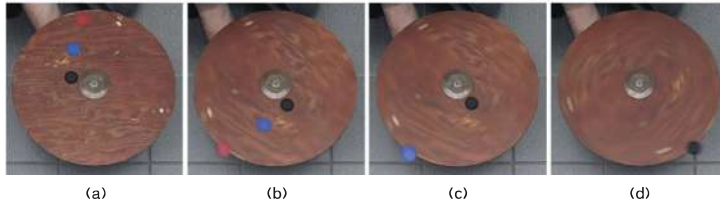
$$(9.21) \quad F_c = ma_c = mv\omega = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r.$$

للوصول إلى المعادلة 9.21 قمنا ببساطة بكتابة العجلة المركزية بدلالة السرعة الخطية  $v$  والسرعة الزاوية  $\omega$  ونصف القطر  $r$ ، كما هو الحال في المعادلة 9.19 مع ضربها في كتلة الجسم الذي دفعته القوة المركزية إلى مسار دائري.

يوضح الشكل 9.14 منظورًا علويًا لطاولة دوّارة عليها ثلاث قطع متطابقة في كل شيء (باستثناء اللون). تقع القطعة السوداء بالقرب من المركز وتقع القطعة الحمراء بالقرب من الحافة الخارجية وتقع القطعة الزرقاء في الوسط بين القطعتين الأخريين. إذا قمنا بتدوير الطاولة ببطء كما هو الحال في الجزء (a)، فستكون جميع القطع الثلاث في حركة دائرية. في هذه الحالة، توفر قوة الاحتكاك السكوني بين الطاولة والقطع القوة المركزية اللازمة للحفاظ على القطع في حركة دائرية. في الأجزاء (b) و (c) و (d)، تدور الطاولة أسرع تدريجيًا. وزيادة السرعة الزاوية تعني زيادة القوة المركزية وفقًا للمعادلة 9.21. وتنزلق القطع عندما لا تعود قوة الاحتكاك كبيرة بدرجة تكفي لتوفير القوة المركزية اللازمة. كما ترى، تنزلق القطعة الخارجية أولاً وتنزلق القطعة الداخلية أخيرًا. يشير هذا بوضوح إلى أنه بالنسبة إلى أي سرعة زاوية محددة، تزداد القوة المركزية مع بُعد المسافة عن المركز. يمكن أن تفسر المعادلة 9.21 بالصيغة  $F_c = m\omega^2 r$  هذا السلوك الملاحظ. تكون السرعة الزاوية  $\omega$  لجميع النقاط على سطح الطاولة الدوارة واحدة، وذلك لأن جميع هذه النقاط تستغرق الوقت نفسه لإكمال لفة واحدة. لذا تتناسب القوة المركزية للقطع الثلاث طرديًا مع البعد عن المركز. الأمر الذي يشرح سبب انزلاق القطعة الحمراء أولاً والقطعة السوداء أخيرًا.

## البندول المخروطي

يمثل الشكل 9.14 صورة للأرجوحة الدوارة وهي إحدى ألعاب مدينة الملاهي. حيث يجلس الركاب على مقاعد معلقة من قرص صلب بسلاسل طويلة. في بداية اللعبة، تكون السلاسل متدلية إلى أسفل بشكل



**الشكل 9.14** القطع على طاولة دوّارة. يُظهر الشكل من اليسار إلى اليمين المواقع الابتدائية للقطع واللحظات التي تنزلق فيها هذه القطع الثلاث أثناء عملية الحركة الدائرية.

## مراجعة المفاهيم 9.3

افترض أنك تجلس على لعبة دوامة الخيل وهي تدور. أين ينبغي أن تجلس بحيث تتعرض لتأثير أكبر قوة مركزية ممكنة؟

- بالقرب من الحافة الخارجية
- بالقرب من المركز
- في المنتصف
- القوة واحدة في أي مكان.



**الشكل 9.15** أرجوحة دوارة في مدينة ملاج.

مستقيم، لكن عندما تبدأ اللعبة في الدوران، تشكل هذه السلاسل زاوية  $\varphi$  مع المستوى الرأسي. كما ترى، ولا تعتمد هذه الزاوية على كتلة الراكب لكنها تعتمد فقط على السرعة الزاوية للحركة الدائرية. كيف يمكننا إيجاد قيمة هذه الزاوية بدلالة السرعة المتجهة؟

لفهم هذا الأمر، ن فكر في موقف مماثل لكنه أبسط إلى حد ما: توجد كتلة معلقة في السقف بحبل طوله  $l$  وتقوم بحركة دائرية بحيث تكون الزاوية الواقعة بين الحبل والمستوى الرأسي  $\varphi$ . يمثل الحبل سطح مخروط ما، ولهذا السبب يطلق على هذا التركيب بندول مخروطي. انظر الشكل 9.16.

يوضح الشكل 9.16c مخطط الجسم الحر للكتلة. وتوجد قوتان فقط تؤثران فيها. حيث تؤثر قوة الجاذبية،  $\vec{F}_g$  رأسياً إلى أسفل وبشار إليها بالسهم الأحمر في مخطط الجسم الحر. ومقدارها  $mg$  كما المعتاد. بينما تمثل القوة الأخرى المؤثرة في الكتلة في شد الحبل،  $\vec{T}$ ، والتي تؤثر على امتداد اتجاه الحبل بزاوية  $\varphi$  مع المستوى الرأسي. ينقسم شد الحبل هذا إلى المركبتين  $X$  و  $Y$  ( $T_x = T \sin \varphi$ ،  $T_y = T \cos \varphi$ )، لا توجد حركة في الاتجاه الرأسي، ومن ثم تصبح القوة المحصلة لدينا في هذا الاتجاه صفراً.  $F_{\text{net},y} = T \cos \varphi - mg = 0$ . الأمر الذي ينتج عنه

$$T \cos \varphi = mg.$$

في الاتجاه الأفقي، تكون المركبة الأفقية لشد الحبل هي مركبة القوة الوحيدة؛ وهي التي توفر القوة المركزية. وفقاً للقانون الثاني لنيوتن،  $F_{\text{net},x} = F_c = ma_c$  نحصل على

$$T \sin \varphi = mr\omega^2.$$

كما ترى من الشكل 9.15b، نحصل على نصف قطر الحركة الدائرية من العلاقة  $r = l \sin \varphi$  وباستخدام هذه العلاقة، توجد شد الحبل بدلالة السرعة الزاوية:

$$T = ml\omega^2.$$

لاحظنا أن  $T \cos \varphi = mg$ ، ويمكننا التعويض بتعبير  $T$  من المعادلة 9.22 في هذه المعادلة للحصول على

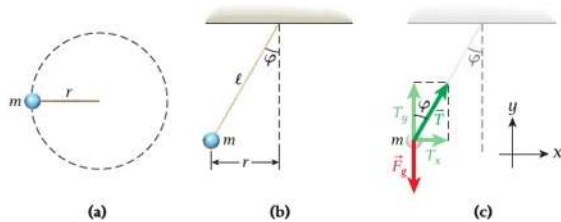
$$(ml\omega^2)(\cos \varphi) = mg$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l \cos \varphi}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \varphi}}.$$

(9.23)

يتم إهمال الكتلة مما يفسر سبب أن جميع السلاسل في الشكل 9.15 لها الزاوية نفسها مع المستوى الرأسي. يتضح أن هناك علاقة فريدة ومثيرة للاهتمام بين زاوية البندول المخروطي وسرعته الزاوية. عندما تقترب الزاوية  $\varphi$  من الصفر، لا تقترب السرعة الزاوية من الصفر لكنها تقترب من قيمة صغرى نهائية  $\sqrt{g/l}$  عند النهاية التي تقترب فيها الزاوية  $\varphi$  من  $90^\circ$ . تصبح  $\omega$  لا نهائية.



**الشكل 9.16** البندول المخروطي: (a) منظر علوي، يشير الخط المتقطع إلى المسار الدائري للكتلة، (b) منظر جانبي، (c) مخطط الجسم الحر.

## سؤال الاختبار الذاتي 9.5

ارسم تمثيلاً بيانياً لشد الحبل كدالة للزاوية  $\varphi$ .

## مراجعة المفاهيم 9.4

تؤدي سرعة زاوية معينة  $\omega$  لبندول مخروطي إلى تكون زاوية  $\varphi$ . إذا أخذ هذا البندول المخروطي إلى القمر حيث عجلة الجاذبية تساوي سدس عجلة الجاذبية على الأرض، فكيف ينبغي ضبط السرعة الزاوية للحصول على الزاوية  $\varphi_0$  نفسها؟

(a)  $\omega_{\text{Moon}} = 6\omega_0$

(b)  $\omega_{\text{Moon}} = \sqrt{6}\omega_0$

(c)  $\omega_{\text{Moon}} = \omega_0$

(d)  $\omega_{\text{Moon}} = \omega_0/\sqrt{6}$

(e)  $\omega_{\text{Moon}} = \omega_0/6$

## مسألة محلولة 9.1 تحليل عربة أفعوانية

من الألعاب التي ربما تدهشك بشدة في مدينة الملاهي هي العربة الأفعوانية ذات الحلقة الرأسية حيث يشعر الركاب بانعدام الوزن تقريبًا في أعلى هذه الحلقة.

### المسألة

افتراض أن نصف قطر الحلقة الرأسية يساوي 5.00 m، فما السرعة الخطية المفترضة للعربة الأفعوانية عند أعلى الحلقة لكي يشعر الركاب بانعدام الوزن؟ افترض أنه يمكن تجاهل الاحتكاك بين العربة الأفعوانية والقضبان.

### الحل

**فكر** يشعر الشخص بانعدام وزنه عند عدم وجود قوة داعمة من مقعد أو نظام تثبيت يؤثر عكسيًا في وزنه. لكي يشعر الشخص بانعدام وزنه في أعلى الحلقة، ينبغي ألا تكون هناك قوة عمودية مؤثرة فيه عند هذه النقطة.

**ارسم** قد تساعد مخططات الجسم الحر في الشكل 9.18 في تصور الحالة. يوضح الشكل 9.18A قوة الجاذبية والقوة العمودية المؤثرة في أحد ركاب العربة الأفعوانية عند أعلى الحلقة. ومجموع هاتين القوتين هو محصلة القوى والتي ينبغي أن تعادل القوة المركزية في الحركة الدائرية. إذا كانت محصلة القوى (القوة المركزية هنا) تعادل قوة الجاذبية، فستكون القوة المتعامدة صفرًا ويشعر الراكب بانعدام وزنه. وتوضح هذه الحالة في الشكل 9.18B.

**ابحث** ذكرنا للتو أن محصلة القوة تساوي القوة المركزية وأن محصلة القوى هي مجموع القوة المتعامدة وقوة الجاذبية:

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_g + \vec{N}.$$

للشعور بانعدام الوزن عند أعلى الحلقة، يلزم أن تكون  $\vec{N} = 0$  ومن ثمَّ

$$(i) \quad \vec{F}_c = \vec{F}_g \Rightarrow F_c = F_g.$$

كما هو الحال دائمًا، لدينا  $F_g = mg$ . بالنسبة إلى مقدار القوة المركزية، نستخدم المعادلة 9.21.

$$F_c = ma_c = m \frac{v^2}{r}.$$

**بسّط** بعد التعويض عن تعبيرات القوة المركزية وقوة الجاذبية في المعادلة (i)، نوجد السرعة الخطية عند أعلى الحلقة:

$$F_c = F_g \Rightarrow m \frac{v_{\text{top}}^2}{r} = mg \Rightarrow v_{\text{top}} = \sqrt{rg}.$$

**احسب** باستخدام  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  وقيمة  $5.00 \text{ m}$  المحطة لنصف القطر. نحصل على

$$v_{\text{top}} = \sqrt{(5.00 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2)} = 7.00357 \text{ m/s}.$$

**قرّب** عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها إلى قيمة مضبوطة مكونة من ثلاثة أرقام، نحصل على

$$v_{\text{top}} = 7.00 \text{ m/s}.$$

**تحقّق ثانية** من الواضح أن الإجابة جتاز أبسط تحقّق وهو أن الوحدات هي وحدات السرعة، متر في الثانية. تشير صيغة السرعة الخطية في الجزء العلوي،  $v_{\text{top}} = \sqrt{rg}$ ، إلى أن نصف القطر الأكبر يتطلب سرعة أعلى، وهو ما يبدو معقولًا.

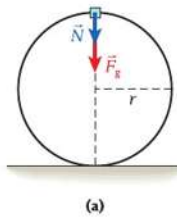
هل تُعدّ القيمة  $7.00 \text{ m/s}$  للسرعة في الجزء العلوي معقولة؟ عند تحويل هذه القيمة، نحصل على  $15.7 \text{ mph}$  التي تبدو سرعة بطيئة إلى حد ما للعبة عادة ما تكون سرعتها هائلة. لكن ضع في الاعتبار أن هذه السرعة هي الحد الأدنى للسرعة اللازمة في أعلى الحلقة، ولا يريد مشغلو الألعاب الاقتراب كثيرًا من هذه القيمة.

لنتنقل إلى خطوة أبعد ونحسب اتجاهات السرعة عند موضعي الساعة 3 والساعة 9 على الحلقة، مع افتراض أن العربة الأفعوانية تتحرك حول الحلقة في عكس اتجاه عقارب الساعة. دائمًا ما تكون اتجاهات متجهات السرعة في الحركة الدائرية مماسية للدائرة. كما هو موضح في الشكل 9.19.

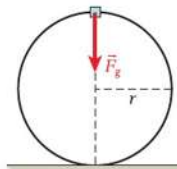
كيف نحصل على مقادير السرعات المتجهة  $v_3$  (عند الساعة 3) و  $v_9$  (عند الساعة 9)؟ أولًا نتذكر من الوحدة 6 أن إجمالي الطاقة هو مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع،  $E = K + U$  وأن الطاقة الحركية تساوي  $K = \frac{1}{2}mv^2$  وأن طاقة الوضع الجاذبية تتناسب طرديًا مع الارتفاع فوق الأرض.  $U = mgy$  في الشكل 9.17. يوضع النظام الإحداثي بحيث يكون صفر المحور  $y$  في الجزء السفلي من الحلقة. يمكننا بعد ذلك كتابة



الشكل 9.17 عربة أفعوانية حديثة ذات حلقة رأسية.

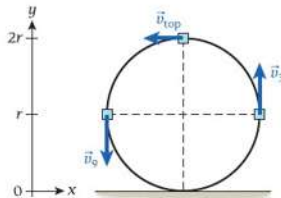


(a)



(b)

الشكل 9.18 (a) مخطط الجسم الحر لراكب في أعلى الحلقة الرأسية لعربة أفعوانية. (b) شرط للشعور بانعدام الوزن.



الشكل 9.19 اتجاهات متجهات السرعة عند عدة نقاط على طول حلقة العربة الأفعوانية الرأسية.

### مراجعة المفاهيم 9.5

عندما تكون في حلقة رأسية في عربة أفخانية عالية السرعة. ما الذي يبضك في معدتك؟

- القوة الطاردة المركزية
- القوة المتعامدة المتولدة من المسار
- قوة الجاذبية
- قوة الاحتكاك
- القوة التي يبذلها حزام الأمان

### سؤال الاختبار الذاتي 9.6

ما السرعة المطلوب توفرها في أعلى حلقة العربة الأفخانية المذكورة في المسألة المحلولة 9.1 لتحقيق الشعور نفسه بانعدام الوزن إذا تضاعف نصف قطر الحلقة؟

معادلة حفظ الطاقة الميكانيكية. مع افتراض أنه لا توجد قوى مؤثرة غير محافظة:

$$E = K_3 + U_3 = K_{\text{top}} + U_{\text{top}} = K_9 + U_9 \Rightarrow$$

(ii)

$$\frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 = \frac{1}{2}mv_{\text{top}}^2 + mgy_{\text{top}} = \frac{1}{2}mv_9^2 + mgy_9.$$

نلاحظ من الشكل أن الإحداثيات  $y$  وطاقتي الوضع متماثلة عند موضعي الساعة 3 والساعة 9. ومن ثمّ تكون الطاقات الحركية عند كلتا النقطتين متشابهة. وبناءً على ذلك، تكون القيم المطلقة للسرعات عند كلتا النقطتين واحدة،  $v_9 = v_3$ . عند حل المعادلة (ii) للحصول على  $v_3$ ، نحصل على

$$\frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 = \frac{1}{2}mv_{\text{top}}^2 + mgy_{\text{top}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}v_3^2 + gy_3 = \frac{1}{2}v_{\text{top}}^2 + gy_{\text{top}} \Rightarrow$$

$$v_3 = \sqrt{v_{\text{top}}^2 + 2g(y_{\text{top}} - y_3)}.$$

مرة أخرى، يتم إهمال الكتلة. إضافة إلى ذلك، لا يدخل إلا الفرق في إحداثيات  $y$  في صيغة  $v_3$  هذه. ومن ثمّ يصبح اختيار نقطة أصل النظام الإحداثي غير مناسب. يكون الفرق في إحداثيات  $y$  بين النقطتين هو  $r = y_9 - y_{\text{top}} = r$ . عند التعويض بالقيمة المعطاة  $r = 5.00 \text{ m}$  والنتيجة  $v_{\text{top}} = 7.00 \text{ m/s}$  التي توصلنا إليها سابقاً، نلاحظ أن السرعة عند موضعي الساعة 3 والساعة 9 في الحلقة تساوي

$$v_3 = \sqrt{(7.00 \text{ m/s})^2 + 2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ m})} = 12.1 \text{ m/s}.$$

كما نلاحظ من هذه المناقشة، فإن أي قوة يمكن أن تقوم بدور القوة المركزية من الناحية العملية. قامت قوة الاحتكاك السكوني بهذا الدور للقطيع الموجودة على الطاولة الدوارة وقامت المركبة الأفقية للشد في الحبل بهذا الدور للبيندول المخروطي. لكن يمكن أن تكون هذه القوة هي قوة الجاذبية التي تدفع الكواكب إلى المدارات الدائرية (تقريباً) حول الشمس (انظر الوحدة 12) أو قوة كولوم التي تؤثر في الإلكترونات داخل الذرات (انظر الوحدة 21) أو القوة المتعامدة المبدولة من جدار ما (انظر المسألة المحلولة التالية).

## لعبة الملاهي

### مسألة محلولة 9.2

#### المسألة

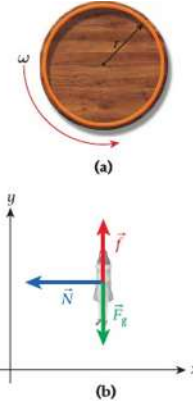
تمثل الأسطوانة الدوارة إحدى الألعاب الموجودة في الملاهي. ويدخل الركاب الأسطوانة الرأسية ويقفون مع توجيه ظهورهم نحو الجدار المنحني. تدور الأسطوانة بسرعة عالية وعند سرعة زاوية معينة، يتم سحب الأرضية. وعندما يصبح الركاب معلقين على الجدار كالحشرات، فإذا كان نصف قطر الأسطوانة  $r = 2.10 \text{ m}$ ، وظل محور دوران الأسطوانة رأسياً ومعامل الاحتكاك السكوني بين الأشخاص والجدار  $\mu_s = 0.390$ ، فما الحد الأدنى للسرعة الزاوية،  $\omega$ ، التي يمكن سحب الأرضية عندها؟

#### الحل

**فكر** عندما تهبط الأرضية، يجب أن يكون مقدار قوة الاحتكاك السكوني بين الركاب وجدار الأسطوانة الدوارة مساوياً لمقدار قوة الجاذبية التي تؤثر في الركاب. يتوقف الاحتكاك السكوني بين الركاب والجدار على القوة المتعامدة المبدولة على الركاب ومعامل الاحتكاك السكوني. كلما زادت سرعة دوران الأسطوانة، زادت القوة المتعامدة (التي تقوم بدور القوة المركزية) المبدولة على الركاب. عند سرعة زاوية معينة، سيصبح الحد الأقصى لمقدار قوة الاحتكاك السكوني مساوياً لمقدار قوة الجاذبية، وتكون هذه السرعة الزاوية هي الحد الأدنى للسرعة الزاوية التي يمكن سحب الأرضية عندها.

**رسم** يوضح الشكل 9.18a منظوراً علوياً للأسطوانة الدوارة. ويوضح الشكل 9.18b مخطط الجسم الحر لأحد الركاب، حيث يُفترض أن محور الدوران هو المحور  $y$ . في هذا الرسم، تمثل  $\vec{F}$  قوة الاحتكاك السكوني و  $\vec{N}$  القوة المتعامدة المبدولة على الركاب ذي الكتلة  $m$  عن طريق جدار الأسطوانة وتمثل  $\vec{F}_g$  قوة الجاذبية المؤثرة في الركاب.

- يتبع



**الشكل 9.20** (a) منظر علوي للأسطوانة الدوارة لإحدى ألعاب الملاهي. (b) مخطط الجسم الحر لأحد الركاب.

**ابحث** عند الحد الأدنى للسرعة الزاوية المطلوبة لمنع سقوط الركاب، يكون مقدار قوة الاحتكاك السكوني بين الركاب والجدار مساوياً لمقدار قوة الجاذبية التي تؤثر في الركاب. لتحليل هذه القوى، نبدأ بمخطط الجسم الحر الموضح في الشكل 9.20b. في مخطط الجسم الحر، يكون اتجاه  $X$  على امتداد نصف قطر الأسطوانة ويكون اتجاه  $Y$  رأسياً. في الاتجاه  $X$ ، تُؤثر القوة المتعامدة التي يبذلها الجدار على الركاب القوة المركزية التي تجعل الركاب يتحرك في دائرة:

$$(i) \quad F_c = N$$

في الاتجاه  $Y$ ، لا يلتصق الركاب بالجدار إلا إذا كانت قوة الاحتكاك السكوني المتجهة إلى أعلى بين الركاب والجدار موازنة لقوة الجاذبية المتجهة إلى أسفل. تكون قوة الجاذبية المؤثرة في الركاب هي وزنه. لذا يمكننا أن نكتب

$$(ii) \quad f = F_g = mg.$$

نعرف أنه يتم تحديد القوة المركزية من العلاقة

$$(iii) \quad F_c = mr\omega^2,$$

ويتم تحديد قوة الاحتكاك السكوني من العلاقة

$$(iv) \quad f \leq f_{\max} = \mu_s N$$

**بسّط** يمكننا دمج المعادلتين (ii) و (iv) للحصول على

$$(v) \quad mg \leq \mu_s N.$$

عند التعويض عن  $F_c$  من المعادلة (i) في المعادلة (iii)، نجد أن

$$(vi) \quad N = mr\omega^2.$$

عند دمج المعادلتين (v) و (vi)، نحصل على

$$mg \leq \mu_s mr\omega^2$$

التي يمكننا حلها لإيجاد قيمة  $\omega$  لها:

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}.$$

إذاً، يتم تحديد الحد الأدنى لقيمة السرعة الزاوية من العلاقة

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}.$$

لاحظ أنه تم إهمال كتلة الركاب، وهذا أمر مهم لأن الأشخاص ذوي الكتل المختلفة يريدون الركوب في الوقت نفسه!

**احسب** عند التعويض بالقيم العددية، نجد أن

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{(0.390)(2.10 \text{ m})}} = 3.46093 \text{ rad/s}.$$

**قرب** عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها إلى الأرقام المعنوية الثلاث التي تضمنتها الأعداد المذكورة في المسألة، نحصل على

$$\omega_{\min} = 3.46 \text{ rad/s}.$$

**تحقق ثانية** للتحقق ثانية، دعنا نغير عن نتيجة السرعة الزاوية بوحدة الدورة في الدقيقة (RPM):

$$3.46 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \left(3.46 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) \left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 33 \text{ rpm}.$$

تبدو السرعة الزاوية التي مقدارها 33 rpm للأسطوانة الدوّارة معقولة لأن هذا يعني أنها تكمل دورة واحدة كاملة تقريباً كل 2.5 s. وإذا كنت قد ركبت أياً من هذه الألعاب أو شاهدتها من قبل، فستعرف أن الإيجابية ضمن النطاق المعقول.

لاحظ أن معامل الاحتكاك،  $\mu$ ، بين ملابس الركاب والجدار ليس متطابقاً في جميع الحالات. تشير الصيغة  $\omega_{\min} = \sqrt{g / (\mu_s r)}$  إلى أن معامل الاحتكاك الصغير يتطلب سرعة زاوية أكبر. لذا يتعين على مصممي هذا النوع من الألعاب التأكد من أنهم يسمّحون بحدوث أصغر معامل احتكاك يمكن توقعه. ومن الواضح أنهم يحتاجون إلى وجود سطح تلامس لزج إلى حد ما على جدار اللعبة للتأكد من ذلك!

النقطة الأخيرة التي سيتم التحقق منها: تشير  $\omega_{\min} = \sqrt{g / (\mu_s r)}$  إلى أن الحد الأدنى للسرعة الزاوية المطلوب سيظل بوضعه دالة لنصف قطر الأسطوانة. أثبت مثال القطع الموجودة على الطاولة الدوّارة المذكور سابقاً في هذا القسم أن القوة المركزية تزداد مع مسافة نصف القطر وهو ما يتوافق مع هذه النتيجة.

## مراجعة المفاهيم 9.6

في أعلى الحلقة الرأسية المعربة الأفقانية. ما الشرط الذي يجب تحفيته كي تبقى العربة على المسار؟

- (a) يجب أن تكون القوة الطاردة المركزية المؤثرة في العربة مساوية للقوة المركزية.
- (b) يجب أن تكون القوة المتعامدة التي يبذلها المسار على العربة مساوية لقوة الجاذبية.
- (c) يجب أن تكون القوة المتعامدة التي يبذلها المسار على العربة في الاتجاه المقابل لقوة الجاذبية.
- (d) يجب أن تكون القوة المركزية المطلوبة للحفاظ على حركة العربة في دائرة مساوية لقوة الجاذبية أو أكبر منها.
- (e) يجب أن تكون القوة المتعامدة التي يبذلها المسار على العربة صفراً.

## هل توجد قوة طاردة مركزية؟

يُعد هذا وقتاً مناسباً لتوضيح نقطة مهمة تتعلق باتجاه القوة المسؤولة عن الحركة الدائرية. كثيراً ما نسمع الأشخاص وهم يتحدثون عن عجلة الطرد المركزي (أو "الابتعاد عن المركز" إلى خارج نصف القطر) أو القوة الطاردة المركزية (الكتلة في العجلة). وقد تشعر وكأنك تُسحب إلى الخارج عند ركوب إحدى الألعاب الدوّارة في مدينة الملاهي مثل اللعبة المذكورة في المسألة المحلولة 9.2. يرجع هذا الشعور إلى قصور جسمك الذي يقاوم العجلة المركزية تجاه المركز. لذا تشعر بقوة غير حقيقية تنجّه نحو الخارج. وهي القوة الطاردة المركزية. ضع في اعتبارك أن هذا الشعور يعود إلى تحرك جسمك في مناطق إسناد متسارع؛ ولا توجد قوة طاردة مركزية. لكن القوة الحقيقية التي تؤثر في جسمك وتدفعه إلى الحركة في مسار دائري هي القوة المركزية وتنتج نحو الداخل. وعلى الرغم من ذلك، يكون التأثير في الإطار الدوّار هو التأثير نفسه لقوة متجهة للخارج. ولهذا السبب يمكن لجهاز الطرد المركزي التابع لوكالة ناسا الموضح في الشكل 9.1 محاكاة ما يصل إلى  $20g$  من عجلة الجاذبية لرواد الفضاء والمعدات. ويكون تأثير القوة المتجهة نحو الخارج التي يشعر بها الملاحظ داخل جهاز الطرد المركزي حقيقياً. لكنه يحدث بسبب تعرض هذا الملاحظ لعجلة مستمرة في الاتجاه الداخلي. سنستكمل هذه المناقشة في الوحدة 13 التي تتناول النسبية.

لقد تعرضت أيضاً لتأثير مماثل في الحركة في خط مستقيم. عندما تجلس في سيارتك بدون حركة ثم تضغط على دواسة الوقود، تشعر كأنك ترتد إلى الخلف في مقعدك. يأتي شعور القوة التي تدفعك إلى الخلف من قصور جسمك الذي يتحرك بعجلة إلى الأمام بفعل السيارة. وهذان الشعوران بالقوى المؤثرة في جسمك - القوة "الطاردة المركزية" وقوة "الدفع" في المقعد - نتيجة تعرض جسمك لعجلة ما في الاتجاه العكسي مع وجود مقاومة ضد هذه العجلة تُعرف بالتعصور.

## 9.6 الحركة الدائرية والخطية

يلخص الجدول 9.1 العلاقات بين الكميات الخطية والزاوية للحركة الدائرية. تربط العلاقات الموضحة في الجدول الكميات الزاوية ( $\theta$  و  $\omega$  و  $\alpha$ ) بالكميات الخطية ( $s$  و  $v$  و  $a$ ). يكون نصف قطر  $r$  المسار الدائري ثابتاً ويربط بين مجموعتي الكميات. (في الوحدة 10، ستتم إضافة ظواهر الكتلة والطاقة الحركية وكمية الحركة والقوة المتعلقة بالدوران إلى هذه القائمة).

كما لاحظنا للتو، يوجد توافق صوري بين الحركة في خط مستقيم بسرعة متجهة ثابتة والحركة الدائرية بسرعة زاوية ثابتة. لكن هناك فرق واحد كبير. كما لاحظنا في القسم 3.6 الذي يتناول الحركة النسبية، لا يمكنك دائماً التمييز بين الحركة بسرعة متجهة ثابتة في خط مستقيم وكونك في وضع سكون. وهذا لأنه يمكن وضع نقطة أصل النظام الإحداثي عند أي نقطة - حتى إذا كانت نقطة تتحرك بسرعة متجهة ثابتة. ولا تتغير فيزياء الحركة الانتقالية في تحويل جاليليو هذا. وعلى العكس. في الحركة الدائرية، تتحرك دائماً في مسار دائري حول مركز محدد جيداً. يُعد التعرض لقوة "طاردة مركزية" علامة مؤكدة على الحركة الدائرية ويكون مقدار هذه القوة مقياساً لمقدار السرعة الزاوية. قد تذكر أنك في حركة دائرية ثابتة حول مركز الأرض وحول مركز النظام الشمسي وحول مركز مجرة درب التبانة لكنك لا تشعر بتأثيرات هذه الحركات الدائرية. وهذا صحيح. لكن مقادير السرعات الزاوية الصغيرة جداً التي تشارك في هذه الحركات جعلت تأثيراتها الملموسة لا تكاد تُذكر.

الجدول 9.1	مقارنة بين المتغيرات الكينماتيكية للحركة الدائرية		
الكمية	خطية	زاوية	العلاقة
الإزاحة	$s$	$\theta$	$s = r\theta$
السرعة المتجهة	$v$	$\omega$	$v = r\omega$
العجلة	$a$	$\alpha$	$a_t = r\alpha$ $a_c = r\omega^2$
			$\vec{a} = r\alpha\hat{t} - r\omega^2\hat{r}$



### العجلة الزاوية الثابتة

ناقشت الوحدة 2 باستفاضة الحالة الخاصة للعجلة الثابتة. في ظل هذا الافتراض، قمنا باشتقاق خمس معادلات ثبتت فائدتها في حل جميع أنواع المسائل، ولسهولة الرجوع إليها، فيما يلي تلك المعادلات الخمس للحركة الخطية بعجلة ثابتة:

$$(i) \quad x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$(ii) \quad x = x_0 + \bar{v}_x t$$

$$(iii) \quad v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$(iv) \quad \bar{v}_x = \frac{1}{2}(v_x + v_{x0})$$

$$(v) \quad v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0).$$

سنستخدم الآن الخطوات نفسها كما في الوحدة 2 لاشتقاق المعادلات المكافئة للعجلة الزاوية الثابتة. نبدأ بالمعادلة 9.14 ثم نحسب التكامل، باستخدام الرمز العادي  $\omega(t_0) \equiv \omega_0$  :

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^t \alpha(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{d\omega(t')}{dt'} dt' = \omega(t) - \omega(t_0) \Rightarrow$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t') dt'.$$

تمثل هذه العلاقة معكوس المعادلة 9.14 وتنطبق هذه العلاقة بوجه عام، إذا افترضنا أن العجلة الزاوية،  $\alpha$ ، ثابتة مع الزمن، فسيمكنا حساب التكامل والحصول على

$$(9.24) \quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha \int_0^t dt' = \omega_0 + \alpha t.$$

للتبسيط، قمنا بتعيين  $t_0 = 0$  كما فعلنا في الوحدة 2 في هذه المرحلة. ثم نستخدم المعادلة 9.8 التي تعبر عن السرعة الزاوية كمشققة للزاوية بالنسبة إلى الزمن مع الرمز  $\theta_0 = \theta(t=0)$ .

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t') dt' = \theta_0 + \int_0^t (\omega_0 + \alpha t') dt' \Rightarrow$$

$$= \theta_0 + \omega_0 \int_0^t dt' + \alpha \int_0^t t' dt' \Rightarrow$$

$$(9.25) \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

عند مقارنة المعادلتين 9.24 و 9.25 بالمعادلتين (iii) و (i) للحركة الخطية يتضح أن هاتين المعادلتين هما المكافئات الخاصة بالحركة الدائرية لمعادلات الكينماتيكا للحركة الخطية في بُعد واحد في خط مستقيم. ومن خلال التعويضات المباشرة  $x \rightarrow \theta$  و  $v_x \rightarrow \omega$  و  $a_x \rightarrow \alpha$ ، يمكننا كتابة معادلات الكينماتيكا الخمس للحركة الدائرية بعجلة زاوية ثابتة:

$$(i) \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$(ii) \quad \theta = \theta_0 + \bar{\omega} t$$

$$(9.26) \quad (iii) \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$(iv) \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)$$

$$(v) \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0).$$

### سؤال الاختبار الذاتي 9.7

تم اشتقاق معادلتين من بين معادلات الكينماتيكا الخمس الخاصة بالحركة الدائرية، هل يمكنك اشتقاق المعادلات المتبقية؟ اشرح، تمتد سلسلة الاستنتاج على المنوال نفسه مثل الاشتقاق 2.1 في الوحدة 2.

## رمي المطرقة

## مثال 9.7

يُعد رمي المطرقة أحد الأحداث الأكثر إثارة في سباقات ألعاب القوى، ويتمثل النشاط في رمي "المطرقة". وهي كرة من الحديد قطرها 12 cm متصلة بمقبض بواسطة سلك من الصلب. إلى أقصى مسافة. يبلغ إجمالي طول المطرقة 121.5 cm وإجمالي كتلتها 7.26 kg. يتعين على اللاعب رمي المطرقة من دائرة نصف قطرها 2.13 m (7 ft) وتمثل أفضل طريقة لرمي المطرقة في دوران اللاعب حول نفسه. الأمر الذي يسمح للمطرقة بالحركة في دائرة حول اللاعب قبل أن يقوم بتحريرها. في دورة الألعاب الأولمبية عام 1988 في سيول. فاز الرامي الروسي سيرجي ليتفينوف بالميدالية الذهبية حيث سجل مسافة قياسية قدرها 84.80 m. دار اللاعب سبع دورات حول نفسه قبل تحرير المطرقة وتمت معرفة الفترة المستغرقة لإكمال كل دورة من خلال فحص تسجيل الفيديو لحظة بعد لحظة: 0.56 s و 0.72 s و 1.08 s و 1.52 s و 0.44 s و 0.40 s و 0.36 s.

## المسألة 1

ما متوسط العجلة الزاوية أثناء الدورات السبع؟ افترض عجلة زاوية ثابتة معينة لإيجاد الحل ثم تحقق من وجود ما يبرر هذا الافتراض.

## الحل 1

لإيجاد متوسط العجلة الزاوية، نجمع جميع الفترات الزمنية للدورات السبع للحصول على إجمالي الزمن:  $t_{\text{إجمالي}} = 1.52 \text{ s} + 1.08 \text{ s} + 0.72 \text{ s} + 0.56 \text{ s} + 0.44 \text{ s} + 0.40 \text{ s} + 0.36 \text{ s} = 5.08 \text{ s}$ .

أثناء هذا الوقت، أكمل ليتفينوف سبع دورات كاملة. الأمر الذي نتج عنه زاوية قيمتها الكلية

$$\theta_{\text{إجمالي}} = 7(2\pi \text{ rad}) = 14\pi \text{ rad}.$$

نظرًا لأننا نفترض أن العجلة ثابتة، يمكننا بسهولة إيجاد قيمة العجلة الزاوية والتعويض بالأعداد المعطاة للوصول إلى الإجابة:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\theta_{\text{إجمالي}}}{t^2} = 2 \frac{14\pi \text{ rad}}{(5.08 \text{ s})^2} = 3.41 \text{ rad/s}^2.$$

## مناقشة

بما أننا نعرف المدة المستغرقة لإكمال كل دورة، يمكننا رسم تمثيل بياني لزاوية المطرقة في المستوى الأفقي كدالة للزمن. يوضح الشكل 9.19 هذا التمثيل البياني، حيث تمثل النقاط الحمراء نقاط البيانات. يفترض الخط الأزرق المطابق لنقاط البيانات في الشكل 9.19 عجلة زاوية ثابتة  $\alpha = 3.41 \text{ rad/s}^2$ . كما تلاحظ، فإن افتراض العجلة الزاوية الثابتة له ما يبرره بدرجة كبيرة لكن ليس تمامًا.

## المسألة 2

إذا افترضنا أن نصف قطر الدائرة التي تتحرك فيها المطرقة 1.67 m (طول المطرقة بالإضافة إلى ذراعي اللاعب)، فما السرعة الخطية التي يتم تحرير المطرقة بها؟

## الحل 2

مع وجود عجلة زاوية ثابتة بعد السكون لمدة 5.08 s، فإن السرعة الزاوية النهائية تساوي

$$\omega = \alpha t = (3.41 \text{ rad/s}^2)(5.08 \text{ s}) = 17.3 \text{ rad/s}.$$

باستخدام العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية، نحصل على السرعة الخطية عند تحرير المطرقة:

$$v = r\omega = (1.67 \text{ m})(17.3 \text{ rad/s}) = 28.9 \text{ m/s}.$$

## المسألة 3

ما القوة المركزية التي يتعين على رمي المطرقة بذليها على المطرقة قبل تحريرها مباشرة؟

## الحل 3

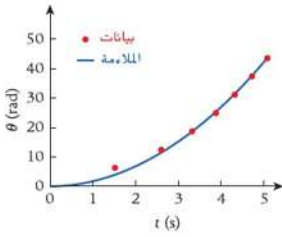
بم تحديد العجلة المركزية قبل تحرير المطرقة مباشرة من خلال العلاقة

$$a_c = \omega^2 r = (17.3 \text{ rad/s})^2 (1.67 \text{ m}) = 501. \text{ m/s}^2.$$

إذا كانت كتلة المطرقة 7.26 kg، فستكون القوة المركزية المطلوبة

$$F_c = ma_c = (7.26 \text{ kg})(501. \text{ m/s}^2) = 3640 \text{ N}.$$

وهذه قوة كبيرة جدًا تعادل وزن جسم كتلته 371 kg! ولهذا السبب يجب أن يكون اللاعبون العالميون لرمي المطرقة أقوىاء جدًا.



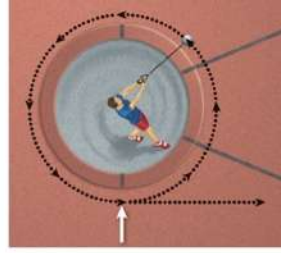
**الشكل 9.19** تمثيل الزاوية كدالة زمن لرمية المطرقة التي جعلت سيرجي ليتفينوف يفوز بالميدالية الذهبية عام 1988.

## المسألة 4

بعد تحرير المطرقة، ما الاتجاه الذي تتحرك فيه؟

## الحل 4

من المفاهيم الخاطئة الشائعة أن المطرقة "تلف حلزونيًا" في حركة دائرية نوعًا ما مع تزايد نصف قطرها باستمرار بعد تحريرها. وهذه فكرة خاطئة لأنه لا توجد مركبة أفقية للقوة بمجرد تحرير اللاعب للمطرقة. يخبرنا القانون الثاني لنيوتن أنه ليست هناك مركبة أفقية للعجلة ومن ثم لا توجد عجلة مركزية. لكن تتحرك المطرقة في اتجاه مماسي للدائرة عند نقطة تحريرها. وإذا نظرت على الملعب من منطاد، فستلاحظ أن المطرقة تتحرك في خط مستقيم، كما هو موضح في الشكل 9.20. وعند النظر من الجانب، يكون شكل مسار المطرقة على هيئة قطع مكافئ، كما هو موضح في الوحدة 3.



**الشكل 9.20** منظر علوي لمسار المطرقة (نقاط سوداء) تتخللها أسهم تشير إلى اتجاه متجه السرعة) خلال الوقت الذي يمسك فيه اللاعب بالمطرقة (المسار الدائري) وبعد تحريرها (الخط المستقيم). يشير السهم الأبيض إلى نقطة التحرير.

## الحداقة

## مسألة محلولة 9.3

## المسألة

تبدأ حداقة المحرك البخاري في الدوران من السكون بعجلة زاوية ثابتة مقدارها  $\alpha = 1.43 \text{ rad/s}^2$ . لمدة  $t = 25.9 \text{ s}$ ، ثم تستكمل الدوران بسرعة زاوية ثابتة.  $\omega$  بعد دوران الحداقة لمدة  $59.5 \text{ s}$ ، ما الضيقة الكلية للزاوية التي دارتها الحداقة منذ بدء دورانها؟

## الحل

**فكر** نحاول هنا تحديد إجمالي الإزاحة الزاوية،  $\theta$ ، بالنسبة إلى الفترة الزمنية للعجلة الزاوية للحداقة. يمكننا استخدام المعادلة 9.26(i) مع  $\omega_0 = 0$  و  $\theta_0 = 0$  عندما تدور الحداقة بسرعة زاوية ثابتة. نستخدم المعادلة 9.26(ii) مع  $\omega_0 = 0$  و  $\alpha = 0$  للحصول على إجمالي الإزاحة الزاوية. نجمع هاتين الإزاحتين الزاويتين.

**الرسم** يوضح الشكل 9.21 منظرًا علويًا للحداقة وهي تدور.



**الشكل 9.21** منظر علوي للحداقة الدوّارة.

**ابحث** لنفترض أن زمن العجلة الزاوية للزاوية هو  $t_a$  وإجمالي زمن دوران الحداقة هو  $t_b$ . إذا تدور الحداقة بسرعة زاوية ثابتة لمدة زمنية تساوي  $t_b - t_a$ . يتم تحديد الإزاحة الزاوية،  $\theta_a$ ، التي تحدث أثناء تحرك الحداقة بعجلة زاوية من خلال

$$(i) \quad \theta_a = \frac{1}{2} \alpha t_a^2.$$

يتم تحديد الإزاحة الزاوية،  $\theta_b$ ، التي تحدث أثناء دوران الحداقة بعجلة زاوية ثابتة،  $\omega$ ، من خلال

$$(ii) \quad \theta_b = \omega(t_b - t_a).$$

يتم تحديد السرعة الزاوية،  $\omega$ ، التي تصل إليها الحداقة بعد تحركها بعجلة زاوية  $\alpha$  لمدة  $t_a$  من خلال

$$(iii) \quad \omega = \alpha t_a.$$

يتم تحديد إجمالي الإزاحة الزاوية من خلال

$$(iv) \quad \theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b.$$

**بسّط** يمكننا أن نجمع المعادلتين (ii) و (iii) للحصول على الإزاحة الزاوية أثناء دوران الحداقة بسرعة زاوية ثابتة:

$$(v) \quad \theta_b = (\alpha t_a)(t_b - t_a) = \alpha t_a t_b - \alpha t_a^2.$$

يمكننا جمع المعادلات (v) و (iv) و (i) للحصول على إجمالي الإزاحة الزاوية للحداقة:

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b = \frac{1}{2} \alpha t_a^2 + (\alpha t_a t_b - \alpha t_a^2) = \alpha t_a t_b - \frac{1}{2} \alpha t_a^2.$$

**احسب** عند التعويض بالقيم العددية، نحصل على

$$\theta_{\text{total}} = \alpha t_a t_b - \frac{1}{2} \alpha t_a^2 = (1.43 \text{ rad/s}^2)(25.9 \text{ s})(59.5 \text{ s}) - \frac{1}{2}(1.43 \text{ rad/s}^2)(25.9 \text{ s})^2$$

$$= 1724.07 \text{ rad.}$$

**قَرِّب** عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها إلى ثلاثة أرقام معنوية، نحصل على  $\theta_{\text{total}} = 1720 \text{ rad}$ .

**تَحَقَّق ثانية** من المشجِّع أن الإجابة بالوحدة الصحيحة وهي rad. تغطي الصيغة، وهي دائمًا أكبر من الصفر، كما هو متوقع، لأن  $t_b > t_a$ . لإجراء مزيد من التحقق، نحسب الإزاحة الزاوية في خطوتين. تمثل الخطوة الأولى في حساب الإزاحة الزاوية أثناء تسارع الحدافة

$$\theta_a = \frac{1}{2} \alpha t_a^2 = \frac{1}{2} (1.43 \text{ rad/s}^2) (25.9 \text{ s})^2 = 480 \text{ rad}.$$

تكون السرعة الزاوية للحدافة بعد انتهاء العجلة الزاوية

$$\omega = \alpha t_a = (1.43 \text{ rad/s}^2) (25.9 \text{ s}) = 37.0 \text{ rad/s}.$$

بعد ذلك نحسب الإزاحة الزاوية أثناء دوران الحدافة بسرعة متجهة ثابتة:

$$\theta_b = \omega (t_b - t_a) = (37.0 \text{ rad/s}) (59.5 \text{ s} - 25.9 \text{ s}) = 1240 \text{ rad}.$$

إذاً يكون إجمالي الإزاحة الزاوية

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b = 480 \text{ rad} + 1240 \text{ rad} = 1720 \text{ rad},$$

وهذا يتوافق مع إجابتنا.

## 9.7 أمثلة أخرى على الحركة الدائرية

لنلق نظرة على مثال آخر ومسألة محلولة يوضحان مدى فائدة مفاهيم الحركة الدائرية التي ناقشناها للتو.

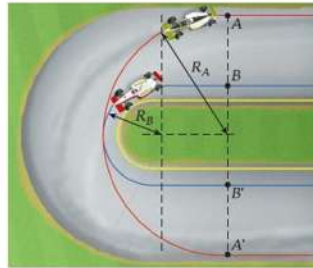
### سباق فورمولا 1

### مثال 9.8

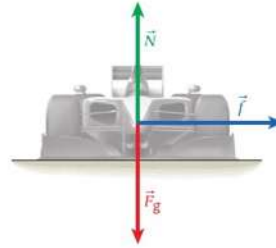
إذا شاهدت أحد سباقات فورمولا 1، فستلاحظ أن سيارات السباق تقترب من المنحنيات من الخارج ثم تخرق إلى الداخل، ثم تنحرف مرة أخرى إلى الخارج، كما هو موضح من خلال المسار الأحمر في الشكل 9.22a. والمسار الأزرق أقصر، لكن لماذا لا يتبع السائقون أقصر مسار؟

### المسألة

لنفترض أن السيارات تتحرك عبر المسار المنحني الموضح في الشكل 9.22a بسرعة ثابتة وأن معامل الاحتكاك السكوني بين الإطارات والطريق هو  $\mu_s = 1.2$  (كما ذكر في الوحدة 4. يمكن أن يكون لإطارات سيارات السباق الحديثة معامل احتكاك يتجاوز 1 عندما تُسخن هذه الإطارات إلى درجة حرارة السباق ومن ثم تصبح شديدة الالتصاق). إذا كان نصف قطر المنحنى الداخلي الموضح في الشكل هو  $R_B = 10.3 \text{ m}$  ونصف قطر المنحنى الخارجي هو  $R_A = 32.2 \text{ m}$  وكانت السيارات تسير بأقصى سرعة لها، فما الزمن الذي تستغرقه السيارة للانتقال من النقطة A إلى A' ومن النقطة B إلى B'؟



(a)



(b)

**الشكل 9.22** (a) مسارات سيارات السباق لاجتياز منعطف على مضمار بيضاوي بطريقتين. (b) مخطط الجسم الحر لسيارة سباق تسير في منحنى.

- يتبع

## الحل

نبدأ برسم مخطط الجسم الحر. كما هو موضح في الشكل 9.22b. يوضح المخطط جميع القوى التي تؤثر في السيارة وتبدأ سهام القوى من مركز كتلة السيارة. قوة الجاذبية، التي تؤثر إلى أسفل بمقدار  $F_g = mg$  موضحة باللون الأحمر. وهذه القوة موازية تماماً للقوة المتعامدة، التي يبدلها الطريق على السيارة، وموضحة باللون الأخضر. عند دوران السيارة، يلزم وجود قوة محصلة لتغيير متجه سرعة السيارة وللعمل كقوة مركزية تدفع السيارة إلى مسار دائري. تنشأ هذه القوة المحصلة من قوة الاحتكاك (الموضحة باللون الأزرق) بين إطارات السيارة والطريق. يتجه سهم هذه القوة أفقياً نحو الداخل. في اتجاه مركز المنحنى. وكالعادة، يكون مقدار قوة الاحتكاك هو ناتج ضرب القوة المتعامدة في معامل الاحتكاك:  $f_{\max} = \mu mg$ . (ملاحظة: في هذه الحالة، نستخدم علامة يساوي، لأن سائقي سيارات السباق يدفعون سياراتهم وإطاراتهم إلى أقصى حد. ومن ثمَّ يصلون إلى أقصى قوة احتكاك سكوني ممكنة.) يكون سهم قوة الاحتكاك أطول من سهم القوة المتعامدة بمعامل مقداره 1.2. وذلك لأن  $\mu_s = 1.2$ . أولاً، نحتاج إلى حساب أقصى سرعة متجهة يمكن أن تصل إليها سيارة سباق على كل مسار. بالنسبة إلى كل نصف قطر للمنحنى،  $R$ ، تتوفر القوة المركزية الناتجة،  $F_c = mv^2/R$ ، من قوة الاحتكاك:  $f_{\max} = \mu mg$

$$m\mu_s g = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_s g R}.$$

إذا بالنسبة إلى المنحنيين الأحمر والأزرق، نحصل على

$$v_{\text{red}} = \sqrt{\mu_s g R_A} = \sqrt{(1.2)(9.81 \text{ m/s}^2)(32.2 \text{ m})} = 19.5 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{blue}} = \sqrt{\mu_s g R_B} = \sqrt{(1.2)(9.81 \text{ m/s}^2)(10.3 \text{ m})} = 11.0 \text{ m/s}.$$

تصل هذه السرعات إلى حوالي 43.6 mph و 24.6 mph فقط. على التوالي! لكن المنحنى الموضح ضيق جداً. وعادة ما نجد في سباق المدينة فقط.

على الرغم من أن السيارة تتحرك بسرعة أكبر بكثير على المنحنى الأحمر. فإن المنحنى الأزرق أقصر من الأحمر. بالنسبة إلى طول مسار المنحنى الأحمر، لدينا ببساطة المسافة على طول نصف الدائرة،  $\ell_{\text{red}} = \pi R_A = 101 \text{ m}$ . بالنسبة إلى طول مسار المنحنى الأزرق، يتعين علينا أن نجمع القطعتين المستقيمتين والمنحنى شبه الدائري ذا نصف القطر الأصغر:

$$\ell_{\text{blue}} = \pi R_B + 2(R_A - R_B) = 76.2 \text{ m}.$$

ثم نحصل على زمن الانتقال من A إلى A' على المسار الأحمر:

$$t_{\text{red}} = \frac{\ell_{\text{red}}}{v_{\text{red}}} = \frac{101 \text{ m}}{19.5 \text{ m/s}} = 5.20 \text{ s}.$$

يستغرق التحرك على طول المنحنى الأزرق من B إلى B

$$t_{\text{blue}} = \frac{\ell_{\text{blue}}}{v_{\text{blue}}} = \frac{76.2 \text{ m}}{11.0 \text{ m/s}} = 6.92 \text{ s}.$$

عند افتراض أن السيارات يلزمها استخدام سرعة ثابتة، يتضح أن اختراق المنحنى يُعد ميزة كبيرة، كما هو موضح من خلال المسار الأحمر.

## مناقشة

في حالة السباق، ليس من المعقول توقُّع أن تتحرك السيارة الموجودة على المسار الأزرق على طول أجزاء المسار المستقيمة بسرعة متجهة ثابتة، لكن سيصل السائق إلى النقطة B بأقصى سرعة تسمح له بالتباطؤ إلى 11.0 m/s عند دخول الجزء الدائري. إذا حللنا ذلك بالتفصيل، فسنجد أن المسار الأزرق لا يزال أبطأ قليلاً. بالإضافة إلى ذلك، يمكن للسيارة التي تتبع المسار الأزرق الوصول إلى النقطة B بسرعة أعلى قليلاً من السرعة التي يمكن للسيارة الحمراء الوصول بها إلى النقطة A. بعبارة أخرى، لدينا مفاضلة يجب مراعاتها قبل الإعلان عن السيارة الفائزة في هذه الحالة. في السباقات الحقيقية، تتباطأ السيارات عندما تقترب من منحنى ما ثم تزيد سرعتها عندما تخرج منه. لا يُعد مسار نصف الدائرة الأحمر هو المسار الأنسب لاختراق المنحنى، لكن المسار الأنسب هو المسار الذي يبدو أقرب إلى الشكل البيضاوي، ويبدأ من خارج المنحنى ثم يخترقه وصولاً إلى أقصى الداخل عند منتصف المنحنى. ثم يتحرف للخارج مرة أخرى مع التسارع أثناء الخروج من المنحنى.

يشتمل سباق فورمولا 1 بشكل عام على مضامير مستوية ومنحنيات ضيقة. تتم سباقات السيارات السريعة إندي وناسكار على مضامير أنصاف أقطار الانعطاف بها أكبر إلى جانب منحنيات مائلة. لدراسة القوى المشاركة في هذا النوع من السباق، يجب علينا الجمع بين مفاهيم الاتزان السكوني على مستوى مائل ومفاهيم الحركة الدائرية.

## سباق ناسكار

## مسألة محلولة 9.4



عندما يسير متسابق مشارك في سباق ناسكار في منحنى مائل، يساعد هذا الميل السائق في تحقيق سرعات أعلى. لتركيب يكون ذلك. يوضح الشكل 9.23 سباق سيارات على منحنى مائل.

## المسألة

إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين سطح المضمار وإطارات السيارة هو  $\mu_s = 0.620$  ونصف قطر المنحنى  $R = 110 \text{ m}$ ، فما أقصى سرعة يمكن للسائق التحرك بها على منحنى مائل بزاوية  $\theta = 21.1^\circ$  (هذه زاوية مائلة نموذجية إلى حد ما لمضامير ناسكار). لكن الميل في إنديانابوليس  $9^\circ$  فقط. لكن توجد بعض المضامير التي لها زوايا ميل تزيد عن  $30^\circ$ ، ومنها دايتونا ( $31^\circ$ ) وتالاديجا ( $33^\circ$ ) وبرستل ( $36^\circ$ ).

## الحل

**فتر** هناك ثلاث قوى تؤثر في سيارة السباق وهي الجاذبية  $\vec{F}_g$  والقوة المتعامدة  $\vec{N}$  والاحتكاك.  $\vec{f}$  ميل المنحنى بزاوية  $\theta$ ، وهي أيضاً الزاوية بين القوة المتعامدة على سطح المضمار ومتجه قوة الجاذبية. كما هو موضح في الشكل 9.24a. لرسم مُتجه قوة الاحتكاك، افترضنا أن السيارة دخلت المنحنى بسرعة عالية، لذا يكون اتجاه قوة الاحتكاك نحو أسفل الميل. على عكس حالة الاتزان السكوني، لا يكون مجموع هذه القوى الثلاث صفراً. لكن مجموعها هو قوة محصلة،  $\vec{F}_{\text{net}}$  كما هو موضح في الشكل 9.24b. يجب أن توفر القوة المحصلة هذه القوة المركزية،  $\vec{F}_c$  التي تدفع السيارة إلى السير في دائرة. ولذا يجب أن تؤثر القوة المحصلة في الاتجاه الأفقي لأنه اتجاه مركز الدائرة التي تتحرك فيها السيارة.

**ارسم** يوضح الشكل 9.24c مخطط الجسم الحر لسيارة السباق على المنحنى المائل، والذي يوضح مركبات القوى  $x$  و  $y$ . تم اختيار اتجاه النظام الإحداثي ليعطي محور  $x$  الأفقي ومحور  $y$  الرأسي.

**ابحث** كما هو الحال في المسائل التي تشتمل على حركة خطية، يمكننا حل المسائل التي تشتمل على حركة دائرية بالبدء بالتوازن الثاني لنيوتن المعروف:  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  وكما هو الحال في الحالة الخطية، يمكننا بشكل عام حل المسائل بالمركبات الديكارتية. من مخطط الجسم الحر في الشكل 9.24c، يمكننا ملاحظة أن مركبات  $x$  للقوى المؤثرة في سيارة السباق هي

$$(i) \quad N \sin \theta + f \cos \theta = F_{\text{net}}$$

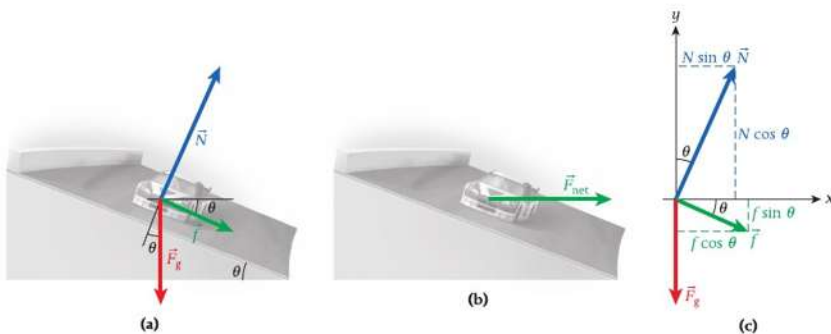
بالمثل، القوى المؤثرة في الاتجاه  $y$  هي

$$(ii) \quad N \cos \theta - F_g - f \sin \theta = 0.$$

والمعادنات، يتم الحصول على أكبر قوة احتكاك من ناتج ضرب معامل الاحتكاك في القوة المتعامدة:  $f = \mu_s N$ . وقوة الجاذبية هي ناتج ضرب الكتلة في عجلة الجاذبية:  $F_g = mg$ .  
 يمثل مفتاح حل هذه المسألة في إدراك أن القوة المحصلة يجب أن تكون هي القوة التي تجعل سيارة السباق تسير في المنحنى، بمعنى أنها توفر القوة المركزية. إذا، باستخدام تعبير القوة المركزية من المعادلة 9.21 نحصل على

$$F_{\text{net}} = F_c = m \frac{v^2}{R}.$$

حيث  $R$  هي نصف قطر المنحنى.



**الشكل 9.24** (a) القوى المؤثرة في سيارة سباق تتحرك على منحنى مائل على مضمار السباق. (b) القوة المحصلة. مجموع القوى الثلاث في الجزء (a). (c) مخطط الجسم الحر الذي يوضح المركبتين  $x$  و  $y$  للقوى المؤثرة في السيارة.

**بسط** نعوض بتعابير أقصى قوة احتكاك وقوة الجاذبية والقوة المحصلة في المعادلتين (i) و(ii) مركبات القوى  $X$  و $Y$ .

$$N \sin \theta + \mu_s N \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N(\sin \theta + \mu_s \cos \theta) = m \frac{v^2}{R}$$

$$N \cos \theta - mg - \mu_s N \sin \theta = 0 \Rightarrow N(\cos \theta - \mu_s \sin \theta) = mg.$$

هذا نظام مكوّن من معادلتين لكميتين مجهولتين: مقدار القوة المتعامدة  $N$  وسرعة السيارة  $v$ . من السهل حذف  $N$  عن طريق قسمة المعادلة الأولى المذكورة أعلاه على المعادلة الثانية:

$$\frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} = \frac{v^2}{gR}.$$

ثم نوجد قيمة  $v$ :

$$(iii) \quad v = \sqrt{\frac{Rg(\sin \theta + \mu_s \cos \theta)}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}}.$$

لاحظ أنه تم إهمال كتلة السيارة،  $m$ . إذا، المهم في هذه الحالة هو معامل الاحتكاك بين الإطارات وسطح المضمار ونصف قطر المنحنى وزاوية الميل.

**احسب** عند التعويض بالأعداد. نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{(110. \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2)[\sin 21.1^\circ + 0.620(\cos 21.1^\circ)]}{\cos 21.1^\circ - 0.620(\sin 21.1^\circ)}} = 37.7726 \text{ m/s}.$$

**قرب** عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها إلى ثلاثة أرقام معنوية. نحصل على  $v = 37.8 \text{ m/s}$ .

**تحقق ثانية** للتحقق ثانية من النتيجة التي حصلنا عليها، تقارن سرعة منحنى مائل بأقصى سرعة يمكن أن تصل إليها سيارة سباق على منحنى له نصف القطر نفسه لكن دون ميل. بدون وجود ميل، تكون القوة الوحيدة التي تُبقي سيارة السباق في المسار الدائري هي قوة الاحتكاك. ثم نختصر النتيجة إلى المعادلة  $v = \sqrt{\mu_s g R}$  التي توصلنا إليها في المثال 9.8. ويمكننا التعويض بالقيم العددية المعطاة هنا للحصول على أقصى سرعة حول منحنى مستو له نصف القطر نفسه:

$$v = \sqrt{\mu_s g R} = \sqrt{(0.620)(9.81 \text{ m/s}^2)(110. \text{ m})} = 25.9 \text{ m/s}.$$

تُعد النتيجة التي توصلنا إليها لأقصى سرعة حول منحنى مائل،  $37.8 \text{ m/s}$ . أكبر بكثير من هذه النتيجة الخاصة بمنحنى مستو،  $25.9 \text{ m/s}$ . وتبدو هذه النتيجة معقولة. لاحظ أن متجه قوة الاحتكاك في الشكل 9.24 يكون على امتداد سطح المضمار نحو داخل المنحنى، مثلما يفعل متجه قوة الاحتكاك للمنحنى غير المائل في الشكل 9.22a. لكن يمكنك ملاحظة أنه عندما تزداد زاوية الميل، فإنها تصل إلى قيمة يقترب عندها مقام صيغة السرعة المتجهة، المعادلة (iii)، من الصفر. يحدث هذا عندما تكون  $\mu_s = \cot \theta$ . بالنسبة إلى الضيقة المعطاة،  $\mu_s = 0.620$ . تساوي هذه الزاوية  $58.2^\circ$ . بالنسبة إلى الزوايا الأكبر، يحتاج السائق إلى الحفاظ على أدنى حد من السرعة أثناء القيادة على المنحنى لمنع السيارة من الانزلاق إلى أسفل الجزء المائل.

### ما تعلمناه ادليل المذاكرة للاختبار

- يتم التحويل بين الإحداثيات الديكارتية،  $x$  و $y$ ، والإحداثيات القطبية،  $r$  و $\theta$ ، من خلال العلاقة  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  و  $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ .
- يتم التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية من خلال العلاقة  $x = r \cos \theta$  و  $y = r \sin \theta$ .
- بالنسبة إلى الحركة الدائرية، ترتبط الإزاحة الخطية،  $s$ ، بالإزاحة الزاوية،  $\theta$ ، من خلال العلاقة  $s = r\theta$ . حيث  $r$  هي نصف قطر المسار الدائري وتقاس  $\theta$  بالراديان.
- يتم تحديد مقدار السرعة الزاوية اللحظية،  $\omega$ ، من خلال العلاقة  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ .
- يرتبط مقدار السرعة الزاوية بمقدار السرعة الخطية  $v$ ، من خلال العلاقة  $v = r\omega$ .
- يتم تحديد مقدار العجلة الزاوية اللحظية،  $\alpha$ ، من خلال العلاقة  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ .
- يرتبط مقدار العجلة الزاوية بمقدار العجلة المماسية،  $a_t$ ، من خلال العلاقة  $a_t = r\alpha$ .

■ معادلات الكينماتيكا للحركة الدائرية هي

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta = \theta_0 + \bar{\omega} t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} (\omega + \omega_0)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0).$$

■ يتم تحديد مقدار العجلة المركزية،  $a_c$ ، اللازمة للحفاظ على حركة جسم ما في دائرة بسرعة زاوية ثابتة من خلال العلاقة

$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

■ مقدار العجلة الكليّة لجسم ما في حالة حركة دائرية هو

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

## إجابات أسئلة الاختبار الذاتي

9.6 إذا تضاعفت نصف القطر، فبتعيين زيادة السرعة في أعلى الحلقة بمعامل مقداره  $\sqrt{2}$ ، ومن ثَمَّ، تصبح السرعة المطلوبة هي  $(7.00 \text{ m/s})(\sqrt{2}) = 9.90 \text{ m/s}$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{t} \int_0^t \omega(t') dt' = \frac{1}{t} \int_0^t (\omega_0 + \alpha t') dt' \quad \text{(iv)} \quad 9.7$$

$$= \frac{\omega_0}{t} \int_0^t dt' + \frac{\alpha}{t} \int_0^t t' dt' = \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha t$$

$$= \frac{1}{2} \omega_0 + \frac{1}{2} (\omega_0 + \alpha t)$$

$$= \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega)$$

$$\bar{\omega} = \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha t \quad \text{(ii)}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} t = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \theta_0 + \bar{\omega} t \quad \text{(v)}$$

$$= \theta_0 + \omega_0 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2$$

$$= \theta_0 + \frac{\omega \omega_0 - \omega_0^2}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega \omega_0}{\alpha}$$

الآن نطرح  $\theta_0$  من طرفي المعادلة ثم نضرب في  $\alpha$ :

$$\alpha(\theta - \theta_0) = \omega \omega_0 - \omega_0^2 + \frac{1}{2} (\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega \omega_0)$$

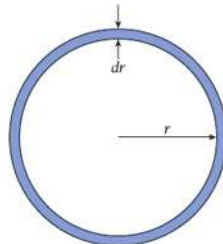
$$\Rightarrow \alpha(\theta - \theta_0) = \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

9.1 الطول التفاضلي للقوس هو  $Rd\theta$  لدائرة نصف قطرها  $R$ ، وتكامل طول القوس حول الدائرة هو المحيط  $C$ :

$$C = \int_0^{2\pi} r d\theta = r \int_0^{2\pi} d\theta = r[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

9.2 المساحة التفاضلية موضحة في الرسم. المساحة التفاضلية هي  $dA = 2\pi r dr$  مساحة الدائرة تساوي



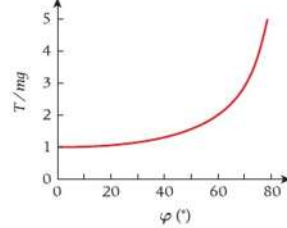
$$\int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r dr$$

$$= 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2.$$

$$\omega^2 r = (2\pi \gamma r)^2 (1 \text{ au}) = 5.9 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 \approx g/1700 \quad 9.3$$

9.4 عندما يكون  $r_1 = 25 \text{ mm}$ ، يكون مقدار العجلة المماسية  $a_t = ar_1 = 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$  ومقدار العجلة المركزية  $a_c = v\omega(r_1) = 59. \text{ m/s}^2$  أي أنه أكبر بما يزيد عن أربع قيم أسية. عندما يكون  $r_2 = 58 \text{ mm}$  تكون قيم العجلات  $a_c = v\omega(r_2) = 25. \text{ m/s}^2$  و  $a_t = ar_2 = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$

9.5



## إرشادات حل المسائل: الحركة الدائرية

2. تأكد من ملاحظة ما إذا كانت الحالة تحتوي على زوايا مقبسة بوحدة الدرجات أم بالراديان. والراديان ليس وحدة من الضروري وجودها أثناء عملية الحساب، لكن تحقق من منطقية نتيجتك بدلالة الوحدات الزاوية.

3. تكون صيغة معادلات الحركة بعجلة زاوية ثابتة تماثلة لمعادلات الحركة بعجلة خطية ثابتة، لكن لا تنطبق أي من مجموعتي المعادلات إذا كانت العجلة غير ثابتة.

1. تشمل الحركة في دائرة دائماً على القوة المركزية والعجلة المركزية، لكن تذكر أن القوة المركزية ليست نوعاً جديداً من القوة لكنها ببساطة القوة المحصلة التي تسبب الحركة، وتتكون من مجموع القوى التي تؤثر في الجسم المتحرك أيًا كانت، وهذه القوة المحصلة تساوي الكتلة مضروبة في العجلة المركزية، واحذر الوقوع في الخطأ الشائع الذي يتمثل في اعتبار الكتلة المضروبة في العجلة قوة يجب جمعها مع القوة المحصلة الموجودة في أحد طرفي معادلة الحركة.

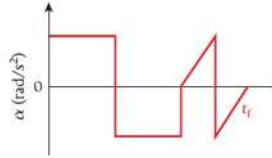


أسئلة الاختيار من متعدد

9.1 جسم يتحرك في مسار دائري، فإذا انعدمت القوة المركزية فجأة، فكيف سيتحرك الجسم؟

- (a) سيتحرك باتجاه نصف القطر إلى الخارج.
- (b) سيتحرك باتجاه نصف القطر إلى الداخل.
- (c) سيتحرك عمودياً إلى أسفل.
- (d) سيتحرك في الاتجاه الذي يشير إليه متجه السرعة في لحظة انعدام القوة المركزية.

9.2 موضع في الشكل العجلة الزاوية لجسم يتحرك حركة دائرية مقابل الزمن. إذا بدأ الجسم من السكون عند  $t = 0$ ، فستكون محصلة الإزاحة الزاوية للجسم عند  $t = t_f$

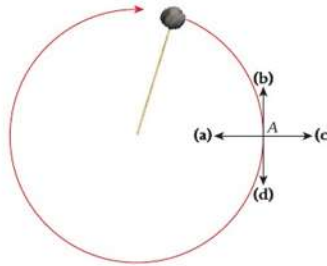


- (a) في اتجاه عقارب الساعة.
- (b) في عكس اتجاه عقارب الساعة.
- (c) تساوي صفراً.
- (d) لا يمكن تحديدها.

9.3 إذا كان خط العرض لمدينة لوبوك بولاية تكساس (المعروفة بالمدينة المحورية للسهول الجنوبية)، يبلغ  $33^\circ \text{ N}$ ، فما سرعة الدوران المحوري لها، على افتراض أن نصف قطر الأرض عند خط الاستواء يساوي  $6380 \text{ km}$

- (a)  $464 \text{ m/s}$
- (b)  $389 \text{ m/s}$
- (c)  $253 \text{ m/s}$
- (d)  $0.464 \text{ m/s}$
- (e)  $0.389 \text{ m/s}$

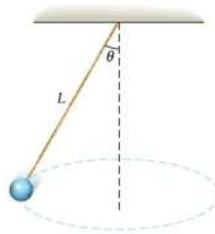
9.4 يتحرك حجر معلق بخيط حركة دائرية منتظمة في اتجاه عقارب الساعة. في أي اتجاه من الخطة A يسقط الحجر عند انقطاع الخيط؟



9.5 تدور العجلة الدوّارة ببطء حول محور أفقي. فإذا كان الراكب جالساً على المقاعد التي تظل أفقية على العجلة الدوّارة أثناء دورانها، فما نوع القوة التي توفر العجلة المركزية للراكب عندما يكونون في أعلى العجلة الدوّارة؟

- (a) الطرد المركزي
- (b) المتعامدة
- (c) الجاذبية
- (d) الشد

9.6 في بندول مخروطي، يتحرك ثقل في دائرة أفقية، كما هو مبين في الشكل. يكون الزمن الدوري للبندول (الزمن الذي يستغرقه الثقل لعمل دورة كاملة)



- (a)  $T = 2\pi\sqrt{L \cos\theta/g}$
- (b)  $T = 2\pi\sqrt{g \cos\theta/L}$
- (c)  $T = 2\pi\sqrt{Lg \sin\theta}$
- (d)  $T = 2\pi\sqrt{L \sin\theta/g}$
- (e)  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

9.7 تتأرجح كرة مربوطة في طرف خيط في مسار دائري نصف قطره  $r$ . فإذا تضاعف نصف القطر وظلت السرعة الخطية ثابتة، فإن العجلة المركزية

- (a) تظل كما هي.
- (b) تزيد بمقدار المثل.
- (c) تقل بمقدار النصف.
- (d) تزيد بمقدار 4 أمثال.
- (e) تقل بمقدار الربع.

9.8 السرعة الزاوية لعقرب الساعة (بوحدة الراديان في الثانية)

- (a)  $\frac{\pi}{21,600}$
- (b)  $\frac{\pi}{7,200}$
- (c)  $\frac{360\pi}{60}$
- (d)  $\frac{\pi}{1,800}$
- (e)  $\frac{\pi}{60}$

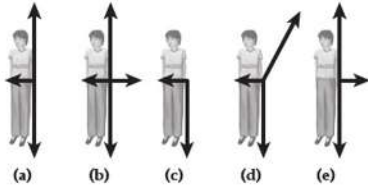
9.9 ضع ثلاث قطع نقد معدنية متباعدة على قرص دوار على مسافات مختلفة من المركز ثم شغل الحرك. عندما تزداد سرعة القرص الدوار، تنزلق قطعة النقد المعدنية الأبعد عن المركز أولاً تليها قطعة النقد المعدنية الموجودة في منتصف المسافة إلى المركز وأخيراً قطعة النقد المعدنية الأقرب من المركز وذلك عندما يدور القرص بأقصى سرعة له، ما سبب ذلك؟

- (a) بالنسبة إلى المسافات الأكثر بُعداً عن المركز، تكون العجلة المركزية أعلى. ومن ثم لا تستطيع قوة الاحتكاك إبقاء قطعة النقد المعدنية في مكانها.
- (b) بتناسب وزن قطعة النقد المعدنية في ميل القرص الدوار إلى أسفل. ومن ثم تسقط قطعة النقد الأقرب إلى الحافة أولاً.
- (c) بسبب المسار الذي يصنعه القرص الدوار. يقل معامل الاحتكاك السكوني عند الابتعاد عن المركز.
- (d) بالنسبة إلى المسافات الأقل بُعداً عن المركز، تكون العجلة المركزية أعلى.

9.10 توجد نقطة ما على قرص Blu-Ray على مسافة  $R/4$  من محور الدوران. كم تبعد نقطة ثانية عن محور الدوران إذا كانت سرعتها الخطية في أي لحظة تساوي ممثلي السرعة الخطية للنقطة الأولى؟

- (a)  $R/16$
- (b)  $R/8$
- (c)  $R/2$
- (d)  $R$

9.11 يوضح الشكل راكباً مستنداً إلى حائط لعمه ترفيحية في الملاهي دون أن يلمس الأرض. ما الخطط الذي يوضح القوى المؤثرة في الراكب بشكل صحيح؟



9.12 يوجد حجر مربوطة في خيط ويتحرك الحجر في مسار دائري بسرعة ثابتة. إذا تم تجاهل الجاذبية ومضاعفة مدة الحركة الدائرية، فإن مقدار الشد في الخيط

- (a) سيقل إلى  $\frac{1}{4}$  قيمته الأصلية.
- (b) سيقل إلى  $\frac{1}{2}$  قيمته الأصلية.
- (c) لن يتغير.
- (d) يزيد إلى ضعف قيمته الأصلية.
- (e) يزيد إلى أربعة أضعاف قيمته الأصلية.

9.13 توجد دراجة نصف قطر عجلتها  $33.0 \text{ cm}$ ، وتتحرك بسرعة تصل إلى  $6.5 \text{ m/s}$ ، فما السرعة الزاوية للإطار الأمامي؟

- (a)  $0.197 \text{ rad/s}$
- (b)  $1.24 \text{ rad/s}$
- (c)  $5.08 \text{ rad/s}$
- (d)  $19.7 \text{ rad/s}$
- (e)  $215 \text{ rad/s}$

**9.15** في المسألة الخلوثة 9.1، ما السرعة التي يجب أن تكون عليها العربة الأفقونية في أسفل الخلفة لتسبب الشعور بانعدام الوزن في أعلى الخلفة؟

15.7 m/s (d)	7.00 m/s (a)
21.4 m/s (e)	12.1 m/s (b)
	13.5 m/s (c)

**9.16** يوضح الشكل 9.16a مخطط الجسم الحر للقوى المؤثرة في أحد ركاب العربة الأفقونية في أعلى الخلفة. قارن بين السرعة الزاوية والعجلة الزاوية لمنطقة ما في من مدار قوة الجاذبية. إذا كانت سرعة العربة  $7.00 \text{ m/s}$ ، فكم يكون نصف قطر الخلفة اللازم لكي يصبح مخطط الجسم الحر صحيحاً؟

أقل من $5 \text{ m}$ (a)	$5 \text{ m}$ (b)	أكثر من $5 \text{ m}$ (c)
--------------------------	-------------------	---------------------------

**9.14** تبلغ مدة دوران الأرض حول محورها  $24 \text{ h}$ . وعند هذه السرعة الزاوية، تكون العجلة المركزية عند سطح الأرض صغيرة مقارنة بالعجلة الناتجة عن الجاذبية. ما مدة دوران الأرض اللازمة ليصبح مقدار العجلة المركزية على سطحها عند خط الاستواء مساوياً لمقدار العجلة الناتجة عن الجاذبية؟ (مع مدة الدوران هذه، يمكنك الارتفاع قليلاً عن سطح الأرض!)

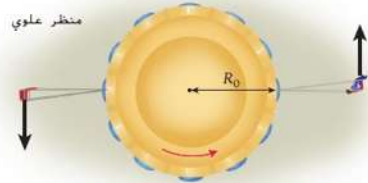
1.41 h (d)	0.043 h (a)
3.89 h (e)	0.340 h (b)
12.0 h (f)	0.841 h (c)

## أسئلة مفاهيمية

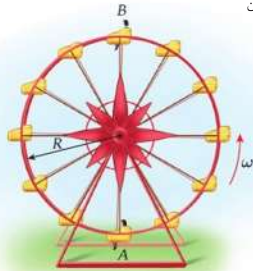
**9.17** تدور مروحة سقف في اتجاه عقارب الساعة (عند النظر إليها من أسفل). لكنها تنبسط. ما اتجاهات  $\omega$  و  $\gamma$ ؟

**9.18** يوجد خطاف معلق أعلى خشبية المسرح يتحمل  $150 \text{ kg}$ . يُربط به حبل كتلته  $3.00 \text{ kg}$ . وسبحانك مثل وزنه  $66.7 \text{ kg}$  التارنج على هذا الحبل فوق خشبية المسرح. هل سيتحمل الحبل المثل أثناء التارنج؟

**9.19** تتكون إحدى أعقاب الملاهي من مقاعد متصلة بغرض مركزي بواسطة كيلاز. كما هو موضح في الشكل. ويتحرك الركاب في حركة دائرية منتظمة. تبلغ كتلة أحد الركاب (أ) في ذلك المقعد الذي يجلس عليه  $65 \text{ kg}$ ، وكتلة مقعد فارغ على الجانب المقابل من الغرض المركزي  $5.0 \text{ kg}$ . إذا كانت  $\theta_1$  و  $\theta_2$  هما الزاويتان اللتان يكوّنهما الكيلاز المتصلان بالمقعدين مع المستوى الرأسي، فقارن بين هاتين الزاويتين نوعياً؟ هل  $\theta_2$  أكبر من أم أصغر من أم تساوي  $\theta_1$ ؟



**9.20** شخص يركب عجلة دؤارة نصف قطرها  $R$ . وتدور بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$ . قارن بين القوة المتعامدة للمقعد التي تدفع الشخص إلى أعلى عند النقطة  $A$  والقوة عند النقطة  $B$  في الشكل. أي من الغوتين أكبر. أم هما متساويتان؟



**9.21** يتراوح مقدار قطر إطار الدراجة بين  $25 \text{ cm}$  و  $70 \text{ cm}$  تقريباً. لماذا يُعد تصميم إطار قطره أصغر بكثير من  $25 \text{ cm}$  أمراً غير عملي؟ (استعرف السبب في أنه لا يمكن لإطارات الدراجة أن تكون كبيرة جدًا في الوحدة 10).

**9.22** يبدأ قرص مضغوط حركته من السكون ثم تزداد سرعته إلى التردد الزاوي لتشفيل مشغّل الأقراص المضغوطة. قارن بين السرعة الزاوية والعجلة الزاوية لمنطقة ما على حافة القرص المضغوط والسرعة الزاوية والعجلة الزاوية لمنطقة ما في منتصف المسافة بين المركز وحافة القرص المضغوط. كرر الأمر مع السرعة الخطية والعجلة الخطية.

**9.23** تتحرك سيارة على منحني غير مائل بأقصى سرعة. ما القوة (القوى) المسؤولة عن الحفاظ على بقائها على الطريق؟

**9.24** تتدلى كتلتان من خيطين لهما الطول نفسه مثبتين في سقف سيارة. توجد إحدى الكتلتين فوق مقعد السائق والأخرى فوق مقعد الراكب. عندما تتعطف السيارة بشدة، تتأرجح كلتا الكتلتين بعيداً عن مركز المنحنى. في مواضعهما الناتجة عن الانعطاف، هل ستزيد المسافة بينهما أم ستقل أم ستظل كما هي قبل انعطاف السيارة؟

**9.25** تبدأ كتلة نقطية  $m$  الانزلاق من ارتفاع  $h$  على طول السطح عمود الاحتكاك الموضح في الشكل. ما الحد الأدنى لقيمة  $h$  اللازم لتكمل الكتلة خلفة نصف قطرها  $R$ ؟



**9.26** في بندول مخروطي. يتحرك الثقل المثبت في الخيط (يمكن اعتباره عمود الكتلة) في دائرة أفقية بسرعة ثابتة. يتحرك الخيط في شكل مخروط مع دوران الثقل. ما القوى المؤثرة في الثقل؟

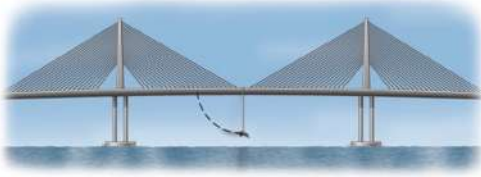
**9.27** هل يمكن أرجحة كتلة متصلة بخيط في مسار دائري أفقي تماماً (مع جعل الكتلة والخيط موازيين للأرض)؟

**9.28** تبدأ قطعة ثلج صغيرة كتلتها  $m$ . الحركة من السكون من أعلى وعاء مزلوب على شكل نصف كرة، كما هو موضح في الشكل. والوعاء الذي على شكل نصف كرة مثبت على الأرض وتتراق قطعة الثلج بدون احتكاك على طول سطح الوعاء نصف الكروي. أوجد القوة المتعامدة التي تبذلها قطعة الثلج على الوعاء نصف الكروي عندما يشكل الخيط بين الكتلة ومركز الجسم الكروي زاوية  $\theta$  مع المستوى الأفقي. ناقش النتيجة.



**9.29** افترض أنك تركب إحدى العربات الأفقونية التي تتحرك في حلقة دائرية رأسية. أثبت أن وزنك الظاهري عند الجزء السفلي من الخلفة يساوي ستة أضعاف وزنك عندما تشعر بانعدام الوزن في الجزء العلوي. بغض النظر عن حجم الخلفة، وإمهال الاحتكاك.

**9.30** وقع الحدث التالي بالفعل على جسر صن شابين سكاني واي بالقرب من سانت بطرسبرغ في فلوريدا. في عام 1997، ربط خمسة أشخاص كيلاً طوله  $55 \text{ m}$  بمركز الجسر. وكانوا يريدون التارنج للأمام والحلف أسفل الجسر عند طرف هذا الكيل. ربط الأشخاص الخمسة أنفسهم (اللون الكلي =  $W$ ) بطرف الكيل. عند المستوى نفسه وبعيداً عن المكان الذي رُبطوا فيه الكيل بالجسر بمسافة

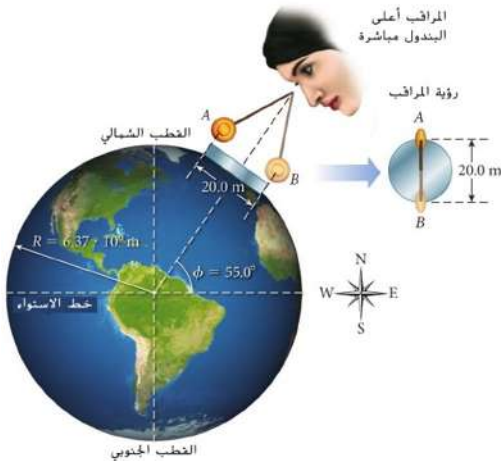


قدرها 55 m وستخطوا مباشرة من الجسر، واتبعوا المسار الدائري المنقطع الموضَّح في الشكل. لسوء الحظ، لم يكن هؤلاء الأشخاص على دراية جيدة بقوانين الفيزياء وانقطع الكبل (من نقطة ارتباطه بمقاعدهم) عند الجزء السفلي من أرجوحاتهم. حدد مدى قوة الكبل (وجميع الوصلات التي تربط المقاعد والجسر) التي يتعين أن يكون عليها لتحلُّ الأشخاص الخمسة في الجزء السفلي من الأرجوحة. عبّر عن نتيجتك بدلالة الوزن الكلي لهم،  $W$ .

## تمارين

(c) هناك طريقة أخرى للتعبير عن إجابة الجزء (b) بدلالة الزاوية بين الخطوط المرسومة بين الشمس والأرض والمريخ في حالة الطرفين الأكثر قرباً. فما هذه الزاوية؟

●● 9.39 افترض وجود بندول بسيط كبير عند خط عرض  $55.0^\circ N$  ويتأرجح من الشمال إلى الجنوب حيث القطعتان  $A$  و  $B$  تقطعا التآرجح في أقصى الشمال وأقصى الجنوب بالترتيب. ينظر مراقب ثابت (بالنسبة إلى النجوم الثابتة) مباشرة إلى أسفل على البندول في اللحظة الموضَّحة في الشكل. تدور الأرض حول محورها مرة واحدة كل 23 h و 56 min.



(a) ما اتجاهات السرعات المتجهة (بدلالة  $E$  و  $N$  و  $W$  و  $S$ ) ومقاديرها لسطح الأرض عند النقطتين  $A$  و  $B$  كما يراها المراقب؟ ملاحظته، ستحتاج إلى حساب الإجابات وتقريبها إلى سبعة أرقام معنوية على الأقل لملاحظة الفرق.

(b) ما السرعة الزاوية التي تدور بها دائرة قطرها 20.0 m أسفل البندول؟

(c) ما مدة هذا الدوران؟

(d) ما الذي سيحدث لبندول يتأرجح عند خط الاستواء؟

## القسم 9.4

9.40 إذا كنت تمسك محور عجلة دراجة نصف قطرها 35.0 cm وكتلتها 1.00 kg، وقيمت بتدوير العجلة بمعدل 75.0 rpm ثم أوقفنا بضغط الإطار على الرصيف، ولاحظت أن العجلة تستغرق 1.20 s لتتوقف تماماً. فما مقدار العجلة (الزاوية للعجلة)؟

9.42 استخدم علماء الحياة أجهزة الطرد المركزي فائقة السرعة لفصل المكونات البيولوجية أو لإزالة الجزيئات من العُلقات. يتم تدوير العينات الموجودة في مجموعة

يشير رقم المسألة الأزرق إلى توفر حل في دليل حلول الطالب. تشير علامة النقطه الواحدة والنقطتين ●● إلى زيادة مستوى صعوبة المسألة.

## القسم 9.2

9.31 ما الزاوية التي تتحركها الأرض في مدارها أثناء الشتاء بالبرادبان؟

9.32 مع افتراض أن الأرض كروية، وتذكّر أن نطاق خطوط العرض يتراوح بين  $0^\circ$  عند خط الاستواء و  $90^\circ N$  عند القطب الشمالي. ما المسافة بين دوبوك وأبوا (خط عرض  $42.50^\circ N$ ) ومدينة غواتيمالا (خط عرض  $14.62^\circ N$ ) عند قياسها على سطح الأرض؟ تقع المدينتان على خط الطول نفسه تقريباً. لا تُهمل انحناء الأرض عند تحديد هذه المسافة.

9.33 ارجع إلى المعلومات الواردة في المسألة 9.32. إذا كان بإمكان شخص الاختباء داخل الأرض وحفر نفق مستقيم من دوبوك إلى مدينة غواتيمالا، فكم سيبلغ طول هذا النفق؟ من وجهة نظر الحفار، عند أي زاوية أسفل المستوى الأفقي سيتم توجيه النفق؟

## القسم 9.3

9.34 تم رمي كرة بيسبول بسرعة مقدارها 141.6 kph تقريباً وبمعدل دوران 110 rpm. إذا كانت المسافة بين نقطة إطلاق اللاعب للكرة وقفاز ملتصق الكرة تساوي 18.3 m، فكم عدد الدورات الكاملة التي تصنعها الكرة بين الإطلاق والالتقاط؟ يمكنك تجاهل أي تأثير لجاذبية أو مقاومة الهواء المبدولة أثناء طيران الكرة.

9.35 يدور مسجل فينتيل بمعدل 33.3 rpm. افترض أنه يستغرق 5.00 s ليصل إلى السرعة الكاملة، بدءاً من السكون.

(a) ما مقدار العجلة الزاوية له خلال 5.00 s؟

(b) كم عدد الدورات التي يقوم بها المسجل قبل وصوله إلى السرعة الزاوية النهائية له؟

9.36 في أحد الملاهي، أخذ صبي دميتيه معه عند ركوب العجلة الدوّارة العملاقة. لكن لسوء الحظ، عند الجزء العلوي من اللعبة، سقطت منه الدمية دون قصد. فإذا كان قطر العجلة 12.0 m ويرتفع الجزء السفلي منها بمقدار 2.00 m عن الأرض وتتحرك حافتها بسرعة 1.00 m/s، فكم سيكون البعد بين قاعدة العجلة الدوّارة والمكان الذي تستقطق فيه الدمية؟

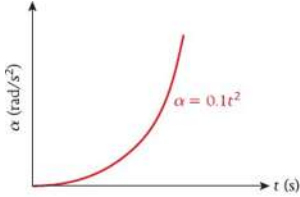
9.37 قام الصبي في المسألة 9.36، بعد أن اعتاد الأمر، بدعوة اثنين من أصدقائه وطلب من كل واحد منهم أخذ دميتيه معه وركبوا العجلة الدوّارة نفسها. جلس الصبية في مقاعد يبعد كل منها عن الآخر بزاوية  $45.0^\circ$ . عندما يصل الصبي الثاني في العجلة الدوّارة إلى أقصى ارتفاع، تسقط الصبية الثلاث ذمامهم، ما المسافة بين الذمى الثلاث عندما تستقطق؟

9.38 يدور المريخ حول الشمس على بُعد 228 مليون km. خلال 687 يوماً، وتدور الأرض حولها على بُعد 149.6 مليون km. خلال 365.26 يوماً.

(a) افترض أنه تم تحديد موقع الأرض والمريخ بحيث تقع الأرض على خط مستقيم بين المريخ والشمس. فبعد مرور 365.26 يوماً بالضبط، عندما تكمل الأرض دورة واحدة، ما مقدار الزاوية بين خط الأرض والشمس وخط المريخ والشمس؟

(b) تعتبر الحالة الأولى في الجزء (a) هي أقرب طريق للمريخ إلى الأرض، ما مقدار الوقت، بالأيام، بين الطرفين الأكثر قرباً؟ افترض أن كلا من الأرض والمريخ يتحرك بسرعة ثابتة وفي مدارات دائرية.

المتجهة القطرية للحلقة صفراً عند موقعها الابتدائي، وهو على بُعد  $r_0 = 0.300 \text{ m}$  من الطرف المثبت. حدّد السرعة المتجهة القطرية للحلقة عندما تصل إلى طرف القضيب المتحرك.



●● 9.49 حدافة قطرها  $1.00 \text{ m}$ . كانت في وضع السكون في البداية، وموضّح في الشكل تمثّل العجلة الزاوية لها مقابل الزمن.

(a) ما مقدار الاضطلاع الزاوي بين الوضوح الابتدائي لتخلقة ثابتة على حافة الحدافة وموضّح التخلقة بعد مرور  $8.00 \text{ s}$  من بدء دوران العجلة؟

(b) تبدأ التخلقة حركتها عند  $\theta = 0$ . احسب الموقع الخطي ومتجه السرعة ومتجه التخلقة بعد مرور  $8 \text{ s}$  من بدء دوران العجلة وارسمهم.

### القسم 9.5

9.50 احسب القوة المركزية المبذولة على مركبة كتلتها  $m = 1500 \text{ kg}$  وتتحرك بسرعة  $15.0 \text{ m/s}$  حول منحني نصف قطره  $R = 400 \text{ m}$ . ما القوة التي تؤدي دور القوة المركزية في هذا الحالة؟

9.51 في المسألة المحلولة 9.1، كم يساوي الوزن الظاهري لراكب العربة الأفعوانية في الجزء السفلي من الحلقة؟

9.52 يتحرك المتزلجان A و B اللذان لهما الكتلة نفسها، حركة دائرية منتظمة في اتجاه عقارب الساعة على الجليد. والفترات الزمنية لحركتهما متساوية، لكن نصف قطر دائرة المتزلج B يساوي ضعف نصف قطر دائرة المتزلج A.

(a) ما النسبة بين سرعتي المتزلجين؟

(b) ما النسبة بين مقادير القوى المؤثرة في كل متزلج؟

● 9.53 يلامس جسم

صغير كتلته  $m$  الجدار

الداخلي لأسطوانة جوفاء

كبيرة. لتفترض أن معامل

الاحتكاك السكوني بين

الجسم وجدار الأسطوانة

هو  $\mu_s$  في البداية. تكون

الأسطوانة في وضع سكون.

ويُنبت الجسم في مكانه عن

طريق وتد يدعم وزنه. ثم

تبدأ الأسطوانة في الدوران

حول محورها المركزي. كما

هو موضّح في الشكل، بعجلة

زاوية  $\alpha$ . أوجد الحد الأدنى

الفترة الزمنية بعد أن تبدأ الأسطوانة في الدوران. قبل أن يصبح من الممكن إزالة

الوتد دون انزلاق الجسم على الجدار.

● 9.54 تتحرك سيارة سباق عبر مسار منحني بسرعة ثابتة. ومعامل الاحتكاك بين الإطارات والمضمار  $\mu_s = 1.20$ . إذا كان نصف قطر المنحني  $10.0 \text{ m}$ . فما أقصى سرعة يمكن أن تتعطف بها السيارة دون أن تنزلق؟ افترض أن السيارة تسير بحركة دائرية منتظمة.

● 9.55 تتحرك سيارة بسرعة فوق قيمة أحد التلال. إذا كان نصف قطر انحناء قمة التل  $9.00 \text{ m}$ . فما السرعة التي يمكن أن تتحرك بها السيارة مع الحفاظ على ملامستها للأرض بصورة مستمرة؟

● 9.56 توجد كرة كتلتها

$m = 0.200 \text{ kg}$  متصلة بخيط

(عديم الكتلة) طوله  $L = 1.00 \text{ m}$

وتتحرك حركة دائرية في المستوى

الأفقي، كما هو موضّح في الشكل.

(a) ارسم مخطط الجسم الحر للكرة.

(b) ما القوة التي تلعب دور القوة

المركزية؟

(c) ما سرعة الكتلة المطلوبة لكي يصل قياس  $\theta$  إلى  $45.0^\circ$ ؟

(d) ما مقدار الشد المؤثر في الخيط؟

متساوية من الحاويات بسرعة حول محور مركزي. تمثّل العجلة المركزية التي تتعرض لها العينات في مناطق الإسناد المتحرك الخاص بها "جاذبية اصطناعية" لإحداث فصل سريع. إذا كانت حاويات العينات تقع على بُعد  $10.0 \text{ cm}$  من محور الدوران. فما مقدار تردد الدوران اللازم لإنتاج عجلة مقدارها  $1.00 \times 10^3 \text{ g}$ ؟

● 9.43 يدور جهاز طرد مركزي في مختبر طبي بسرعة زاوية مقدارها  $3600 \text{ rpm}$  (دورة في الدقيقة). وعند إيقاف تشغيله، يدور  $60.0$  مرة قبل التوقف. أوجد العجلة الزاوية الثابتة لجهاز الطرد المركزي.

9.44 يبدأ رامي قرص معدني (طول ذراعها  $1.20 \text{ m}$ ) من السكون ثم يدور في عكس اتجاه عقارب الساعة بعجلة زاوية مقدارها  $2.50 \text{ rad/s}^2$ .

(a) ما المدة التي تستغرقها سرعة رامي القرص المعدني لتصل إلى  $4.70 \text{ rad/s}$ ؟

(b) كم عدد الدورات التي يقوم بها الرامي للوصول إلى السرعة  $4.70 \text{ rad/s}$ ؟

(c) ما مقدار السرعة الخطية للقرص المعدني عند  $4.70 \text{ rad/s}$ ؟

(d) ما مقدار العجلة الخطية لرامي القرص المعدني عند هذه التخلقة؟

(e) ما مقدار العجلة المركزية للقرص المعدني الذي تم رميه؟

(f) ما مقدار العجلة الكلية للقرص المعدني؟

9.45 في أحد معارض الألعاب مبتجر كبير، يدور قرص صغير (القرص 1) نصف قطره  $0.100 \text{ m}$  واسطحة محرك ثم يعمل على تدوير قرص أكبر (القرص 2) نصف قطره  $0.500 \text{ m}$ . ويعمل القرص 2 بدوره على تدوير القرص 3 الذي يبلغ نصف قطره  $1.00 \text{ m}$  وتكون الأقراص الثلاث متصلة ولا يوجد انزلاق. يلاحظ أن القرص 3 يتم دورة كاملة كل  $30.0 \text{ s}$ .

(a) ما السرعة الزاوية للقرص 3؟

(b) ما نسبة السرعات المتجهة المماسية لحواف الأقراص الثلاثة؟

(c) ما السرعات الزاوية للقرصين 1 و 2؟

(d) إذا حدث خلل في المحرك كما تسبب في توليد عجلة زاوية مقدارها  $0.100 \text{ rad/s}^2$  للقرص 1، فما مقدار الجولات الزاوية للقرصين 2 و 3؟

● 9.46 يتحرك جسم ما في اتجاه عقارب الساعة

في دائرة نصف قطرها  $1.00 \text{ m}$ . وعند لحظة معينة،

يكون مقدار عجلته يساوي  $a = |\vec{a}| = 25.0 \text{ m/s}^2$

ويصنع متجه العجلة زاوية  $\theta = 50.0^\circ$  مع متجه

الموقع، كما هو موضّح في الشكل. في هذه اللحظة،

أوجد السرعة  $v = |\vec{v}|$  لهذا الجسم.

● 9.47 في جهاز تسجيل شريطي، يتحرك

الشريط المغناطيسي بسرعة خطية ثابتة مقدارها

$5.60 \text{ cm/s}$ . وللحفاظ على هذه السرعة الخطية

الثابتة، يجب تغيير السرعة الزاوية لبيكرة التشغيل

(بيكرة السحب) وفقاً لذلك.

(a) ما مقدار السرعة الزاوية لبيكرة السحب عندما تكون فارغة، إذا كان نصف

قطرها  $r_1 = 0.800 \text{ cm}$ ؟

(b) ما مقدار السرعة الزاوية عندما تكون البيكرة ممتلئة، إذا كان نصف قطرها

$r_2 = 2.20 \text{ cm}$ ؟

(c) إذا كان إجمالي طول الشريط  $100.80 \text{ m}$ . فما متوسط العجلة الزاوية لبيكرة

السحب أثناء تشغيل الشريط؟

●● 9.48 تم تثبيت حلقة بدون إحكام (لا يوجد احتكاك) حول قضيب طويل أملس

طوله  $L = 0.500 \text{ m}$ . والقضيب مثبت من أحد طرفيه في حين يدور الطرف الآخر

في مسار دائري أفقي بسرعة زاوية ثابتة مقدارها  $\omega = 4.00 \text{ rad/s}$ . تبلغ السرعة

في

في

في

في

في

في

في

في

في

في

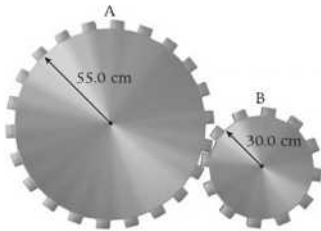
في

في

في

في

**9.63** تتحرك سيارة بعجلة منتظمة من السكون وتصل إلى السرعة  $22.0 \text{ m/s}$  في غضون  $5.00 \text{ s}$ . وقطر إطار هذه السيارة يساوي  $58.0 \text{ cm}$ .  
 (a) أوجد عدد الثورات التي يقوم بها الإطار أثناء حركة السيارة، مع افتراض عدم حدوث أي انزلاق.  
 (b) ما السرعة الزاوية النهائية للإطار بوحدة الدورة في الثانية؟



**9.64** يلامس الترس A، الذي كتلته  $1.00 \text{ kg}$  ونصف قطره  $55.0 \text{ cm}$ . الترس B، الذي كتلته  $0.500 \text{ kg}$  ونصف قطره  $30.0 \text{ cm}$ . ولا ينزلق الترسان فوق بعضهما أثناء دورتهما. إذا كان الترس A يدور بسرعة  $120 \text{ rpm}$  وتنخفض إلى  $60.0 \text{ rpm}$  في غضون  $3.00 \text{ s}$ . فكم عدد دورات الترس B خلال هذه الفترة الزمنية؟

**9.65** تلف نحلة دورة لمدة  $10.0 \text{ min}$  وتبدأ بسرعة زاوية  $10.0 \text{ rev/s}$ . أوجد العجلة الزاوية لها. مع افتراض أنها ثابتة. وكذلك إجمالي الإزاحة الزاوية لها.

**9.66** توجد قطعة نقد معدنية على حافة قرص فونوغراف قديم يدور بسرعة  $33.0 \text{ rpm}$  وقطره  $30.5 \text{ cm}$  ما الحد الأدنى لمعامل الاحتكاك السكوني بين قطعة النقد المعدنية وسطح القرص لضمان عدم سقوط قطعة النقد المعدنية؟

**9.67** يدور مسجل فينيل في البداية بمدد  $33\frac{1}{3} \text{ rpm}$  ثم يتباطأ بانتظام حتى يتوقف خلال  $15.0 \text{ s}$ . فكم عدد دورات المسجل حتى يتوقف؟

**9.68** أوجد التسريعين والمجتلين الخطية والزاوية لثغرة من الأتربة توجد على بُعد  $2.00 \text{ cm}$  من مركز قرص مضغوط يدور داخل مُسْتَقْلَ أقراص مضغوطة بسرعة  $250. \text{ rpm}$ .

**9.69** ما عجلة الأرض في مدارها؟ (مع افتراض أن المدار دائري).

**9.70** يبلغ طول اليوم على كوكب المريخ  $24.6$  ساعة على كوكب الأرض. ويبلغ طول العام على كوكب المريخ  $687$  يوماً على كوكب الأرض. كيف يمكن المقارنة بين السرعات الزاوية للدوران الجوهري لكوكب المريخ ومداره والسرعات الزاوية للدوران الجوهري لكوكب الأرض ومداره؟

**9.71** شاحنة عجلة قطر إطاراتها  $1.10 \text{ m}$  وتسير بسرعة  $35.8 \text{ m/s}$  بعد استخدام المكابح. تنخفض سرعة الشاحنة بشكل منتظم وتتوقف تماماً بعدما تدور الإطارات  $40.2$  لفة.

(a) ما السرعة الزاوية الابتدائية للإطارات؟  
 (b) ما العجلة الزاوية للإطارات؟  
 (c) ما المسافة التي تقطعها الشاحنة قبل أن تتوقف تماماً؟

**9.72** يُدير محرك مروحة عجلة صغيرة نصف قطرها  $2.00 \text{ cm}$ ، وتعمل هذه العجلة على تدوير حزام مربوط في عجلة نصف قطرها  $r_1 = 3.00 \text{ cm}$  مُثَبَّتة على محور ريش مروحة. عند القياس من مركز هذا المحور. تكون أطراف ريش المروحة على مسافة  $r_2 = 15.0 \text{ cm}$ . عند تشغيل المروحة، يدور المحرك بسرعة زاوية قدرها  $1200. \text{ rpm}$ .  $\omega =$  ما السرعة المماسية لأطراف ريش المروحة؟

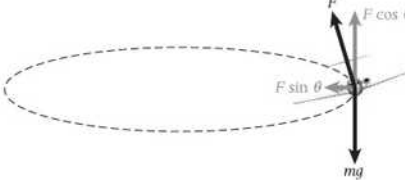
**9.73** تتحرك سيارة كتلتها  $1000 \text{ kg}$  فوق تل بسرعة ثابتة قدرها  $60.0 \text{ m/s}$  يمكن تقدير قمة التل بطول قوس في دائرة نصف قطرها احتماؤها  $370. \text{ m}$ . ما القوة التي يتبدلها السيارة على التل وهي تعبر القمة؟

**9.74** على عكس السفينة. لا تستخدم الطائرة دفة التوجيه الخاصة بها للانعطاف. لكنها تنحرف عن طريق إمالة جناحها، لقوة الرفع المتعامدة على الجناحين مُرَكَّبَةٌ أفقية توفر العجلة المركزية عند الانعطاف ومُرَكَّبَةٌ رأسية تدعم وزن الطائرة. تتأوم دفة التوجيه زاوية الانحراف ومن ثمَّ تُحَاطَظ على بقاء الطائرة في الاتجاه الذي تتحرك فيه. نظير طائرة تتحرك فيه. نظير طائرة التجسس الشهيرة، Blackbird 71-SR. بسرعة  $4800 \text{ km/h}$  ونصف قطر انعطافها  $290 \text{ km}$ . أوجد زاوية الميل.

**9.75** طيار كتلته  $80.0 \text{ kg}$  في طائرة تسير بسرعة ثابتة  $500 \text{ m/s}$  يعمل على استعادة وضع الطيران بعد هبوط عمودي على طول قوس دائرة نصف قطرها  $4000 \text{ m}$ .

(a) أوجد العجلة المركزية والقوة المركزية المؤثرة في الطيار.  
 (b) ما الوزن الظاهري للطيار عند أدنى مستوى للهبوط؟

**9.57** تُسافر بالطائرة إلى شيكاغو لغضاء عطلة نهاية الأسبوع بعيداً عن الكئيب المدرسية. وتعلمت في حصة الفيزياء الأخيرة أن تدفق الهواء على جناحي الطائرة يولد قوة رفع. تؤثر بشكل عمودي في الجناحين. عندما تكون الطائرة في مستوى الطيران. يكون هناك توازن تام بين قوة الرفع المتجهة إلى أعلى وقوة الوزن المتجهة إلى أسفل. ونظراً لأن مطار أوهر من المطارات الأكثر ازدحاماً في العالم، فلن نشعر بالدهشة عندما يُعلم قائد الطائرة أن الرحلة دخلت دائرة الانتظار بسبب كثافة الرحلات. ويُبلغ القائد المسافرين بأن الطائرة سَتُحَلَّقُ في دائرة نصف قطرها  $11.3 \text{ km}$  بسرعة  $579.4 \text{ kph}$  على ارتفاع  $609.6 \text{ m}$ . من خلال الاطلاع على بطاقة معلومات السلامة، يمكن أن تعرف أن الطول الكلي لامتداد جناحي الطائرة يساوي  $83.9 \text{ m}$ . واستناداً إلى هذه المعلومات، احسب زاوية ميل الطائرة بالنسبة إلى المستوى الأفقي.



**9.58** توضع أسطوانة معدنية كتلتها  $20.0 \text{ g}$  على قرص دوار. بحيث يبعد مركزها مسافة قدرها  $80.0 \text{ cm}$  عن مركز القرص الدوار. ومعامل الاحتكاك السكوني بين الأسطوانة وسطح القرص الدوار  $\mu_s = 0.800$ . ويوجد خيط رفيع عديم الكتلة طوله  $80.0 \text{ cm}$  يربط مركز القرص الدوار بالأسطوانة. وفي البداية، كان شد الخيط صفرًا. تحرك القرص الدوار من السكون ووصل بيضاء شديد إلى سرعات زاوية أعلى. لكن يمكن افتراض أن القرص الدوار والأسطوانة في حركة دائرية منتظمة في أي لحظة. احسب مقدار الشد في الخيط عندما تكون السرعة الزاوية للقرص الدوار  $60.0 \text{ rpm}$  (دورة في الدقيقة).

**9.59** منعطف على مضمار السباق نصف قطر احتناؤه  $R$ . ويُميل بزاوية  $\theta$  فوق المستوى الأفقي.

(a) ما السرعة المثلى التي يتم اجتياز المنعطف بها إذا كان سطح المضمار مغطى بالجليد (أي هناك احتكاك بسيط للغاية بين الإطارات والمسار)؟  
 (b) إذا كان سطح المضمار خالياً من الجليد وكان هناك معامل احتكاك  $\mu_s$  بين الإطارات والمضمار، فما الحد الأقصى والحد الأدنى للسرعات التي يمكن اجتياز هذا المنعطف بها؟  
 (c) احسب ناغ الجزء (a) وناغ الجزء (b) عندما يكون  $R = 400. \text{ m}$  و  $\theta = 45.0^\circ$  و  $\mu_s = 0.700$ .

**تمارين إضافية**

**9.60** تدور إحدى العجلات الدوارة بالركاب في دائرة رأسية نصف قطرها  $9.00 \text{ m}$  مرة واحدة كل  $12.0 \text{ s}$ .

(a) احسب سرعة الركاب. مع افتراض أنها ثابتة.  
 (b) ارسم مخطط الجسم الحر لإحدى الركابتين عندما تكون في الجزء السفلي من الدائرة. احسب القوة العمودية التي يتبدلها المقعد على الركابة عند هذه النقطة من اللعبة.

(c) أجز التحليل نفسه كما في الجزء (b) لنقطة ما في الجزء العلوي من اللعبة.

**9.61** ركب فتى عجلة دوارة تلف به في دائرة رأسية نصف قطرها  $9.00 \text{ m}$  مرة واحدة كل  $12.0 \text{ s}$ .

(a) ما السرعة الزاوية للعجلة للدوارة؟  
 (b) افترض أن العجلة تتوقف بمدد منتظم أثناء الربع الأول من الدورة. فما العجلة الزاوية للعبة خلال هذا الوقت؟

(c) احسب العجلة المماسية للفتى خلال الفترة الزمنية المحددة في الجزء (b).

**9.62** افترض أنّ شفرة جزاة العشب التي طولها  $53.0 \text{ cm}$  تدور حول مركزها بسرعة  $3400 \text{ rpm}$ .

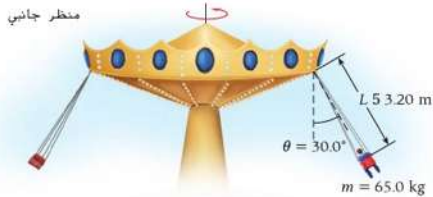
(a) احسب السرعة الخطية لطرف الشفرة.  
 (b) إذا كانت لوائح السلامة تشترط إمكانية إيقاف الشفرة في غضون  $3.00 \text{ s}$ . فما الحد الأدنى للعجلة الزاوية الذي سيتحقق هذا عنده مع افتراض أن العجلة الزاوية ثابتة.

الحلبة بزاوية  $30.0^\circ = \varphi$  تم قياسها من المستوى الرأسي داخل السيارة. ما قوة الاحتكاك السكوني بين السيارة والطريق؟

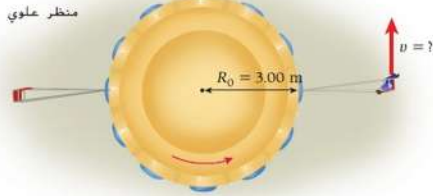
●● **9.81** تتكون إحدى ألعاب الملاهي الشهيرة من متاعد متصلة بقرص مركزي بواسطة كبلات. ويتحرك الركاب في حركة دائرية منتظمة. وكما يتضح من الشكل. يبلغ نصف قطر القرص المركزي  $R_0 = 3.00 \text{ m}$  وطول الكبل  $L = 3.20 \text{ m}$  وكتلة أحد الركاب هما في ذلك المقعد الذي يجلس عليه، هي  $65.0 \text{ kg}$ .

(a) إذا كانت الزاوية  $\theta$  التي يكوّنها الكبل مع المستوى الرأسي  $30.0^\circ$ . فما سرعة،  $v$ . هذا الراكب؟  
(b) ما مقدار القوة التي يبذلها الكبل على المقعد؟

منظر جانبي



منظر علوي



●● **9.76** كرة كتلتها  $1.00 \text{ kg}$  متصلة بخيط طوله  $1.00 \text{ m}$  وتدور في دائرة رأسية بسرعة ثابتة  $10.0 \text{ m/s}$ .

(a) حدد مقدار الشد في الخيط عندما تصبح الكرة عند أعلى الدائرة.  
(b) حدد مقدار الشد في الخيط عندما تصبح الكرة عند أسفل الدائرة.  
(c) افترض أن الكرة في نقطة ما بخلاف الجزء العلوي والسفلي. ماذا يمكنك قوله عن مقدار الشد في الخيط عند هذه النقطة؟

●● **9.77** تبدأ سيارة حركتها من السكون وتحرك بعجلة حول منحنى مستو نصف قطره  $R = 36.0 \text{ m}$ . وتظل المركبة المناسبة لعجلة السيارة ثابتة عند  $a_c = 3.30 \text{ m/s}^2$ . بينما تزيد العجلة المركزية لإبقاء السيارة على المنحنى لأطول فترة ممكنة. ومعامل الاحتكاك بين الإطارات والطريق  $\mu = 0.950$ . ما المسافة التي تقطعها السيارة حول المنحنى قبل انزلاقها؟ تأكد من تصميم المركبات المناسبة والمركبة للعجلة.

●● **9.78** تحل فتاة راكبة في لعبة دوامة الخيل بندولاً في يدها. يعيد البندول عن محور دوران اللعبة بمقدار  $6.00 \text{ m}$  وسرعة دوران اللعبة  $0.0200 \text{ rev/s}$ . فإذا كان البندول يتدل بزاوية  $\theta$  على المستوى الرأسي. فأوجد  $\theta$ .

●● **9.79** يبلغ قطر لعبة دوامة الخيل في الملاهي  $6.00 \text{ m}$  وتبدأ اللعبة من السكون ثم تتحرك بعجلة زاوية ثابتة حتى تصل إلى سرعة زاوية مقدارها  $0.600 \text{ rev/s}$  في  $8.00 \text{ s}$ .

(a) ما قيمة العجلة الزاوية؟  
(b) ما العجلات المركزية والزاوية لمعد ما على دوامة الخيل يبعد عن محور الدوران مسافة قدرها  $2.75 \text{ m}$ ؟  
(c) ما إجمالي العجلة ومقدارها واتجاهها بعد مرور  $8.00 \text{ s}$  من بدء العجلة الزاوية؟

●● **9.80** نتعطف سيارة وزنها  $W = 10.0 \text{ kN}$  على طريق مائل بزاوية  $\theta = 20.0^\circ$ . توجد حلقة داخل السيارة تتدلى من خيط قصير مربوط بالمرآة الخلفية. عند انعطاف السيارة. تتأرجح



## تمارين بمعطيات متعددة

●● **9.82** في "تاندرا إسفير". تتحرك دراجة نارية داخل جسم كروي وتسير في مسار دائري أفقي على طول خط استواء هذا الجسم الكروي. نصف القطر الداخلي لهذا الجسم الكروي  $12.61 \text{ m}$ . ومعامل الاحتكاك السكوني بين إطارات الدراجة النارية والسطح الداخلي للجسم الكروي هو  $0.4601$ . ما الحد الأدنى للسرعة الذي يجب أن تحافظ عليه الدراجة النارية لتتأدي السقوط؟

●● **9.83** في "تاندرا إسفير". تتحرك دراجة نارية داخل جسم كروي وتسير في مسار دائري أفقي على طول خط استواء هذا الجسم الكروي. يبلغ نصف القطر الداخلي لهذا الجسم الكروي  $13.75 \text{ m}$ . وتحافظ الدراجة النارية على سرعة مقدارها  $17.01 \text{ m/s}$ . ما أدنى قيمة لمعامل الاحتكاك السكوني بين إطارات الدراجة النارية والسطح الداخلي للجسم الكروي لضمان عدم سقوط الدراجة النارية؟

●● **9.84** في "تاندرا إسفير". تتحرك دراجة نارية داخل جسم كروي وتسير في مسار دائري أفقي على طول خط استواء هذا الجسم الكروي. تحافظ الدراجة النارية على سرعة مقدارها  $15.11 \text{ m/s}$ . ومعامل الاحتكاك السكوني بين إطارات الدراجة النارية والسطح الداخلي للجسم الكروي يساوي  $0.4741$ . ما أقصى نصف قطر يمكن أن يصل إليه الجسم الكروي بحيث لا تسقط الدراجة النارية؟

●● **9.85** عندما تكون السرعة الخطية لأطراف الريشة الدوارة لمروحة طائرة أكبر من سرعة الصوت. تُصدر المروحة ضوءاً كثيرة غير مرغوب فيها. إذا دارت الريشة بمعدل  $2403 \text{ rpm}$ . فما أقصى طول يمكن أن تصل إليه بدون أن تتجاوز الأطراف سرعة الصوت؟ افترض أن سرعة الصوت تساوي  $343.0 \text{ m/s}$  وأن الريشة تدور حول مركزها.

●● **9.86** عندما تكون السرعة الخطية لأطراف الريشة الدوارة لمروحة طائرة أكبر من سرعة الصوت. تُصدر المروحة ضوءاً كثيرة غير مرغوب فيها. إذا كان طول الريشة من طرف إلى آخر يساوي  $2.601 \text{ m}$ . فما أقصى تردد زاوي (بوحدته الدورة في الدقيقة) يمكن أن تدور به الريشة؟ افترض أن سرعة الصوت تساوي  $343.0 \text{ m/s}$  وأن الريشة تدور حول مركزها.

●● **9.87** إذا كان طول نصف قطر العجلات الخلفية لسيارة رياضية يساوي  $46.65 \text{ cm}$  وتبدأ السيارة الرياضية حركتها من السكون حتى تصل إلى سرعة  $29.13 \text{ m/s}$  خلال  $3.945 \text{ s}$  بعجلة ثابتة. فما العجلة الزاوية للعجلات الخلفية للسيارة؟ افترض أن العجلات تدور دون أن تنزلق.

●● **9.88** طول نصف قطر العجلات الخلفية لسيارة رياضية يساوي  $48.95 \text{ cm}$  وتحرك السيارة الرياضية من السكون بعجلة ثابتة لمدة  $3.997 \text{ s}$ . والعجلة الزاوية للعجلات الخلفية هي  $14.99 \text{ s}^{-2}$ . ما السرعة الخطية النهائية للسيارة؟ افترض أن العجلات تدور دون أن تنزلق.

●● **9.89** إذا كانت هناك سيارة رياضية تتحرك بعجلة ثابتة من السكون حتى تصل إلى سرعة  $29.53 \text{ m/s}$  خلال  $4.047 \text{ s}$ . والعجلة الزاوية للعجلات الخلفية هي  $17.71 \text{ s}^{-2}$ . فما نصف قطر العجلات الخلفية؟ افترض أن العجلات تدور دون أن تنزلق.

●● **9.90** إذا كانت هناك حذافة نصف قطرها  $27.01 \text{ cm}$  وتدور بتردد  $4949 \text{ rpm}$ . فما العجلة المركزية عند نقطة ما على حواف الحذافة؟

●● **9.91** حذافة نصف قطرها  $31.59 \text{ cm}$  وتدور بتردد ثابت. فإذا كانت العجلة المركزية عند نقطة ما على حافة الحذافة هي  $8.629 \times 10^4 \text{ m/s}^2$ . فما تردد دوران الحذافة (rpm)؟

# 10

## الحركة الدورانية



الشكل 10.1 محرك نفاث حديث.

**تسحب** المراوح الضخمة المثبتة في الجزء الأمامي من المحركات النفاثة الحديثة، كمثل الموضحة في الشكل 10.1، الهواء إلى غرفة ضغط حيث يمتزج الهواء بالوقود ويشتعل. يدفع الاشتعال الغازات خارج الجزء الخلفي من المحرك، منتجةً بذلك الدفعة التي تحرك الطائرة إلى الأمام. تدور هذه المراوح بسرعة 7000-9000 rpm ويجب فحصها باستمرار، فلا أحد يرغب في أن تنكسر شفرة مروحة على ارتفاع 9.66 km. تحتوي معظم المحركات تقريباً على أجزاء دوارة تنقل الطاقة إلى جهاز الإخراج، الذي يكون دواراً أيضاً في الغالب. في الحقيقة، فإن معظم الأجسام في هذا الكون تدور. بداية من الجزيئات وحتى النجوم والمجرات، يوضح الشكل 10.2 الدوران المحوري على نطاق كبير (إعصار) وعلى نطاق هائل (مجرة حلزونية). علاوةً على ذلك، ففي عام 2011 قام فريق من خمسة طلاب جامعيين بجامعة ميتشيجان بتحليل عينة كبيرة من المجرات ووجدوا أدلة على أن الكون كله يدور. ولذلك فإن القوانين التي تحكم الدوران المحوري مهمة للغاية كأي جزء آخر في علم الميكانيكا. قدمت الوحدة 9 بعض المفاهيم الأساسية للحركة الدائرية، وتتناول هذه الوحدة بعضاً من تلك الأفكار مثل السرعة الزاوية والعجلة الزاوية ومحور الدوران. وفي هذه الوحدة، نستكمل المقارنة بين الكميات الانتقالية والدورانية، وتتعرف على قانون آخر لحفظ الطاقة له أهمية كبيرة: قانون حفظ كمية الحركة الزاوية.

- 285 **ما سنتعلمه**
- 285 **10.1 الطاقة الحركية للدوران المحوري**
- 285 الحركة الدائرية لجسيم تقطبي
- 285 الحركة الدائرية لعدة جسيمات نقطية
- 286 **10.2 حساب عزم التصور الذاتي**
- 287 الدوران المحوري حول محور عبر مركز الكتلة
- مثال 10.1 الطاقة الحركية
- 292 **الدورانية للأرض**
- 292 نظرية المحور الموازي
- 293 **10.3 التدرج دون انزلاق**
- مسألة محلولة 10.1 تدرج جسم كروي على مستوى مائل
- 294 مثال 10.2 سباق التدرج على سطح مائل
- 295 مسألة محلولة 10.2 تدرج كرة عبر طوق
- 296 **10.4 عزم الدوران**
- 297 ذراع العزم
- 297 **10.5 قانون نيوتن الثاني للدوران المحوري**
- 298 مثال 10.3 ورق المراوح
- 301 آلة أتوود
- مسألة محلولة 10.3 سقوط ساق أفقي
- 302 **10.6 الشغل المبذول من عزم الدوران**
- 303 مثال 10.4 ربط مسبار
- 304 مثال 10.5 تثبيت برغي
- 305 مسألة محلولة 10.4 آلة أتوود
- 306 **10.7 كمية الحركة الزاوية**
- 306 الجسيم النقطي
- 307 نظام الجسيمات
- 307 الأجسام الصلبة
- 308 مثال 10.6 كرة الجولف
- 309 حفظ كمية الحركة الزاوية
- 310 مثال 10.7 موت نجم
- 311 مثال 10.8 الحاققة
- مسألة محلولة 10.5 اصطدام رصاصة بعمود
- 312 **10.8 المبادرة**
- 313 **10.9 كمية الحركة الزاوية المحكبة**
- 314 **ما تعلمناه / دليل المذاكرة للاختبار**
- 315 إرشادات حل المسائل
- 316 أسئلة الاختبار من متعدد
- 317 أسئلة مفاهيمية
- 318 تمارين
- 322 تمارين معطيات متعددة

## ما سنتعلمه

- يجب حساب الطاقة الحركية الناتجة عن الحركة الدورانية للجسم عند دراسة حفظ الطاقة.
- عند دوران جسم دائري حول محور ما عبر مركز كتلته، فإن عزم القصور الذاتي يتناسب مع ناتج كتلة الجسم ومربع أكبر مسافة عمودية بدايةً من أي جزء من الجسم إلى محور الدوران. وتتراوح قيمة ثابت التناسب بين صفر وواحد اعتماداً على شكل الجسم.
- عند الدوران حول محور مواز لمحور آخر عبر مركز كتلة جسم ما، فإن عزم القصور الذاتي يساوي عزم القصور الذاتي لمركز الكتلة بالإضافة إلى ناتج كتلة الجسم ومربع المسافة بين المحورين.
- بالنسبة إلى الأجسام المتحركة، تكون الطاقات الحركية للدوران والإزاحة مرتبطة ببعضها.
- عزم الدوران هو ناتج الضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومنتجه القوة.
- ينطبق قانون نيوتن الثاني أيضاً على الحركة الدورانية.
- تُعرف كمية الحركة الزاوية بأنها ناتج الضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومنتجه كمية الحركة.
- توجد علاقات مشابهة لتلك الموجودة في الكميات الخطية بين كمية الحركة الزاوية وعزم الدوران وعزم القصور الذاتي والسرعة الزاوية والعجلة الزاوية.
- يوجد قانون آخر أساسي لحفظ الطاقة وهو قانون حفظ كمية الحركة الزاوية.



(a)



(b)

## 10.1 الطاقة الحركية للدوران المحوري

تعلّمنا في الوحدة 8 أنه يمكن وصف حركة جسم غير نقطي بدلالة المسار الذي يتبعه مركز كتلته والدوران المحوري للجسم حول مركز كتلته. ولكن على الرغم من أننا قد درسنا الحركة الدائرية للجسيمات النقطية في الوحدة 9 فإننا لم نتطرق بعد إلى دوران الأجسام غير النقطية. ومن ثم فإن تحليل هذه الحركة هو الهدف من هذه الوحدة.

## الحركة الدائرية للجسيم النقطي

تناولت الوحدة 9 الكميات الكينماتيكية للحركة الدائرية. وقد درسنا تعريف السرعة الزاوية،  $\omega$ ، والعجلة الزاوية،  $\alpha$ ، بدلالة المشتقات الزمنية للإزاحة الزاوية،  $\theta$ ،

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

وجدنا أن الكميات الزاوية مرتبطة بالكميات الخطية على النحو التالي:

$$s = r\theta, \quad v = r\omega,$$

$$a_t = r\alpha, \quad a_c = \omega^2 r, \quad a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2},$$

حيث  $s$  هو طول القوس و  $v$  هو السرعة الخطية لمركز الكتلة و  $a_t$  هو العجلة المماسية و  $a_c$  هو العجلة المركزية و  $a$  هو العجلة الخطية.

إن أقصر طريق لتتبع الكميات المادية لوصف الدوران المحوري هو الطاقة الحركية للدوران لجسم غير نقطي. في الوحدة 5 المتعلقة بالشغل والطاقة، تم تعريف الطاقة الحركية لجسم متحرك بأنها

$$(10.1) \quad K = \frac{1}{2}mv^2.$$

إذا كانت حركة هذا الجسم دائرية، فيمكننا استخدام العلاقة بين السرعة الخطية الزاوية للحصول على

$$(10.2) \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2,$$

وهي **الطاقة الحركية للدوران المحوري** لحركة جسيم نقطي على محيط دائرة نصف قطرها  $r$  حول محور ثابت، كما هو موضح في الشكل 10.3.



محور الدوران

## الشكل 10.3 جسيم نقطي يتحرك

في دائرة حول محور الدوران.



## الحركة الدائرية لعدة جسيمات نقطية

كما فعلنا في الوحدة 8 عند إيجاد موقع مركز الكتلة في نظام الجسيمات، سنبدأً بمجموعة من الأجسام الدوارة المنفردة ثم نتناول النهاية المستمرة. نحدد الطاقة الحركية لمجموعة من الأجسام الدوارة من خلال

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega_i^2.$$

هذه النتيجة ببساطة هي نتاج استخدام معادلة 10.2 مع عدة جسيمات نقطية وتسجيل الطاقة الحركية الكلية كمجموع للطاقات الحركية الفردية. وهنا  $\omega$  هي السرعة الزاوية للجسيم  $i$  و  $r_i$  هي المسافة العمودية من  $i$  إلى محور ثابت. هذا المحور الثابت هو **محور الدوران** لهذه الجسيمات. ويوضح الشكل 10.4 مثالاً لنظام مكون من خمسة جسيمات نقطية دوارة.

الآن يمكننا افتراض أن كل الجسيمات النقطية التي قمنا بجمع طاقاتها الحركية نحتفظ بمسافات ثابتة في ما بينها ومسافات بينها وبين محور الدوران. بعد ذلك ستمر جميع الجسيمات النقطية الموجودة في النظام بحركة دائرية حول محور الدوران المشترك بالسرعة الزاوية نفسها. ومع هذا الفيد، يصبح مجموع الطاقات الحركية للجسيمات

$$(10.3) \quad K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

تسمى الكمية  $I$  المقدمة في معادلة 10.3 **عزم القصور الذاتي**، وتعرف أيضًا باسم **القصور الدوراني**. ويعتمد هذا فقط على كتل الجسيمات الفردية والمسافات التي تفصلها عن محور الدوران:

$$(10.4) \quad I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

تعلمنا في الوحدة 9 أن كل الكميات المرتبطة بالحركة الدائرية لها مكافئات في الحركة الخطية. وتشكل السرعة الزاوية  $\omega$  والسرعة الخطية  $v$  ذلك الزوج. بمقارنة تعبيرات الطاقة الحركية للدوران المحوري (في المعادلة 10.3) والطاقة الحركية للحركة الخطية (المعادلة 10.1). نجد أن عزم القصور الذاتي  $I$  يلعب الدور نفسه مع الحركة الدائرية مثلما تفعل الكتلة  $m$  مع الحركة الخطية.

## 10.2 حساب عزم القصور الذاتي

يمكننا استخدام عزم القصور الذاتي للعديد من الجسيمات النقطية، كما هو موضح في المعادلة 10.4. كنقطة بداية لإيجاد عزم القصور الذاتي لجسم غير نقطي. سوف نسلك النهج نفسه الذي سلكتنا لإيجاد موقع مركز الكتلة في الوحدة 8. وسوف نتمثل جسمنا غير نقطي مرة أخرى عن طريق مجموعة من المعكبات الصغيرة المتماثلة للحجم  $V$  ولكثافة الكتلة  $\rho$  (التي قد تكون مختلفة). ثم تصبح المعادلة 10.4

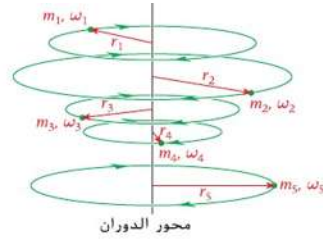
$$(10.5) \quad I = \sum_{i=1}^n \rho(\vec{r}_i) r_i^2 V.$$

مرة أخرى، وكما فعلنا في الوحدة 8، سنستعمل نهج حساب التفاضل والتكامل التقليدي. ليقرب حجم المعكبات من الصفر،  $V \rightarrow 0$ . وعند هذه النهاية، يقرب المجموع في المعادلة 10.5 من التكامل، للتوصل إلى تعبير عزم القصور الذاتي لجسم غير نقطي:

$$(10.6) \quad I = \int_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV.$$

يمثل الرمز  $r_{\perp}$  المسافة العمودية لعامل الحجم المتناهي من محور الدوران (الشكل 10.5). نعرف أيضًا أنه يمكن الحصول على الكتلة الكلية لجسم ما عن طريق تكامل كثافة الكتلة مع إجمالي حجم الجسم.

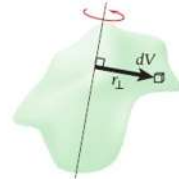
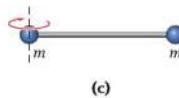
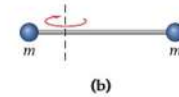
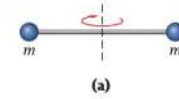
$$(10.7) \quad M = \int_V \rho(\vec{r}) dV.$$



الشكل 10.4 تتحرك خمسة جسيمات نقطية في دوائر حول محور دوران مشترك.

## 10.1 مراجعة المفاهيم

فكر في كتلتين متساويتين،  $m$ ، متصلتين بساق رفيع عدم الكتلة. كما توضح الأشكال، تدور الكتلتان في مستوى أفقي حول محور رأسي يمثّل بخط متقطع. ما النظام الذي يحظى بأعلى عزم قصور ذاتي؟



الشكل 10.5 تعريف  $r_{\perp}$  بأنه المسافة العمودية لعنصر حجم متناهي الصغر من محور الدوران.

تعتبر المعادلتان 10.6 و 10.7 أكثر التعبيرات عمومية لعزم العصور الذاتي وكتلة جسم غير نقطي. ولكن كما هو الحال مع معادلات مركز الكتلة، فبعض الحالات الأكثر أهمية من الناحية الفيزيائية هي التي تكون فيها كثافة الكتلة ثابتة مع اختلاف الحجم. في هذه الحالة، تُختصر المعادلتان 10.6 و 10.7 إلى

$$I = \rho \int_V r_{\perp}^2 dV \quad (\text{للكثافة الكتلية الثابتة } \rho),$$

$$M = \rho \int_V dV = \rho V \quad (\text{للكثافة الكتلية الثابتة } \rho).$$

ومن ثمَّ، يُحدد عزم العصور الذاتي لجسم ذي كثافة كتلية ثابتة من خلال

$$(10.8) \quad I = \frac{M}{V} \int_V r_{\perp}^2 dV \quad (\text{للكثافة الكتلية الثابتة } \rho).$$

يمكننا الآن حساب عزم العصور الذاتي لبعض الأجسام ذات الأشكال المحددة. أولاً، سنفترض أن محور الدوران يمرّ عبر مركز كتلة الجسم. ثم سنشتق نظرية تربط هذه الحالة الخاصة بالحالة العامة بطريقة بسيطة، حيث لا يمرّ محور الدوران عبر مركز الكتلة.

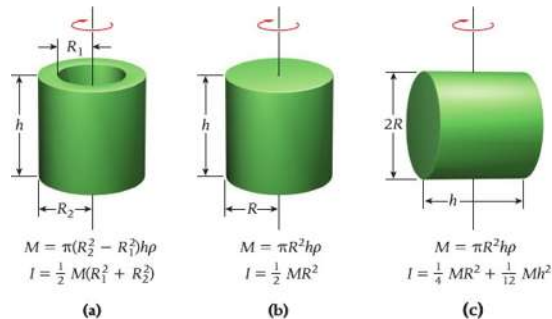
### الدوران حول محور ما عبر مركز الكتلة

بالنسبة إلى أي جسم ذي كثافة كتلية ثابتة، يمكننا استخدام المعادلة 10.8 لحساب عزم العصور الذاتي بدلالة الدوران حول محور ثابت يمرّ عبر مركز كتلة الجسم. بطريقة بسيطة، يتم اختيار موقع مركز الكتلة عادةً كمتطّعة أصل النظام الإحداثي. ولأن التكامل في المعادلة 10.8 تكامل حجم ثلاثي الأبعاد، فإن اختيار النظام الإحداثي يكون عادةً في غاية الأهمية لحساب التكامل بأقل قدر ممكن من العمل الحسابي.

سندرس في هذا القسم حالتين، وهما أسطوانة جوفاء وجسم كروي صلب. وتمثل هاتان الحالتان القشتين الأكثر شيوعاً للأجسام التي يمكنها الدوران. كما يوضحان استخدام نظامين إحداثيين مختلفين للتكامل. يوضح الشكل 10.6a أسطوانة جوفاء تدور حول محور تماثلها. وعزم العصور الذاتي لها هو

$$(10.9) \quad I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) \quad (\text{أسطوانة جوفاء}).$$

هذه هي النتيجة العامة لعزم العصور الذاتي لأسطوانة جوفاء تدور حول محور تماثلها، حيث  $M$  هو الكتلة الكلية للأسطوانة  $R_1$  هو نصف قطرها الداخلي و  $R_2$  هو نصف قطرها الخارجي.



**الشكل 10.6** عزم العصور الذاتي لـ (a) أسطوانة جوفاء و (b) أسطوانة صلبة تدور حول محور التماثل. (c) عزم العصور الذاتي لأسطوانة تدور حول محور عبر مركز كتلتها ولكنها عمودية على محور تماثلها.

وباستخدام المعادلة 10.9 يمكن الحصول على عزم القصور الذاتي لأسطوانة صلبة تدور حول محور تماثلها (انظر الشكل 10.6b) بتحديد  $R_1 = R$  و  $R_2 = 0$ :

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (\text{أسطوانة صلبة}).$$

يمكن أيضًا الحصول على حالة التقييد لجأوة أو طوق أسطواني رقيق. حيث تتركز كل الكتلة على المحيط. بتحديد  $R_1 = R_2 = R$ . وفي هذه الحالة. يكون عزم القصور الذاتي

$$I = MR^2 \quad (\text{طوق أو هيكل أسطواني رقيق}).$$

وفي النهاية. يُحدد عزم القصور الذاتي لأسطوانة صلبة بارتفاع  $h$  تدور حول محور عبر مركز الكتلة ولكنها عمودية على محور تماثلها (انظر الشكل 10.6c) من خلال

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 \quad (\text{أسطوانة صلبة، عمودية على محور الدوران}).$$

إذا كان نصف القطر  $R$  صغيرًا للغاية مقارنة بالارتفاع  $h$ . كما هو الحال في ساق طويل ورقيق. يُحدد عزم القصور الذاتي عند هذه النهاية من خلال إسقاط الحد الأول من المعادلة السابقة:

$$I = \frac{1}{12}Mh^2 \quad (\text{ساق رقيق طوله } h \text{ عمودي على محور الدوران}).$$

سوف تشتق صيغة عزم القصور الذاتي لأسطوانة جوفاء باستخدام تكامل حجم من النوع الموضح في القسم 8.4. ويتضمن هذا التكامل عمليات تكامل أحادية الأبعاد منفصلة على كل إحداثي من الإحداثيات الثلاثة. ويُظهر هذا الاشتقاق والذي يليه كيفية إجراء عمليات التكامل هذه للإحداثيات الأسطوانية والكروية. ومع أنها ليست ضرورية للمفاهيم الفيزيائية المعروضة في هذه الوحدة. فإنها قد تكون معلومة مهمة بالنسبة إليك.

## 10.1 الاشتقاق عزم القصور الذاتي لعجلة

لاشتقاق عزم القصور الذاتي لأسطوانة جوفاء ذات كثافة ثابتة  $\rho$  وارتفاع  $h$  ونصف قطر داخلي  $R_1$  ونصف قطر خارجي  $R_2$ . ومحور تماثل مماثل لمحور الدوران (انظر الشكل 10.6a). سوف نستخدم الإحداثيات الأسطوانية. بالنسبة إلى معظم المسائل التي تتضمن أسطوانات أو أقراصًا. يجب أن يكون النظام الإحداثي المستخدم أسطوانيًا بوجه عام. ففي هذا النظام (انظر مناقشة التكاملات الحجمية في القسم 8.4). يحدد عنصر الحجم عن طريق (انظر الشكل 10.7)

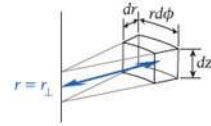
$$dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\phi dz.$$

في الإحداثيات الأسطوانية (وقفظ في الإحداثيات الأسطوانية). تكون المسافة العمودية  $r_{\perp}$ . مائلة للإحداثي القطري.  $r$ . ويوضع هذا في الاعتبار. يمكن حساب تكاملات الأسطوانة الجوفاء. بالنسبة إلى الكتلة. نحصل على

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_V dV = \rho \int_{R_1}^{R_2} \left( \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} dz \right) d\phi r_{\perp} dr_{\perp} \\ &= \rho h \int_{R_1}^{R_2} \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) r_{\perp} dr_{\perp} \\ &= \rho h 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r_{\perp} dr_{\perp} \\ &= \rho h 2\pi \left( \frac{1}{2} R_2^2 - \frac{1}{2} R_1^2 \right) \\ &= \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho. \end{aligned}$$

وبالمثل. يمكن التعبير عن الكثافة كدالة للكتلة:

$$(i) \quad M = \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) h}.$$



الشكل 10.7 عنصر الحجم بالإحداثيات الأسطوانية.

قد لا يكون سبب أداء هذه الخطوة الأخيرة واضحاً تماماً حالياً. ولكنه سيتضح بعد حساب التكامل لعزم العصور الذاتي:

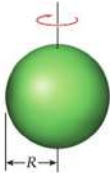
$$\begin{aligned} I &= \rho \int_V r_{\perp}^2 dV = \rho \int_{R_1}^{R_2} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{-h/2}^{h/2} dz \right) d\phi \right) r_{\perp}^3 dr_{\perp} \\ &= \rho h \int_{R_1}^{R_2} \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) r_{\perp}^3 dr_{\perp} \\ &= \rho h 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r_{\perp}^3 dr_{\perp} \\ &= \rho h 2\pi \left( \frac{1}{4} R_2^4 - \frac{1}{4} R_1^4 \right). \end{aligned}$$

والآن يمكن أن نعوض عن الكثافة من المعادلة (i).

$$I = \frac{1}{2} \rho h \pi (R_2^4 - R_1^4) = \frac{M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) h} \frac{1}{2} h \pi (R_2^4 - R_1^4).$$

وأخيراً. نستخدم المتطابقة  $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$  للحصول على المعادلة 10.9:

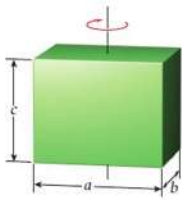
$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2).$$



$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

(a)



$$M = abc\rho$$

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

(b)

**الشكل 10.8** عزم العصور الذاتي لـ (a) جسم كروي و (b) قالب.

بالنسبة إلى الأجسام بخلاف تلك الأجسام قرصية الشكل. قد لا يكون استخدام الإحداثيات الأسطوانية مفيداً. والأهم أن هذه الأجسام هي أجسام كروية وقوالب مستطيلة. ويُحدد عزم العصور الذاتي لجسم كروي يدور حول أي محور عبر مركز كتلته (انظر الشكل 10.8a) عن طريق

$$(10.10) \quad I = \frac{2}{5} MR^2 \text{ (جسم كروي صلب).}$$

وعزم العصور الذاتي لهيكل كروي رقيق يدور حول أي محور عبر مركز كتلته هو

$$I = \frac{2}{3} MR^2 \text{ (هيكل كروي رقيق).}$$

عزم العصور الذاتي لقالب مستطيل بأطوال أضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$  يدور حول محور ما عبر مركز الكتلة ويشكل موازٍ للضلع  $c$  (انظر الشكل 10.8b)

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) \text{ (قالب مستطيل الشكل).}$$

ومرة أخرى. سوف نشق صيغة الجسم الكروي الصلب فقط لكي نوضح العمل في نظام إحداثي مختلف.

## عزم العصور الذاتي لجسم كروي

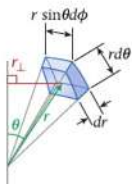
## الاشتقاق 10.2

عند حساب عزم العصور الذاتي لجسم كروي صلب (الشكل 10.8a) ذي كثافة كتلية ثابتة  $\rho$  ونصف قطر  $R$  يدور حول محور ما عبر مركزه. لا يُفضل استخدام الإحداثيات الأسطوانية. وتكون الإحداثيات الكروية الاختيار الأفضل. ففي الإحداثيات الكروية. يُحدد عنصر الحجم عن طريق (انظر الشكل 10.9)

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

لاحظ أنه في الإحداثيات الكروية لا يكون الإحداثي القطري  $r$  والمسافة العمودية  $r_{\perp}$  متطابقين. ولكنهما يرتبطان عن طريق (انظر الشكل 10.9)

$$r_{\perp} = r \sin \theta.$$



**الشكل 10.9** عنصر الحجم بالإحداثيات الكروية.

- يُتبع

(من الأخطاء الشائعة للغاية في هذه الأنواع من الحسابات أن يتم حذف جيب الزاوية. فيجب عليك مراعاة ذلك عند استخدام الإحداثيات الكروية).  
ومرة أخرى، يجب أن نحسب تكامل الكتلة أولاً:

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_V dV = \rho \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) d\phi \right) r^2 dr \\ &= 2\rho \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) r^2 dr = 4\pi\rho \int_0^R r^2 dr \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \rho. \end{aligned}$$

ومن ثمَّ.

$$(i) \quad \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

ثمَّ نحسب التكامل لعزم القصور الذاتي بشكل مماثل:

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_V r_\perp^2 dV = \rho \int_V r^2 \sin^2 \theta dV \\ &= \rho \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right) d\phi \right) r^4 dr = \rho \frac{4}{3} \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) r^4 dr \\ &= \rho \frac{8\pi}{3} \int_0^R r^4 dr. \end{aligned}$$

ومن ثمَّ.

$$(ii) \quad I = \rho \frac{8\pi}{15} R^5.$$

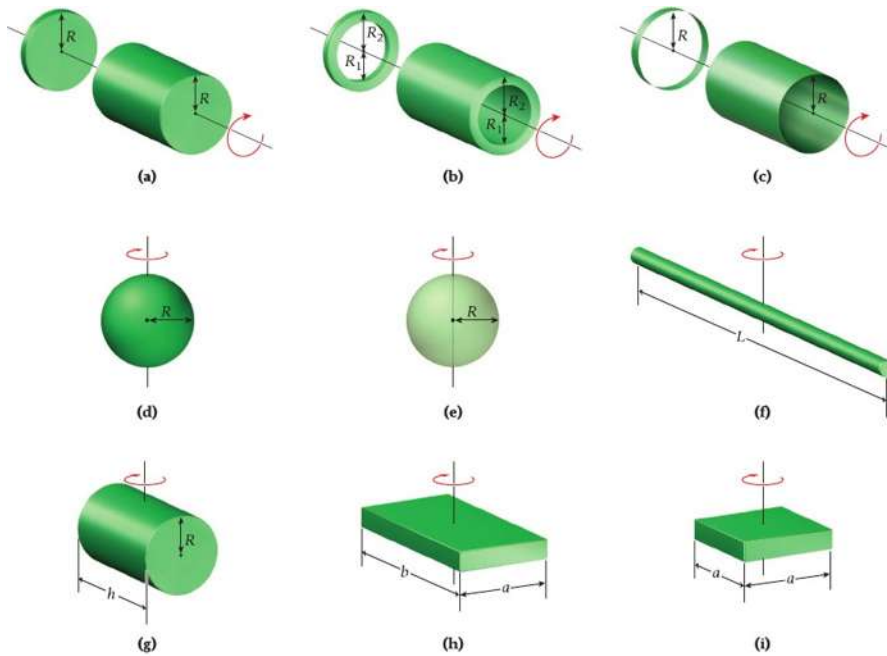
بالتعويض بتعبير الكثافة من المعادلة (i) في المعادلة (ii) نحصل على

$$I = \rho \frac{8\pi}{15} R^5 = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{8\pi}{15} R^5 = \frac{2}{5} MR^2.$$

وأخيراً، توجد ملاحظة عامة مهمة وهي؛ إذا كان  $R$  أكبر مسافة عمودية لأي جزء في الجسم الدوار من محور الدوران، إذاً فإن عزم القصور الذاتي يكون دائماً مرتبطاً بكتلة الجسم عن طريق المعادلة

$$(10.11) \quad I = cMR^2, \text{ with } 0 < c \leq 1.$$

يمكن حساب الثابت  $c$  من الشكل الهندسي للجسم الدوار، وتتراوح قيمته دائماً بين صفر وواحد. وكلما زاد دفع حجم الكتلة نحو محور الدوران قلت قيمة الثابت  $c$ ، وإذا وقعت الكتلة كلها على الحافة الخارجية للجسم، كما هو الحال في الطوق مثلاً، فإن  $c$  تقترب من القيمة 1. (من الناحية الرياضية، هذه المعادلة هي نتيجة لنظرية القيمة المتوسطة، التي ربما درستها في التفاضل والتكامل). وبالنسبة إلى أسطوانة تدور حول محور تماثلها، فإن  $c_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}$ . وبالنسبة إلى جسم كروي، فإن  $c_{\text{sph}} = \frac{2}{5}$ . كما رأينا. يوضح الشكل 10.10 أجساماً مختلفة تدور حول محور يمر عبر مركز الكتلة، ويوضح الجدول 10.1 عزم القصور الذاتي لكل جسم فضلاً عن الثابت  $c$  من المعادلة 10.11 حيثما أمكن.



الشكل 10.10 اتجاه محور الدوران الذي يمر عبر مركز الكتلة وتحديد أبعاد الأجسام الواردة في الجدول 10.1.

الجسم	عزم العصور الذاتي وقيمة الثابت $c$ للأجسام الموضحة في الشكل 10.10 جميع الأجسام لها كتلة $M$	$c$	$I$
(a) أسطوانة صلبة أو قرص	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{2}$	
(b) أسطوانة سميكة جوفاء أو عجلة	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$		
(c) أسطوانة جوفاء أو طوق	$MR^2$	1	
(d) جسم كروي صلب	$\frac{2}{5}MR^2$	$\frac{2}{5}$	
(e) جسم كروي أجوف	$\frac{2}{3}MR^2$	$\frac{2}{3}$	
(f) ساق رفيع	$\frac{1}{12}ML^2$		
(g) أسطوانة صلبة عمودية على محور التماثل	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2$		
(h) لوحة مستطيلة مسطحة	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$		
(i) لوحة مربعة مسطحة	$\frac{1}{6}Ma^2$		

## الطاقة الحركية الدورانية للأرض

## مثال 10.1

افترض أن الأرض جسم كروي صلب ذو كثافة ثابتة، كتلته  $5.98 \times 10^{24}$  kg ونصف قطره 6370 km.

## المسألة

ما عزم القصور الذاتي للأرض، مع اعتبار أنها تدور حول محورها. وما الطاقة الحركية لهذا الدوران المحوري؟

## الحل

بما أنه سيتم تقريب الأرض باستخدام جسم كروي ذي كثافة ثابتة، فإن عزم القصور الذاتي لها سيكون

$$I = \frac{2}{5}MR^2.$$

بالتعويض بقيم الكتلة ونصف القطر. نحصل على

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 9.71 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

التردد الزاوي لدوران الأرض هو

$$\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ day}} = \frac{2\pi}{86,164 \text{ s}} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

(لاحظ أننا استخدمنا اليوم الفلكي هنا. انظر المثال 9.3).

باستخدام نتيجة قيمة عزم القصور الذاتي والتردد الزاوي، يمكننا إيجاد الطاقة الحركية لدوران الأرض:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = 0.5(9.71 \times 10^{37} \text{ kg m}^2)(7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s})^2 = 2.58 \times 10^{29} \text{ J}.$$

والآن سنقارن هذا بالطاقة الحركية لحركة الأرض حول الشمس في الوحدة 9. حسبنا السرعة المدارية للأرض وكانت  $v = 2.97 \times 10^4 \text{ m/s}$  ومن ثم، فإن الطاقة الحركية لحركة الأرض حول الشمس هي

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(2.97 \times 10^4 \text{ m/s})^2 = 2.64 \times 10^{33} \text{ J}.$$

وهي أكبر من الطاقة الحركية للدوران المحوري بمعامل يزيد عن 10,000.

## نظرية المحور الموازي

لقد حددنا عزم القصور الذاتي لمحور دوران محوري عبر مركز كتلة جسم ما، ولكن ما عزم القصور الذاتي للدوران حول محور لا يمر عبر مركز الكتلة؟ تجيب **نظرية المحور الموازي** عن هذا السؤال. توضح النظرية أنه يمكن تحديد عزم القصور الذاتي  $I_{\parallel}$  لدوران جسم ذي كتلة  $m$  حول محور يقع على مسافة  $d$  من مركز كتلة الجسم وموازي لمحور يمر عبر مركز الكتلة، حيث يكون عزم القصور الذاتي  $I_{\parallel}$  عن طريق

$$(10.12) \quad I_{\parallel} = I_{\text{cm}} + Md^2.$$

## نظرية المحور الموازي

## الاشتقاق 10.3

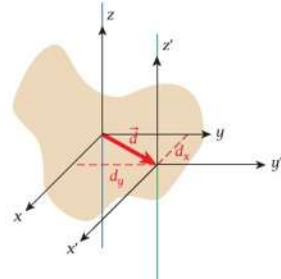
في هذا الاشتقاق، فكّر في الجسم الموجود في الشكل 10.11. افترض أننا حسبنا بالفعل عزم القصور الذاتي لدوران هذا الجسم حول المحور  $Z$ ، والذي يمر عبر مركز كتلة هذا الجسم، فإن نقطة الأصل للنظام الإحداثي  $XYZ$  توجد عند مركز الكتلة، ويكون المحور  $Z$  هو محور الدوران. ويمكن وصف أي محور موازي لمحور الدوران عن طريق إجراء تحويل بسيط في المستوى  $XY$  المشار إليه في الشكل بالمتجه  $\vec{d}$  مع المكونات  $d_x$  و  $d_y$ .

إذا قمنا بنقل نظام الإحداثيات في المستوى  $XY$ ، بحيث يكون المحور الرأسى الجديد، وهو المحور  $Z$  متزامناً مع محور الدوران الجديد، فإن التحول من الإحداثيات  $XYZ$  إلى الإحداثيات الجديدة  $X'Y'Z'$  يُحدد من خلال

$$x' = x - d_x, \quad y' = y - d_y, \quad z' = z.$$

لحساب عزم القصور الذاتي للجسم الذي يدور حول المحور الجديد في النظام الإحداثي الجديد، يمكننا استخدام المعادلة 10.6، والتي تعتبر أكثر المعادلات عمومية، والتي تنطبق على حالة عدم ثبات الكثافة الكتلية:

$$(i) \quad I_{\parallel} = \int_V (r_{\perp}')^2 \rho dV.$$



الشكل 10.11 الإحداثيات والمسافات لنظرية المحور الموازي.

بناء على التحول الإحداثي.

$$\begin{aligned}(r_{\perp}')^2 &= (x')^2 + (y')^2 = (x - d_x)^2 + (y - d_y)^2 \\ &= x^2 - 2xd_x + d_x^2 + y^2 - 2yd_y + d_y^2 \\ &= (x^2 + y^2) + (d_x^2 + d_y^2) - 2xd_x - 2yd_y \\ &= r_{\perp}^2 + d^2 - 2xd_x - 2yd_y.\end{aligned}$$

(ضع في اعتبارك أن  $\vec{r}_{\perp}'$  يقع في المستوى  $xy$  بسبب الطريقة التي أنشأنا بها النظام الإحداثي). ولأن يمكننا التعويض بهذا التعبير عن  $(r_{\perp}')^2$  في المعادلة (i) والحصول على

$$\begin{aligned}(ii) \quad I_{\parallel} &= \int_V (r_{\perp}')^2 \rho dV \\ &= \int_V r_{\perp}^2 \rho dV + d^2 \int_V \rho dV - 2d_x \int_V x \rho dV - 2d_y \int_V y \rho dV.\end{aligned}$$

يحدد التكامل الأول في المعادلة (ii) عزم القصور الذاتي للدوران حول مركز الكتلة. والذي نعرفه بالفعل. ويكون التكامل الثاني مساوياً للكتلة (قارن مع المعادلة 10.7). أما التكاملان الثالث والرابع فقد تمّ تقديمهما في الوحدة 8 ويحددان مواقع الإحداثيين  $x$  و  $y$  لمركز الكتلة عند قسمتهما على الكتلة. ولكن من حيث التركيب، فإنهما سيساويان صفراً. لأننا وضعنا نقطة الأصل للنظام الإحداثي  $xyz$  في مركز الكتلة. ومن ثمّ، نحصل على نظرية المحور الموازي:

$$I_{\parallel} = I_{\text{cm}} + d^2 M.$$

حيث  $M$  هي كتلة الجسم الكلية و  $I_{\text{cm}}$  هو عزم القصور الذاتي للجسم حول مركز الكتلة.

لاحظ أنه بناء على المعادلتين 10.11 و 10.12 يمكن كتابة عزم القصور الذاتي بدلالة الدوران حول محور تقريبي مواز لمحور  $z$  يمر عبر مركز الكتلة بالشكل التالي

$$I = (cR^2 + d^2)M, \text{ with } 0 < c \leq 1.$$

هنا  $R$  هي المسافة العمودية العمودية لأي جزء في الجسم من محور دورانه حتى مركز الكتلة. و  $d$  هي مسافة محور الدوران من محور مواز حتى مركز الكتلة.

## سؤال الاختبار الذاتي 10.1

وضّح أن عزم القصور الذاتي لساق رفيع كتلته  $m$  وطوله  $L$  يدور حول أحد طرفيه هو  $I = \frac{1}{3}mL^2$ .

## 10.3 التدرج دون انزلاق

**حركة التدرج** هي حالة خاصة للحركة الدورانية تقوم بها أجسام دائرية نصف قطرها  $R$  وتتحرك عبر سطح من دون انزلاق. وفي حركة التدرج، يمكننا ربط الكميات الخطية والزاوية من خلال معرفة أن المسافة الخطية التي يقطعها مركز الكتلة مماثلة لطول القوس المقابل لمحيط الجسم. كما يوضّح الجدول 9.1. ومن ثمّ، تكون العلاقة بين المسافة الخطية،  $r$  التي قطعها مركز الكتلة وزاوية الدوران هي

$$r = R\theta.$$

مع تحديد مشتقة الزمن ومراعاة أن نصف القطر  $R$  يبقى ثابتاً. يمكننا الحصول على العلاقات بين السرعات والعجلات الخطية والزاوية:

$$v = R\omega$$

$$a = R\alpha.$$

الطاقة الحركية الكلية لجسم في حركة التدرج هي مجموع طاقاته الحركية الانتقالية (الحركة الخطية لمركز كتلته) والدورانية (الدوران حول مركز الكتلة):

$$(10.13) \quad K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$



## مراجعة المفاهيم 10.2

جسم كروي صلب وأسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء متماثلة من حيث الكتلة ونصف القطر وتتدحرج بالسرعة نفسها. ما العبارة الصحيحة مما يلي؟

- (a) الجسم الكروي الصلب به أعلى طاقة حركية.  
 (b) الأسطوانة الصلبة بها أعلى طاقة حركية.  
 (c) الأسطوانة الجوفاء بها أعلى طاقة حركية.  
 (d) جميع الأجسام الثلاثة لها طاقة حركية متماثلة.

يمكن التعويض عن  $\omega$  من  $v = R\omega$  وعن  $l$  من المعادلة 10.11:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(cR^2m)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2c \Rightarrow$$

(10.14)

$$K = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2,$$

حيث  $c > 0$  و  $1 \geq c$  هو الثابت المحدد في المعادلة 10.11. توضح المعادلة 10.14 أن الطاقة الحركية لجسم متدحرج تكون دائماً أكبر من تلك الخاصة بجسم منزلق. بشرط أن يكون لهما الكتلة والسرعة الخطية أنفسهما.

مع تعبير للطاقة الحركية التي تتضمن المساهمة الناتجة عن الدوران. يمكننا تطبيق مفهوم حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية (مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع) التي طبقناها في الوحدة 6.

## تدحرج جسم كروي على مستوى مائل

## مسألة محلولة 10.1

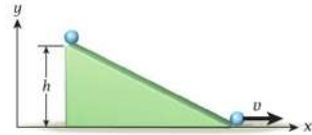
## المسألة

جسم كروي صلب كتلته 5.15 kg ونصف قطره 0.340 m يبدأ الحركة من السكون على ارتفاع 2.10 m فوق قاعدة مستوى مائل ويتدحرج لأسفل دون انزلاق تحت تأثير الجاذبية. ما السرعة الخطية لمركز كتلة الجسم الكروي عندما يفادر المستوى المائل ويتدحرج على سطح أفقي؟

## الحل

**فكّر** كان الجسم الكروي ساكناً في أعلى المستوى المائل. وعند تلك النقطة، يكون للجسم الكروي طاقة وضع جاذبية ولا تكون له طاقة حركية. وعندما يبدأ الجسم الكروي في التدحرج يخسر طاقة الوضع ويكسب طاقة حركية من الحركة الخطية وطاقة حركية من الدوران. وعند بلوغ قاع المستوى المائل، تكون قد تحولت طاقة الوضع الأصلية بأكملها إلى طاقة حركية. وترتبط الطاقة الحركية للحركة الخطية بالطاقة الحركية للدوران من خلال نصف قطر الجسم الكروي.

**ارسم** يوضح الشكل 10.12 رسماً للمسألة بحيث يكون صفر الإحداثي  $y$  في قاع المستوى المائل.



**ابحث** في قيمة المستوى المائل، يكون الجسم الكروي ساكناً ومن دون طاقة حركية. في القمة، تكون طاقته طاقة وضع،  $mgh$ .

$$E_{\text{top}} = K_{\text{top}} + U_{\text{top}} = 0 + mgh = mgh,$$

حيث  $m$  هي كتلة الجسم الكروي. و  $h$  هو ارتفاع الجسم الكروي فوق السطح الأفقي.  $g$  هي العجلة الناتجة عن الجاذبية، وفي قاع المستوى المائل، حيث يبدأ الجسم الكروي في التدحرج على السطح الأفقي، تكون طاقة الوضع صفراً. وبناء على المعادلة 10.14 يكون للجسم الكروي طاقة حركية كلية (مجموع الطاقة الحركية الانتعالية والدورانية) مقدارها  $\frac{1}{2}mv^2(1 + c)$ . ومن ثمّ، تكون الطاقة الكلية في قاع المستوى المائل هي

$$E_{\text{bottom}} = K_{\text{bottom}} + U_{\text{bottom}} = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2 + 0 = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2.$$

بأن عزم القصور الذاتي للجسم الكروي هو  $I = \frac{2}{5}mR^2$  (انظر المعادلة 10.10). فإن قيمة الثابت  $c$  تساوي  $\frac{2}{5}$  في هذه الحالة.

**بسّط** بسبب حفظ الطاقة، فإن الطاقة في قمة المستوى المائل تساوي الطاقة الموجودة في القاع:

$$mgh = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2$$

بحل السرعة الخطية المتجهة نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

بالنسبة إلى جسم كروي،  $c = \frac{2}{5}$  كما هو موضح أعلاه، ولذا فإن سرعة الجسم المتدحرج في هذه الحالة هي

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

**احسب** عند التعويض بالقيم العددية، نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}(9.81 \text{ m/s}^2)(2.10 \text{ m})} = 5.42494 \text{ m/s.}$$

**قَرِّب** عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها بثلاثة أرقام مهمة نحصل على

$$v = 5.42 \text{ m/s.}$$

**تَحَقَّق ثانية** إذا لم يتدرج الجسم الكروي. ولكن انزلق على المستوى المائل دون احتكاك. فإن السرعة النهائية ستكون

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(2.10 \text{ m})} = 6.42 \text{ m/s,}$$

وهي أكبر من السرعة التي وجدناها للجسم الكروي المتدرج. يبدو من المعقول أن القيمة النهائية للسرعة الخطية للجسم الكروي المتدرج أقل بعض الشيء من القيمة النهائية للسرعة الخطية للجسم الدوار المنزلق. وذلك لأن بعض طاقة الوضع الأولية الخاصة بالجسم الكروي المتدرج تحولت إلى طاقة حركية دورانية. ولا تكون هذه الطاقة متاحة بعد ذلك لتصبح طاقة حركية للحركة الخطية لمركز كتلة الجسم الكروي. لاحظ أنه لم تكن هناك حاجة إلى نصف الكتلة أو نصف قطر الجسم الكروي في هذا الحساب.

الصيغة المنشقة في المسألة المحلولة 10.1 لإيجاد سرعة جسم كروي متدرج في قاع المستوى المائل.

(10.15)

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

هي نتيجة عامة إلى حد ما. ويمكن تطبيقها على مواقف مختلفة. حيث يتم تحويل طاقة الوضع الجذبية إلى طاقة حركية انتقالية ودورانية لجسم متدرج.

أوضح العالم جاليليو جاليلي أن عجلة جسم في السقوط الحر تعتمد على كتلته. وينطبق هذا أيضًا على جسم يتدرج على مستوى مائل. كما رأينا في المسألة المحلولة 10.1 والتي تقودنا إلى المعادلة 10.15. وفي حين أن الكتلة الكلية للجسم المتدرج غير مهمة. نجد أن توزيع الكتلة بداخله مهمة. من الناحية الرياضية، ينعكس ذلك في المعادلة 10.15 من خلال معرفة أن الثابت  $c$  من المعادلة 10.11، الذي تم حسابه من التوزيع الهندسي للكتلة. يظهر في المقام. يظهر المثال التالي بوضوح أن توزيع الكتلة في الأجسام المتدرجة له أهمية.

## سباق التدرج على سطح مائل

## مثال 10.2

### المسألة

جسم كروي صلب وأسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء (أنتوب). كلها بالكتلة  $m$  نفسها ولها نصف القطر الخارجي نفسه  $R$ . تم تحريرها من وضع السكون في قمة السطح المائل وبدأت في التدرج دون انزلاق. فما ترتيب وصولها إلى قاع السطح المائل؟

### الحل

يمكن الإجابة عن هذا السؤال باستخدام قوانين الطاقة فقط. حيث إنه تم حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية لكل من الأجسام الثلاثة خلال حركة التدرج. يمكننا أن نكتب لكل جسم

$$E = K + U = K_0 + U_0.$$

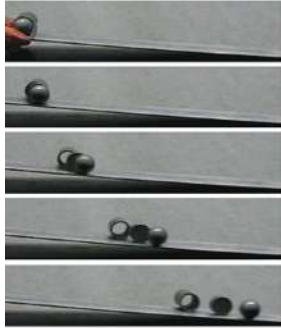
تم ترك الأجسام من وضع السكون. لذلك  $K_0 = 0$  وبالتنسبة إلى طاقة الوضع. يمكننا استخدام  $U = mgh$  مرة أخرى. وللحصول على الطاقة الحركية. نستخدم المعادلة 10.14. ومن ثم نحصل على

$$K_{\text{bottom}} = U_{\text{top}} \Rightarrow (1+c)\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

وهي نفسها صيغة المعادلة 10.15.

نعلم أنه تم شطب كتلة الجسم ونصف قطره من المعادلة. ومع ذلك، يمكننا أخذ ملاحظة مهمة أخرى. يظهر الثابت  $c$  الذي تم تحديده عن طريق



**الشكل 10.13** سباق بين جسم كروي وأسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء لها الكتلة ونصف القطر أنفسهم إلى الأسفل على مستوى مائل. أخذت هذه اللقطات على فواصل زمنية قدرها 0.5 s.

## مراجعة المفاهيم 10.3

افتراض أننا أعدنا السباق الموضح في المثال 10.2. مع إضافة علبة صودا غير مفتوحة. في أي ترتيب ستكون العلبة؟

(a) الأول	(c) الثالث
(b) الثاني	(d) الرابع

- يتبع

توزيع الكتلة في المقام. وتعلم بالفعل قيمة  $C$  للأجسام المتدرجة الثلاثة:  $C_{\text{sphere}} = \frac{2}{5}$  و  $C_{\text{cylinder}} = \frac{1}{2}$  و  $C_{\text{tube}} \approx 1$ . وبما أن ثابت الجسم الكروي هو الأصغر، فإن سرعة الجسم الكروي لأي ارتفاع معين  $h$  ستكون الأكبر. مما يعني أن الجسم الكروي سيفوز بالسباق. في الفيزياء، بما أن الأجسام الثلاثة لها الكتلة نفسها فإنه سيحدث لها التغير نفسه في طاقة الوضع. وستكون الطاقات الحركية النهائية متساوية. وبناءً على ذلك، فإن الجسم الذي له قيمة  $C$  أعلى سيكون له طاقة حركية أعلى نسبتياً في الدوران الجوّري. ومن ثمّ يكون له طاقة حركية انتقالية أقل وسرعة خطية أقل. وستأتي الأسطوانة الصلبة في المرتبة الثانية في السباق. ويليها الأنبوب. يوضح الشكل 10.13 لغطات من تجربة مسجلة بالفيديو تثبت الخلاصات التي توصلنا إليها.

## سؤال الاختبار الذاتي 10.2

هل يمكنك شرح سبب انتهاء عملية المياه الغازية في المرتبة المحددة في مراجعة المفاهيم 10.3؟

## مسألة محلولة 10.2 تدحرج كرة عبر طوق

خُرر جسم كروي صلب من وضع السكون وتدحرج على سطح مائل ثم في طوق دائري نصف قطره  $R$  (انظر الشكل 10.14). افترض أن نصف قطر الجسم الكروي أصغر بكثير من نصف قطر الطوق.



الشكل 10.14 يتدحرج جسم كروي إلى الأسفل على مستوى مائل وداخل طوق. أخذت هذه اللقطات على فواصل زمنية قدرها  $0.25 \text{ s}$ .

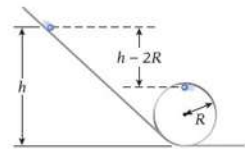
### المسألة

ما أدنى ارتفاع  $h$  يجب تحرير الجسم الكروي من عنده حتى لا يخرج عن المسار عندما يكون داخل الطوق؟

### الفكر

عند تحرير الجسم الكروي من وضع السكون على ارتفاع  $h$  على السطح المائل، ستكون له طاقة وضع جاذبية ولن تكون له طاقة حركية. وكلما تدحرج الجسم الكروي لأسفل على السطح المائل وحول الطوق، تتحول طاقة الوضع الجاذبية إلى طاقة حركية. وفي قمة الطوق، أسقط الجسم الكروي مسافة  $h - 2R$ . تتمثل مفتاح حل هذه المسألة في إدراك أنه في قمة الطوق يجب أن تكون العجلة المركزية مساوية للعجلة الناتجة عن الجاذبية أو أكبر منها. (عندما تكون هذه العجلات متساوية، يحدث "انعدام وزن" كما هو موضح في المسألة المحلولة 9.1. وعندما تكون العجلة المركزية أكبر، يجب وجود قوة دافعة إلى الأسفل، والتي يمكن أن يوفرها المسار. وعندما تكون العجلة المركزية أقل، يجب وجود قوة دافعة إلى الأعلى، والتي لا يمكن أن يوفرها المسار. ومن ثمّ يخرج الجسم الكروي عن المسار). العنصر المجهول هنا هو السرعة  $v$  في قمة الطوق. ومرة أخرى، يمكننا استخدام قوانين حفظ الطاقة لحساب أدنى سرعة متجهة مطلوبة، ومن ثمّ نحصل على أدنى ارتفاع مطلوب للبدء لكي يظل الجسم الكروي في المسار.

**الرسم** يوضّح الشكل 10.15 رسماً للجسم الكروي وهو يتدحرج على السطح المائل وفي الطوق.



الشكل 10.15 يتدحرج شكل كروي على مستوى مائل وفي حلقة.

**ابحث** عند تحرير الجسم الكروي، يكون لديه طاقة وضع  $U_0 = mgh$  وتكون الطاقة الحركية له صفراً. في قمة الطوق، تكون طاقة الوضع  $U_0 = mg2R$ ، وتكون الطاقة الحركية الكلية، بناءً على المعادلة 10.14،  $K = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2$ . حيث  $c = \frac{2}{5}$   $\rho_{\text{sphere}}$ . نعلم من قانون حفظ الطاقة الميكانيكية أنه

$$(i) \quad E = K + U = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2 + mg2R = K_0 + U_0 = mgh.$$

في قمة الطوق، يجب أن تكون العجلة المركزية  $a_c$ ، مساوية أو أكبر من العجلة الناتجة عن الجاذبية.  $g$ .

$$(ii) \quad g \leq a_c = \frac{v^2}{R}.$$

**بسط** يمكننا حل المعادلة (i) الخاصة بـ  $v^2$ .

$$v^2 = \frac{2g(h - 2R)}{1 + c}.$$

وإذا عوّضنا بهذا التعبير عن  $v^2$  في المعادلة (ii). نحصل على

$$g \leq \frac{2g(h - 2R)}{R(1 + c)}$$

ويؤدي ضرب طرفي هذه المعادلة في مقام الكسر على الجانب الأيمن إلى

$$R(1 + c) \leq 2h - 4R.$$

ومن ثم نحصل على

$$h \geq \frac{5 + c}{2} R.$$

**احسب** هذه النتيجة صالحة لأي جسم متدرج. له الثابت  $c$  الذي تم تحديده من الشكل الهندسي للجسم. في هذه المسألة. لدينا جسم كروي صلب. لذلك فإن  $c = \frac{2}{5}$ . ومن ثم. تكون النتيجة

$$h \geq \frac{5 + \frac{2}{5}}{2} R = \frac{27}{10} R.$$

**قَرِّب** وُصفت حالة المسألة هذه بدلالة المتغيرات لا القيم العددية. لذا يمكننا اقتباس النتيجة تمامًا على أنها

$$h \geq 2.7R.$$

**تحقق ثانية** إذا لم يكن الجسم الكروي يتدرج ولكنه ينزلق دون احتكاك. فيمكننا أن نساوي الطاقة الحركية للجسم الكروي في قمة الطوق مع التغير الذي حدث في طاقة الوضع الجاذبية:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg(h - 2R).$$

يمكننا حينئذ التعبير عن عدم التساوي بين عجلة الجاذبية والعجلة المركزية الموضحة في المعادلة (ii) كما يلي:

$$g \leq a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{2g(h - 2R)}{R}.$$

وبحل معادلة  $h$  هذه نحصل على

$$h \geq \frac{5}{2} R = 2.5R.$$

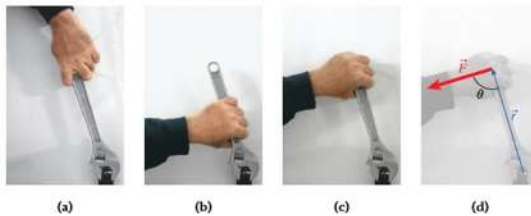
هذا الارتفاع المطلوب لجسم كروي منزلق يكون أقل قليلاً من الارتفاع الذي توصلنا إليه لجسم كروي متدرج. ويجب أن نتوقع الحاجة إلى طاقة أقل. في صورة طاقة وضع جاذبية. لبقاء الجسم الكروي في المسار في حال عدم تدرجه لأن طاقته الحركية ستكون قد تحولت بالكامل إلى طاقة انتعالية. لذلك فإن النتيجة التي توصلنا إليها لبقاء الجسم الكروي المتدرج في مساره تبدو معقولة.

## 10.4 عزم الدوران

تعلمنا حتى الآن في دراسة القوى أن القوة قد تتسبب في حركة خطية للجسم. والتي يمكن وصفها بدلالة حركة مركز كتلة الجسم. ومع ذلك. لم نتطرق بعد إلى أحد الأسئلة العامة وهو: أين تقع متجهات القوة العاملة على جسم غير تقطعي في مخطط جسم حر؟ يمكن بذل قوة على جسم غير تقطعي في نقطة بعيدة عن مركز كتلته. مما قد يتسبب في دوران الجسم وكذلك تحركه خطياً.

### ذراع العزم

انظر إلى اليد التي نحاول استخدام مفتاح ربط لفكّ المسامير الموضّح في الشكل 10.16. من الواضح أنه سيكون من الأسهل لفكّ المسامير في الشكل 10.16c. وأصعب قليلاً في الشكل 10.16b ومستحيلًا تمامًا في الشكل 10.16a. يوضّح هذا المثال أن مقدار القوة ليس الكميّة الوحيدة ذات الصلة. فالمسافة العمودية



**الشكل 10.16** ثلاث طرق (a)–(c) لاستخدام مفتاح الربط لفكّ مسامير. (d) القوة  $\vec{F}$  وذراع العزم  $r$  وزاوية  $\theta$  بينهما.

من خط حركة القوة إلى محور الدوران. التي تسمى **ذراع العزم**، مهمة أيضًا. بالإضافة إلى ذلك، فإن زاوية استخدام القوة بالنسبة إلى ذراع العزم مهمة كذلك. في الجزأين (b) و (c) في الشكل 10.16، تساوي هذه الزاوية  $90^\circ$ . (سيكون لزاوية تساوي  $270^\circ$  التأثير نفسه، لكن عندئذ ستعمل القوة في الاتجاه المقابل). لن تؤدي زاوية تساوي  $180^\circ$  أو  $0^\circ$  (الشكل 10.16a) إلى لفّ المسمار. تُقاس هذه الاعتبارات من خلال مفهوم عزم الدوران  $\tau$ . **عزم الدوران** (ويسمى أيضًا العزم) هو ناتج الضرب الاتجاهي لمتجه القوة  $\vec{F}$  ومنتجه الموقع  $\vec{r}$

$$(10.16) \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

تُقاس منتجه الموقع  $\vec{r}$  عندما تكون نقطة الأصل عند محور الدوران. يُشير الرمز  $\times$  إلى **الضرب الاتجاهي**، أو ناتج الضرب المتبادلي. (قدّمنا نواتج الضرب الاتجاهي في الوحدة 1. وقد ترغب في الرجوع إليها للمراجعة).

وحدة النظام الدولية لعزم الدوران هي N m. ويجب عدم خلطها مع وحدة الطاقة، وهي الجول (J = N m)

$$[\tau] = [F] \cdot [r] = \text{N m}$$

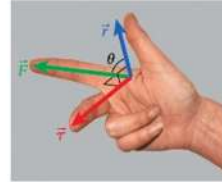
في الوحدات الإنجليزية، يُعبّر عن عزم الدوران غالبًا بالقدم-الرطل (ft-lb). مقدار عزم الدوران هو حاصل مقدار القوة والمسافة إلى محور الدوران (مقدار منتجه الموقع أو ذراع العزم) مضروبًا في جيب الزاوية بين متجه القوة ومنتجه الموقع (انظر الشكل 10.17).

$$(10.17) \quad \tau = rF \sin \theta$$

يُمكن أيضًا أن تكون الكميات الزاوية متجهات، وتسمى **المتجهات المحورية**. (المتجه المحوري هو متجه يُشير إلى محور الدوران). ويُعد عزم الدوران مثالًا على المتجه المحوري ونحصل على مقدارها بالمعادلة 10.17. ونحصل على اتجاه عزم الدوران باستخدام قاعدة اليد اليمنى (الشكل 10.17). لاحظ أنّ قواعد اليد اليمنى تنطبق على كافة نواتج الضرب الاتجاهي؛ يُشير عزم الدوران في الاتجاه العمودي إلى المستوى الذي يقطعه متجه القوة ومنتجه الموقع. ومن ثمّ، إذا كان متجه الموقع يُشير باتجاه إصبع الإبهام ومنتجه القوة يُشير باتجاه إصبع السبابة، فإنّ اتجاه متجه عزم الدوران المحوري هو اتجاه الإصبع الوسطى. كما يوضّح الشكل 10.17. لاحظ أنّ متجه عزم الدوران يكون عموديًا على كل من متجه القوة ومنتجه الموقع.

من خلال التعريف الرياضي لعزم الدوران ومقداره وعلاقته بمنتجه القوة ومنتجه الموقع والزاوية النسبية لهما، يُمكننا فهم السبب في أن النهج الموضّح في الجزء (c) من الشكل 10.16 ينتج عنه أقصى عزم دوران لمقدار قوة محدد. بينما ينتج عن النهج الموضّح في الجزء (a) عزم دوران قيمته صفر. ومن ثمّ نعلم أنّ مقدار عزم الدوران هو العامل الحاسم في تحديد مدى سهولة أو صعوبة فكّ (أو ربط) المسمار. إن عزم الدوران حول أي محور دوران ثابت قد يكون في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة. كما يوضّح متجه القوة في الشكل 10.16d. فإن عزم الدوران المتولّد من اليد التي تسحب مفتاح الربط سيكون في عكس اتجاه عقارب الساعة. تُعرّف **محصلة الدوران** بأنها الفرق بين مجموع كل قيم العزم في اتجاه عقارب الساعة ومجموع كل قيم العزم في عكس اتجاه عقارب الساعة:

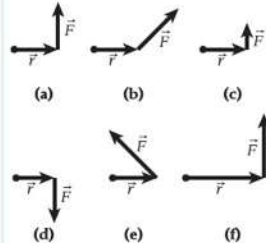
$$\tau_{\text{net}} = \sum_i \tau_{\text{counterclockwise},i} - \sum_j \tau_{\text{clockwise},j}$$



**الشكل 10.17** قاعدة اليد اليمنى لاتجاه عزم الدوران لمتجه قوة وموقع محدد.

### مراجعة المفاهيم 10.4

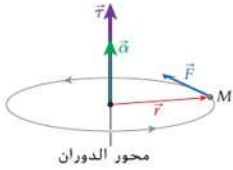
اختر مبرمجًا من متجه الموقع  $\vec{r}$  ومنتجه القوة  $\vec{F}$  ينتج عزم الدوران لأعلى مقدار حول النقطة التي تُشير إليها النقطة السوداء.



## 10.5 قانون نيوتن الثاني للدوران المحوري

في القسم 10.1، تعلمنا أنّ عزم العصور الذاتي / هو المكافئ الدوراني للكتلة. وتعلمنا من الوحدة 4 أن ناتج الكتلة والعجلة الخطية هو محصلة القوة المؤثرة في الجسم. بحسب تعبير قانون نيوتن الثاني،  $F_{\text{net}} = ma$ . ما المكافئ لقانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية؟ سنبدأ بجسيم نقطي للكتلة  $M$  متحركًا في دائرة حول محور ما على مسافة  $R$  من المحور. إذا ضربنا عزم العصور الذاتي للدوران حول المحور بموازاة مركز الكتلة في العجلة الزاوية، فسنحصل على

$$I\alpha = (R^2M)\alpha = RM(R\alpha) = RMa = RF_{\text{net}}$$



**الشكل 10.18** القوة المبدولة على جسم نقطي تنتج عزم دوران.

للحصول على هذه النتيجة، استخدمنا أولاً المعادلة 10.11 حيث  $c = 1$ . ثم العلاقة بين العجلة الزاوية والخطية للحركة في دائرة، ثم قانون نيوتن الثاني، ومن ثمّ، يكون ناتج ضرب عزم العصور الذاتي والعجلة الزاوية متناسباً مع ناتج ضرب كمية المسافة وكمية القوة. تعلمنا في القسم 10.4 أن ناتج الضرب هذا هو عزم الدوران  $T$ . وبهذا، يمكننا كتابة الصيغة التالية من قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية:

$$(10.18) \quad \tau = I\alpha.$$

جمع المعادلتين 10.16 و 10.18 نحصل على

$$(10.19) \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = I\vec{\alpha}.$$

معادلة الحركة الدورانية هذه مشابهة لقانون نيوتن الثاني،  $\vec{F} = m\vec{a}$  للحركة الخطية. يظهر الشكل 10.18 العلاقة بين القوة والموقع وعزم الدوران والعجلة الزاوية لجسيم نقطي يتحرك حول محور دوران. لاحظ أن المعادلة 10.19 تنطبق فقط على جسم نقطي في مدار دائري، ويبدو معقولاً أن هذه المعادلة تنطبق على عزم العصور الذاتي لجسم غير نقطي بوجه عام، لكننا لم نثبت ذلك بعد. سنعود لاحقاً في هذه الوحدة إلى هذه المعادلة.

يشترط قانون نيوتن الأول أنه في غياب محصلة القوة، لا يحرّك الجسم بأي عجلة ومن ثمّ لا يحدث تغير في السرعة المتجهة، ومكافئ قانون نيوتن الأول للحركة الدورانية أن الجسم الذي تتعدم محصلة عزم دورانه لا توجد له عجلة زاوية وبهذا لا يحدث تغير في السرعة الزاوية. ويعني هذا بقاء الأجسام ثابتة، فينبغي أن تساوي محصلة عزم الدوران صفراً، سنعود إلى تلك العبارة في الوحدة 11، حيث نستكشف التحرك بسرعة الاتزان السكوني.

والآن يمكننا استخدام الصيغة الدورانية لقانون نيوتن الثاني (المعادلة 10.19) لحل المسائل المهمة للحركة الدورانية، مثل المسألة التالية.

### مثال 10.3

#### ورق المرحاض

قد يحدث معك الموقف التالي: تحاول أن تضع لفة جديدة من ورق المرحاض داخل حاملها، ولكن تستقط منك اللفة، وتتمكّن من الإمساك بالورقة الأولى فقط. وفي طريقها إلى الأرضية، تنك لفة ورق المرحاض، كما يوضّح الشكل 10.19a.

#### المسألة

كم من الوقت تستغرق لفة ورق المرحاض للاصطدام بالأرض، إذا سقطت من ارتفاع 0.73 m؟ اللفة نصف قطرها الداخلي  $R_1 = 2.7 \text{ cm}$ ، ونصف قطرها الخارجي  $R_2 = 6.1 \text{ cm}$  وكتلتها 274 g.

#### الحل

بالنسبة إلى لفة ورق المرحاض الساقطة، العجلة هي  $a_y = -g$ ، وفي الوحدة 2، تعلمنا أنه في السقوط الحر من السكون، يُحدّد الموضع كدالة زمنية بشكل عام عن طريق  $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$  في هذه الحالة، تساوي السرعة الابتدائية صفراً، لذا  $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$ . إذا وضعنا نقطة الأصل في مستوى الأرضية، فينبغي أن نجد الزمن الذي يكون عنده  $y = 0$ . يتضح من هذا  $y_0 = \frac{1}{2}gt^2$  للزمن الذي تستغرقه اللفة للاصطدام بالأرض. ومن ثمّ، فإن الزمن الذي تستغرقه اللفة للاصطدام بالأرض في السقوط الحر هو

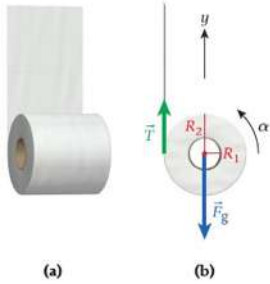
$$(i) \quad t_{\text{free}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2(0.73 \text{ m})}{9.81 \text{ m/s}^2}} = 0.386 \text{ s}.$$

وبما أنك أمسكت بأول ورقة وانفكّ ورق المرحاض في طريقه إلى الأرض، فإن لفة ورق المرحاض تندرج دون انزلاق (بالمعنى الذي عرفناه سابقاً). لذا فإن العجلة ستكون مختلفة عن حالة السقوط الحر، بمجرد أن نعرف قيمة هذه العجلة، فإنه يمكننا استخدام الصيغة التي تربط الارتفاع الابتدائي وزمن السقوط المماثلة للمعادلة (i).

كيف نحسب العجلة التي تحدث مع ورق المرحاض؟ مرةً أخرى، سنبدأ بمخطط للجسم الحر. يوضّح الشكل 10.19b منظرًا جانبيًا لللفة ورق المرحاض كما يوضّح قوة الجاذبية،  $\vec{F}_g = mg(-\hat{y})$  والشد من الورقة التي تمسكها اليد،  $\vec{T} = T\hat{y}$ ، ويسمح لنا قانون نيوتن الثاني بربط محصلة القوة المؤثرة في ورق المرحاض بعجلة اللفة:

$$(ii) \quad T - mg = ma_y.$$

– يتبع



**الشكل 10.19** (a) يسط ورق المرحاض. (b) مخطط جسم حر للفة ورق مرحاض.

الشد والعجلة مجهولان. لذا فإننا نحتاج إلى إيجاد معادلة ثانية لربط هاتين الكميتين يُمكن الحصول على المعادلة الثانية من الحركة الدورانية للكرة، حيث تكون محصلة عزم الدوران هي ناتج ضرب عزم القصور الذاتي والعجلة الزاوية،  $T = I\alpha$ . عزم القصور الذاتي للكرة ورق المرحاض هو ذلك الخاص بالأسطوانة الجوفاء،  $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$ ، ويكون في المعادلة 10.9.

يُمكننا أيضًا ربط العجلات الخطية والزاوية عبر  $R_2\alpha = a_y$ ، حيث  $R_2$  نصف القطر الخارجي للكرة ورق المرحاض. نحتاج إلى تحديد الاتجاه الموجب للعجلة الزاوية، وإلا فسوف نحصل على العلامة الخاطئة ومن ثم نحصل على نتيجة خاطئة. للتوافق مع اختيار الاتجاه لأعلى باعتباره اتجاه  $y$  الموجب، فإننا نحتاج إلى اختيار الدوران في عكس اتجاه عقارب الساعة باعتباره الاتجاه الزاوي الموجب، كما يوضح الشكل 10.19b. في ما يتعلق بعزم دوران محور التماثل الخاص بالكرة ورق المرحاض، نحصل على  $T = -R_2T$ . مع اصطلاح إشارة العجلة الزاوية الموجبة التي حددناها للكرة، لا تساهم قوة الجاذبية في عزم الدوران حول محور التماثل. لأن ذراع العزم طولها يساوي صفرًا. ويؤدي قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية إلى

$$\tau = I\alpha$$

$$-R_2T = \left[ \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2) \right] \frac{a_y}{R_2}$$

$$(iii) \quad -T = \frac{1}{2}m \left( 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) a_y.$$

تشكل المعادلتان (ii) و (iii) مجموعة من معادلتين للكميتين المجهولتين  $T$  و  $a_y$ ، ويجمعهما نحصل على

$$-mg = \frac{1}{2}m \left( 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) a_y + ma_y.$$

نشطب كتلة الكرة ورق المرحاض، ونجد للعجلة

$$a_y = - \frac{g}{\frac{3}{2} + \frac{R_1^2}{2R_2^2}}.$$

باستخدام القيم المعطاة لنصف القطر الداخلي  $R_1 = 2.7 \text{ cm}$  ونصف القطر الخارجي  $R_2 = 6.1 \text{ cm}$ ، نحصل على قيمة العجلة:

$$a_y = - \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{\frac{3}{2} + \frac{(2.7 \text{ cm})^2}{2(6.1 \text{ cm})^2}} = -6.14 \text{ m/s}^2.$$

بالتعويض بهذه القيمة عن العجلة في معادلة زمن السقوط المماثل للمعادلة (i) نحصل على الإجابة

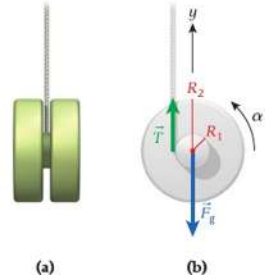
$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{-a_y}} = \sqrt{\frac{2(0.73 \text{ m})}{6.14 \text{ m/s}^2}} = 0.488 \text{ s}.$$

وهذا أطول بمقدار 0.1 s تقريبًا من زمن السقوط الحر للكرة ورق المرحاض التي تم تحريرها من الارتفاع نفسه.

### مناقشة

لاحظ أننا افترضنا عدم تعثر نصف القطر الخارجي للكرة ورق المرحاض أثناء فكّ الورق. بالنسبة إلى المسافة القصيرة الأقل من 1 m، فإنه عُدتمت برهنة ذلك. إذا أردنا حساب الزمن الذي يستغرقه ورق المرحاض لينتشر على مسافة 10 m، مثلًا، فإننا سنحتاج إلى مراعاة التغير الذي طرأ على نصف القطر الخارجي. وبالطبع، سنحتاج إلى مراعاة تأثير مقاومة الهواء.

ونوسفًا في المثال 10.3، يُمكننا دراسة لعبة البويو. تتكون لعبة البويو من قرصين صليبيين نصف قطرها  $R_2$  بينهما قرص رقيق أصغر نصف قطره  $R_1$ ، مع خيط ملفوف حول القرص الأصغر (انظر الشكل 10.20). لغرض هذا التحليل، يُمكننا اعتبار أن عزم القصور الذاتي للعبة البويو هو ذلك الخاص بالقرص الصلب البالغ نصف قطره  $R_2$ ،  $I = \frac{1}{2}mR_2^2$ . مخططات الجسم الحر في الشكل 10.19b والشكل 10.20b متطابقة تقريبًا. في ما عدا نقطة واحدة: في لعبة البويو، يؤثر شد الحبل في السطح في نصف القطر الداخلي  $R_1$ ، في مقابل نصف القطر الخارجي  $R_2$ ، كما هو الحال في كرة ورق المرحاض. يقتضي ذلك أن تكون العجلات الزاوية



الشكل 10.20 (a) لعبة البويو. (b) مخطط الجسم الحر للعبة البويو.

والخطية لليويو متناسبة بعضها مع بعض. مع ثابت التناسب  $R_1$  (بدلاً من  $R_2$  في اللقمة). ومن ثم، يكون عزم الدوران لليويو المتدحرج دون انزلاق على طول الجبل هو

$$\tau = I\alpha \Rightarrow -TR_1 = \left(\frac{1}{2}mR_2^2\right)\frac{a_y}{R_1}$$

$$-T = \frac{1}{2}m\frac{R_2^2}{R_1^2}a_y.$$

من المفيد مقارنة هذه المعادلة مع  $-T = \frac{1}{2}m(1 + R_1^2/R_2^2)a_y$  التي قمنا باشتقاقها في المثال 10.3. للفة ورق المرحاض. كالتأمل تبدو متشابهة للغاية، لكن نسبة نصفي القطر مختلفة. على الجانب الآخر، لا تتغير المعادلة المشتقة من قانون نيوتن الثاني (للإزاحة) كلتا الحالتين:

$$T - mg = ma_y.$$

جميع هذه المعادلة إلى معادلة عزم الدوران لليويو نحصل على عجلة اليويو:

$$-mg = ma_y + \frac{1}{2}m\frac{R_2^2}{R_1^2}a_y \Rightarrow$$

$$a_y = -\frac{g}{1 + \frac{1}{2}\frac{R_2^2}{R_1^2}} = -\frac{2R_1^2}{2R_1^2 + R_2^2}g.$$

على سبيل المثال. إذا كان  $R_2 = 5R_1$  فإن عجلة اليويو هي

$$a_y = \frac{-g}{1 + \frac{1}{2}(25)} = \frac{-g}{13.5} = -0.727 \text{ m/s}^2.$$

## آلة أتوود

تناولت الوحدة 4 آلة أتوود، التي تتكون من وزنين لهما الكتلتان  $m_1$  و  $m_2$  ومتصلين بحبل أو حبل يتم توجيهه عبر بكرة. كانت الآلات التي قمنا بتحليلها في الوحدة 4 موضوعاً للحالة التي ينزلق فيها الحبل دون حدوث احتكاك على البكرة بحيث لا تدور البكرة (أو تكون البكرة عديمة الكتلة). في هذه الحالات، تكون العجلة المشتركة للكتلتين هي  $a = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$ . ومع مفاهيم الديناميكية الدورانية، يمكننا الفاء نظرة أخرى على آلة أتوود ودراسة الحالة التي يمكن فيها حدوث الاحتكاك بين الحبل والبكرة، بحيث يعمل الحبل على لفة البكرة من دون انزلاق.

تعلمنا في الوحدة 4 أن مقدار الشد  $T$  لا يتغير على طول الحبل. والآن تتدخل قوى الاحتكاك للحفاظ على الحبل ملتصقاً بالبكرة، ولا يمكننا افتراض أن الشد ثابت. بدلاً من ذلك، يُحدد شد الحبل بشكل منفصل في كل قطاع من الحبل الذي تتعلق منه إحدى الكتلتين. ومن ثم توجد شدتان مختلفتان للحبل،  $T_1$  و  $T_2$ . في مخطط الجسم الحر للكتلتين (كما يوضح الشكل 10.21b)، وكما تعلمنا في الوحدة 4، يؤدي تطبيق قانون نيوتن الثاني على كل مخطط للجسم الحر على حدة إلى

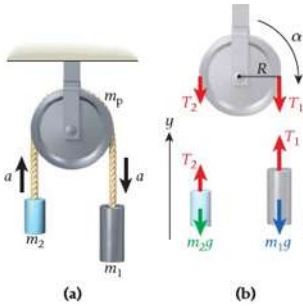
$$(10.20) \quad -T_1 + m_1g = m_1a$$

$$(10.21) \quad T_2 - m_2g = m_2a.$$

استخدمنا هنا مجدداً اصطلاح الإشارة (التقريبي) بأن العجلة الموجبة ( $a > 0$ ) هي التي تتحرك فيها  $m_1$  إلى الأسفل و  $m_2$  إلى الأعلى. يُشار إلى هذا الاصطلاح في مخطط الجسم الحر بواسطة اتجاه محور  $y$  الموجب.

يوضح الشكل 10.21b أيضاً مخطط جسم حر للبكرة، لكنه يتضمن فقط القوى التي يمكن أن تتسبب في حدوث عزم دوران، وهما شدتا الحبل،  $T_1$  و  $T_2$ . ولا تظهر قوى الجاذبية إلى الأسفل وقوى هيكل الدعم إلى الأعلى على البكرة. لا تحتوي البكرة على حركة انتقالية، لذا يكون مجموع كل القوى المؤثرة في البكرة صفراً. ومع ذلك، لا تؤثر محصلة عزم الدوران في البكرة. طبقاً للمعادلة 10.17، يُحدد مقدار عزم الدوران الناتج عن شد الحبل من خلال

$$(10.22) \quad \tau = \tau_1 - \tau_2 = RT_1 \sin 90^\circ - RT_2 \sin 90^\circ = R(T_1 - T_2).$$



**الشكل 10.21** آلة أتوود، (a) بيئة فيزيائية؛ (b) مخططات الجسم الحر.



يحتوي عزم الدوران على إشارات مختلفة، والسبب في ذلك أن أحدهما يؤثر في اتجاه عقارب الساعة والآخر في عكس اتجاه عقارب الساعة. وفقاً للمعادلة 10.18، ترتبط محصلة عزم الدوران بعزم التصور الذاتي للبكرة وعجلتها الزاوية بواسطة  $\tau = I\alpha$ . عزم التصور الذاتي للبكرة (كتلة  $m_p$ ) هو ذلك الخاص بالقرص:  $I = \frac{1}{2}m_p R^2$ . بما أن الحبل يتحرك عبر البكرة دون انزلاق، فإن عجلة الحبل (والكتلتين  $m_1$  و  $m_2$ ) ترتبط بالعجلة الزاوية عن طريق  $\alpha = a/R$ . تماماً مثل التوافق الذي توصلنا إليه في الوحدة 9 بين العجلة الخطية والزاوية لجسيم نقطي يتحرك على محيط دائرة، بالتعويض بالتعبيرين عن عزم التصور الذاتي والعجلة الزاوية نحصل على النتيجة  $\tau = I\alpha = (\frac{1}{2}m_p R^2)(a/R)$ . بالتعويض بهذا التعبير عن عزم الدوران في المعادلة 10.22، نجد

$$R(T_1 - T_2) = \tau = \left(\frac{1}{2}m_p R^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) \Rightarrow$$

$$(10.23) \quad T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m_p a.$$

تكوّن المعادلات 10.20 و 10.21 و 10.23 مجموعة من ثلاث معادلات لثلاث كميات مجهولة، قيمتي شدّ الحبل،  $T_1$  و  $T_2$ ، والعجلة،  $a$ ، وأسهل طريقة لحل هذا النظام للحصول على العجلة هي جمع المعادلات عندها نحصل على

$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p)a \Rightarrow$$

$$(10.24) \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p} g.$$

لاحظ أنّ المعادلة 10.24 تتطابق مع معادلة حالة البكرة عديمة الكتلة (أو الحالة التي ينزلق فيها الحبل على البكرة من دون احتكاك). باستثناء الحد الإضافي  $\frac{1}{2}m_p$  في المقام، والذي يمثّل مساهمة البكرة في إجمالي التصور الذاتي للنظام. يعكس المعامل  $\frac{1}{2}$  شكل البكرة الفرضي، لأن  $C = \frac{1}{2}$  في العلاقة بين عزم التصور الذاتي والكتلة ونصف القطر (المعادلة 10.11).

ومن ثمّ، فإننا قد أجبنا عن السؤال عما يحدث عند بذل قوة على جسم غير نقطي على مسافة بعيدة عن مركز كتلته؛ تنتج القوة عزم دوران وحركة خطية. يؤدي عزم الدوران هذا إلى الدوران المحوري، والذي أسخطناه من اعتباراتنا الأصلية لنتيجة بذل قوة على جسم ما لأننا افترضنا أن جميع القوى أثّرت في مركز كتلة الجسم.

### مسألة محلولة 10.3 ستقوط ساق أفقي

ساق رفيع طوله  $L = 2.50 \text{ m}$  وكتلته  $m = 3.50 \text{ kg}$  يتدلى أفقيًا بواسطة زوج الحبال العمودية المربوطة بالطرفين (الشكل 10.22). بعد ذلك، يُقطع الحبل الذي يدعم الطرف  $B$ .

#### المسألة

ما العجلة الخطية للطرف  $B$  في الساق بعد قطع الحبل؟

#### الحل

**فَرِّ** قبل قطع الحبل، يكون الساق في حالة سكون. عند قطع الحبل الذي يدعم الطرف  $B$ ، تؤثر محصلة عزم دوران في الساق، مع وجود نقطة محورية في الطرف  $A$ . وعزم الدوران هذا ناتج عن قوة الجاذبية المؤثرة في العمود. يمكننا اعتبار أن كتلة الساق ستتركز في مركز كتلتها، الموجود في  $L/2$ . يكون عزم الدوران الابتدائي حينئذ مساوياً لوزن الساق مضروباً في ذراع العزم، وهو  $L/2$ . يمكن ربط العجلة الزاوية الابتدائية الناتجة بالعجلة الخطية للطرف  $B$  في الساق.

**ارسم** يوضح الشكل 10.23 رسماً للساق بعد قطع الحبل.

**ابحث** عند قطع الحبل الذي يدعم الطرف  $B$ ، يكون عزم الدوران،  $\tau$ ، على الساق ناتجاً عن قوة الجاذبية،  $F_g$ ، المؤثرة في الساق مضروبة في ذراع العزم،  $r_{\perp} = L/2$ :

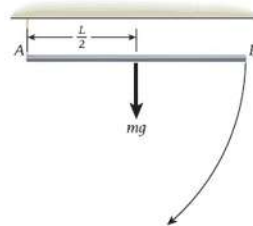
$$(i) \quad \tau = r_{\perp} F_g = \left(\frac{L}{2}\right)(mg) = \frac{mgL}{2}.$$

تُحدد العجلة الزاوية  $\alpha$ ، من خلال

$$(ii) \quad \tau = I\alpha,$$



**الشكل 10.22** ساق رفيع مدعوم في موضع أفقي بحيث عمودي في كلا الطرفين.



**الشكل 10.23** الساق الرفيع مباشرة بعد قطع طرف الحبل الداعم  $B$ .

بينما يُحدد عزم القصور الذاتي،  $I$ ، للساق الرفيع الذي يدور حول الطرف  $A$  من خلال

$$(iii) \quad I = \frac{1}{3} mL^2.$$

يُمكن ربط العجلة الخطية  $a$ ، للطرف  $B$  بالعجلة الزاوية من خلال

$$(iv) \quad a = L\alpha,$$

لأن الطرف  $B$  للساق يخضع لحركة دائرية عند دوران الساق حول الطرف  $A$ .

**بَسِّط** يُمكننا جمع المعادلتين (i) و(ii) للحصول على

$$(v) \quad \tau = I\alpha = \frac{mgL}{2}.$$

بالتعويض عن  $I$  و  $a$  من المعادلتين (iii) و(iv) في المعادلة (v) نحصل على

$$I\alpha = \left(\frac{1}{3} mL^2\right)\left(\frac{a}{L}\right) = \frac{mgL}{2}.$$

بتقسيم المعاملات المشتركة، نحصل على

$$\frac{a}{3} = \frac{g}{2}$$

$$a = 1.5g.$$

أو

**احسب** بالتعويض بالقيمة العددية عن عجلة الجاذبية نحصل على

$$a = 1.5(9.81 \text{ m/s}^2) = 14.715 \text{ m/s}^2.$$

**قَرِّب** بتقريب النتيجة إلى ثلاثة أرقام معنوية نحصل على

$$a = 14.7 \text{ m/s}^2.$$

**تَحَقَّق ثانية** قد تكون هذه الإجابة مفاجئة إلى حد ما، لأنك ربما افترضت أن العجلة لا يُمكن أن تتجاوز عجلة السقوط الحر،  $g$ ، إذا قُطع الحبلان في الوقت نفسه، فستكون عجلة الساق بالكامل هي  $a = g$ . تبدو نتيجةنا للعجلة الابتدائية للطرف  $B$  من  $a = 1.5g$  معقولة لأن القوة الكاملة للجاذبية المؤثرة في العمود والطرف  $A$  من العمود تظل ثابتة، ومن ثمَّ، لا تكون عجلة الأطراف المتحركة ناتجة عن السقوط الحر فحسب، إذ توجد عجلة إضافية بسبب دوران الساق.

## 10.6 الشغل المبذول من عزم دوران

تعلمنا في الوحدة 5 أن الشغل  $W$  المبذول من قوة ما  $\vec{F}$  نحصل عليه بالتكامل

$$W = \int_{x_0}^x F_x(x') dx'.$$

والآن يمكننا دراسة الشغل المبذول من عزم دوران  $\vec{\tau}$ .

عزم الدوران هو المكافئ الزاوي للقوة، المكافئ الزاوي للإزاحة الخطية،  $d\vec{r}$  هو الإزاحة الزاوية،  $d\vec{\theta}$ . وبما أن كلا من عزم الدوران والإزاحة الزاوية متجهان محوريان وبشيران في اتجاه محور الدوران، فإنه يُمكننا كتابة ناغ الضرب القياسي لهما في صورة  $\vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \tau d\theta$ ، ومن ثمَّ يكون الشغل المبذول من عزم دوران

$$(10.25) \quad W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\theta') d\theta'.$$

في الحالة الخاصة التي يكون فيها عزم الدوران ثابتًا ولا يعتمد على  $\theta$ ، يُحسب تكامل المعادلة 10.25 من خلال

$$(10.26) \quad W = \tau(\theta - \theta_0)$$

قدّمت الوحدة 5 أيضًا النسخة الأولى من نظرية الشغل والطاقة الحركية:  $\Delta K \equiv K - K_0 = W$ . يمكن كتابة المكافئ الدوراني للشغل والطاقة الحركية بواسطة المعادلة 10.3 كما يلي:

$$(10.27) \quad \Delta K \equiv K - K_0 = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = W$$

في حالة عزم الدوران الثابت، يُمكننا استخدام المعادلة 10.26 وإيجاد نظرية الشغل والطاقة الحركية لعزم الدوران الثابت:

$$(10.28) \quad \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \tau(\theta - \theta_0).$$

### ربط مسمار

### مثال 10.4

#### المسألة

ما إجمالي الشغل اللازم لربط المسمار الموضح في الشكل 10.24 بالكامل؟ إجمالي عدد اللفات يساوي 30.5، وقطر المسمار يساوي 0.860 cm، وقوى الاحتكاك بين الصامولة والمسار هي ثابت 14.5 N.

#### الحل

بما أن قوة الاحتكاك ثابتة وخط المسار ثابت، فإنه يمكننا حساب عزم الدوران اللازم لللف الصامولة مباشرة:

$$\tau = Fr = \frac{1}{2}Fd = \frac{1}{2}(14.5 \text{ N})(0.860 \text{ cm}) = 0.0623 \text{ N m}.$$

لحساب الشغل الكلي اللازم لربط المسمار بالكامل، فإننا نحتاج إلى معرفة الزاوية الكلية. تتطابق كل لفة مع زاوية قدرها  $2\pi \text{ rad}$ . لذا فإن الزاوية الكلية في هذه الحالة تكون  $\Delta\theta = 30.5(2\pi) = 191.6 \text{ rad}$ . حينئذ نحصل على الشغل الكلي اللازم باستخدام المعادلة 10.26:

$$W = \tau\Delta\theta = (0.0623 \text{ N m})(191.6) = 11.9 \text{ J}.$$



الشكل 10.24 ربط مسمار.

كما ترى، فإن إيجاد الشغل المبذول ليس صعبًا للغاية مع عزم دوران ثابت. ولكن في عدة حالات فيزيائية، لا يُمكن اعتبار عزم الدوران ثابتًا. ويشرح المثال التالي إحدى هذه الحالات.

### تشبيث بُرغي

### مثال 10.5

قوة الاحتكاك بين بُرغي والخشب تناسبية مع منطفة الاتصال بين البرغي والخشب. بما أن البرغي له قطر ثابت، فيعني ذلك أن عزم الدوران اللازم لللف البرغي يزداد خطيًا بزيادة العمق الذي اخترقه البرغي داخل الخشب.

#### المسألة

افترض أنه يلزم 27.3 لفة لتشبيث برغي بالكامل داخل قطعة من الخشب (الشكل 10.25). يزداد عزم الدوران اللازم لللف البرغي خطيًا من الصفر عند البداية إلى حد أقصى 12.4 N m عند النهاية. ما الشغل الكلي اللازم لتشبيث البرغي؟

#### الحل

من الواضح أن عزم الدوران هو وظيفة الزاوية في هذا الحالة. ولم يعد ثابتًا. لذا، علينا استخدام تكامل المعادلة 10.25 للوصول إلى الإجابة. سنحسب أولاً الزاوية الكلية،  $\theta_{\text{total}}$ ، التي يلف البرغي خلالها:  $\theta_{\text{total}} = 27.3(2\pi) = 171.5 \text{ rad}$ . والآن نحتاج إلى إيجاد تعبير لـ  $\tau(\theta)$ ، وتعني الزيادة الخطية بمقدار 12.4 N m من الصفر حتى  $\theta_{\text{total}}$ .

$$\tau(\theta) = \theta \frac{\tau_{\text{max}}}{\theta_{\text{total}}}$$

والآن يُمكننا حسان التكامل كما يلي:

$$W = \int_0^{\theta_{\text{total}}} \tau(\theta') d\theta' = \int_0^{\theta_{\text{total}}} \theta' \frac{\tau_{\text{max}}}{\theta_{\text{total}}} d\theta' = \frac{\tau_{\text{max}}}{\theta_{\text{total}}} \int_0^{\theta_{\text{total}}} \theta' d\theta' = \frac{\tau_{\text{max}}}{\theta_{\text{total}}} \frac{1}{2} \theta^2 \Big|_0^{\theta_{\text{total}}} = \frac{1}{2} \tau_{\text{max}} \theta_{\text{total}}.$$

وبالتعويض بالأرقام، نحصل على

$$W = \frac{1}{2} \tau_{\text{max}} \theta_{\text{total}} = \frac{1}{2} (12.4 \text{ N m})(171.5 \text{ rad}) = 1.06 \text{ kJ}.$$



الشكل 10.25 إدخال برغي في قطعة من الخشب.

### مراجعة المفاهيم 10.5

إذا كنت تريد تقليل عزم الدوران المطلوب لإدخال البرغي، فيمكنك دهن صابون مسبقًا على سن اللولب. افترض أن الصابون يقلل معامل الاحتكاك بين البرغي والخشب بمقدار النصف ومن ثمَّ يقلل عزم الدوران المطلوب بمقدار النصف. إلى أي مدى يُغيّر ذلك من الشغل الكلي المطلوب لللف البرغي داخل الخشب؟

(a) يُعني الشغل كما هو.

(b) يُنقل الشغل بمقدار النصف.

(c) يُنقل الشغل بمقدار الربع.

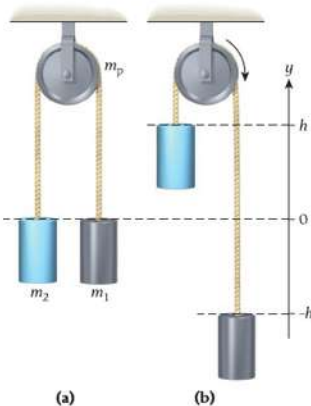
## مراجعة المفاهيم 10.6

إذا شعرت بالإجهاد قبل الانتهاء من إدخال البرغي ولم تستطع إدخاله إلى نصف المسافة، فكيف سيغير ذلك كامل الشغل المبذول بالنسبة إلى الشغل المبذول في إدخال البرغي بالكامل؟

(a) يُبقي الشغل كما هو.

(b) يُنقل الشغل بمقدار النصف.

(c) يُنقل الشغل بمقدار الربع.



**الشكل 10.26** آلة أتودد أخرى: (a) المواقع الابتدائية؛ (b) المواقع بعد تحرك الأوزان للمسافة  $h$ .

## آلة أتودد

## مسألة محلولة 10.4

### المسألة

نفلان كتلتاهما  $m_1 = 3.00 \text{ kg}$  و  $m_2 = 1.40 \text{ kg}$  متصلان بحبل خفيف للغاية يلف دون انزلاق على بكرة (قرص صلب) كتلتها  $m_p = 2.30 \text{ kg}$ . تتدلى الكتلتان في البداية عند الارتفاع نفسه وتكونان في حالة سكون. بمجرد تحريرهما، تستط الكتلّة الأثقل،  $m_1$ ، وترفع الكتلّة الأخف  $m_2$ ، كم تبلغ سرعة  $m_2$  عند ارتفاع  $h = 0.16 \text{ m}$ ؟

### الحل

**فكر** يمكننا محاولة حساب عجلة الكتلتين ثم استخدام معادلات الكينماتيكا لربط هذه العجلة بالإزاحة العمودية. ويمكننا أيضًا استخدام قوانين الطاقة، التي ستعود إلى حل مباشر. في البداية، تكون الكتلتان المعلقان والبكرة في حالة سكون، لذا تساوي الطاقة الحركية الكلية صفرًا. يمكننا اختيار نظام إحداثي بحيث تكون طاقة الوضع الابتدائية صفرًا، وبهذا تساوي الطاقة الكلية صفرًا. ومع رفع إحدى الكتلتين، فإنها تكتسب طاقة وضع جاذبية، وتعد الكتلة الأخرى طاقة الوضع. تكتسب كلتا الكتلتين طاقة حركية انتقالية، وتكتسب البكرة طاقة حركية دورانية. بما أن الطاقة الحركية متناسبة مع مربع السرعة، فإنه يمكننا استخدام قانون حفظ الطاقة للحصول على السرعة.

**رسم** يُوضح الشكل 10.26A الحالة الابتدائية لآلة أتودد مع تعلق الكتلتين على الارتفاع نفسه. نقر تعيين الارتفاع كمنطقة الأصل للمحور الرأسي، ومن ثم نضمن أن طاقة الوضع الابتدائية وكذلك الطاقة الابتدائية الكلية تساوي صفرًا. يوضح الشكل 10.26B آلة أتودد مع إزاحة الكتلتين من خلال  $h$ .

**ابحث** الكسب في طاقة الوضع الجاذبية لـ  $m_2$  هو  $U_2 = m_2gh$ ، وفي الوقت نفسه، يتم خفض  $m_1$  للمسافة نفسها، لذا تساوي طاقة الوضع  $U_1 = -m_1gh$  والطاقة الحركية لـ  $m_1$  هي  $K_1 = \frac{1}{2}m_1v^2$  والطاقة الحركية لـ  $m_2$  هي  $K_2 = \frac{1}{2}m_2v^2$ . لاحظ استخدام السرعة نفسها،  $v$ ، في تعبيرات الطاقة لكلتا الكتلتين. هذا التساوي مؤكد لأنهما متصلان بحبل. (نفترض أن الحبل لا يتمدد).

كم تبلغ الطاقة الحركية الدورانية للبكرة؟ البكرة هي قرص صلب له عزم قصور ذاتي محدد بواسطة  $I = \frac{1}{2}m_pR^2$  وطاقة حركية دورانية محددة بواسطة  $K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$ ، بما أن الحبل يلف على البكرة دون انزلاق كما أنه يتحرك بسرعة الكتلتين نفسها، فإن النطاق الموجودة على سطح البكرة يجب أن تتحرك أيضًا بتلك السرعة الخطية نفسها،  $v$ ، ومثل القرص الصلب المتدحرج، فإن السرعة الخطية ترتبط بالسرعة الزاوية عبر  $\omega R = v$ . لذا، تكون الطاقة الحركية الدورانية لهذه البكرة

$$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_pR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}m_pR^2\omega^2 = \frac{1}{4}m_pv^2.$$

يمكننا الآن التعبير عن الطاقة الكلية بأنها مجموع الطاقات الحركية الدورانية والانتقالية والوضع. ويجب أن يكون هذا المجموع الإجمالي صفرًا، لأن ذلك كان الضميمة الابتدائية للطاقة الكلية وينطبق قانون حفظ الطاقة:

$$0 = U_1 + U_2 + K_1 + K_2 + K_r \\ = -m_1gh + m_2gh + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{4}m_pv^2.$$

**بسّط** يمكننا إعادة ترتيب المعادلة السابقة لعزل السرعة،  $v$ :

$$(m_1 - m_2)gh = \left(\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{4}m_p\right)v^2 \Rightarrow$$

(i)

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p}}$$

**احسب** يمكننا الآن التعويض بالأعداد:

$$v = \sqrt{\frac{2(3.00 \text{ kg} - 1.40 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.16 \text{ m})}{3.00 \text{ kg} + 1.40 \text{ kg} + \frac{1}{2}(2.30 \text{ kg})}} = 0.951312 \text{ m/s}.$$

**قرّب** تم تحديد الإزاحة  $h$  بأقل ضبط، إلى رقمين، ومن ثم نقرب النتيجة إلى

$$v = 0.95 \text{ m/s}.$$

تتبع-

تحقق ثانية تُحدد عجلة الكتلتين من خلال المعادلة 10.24. التي وضعناها في القسم 10.5 أثناء مناقشة آلة أتوود:

$$(ii) \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p} g.$$

قدّمت الوحدة 2 معادلات الكينماتيكا للحركة الخطية أُحادية البعد. إحدى هذه المعادلات، التي تربط السرعتين الابتدائية والنهائية والإزاحة والعجلة، مغيدة هنا:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0).$$

هنا  $v_0 = 0$  و  $y - y_0 = h$ . إذا، يؤدي التعويض بالتعبير عن  $a$  من المعادلة (ii) إلى النتيجة

$$v^2 = 2ah = 2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p} gh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p}}.$$

ومعادلة السرعة هذه مماثلة للمعادلة (أ)، التي حصلنا عليها باستخدام قوانين الطاقة. يتضح من الجهد الذي بذلناه لتطوير معادلة العجلة أن طريقة الطاقة هي أسرع وسيلة.

## مراجعة المفاهيم 10.7

استخدما قانون حفظ الطاقة في المسألة المحلولة 10.4. لكن قوة الاحتكاك، وهي قوة غير محافظة. تمنع الجبل من الانزلاق على البكرة وتتسبب في دوران البكرة. أي من العبارات التالية تُبرر استخدامها لحفظ الطاقة في هذه الحالة؟

- (a) بما أن قوة الاحتكاك تؤثر في جانبي البكرة، فإنه يتم شطبها.  
 (b) بما أن نقاط قوة الاحتكاك في اتجاه السد نفسه في الجبل، فإنها لا تساهم في الشغل المبذول.  
 (c) بما أن قوة الاحتكاك لا تسبب إزاحة الجبل بالنسبة إلى البكرة، فإنها لا تبذل أي شغل ولذا لا تُغيّر الطاقة الميكانيكية الكلية.  
 (d) بما أن البكرة تدور بحرية، فإن قوة الاحتكاك لا تؤثر في البكرة.

## 10.7 كمية الحركة الزاوية

رغم أننا درسنا المكافئات الدورانية للكتلة (عزم العصور الذاتي) والسرعة (السرعة الزاوية) والعجلة (العجلة الزاوية) والقوة (عزم الدوران). فإننا لم نتطرق بعد إلى النظر الدوراني لكمية الحركة الخطية. بما أن كمية الحركة الخطية هي ناتج ضرب سرعة الجسم وكتلته، فبالمثل ينبغي أن تكون كمية الحركة الزاوية ناتج ضرب السرعة الزاوية وعزم العصور الذاتي. سنعمل في هذا القسم على إيجاد أن تلك العلاقة حقيقية لأي جسم غير نقطي له عزم قصور ذاتي ثابت. وللوصول إلى تلك النتيجة، نحتاج إلى البدء من تعريف كمية الحركة الزاوية للجسيم النقطي ثم نتابع من تلك النقطة.

### الجسيم النقطي

**كمية الحركة الزاوية،  $\vec{L}$**  للجسيم النقطي هي الضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومنتجه كمية الحركة:

$$(10.29) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

بما أن تعريف كمية الحركة الزاوية هو  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  و تعريف عزم العصور الذاتي هو  $\vec{I} = \vec{r} \times \vec{F}$  فإنه يمكن صياغة عبارات حول كمية الحركة الزاوية تكون مشابهة لتلك الخاصة بعزم الدوران في القسم 10.4. على سبيل المثال، يُحدّد مقدار كمية الحركة الزاوية بواسطة

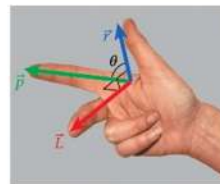
$$(10.30) \quad L = rp \sin \theta,$$

حيث  $\theta$  هي الزاوية بين متجه الموقع ومنتجه كمية الحركة. ومثل اتجاه عزم الدوران، يُحدّد اتجاه منتجه كمية الحركة الزاوية بواسطة قاعدة اليد اليمنى. اجعل إبهام اليد اليمنى يشير إلى متجه الموقع،  $\vec{r}$ . لجسيم نقطي وسبابه اليد اليمنى تُشير إلى متجه كمية الحركة،  $\vec{p}$ . ثم تُشير الإصبع الوسطى في اتجاه منتجه كمية الحركة الزاوية  $\vec{L}$  (الشكل 10.27). على سبيل المثال، يوضح الشكل 10.28 منتجه كمية الحركة الزاوية لجسيم نقطي في المستوى  $xy$ .  
 وبتعريف كمية الحركة الزاوية في المعادلة 10.29، يمكننا الحصول على مشتقة الزمن:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \left( \frac{d}{dt} \vec{r} \right) \times \vec{p} + \left( \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{p} \right) = (\vec{v} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \vec{F}).$$

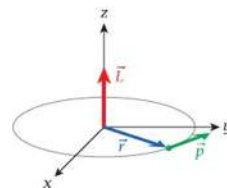
للحصول على المشتقة من الضرب الاتجاهي، نستخدم قاعدة ناتج الضرب الخاصة بحساب المتفاضل والتكامل. يساوي الحد  $\vec{v} \times \vec{p}$  صفراً دائماً، لأن  $\vec{v} \parallel \vec{p}$ . ومن المعادلة 10.16، نعرف أن  $\vec{r} \times \vec{F}$  ومن ثم نحصل على مشتقة الزمن لمنتجه كمية الحركة الزاوية:

$$(10.31) \quad \frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau}.$$



### الشكل 10.27 قاعدة اليد اليمنى لأجاء

منتجه كمية الحركة الزاوية، إصبع الإبهام محاذ لمنتجه الموقع وإصبع السبابه محاذ لمنتجه كمية الحركة، وتُشير نقاط منتجه كمية الحركة الزاوية بامتداد الإصبع الوسطى.



### الشكل 10.28 كمية الحركة الزاوية

لجسيم نقطي.

مشتقة الزمن لمتجه كمية الحركة الزاوية للجسيم النقطي هي متجه عزم الدوران المؤثر في ذلك الجسيم النقطي. هذه النتيجة مناظرة لحالة الحركة الخطية، حيث تكون مشتقة الزمن لمتجه كمية الحركة الخطية مساوية لمتجه القوة.

يسمح لنا ضرب الاتجاهي بالعودة إلى العلاقة بين متجه السرعة الخطية والمتجه الإحداثي ومتجه السرعة الزاوية، التي تناولتها الوحدة 9. (ستدرس مرة أخرى الحالة الخاصة الموضحة في الشكل 10.28. حيث يوجد متجه الموقع ومتجه كمية الحركة في مستوى ثنائي الأبعاد). في الحركة الدائرية، يكون مقدار تلك المتجهات مرتبطاً عبر  $\omega = v/r$  ويُحدّد اتجاه  $\vec{\omega}$  باستخدام قاعدة اليد اليمنى. باستخدام تعريف ضرب الاتجاهي، يمكننا كتابة  $\vec{\omega}$  في شكل

$$(10.32) \quad \vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}.$$

وبمقارنة المعادلتين 10.29 و 10.32 نكتشف أن كمية الحركة الزاوية ومتجهات السرعة الزاوية للجسيم النقطي متوازيتان، بواسطة

$$(10.33) \quad \vec{L} = \vec{\omega} \cdot (mr^2).$$

الكمية  $mr^2$  هي عزم القصور الذاتي لجسيم نقطي يدور حول محور الدوران عند مسافة  $r$ .

## نظام الجسيمات

من السهل تعميم مفهوم كمية الحركة الزاوية على نظام مكون من عدد  $n$  من الجسيمات النقطية. كمية الحركة الزاوية الكلية لنظام الجسيمات هي مجموع كمية الحركة الزاوية للجسيمات الفردية.

$$(10.34) \quad \vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i.$$

ومرة أخرى، نأخذ مشتقة الزمن لمجموع كمية الحركة الزاوية للحصول على العلاقة بين كمية الحركة الزاوية الكلية لهذا النظام وعزم الدوران.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \vec{r}_i \right)}_{\vec{v}_i} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \vec{p}_i \right)}_{\vec{F}_i} \right) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{\text{net}}. \end{aligned}$$

$\vec{v}_i \parallel \vec{p}_i$        $\vec{v}_i \parallel \vec{p}_i$   
تساوي صغراً لأن      تساوي صغراً لأن

كما توقعنا، فإن مشتقة الزمن لكمية الحركة الزاوية الكلية لنظام الجسيمات تُحدّد من خلال محصلة عزم الدوران الخارجي الكلي المؤثر في النظام. ومن الضروري معرفة أن عزم الدوران الخارجي الكلي هذا ناتج عن القوى الخارجية  $\vec{F}_i$ .

## الأجسام الصلبة

سوف يدور الجسم الصلب حول محور تماثل ثابت بسرعة زاوية  $\vec{\omega}$  لا تتغير لكل جزء من الجسم. وفي هذه الحالة، تكون كمية الحركة الزاوية متناسبة مع السرعة الزاوية، ويكون ثابت التناسب هو عزم القصور الذاتي:

$$(10.35) \quad \vec{L} = I\vec{\omega}.$$

## كمية الحركة الزاوية لجسم صلب

## الاشتقاق 10.4

من خلال تمثيل الأجسام الصلبة بمجموعة من الجسيمات النقطية نستطيع استخدام النتائج التي توصلنا إليها في القسم الفرعي السابق كمنطلقة بداية، ولكي نُمثّل الجسيمات النقطية الجسم الصلب، يجب أن نظل المسافات النسبية بينها ثابتة (صلبة). بعد ذلك، تدور كل تلك الجسيمات النقطية بسرعة زاوية ثابتة،  $\vec{\omega}$ ، حول محور الدوران المشترك.

## سؤال الاختبار الذاتي 10.3

هل يمكنك توضيح أن عزم الدوران الداخلي (تلك الناتجة عن القوى الداخلية بين الجسيمات في النظام) لا تساهم في محصلة عزم الدوران الكلي؟  
الطبيح، استخدم قانون نيوتن الثالث.  
 $(\vec{F}_{i \rightarrow j}) = -\vec{F}_{j \rightarrow i}$

- يُتبع

من المعادلة 10.34. نحصل على

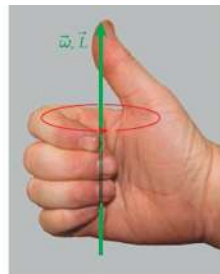
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega}.$$

في الخطوة الأخيرة، استخدمنا العلاقة بين السرعة الزاوية والضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومنتجه السرعة الخطية للجسيمات النقطية، المعادلة 10.32. حيث  $r_{i\perp}$  هو نصف القطر المداري للجسيم النقطي  $i$ . ولاحظ أن متجه السرعة الزاوية هو نفسه لجميع الجسيمات النقطية في هذا الجسم الصلب. ومن ثم يمكننا إخراجها من المجموع باعتباره معاملاً مشتركاً.

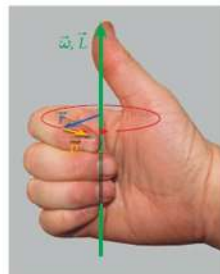
$$\vec{L} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2.$$

يمكننا تحديد هذا المجموع باعتباره عزم القصور الذاتي لمجموعة من الجسيمات النقطية، انظر المعادلة 10.4. ومن ثم، نحصل على النتيجة:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$



(a)



(b)

بالنسبة إلى الأجسام الصلبة التي تدور حول محور تماثل، تمامًا مثل الجسيمات النقطية، يكون اتجاه كمية الحركة الزاوية هو نفسه اتجاه متجه السرعة الزاوية. يوضح الشكل 10.29 قاعدة اليد اليمنى المستخدمة لتحديد اتجاه كمية الحركة الزاوية (السوم في اتجاه إصبع الإبهام) باعتبارها وظيفة للإحساس بالدوران (اتجاه الأصابع). ماذا يحدث إذا لم يكن محور الدوران محور تماثل للجسم الصلب؟ في هذه الحالة، لا يشير متجه كمية الحركة الزاوية بالضرورة في اتجاه متجه السرعة الزاوية، وتصبح العمليات الرياضية أكثر تعقيداً. وفوق نطاق هذا الكتاب، يحدث مثال لهذه الحالة عندما تخرج عجلة سيارة عن المحاذاة (بعد اصطدام الإطار بحافة مثلاً). ستبدأ العجلة في الاضطراب، وهو ما يعد خطيراً. بسبب إلقاء ضغط ميكانيكي كبير على كل من العجلة والمحور.

## مثال 10.6 كرة الجولف

### المسألة

ما مقدار كمية الحركة الزاوية لكرة جولف ( $m = 4.59 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ ,  $R = 2.13 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ) تدور بسرعة 4250 rpm (دورة في الدقيقة) بعد ضربة موفقة بالمضرب؟

### الحل

نحتاج أولاً إلى إيجاد السرعة الزاوية لكرة الجولف، والتي تتضمن استخدام المفاهيم المقدمة في الوحدة 9:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(4250 \text{ min}^{-1}) = 2\pi(4250/60 \text{ s}^{-1}) = 445.1 \text{ rad/s}.$$

عزم القصور الذاتي لكرة الجولف هو

$$I = \frac{2}{5} mR^2 = 0.4(4.59 \times 10^{-2} \text{ kg})(2.13 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 8.33 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2.$$

مقدار كمية الحركة الزاوية لكرة الجولف هو ناتج ضرب هذين العددين:

$$L = (8.33 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2)(445.1 \text{ s}^{-1}) = 3.71 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

باستخدام المعادلة 10.35 لكمية الحركة الزاوية للجسم الصلب، يمكننا توضيح أن العلاقة بين معدل تغير كمية الحركة الزاوية وعزم الدوران لا تزال صالحة. يأخذ مشتقة الزمن من المعادلة 10.35. ويفرض أن الجسم الصلب الذي له عزم قصور ذاتي ثابت في الزمن، نحصل على

**الشكل 10.29** قاعدة اليد اليمنى (a) كمية الحركة الزاوية (باتمديد إصبع الإبهام) كدالة لاتجاه الدوران (باتمديد الأصابع). (b) كمية الحركة ومنتجات الموقع لجسيم تقطبي في حركة دائرية.

$$(10.36) \quad \frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} (I\vec{\omega}) = I \frac{d}{dt} \vec{\omega} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}_{\text{net}}$$

لاحظ إضافة الدلالة "net" إلى رمز عزم الدوران. بما يشير إلى أن هذه المعادلة تنطبق أيضًا في حالة وجود عزوم دوران مختلفة. في وقت سابق، كان الاعتقاد أن المعادلة 10.19 تنطبق فقط على الجسم المتطفي. ولكن توضح المعادلة 10.36 أنّ المعادلة 10.19 تنطبق على أي جسم له عزم قصور ذاتي ثابت (ثابت في الزمن).

تتساوى مشتقة الزمن لكمية الحركة الزاوية مع عزم الدوران. تمامًا كما تتساوى مشتقة الزمن لكمية الحركة الخطية مع القوة. المعادلة 10.31 هي صيغة أخرى لقانون نيوتن الثاني للدوران كما أنها أكثر شمولاً من المعادلة 10.19 إذ إنها تستوعب أيضًا حالة عزم القصور الذاتي غير الثابتة في الزمن.

### حفظ كمية الحركة الزاوية

إذا كانت محصلة عزم الدوران الخارجي صفرًا، فإن مشتقة الزمن لكمية الحركة الزاوية تساوي صفرًا أيضًا وفقًا للمعادلة 10.36. وإذا كانت مشتقة الزمن للكمية تساوي صفرًا، عندها تكون الكمية ثابتة في الزمن. لذا، يمكننا كتابة قانون حفظ كمية الحركة الزاوية:

$$(10.37) \quad \text{If } \vec{\tau}_{\text{net}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constant} \Rightarrow \vec{L}(t) = \vec{L}(t_0) \equiv \vec{L}_0$$

هذا هو القانون الثالث الأساسي لحفظ الطاقة الذي تناولناه. وينطبق الاثنان الأوليان على الطاقة الميكانيكية (الوحدة 6) وكمية الحركة الخطية (الوحدة 7). ومثل قوانين حفظ الطاقة الأخرى، يمكن استخدام هذا القانون لحل المسائل التي يكون من الصعب حلها من دون هذا القانون.

إذا وُجدت عدة أجسام في نظام تكون محصلة عزم الدوران الخارجي فيه صفرًا، تصبح معادلة حفظ كمية الحركة الزاوية

$$(10.38) \quad \sum_i \vec{L}_{\text{initial}} = \sum_i \vec{L}_{\text{final}}$$

في ما يتعلق بالحالة الخاصة للجسم الصلب الذي يدور حول محور دوران ثابت، نجد أن بما أنه في هذه الحالة  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ :

$$(10.39) \quad I\vec{\omega} = I_0\vec{\omega}_0 \quad (\text{for } \vec{\tau}_{\text{net}} = 0),$$

أو بشكل مكافئ،

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I_0}{I} \quad (\text{for } \vec{\tau}_{\text{net}} = 0)$$

إن قانون حفظ الطاقة هذا هو الأساس في عمل الجيروسكوبات. والجيروسكوبات أجسام (أقراص عادة) تدور حول محور تماثل بسرعة زاوية عالية. يستطيع محور الدوران أن يدور على محامل الكرات، من دون احتكاك تقريبًا، ونظام الاحتكاك قادر على الدوران بحرية في جميع الاتجاهات. تضمن حرية الحركة هذه عدم تأثير محصلة عزم الدوران الخارجي في الجيروسكوب. ومن دون عزم الدوران الخارجي، تظل كمية الحركة الزاوية للجيروسكوب ثابتة ومن ثمّ تشير في الاتجاه نفسه، بغض النظر عما يفعله الجسم الذي يحمل الجيروسكوب. تعتمد الطائرات والأقمار الصناعية على الجيروسكوبات لأغراض الملاحظة. فتلسكوب هابل الفضائي مثلًا مجهّز بستة جيروسكوبات، ويجب أن تعمل ثلاثة منها على الأقل لكي يتمكن التلسكوب من توجيه نفسه في الفضاء.

تظهر أهمية المعادلة 10.39 أيضًا في عدة رياضات، أهمها الجمباز والغطس والتزلج على الجليد. وفي تلك الرياضات الثلاثة، يقوم اللاعبون بإعادة ترتيب أجسامهم ومن ثمّ تعديل عزم القصور الذاتي لديهم للتأثير في معدلات دوراتهم.

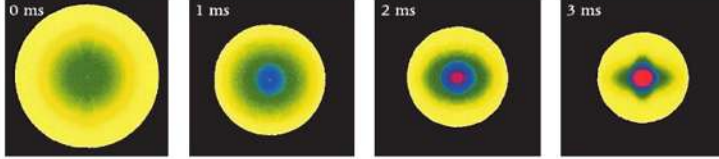


الشكل 10.30 جيروسكوب لعبة



## مثال 10.7 موت نجم

في نهاية حياة نجم عملاق يبلغ خمسة أضعاف حجم الشمس. يكون لبّ النجم بالكامل تقريباً من فلز الحديد. وبمجرد الوصول إلى هذه المرحلة، يصبح اللب غير مستقر وينهار (كما يوضّح الشكل 10.31). خلال عملية تستغرق حوالي ثانية فقط وتكون بمثابة المرحلة الأولى للانفجار المستعر الأعظم. من بين أكبر الأحداث التي تُطلق الطاقة العظيمة في الكون. يعتبر انفجار المستعر الأعظم مصدر أغلب العناصر الأثقل من الحديد. يطلق هذا الانفجار الحطام، بما فيه العناصر الثقيلة، في الفضاء الخارجي، وقد يترك خلفه نجماً نيوترونياً يتكوّن من موادّ جسمية مضغوطة إلى كثافة أثقل بملايين المرات من أكبر الكواكب التي تمّ اكتشافها على الأرض.



**الشكل 10.31** محاكاة حاسوبية للمراحل الأولى لانفجار لبّ نجم هائل. تمثل الألوان المختلفة الكثافة المنخفضة للّب النجم، والتي تتزايد من الأصفر إلى الأخضر والأزرق ثم إلى الأحمر.

### المسألة

إذا كان اللب الحديدي يدور بمعدل 9.00 دورات في اليوم وإذا تناقص نصف قطره خلال الانهيار بمعامل 700، فكم تبلغ السرعة الزاوية للّب في نهاية الانهيار؟ (لا يُمكن تبرير الافتراض بأن اللب الحديدي له كثافة ثابتة. وتُظهر محاكاة الكمبيوتر أنه يتناقص أسياً في الاتجاه القطري. ومع ذلك، تُظهر المحاكاة نفسها أن عزم القصور الذاتي للّب الحديدي لا يزال متناسباً تقريباً مع مربع نصف قطره أثناء عملية الانهيار).

### الحل

بسبب حدوث انهيار اللب الحديدي تحت تأثير قوة السحب الناتجة عن جاذبيته، لا تؤثر محصلة العزم الخارجي في اللب. لذا، يتم حفظ كمية الحركة الزاوية وفقاً للمعادلة 10.31. من المعادلة 10.39 نحصل على

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I_0}{I} = \frac{R_0^2}{R^2} = 700^2 = 4.90 \cdot 10^5$$

مع مقدار السرعة الزاوية النهائية:

$$\omega = 4.90 \cdot 10^5 \omega_0 = 4.90 \times 10^5 (6.55 \times 10^{-4} \text{ rad/s}) = 321 \text{ rad/s.}$$

إذا، يدور النجم النيوتروني الناتج عن هذا الانهيار مع تردد دوري يساوي 51.0 rev/s.

### مناقشة

يُمكن لرؤاد الفضاء ملاحظة دوران النجوم النيوترونية، التي يُطلق عليها اسم *النباضات الإشعاعية*. ويُقدّر أن أقصى سرعة يدور بها النباض الإشعاعي عند تشكله من انفجار المستعر الأعظم لنجم فردي حوالي 60 rev/s، وأسرع ترددات دورانية محورية معروفة للنباض الإشعاعي هي

$$f = 716 \text{ rev/s,}$$

والتي تساهم بسرعة زاوية مقدارها

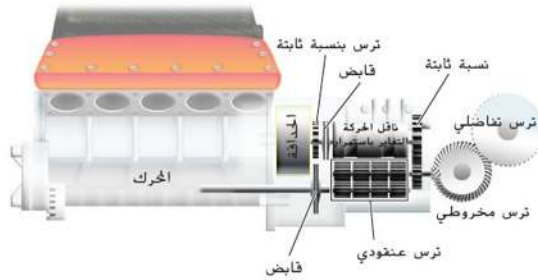
$$\omega = 2\pi f = 2\pi(716 \text{ s}^{-1}) = 4500 \text{ rad/s.}$$

بعد تكوّن النباض الإشعاعي سريع الدوران من انهيار نجمي، يزيد من تردده الدوري من خلال أخذ المادة من نجم مرافق يدور في مدار قريب.

ينتهي المثال التالي القسم من خلال تطبيق هندسي حديث. يربط بين مفاهيم عزم القصور الذاتي والطاقة الحركية الدورانية وعزم الدوران وكمية الحركة الزاوية.

## مثال 10.8 الحداقة

تؤدي عملية الكبح لإبطاء السيارة إلى تقليل الطاقة الحركية للسيارة وتشتيتها بفعل قوة الاحتكاك بين بطانة المكابح والأسطوانات. تحوّل المركبات الهجينة التي تعمل بالبنزين والكهرباء بعض أو معظم تلك الطاقة الحركية إلى طاقة كهربائية قابلة لإعادة الاستخدام مخزنة داخل بطارية كبيرة. ولكن توجد طريقة لتخزين الطاقة دون الحاجة إلى بطارية كبيرة وذلك عبر تخزينها بشكل مؤقت في حداقة (الشكل 10.32). كانت شركة فلأيرد سيسيمز أول من ابتكرت أنظمة استعادة الطاقة الحركية باستخدام الحداقة. وتستخدم الآن هذه الأنظمة في سباقات الفورمولا 1 وسباقات التحمل مثل لو مان.



### الشكل 10.32 مخطط لدمج حداقة

في مجموعة نقل الحركة بسيارة. يستخدم ناقل الحركة التغير باستمرار (CVT) لتخزين الطاقة في الحداقة ولاستخراج الطاقة من الحداقة.

### المسألة

حداقة مصنوعة من الصلب الكربوني وكتلتها تساوي 5.00 kg، ونصف قطرها الداخلي يساوي 8.00 cm ونصف قطرها الخارجي يساوي 14.2 cm. فإذا كان من المفترض أن تخزن 400.0 kJ من الطاقة الدورانية، فما سرعة الدوران (بوحدة rpm) المطلوبة؟ إذا أمكن تخزين الطاقة الدورانية أو سحبها خلال 6.67 s، فكم يبلغ متوسط الطاقة وعزم الدوران الذي يمكن أن توفره هذه الحداقة خلال هذا الزمن؟

### الحل

يحدّد عزم القصور الذاتي للحداقة بواسطة المعادلة  $I = \frac{1}{2}MR_1^2 + R_2^2$ ، و10.9. والطاقة الحركية الدورانية (المعادلة 10.3) هي  $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ ، نحل هذا للحصول على السرعة الزاوية:

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{I}} = \sqrt{\frac{4K}{M(R_1^2 + R_2^2)}}$$

والنسبة إلى التردد الدوراني. نحصل على

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{K}{\pi^2 M(R_1^2 + R_2^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{400.0 \text{ kJ}}{\pi^2 (5.00 \text{ kg})[(0.0800 \text{ m})^2 + (0.142 \text{ m})^2]}} \\ &= 552 \text{ s}^{-1} = 33,100 \text{ rpm.} \end{aligned}$$

بما أنه يمكن تحديد متوسط الطاقة بواسطة التغير في الطاقة الحركية مقسوماً على الزمن (انظر الوحدة 5)، فإننا نحصل على

$$P = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{400.0 \text{ kJ}}{6.67 \text{ s}} = 60.0 \text{ kW.}$$

نحصل على متوسط عزم الدوران من المعادلة 10.36 ونعلم أن متوسط العجلة الزاوية هو التغير الحادث في السرعة الزاوية  $\Delta\omega$ ، مقسوماً على الفاصل الزمني  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \tau &= I\alpha = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{4K}{M(R_1^2 + R_2^2)}} = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{M(R_1^2 + R_2^2)K} \\ &= \frac{1}{6.67 \text{ s}} \sqrt{(400.0 \text{ kJ})(5.00 \text{ kg})[(0.0800 \text{ m})^2 + (0.142 \text{ m})^2]} \\ &= 34.6 \text{ N m.} \end{aligned}$$

### مراجعة المفاهيم 10.8

تدور الحداقة بصورة أسرع عندما تتحرك سيارة فورمولا 1 بشكل أبطأ. أثناء عملية الانعطاف في تطلق ضيق. فإذا علمت أنها تبذل عزم دوران لتغيير منحه كمية الحركة الزاوية، فكيف توجّه محور الدوران إلى الحداقة حتى تتعرض لأقل تأثير في توجيه السيارة عبر المنحنى؟



(a) ينبغي أن تكون الحداقة محاذية للمحور الأساسي لسيارة السباق.

(b) ينبغي أن تكون الحداقة في مستوى رأسي.

(c) ينبغي أن تكون الحداقة محاذية لمحور العجل.

(d) لا يحدث أي اختلاف، حيث إن جميع الاتجاهات الثلاثة صعبة بالتقدير نفسه.

(e) الإجماعان (a) و(c) كلاهما جيد بدرجة متساوية وأفضل من (b).

## اصطدام رصاصة بعمود

### مسألة محلولة 10.5

#### المسألة

أطلقت رصاصة عمود 22 كتلتها  $m = 2.59 \text{ g}$  من بندقية أثناء تدريب شارة الجودة لفتيان الكشفاء وتتحرك بسرعة  $374.5 \text{ m/s}$  عند اصطدامها بعمود كتلته  $M = 3.00 \text{ kg}$  وطوله  $\ell = 2.00 \text{ m}$ . في البداية، يكون العمود في حالة سكون وفي وضع رأسي ويدور حول محور يمر عبر مركز كتلته. انغمرت الرصاصة في العمود عند نقطة  $\frac{1}{3}$  من طول العمود فوق النقطة المحورية، نتيجة لذلك، يبدأ نظام الرصاصة والعمود في الدوران.

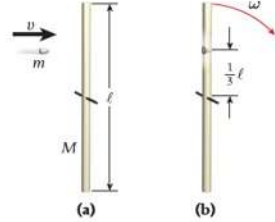
- (a) أوجد كمية الحركة الزاوية لنظام الرصاصة والعمود بعد الاصطدام.  
(b) ما الطاقة الحركية الدورانية للعمود والرصاصة بعد الاصطدام؟

#### الحل

**فكر** أولاً، توجد ملاحظة تبدو بسيطة، إذا اصطدمت الرصاصة بالعمود في المنتصف تمامًا، فلن يحدث دوران على الإطلاق، لأنه في هذه الحالة لن تحتوي الرصاصة على كمية حركة زاوية بالنسبة إلى النقطة المحورية عند مركز العمود. ولكن هنا اصطدمت الرصاصة بعيدًا عن المركز، كما أن كمية الحركة الزاوية هي المسافة إلى المركز مضروبة في كمية حركة الرصاصة. يتم حفظ كمية الحركة الزاوية أثناء اصطدام الرصاصة بالعمود (لأنه لا يوجد عزم دوران خارجي أثناء الاصطدام). لذا، كل ما علينا فعله للإجابة عن الجزء (A) هو حساب كمية الحركة الزاوية الابتدائية للرصاصة.

**ارسم** يتضمن الشكل 10.32 رسمًا يوضح المسافة من النقطة المحورية إلى النقطة التي تصطم فيها الرصاصة بالعمود.

**ابحث** تحدد كمية حركة الرصاصة من خلال  $p = mv$ . عندما تصطم بالعمود على مسافة  $\ell/3$  من مركز كتلة العمود، فإن كمية الحركة الزاوية تساوي  $p\ell/3$ . عزم العصور الذاتي للعمود هو  $M\ell^2/12$  وللرصاصة الموجودة في العمود هو  $m\ell/3$ . الطاقة الحركية للرصاصة والعمود معًا دورانية بالكامل،  $K_f = I\omega^2/2$ . وتحدد العلاقة بين كمية الحركة الزاوية وعزم العصور الذاتي والسرعة الزاوية من خلال  $L = I\omega$ .



الشكل 10.33 رصاصة تصطم بعمود وتلتصق به.

#### بسط

(a) كمية الحركة الزاوية الابتدائية هي  $L_i = mvl/3$ . كمية الحركة الزاوية النهائية هي نفسها،  $L_f = L_i = mvl/3$ .

(b) عزم العصور الذاتي الكلي هو  $I = (M\ell^2/12) + (m\ell^2/9)$ . الطاقة الحركية الدورانية هي

$$K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L^2/\omega^2/I = \frac{1}{2}L^2/I = \frac{L^2}{2((M/12) + (m/9))\ell^2}$$

#### احسب

$$L_f = (2.59 \times 10^{-3} \text{ kg})(374.5 \text{ m/s})(2.00 \text{ m})/3 = 0.6466367 \text{ kg m}^2/\text{s} \quad \text{(a)}$$

$$K_f = \frac{(0.6466367 \text{ kg m}^2/\text{s})^2}{2((3.00 \text{ kg})/12 + (2.59 \times 10^{-3} \text{ kg})/9)(2.00 \text{ m})^2} = 0.2088291 \text{ J} \quad \text{(b)}$$

**قرب** تم تحديد العدد المدخل الأقل ضبطًا في ثلاثة أرقام معنوية، والتي نقرب إليها النتيجة النهائية أيضًا:

$$L_f = 0.647 \text{ kg m}^2/\text{s} \quad \text{(a)}$$

$$K_f = 0.209 \text{ J} \quad \text{(b)}$$

**تحقق ثانية** نجحت نتائجنا في اختبار الحد الأدنى إذ إن الوحدات تعمل بشكل سليم. إذا قارنت الطاقة الحركية الانتقالية الابتدائية للرصاصة بالطاقة الحركية الدورانية التي تم تحديدها، فسوف تجد أن العامل 280-، يشير ذلك إلى فقدان معظم الطاقة الحركية خلال هذا التصادم غير المرن. مسألة أخيرة يلزم التأمل فيها؛ ذكرنا أن العلاقة  $L = I\omega$  تنطبق فقط على الجسم الذي يدور حول محور يمر بمركز كتلته، وهو محور تماثل. وبصورة محددة، لا تنطبق العلاقة هنا تمامًا لأن إضافة الرصاصة إلى الجزء العلوي من العمود تنقل مركز الكتلة المشترك لنظام الرصاصة والعمود إلى الأعلى قليلًا، وبما أن كتلة الرصاصة تساوي فقط 0.1% من كتلة العمود، يمكن تجاهل هذا التأثير.

### مراجعة المفاهيم 10.9

إذا كان العمود الوارد في المسألة المحلولة 10.5 مصنوعًا من الصلب بحيث ترتد الرصاصة إلى الخلف بدلًا من التصاقها بالعمود، فإن السرعة الدورانية للعمود ستكون

(a) أعلى من السرعة التي تم الحصول عليها في المسألة المحلولة 10.5.

(b) مماثلة للسرعة التي تم الحصول عليها في المسألة المحلولة 10.5.

(a) أقل من السرعة التي تم الحصول عليها في المسألة المحلولة 10.5.

## 10.8 المبادرة

كانت لعبة النحلة من الألعاب الشائعة عندما كان أبواك أو أجدادك أطفالاً. عند وضعها في حركة دورانية سريعة، فإنها تقف باعتماد دون سقوط. علاوة على ذلك، عند انحرافها بزاوية نسبية للمستوى الرأسي، فإنها لا تسقط أيضًا. وإنما يتحرك المحور الدوراني على سطح الخروط كدالة للزمن. وتسمى هذه الحركة **المبادرة**، ما الذي يتسبب فيها؟

نلاحظ أولاً أن لعبة النحلة لها متجه كمية حركة زاوية  $\vec{L}$  يتوافق مع محور تماثلها، ويشير إلى الأعلى أو الأسفل تبعًا لما إن كانت تدور في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة (الشكل 10.34). ولأن النحلة تميل، لا يكون مركز كتلتها (مميز بنقطة سوداء في الشكل 10.34) فوق نقطة الاتصال مع سطح الدعم. تتسبب قوة الجاذبية المؤثرة في مركز الكتلة في عزم دوران  $\vec{\tau}$  حول نقطة الاتصال، كما يوضح الشكل؛ وفي هذه الحالة، يشير متجه عزم الدوران مباشرة إلى خارج الصفحة، ويكون متجه الموقع  $\vec{r}$  الخاص بمركز الكتلة والذي يساعد في تحديد عزم الدوران. محاذيًا تمامًا لمتجه كمية الحركة الزاوية. أما زاوية محور التماثل للنحلة بالنسبة إلى المستوى الرأسي فمميزة بعلامة  $\phi$  في الشكل. وحينئذ تكون الزاوية بين متجه قوة الجاذبية ومتجه الموقع  $\pi - \phi$  (انظر الشكل 10.34). بما أن  $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi$ ، فإنه يمكننا كتابة مقدار عزم الدوران كدالة للزاوية  $\phi$ .

$$\tau = rF \sin \phi = rmg \sin \phi$$

حيث  $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$  فإن التغير في متجه كمية الحركة الزاوية  $d\vec{L}$ ، يشير إلى الاتجاه نفسه الخاص بعزم الدوران ومن ثم يكون عموديًا على متجه كمية الحركة الزاوية، يجبر هذا التأثير متجه كمية الحركة الزاوية على الامتداد على سطح مخروطي للزاوية  $\phi$  كدالة للزمن. بحيث ينبع طرف متجه كمية الحركة الزاوية دائرة في المستوى الأفقي، كما هو موضح باللون الرمادي في الشكل 10.33.

يمكننا أيضًا حساب مقدار السرعة الزاوية  $\omega_p$ ، لحركة المبادرة هذه. يوضح الشكل 10.33 أن نصف قطر الدائرة التي يشكلها طرف متجه كمية الحركة الزاوية كدالة للزمن يُحدد بواسطة  $L \sin \phi$ . ومقدار التغير التفاضلي في كمية الحركة الزاوية  $dL$ ، هو طول قوس هذه الدائرة، ويمكن حسابه كإنتاج ضرب نصف قطر الدائرة والزاوية التفاضلية المزاخة بواسطة نصف القطر  $d\theta$ ،

$$dL = (L \sin \phi) d\theta.$$

بناء على ذلك، فإنه بالنسبة إلى مشتقة الزمن لقيمة كمية الحركة الزاوية  $dL/dt$ ، نحصل على

$$\frac{dL}{dt} = (L \sin \phi) \frac{d\theta}{dt}.$$

مشتقة الزمن لزاوية الانعكاس  $\theta$ ، هي السرعة الزاوية للمبادرة  $\omega_p$ ، بما أن  $dL/dt = \tau$ . فإننا نستخدم المعادلة السابقة وتعبير عزم الدوران  $\tau = rmg \sin \phi$ ، للحصول على

$$rmg \sin \phi = \tau = \frac{dL}{dt} = (L \sin \phi) \frac{d\theta}{dt} = (L \sin \phi) \omega_p \Rightarrow$$

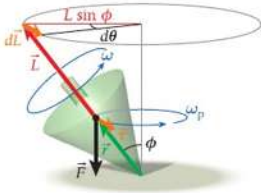
$$\omega_p = \frac{rmg \sin \phi}{L \sin \phi}.$$

جد أن الحد  $\sin \phi$  يخطب التعبير الأخير للحصول على  $\omega_p = rmg/L$ . التردد الزاوي للمبادرة لا يتغير لجميع قيم  $\phi$ ، وهي زاوية الميل لمحور الدوران. قد تبدو هذه النتيجة مفاجئة قليلًا، لكن التجارب تؤكد أنها صحيحة. في الخطوة الأخيرة، نستخدم معرفتنا بأن كمية الحركة الزاوية للجسم الصلب،  $L$ ، هي ناتج ضرب عزم القصور الذاتي،  $I$ ، والسرعة الزاوية،  $\omega$ . لذا، بالتعويض بـ  $I\omega$  عن  $L$  في تعبير السرعة الزاوية للمبادرة  $\omega_p$ ، نحصل على النتيجة النهائية:

$$(10.40)$$

$$\omega_p = \frac{rmg}{I\omega}.$$

تعكس هذه الصيغة الخاصية المهمة المتمثلة في أن السرعة الزاوية للمبادرة تتناسب عكسيًا مع السرعة الزاوية للنحلة. مع تباطؤ النحلة بسبب الاحتكاك، تتناقص سرعتها الزاوية تدريجيًا. ومن ثم تزداد السرعة الزاوية للمبادرة تدريجيًا. وكلما زادت سرعة المبادرة فإنها تؤدي في النهاية إلى تمايل النحلة وسقوطها.



الشكل 10.34 مبادرة لعبة النحلة.



الشكل 10.35 قد تمايل لعبة النحلة عن المحور الرأسي لكنها لا تسقط.

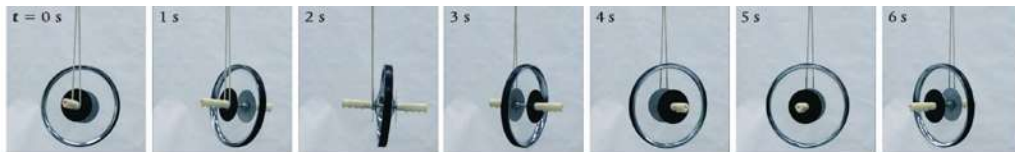
## مراجعة المفاهيم 10.10

احسب السرعة الزاوية البديرة للمجلة الموضحة في الشكل 10.34.

- 5 rad/s (c)      0.01 rad/s (a)  
10 rad/s (d)      0.6 rad/s (b)

## سؤال الاختبار الذاتي 10.4

المجلة الموضحة في الشكل 10.34 كتلتها 2.5 kg، ويرتكز معظمها تقريبًا على الإطار المعدني. ونصف قطرها 22 cm والمسافة الواقعة بين نقطة نظام التعليق ومركز الكتلة هي 5.0 cm. احسب السرعة الزاوية لدورانها.



الشكل 10.36 مبادرة عجلة سريعة الدوران معلقة بحبل.

تم عرض المبادرة بشكل بارع في سلسلة الصور التي تظهر في الشكل 10.36. وفيه تظهر عجلة سريعة الدوران معلقة من خارج المركز في حبل مربوط بالسقف. وكما ترى، لا تسقط العجلة، مثلما يتوقع لعجلة عديمة الدوران في الموقف نفسه، لكنها تدور ببطء حول نقطة التعليق.

## 10.9 كمية الحركة الزاوية المكماة

لكي نُنهي مناقشتنا حول كمية الحركة الزاوية والدوران الجوري، سندرس أصغر مقدار لكمية الحركة الزاوية التي يمكن أن توجد في جسم ما. ومن تعريف كمية الحركة الزاوية لجسيم نقطي (المعادلة 10.29)  $L = rp \sin \theta$  أو  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  يتضح عدم وجود المقدار الأصغر لكمية الحركة الزاوية، لأنه يمكن خفض المسافة إلى محور الدوران،  $r$ ، أو كمية الحركة،  $p$ ، بمعامل يتراوح بين 0 و1، وستنخفض كمية الحركة الزاوية المتأصلة بالمعامل نفسه.

ومع ذلك، لا تنطبق فكرة كمية الحركة الزاوية المنخفضة باستمرار على الذرات أو الجسيمات دون الذرية. ولكن يمكن ملاحظة الكم الخاص بكمية الحركة الزاوية. ويُسمى هذا الكم الخاص بكمية الحركة الزاوية ثابت بلانك،  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ . ويظهر ثابت بلانك عادةً في المعادلات المقسومة على العامل  $2p$  وأعطى الفيزيائيون لهذه النسبة الرمز  $\hbar$ ،  $\hbar \equiv h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$  سنتناول الوحدة 36 مناقشة كاملة للملاحظات التجريبية التي أدت إلى تقديم هذا الثابت الأساسي، وهنا نلاحظ حقيقة مدهشة: كل الجسيمات الأولية لها كمية حركة زاوية أساسية. تسمى غالبًا **الدوران المغزلي**، وهي إما ناتج ضرب عدد صحيح (0,  $1\hbar$ ,  $2\hbar$ , ...) أو ناتج ضرب عدد نصف صحيح ( $\frac{1}{2}\hbar$ ,  $\frac{3}{2}\hbar$ , ...) من كم بلانك لكمية الحركة الزاوية. وما يدعو إلى الدهشة أن قيم الدوران المغزلي الصحيحة أو نصف الصحيحة للجسيمات تحدث اختلافًا كبيرًا في طرق تفاعلها بعضها مع بعض. وتتضمن الجسيمات ذات القيم الصحيحة للدوران المغزلي البروتونات وهي الجسيمات الأولية للضوء. وتتضمن الجسيمات ذات القيم نصف الصحيحة للدوران المغزلي الإلكترونات والبروتونات والنيوترونات. وهي الجسيمات التي تشكل وحدات بناء المادة.

## ما تعلمناه | دليل المذاكرة للاختبار

- تقول نظرية المحاور الموازي إن عزم القصور الذاتي،  $I$ ، للدوران الجوري حول محور مواز لآخر عبر مركز الكتلة يُحدّد من خلال  $I_{cm} = I_{cm} + Md^2$ ، حيث  $d$  هي المسافة بين المحورين  $I_{cm}$  هي عزم القصور الذاتي للدوران الجوري حول المحور عبر مركز الكتلة.
- بالنسبة إلى جسم يتدحرج دون انزلاق، فإن إحداثي مركز الكتلة،  $r$ ، وزاوية الدوران الجوري،  $\theta$ ، يرتبطان بواسطة  $r = R\theta$ ، حيث  $R$  هي نصف قطر الجسم.
- تُعرف الطاقة الحركية لجسم متدحرج بأنها مجموع طاقاته الحركية الانتقالية والدورانية:  $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$  مع  $c \in [0, 1]$  مع  $c$  بالاعتماد على شكل الجسم.
- يُعرف عزم الدوران بأنه ناتج الضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومتجه القوة:  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
- تُحدّد الطاقة الحركية للدوران الخاصة بجسم ما عن طريق  $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ . وتنطبق هذه العلاقة على الجسيمات النقطية وكذلك الأجسام الصلبة.
- يُعرّف عزم القصور الذاتي لدوران جسم حول محوره عبر مركز الكتلة بأنه،  $I = \int_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV$  حيث  $r_{\perp}$  هي المسافة العمودية لعنصر الحجم  $dV$  إلى محور الدوران و  $\rho(\vec{r})$  هي الكثافة الكتلية.
- إذا كانت الكثافة التداوية ثابتة، فإن عزم القصور الذاتي هو  $I = \frac{M}{V} \int_V r_{\perp}^2 dV$  حيث  $M$  هي الكتلة الكلية للجسم الدوّار و  $V$  هي حجمه.
- عزم القصور الذاتي لجميع الأجسام المستديرة هو  $I = cMR^2$  حيث  $c \in [0, 1]$ .

الكمية	خطية	دائرية	العلاقة
الإزاحة	$\vec{s}$	$\theta$	$\vec{s} = r\theta$
السرعة المنجبة	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v} / r^2$
العجلة	$\vec{a}$	$\vec{\alpha}$	$\vec{a} = r\alpha \hat{t} - r\omega^2 \hat{r}$ $a_t = r\alpha$ $a_c = \omega^2 r$
كمية الحركة	$\vec{L}$	$\vec{L}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
الكتلة/عزم القصور الذاتي	$m$	$I$	
الطاقة الحركية	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	
القوة/عزم الدوران	$\vec{F}$	$\vec{\tau}$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

- تُعرف كمية الحركة الزاوية لجسيم نقطي بأنها  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ .
- معدل تغير كمية الحركة الزاوية يساوي عزم الدوران:  $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau}$ . وهذا هو المكافئ الدوراني لقانون نيوتن الثاني.
- بالنسبة إلى الأجسام الصلبة التي تدور حول محور تماثلها، فإن كمية الحركة الزاوية هي  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  وعزم الدوران هو  $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ .
- في حالة عدم وجود محصلة عزم دوران خارجي، تُحفظ كمية الحركة الزاوية:  $(\vec{\tau}_{\text{net}} = 0)$  لأن  $I\vec{\omega} = I_0\vec{\omega}_0$ .
- يلخص الجدول الكميات المغابلة للحركة الخطية والدورانية.

## إجابات أسئلة الاختبار الذاتي

$$I_{\parallel} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}ml^2 \quad 10.1$$

- 10.2 علبة الصودا الكاملة ليست جسدًا صلبًا ولذا فإنها لا تدور كأسطوانة صلبة، فمعظم السائل الموجود داخل العلبة لا يشارك في الدوران المحوري حتى عندما تصل العلبة إلى قاع المستوى المائل، كما أن كتلة العلبة نفسها ضئيلة للغاية مقارنة بكتلة السائل الموجود بداخلها، ومن ثم، فإن علبة الصودا التي تتدحرج على مستوى مائل تقترب من كتلة تنزلق على مستوى مائل دون احتكاك، ويكون الثابت  $c$  المستخدم في المعادلة 10.15 قريبًا من الصفر، ولذا تربع العلبة السليقة.

## إرشادات حل المسائل: الحركة الدورانية

1. قانون نيوتن الثاني ونظرية الشغل والطاقة الحركية هما وسيلتان قويان ومتمماتان لحل مجموعة كبيرة ومتنوعة من مسائل ميكانيكا الدوران، ويوجه عام، ينبغي أن تجرب طريقة قائمة على قانون نيوتن الثاني ومخططات الجسم الحر عندما تنطوي المسألة على حساب العجلة الزاوية، ويكون استخدام طريقة تستند إلى نظرية الشغل والطاقة الحركية أكثر فائدة عند الحاجة إلى حساب السرعة الزاوية.

2. تصلح العديد من مفاهيم الحركة الانتقالية للحركة الدورانية أيضًا، على سبيل المثال، ينطبق قانون حفظ كمية الحركة الخطية في حالة عدم وجود قوى خارجية؛ كما ينطبق قانون حفظ كمية الحركة الزاوية في حالة عدم وجود عزوم دوران خارجية. تذكر أوجه التشابه بين الكميات الانتقالية والدورانية.

3. من الضروري تذكر أن شكل الجسم مهم في الحالات التي نشتمل على الحركة الدورانية، تأكد من استخدامك الصيغة الصحيحة لعزم القصور الذاتي، والتي تعتمد على موقع محور الدوران وكذلك الشكل الهندسي للجسم، ويعتمد عزم الدوران أيضًا على موقع محور التماثل؛ فتأكد أنه متوافق عند حساب العزوم في اتجاه عقارب الساعة وعكس اتجاه عقارب الساعة.

- 10.3 ينص قانون نيوتن الثالث على أن القوى الداخلية تحدث في الأزواج المتساوية والمعاكسة التي تؤثر في الخط الفاصل بين كل جسمين، ومن ثم يكون عزم الدوران صفرًا بسبب كل زوج من القوى، ويجمع عزوم الدوران من جميع القوى الداخلية نحصل على محصلة عزم داخلي تساوي صفرًا.

- 10.4 بما أن الكتلة تتركز على إطار العجلة، فإن عزم القصور الذاتي للعجلة هو  $I = mR^2$ ، وبمساعدة المعادلة 10.40، نحصل على

$$\omega_p = \frac{rmg}{mR^2\omega} = \frac{rg}{R^2\omega} = \frac{(0.050 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2)}{(0.22 \text{ m})^2(0.62 \text{ rad/s})} = 16 \text{ rad/s}$$

4. تعتمد العديد من علاقات الحركة الدورانية على هندسة الحالة، مثل علاقة السرعة الخطية لوزن معلق بالسرعة الزاوية لحبل يتحرك على بكرة، وتتغير هندسة الحالة أحيانًا في المسألة، على سبيل المثال، كأن يوجد قصور دوراني مختلف بين نقطتي البدء والانتهاء لدوران محوري، تأكد من فهمك للكميات التي تتغير أثناء الحركة الدورانية.

5. تشتمل العديد من الحالات الفيزيائية على أجسام دوّارة يمكنها أن تتدحرج مع انزلاق أو بدون، وإذا كان التدحرج من دون انزلاق، فإنه يمكنك ربط الإزاحات الخطية والزاوية والسرعات المنجبة والعجلات بعضها مع بعض في نقاط على المحيط الخارجي للجسم المتدحرج.

6. قانون حفظ كمية الحركة الزاوية لا يقل أهمية للمسائل التي تتضمن حركة دائرية أو دورانية عن قانون حفظ كمية الحركة الخطية للمسائل التي تتضمن حركة في خط مستقيم، والتفكير في حالة المسألة بدلالة كمية الحركة الزاوية المحفوظة يوفر مسارًا واضحًا لحلها في الغالب، والذي سيصعب الحصول عليه دون هذه الطريقة، لكن تذكر أن كمية الحركة الزاوية تُحفظ فقط إذا كانت محصلة عزم الدوران الخارجي صفرًا.

أسئلة الاختيار من متعدد

10.7 توجد أسطوانة صلبة وأخرى جوفاء تدوران حول محور يمر عبر مركز الكتلة بهما. إذا كان الجسمان متماثلين من حيث الكتلة ونصف القطر. فما الجسم الذي سيحظى بأكبر عزم قصور ذاتي؟

- (a) سيكون عزم القصور الذاتي متماثلًا في الجسامين.
- (b) ستحظى الأسطوانة الصلبة بأكبر عزم قصور ذاتي لأن كتلتها موزعة بانتظام.
- (c) ستحظى الأسطوانة الجوفاء بأكبر عزم قصور ذاتي لأن كتلتها تقع بعيدًا عن محور الدوران.

10.8 كرة سلة كتلتها  $610 \text{ g}$  ومحيطها  $76 \text{ cm}$  تتدحرج دون انزلاق على أرضية صالة ألعاب رياضية. عند التعامل مع الكرة على أنها جسم كروي أجوف، ما الجزء الذي يرتبط بحركتها الدورانية من طاقاتها الحركية الكلية؟

- (a) 0.14
- (b) 0.19
- (c) 0.29
- (d) 0.40
- (e) 0.67

10.9 جسم كروي صلب يتدحرج دون انزلاق على مستوى مائل. ويبدأ من حالة السكون. في الوقت نفسه، يبدأ صندوق من حالة السكون على الارتفاع نفسه وينزلق على المستوى المائل نفسه. مع احتكاك ضئيل. ما الجسم الذي سيصل إلى القاع أولاً؟

- (a) سيصل الجسم الكروي الصلب أولاً.
- (b) سيصل الصندوق أولاً.
- (c) كلاهما سيصل في الوقت نفسه.
- (d) من المستحيل تحديد ذلك.

10.10 تتدحرج أسطوانة لأسفل دون انزلاق على مستوى يميل بزاوية  $\theta$  بالنسبة إلى المستوى الأفقي. ما مقدار الشغل المبذول من قوة الاحتكاك أثناء انتقال الأسطوانة مسافة  $5$  على امتداد المستوى  $(\mu_k)$  مع معامل الاحتكاك السكوني بين المستوى والأسطوانة؟

- (a)  $+\mu_k mgs \sin \theta$
- (b)  $-\mu_k mgs \sin \theta$
- (c)  $+mgs \sin \theta$
- (e) لا يُبدل شغل.

10.11 تتصلب كرة بحرف حبل متأرجح في دائرة رأسية، وكمية الحركة الزاوية للكرة في أعلى المسار الدائري

- (a) أكبر من كمية الحركة الزاوية في أسفل المسار الدائري.
- (b) أقل من كمية الحركة الزاوية في أسفل المسار الدائري.
- (c) متماثلة لكمية الحركة الزاوية في أسفل المسار الدائري.

10.12 لنفترض أنك تبسط بكرة كابل كبيرة. إذا سحبت الكابل باستخدام شد ثابت، فماذا سيحدث للمجلة الزاوية والسرعة الزاوية للبكرة، مع افتراض بقاء نصف القطر الذي تسحب منه الكابل ثابتًا وانعدام قوة الاحتكاك؟

- (a) يزداد كلاهما عند تبسط البكرة.
- (b) يقل كلاهما عند تبسط البكرة.
- (c) تزداد العجلة الزاوية بينما تقل السرعة الزاوية.
- (d) تقل العجلة الزاوية بينما تزداد السرعة الزاوية.
- (e) يستحيل معرفة ذلك.

10.13 قرص من الصلصال يدور بسرعة زاوية  $\omega$ ، وتلتصق قطعة صلصال بالحافة الخارجية للقرص، كتلتها  $\frac{1}{10}$  من ذلك القرص. إذا انفصلت القطرة وتطايرت خارج عالم الحافة الخارجية للقرص، فما السرعة الزاوية للقرص بعد انفصال القطرة؟

- (a)  $\frac{5}{6}\omega$
- (b)  $\frac{10}{11}\omega$
- (c)  $\omega$
- (d)  $\frac{11}{10}\omega$
- (e)  $\frac{6}{5}\omega$

10.14 تدور منزلة جليدية باسطة ذراعها ثم تضمها ما يجعلها تدور بشكل أسرع. ما العبارة الصحيحة مما يلي؟

(a) لا تتغير الطاقة الحركية للدوران لديها لأن الجزء الذي تزيده سرعتها الزاوية مماثل للجزء الذي يظلله قصورها الدوراني، وذلك بسبب حفظ كمية الحركة الزاوية.

10.1 يبدأ جسم دائري من حالة السكون ويتدحرج دون انزلاق على مستوى مائل. عبر مسافة رأسية تساوي  $4.0 \text{ m}$ ، وعند وصول الجسم إلى القاع فإن سرعته الانتقالية تكون  $7.0 \text{ m/s}$ . ما الثابت  $c$  الذي يربط عزم القصور الذاتي بكتلة هذا الجسم ونصف قطره (راجع المعادلة 10.11)؟

- (a) 0.80
- (b) 0.60
- (c) 0.40
- (d) 0.20

10.2 كرتان من الفولاذ الصلب، إحداهما صغيرة والأخرى كبيرة، على مستوى مائل. فطر الكرة الكبيرة أكبر مرتين من قطر الكرة الصغيرة. ومع البدء من السكون، تتدحرج الكرتان دون انزلاق على المستوى المائل حتى يكون مركزا كتلتهما  $m$  أسفل موضعي البدء. ما سرعة الكرة الكبيرة ( $v_L$ ) مقارنة بسرعة الكرة الصغيرة ( $v_S$ ) بعد التدحرج لمسافة  $m$ ؟

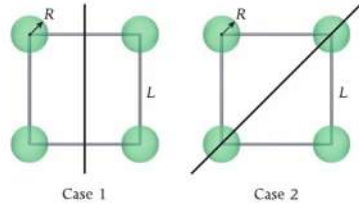
- (a)  $v_L = 4v_S$
- (b)  $v_L = 2v_S$
- (c)  $v_L = v_S$
- (d)  $v_L = 0.5v_S$
- (e)  $v_L = 0.25v_S$

10.3 حذافة مولد، وهي أسطوانة متجانسة نصف قطرها  $R$  وكتلتها  $M$ ، تدور حول محورها الطولي. والسرعة الخطية لنقطة ما على حافة (جانب) الحذافة هي  $v$ . ما مقدار الطاقة الحركية للحذافة؟

- (a)  $K = \frac{1}{2}Mv^2$
- (b)  $K = -Mv^2$
- (c)  $K = \frac{1}{2}Mv^2/R$
- (e) لا تتوفر معلومات كافية للإجابة

10.4 أربعة أجسام كروية جوفاء كتلة كل منها  $1 \text{ kg}$  ونصف قطرها  $R = 10 \text{ cm}$ ، متصلة بفضبان عديّة الكتلة لتشكل مربعًا بأضلاع طولها  $L = 50 \text{ cm}$ . في الحالة الأولى تدور الكتل حول محور يُنقّف ضلعين من أضلاع المربع، وفي الحالة الثانية، تدور الكتل حول محور يمر عبر الخط القطري للمربع، كما هو موضح في الشكل.

احسب نسبة عزم القصور الذاتي،  $I_2/I_1$ ، في الحالتين.



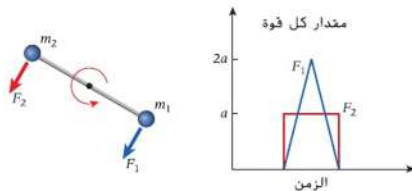
- (a)  $I_2/I_1 = 8$
- (b)  $I_2/I_1 = 4$
- (c)  $I_2/I_1 = 2$
- (d)  $I_2/I_1 = 1$
- (e)  $I_2/I_1 = 0.5$

10.5 إذا استبدلنا بالأجسام الكروية الجوفاء في السؤال 10.4 أجسامًا كروية صلبة لها الكتلة ونصف القطر أنفسهم، فإن نسبة عزم القصور الذاتي في الحالتين سوف

- (a) تزيد.
- (b) تقل.
- (c) تظل كما هي.
- (d) تكون صفرًا.

10.6 جسم غير نقطي يتألف من كتلتين نقطيتين،  $m_1$  و  $m_2$ ، متصلتين عبر ساق صلب عديم الكتلة طولها  $L$ ، كما هو موضح في الشكل. يدور الجسم بسرعة زاوية ثابتة حول محور متعامد على الصفحة عبر نقطة منتصف الساق. وتستخدم فوتان ماسمتان متماثلتان في الزمن،  $F_1$  و  $F_2$ ، على التوالي. وبعد استخدام الفوتين، ما الذي سيحدث للسرعة الزاوية للجسم؟

- (a) سوف تزيد.
- (b) سوف تقل.
- (c) سوف تظل دون تغيير.
- (d) لا توجد معلومات كافية للتحديد.



10.18 ما العبارة الصحيحة حول عزم العصور الذاتي لجسم صلب غير تقطي ما يلي؟

- (a) عزم العصور الذاتي مستقل عن محور الدوران.  
 (b) عزم العصور الذاتي يعتمد على محور الدوران.  
 (c) عزم العصور الذاتي يعتمد على كتلة الجسم فقط.  
 (d) عزم العصور الذاتي يعتمد فقط على أكبر بُعد عمودي للجسم.

10.19 يمكن رؤية عين لندن (عجلة دوارة كبيرة للغاية) باعتبارها تجم 32 حجرة كتلة كل منها  $m_p$ . وتتباعد بالنسبة لبطول حافة قرص كتلته  $m_0$  ونصف قطره  $R$ . ما التعبير الذي يحدد عزم العصور الذاتي لعين لندن حول محور تماثل القرص كما يلي؟

$$\begin{aligned} (32m_p + m_0)R^2 & \text{ (d)} & (m_p + m_0)R^2 & \text{ (a)} \\ (16m_p + \frac{1}{2}m_0)R^2 & \text{ (e)} & (m_p + \frac{1}{2}m_0)R^2 & \text{ (b)} \\ & & (32m_p + \frac{1}{2}m_0)R^2 & \text{ (c)} \end{aligned}$$

10.20 تدور أسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء وجسم كروي صلب وجسم كروي أجوف دون التزلاق. الأجسام الأربعة متماثلة من حيث الكتلة ونصف القطر وتنتقل بالسرعة الخطية نفسها. ما العبارة الصحيحة ما يلي؟

- (a) الأسطوانة الصلبة بها أعلى طاقة حركية.  
 (b) الأسطوانة الجوفاء بها أعلى طاقة حركية.  
 (c) الجسم الكروي الصلب به أعلى طاقة حركية.  
 (d) الجسم الكروي الأجوف به أعلى طاقة حركية.  
 (e) الأجسام الأربعة لها طاقة حركية متماثلة.

(b) تزداد الطاقة الحركية للدوران لديها بسبب الشغل الذي تبذله لضم ذراعها.  
 (c) تقل الطاقة الحركية للدوران لديها بسبب انخفاض قصورها الدوراني؛ إذ تفتقد الطاقة لأنها تُجهد بصورة تدريجية.

10.15 تقوم منزلة بصورة على جليد عديم الاحتكاك بضم يديها إلى جسمها حتى تتمكن من الدوران بشكل أسرع. ما قوانين الحفظ التي تنطبق على هذه الحالة، إن وجدت؟

- (a) حفظ الطاقة الميكانيكية وحفظ كمية الحركة الزاوية  
 (b) حفظ الطاقة الميكانيكية فقط  
 (c) حفظ كمية الحركة الزاوية فقط  
 (d) لا تحفظ الطاقة الميكانيكية ولا حفظ كمية الحركة الزاوية

10.16 إذا دار لب حديدي لنجم منهار في البداية بتردد دوراني  $f_0 = 3.20 \text{ s}^{-1}$  وإذا انخفض نصف قطر اللب أثناء الانهيار بمعامل 22.7، فما التردد الدوراني لللب الحديدي في نهاية الانهيار؟

- 10.4 kHz (a)  
 10.4 kHz (d)  
 1.66 kHz (b)  
 65.3 kHz (c)  
 5.20 kHz (e)

10.17 تسير دراجة بسرعة  $4.02 \text{ m/s}$  فإذا كان نصف قطر العجلة الأمامية  $0.450 \text{ m}$ ، فما المدة التي تستغرقها هذه العجلة للقيام بدورة كاملة؟

- 0.703 s (a)  
 4.04 s (d)  
 1.23 s (b)  
 6.78 s (e)  
 2.34 s (c)

## أسئلة مفاهيمية

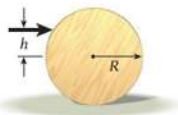
10.21 يتدحرج جسم كروي صلب منتظم نصف قطره  $R$  وكتلته  $M$  وعزم قصوره الذاتي  $I = \frac{1}{2}MR^2$  دون التزلاق على سطح أفقي. وطاقتها الحركية الكلية هي مجموع الطاقت المرتبطة بإزاحة مركز الكتلة والدوران حول مركز الكتلة. أوجد جزء الطاقة الحركية الكلية للجسم الكروي الناتج عن الدوران الجوهري.

10.22 وضعت حلقة رفيعة وجسم كروي صلب وهيك كروي أجوف وقرص ذو سمك منتظم بعضها بجانب بعض على منحدر واسع طولُه  $\ell$  ومائل بزاوية  $\theta$  إلى المستوى الأفقي. في الزمن  $t = 0$  تحررت جميع الأجسام وتدحرجت دون التزلاق في مسارات متوازية على المنحدر إلى الناع. وكان مقدار الاحتكاك ومقاومة الهواء ضئيلاً للغاية. حدد ترتيب نهاية المساق.

10.23 في سياق آخر، يتدحرج جسم كروي صلب وحلقة رفيعة دون التزلاق من السكون على منحدر بزاوية  $\theta$  مع المستوى الأفقي. أوجد نسبة العجلات.  $a_{\text{ring}}/a_{\text{sphere}}$

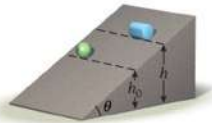
10.24 وضع جسم كروي صلب منتظم كتلته  $m$  ونصف قطره  $r$  على منحدر مائل بزاوية  $\theta$  إلى المستوى الأفقي. معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم الكروي والمنحدر هو  $\mu$ ، أوجد أقصى قيمة لـ  $\theta$  يستدحرج خلالها الجسم الكروي دون التزلاق. بداية من السكون. بدالة الكميات الأخرى.

10.25 جسم مستدير كتلته  $M$  ونصف قطره  $R$  وعزم قصوره الذاتي  $I$  تقع عند مركز كتلته دفعة أفقية حادة بامتداد خط عند ارتفاع  $h$  فوق مركزه (مع  $0 \leq h \leq R$ ). بالطبع، يتدحرج الجسم بعيداً دون التزلاق فور دفعه. احسب النسبة  $I/(MR^2)$  لهذا الجسم.



10.26 أطلق مذخوف كتلته  $m$  من نقطة الأصل بسرعة  $v_0$  وزاوية  $\theta_0$  فوق المستوى الأفقي. وكانت مقاومة الهواء ضئيلة للغاية.

- (a) احسب كمية الحركة الزاوية للمذخوف حول نقطة الأصل.  
 (b) احسب معدل التغير في كمية الحركة الزاوية.  
 (c) احسب عزم الدوران المؤثر في المذخوف، حول نقطة الأصل، أثناء رحلته.



10.27 وضع جسم دائري صلب نصف قطره  $R$  وكتلته  $M$  عند ارتفاع  $h_0$  مسوى مائل من الميل  $\theta$ . وعند تحريره، تدحرج دون التزلاق إلى قاع المستوى المائل. وبعدها، تحررت أسطوانة متماثلة من حيث الكتلة ونصف القطر على المسوى المائل نفسه. من أي ارتفاع يجب تحرير  $h$  حتى يكون لها سرعة الجسم الكروي نفسه في القاع؟

10.28 من الأصعب تحريك باب إن استندت إليه (بامتداد مستوى الباب) تجاه المفصلة عندما إذا استندت إلى الباب متعامداً على مستواه. ما سبب ذلك؟

10.29 تفرد منزلة جليد ذراعها في اللغة النهائية. ونظرًا لحفظ كمية الحركة الزاوية، ستزداد سرعتها الزاوية. هل تحفظ طاقتها الحركية الدورانية أثناء هذه العملية؟ إذا لم تكن كذلك، فما المصدر الذي تأتي منه الطاقة الإضافية أو تستهلك فيه؟

10.30 هل يكون للجسيم الذي يتحرك في خط مستقيم كمية حركة زاوية؟ اشرح.

10.31 تتدحرج أسطوانة كتلتها  $M$  ونصف قطرها  $R$  دون التزلاق خلال مسافة  $s$  بامتداد مستوى مائل يصنع زاوية  $\theta$  بالنسبة إلى المستوى الأفقي. احسب الشغل المبذول من (a) الجاذبية و (b) القوة العمودية و (c) قوة الاحتكاك.

10.32 باستخدام قانون حفظ الطاقة الميكانيكية، احسب السرعة النهائية والعجلة لجسم أسطوانتي كتلته  $M$  ونصف قطره  $R$  عندما يتدحرج مسافة  $s$  دون التزلاق على امتداد مستوى مائل يصنع زاوية  $\theta$  بالنسبة إلى المستوى الأفقي.

10.33 الزوج مجموعة من قوتين متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه. خطأ حركتهما متوازيا ولكنهما غير متماثلين. أثبت أن محصلة عزم دوران زوج القوى مستقلة عن النقطة الجوهريّة التي تم حساب عزم الدوران حولها وعن التقاط بطول خطوط العمل حيث تؤثر القوتان.





**10.37** يمر حبل خفيف عبر بكرة خفيفة عديمة الاحتكاك. وقد تم ربط أحد طرفيه في حزمة من الموز كتلتها  $M$  ويوجد فرد له الكتلة نفسها يُسكك بالطرف الآخر. ينسلق الفرد الحبل محاولاً الوصول إلى ثمار الموز. نصف قطر البكرة هو  $R$ .

(a) عند التعامل مع الفرد والموز والحبل والبكرة كنظام. احسب محصلة عزم الدوران حول محور البكرة.

(b) باستخدام نتيجة الجزء (a)، حدد إجمالي كمية الحركة الزاوية حول محور البكرة كدالة للزمن.

**10.34** لماذا تَضَمّ منزلة الجليد ذراعها عند زيادة سرعتها الزاوية في دورة هيبطة؟

**10.35** لانعطاف دراجة نارية تسير بسرعة عالية إلى اليمين، فإنك تدير مقود الدراجة للحلقة إلى اليسار لبدء الانعطاف. وبعد أن يبدأ الانعطاف، تتوجه وتبيل ناحية اليمين حتى يكتمل الانعطاف. اشرح بدقة قدر استطاعتك كيف يبدأ هذا التوجيه للماكس الانعطاف في الاتجاه المرغوب (تُصمِّحُ: تتنوع عجلات الدراجة النارية أثناء الحركة بقدر كبير من كمية الحركة الزاوية).

**10.36** يؤدي تأثير المد والجزر للقمر في الأرض إلى إعطاء الدوران المحوري للأرض بصورة تدريجية، بسبب احتكاك المد والجزر. وتُظهر دراسات المرحان من العصر الديوني أن السنة كانت 400 يوم في هذه الفترة. ما الذي يشير إليه ذلك، إن وجد، بخصوص كمية الحركة الزاوية للقمر في العصر الديوني مقارنةً بكميتها في الوقت الحاضر؟

## تمارين



**10.44** يتصل قالب كتلته  $m = 4.00 \text{ kg}$  بزئيرك ( $k = 32.0 \text{ N/m}$ ) بواسطة حبل معلق على بكرة كتلتها  $M = 8.00 \text{ kg}$  ونصف قطرها  $R = 5.00 \text{ cm}$ . كما هو موضح في الشكل، بالتعامل مع البكرة على أنها قرص صلب متجانس ومُجاهل الاحتكاك في محور البكرة وافترض أن النظام يبدأ من السكون عندما يكون الزئيرك بطوله الطبيعي، أوجد (a) سرعة القالب بعد سقوطه مسافة  $1.00 \text{ m}$  (b) أقصى تمدد للناص.

**يشير اللون الأزرق لرقم المسألة إلى توفر الإجابة عنها في دليل حلول الطلاب. تشير علامة النقطة الواحدة - والنقطتين - إلى زيادة مستوى صعوبة المسألة.**

## القسمان 10.1 و 10.2

**10.38** أسطوانة صلبة منتظمة كتلتها  $M = 5.00 \text{ kg}$  تتدحرج دون انزلاق على طول سطح أفقي. سرعة مركز كتلتها  $30.0 \text{ m/s}$ . احسب طاقاتها.

**10.39** حدد عزم القصور الذاتي لثلاثة مراهقين وزنهم  $45.0 \text{ kg}$  و  $60.0 \text{ kg}$  و  $80.0 \text{ kg}$  يجلسون في نقاط مختلفة على حافة منصة دوارة. نصف قطرها  $12.0 \text{ m}$ .

**10.40** أثنى قلم طوله  $24.0\text{--}24.0 \text{ cm}$  في الهواء، ليصل إلى أقصى ارتفاع يساوي  $1.20 \text{ m}$  فوق نقطة الإنفلاق. وفي طريقه إلى الأعلى، يُشكّن القلم  $1.80$  دورة. بالتعامل مع القلم على أنه ساق رفيع منتظم، احسب النسبة بين الطاقة الحركية الدورانية والطاقة الحركية الانتقالية عند ثابت إطلاق القلم. افترض أن سرعة الدوران لا تتغير أثناء الإنفلاق.

**10.41** تبدأ كرة صلبة وكرة جوفاء، كتلة كل منهما  $1.00 \text{ kg}$  ونصف قطرها  $0.100 \text{ m}$  من السكون وتتدحرجان في منحدر طوله  $3.00 \text{ m}$  بميل  $35.0^\circ$ . ينزلق مكعب ثلج له كتلة تماثلة دون احتكاك إلى أسفل المنحدر نفسه.

(a) ما الكرة التي ستصل إلى النافذ أولاً؟ اشرح!  
 (b) هل يتحرك مكعب الثلج أسرع أم أبطأ من الكرة الصلبة في المستوى المائل؟ اشرح استنتاجك.  
 (c) ما سرعة الكرة الصلبة في أسفل المستوى المائل؟



**10.42** تتدحرج كرة صلبة كتلتها  $m$  ونصف قطرها  $r$  دون انزلاق خلال حلقة نصف قطرها  $R$ . كما هو موضح في الشكل، من أي ارتفاع  $h$  ينبغي أن تنطلق الكرة حتى تمر خلال الحلقة دون الخروج عن المسار؟

**10.43** نباض السرطان ( $m \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ,  $R = 12 \text{ km}$ ) هو نجم نيوتروني يقع في سديم السرطان. تصل سرعة دوران نباض السرطان في الوقت الحالي إلى قرابة  $30$  دورة في الثانية أو  $60\pi \text{ rad/s}$  ولكن تنخفض سرعة دوران النباض سنوياً، وتزاد فترة الدوران بمقدار  $10^{-5} \text{ s}$ . علل العبارة التالية، فقدان الطاقة الدورانية للنباض تعادل  $100,000$  ضعف من ناغ طاقة الشمس. (إجمالي الطاقة التي تنبعث من الشمس حوالي  $4 \times 10^{26} \text{ W}$ .)

## القسم 10.3

**10.45** جسم دائري صغير كتلته  $m$  ونصف قطره  $r$  يُحدّد عزم قصوره الذاتي من خلال  $I = cmr^2$ . يتدحرج الجسم دون انزلاق بامتداد المسار الموضح في الشكل، وينتهي المسار بمنحدر ارتفاعه  $R = 2.50 \text{ m}$  والذي يدفع الجسم رأسياً. يبدأ الجسم من ارتفاع  $H = 6.00 \text{ m}$  فيما أقصى ارتفاع سيصل إليه بعد مغادرة المنحدر إذا كان  $c = 0.400$ ؟



**10.46** يتدحرج جسم كروي صلب منتظم كتلته  $M$  ونصف قطره  $R$  دون انزلاق بامتداد سطح مستو بسرعة  $v = 3.00 \text{ m/s}$  عندما يواجه منحدرًا بزاوية  $\theta = 23.0^\circ$  أعلى المستوى الأفقي. أوجد أقصى مسافة يقطعها الجسم الكروي على المنحدر في كل حالة.

(a) المنحدر عديم الاحتكاك، ولذا يواصل الجسم الكروي دورته بسرعه الزاوية الابتدائية حتى يصل إلى أقصى ارتفاع له.  
 (b) يوفر المنحدر ما يكفي من الاحتكاك لمنع الجسم الكروي من الانزلاق. ولذا تتوقف الحركة الخطية والدورانية عندما يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع له.

## القسم 10.4

**10.47** قرص كتلته  $30.0 \text{ kg}$  ونصف قطره  $40.0 \text{ cm}$  مُثبت في محور أفقي عديم الاحتكاك. وقد لف حبل عدة مرات حول القرص ثم زُبط في قالب  $70.0 \text{ kg}$ . كما هو موضح في الشكل، أوجد عجلة القالب، مقترفاً عدم انزلاق الحبل.



**10.48** بُدِّل قوة  $\vec{F} = (2\hat{x} + 3\hat{y}) \text{ N}$  على جسم في نقطة يكون متجه الموقع الخاص بها بالنسبة إلى النقطه الجهورية  $\vec{m} = (4\hat{x} + 4\hat{y} + 4\hat{z})$ . احسب عزم الدوران الذي أوجدته القوة حول هذه النقطة الجهورية.

يوضح الشكل منظراً علوياً للمسار الدائري للإطار. وتُحدد التخطئة الموجودة في المركز محور الدوران. يبذل الرجل عزم دوران ثابتاً يساوي  $20.0 \text{ N m}$  لتسهيل الإطار في عجلة زاوية ثابتة. افترض أن كتلة الإطار بأكملها نصف قطرها  $R = 0.350 \text{ m}$  من مركزها.

- (a) ما الزمن  $t$ . **اللازم** حتى يكمل الإطار ثلاث لفات مكتملة؟  
 (b) ما السرعة الخطية النهائية لمركز كتلة الإطار (بعد ثلاث لفات مكتملة)؟  
 (c) بدلاً من افتراض أن كتلة الإطار بأكملها على مسافة  $0.350 \text{ m}$  من مركزها. إذا تعاملت مع الإطار وكأنه قرص أجوف نصف قطره الداخلي  $0.300 \text{ m}$  ونصف قطره الخارجي  $0.400 \text{ m}$ . فكيف يغير هذا من إجاباتك للجزأين (a) و (b)؟  
**10.54+** برميل كتلته  $10 \text{ kg}$  ونصف قطره  $50.0 \text{ cm}$  وبه حبلان ملفوفان حوله.

كما هو موضح في الشكل. يُحزّر البرميل بين السكون. كما ينتج عنه بسط الحبلين وسقوط البرميل في حالة دوران باتجاه الأرض. ما سرعة البرميل بعد سقوطه مسافة  $10.0 \text{ m}$ ؟ ما مقدار الشد في كل حبل؟ افترض أن كتلة البرميل موزعة بالتساوي وأنه يدور وكأنه أسطوانة صلبة.  
**10.55-** عجلة بها  $c = \frac{1}{4}$  وكتلتها  $40.0 \text{ kg}$  ونصف قطر إطارها  $30.0 \text{ cm}$  ومثبتة بشكل رأسي على محور أفقي. وتعلّق كتلة قدرها  $2.00 \text{ kg}$  من العجلة باستخدام حبل ملفوف حول الإطار. أوجد العجلة الزاوية للعجلة عند تحرير الكتلة.  
**10.56+** بقف ساق منتظم كتلته  $M = 250.0 \text{ g}$  وطوله  $L = 50.0 \text{ cm}$  بشكل رأسي على طاولة أفقية. وقد حرر من السكون إلى السقوط.

- (a) ما القوى التي تؤثر في الساق؟  
 (b) احسب السرعة الزاوية للساق والعجلة الرأسية للطرف المتحرك من الساق والقوة العمودية التي تنبذها الطاولة على الساق عندما يشكل زاوية  $\theta = 45.0^\circ$  بالنسبة إلى المستوى الرأسي.

(c) إذا سقط الساق على الطاولة دون انزلاق، فأوجد العجلة الخطية لتخطئة نهاية الساق عندما يصطدم بالطاولة وقارنها مع  $g$ .  
**10.57+** A يتألف إعداد عرض توضيحي من لوح منتظم طوله  $L$ . معلق بالطرف السفلي ومرفوع بزاوية  $\theta$  باستخدام عصا داعمة. وتستقر كرة بالطرف المرتفع. وأصق كوب خفيف باللوح على مسافة  $G$  من الطرف المرتفع حتى يحنجر الكرة عند إزالة العصا

- الداعمة للوح بشكل مفاجئ. وتريد أنت استخدام لوح رفيع معلق طوله  $1.00 \text{ m}$  وعرضه  $10.0 \text{ cm}$ . وتختلط لوضع العصا الداعمة الرأسية في طرفه المرتفع.  
 (a) ما الحد الأقصى لطول العصا الداعمة الذي يمكنك الحصول عليه حتى تحظى الكرة ببرصعة احتجازها؟  
 (b) افترض أنك تختار استخدام أطول عصا داعمة ممكنة في الطرف المرتفع للوح. ما مسافة  $G$  التي ينبغي وضع الكوب عندما من هذا الطرف لتضمن أن الكرة ستحنجر في الكوب؟

### القسم 10.6

**10.58-** حدافة المحرك البخاري القديم عبارة عن قرص فلزي منجانس وصلب كتلته  $M = 120 \text{ kg}$  ونصف قطره  $R = 80.0 \text{ cm}$ . ويدير المحرك العجلة بسرعة  $500 \text{ rpm}$  في حالة الطوارئ. تُصل الحداقة من المحرك لإيقافه وتُستخدم وسادة الكبح في الحداقة لتوفير طاقة داخلية قدرها  $F$ .  
 $F = 100 \text{ N}$ . إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الوسادة والحداقة  $\mu_k = 0.200$ .  
 فما عدد لفات الحداقة قبل توقفها؟ ما الزمن الذي تستغرقه الحداقة حتى تتوقف؟ احسب الشغل الذي يبذله عزم الدوران أثناء هذا الوقت.

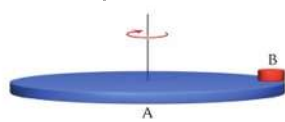


- 10.49--** تم تثبيت قرص كتلته  $14.0 \text{ kg}$  وقطره  $30.0 \text{ cm}$  وسلكه  $8.00 \text{ cm}$  على محور أفقي صلب كما يوضح الجانب الأيسر في الشكل. (توجد قوة احتكاك بين المحور والقرص). يكون القرص ساكناً في يادى الأمر. وتُبذل قوة ثابتة،  $F = 70.0 \text{ N}$ . في حافة القرص بزاوية  $37.0^\circ$ . كما يوضح الجانب الأيمن من الشكل. بعد مرور  $2.00 \text{ s}$  تنخفض القوة إلى  $F = 24.0 \text{ N}$  ويدور القرص بسرعة زاوية ثابتة.  
 (a) ما مقدار عزم الدوران الناتج عن الاحتكاك بين القرص والمحور؟  
 (b) ما مقدار السرعة الزاوية للقرص بعد  $2.00 \text{ s}$ ؟  
 (c) ما مقدار الطاقة الحركية للقرص بعد  $2.00 \text{ s}$ ؟

### القسم 10.5

**10.50** ساق رفيع منتظم (الطول  $= 1.00 \text{ m}$ . الكتلة  $= 2.00 \text{ kg}$ ) يدور على محور حول قطعة خشبية أفقية عميقة الاحتكاك بأحد طرفيه. وعزم القصور الذاتي للساق خلال هذا المحور هو  $0.10 \text{ mL}^2$ . يُطلق الساق عندما يكون  $60.0^\circ$  أسفل المستوى الأفقي. ما العجلة الزاوية للساق لحظة إطلاقه؟

**10.51** يدور جسم مكوّن من جزأين على شكل قرص. A و B. كما هو موضح في الشكل. حول محور عبر مركز القرص A. وتبلغ كتلتا القرصين A و B ونصفا قطريهما  $2.00 \text{ kg}$  و  $0.200 \text{ kg}$  و  $25.0 \text{ cm}$  و  $2.50 \text{ cm}$ . على التوالي.

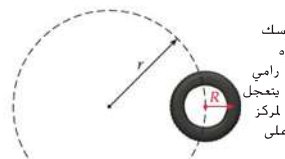


- (a) احسب عزم القصور الذاتي للجسم.  
 (b) إذا كان عزم الدوران المحوري الناتج عن الاحتكاك هو  $0.200 \text{ N m}$ .

فما الحد الذي يستغرقها الجسم حتى يتوقف إذا كان يدور بسرعة زاوية ابتدائية تساوي  $2\pi \text{ rad/s}$ ؟  
**10.52-** تعمل مستشازاً فنياً في فيلم مغامرات حركية حيث يتطلب عمل مشر خلاله أن يقفز البطل من مبنى طوله  $20.0 \text{ m}$  ويهبط على الأرض بطريفة آمنة بسرعة رأسية نهائية قدرها  $4.00 \text{ m/s}$  في حافة سفك المبنى. توجد أسطوانة وزنها  $100\text{-kg}$  ملفوفة عليها حبل طويل بدرجة كافية (كتلة ضئيلة للغاية). ونصف قطرها  $0.500 \text{ m}$  ويمكنها الدوران بحرية حول محورها الأسطواني بعزم قصور ذاتي  $I$ . يتطلب السيارتورون ما يمثل بديل وزنه  $50\text{-kg}$  أن يربط الحبل حول حده ويقفز من أعلى السطح.

- (a) حدّد تمييزاً للعجلة الخطية الخاصة بالمثلث البديل بدلالة كتلته  $m$  ونصف قطر الأسطوانة  $r$  وعزم القصور الذاتي  $I$ .  
 (b) حدّد القيمة اللازمة لعجلة المثلث البديل إن أراد الهبوط بأمان بسرعة  $4.00 \text{ m/s}$ . ثم استخدم هذه القيمة لحساب عزم القصور الذاتي للأسطوانة حول محورها.  
 (c) ما العجلة الزاوية للأسطوانة؟  
 (d) ما عدد اللفات التي تدورها الأسطوانة أثناء السقوط؟

**10.53-** في مسابقة لرمي الإطارات. أمسك رجل إطار سيارة كتلته  $23.5 \text{ kg}$  وأداره ثلاث مرات مكتملة بسرعة ورماه. مثل رامي القرص. يبدأ الإطار من حالة سكون ثم يتعجل في مسار دائري. نصف القطر المداري  $r$  لمركز كتلة الإطار هو  $1.10 \text{ m}$  والمسار أفقي على الأرض.





والذي يشتعل بشكل ماسي للحافة. نصف قطر الحطة الغضائية هو  $R = 50.0 \text{ m}$  وكتلتها هي  $M = 2.40 \times 10^5 \text{ kg}$ . إذا كان ضغط المحرك الصاروخي هو  $F = 1.40 \times 10^2 \text{ N}$ ، فما مدة إشعال المحرك؟

**10.80.** العديد من النبضات الإشعاعية ينبعث منها تردد راديو أو انبعاث آخر بطريقة دورية ومرتبطة بنجم مرافق فيما يعرف بأنه نظام ثنائي النابض. في 2003، اكتشف رواد الفضاء في مرصد جودريل بانك بالملكة المتحدة نظام نابض إشعاعي ثنائي، PSR J0737-3039B، PSR J0737-3039A. وفي هذا النظام، كلا النجمين نابض إشعاعي. يدور النابض الإشعاعي الذي له فترة دوران محوري أسرع مرة واحدة كل  $0.0230 \text{ s}$ ، بينما يدور الآخر خلال فترة دوران تساوي  $2.80 \text{ s}$ . كما أن كتلة النابض الإشعاعي الأسرع أكبر من كتلة الشمس بمقدار 1.337 ضعفاً في حين أن كتلة النابض الإشعاعي الأبطأ تتجاوز كتلة الشمس بمقدار 1.250 ضعفاً.

(a) إذا كان كل نجم نابض نصف قطره  $20.0 \text{ km}$ ، فمقدر عن نسبة طاقتهما الحركية الدورانية، اعتبر أن كل نجم عبارة عن جسم كروي منتظم له فترة دوران ثابتة.

(b) مدارات النابضين الإشعاعيين حول مركز كتلتهما المشترك مختلفة المركز (مدارات بيضاوية مسحوقة بشدة)، ولكن يمكن الحصول على تقدير متوسط الطاقة الحركية الانتقالية للتعامل مع كل مدار وكأنه مدار دائري بنصف قطر يساوي متوسط المسافة من مركز كتلة النظام. نصف القطر هذا يساوي  $4.23 \times 10^8 \text{ m}$  بالنسبة إلى النجم الأكبر، و  $4.54 \times 10^8 \text{ m}$  للنجم الأصغر. إذا كان الزمن الدوري  $2.40 \text{ h}$ ، فاحسب نسبة الطاقات الحركية الدورانية إلى الانتقالية لكل نجم.

**10.81.** نود طالبة كتلتها  $52.0 \text{ kg}$  قياس كتلة ملعب لعبة دوامة الخيل، والذي يتألف من قرص معدني صلب نصف قطره  $R = 1.50 \text{ m}$  مثبت في موضع أفقي على محور منخفض الاحتكاك، وتحاول إجراء تجربة، تجري بسرعة  $v = 6.80 \text{ m/s}$  باتجاه الحافة الخارجية للعبة دوامة الخيل وتقفز على الحافة الخارجية، كما هو موضح في الشكل. كانت لعبة دوامة الخيل في حالة سكون قبل أن تقفز الطالبة عليها وتدور بسرعة  $1.30 \text{ rad/s}$  فور قفزها عليها. يمكن افتراض أن كتلة الطالبة تتركز في نقطة.

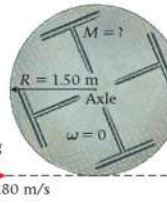
(a) ما كتلة لعبة دوامة الخيل؟

(b) إذا استغرقت لعبة دوامة الخيل  $35.0 \text{ s}$  حتى تتوقف بعد أن فزعت الطالبة عليها، فما متوسط عزم الدوران الناتج عن الاحتكاك في المحور؟

(c) ما عدد مرات دوران لعبة دوامة الخيل قبل توقفها، بافتراض ثبات عزم الدوران الناتج عن الاحتكاك؟

منظر علوي

قبل فزق الطالبة  
في دوامة الخيل



بعد فزق الطالبة  
في دوامة الخيل



**10.70.** يتدحرج طوق رفيع وزنه  $2.00\text{-kg}$  ونصف قطره  $50.0\text{-cm}$  باتجاه منحدر  $30.0^\circ$  دون انزلاق. إذا بدأ الطوق من السكون في قمة المنحدر، فما سرعته الانتقالية بعدما يتدحرج مسافة  $10.0 \text{ m}$  على طول المنحدر؟

**10.71.** يدور جزيء أكسجين ( $\text{O}_2$ ) في المستوى  $xy$  حول المحور  $z$ . يمر محور الدوران عبر مركز الجزيء، متعامداً على طولته. وتبلغ كتلة كل ذرة أكسجين  $2.66 \times 10^{-26} \text{ kg}$ ، ومتوسط الفصل بين الذرتين هو  $d = 1.21 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

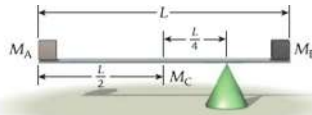
(a) احسب عزم العصور الذاتي للجزيء حول المحور  $z$ .

(b) إذا كانت السرعة الزاوية للجزيء حول المحور  $z$  تساوي  $4.60 \times 10^{12} \text{ rad/s}$ ، فما مقدار الطاقة الحركية الدورانية له؟

**10.72.** تنزلق خرزة  $0.0500 \text{ kg}$  على سلك مثني على شكل دائرة نصف قطرها  $0.400 \text{ m}$ ، وأنت تدفع الخرزة بقوة مماسية للدائرة. ما القوة اللازمة لإعطاء الخرزة عجلة زاوية تساوي  $6.00 \text{ rad/s}^2$ ؟

**10.73.** يعمل أستاذ على تقديم عرض توضيحي لمخاضة بينما يقف بمركز طاولة دوارة عديمة الاحتكاك، ويمسك بكتل  $5.00\text{-kg}$  في كل يد باسماً ذراعيه حتى تكون كل كتلة على بعد  $1.20 \text{ m}$  من خط منتصفه. يدور طالب (محدد بعناية) حول الأستاذ بما يصل إلى تردد دوراني يساوي  $1.00 \text{ rpm}$ . إذا ضم ذراعيه إلى جانبيه فإن كل كتلة ستكون على بعد  $0.300 \text{ m}$  من خط منتصفه، فما السرعة الزاوية الجديدة لديه؟ افترض أن قصوره الدوراني دون الكتل هو  $2.80 \text{ kg m}^2$  وتجاهل التأثير في العصور الدوراني لموقع ذراعيه. نظراً لصغر كتلتهما مقارنة بكتلة الجسم.

**10.74.** أعد النظام الموضح بالشكل في حالة سكون في البداية. احسب العجلة الزاوية للنظام بمجرد تحريره. يمكنك أن تعامل  $M_A$  ( $1.00 \text{ kg}$ ) و  $M_B$  ( $10.0 \text{ kg}$ ) باعتبارهما كتلتين نقطيتين بأحد طرفي الساق الذي تساوي كتلته  $M_C$  ( $20.0 \text{ kg}$ ) وطوله  $L$  ( $5.00 \text{ m}$ ).



**10.75.** يصمم طفل عربة بسيطة تتألف من  $60.0 \text{ cm}$  باستخدام ورقة من الخشب الرقائقي طولها  $1.20 \text{ m}$  وكتلتها  $8.00 \text{ kg}$  وأربع عجلات قطر كل منها  $20.0 \text{ cm}$  وكتلتها  $2.00 \text{ kg}$ . وقد خُررت من قمة منحدر  $15.0^\circ$  بطوله  $30.0 \text{ m}$ . وأوجد السرعة في أسفل المنحدر. افترض أن العجلات تدور دون انزلاق بطول المنحدر ويمكن تجاهل الاحتكاك بين العجلات ومحاورها.

**10.76.** قرص مدمج كتلته  $15.0 \text{ g}$  وقطره الداخلي  $1.50 \text{ cm}$  وقطره الخارجي  $11.9 \text{ cm}$ . افترض أنك ألقيته ليبدور بسرعة  $4.30$  دورات في الثانية.

(a) حدّد عزم العصور الذاتي للقرص المدمج، مع تقريب كثافته على أنها منتظمة. (b) إذا لمست أصابعك القرص المدمج بمقدار  $0.250$  دورة حين اكتشابه لسرعته الزاوية وبذلت عزم دوران ثابتاً عليه، فما مقدار عزم الدوران هذا؟

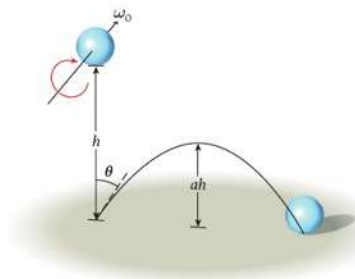
**10.77.** تستخدم ورقة من الخشب الرقائقي سُمكها  $1.30 \text{ cm}$  لإنشاء باب خزنة عرضه  $55.0 \text{ cm}$  وطوله  $79.0 \text{ cm}$ . مع مصللات مثبتة بالحافة الرأسية، وقد تمّ تثبيت مقبض صغير  $150 \text{ g}$  على مسافة  $45.0 \text{ cm}$  من المصلة السفلية بارتفاع مماثل لارتفاع هذه المصلة. إذا كانت كثافة الخشب الرقائقي هي  $550 \text{ kg/m}^3$ .

فما عزم العصور الذاتي للباب حول المصللات؟ لا تهتم بمساهمة مكونات المصلة في عزم العصور الذاتي.

**10.78.** صنّع جزء آلة من قرص صلب منتظم نصف قطره  $R$  وكتلته  $M$ . وتمّ ثقب فجوة نصف قطرها  $R/2$  في القرص، وكان مركز الفجوة على مسافة  $R/2$  من مركز القرص (يُعدّ قطر الفجوة من مركز القرص إلى حافته الخارجية). ما عزم العصور الذاتي لجزء الآلة هذا حول مركز القرص بدلالة  $R$  و  $M$ ؟

**10.79.** محطة فضائية لتوفير جاذبية صناعية لدعم إقامة طويلة لرواد الفضاء، وقد صُممت على شكل عجلة كبيرة، جميع جدرانها في الحافة، وتدور بسرعة ستوفر عجلة تماثلة لعجلة الجاذبية الأرضية لرواد الفضاء (ستكون أقدامهم داخل الجدار الخارجي للمحطة الفضائية وستنحج رؤوسهم نحو المحور). بعد تجميع الحطة الفضائية في المدار، سيبدأ دورانها المحوري بإشعال محرك صاروخي مثبت في الحافة الخارجية.

بالنسبة إلى الحالة التي توقفت خلالها الكرة عن الانزلاق قبل انتهاء التصادم، أوجد  
 كلاً ما يلي:  
 (d)  $\tan \theta$   
 (e) المسافة الأفقية التي انتقلت خلالها الكرة في الهواء بين التصادم الأول والثاني.  
 يأخذ كلنا الحالتين في الاعتبار. ارسم اختلاف  $\tan \theta$  مع  $\omega_0$ .



**10.83\*\*** عجلة عربة مصنوعة بالكامل من الخشب. تتألف مكوناتها من إطار و12 ساكاً ومحوراً. الإطار كتلته 5.20 kg ونصف قطره الخارجي 0.900 m ونصف قطره الداخلي 0.860 m. والخور عبارة عن أسطوانة صلبة كتلتها 3.40 kg ونصف قطرها 0.120 m. والعضبان رقيقة كتلتها 1.10 kg تمتد من المحور إلى الجانب الداخلي للإطار. حدد الثابت  $C = I/MR^2$  لعجلة العربة هذه.

**10.84\*\*** يوضح الشكل كرة صلبة متجانسة نصف قطرها R. وقبل سقوطها على الأرض، يكون مركز كتلتها في حالة سكون. ولكنها تدور بسرعة زاوية  $\omega_0$  حول محور أفقي عبر مركزه. أقل نقطة للكرة تقع على ارتفاع h فوق الأرض. وعندما تُحرر الكرة فإنها تتأثر بالجاذبية وترتد إلى ارتفاع جديد بحيث تكون أقل نقطة لها ah فوق الأرض. يمكن اعتبار أن تشويه الكرة والأرض سبب التصادم ضئيل للغاية؛ رغم أن وقت التصادم غير صفري. كتلة الكرة هي m ومعامل الاحتكاك الحركي بين الكرة والأرض هو  $\mu_k$ . تجاهل مقاومة الهواء.

بالنسبة إلى الحالة التي انزلت فيها الكرة أثناء التصادم، أوجد كلاً ما يلي:  
 (a)  $\tan \theta$  حيث  $\theta$  هي زاوية الارتداد الموضحة في الرسم التخطيطي.  
 (b) المسافة الأفقية التي انتقلت خلالها الكرة في الهواء بين التصادم الأول والثاني.  
 (c) الحد الأدنى لقيمة  $\omega_0$  في هذه الحالة.

### تمارين بمعطيات متعددة



**10.91** جبل ملفوف حول بكرة عدة مرات ومتصل بقلب كتلته  $m_b = 4.243 \text{ kg}$ . ويتدلى بشكل رأسي. تتألف البكرة من عجلة نصف قطرها 46.21 cm وكتلتها  $m_p = 5.907 \text{ kg}$ . بأسلاك لها كتلة ضئيلة للغاية، ما مقدار عجلة القلب؟

**10.92** جبل ملفوف حول بكرة عدة مرات ومتصل بقلب كتلته  $m_b = 4.701 \text{ kg}$ . ويتدلى بشكل رأسي. تتكون البكرة من عجلة نصف قطرها 47.49 cm بأسلاك ذات كتلة ضئيلة للغاية. يتسارع القلب إلى الأسفل بسرعة  $4.330 \text{ m/s}^2$ . ما كتلة البكرة،  $m_p$ ؟

**10.93** جبل ملفوف حول بكرة عدة مرات ومتصل بقلب معلق بشكل رأسي. تتألف البكرة من عجلة نصف قطرها 48.77 cm وكتلتها  $m_p = 5.991 \text{ kg}$ . بأسلاك لها كتلة ضئيلة للغاية. يتسارع القلب إلى الأسفل بسرعة  $4.539 \text{ m/s}^2$  فما كتلة القلب،  $m_b$ ؟

**10.85** مروحة طائرة خفيفة طولها 2.012 m ونصف قطرها 17.36 kg. تدور المروحة بتردد 3280. rpm. ما مقدار الطاقة الحركية الدورانية لهذه المروحة؟ يمكنك أن تتعامل مع المروحة على أنها ساق رقيق يدور حول مركزه.

**10.86** مروحة طائرة خفيفة طولها 2.092 m وكتلتها 17.56 kg. طاقة الدوران الجوري للمروحة هي 422.8 kJ. ما التردد الدوراني للمروحة (بوحدة rpm)؟ يمكنك أن تتعامل مع المروحة على أنها ساق رقيق يدور حول مركزه.

**10.87** مروحة طائرة خفيفة طولها 1.812 m وتدور بسرعة 2160. rpm. الطاقة الحركية للمروحة هي 124.3 kJ. ما كتلة المروحة؟ يمكنك أن تتعامل مع المروحة على أنها ساق رقيق يدور حول مركزه.

**10.88** تُضرب كرة جولف كتلتها 45.90 g وقطرها 42.60 mm بحيث تتحرك بسرعة  $51.85 \text{ m/s}$  وتدور بتردد 2857 rpm. ما مقدار الطاقة الحركية لكرة الجولف؟

**10.89** تُضرب كرة جولف كتلتها 45.90 g وقطرها 42.60 mm بحيث تتحرك بسرعة  $54.15 \text{ m/s}$  أثناء الدوران الجوري. الطاقة الحركية لكرة الجولف هي 67.67 J. ما التردد الدوراني لكرة الجولف (بوحدة rpm)؟

**10.90** تُضرب كرة جولف كتلتها 45.90 g وقطرها 42.60 mm بحيث تدور بتردد 2875 rpm وتكون طاقتها الحركية 73.51 J عندما تتحرك. ما السرعة الخطية لكرة الجولف؟