



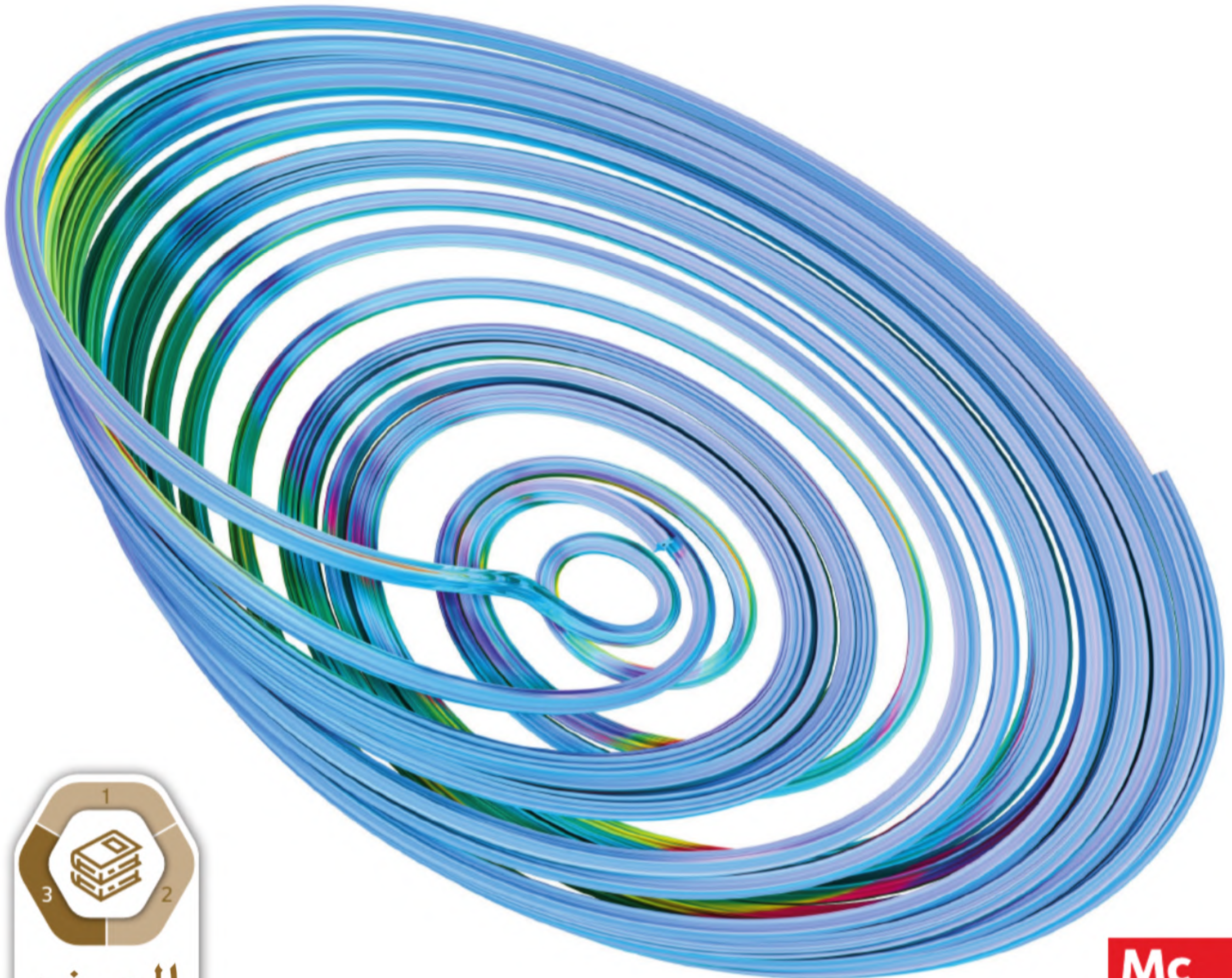
الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم



2019-2020

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة



Mc
Graw
Hill

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة



Mc
Graw
Hill

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 12 Advanced Math T3

FM. Front Matter, from Calculus: Early Transcendental Functions 4e © 2012

6. Application of the Definite Integral, from Calculus: Early Transcendental Functions 4e Chapter 5 © 2012

7. Integration Techniques, from Calculus: Early Transcendental Functions 4e Chapter 6 © 2012

& First-Order Differential Equations, from Calculus: Early Transcendental Functions 4e Chapter 7 © 2012

EM. End Matter/Glossary, from Calculus: Early Transcendental Functions 4e © 2012

صورة الغلاف: [Idea Studio/Shutterstock.com](https://www.shutterstock.com)

mheducation.com/prek-12



جميع الحقوق محفوظة © للعام 2020 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعت له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

النسخة الإلكترونية

طبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-44-700271-0 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-700271-7 (نسخة الطالب)

رقم النشر الدولي: 978-1-44-700267-3 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-700267-9 (نسخة الطالب)



صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

”يجب التزوّد بالعلوم الحديثة والمعارف الواسعة، والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال
الألفيّة الثالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة.“

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

ملخص المحتويات

1.....	1	الوحدة 1	تمهيدات
64.....	2	النهايات والاتصال	2
132.....	3	التفاضل	3
226.....	4	تطبيقات التفاضل	4
320.....	5	التكامل	5
406.....	6	تطبيقات التكامل المحدود	6
484.....	7	طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى	7

كتيب الطالب

المؤلفون

يضمن مؤلفونا الرئيسون أن تكون برامج McGraw-Hill للرياضيات مخططة بشكل رأسي بطريقة متوافقة من خلال البدء مع الأخذ في الاعتبار الغاية النهائية - ألا وهي تحقيق النجاح واجتياز المرحلة الثانوية وما يليها من مراحل. ونظرًا لعملية "التخطيط العكسي" لحتوى برامج المدارس الثانوية، فإن جميع برامج الرياضيات لدينا واضحة المعالم من حيث نطاقها وتسلسلها.

المؤلفون الرئيسون



جلبرت جاي كوفافاس، حاصل على درجة الدكتوراه.

أستاذ تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس - سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

جوانب الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية
ثرية، عمليات تمثيلية رياضية



ج. أ. كارتر حاصل على درجة الدكتوراه.

مدير مساعد التدريس والتعليم
مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية
لينكولنشير، إلينوي

جوانب الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية لتصوير
المفاهيم. تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية



كارول مالوي حاصلة على درجة الدكتوراه.

أستاذ مساعد
جامعة نورث كارولينا في تشابيل هيل
تشابيل هيل، نورث كارولينا

جوانب الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي ونجاح الطالب
في الجبر 1



روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه في التعليم من المجلس الوطني

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاون شيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

جوانب الخبرة: فهم وتطبيق الاحتمالات، والإحصائيات، وتعليم
مدرس الرياضيات

مؤلفو البرنامج



الدكتورة بيرتشي هوليدي، أستاذ التعليم.

المستشار القومي للرياضيات
سيلفر سبرينج، ماريلاند

جوانب الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة وفهم بيانات العالم
الفعلي، وتأثير الرسومات على الفهم الرياضي



لورين براين

مدرس رياضيات
أفضل معلم بولاية تينيسي لعام 2009
مدرسة ووكر فالي الثانوية
كليفلاند، تينيسي

جوانب الخبرة: المشاريع الهادفة التي تسعى إلى جعل التفاضل
والتكامل ومقدمته أقرب إلى الواقع بالنسبة إلى الطلاب

مؤلف مشارك



جاي مكاتي

مؤلف ومستشار تعليمي
كولومبيا، ميريلاند



فايكن هوفيسبيان

أستاذ الرياضيات
كلية ريو هونديو
وايتيه، كاليفورنيا



1 تمهيدات

1-1	كثيرات الحدود والدوال النسبية	4
1-2	الدوال العكسية	22
1-3	الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية	28
1-4	الدوال الأسية واللوغاريتمية	40
1-5	تحويلات الدوال	52



النهايات والاتصال

2

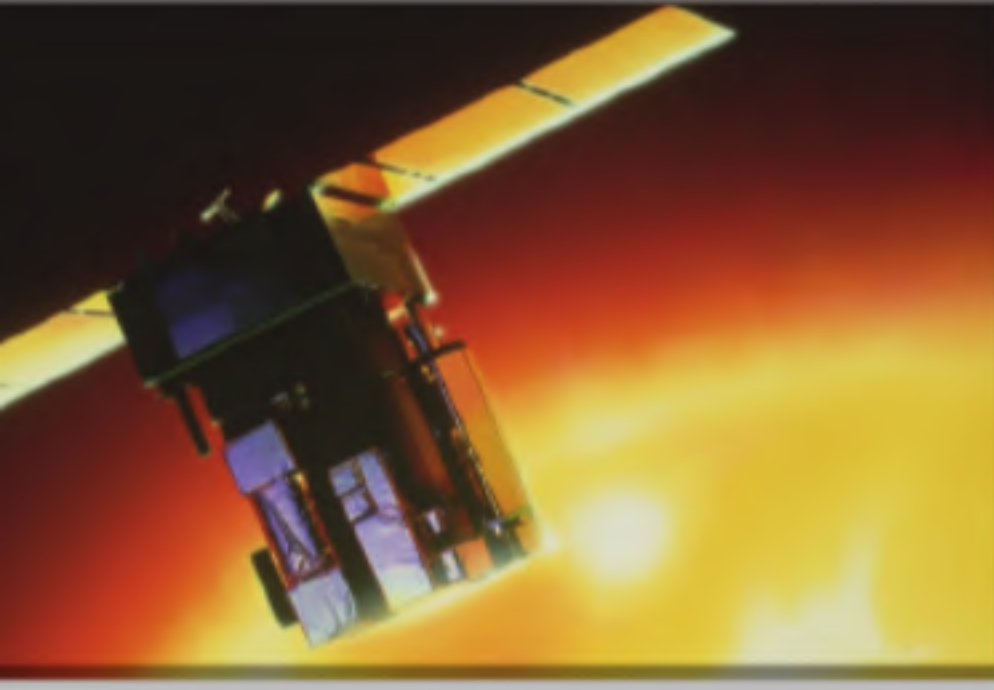
الوحدة

2-1	مراجعة موجزة عن التفاضل والتكامل: المماسات وطول المنحني	66
2-2	مفهوم النهاية	71
2-3	حساب النهايات	79
2-4	الاتصال ونتائجه	89
2-5	النهايات التي تتضمن اللانهاية: خطوط التقارب	100
2-6	التعريف الرسمي للنهاية	111
2-7	النهايات وأخطاء فقدان الدلالة	123



3 التفاضل

3-1	المهاسات والسرعة المتجهة	134
3-2	الاشتقاق	146
3-3	حساب المشتقات: قاعدة القوة	156
3-4	قواعد الضرب والقسمة	165
3-5	قاعدة السلسلة	173
3-6	مشتقات الدوال المثلثية	180
3-7	اشتقاق الدوال الأسية ودوال اللوغاريتمات	189
3-8	الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية المعكوسة	198
3-9	دوال القطع الزائد	208
3-10	نظرية القيمة المتوسطة	215



تطبيقات التفاضل

4 الوحدة

228	التقريبات الخطية وطريقة نيوتن	4-1
240	الصيغ غير المعروفة وقاعدة لوبيتال	4-2
250	القيم العظمى والصغرى	4-3
261	الدوال المتزايدة والمتناقصة	4-4
269	التقعر واختبار المشتقة الثانية	4-5
278	نظرة عامة على رسم المنحنيات	4-6
289	القيم المثلى	4-7
300	المعدلات المرتبطة	4-8
306	معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم	4-9



5 التكامل

322	5-1 عكس المشتقة والدالة الأصلية
332	5-2 المجموع والرمز سيجما
339	5-3 المساحة
347	5-4 التكامل المحدود
359	5-5 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
369	5-6 التكامل بالتعويض
379	5-7 التكامل العددي
392	5-8 اللوغاريتم الطبيعي كتكامل



تطبيقات على التكامل المحدود

6 الوحدة

408	المساحة المحصورة بين منحنيين	6-1
418	الحجم: شرائح وأقراص وحلقات	6-2
433	الاحجام بالأصداف الأسطوانية	6-3
441	طول القوس ومساحة السطح	6-4
449	حركة المقذوفات	6-5
460	تطبيقات التكامل على الفيزياء والهندسة	6-6
472	الاحتمال	6-7



طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

7

الدرجة الأولى

486	مراجعة الصيغ وطرائق التكامل	7-1
491	التكامل بالأجزاء	7-2
499	طرائق تكامل الدوال المثلثية	7-3
509	تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية	7-4
518	جداول التكامل وأنظمة الحاسوب الجبرية	7-5
526	نمذجة المعادلات التفاضلية	7-6
537	المعادلات التفاضلية القابلة للفصل	7-7

كتيب الطالب

المراجع

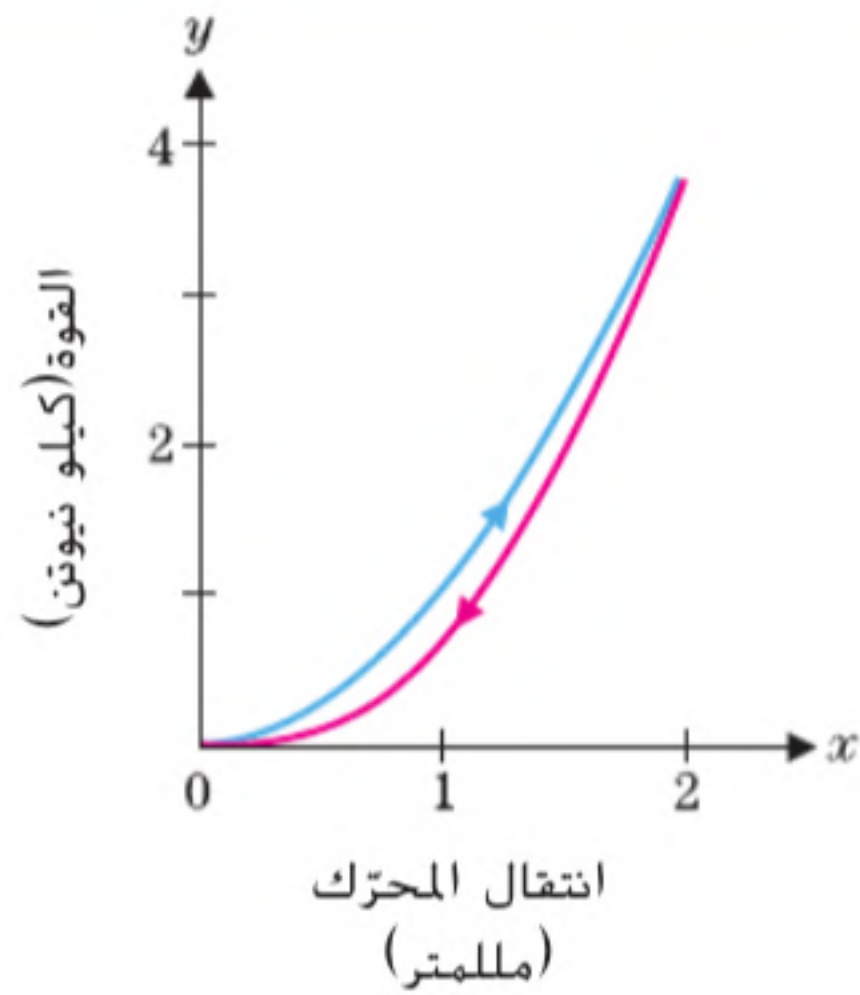
A-23	إجابات التمارين الفردية
B-1	قوانين مهمة

تطبيقات التكامل المحدود



غالبًا ما يُقال إنّ الرياضيين الذين يمكنهم القفز عاليًا لديهم "نوابض في أرجلهم". فقد اتضح أنّ الأوتار والأقواس في قدميك تعمل إلى حد كبير مثل النوابض، من حيث تخزين الطاقة وإطلاقها. على سبيل المثال، يتمدد وتر العرقوب لديك عندما تخطو خطوات واسعة أثناء المشي ثم ينقبض عندما تلامس قدمك الأرض. على غرار النابض الذي يتمدد ومن ثم يُطلق، يخزن الوتر الطاقة أثناء مرحلة التمدد ومن ثم يُطلقها عند الانقباض.

يقيس علماء الفسيولوجيا كفاءة آلية عمل الأوتار التي تشبه النابض بطريقة حساب النسبة المئوية للطاقة المنطلقة أثناء الانقباض إلى الطاقة المخزنة أثناء التمدد. يُظهر منحنى الإجهاد والانفعال المعروض هنا القوة كدالة للتمدّد أثناء التمدّد د (المنحنى العلوي) والارتداد (المنحنى السفلي) لقوس القدم البشرية. (أعيدت طباعة الشكل من *Exploring Biomechanics* بقلم ر. ماكنيل ألكسندر بعد الحصول على تصريح). إذا لم تُفقد أي طاقة، يكون المنحنيان متطابقين. المساحة بين المنحنيين هي قياس الطاقة المفقودة.



يُظهر المنحنى المناظر لقدم الكاجارو (انظر ألكسندر) عدم وجود أي مساحة تقريباً بين المنحنيين. تعني كفاءة أرجل الكاجارو أنه يلزم قدر قليل للغاية من الطاقة للقفز. في الواقع، وجد عالم الأحياء تيري داوسون في اختبارات جهاز الجري أة، كلما زادت سرعة جري حيوانات الكاجارو، تقل الطاقة التي تحرقها (إلى حد الاختبار الذي يبلغ 32 km/h). وينطبق المبدأ نفسه على الرياضيين من البشر، من حيث إنه كلما تمّدت أوتار العرقوب، تصبح عملية الجري أكثر كفاءة. لهذا السبب، يقضي الرياضيون قدراً كبيراً من الزمن في تمديد وتقوية أوتار العرقوب لديهم.

توضّح هذه الوحدة تنوّع استخدامات التكامل من خلال استكشاف العديد من التطبيقات. ونبدأ مع حساب المساحات بين منحنيين. يمكن رؤية التكامل من منظورات مختلفة: بيانياً (المساحات) وعددياً (التقديرات التقريبية لمجموع ريمان) ورمزياً (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل). بينما تقوم بدراسة كل تطبيق جديد، انتبه لكيفية قيامنا بتطوير التكامل (التكاملات) لقياس كمية ما.

المساحة المحصورة بين منحنين

في البدء طوّروا التكامل المحدود لحساب المساحة تحت منحنى. على وجه الخصوص، لتكن دالة متصلة معرفة على $[a, b]$ ، حيث $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$. لإيجاد المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$ ، نبدأ بتجزئة $[a, b]$ إلى n فترات جزئية متساوية

فيكون $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. والنقاط في التجزئة عندئذ هي $x_0 = a, x_1 = x_0 + \Delta x, x_2 = x_1 + \Delta x$ وهكذا. أي إن:

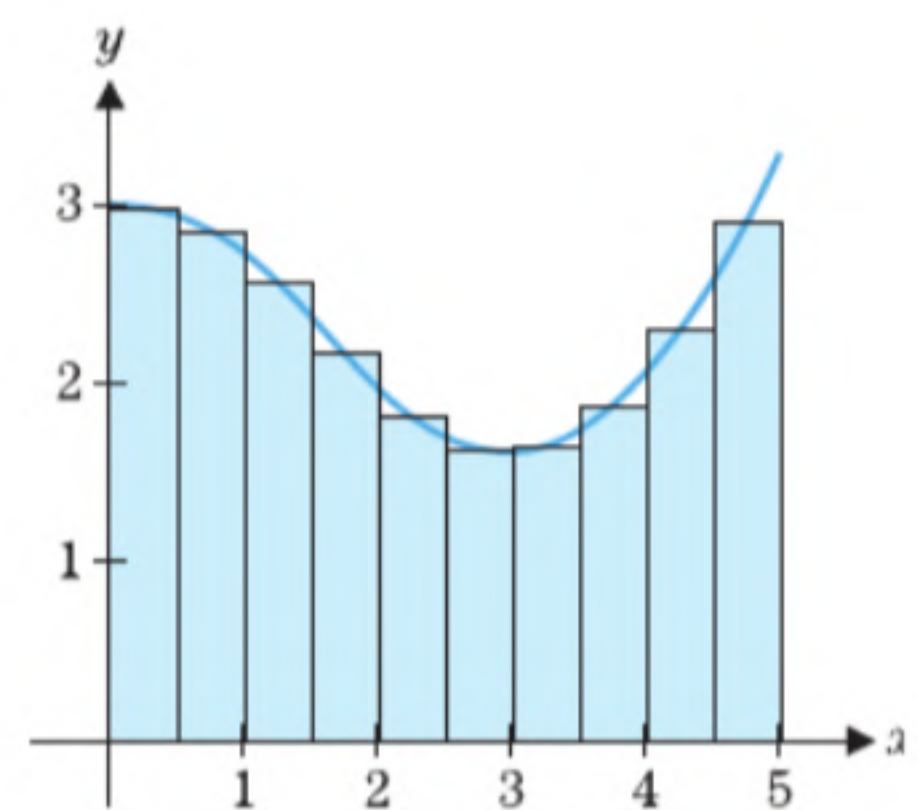
$$x_i = a + i\Delta x \quad \text{لكل } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، نقوم بإنشاء مستطيل له الارتفاع $f(c_i)$ ، لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ كما هو مبين في الشكل 6.1 وحساب مجموع مساحات n من المستطيلات كقيمة تقريبية للمساحة الواقعة تحت المنحنى:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

بينما نأخذ عددًا أكبر من المستطيلات، يقترب هذا المجموع من القيمة الدقيقة للمساحة، وهي

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$



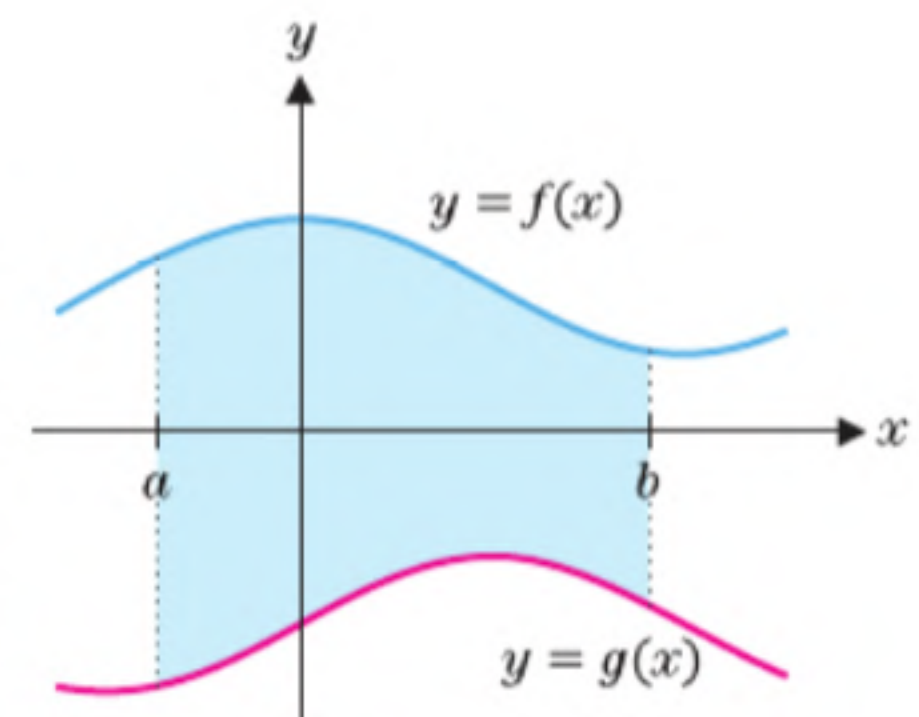
الشكل 6.1

القيمة التقريبية للمساحة

نحن الآن نوسّع هذا المفهوم لإيجاد المساحة المحدودة بين المنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ على الفترة $[a, b]$ (انظر الشكل 6.2). حيث f و g متصلتان و $f(x) \geq g(x)$ على $[a, b]$. نقوم أولاً باستخدام مستطيلات لتقريب المساحة. في هذه الحالة، على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، يتم إنشاء مستطيل، يمتد من المنحنى الأدنى $y = g(x)$ إلى المنحنى الأعلى $y = f(x)$ ، على النحو المبين في الشكل 6.3a. بالرجوع إلى الشكل 6.3b، نجد أن المستطيل عند الحد i له الارتفاع $h_i = f(c_i) - g(c_i)$ ، لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

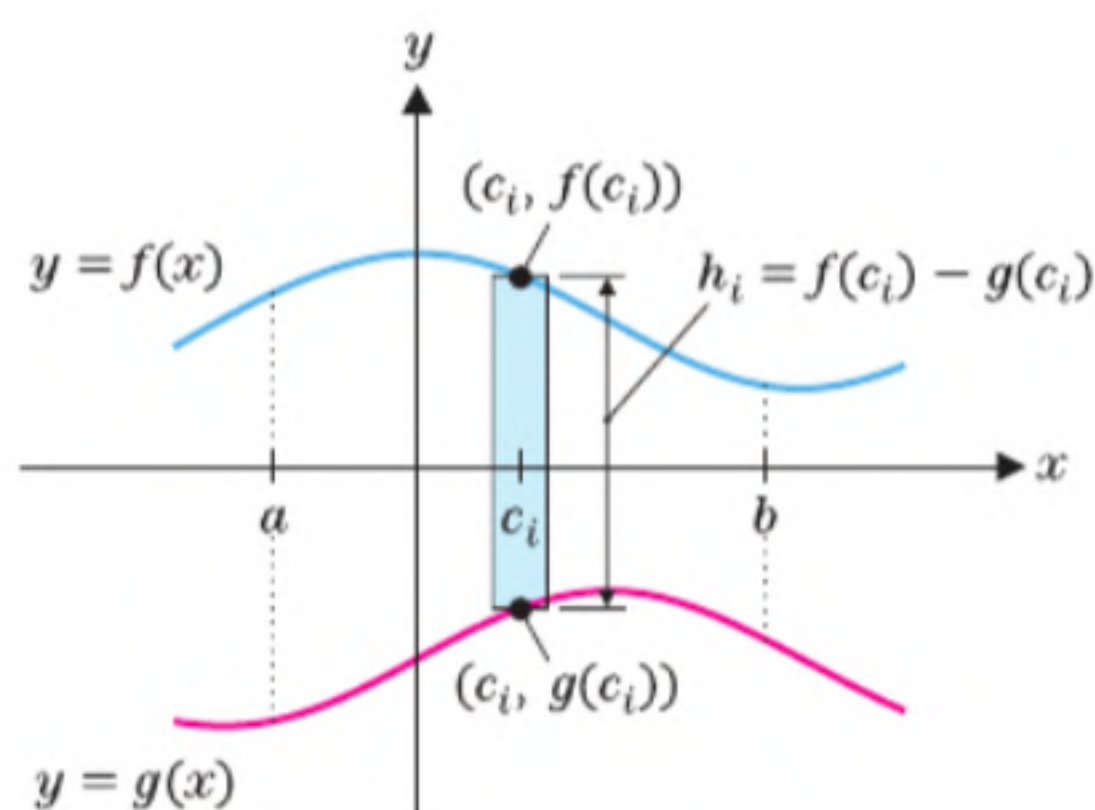
لذا، فإن مساحة المستطيل عند الحد i هي

$$\text{المساحة} = \text{الطول} \times \text{العرض} = [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x = h_i \Delta x$$

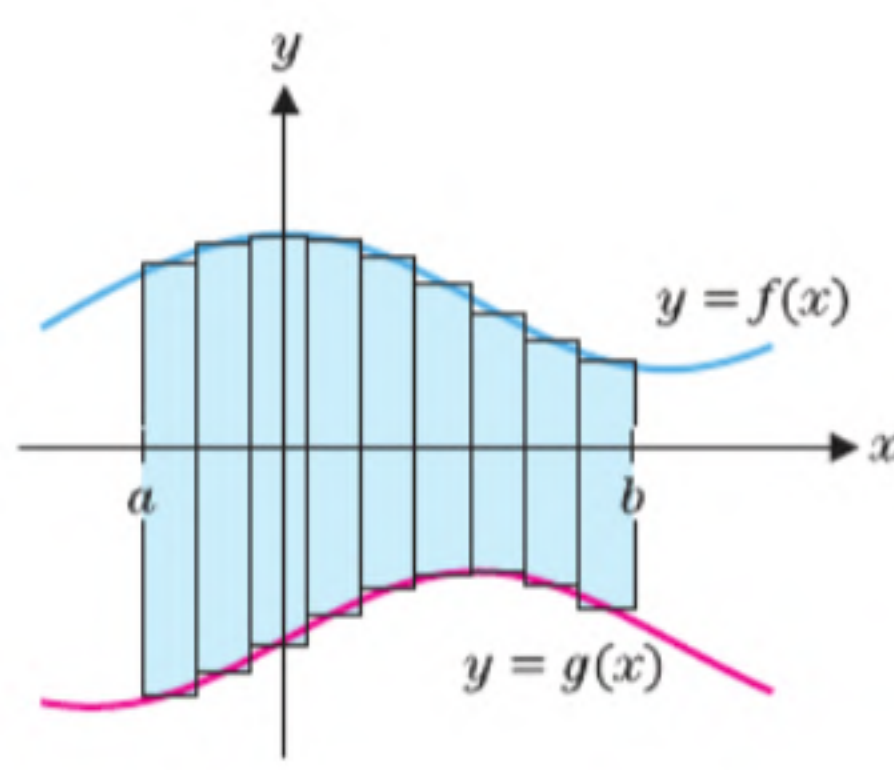


الشكل 6.2

المساحة بين منحنين



الشكل 6.3b

مساحة المستطيل عند الحد i 

الشكل 6.3a

القيمة التقريبية للمساحة

ملحوظة 1.1

الصيغة (1.1) صحيحة عندما تكون $f(x) \geq g(x)$ على الفترة $[a, b]$. بشكل عام، تُعطى المساحة بين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ لأجل $a \leq x \leq b$ بالعلاقة $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. لاحظ أنه لإيجاد قيمة هذا التكامل، يجب عليك إيجاد قيمة $\int_c^d [f(x) - g(x)] dx$ على جميع الفترات الجزئية حيث $f(x) \geq g(x)$. ثم إيجاد قيمة $\int_c^d [g(x) - f(x)] dx$ على جميع الفترات الجزئية حيث $g(x) \geq f(x)$. أخيرًا، اجمع التكاملات.

وتكون المساحة الكلية عندئذٍ تساوي تقريبًا مجموع مساحات n من المستطيلات المحددة.

$$A \approx \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x$$

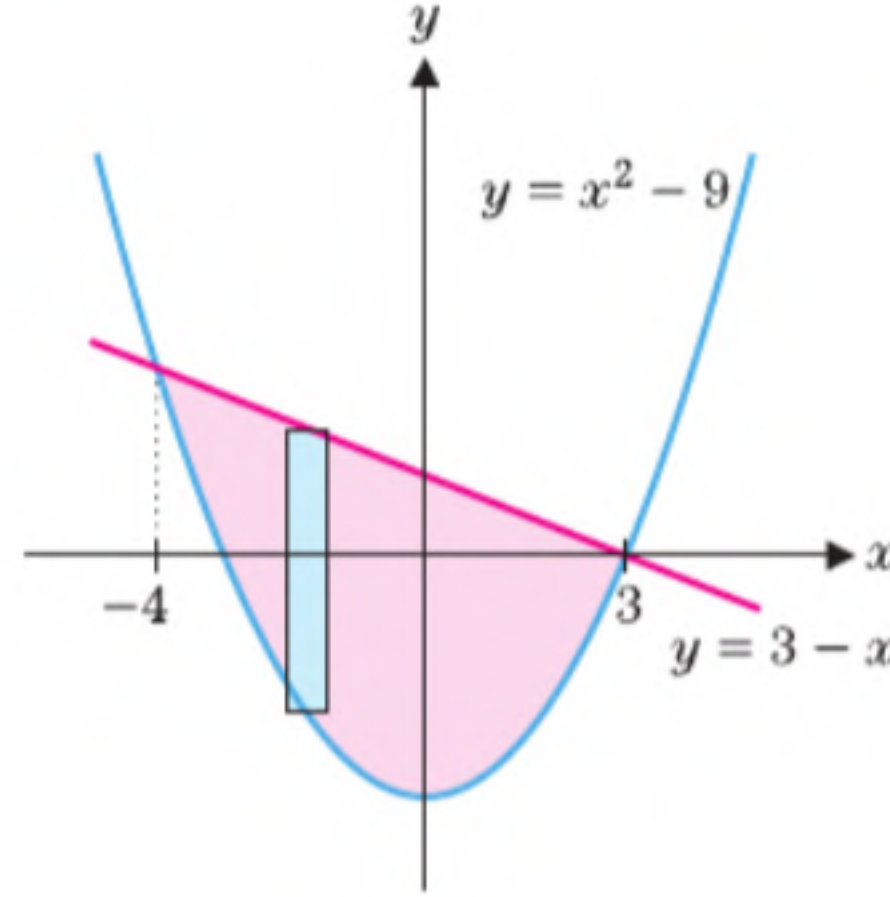
وأخيرًا، لاحظ أنه إذا كانت النهاية عندما $n \rightarrow \infty$ موجودة، فسوف نحصل على المساحة الدقيقة، والتي نعرّفها باعتبارها تكاملًا محدودًا:

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين

$$(1.1) \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

المثال 1.1 إيجاد مساحة منطقة بين منحنيين

ج - د مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الدالتين $y = 3 - x$ و $y = x^2 - 9$. (انظر الشكل 6.4).



الشكل 6.4

$$y = x^2 - 9 \text{ و } y = 3 - x$$

الحل لاحظ أن حدود التكامل تناظر الإحداثيات x لنقاط تقاطع المنحنيين. بالمساواة بين الدالتين، يكون لدينا

$$0 = x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4) \quad \text{أو} \quad 3 - x = x^2 - 9$$

لذا، يتقاطع المنحنيان عندما $x = 3$ و $x = -4$. مع العلم أن الحد الأعلى للمنطقة يتكوّن من $y = 3 - x$ والحد الأدنى يتكوّن من $y = x^2 - 9$ ، لذا، لكل قيمة ثابتة لـ x ، يبلغ المستطيل (مثل ذلك المبين في الشكل 6.4)

$$h(x) = (3 - x) - (x^2 - 9)$$

من (1.1)، المساحة بين المنحنيين هي:

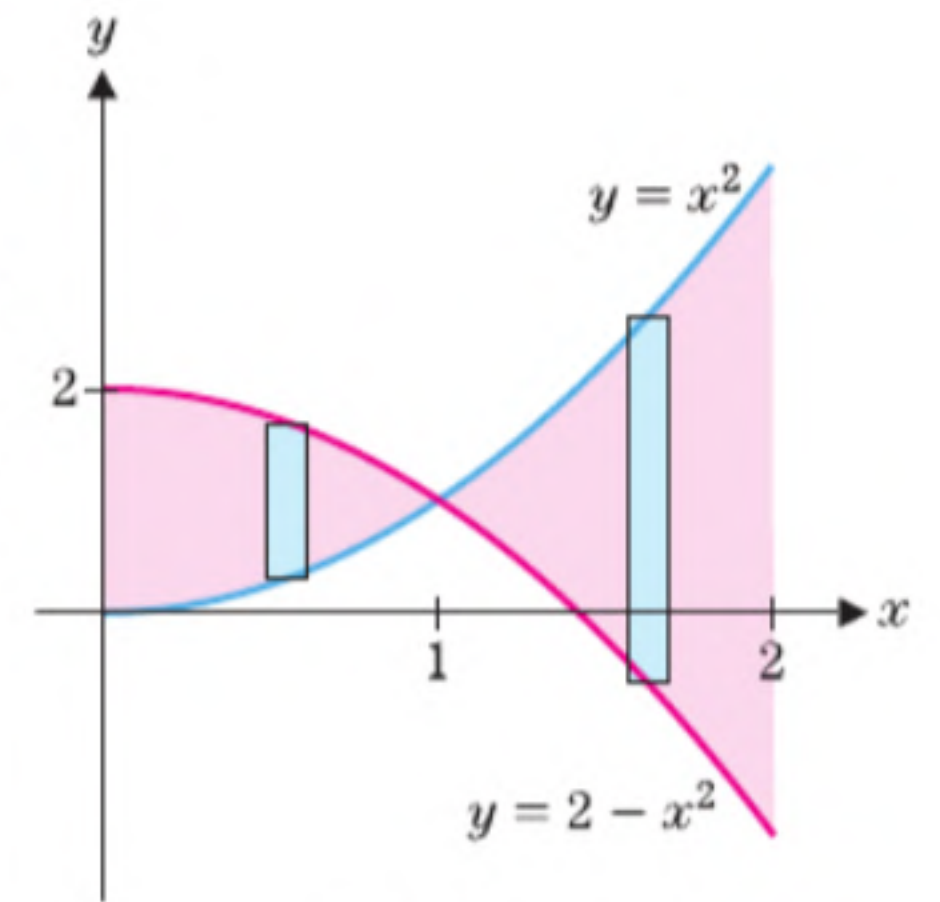
$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^3 [(3 - x) - (x^2 - 9)] dx \\ &= \int_{-4}^3 (-x^2 - x + 12) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_{-4}^3 \\ &= \left[-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12(3) \right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12(-4) \right] = \frac{343}{6} \end{aligned}$$

في بعض الأحيان، لا يتم تعريف الحد الأعلى أو الأدنى بدالة واحدة، كما في الحالة التالية من التمثيلات البيانية المتقاطعة.

المثال 1.2 إيجاد مساحة منطقة بين منحنيين متقاطعين

ج - د مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ لأجل $0 \leq x \leq 2$.

الحل لاحظ من الشكل 6.5 أنه، بما أن المنحنيين يتقاطعان في منتصف الفترة، فسندرج لحساب تكاملين، واحد على الفترة عندما يكون $x^2 \geq 2 - x^2$ والآخر على الفترة عندما يكون $x^2 \leq 2 - x^2$. ولإيجاد نقطة التقاطع، نحل المعادلة: $x^2 = 2 - x^2$ ، ومنها $2x^2 = 2$ أو $x^2 = 1$ أو $x = \pm 1$. نظرًا إلى أن $x = -1$ تقع خارج المجال، فإنّ التقاطع الوحيد المقبول يقع عند $x = 1$. من (1.1)، وتكون المساحة



الشكل 6.5

$$y = 2 - x^2 \text{ و } y = x^2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [(2 - x^2) - x^2] dx + \int_1^2 [x^2 - (2 - x^2)] dx \\ &= \int_0^1 (2 - 2x^2) dx + \int_1^2 (2x^2 - 2) dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - 2x \right]_1^2 \\ &= \left(2 - \frac{2}{3} \right) - (0 - 0) + \left(\frac{16}{3} - 4 \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

في المثال 1.3، يجب تقريب نقاط التقاطع عدديًا.

المثال 1.3 حالة تكون فيها نقاط التقاطع معروفة تقريبًا فقط

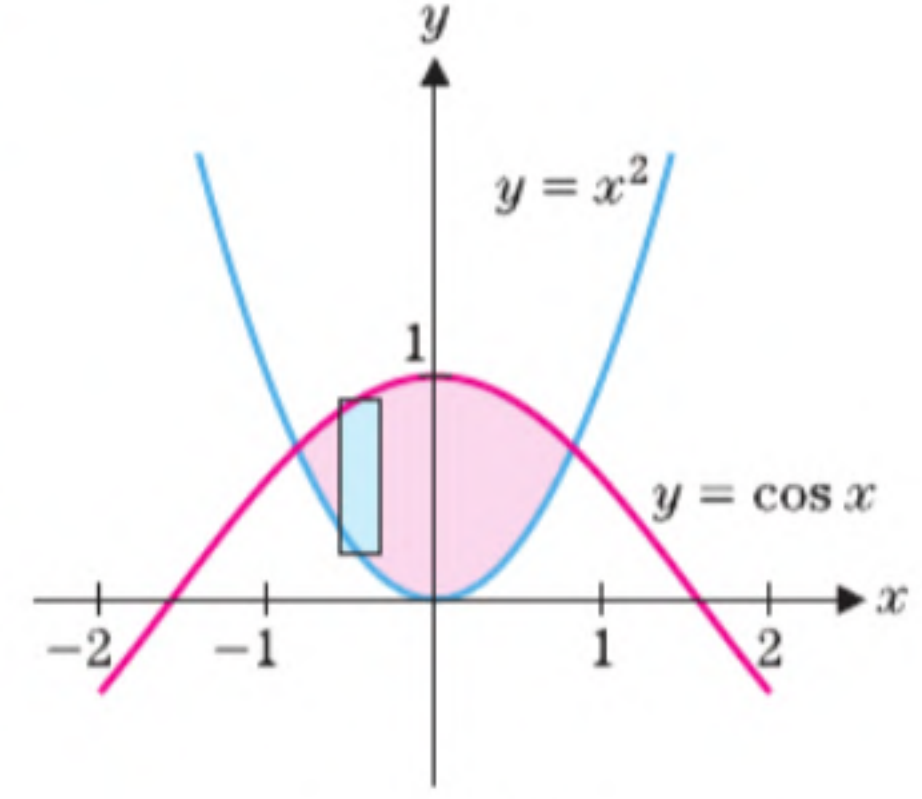
جـ - د مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = \cos x$ و $y = x^2$.

الحل التمثيل البياني $y = \cos x$ و $y = x^2$ في الشكل 6.6 يشير إلى التقاطعات عند $x = -1$ و $x = 1$. حيث $\cos x = x^2$ ومع ذلك، لا يمكن حل هذه المعادلة تمامًا. بدلًا من ذلك، نستخدم طريقة إيجاد الجذر للحصول على الحلول التقريبية $x = \pm 0.824132$. [على سبيل المثال، يمكنك استخدام طريقة نيوتن للبحث عن قيم x التي يكون عندها $f(x) = \cos x - x^2 = 0$ من التمثيل البياني، يمكننا أن نرى أنَّ ما بين قيمتا x هذه، $\cos x \geq x^2$ وهكذا، دُعِطى المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$\begin{aligned} A &\approx \int_{-0.824132}^{0.824132} (\cos x - x^2) dx = \left[\sin x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-0.824132}^{0.824132} \\ &= \sin 0.824132 - \frac{1}{3}(0.824132)^3 - \left[\sin(-0.824132) - \frac{1}{3}(-0.824132)^3 \right] \\ &\approx 1.09475. \end{aligned}$$

لاحظ أنَّنا قمنا بتقريب كلٍّ من حدَّي التكامل والحسابات النهائية.

قد يتطلب إيجاد مساحة بعض المناطق تقطيعها إلى عدة أجزاء، بحيث يكون لكل منها حد أعلى وحد أدنى مختلفة عن بعضها.



الشكل 6.6

$y = \cos x$ و $y = x^2$

المثال 1.4 مساحة منطقة تحددها ثلاثة منحنيات

جـ - د مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = x^2$ و $y = 2 - x$ و $y = 0$.

الحل يظهر رسم لمنحنيات الثلاثة المحددة في الشكل 6.7a. لاحظ أنَّ الحد الأعلى للمنطقة هو المنحنى $y = x^2$ في الجزء الأول من الفترة والمستقيم $y = 2 - x$ في الجزء الثاني. لتحديد نقطة التقاطع، نحل المعادلة الناتجة عن مساواة الدالتين

$$0 = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \quad \text{أو} \quad 2 - x = x^2$$

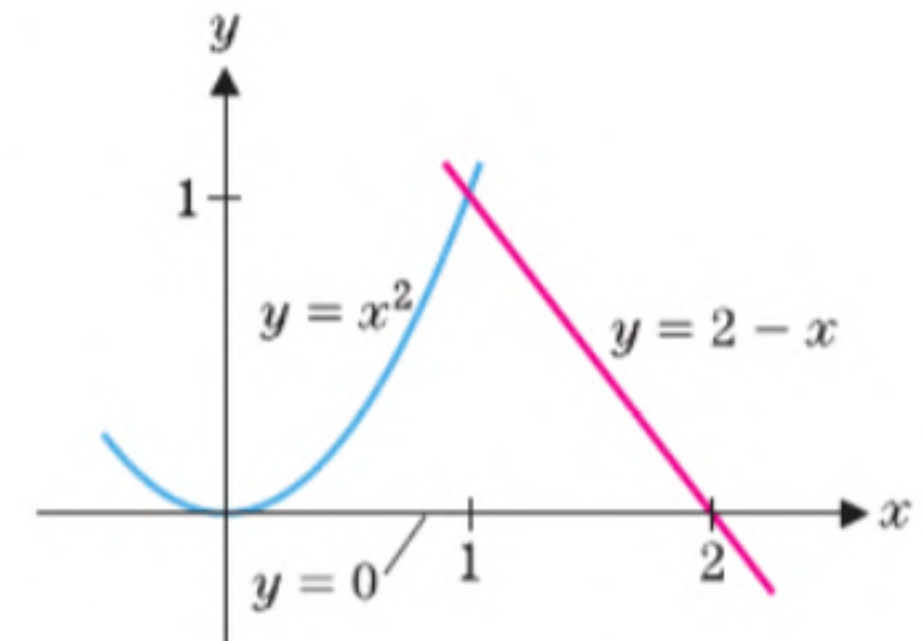
ننظر إلى أنَّ $x = -2$ يقع إلى يسار المحور y ، فالتقاطع المطلوب يحدث عند $x = 1$ فقط. نقوم بتقطيع المنطقة إلى جزأين، كما هو مبين في الشكل 6.7b وإيجاد مساحة كل جزء على حدة. تكون المساحة الكلية عندئذ مجموع مساحتي المنطقتين $A_1 + A_2$.

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^2 - 0) dx + \int_1^2 [(2 - x) - 0] dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

على الرغم من أنَّه لا صعوبة في تقطيع المنطقة إلى عدة أجزاء في المثال 1.4، إلا أنَّنا نريد أن نقترح بديلاً قد يكون مفيداً بشكل مدهش. لاحظ أنَّه إذا قلبت الصفحة على الجانب، فسيبدو الشكل 6.7a وكلُّ منطقة ذات منحنى واحد يحدُّ كلا من الحدين الأعلى والأدنى. وبطبيعة الحال، عند قلب الصفحة على الجانب، فإنَّك تعكس بشكل أساسي أدوار x و y .

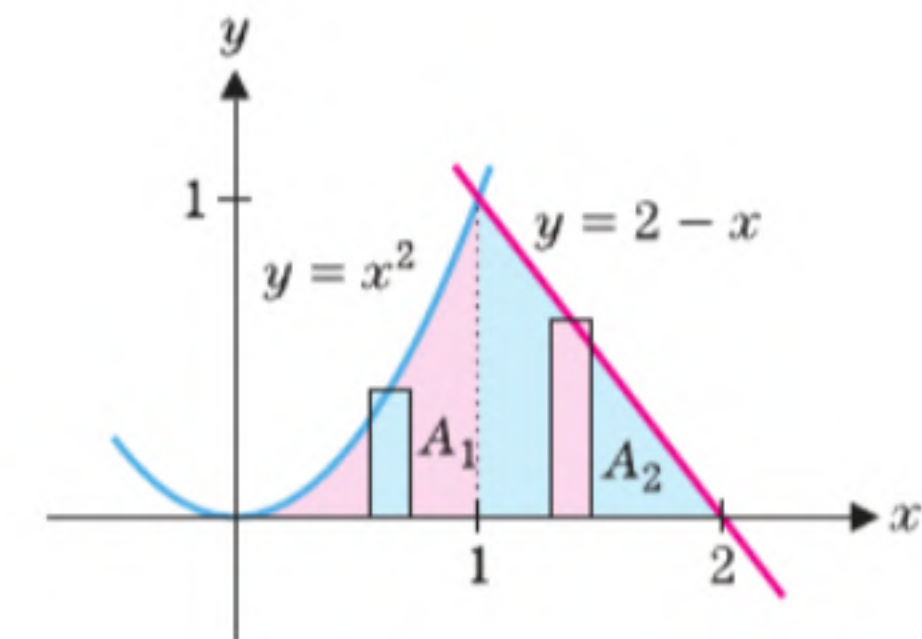
وعموماً، للدالتين المتصلتين، f و g ، حيث $f(y) \geq g(y)$ لكل y بالفترة $c \leq y \leq d$ ، لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $x = f(y)$ و $x = g(y)$ ، علينا أولاً تجزئة الفترة $[c, d]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية، يكون عرض كل منها $\Delta y = \frac{d - c}{n}$. (انظر الشكل 6.8a). نرسم للنقاط في التجزئة $y_1 = y_0 + \Delta y$ ، $y_2 = y_1 + \Delta y$ ، وهكذا. أي إنَّ،

$$y_i = c + i\Delta y \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$



الشكل 6.7a

$y = 2 - x$ و $y = x^2$



الشكل 6.7b

$y = 2 - x$ و $y = x^2$

في المثال 1.3، يجب تقريب نقاط التقاطع عدديًا.

المثال 1.3 حالة تكون فيها نقاط التقاطع معروفة تقريبًا فقط

جـ - د مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = \cos x$ و $y = x^2$.

الحل التمثيل البياني $y = \cos x$ و $y = x^2$ في الشكل 6.6 يشير إلى التقاطعات عند $x = -1$ و $x = 1$. حيث $\cos x = x^2$ ، ومع ذلك، لا يمكن حل هذه المعادلة تمامًا. بدلاً من ذلك، نستخدم طريقة إيجاد الجذر للحصول على الحلول التقريبية $x = \pm 0.824132$. [على سبيل المثال، يمكنك استخدام طريقة نيوتن للبحث عن قيم x التي يكون عندها $f(x) = \cos x - x^2 = 0$ من التمثيل البياني، يمكننا أن نرى أن ما بين قيمتا x هذه، $\cos x \geq x^2$ وهكذا، دُعِطِي المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$\begin{aligned} A &\approx \int_{-0.824132}^{0.824132} (\cos x - x^2) dx = \left[\sin x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-0.824132}^{0.824132} \\ &= \sin 0.824132 - \frac{1}{3}(0.824132)^3 - \left[\sin(-0.824132) - \frac{1}{3}(-0.824132)^3 \right] \\ &\approx 1.09475. \end{aligned}$$

لاحظ أننا قمنا بتقريب كل من حدّي التكامل والحسابات النهائية.

قد يتطلب إيجاد مساحة بعض المناطق تقطيعها إلى عدة أجزاء، بحيث يكون لكل منها حد أعلى وحد أدنى مختلفة عن بعضها.

المثال 1.4 مساحة منطقة تحددها ثلاثة منحنيات

جـ - د مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = x^2$ و $y = 2 - x$ و $y = 0$.

الحل يظهر رسم لمنحنيات الثلاثة المحددة في الشكل 6.7a. لاحظ أن الحد الأعلى للمنطقة هو المنحنى $y = x^2$ في الجزء الأول من الفترة والمستقيم $y = 2 - x$ في الجزء الثاني. لتحديد نقطة التقاطع، نحل المعادلة الناتجة عن مساواة الدالتين

$$0 = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \quad \text{أو} \quad 2 - x = x^2$$

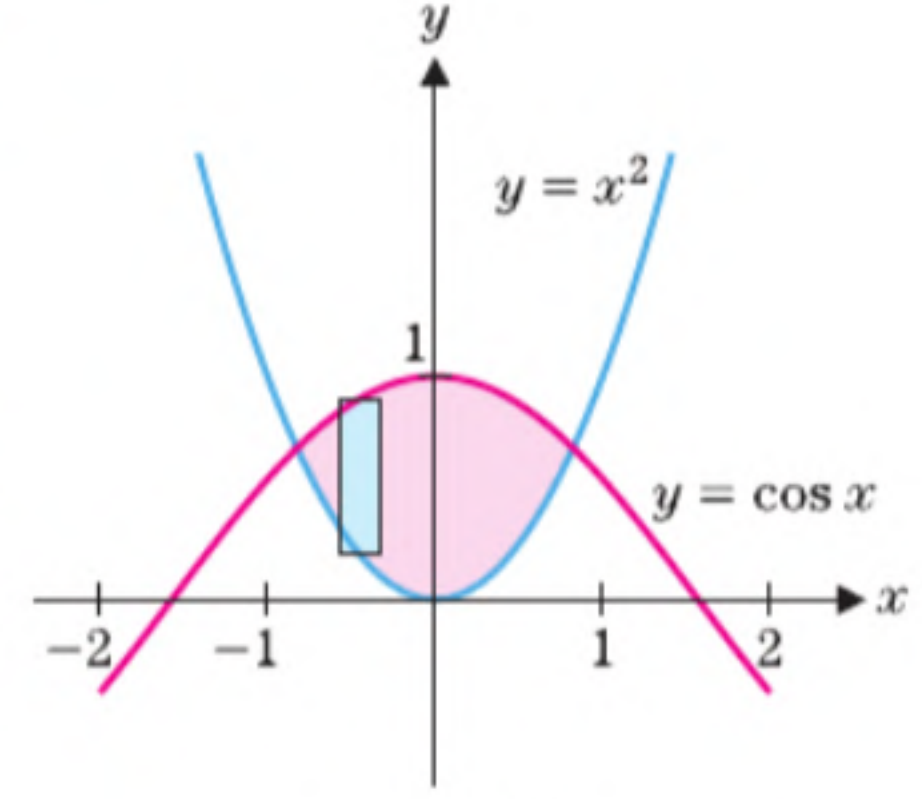
ننظر إلى أن $x = -2$ يقع إلى يسار المحور y ، فالتقاطع المطلوب يحدث عند $x = 1$ فقط. نقوم بتقطيع المنطقة إلى جزأين، كما هو مبين في الشكل 6.7b وإيجاد مساحة كل جزء على حدة. تكون المساحة الكلية عندئذ مجموع مساحتي المنطقتين $A_1 + A_2$.

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^2 - 0) dx + \int_1^2 [(2 - x) - 0] dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

على الرغم من أنه لا صعوبة في تقطيع المنطقة إلى عدة أجزاء في المثال 1.4، إلا أننا نريد أن نقترح بديلاً قد يكون مفيداً بشكل مدهش. لاحظ أنه إذا قلبت الصفحة على الجانب، فسيبدو الشكل 6.7a وكل منطقة ذات منحنى واحد يحدّها كلا من الحدين الأعلى والأدنى. وبطبيعة الحال، عند قلب الصفحة على الجانب، فإنك تعكس بشكل أساسي أدوار x و y .

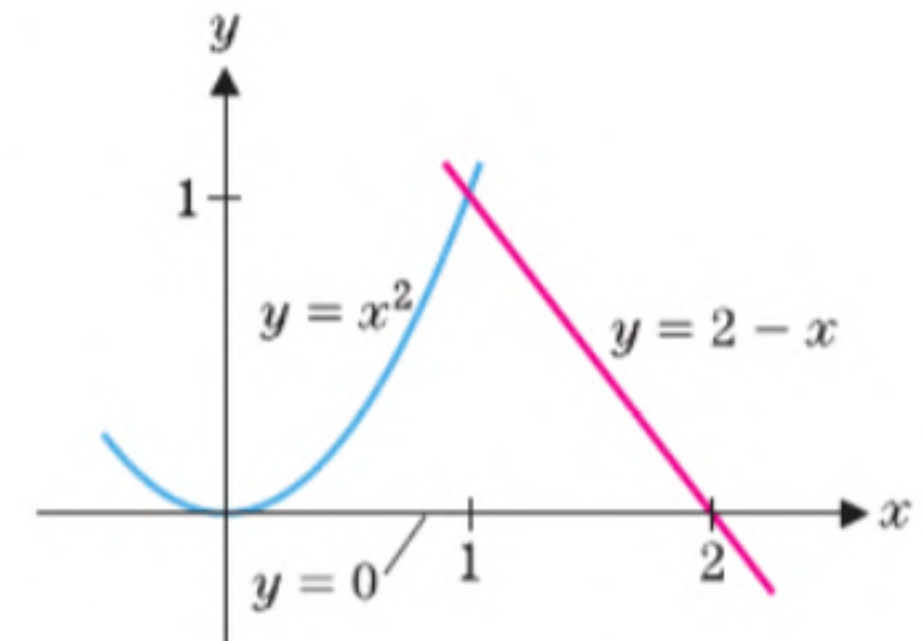
وعمومًا، للدالتين المتصلتين، f و g ، حيث $f(y) \geq g(y)$ لكل y بالفترة $c \leq y \leq d$ ، لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $x = f(y)$ و $x = g(y)$ ، علينا أولاً تجزئة الفترة $[c, d]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية، يكون عرض كل منها $\Delta y = \frac{d - c}{n}$. (انظر الشكل 6.8a). نرسم للنقاط في التجزئة $y_1 = y_0 + \Delta y$ ، $y_2 = y_1 + \Delta y$ ، وهكذا. أي إن:

$$y_i = c + i\Delta y \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$



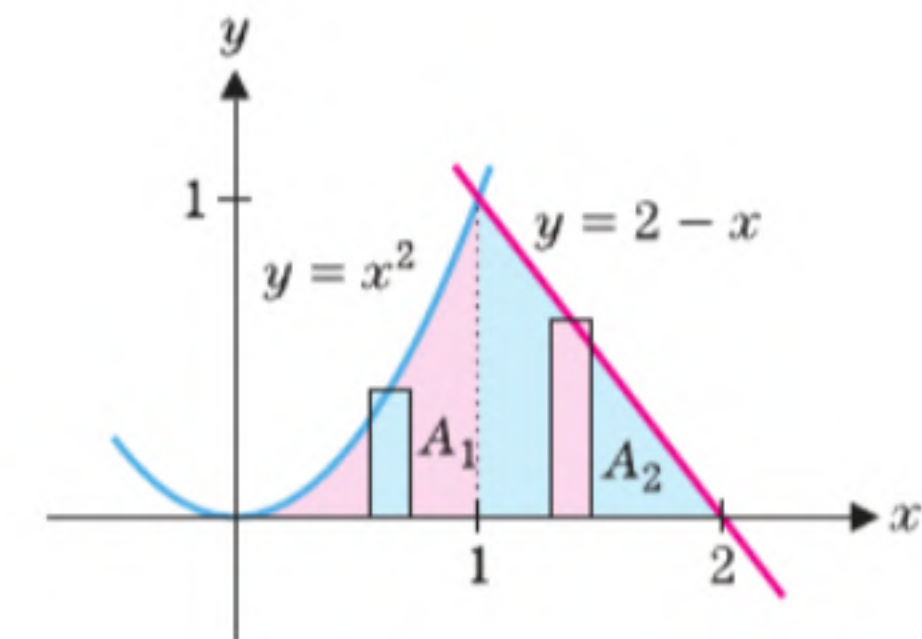
الشكل 6.6

$y = x^2$ و $y = \cos x$



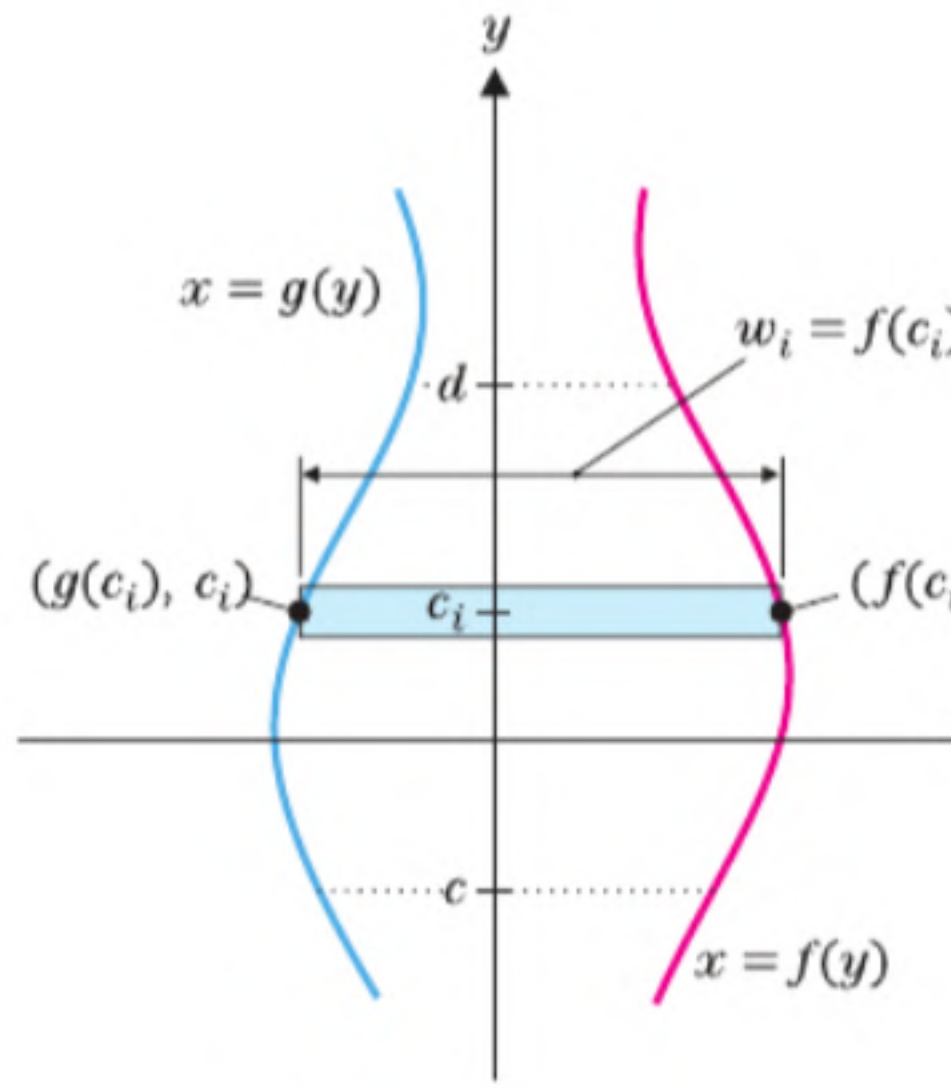
الشكل 6.7a

$y = 2 - x$ و $y = x^2$



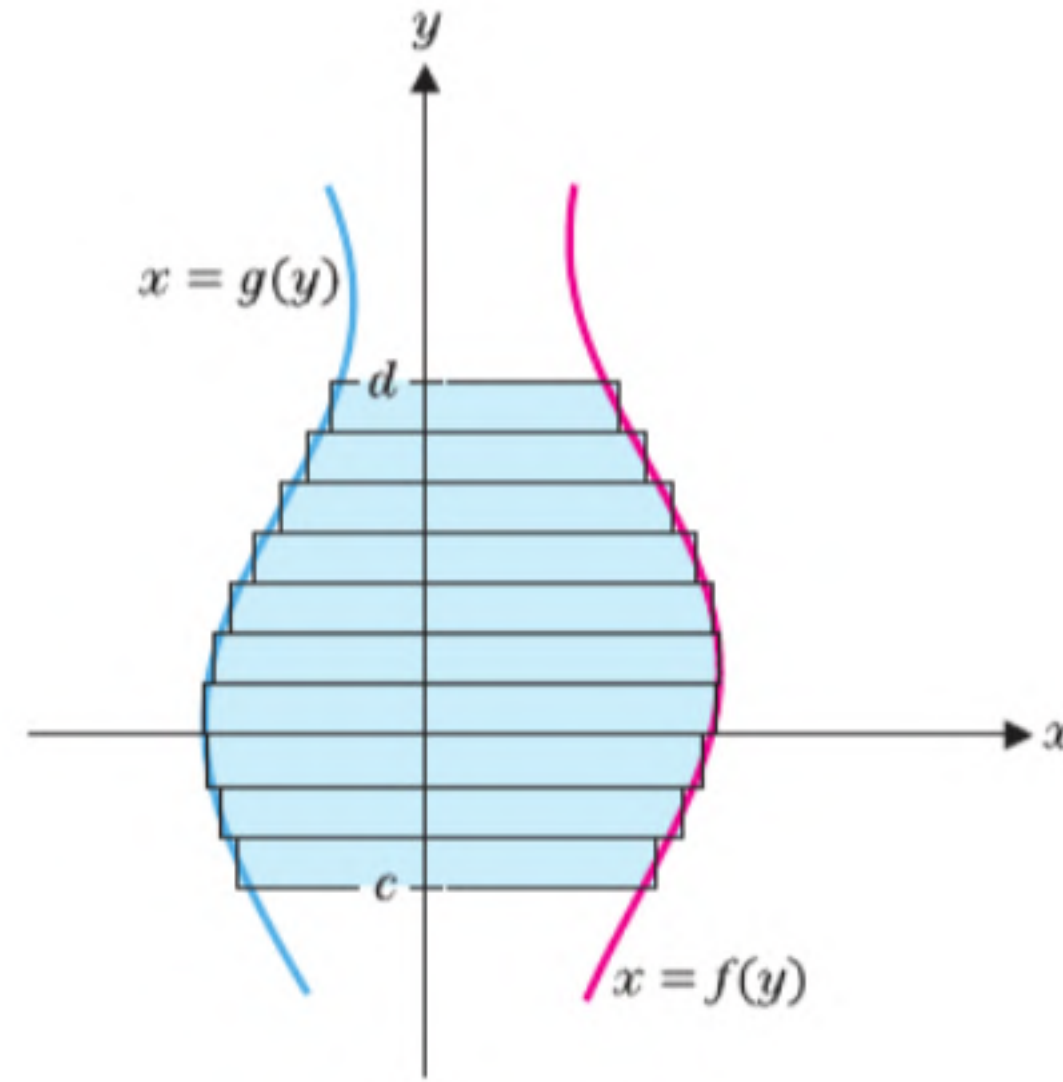
الشكل 6.7b

$y = 2 - x$ و $y = x^2$



الشكل 6.8b

مساحة المستطيل عند الحد i



الشكل 6.8a

المساحة بين $x = f(y)$ و $x = g(y)$

على كل فترة جزئية $[y_{i-1}, y_i]$ (حيث $i = 1, 2, \dots, n$) نقوم بإنشاء مستطيل له العرض Δy وبعرض $w_i = [f(c_i) - g(c_i)]$ لبعض $c_i \in [y_{i-1}, y_i]$. كما هو مبين في الشكل 6.8b. تُعطي مساحة المستطيل عند الحد i بالعلاقة

$$[f(c_i) - g(c_i)] \Delta y = \text{العرض} \times \text{الطول}$$

تُعطى المساحة الإجمالية بين المنحنيين عندئذ تقريبًا بالعلاقة

$$A \approx \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta y$$

نحصل على المساحة المحددة من خلال النهاية عندما $n \rightarrow \infty$ والتعرف على النهاية على أنها تكاملًا محدودًا. لدينا

$$(1.2) \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta y = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy.$$

المساحة بين منحنيين

المثال 1.5 مساحة منطقة محسوبة كتكامل بمعلومية y

كّرر المثال 1.4، ولكن التكامل بمعلومية y بدلًا من ذلك.

الحل من الشكل 6.9، لاحظ أن الحد الأيسر للمنطقة يتكوّن من التمثيل البياني $y = x^2$ أو $x = \sqrt{y}$ (نظرًا إلى أن النصف الأيمن للقطع المكافئ فقط هو ما يشكل الحد الأيسر). يتكوّن الحد الأيمن للمنطقة من المستقيم $y = 2 - x$ أو $x = 2 - y$. يتقاطع هذان المنحنيان اللذان يشكّلان الحدود عندما $\sqrt{y} = 2 - y$ وبترتيب الطرفين

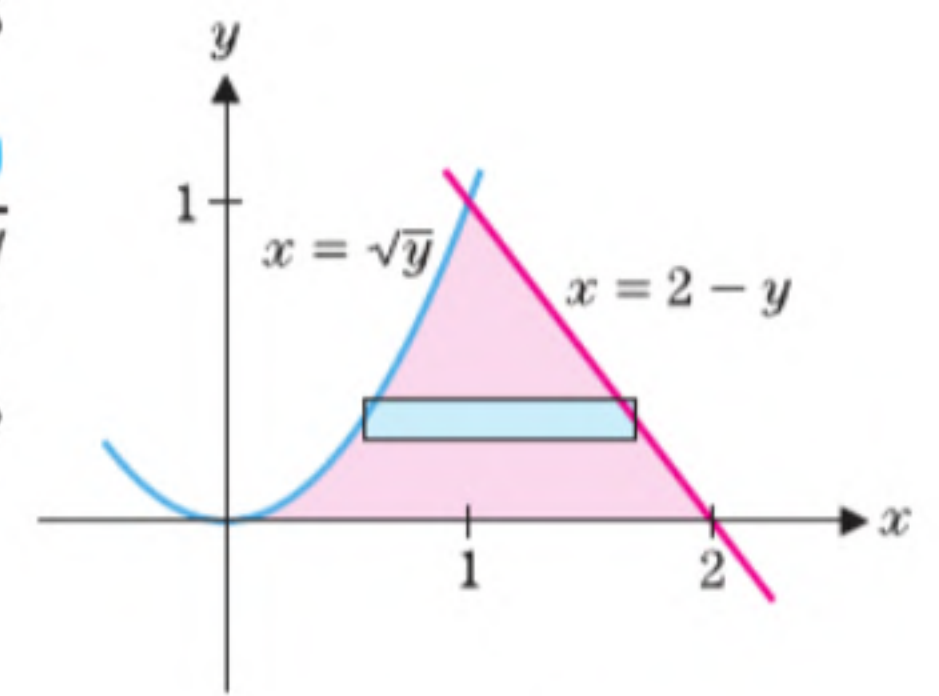
$$y = (2 - y)^2 = 4 - 4y + y^2$$

$$0 = y^2 - 5y + 4 = (y - 1)(y - 4)$$

أو

لذا، يتقاطع المنحنيان عندما $y = 1$ و $y = 4$. من الشكل 6.9، يتضح أن $y = 1$ هو الحل الذي نحتاجه. (مع ماذا يتقابل الحل $y = 4$ ؟) بحسب (1.2)، تُعطى المساحة من العلاقة

$$A = \int_0^1 [(2 - y) - \sqrt{y}] dy = \left[2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^{3/2} \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$



الشكل 6.9

المساحة بين $y = 2 - x$ و $y = x^2$

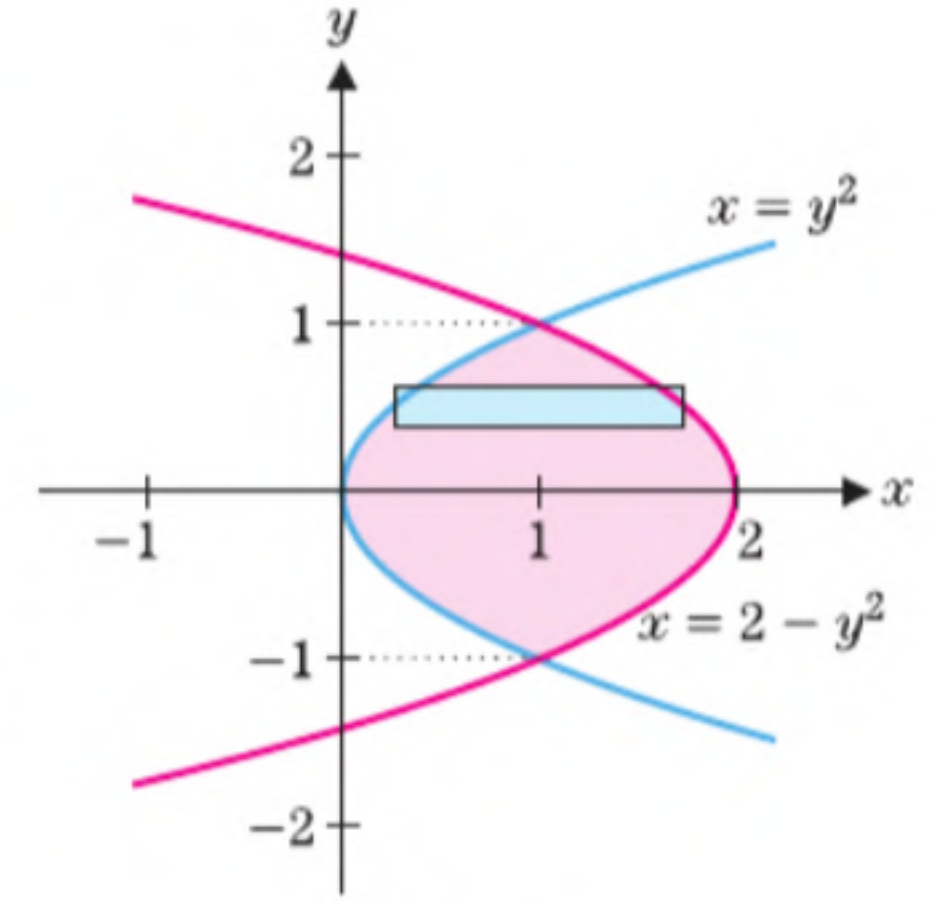
المثال 1.6 مساحة منطقة محدودة بدوال y

جـ - د مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $x = y^2$ و $x = 2 - y^2$.

الحل من الشكل 6.10، لاحظ أنه من الأسهل حساب هذه المساحة بالتكامل بالنسبة إلى y . نظرًا إلى أن التكامل بالنسبة إلى x يتطلب منا تقطيع المنطقة إلى جزأين. ويتقاطع المنحنيين عندما $y^2 = 2 - y^2$ ، أو $y^2 = 1$ ، ومنها $y = \pm 1$. على الفترة $[-1, 1]$ ، لاحظ أن $2 - y^2 \geq y^2$ (نظرًا إلى أن المنحنى $x = 2 - y^2$ يظل على يمين المنحنى $x = y^2$). لذا، من (1.2)، تُعطى المساحة من العلاقة

$$A = \int_{-1}^1 [(2 - y^2) - y^2] dy = \int_{-1}^1 (2 - 2y^2) dy$$

$$= \left[2y - \frac{2}{3}y^3 \right]_{-1}^1 = \left(2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3}$$



الشكل 6.10

$x = 2 - y^2$ و $x = y^2$

عند حدوث اصطدام بين مضرب التنس والكرة، يتغير شكل الكرة، تنكمش أولاً ومن ثم تتمدد. لتكن x تمثل مدى انكماش الكرة، حيث $0 \leq x \leq m$. ولتكن $f(x)$ تمثل القوة التي بذلت على الكرة بواسطة المضرب. إذا تتناسب الطاقة المنقولة مع المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$. على فرض أن $f_c(x)$ هي القوة أثناء انكماش الكرة و $f_e(x)$ هي القوة أثناء تمدد الكرة. يتم نقل الطاقة إلى الكرة أثناء الإنكماش ونقلها بعيدًا عن الكرة أثناء التمدد، بحيث تتناسب الطاقة المفقودة بواسطة الكرة أثناء الاصطدام (بسبب الاحتكاك) مع $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx$. تُعطى نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام عندئذٍ بالعلاقة

$$100 \frac{\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx}{\int_0^m f_c(x) dx}$$



المثال 1.7 تقدير الطاقة المفقودة بواسطة كرة التنس

على فرض أن قياسات الاختبار توفر البيانات التالية أثناء اصطدام كرة التنس بالمضرب. قَدِّر نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام.

x (cm)	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ (N)	0	110	220	400	700
$f_e(x)$ (N)	0	100	200	300	700

الحل يتم رسم البيانات في الشكل 6.11، مرتبطة بقطع مستقيمة.

نحتاج لتقدير المساحة بين المنحنيات والمساحة تحت المنحنى العلوي. بما أنه ليس لدينا صيغة لأي دالة، يجب علينا أن نستخدم طريقة عددية مثل قاعدة سمبسون. لأجل $\int_0^1 f_c(x) dx$ ، نحصل على

$$\int_0^1 f_c(x) dx \approx \frac{0.25}{3} [0 + 4(110) + 2(220) + 4(400) + 700] = 265$$

لاستخدام قاعدة سمبسون لتقريب $\int_0^1 [f_c(x) - f_e(x)] dx$ ، نحتاج إلى جدول لقيم الدالة $f_c(x) - f_e(x)$. يعطينا الطرح

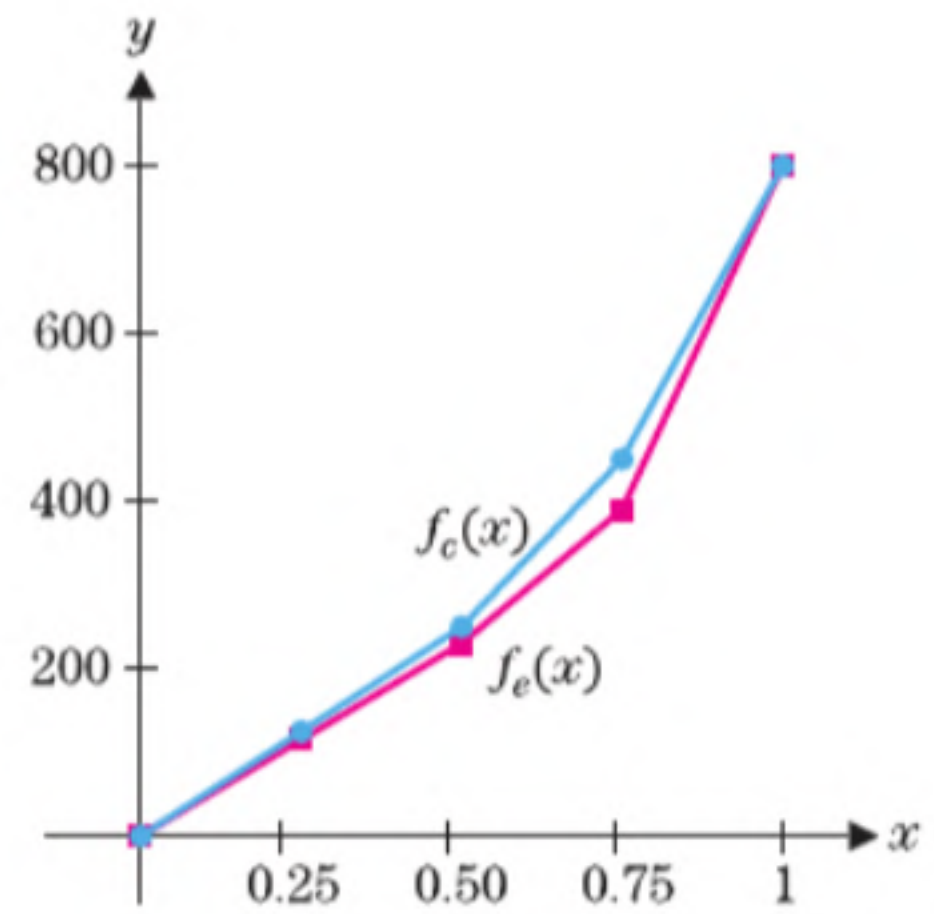
x	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x) - f_e(x)$	0	10	20	100	0

ومنه، تعطينا قاعدة سمبسون

$$\int_0^1 [f_c(x) - f_e(x)] dx \approx \frac{0.25}{3} [0 + 4(10) + 2(20) + 4(100) + 0] = 40$$

تكون نسبة الطاقة المفقودة عندئذٍ $15\% \approx \frac{100 \times 40}{265}$. مع الاحتفاظ بأكثر من 85% من

طاقتها أثناء الاصطدام، فإن هذه كرة تنس ديناميكية.



الشكل 6.11

القوة المبذولة على كرة تنس

ما وراء الصيغ

في المثال 1.5، اطلعنا على التمثيلات البيانية المعطاة كدوال y وإعداد المساحة كتكامل $\int_a^b y dx$. تشير هذه الفكرة إلى الاتجاه الذي يتخذه معظم بقية الدرس. يبقى الاشتقاق والتكامل هما أهم أداتين، ولكننا نقوم بتنوع خياراتنا للعمل بهما، ويكون ذلك في كثير من الأحيان بتغيير المتغيرات. التفكير المرن الذي يعززه ذلك هو أمر أساسي في حساب التفاضل والتكامل، وكذلك في مناطق أخرى من الرياضيات والعلوم. نحن نطور بعض الأساليب العامة وغالبًا ما تكون المهمة الأولى في حل أي من مشكلات التطبيق هي جعل الأسلوب يتناسب مع المسألة المطروحة.

تمارين 6.1

تمارين كتابية

في التمارين 13–18، ارسم وقد ر المساحة التي تحددها تقاطعات المنحنيات.

13. $y = e^x, y = 1 - x^2$
14. $y = x^4, y = 1 - x$
15. $y = \sin x, y = x^2$
16. $y = \cos x, y = x^4$
17. $y = x^4, y = 2 + x$
18. $y = \ln x, y = x^2 - 2$

في التمارين 19–26، ارسم وجد - د مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات المعطاة. اختر متغير التكامل بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد. تحقق من إجاباتك على التمارين 19–21 باستخدام صيغة هندسية أساسية للمساحة.

19. $y = x, y = 2 - x, y = 0$
20. $y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$
21. $x = y, x = -y, x = 1$
22. $x = 3y, x = 2 + y^2$
23. $y = 2x (x > 0), y = 3 - x^2, x = 0$
24. $x = y^2, x = 4$
25. $y = e^x, y = 4e^{-x}, x = 0$
26. $y = \frac{\ln x}{x}, y = \frac{1-x}{x^2+1}, 1 \leq x \leq 4$

27. عند حدوث اصطدام بين كرة وجسم مصمم للضرب (مثل مضرب بيسبول أو مضرب تنس)، يتغير شكل الكرة. تنكمش أولاً ومن ثم تتمدد. إذا كانت x تمثل التغيير في قطر الكرة (على سبيل المثال، بالسنتيمتر) لكل $0 \leq x \leq m$ والقوة بين الكرة والجسم المصمم للضرب (على سبيل المثال، بالنيوتن)، إذا تتناسب المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ مع الطاقة المنقولة. على فرض $f_c(x)$ هي القوة أثناء الإنكماش و $f_e(x)$ هي القوة أثناء التمدد. اشرح سبب تناسب $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx$ مع الطاقة المفقودة من الكرة (بسبب الاحتكاك) وبذلك تكون $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx / \int_0^m f_c(x) dx$ هي نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام. بالنسبة لكرة ومضرب بيسبول، تظهر قيم معقولة (انظر كتاب أدير فيزياء البيسبول):

1. على فرض أن الدالتين f و g تحققان $f(x) \geq g(x) \geq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a, b]$. اشرح بدلالة المساحتين $A_1 = \int_a^b f(x) dx$ و $A_2 = \int_a^b g(x) dx$ سبب إعطاء المساحة بين المنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بالعلاقة $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.
2. على فرض أن الدالتين f و g تحققان $f(x) \leq g(x) \leq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a, b]$. اشرح بدلالة المساحتين $A_1 = \int_a^b f(x) dx$ و $A_2 = \int_a^b g(x) dx$ سبب إعطاء المساحة بين المنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بالعلاقة $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.
3. على فرض أن سرعتي سيارتي سباق A و B هي $v_A(t)$ و $v_B(t)$ mph. على الترتيب. إذا كان $v_A(t) \geq v_B(t)$ لكل t . $v_A(0) = v_B(0)$ والسباق يستمر من $t = 0$ إلى $t = 2$ ساعات. فاشرح سبب فوز السيارة A في السباق بـ $\int_0^2 [v_A(t) - v_B(t)] dt$ ميل.
4. على فرض أن سرعتي سيارتي سباق A و B هي $v_A(t)$ و $v_B(t)$ km/h. على التوالي. إذا كانت $v_A(t) \geq v_B(t)$ لـ $0 \leq t \leq 0.5$ و $1.1 \leq t \leq 1.6$ و $v_B(t) \geq v_A(t)$ لـ $0.5 \leq t \leq 1.1$ و $1.6 \leq t \leq 2$. صف الاختلاف بين $\int_0^2 |v_A(t) - v_B(t)| dt$ و $\int_0^2 [v_A(t) - v_B(t)] dt$. ما هو التكامل الذي سيخبرك بالسيارة التي ستفوز في السباق؟

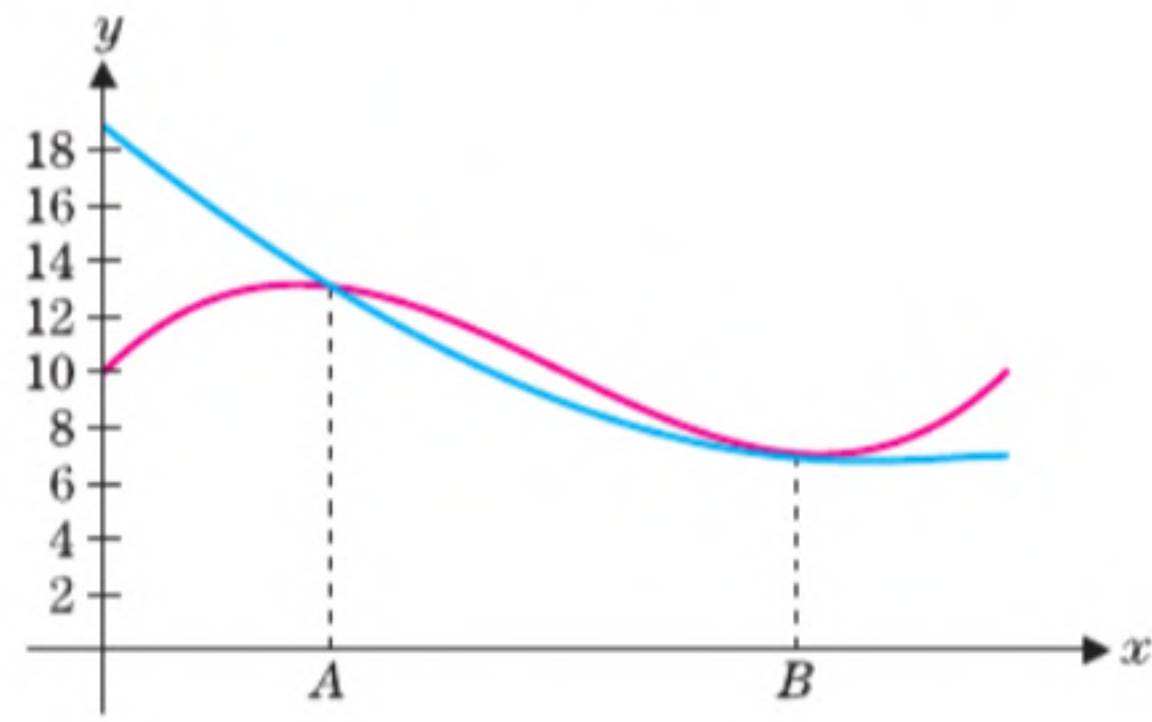
في التمارين 1–4، ج - د المساحة المحصورة بين المنحنيين على الفترة المعطاة.

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \leq x \leq 3$
2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \leq x \leq 2$
3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \leq x \leq 0$
4. $y = e^{-x}, y = x^2, 1 \leq x \leq 4$

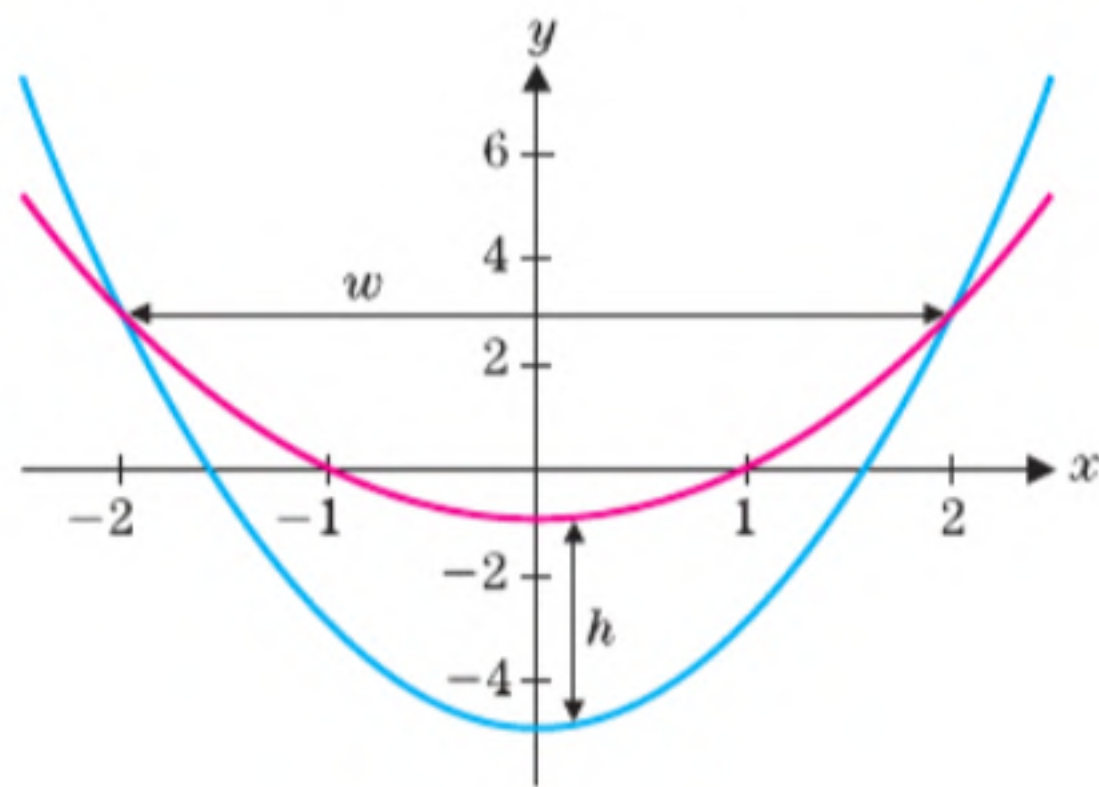
في التمارين 5–12، ارسم وجد - د مساحة المنطقة التي تحددها تقاطعات المنحنيات.

5. $y = x^2 - 1, y = 7 - x^2$
6. $y = x^2 - 1, y = \frac{1}{2}x^2$
7. $y = x^3, y = 3x + 2$
8. $y = \sqrt{x}, y = x^2$
9. $y = 4xe^{-x^2}, y = |x|$
10. $y = \frac{2}{x^2+1}, y = |x|$
11. $y = \frac{5x}{x^2+1}, y = x$
12. $y = \sin x (0 \leq x \leq 2\pi), y = \cos x$

(الشكل). بيّن أنّ المساحة بين المنحنيين تساوي $\frac{|a|}{12}(B-A)^4$.

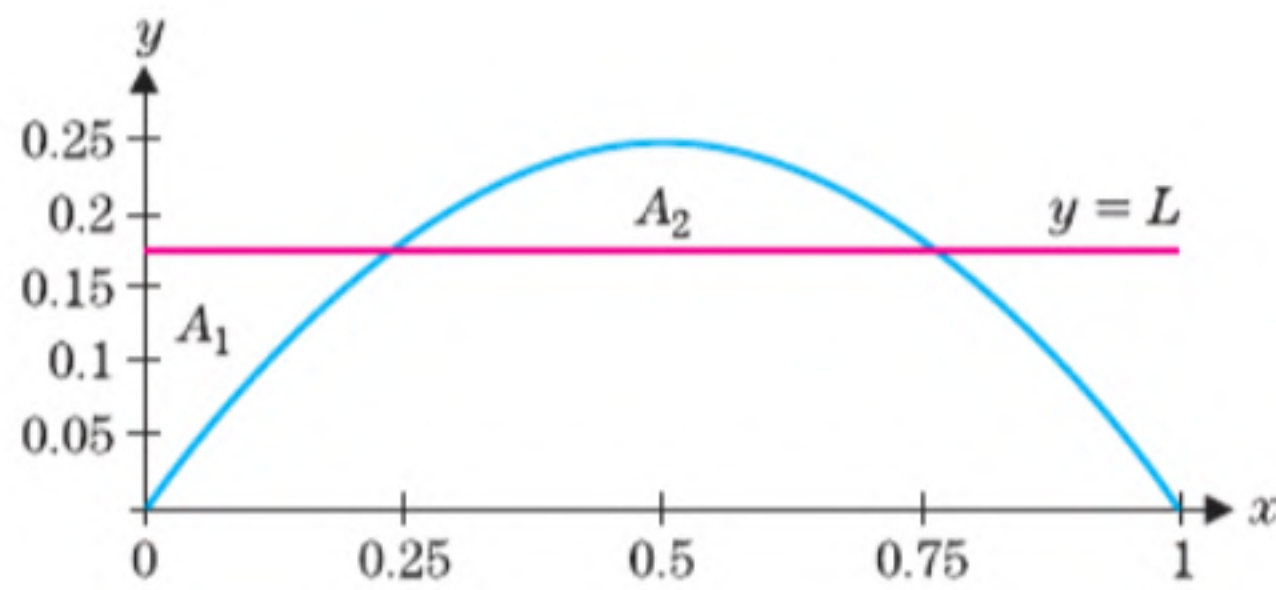


35. لنأخذ قطعين مكافئين، كل منهما رأسه عند النقطة $x = 0$ ولكن بتقعرين مختلفين. ليكن h هي الفرق بين إحداثيات المحور y للرأسين، وليكن w هي الفرق بين إحداثيات المحور x لنقاط التقاطع. أثبت أنّ المساحة بين المنحنيين هي $\frac{2}{3}hw$.

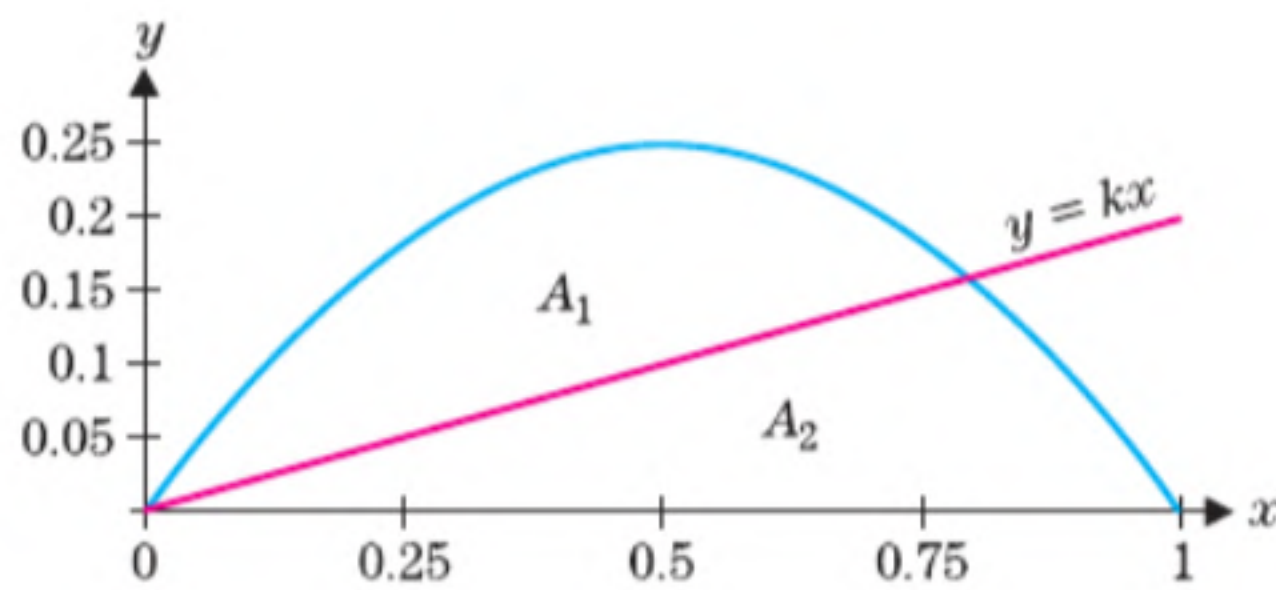


36. أثبت أنّه لأي عدد ثابت m ، تكون المساحة بين $y = 2 - x^2$ و $y = mx$ هي $\frac{1}{6}(m^2 + 8)^{3/2}$. جـ - د القيمة الصغرى لهذه المساحة.

37. لأجل $y = x - x^2$ كما هو مبين، جـ - د قيمة L بحيث تكون $A_1 = A_2$.



38. لأجل $y = x - x^2$ و $y = kx$ كما هو مبين، جـ - د k بحيث تكون $A_1 = A_2$.



x (cm)	0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ (N)	0	1100	2600	5200	7700
$f_e(x)$ (N)	0	44	440	1200	7700

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة البيسبول.

28. باستخدام المفهوم نفسه كما في التمرين 27، تُعطى القيم للقوة $f_c(x)$ أثناء إنكماش كرة الجولف والقوة $f_e(x)$ أثناء تمّدها من العلاقة

x (cm)	0	1.125	2.250	3.375	4.5
$f_c(x)$ (N)	0	880	2200	4400	7900
$f_e(x)$ (N)	0	550	1540	3000	7900

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة الجولف.

29. على غرار إنكماش وتمّدد الكرة الذي نوقش في التمرينين 27 و 28، تحدّد القوة التي بذلت من قبل وتر كدالة على امتداده فقدان الطاقة (انظر مقدمة الوحدة). على فرض أنّ x هي امتداد الوتر و $f_s(x)$ هي القوة أثناء تمّدد الوتر و $f_r(x)$ هي القوة أثناء ارتداد الوتر. البيانات المعطاة هي لوتر الساق الخلفية لحيوان الوب (انظر كتاب ألكسندر Exploring Biomechanics).

x (mm)	0	0.75	1.5	2.25	3.0
$f_s(x)$ (N)	0	110	250	450	700
$f_r(x)$ (N)	0	100	230	410	700

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي يعيدها الوتر.

30. يعمل قوس القدم البشري مثل النابض أثناء المشي والقفز، فيخزن الطاقة بينما يمتد القدم (أي يصبح القوس مسطحاً) ويعيد الطاقة بينما يرتد القدم. في البيانات، x هي الإزاحة العمودية للقوس و $f_s(x)$ هي القوة على القدم أثناء التمدّد و $f_r(x)$ هي القوة أثناء الارتداد (انظر كتاب ألكسندر Exploring Biomechanics).

x (mm)	0	2.0	4.0	6.0	8.0
$f_s(x)$ (N)	0	300	1000	1800	3500
$f_r(x)$ (N)	0	150	700	1300	3500

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي يعيدها القوس.

31. القيمة المتوسطة لدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ هي

$$A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

على $[0, 3]$ وبيّن أنّ المساحة فوق $y = A$ وتحت $y = f(x)$ تساوي المساحة تحت $y = A$ وفوق $y = f(x)$.

32. جـ - د قيمة t بحيث تكون المساحة بين $y = \frac{2}{x+1}$ و $y = \frac{2x}{x^2+1}$ تساوي $\ln(3/2)$ لكل $0 \leq x \leq t$.

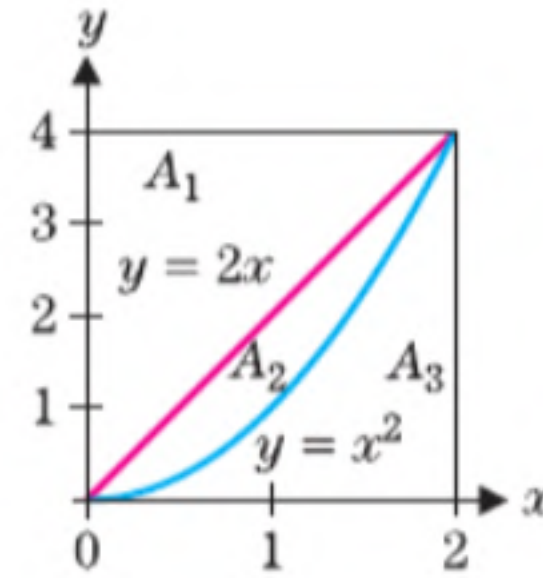
33. على فرض أنّ القطع المكافئ $y = ax^2 + bx + c$ والمستقيم $y = mx + n$ يتقاطعان عند $x = A$ و $x = B$ مع $A < B$. بيّن أنّ

المساحة بين المنحنيين تساوي $\frac{|a|}{6}(B-A)^3$. (إرشاد: استخدم A و B لإعادة كتابة المكامل ومن ثمّ التكامل.)

34. على فرض أنّ الدالة التكعيبية $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ والقطع المكافئ $y = kx^2 + mx + n$ يتقاطعان عند $x = A$ و $x = B$ مع كون B متكررة (يعني ذلك أنّ المنحنيات متماسة عند B ؛ انظر

39. بدلالة A_1 , A_2 و A_3 , حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.

(a) $\int_0^2 (2x - x^2) dx$ (b) $\int_0^2 (4 - x^2) dx$
(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy$ (d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2}) dy$



40. أعط تكاملاً مساوياً لكل مساحة.

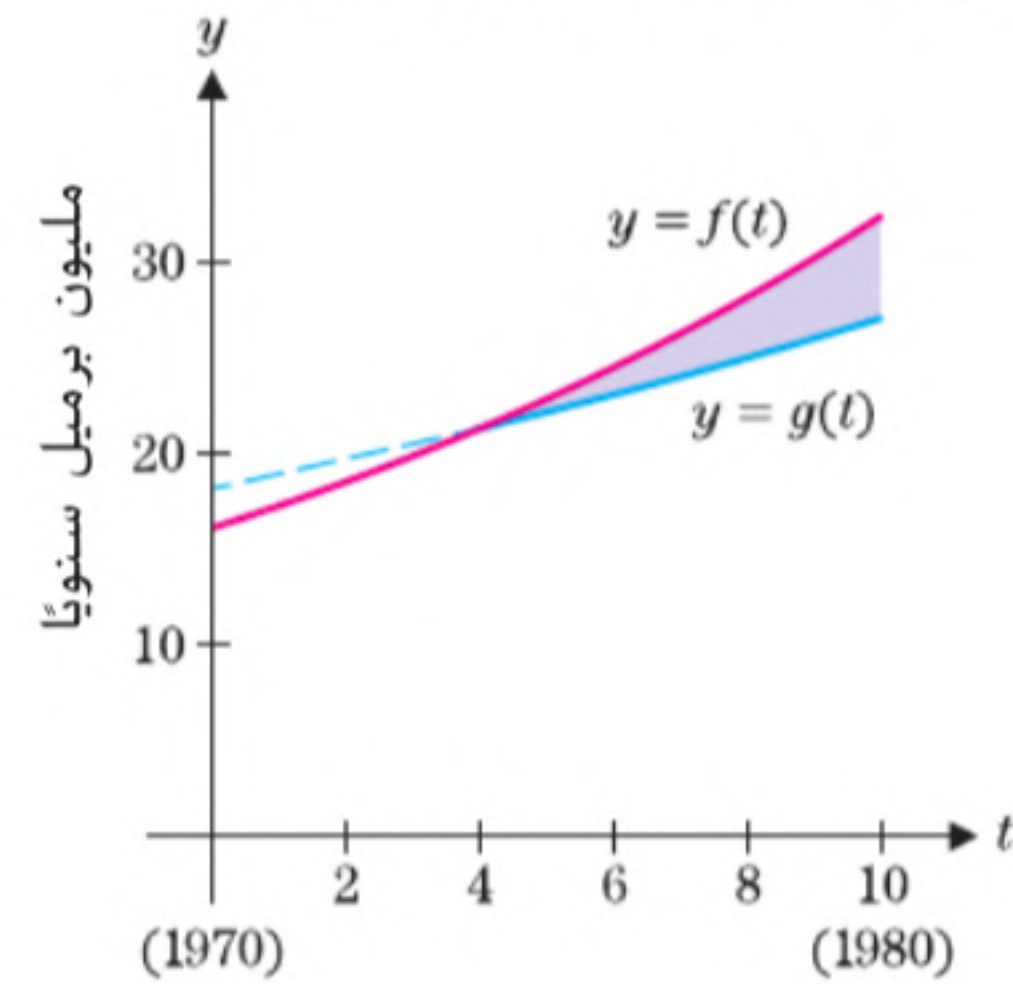
(a) $A_2 + A_3$ (b) $A_1 + A_2$ (c) A_1 (d) A_3

41. لتكن $f(t)$ المساحة بين $y = \sin^2 x$ و $y = 1$ لكل $0 \leq x \leq t$. جـ - د كل النقاط الحرجة والقيم القصوى المحلية ونقاط الانعطاف للدالة $f(t)$ لكل $t \geq 0$.

42. لتكن g دالة متصلة معرّفة لكل $x \geq 0$ مع $|g(x)| \leq 1$ لكل $x \geq 0$. لتكن $f(t)$ المساحة بين $y = 1$ و $y = g(x)$ لكل $0 \leq x \leq t$. إذا كانت g لها قيمة عظمى محلية عند $x = a$ ، فهل يوجد لـ f نقطة حرجة عند a ؟ نقطة انعطاف عند a ؟ ماذا إذا كان يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = a$ ؟

التطبيقات

43. كان استهلاك الولايات المتحدة من النفط على مدى الأعوام 1970–1974 يساوي تقريباً $f(t) = 16.1e^{0.07t}$ مليون برميل سنوياً، حيث يوافق $t = 0$ عام 1970. ولكن بعد حدوث نقص في النفط عام 1974، تغيّر استهلاك البلاد وكان ممثلاً بشكل أفضل من خلال $g(t) = 21.3e^{0.04(t-4)}$ مليون برميل سنوياً، لأجل $t \geq 4$. بيّن أنّ $f(4) \approx g(4)$ و اشرح ما يمثله هذا العدد. احسب المساحة بين $f(t)$ و $g(t)$ لكل $4 \leq t \leq 10$. استخدم هذا العدد لتقدير عدد براميل النفط التي تم توفيرها بسبب الاستهلاك المخفض للشعب الأمريكي من عام 1974 وحتى 1980.



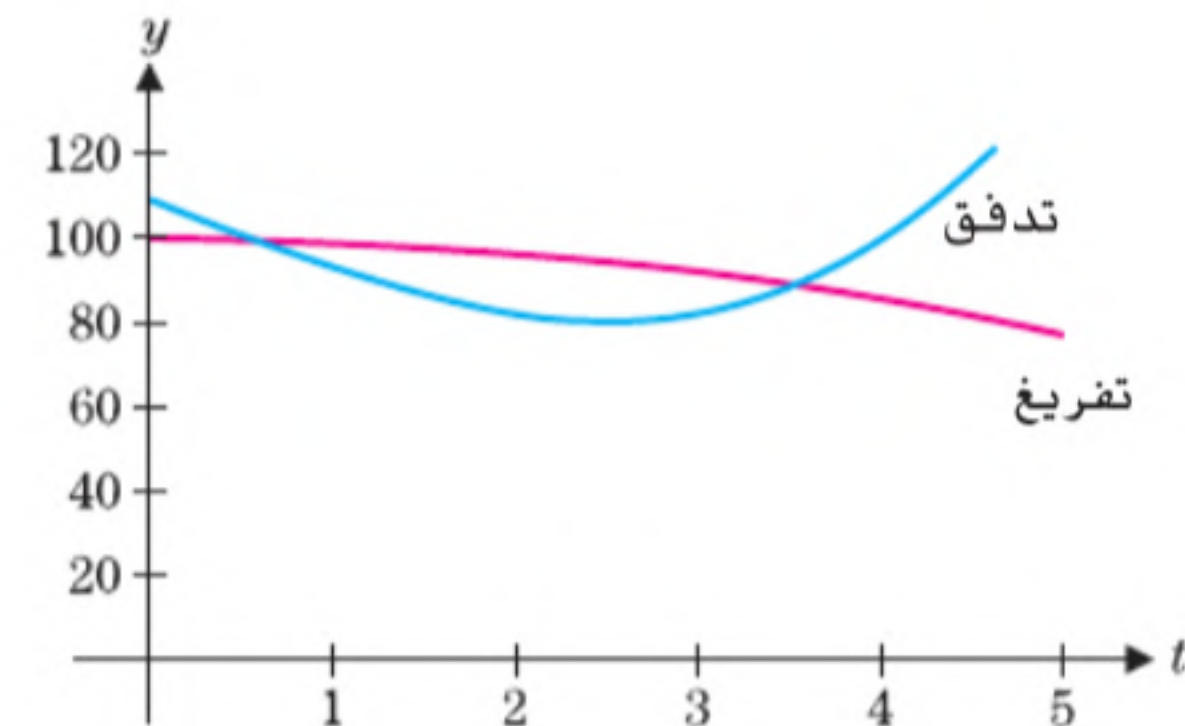
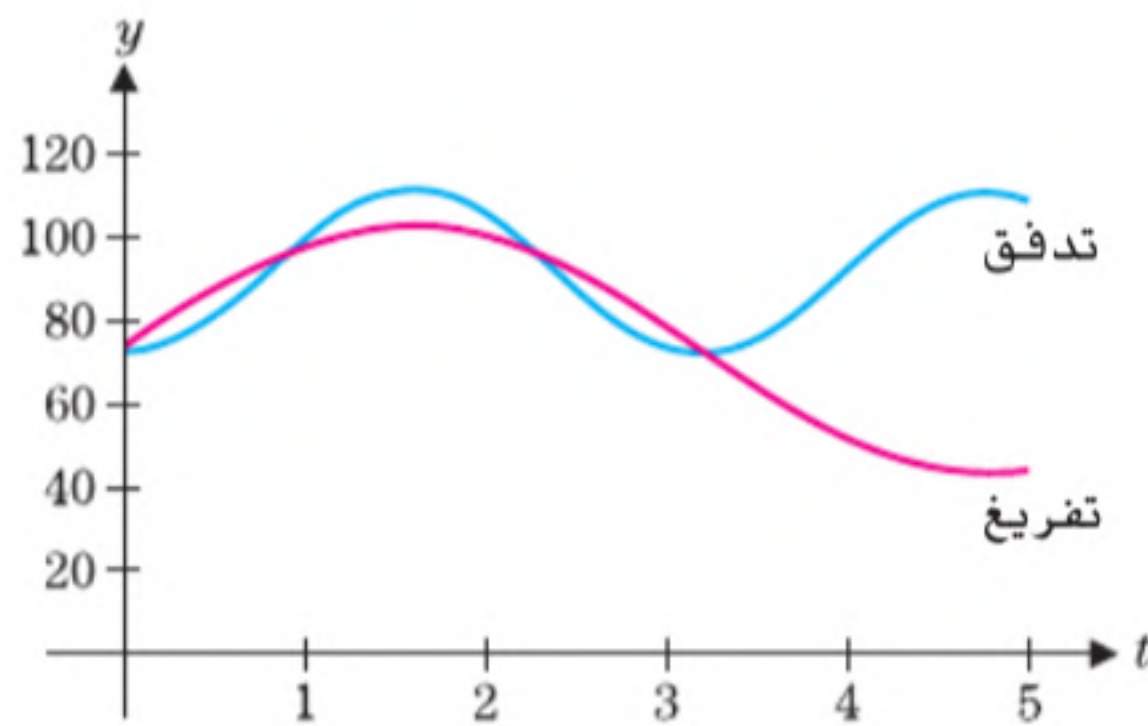
44. على فرض أنّ استهلاك أخشاب الوقود لدولة ما يُعطى بالصيغة $76e^{0.03t} \text{ m}^3/\text{yr}$ ومعدل نمو الأشجار الجديدة هو $6e^{0.09t} \text{ m}^3/\text{yr}$. احسب وفّر المساحة المحصورة بين المنحنيين حيث $0 \leq t \leq 10$.

45. على فرض أنّ معدل المواليد لتعداد سكاني معيّن هو $b(t) = 2e^{0.04t}$ مليون نسمة سنوياً ومعدل الوفيات للتعداد السكاني نفسه هو

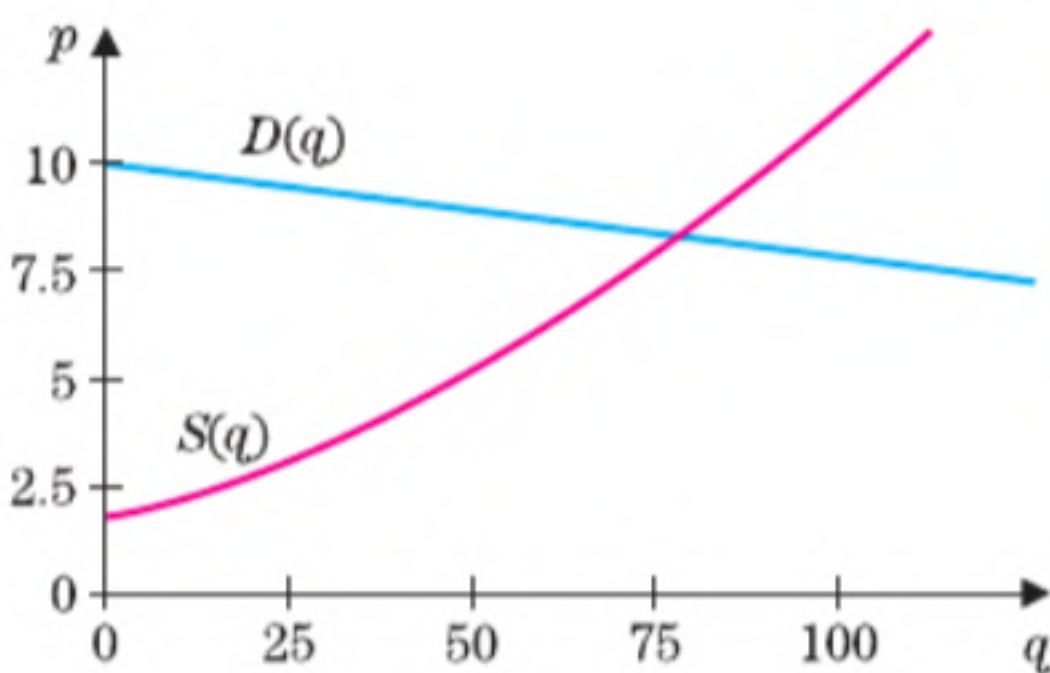
$d(t) = 2e^{0.02t}$ مليون شخص سنوياً. بيّن أنّ $b(t) \geq d(t)$ لكل $t \geq 0$ و اشرح سبب تمثيل المساحة بين المنحنيين الزيادة في التعداد السكاني. احسب الزيادة في التعداد السكاني لكل $0 \leq t \leq 10$.

46. على فرض أنّ معدل المواليد لتعداد سكاني هو $b(t) = 2e^{0.04t}$ مليون نسمة سنوياً ومعدل الوفيات للتعداد السكاني نفسه هو $d(t) = 3e^{0.02t}$ مليون شخص سنوياً. جـ - د التقاطع T للمنحنيين ($T > 0$). فسّر المساحة بين المنحنيين لكل $0 \leq t \leq T$ والمساحة بين المنحنيين لكل $T \leq t \leq 30$. احسب صافي التغيّر في التعداد السكاني لكل $0 \leq t \leq 30$.

في التمرينين 47 و 48، يُظهر التمثيل البياني معدل تدفق وتفرغ الماء بالترتيب الساعة إلى الخزان ومنه. بافتراض أنّ الخزان يبدأ بسعة 400 L، قدّر كمية الماء الموجودة في الخزان عند الساعات 1، 2، 3، 4 و 5 وارسم تمثيلاً بيانياً لكمية الماء داخل الخزان.

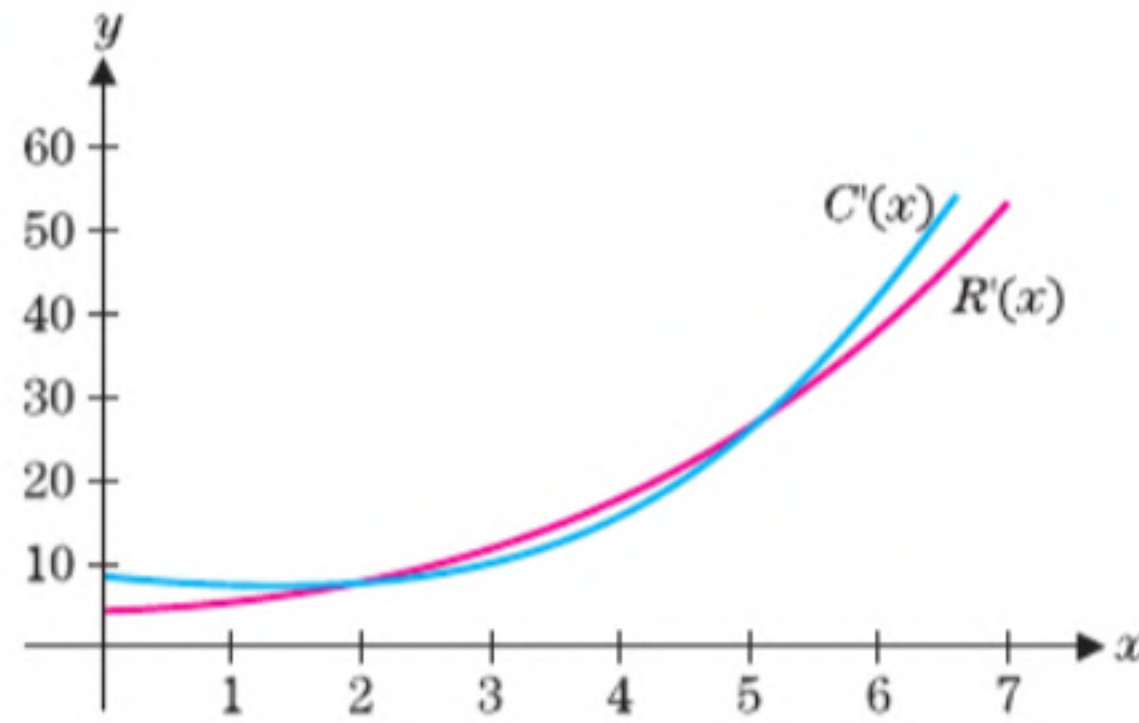


49. يُظهر التمثيل البياني منحنى العرض ومنحنى الطلب لأحد المنتجات. تعطي نقطة التقاطع (q^*, p^*) كمية التوازن وسعر التوازن للمنتج. يتم تعريف **فائض المستهلك** بأنّه $CS = \int_0^{q^*} D(q) dq - p^* q^*$. ظلل مساحة التمثيل البياني التي تمثّل فائض المستهلك، واحسب ذلك في حال كانت $D(q) = 10 - \frac{1}{40}q$ و $S(q) = 2 + \frac{1}{120}q + \frac{1}{1200}q^2$.



50. كرّر التمرين 49 لفائض المنتج المعرّف بواسطة $PS = p^* q^* - \int_0^{q^*} S(q) dq$.

51. لتكن $C'(x)$ هي التكلفة الحدية لإنتاج x ألف نسخة من منتج ما وأن $R'(x)$ هي الإيرادات الحدية من بيع هذا المنتج. مع التمثيلات البيانية كما هو مبين. افترض أن $R'(x) = C'(x)$ عند $x = 2$ و $x = 5$. فسر المساحة بين المنحنيين لكل فترة: (a) $0 \leq x \leq 2$ ، (b) $2 \leq x \leq 5$ ، (c) $0 \leq x \leq 5$ و (d) $5 \leq x \leq 6$.



52. أحد المبادئ الأساسية للاقتصاد هو أن الأرباح تحقق القيمة العظمى عند مساواة التكلفة الحدية مع الإيرادات الحدية. عند أي تقاطع يحقق الربح القيمة العظمى في التمرين 51؟ اشرح إجابتك. من حيث الربح، ما الذي تمثله نقطة التقاطع الأخرى؟

تمارين استكشافية

1. جـ - د المساحة بين $y = x^2$ و $y = mx$ لأي ثابت $m > 0$. بدون إجراء المزيد من العمليات الحسابية، استخدم هذه المساحة لإيجاد المساحة بين $y = \sqrt{x}$ و $y = mx$.
2. لكل $x > 0$ ، لتكن $f(x)$ المساحة بين $y = 1$ و $y = \sin^2 t$ لكل $0 \leq t \leq x$. بدون حساب $f(x)$ ، جـ - د أكبر قدر ممكن من العلاقات بين الخصائص البيانية (الأصفار، القيم القصوى، نقاط الانعطاف) لـ $y = f(x)$ والخصائص البيانية لـ $y = \sin^2 x$.

الحجم: شرائح وأقراص وحلقات

كما سنرى في هذه الوحدة، فإنّ التكامل هو أداة متعددة الاستخدامات بشكلٍ مدهش. في هذا الدرس، نستخدم التكاملات لحساب حجم مجسم ثلاثي الأبعاد. ونبدأ بمسألة بسيطة.

عند تصميم أحد المباني، يجب على المهندسين المعماريين إجراء العديد من الحسابات المفصلة. على سبيل المثال، من أجل تحليل أنظمة التدفئة والتبريد في المباني، يجب على المهندسين حساب حجم الهواء الذي تتم معالجته.

لا يوجد غالباً سوى بضعة مجسمات تعرف كيفية حساب أحجامها. على سبيل المثال، البناء المبين في الشكل 6.12a هو أساساً صندوق متوازي المستطيلات، ويُعطى حجمه بالقاعدة lwh ، حيث l هو الطول و w هو العرض و h هو الارتفاع. إنّ الأسطوانة الدائرية القائمة التي يمكن رؤيتها في المباني في الشكل 6.12b لها حجم يُعطى بالقاعدة $\pi r^2 h$ ، حيث h هو الارتفاع و r هو نصف قطر المقطع العرضي الدائري. لاحظ في كل حالة أنّ المبنى يحتوي على مقطع عرضي مألوف (مستطيل في الشكل 6.12a ودائرة في الشكل 6.12b) يمتد عمودياً.



الشكل 6.12b



الشكل 6.12a

الملاحظات التاريخية



أرخميدس
(حوالي 212-287 ق.م.)

هو خبير في الرياضيات وعالم يوناني كان من بين أول من اشتقوا الصيغ للأحجام والمساحات. اشتهر أرخميدس باكتشافه القوانين الأساسية للروافع وإستاتيكا الموائع (حيث يقال إنه قفز من حوض الاستحمام، وهو يهتف "أوريكا!") وركض إلى الشوارع لمشاركة اكتشافه). كذلك، هو مهندس عبقري، ساهمت اختراعاته بدايةً من المنجنيق ورافعات التصدي والمرايا العاكسة في بث الرعب في قلب الجيش الروماني الضخم الذي غزا في نهاية المطاف مسقط رأسه في سيراكيوز. كان أرخميدس فخوراً بصفة خاصة ببرهانه أن حجم كرة مرسومة داخل أسطوانة هو $2/3$ من حجم الأسطوانة (انظر التمارين 34-81). وطلب أن يُنقش هذا الأمر على شاهد قبره. وقد كان العديد من أساليبه مشابهة إلى حد كبير لتلك التي نستخدمها في حساب التفاضل والتكامل اليوم، ولكن فقد العديد من كتاباته في العصور الوسطى. دُرِوى القصة المذهلة للاكتشاف الأخير لكتابه *The Method* في *The Archimedes Codex* بقلم نيتز ونويل.

نحن نطلق على أي من هذه المجسّمات اسم **أسطوانة** (أي مجسّمات لها مقاطع عرضية عمودية على جزء من المحور المار بالمجسّم تكون جميعها متماثلة). ثمة علاقة بين قانونيّ الحجم لهذين الأسطوانتين. حجم أسطوانة دائرية قائمة هو

$$V = \underbrace{(\pi r^2)}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \times \underbrace{h}_{\text{ارتفاع}}$$

بينما حجم الصندوق هو

$$V = \underbrace{(\text{العرض} \times \text{الطول})}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \times \text{الارتفاع}$$

بشكل عام، يمكن إيجاد حجم أي أسطوانة من الصيغة

$$V = (\text{الارتفاع}) \times (\text{مساحة مقطع عرضي})$$

الأحجام بالتقطيع

حتى المجسّمات السهلة نسبياً، مثل الأهرامات والقباب، ليس لها مساحة مقطع عرضي ثابت، حسبما هو مبين في الشكلين 6.13a و 6.13b. لإيجاد الحجم في مثل هذه الحالة، نتبع النهج الذي استخدمناه عدداً من المرات حتى الآن: أولاً نقوم بتقريب الحجم ومن ثم نحسن التقريب.



الشكل 6.13b

مبنى الكابيتول الأمريكي



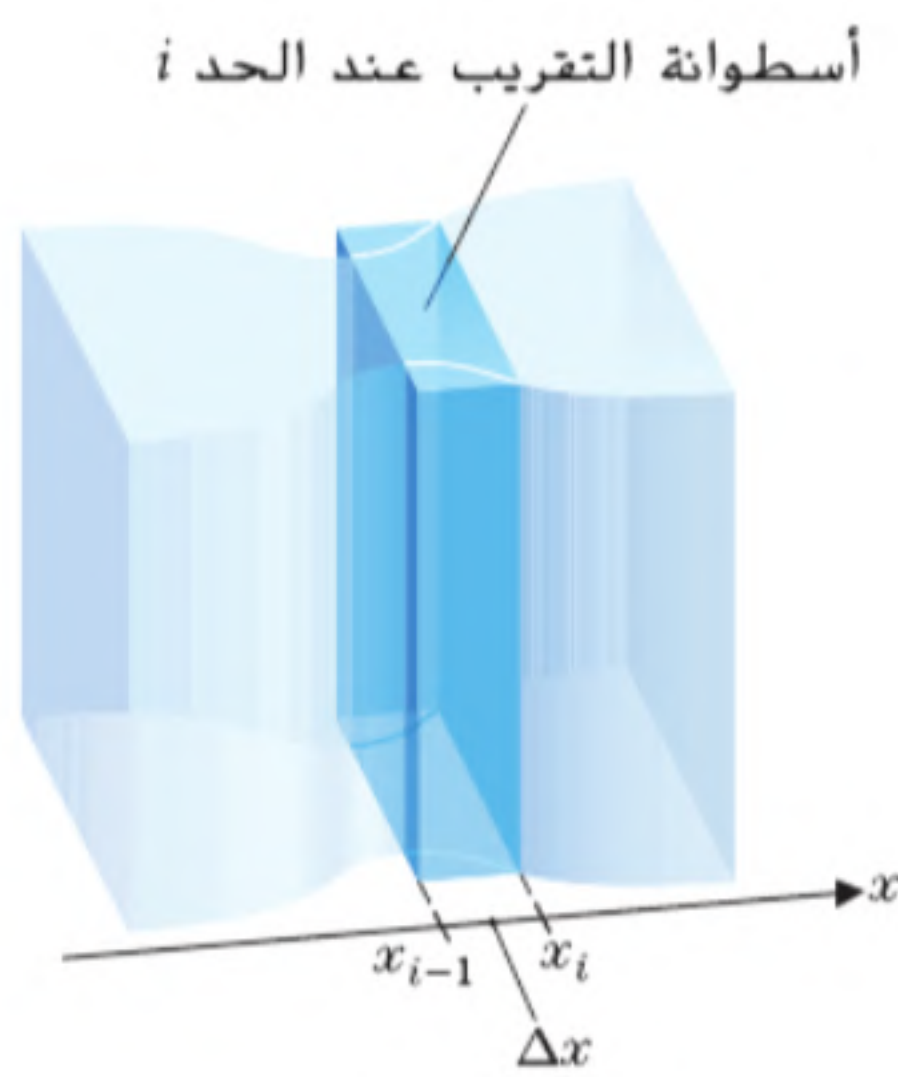
الشكل 6.13a

مدخل هرم متحف اللوفر بباريس

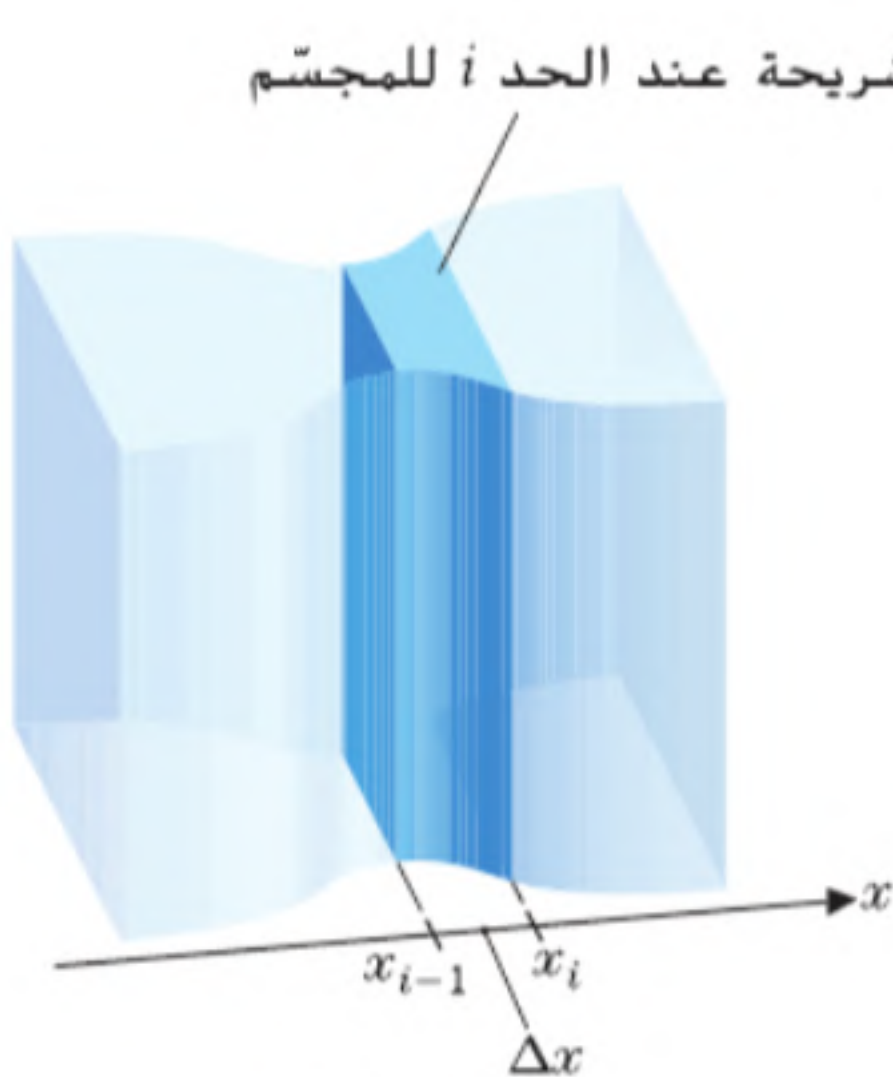
وعموماً للمجسّمات التي تمتد من $x = a$ إلى $x = b$ ، نبدأ بتجزئة الفترة $[a, b]$ على المحور x إلى n فترات جزئية، يكون عرض كل منها $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. وكالمعتاد، نرمز إلى $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x$ وهكذا، بحيث تكون

$$x_i = a + i\Delta x, \text{ لكل } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

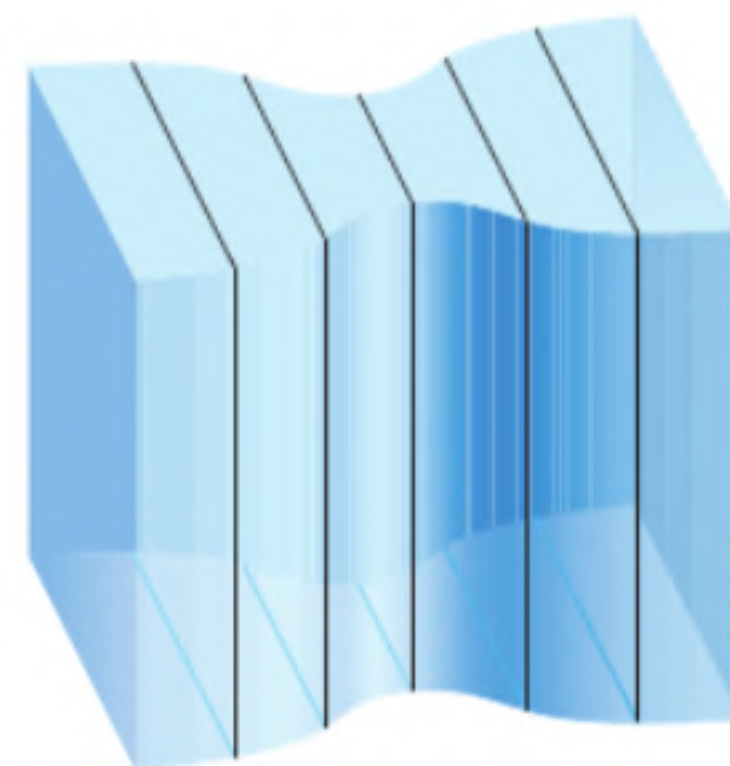
بعد ذلك نجزيء المجسّم إلى شرائح عمودية على المحور x عند كل $(n-1)$ من نقاط $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (انظر الشكل 6.14a في الصفحة التالية). لاحظ أنه إذا كانت n كبيرة، فستكون كل شريحة من المجسّم رقيقة، مع مساحة مقطع عرضي ثابتة تقريباً. على فرض أن مساحة المقطع العرضي المظلل لأي قيمة محدّدة لـ x تُعطى بالرمز $A(x)$. لاحظ أن الشريحة الواقعة بين $x = x_{i-1}$ و $x = x_i$ هي أسطوانة تقريباً. (انظر الشكل 6.14b). لذا، فلأي نقطة c_i في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ ، تكون جميع مساحات المقاطع العرضية على تلك الفترة $A(c_i)$ تقريباً.



الشكل 6.14c
أسطوانة التقريب عند الحد i



الشكل 6.14b
الشريحة عند الحد i للمجسم



الشكل 6.14a
قطعة مجسم

يكون الحجم V_i للشريحة عند الحد i هو تقريبًا حجم الأسطوانة الواقعة بطول الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ مع مساحة مقطع عرضي ثابتة $A(c_i)$ (انظر الشكل 6.14c). بحيث يكون

$$V_i \approx \underbrace{A(c_i)}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \underbrace{\Delta x}_{\text{العرض}}$$

بتكرار هذه العملية لكل من n شرائح، نجد أن الحجم الكلي V للمجسم هو تقريبًا

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(c_i) \Delta x$$

لاحظ أنه كلما زادت الشرائح، ينبغي أن يتحسن تقريب الحجم ونحصل على الحجم الدقيق بحساب النهاية

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(c_i) \Delta x$$

بافتراض وجود النهاية. يجب عليك التعرف على هذه النهاية على أنها تكامل محدود

(2.1)

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

حجم مجسم له
مساحة مقطع عرضي $A(x)$

ملحوظة 2.1

نستخدم الطريقة نفسها المتبعة هنا لنشتق العديد من القوانين المهمة. في كل حالة، نجزي مجسم إلى n أجزاء أصغر ثم نقرّب الكمية المطلوبة لكل جزء من الأجزاء الصغيرة ونجمع القيم التقريبية ومن ثم نأخذ النهاية، حيث نتعرّف في نهاية المطاف أننا قمنا بإيجاد تكامل محدود. لهذا السبب من الضروري أن تستوعب المفهوم وراء الصيغة (2.1). ولن يساعدك الحفاظ في هذه الحالة. إلا أنه إذا كنت تفهم كيفية تلاؤم الأجزاء المختلفة من هذا اللغز مع بعضها البعض، فسيسهل عليك استيعاب بقية هذه الوحدة بشكل جيد.

مثال 2.1 حساب الحجم من مساحات المقاطع العرضية

للهرم في ممفيس قاعدة مربعة يبلغ طول ضلعها 180 m وارتفاعها 100 m تقريبًا. جد حجم الهرم باستخدام هذه القياسات.

Nadea and غادة

غادة أحمد حشاكيه: السلام عليكم

مساحة

المربع عند كل ارتفاع. لتكن x تمثل الارتفاع عن الأرض. عند $x = 0$ يكون المقطع العرضي هو مربع طول ضلعه 180 m. عند $x = 100$ يمكن النظر إلى المقطع العرضي على أنه مربع طول ضلعه 0 m. إذا كان $f(x)$ يمثل طول ضلع المقطع العرضي المربع عند ارتفاع x ، فإننا نعلم أن $f(0) = 180$ ، $f(100) = 0$ و $f(x)$ يجب أن تكون دالة خطية. (فكر في الآتي: جوانب الهرم لا تنحني). ميل المستقيم هو $m = \frac{180 - 0}{0 - 100} = -\frac{9}{5}$ ونحن نستخدم التقاطع y قدره 180 للحصول على

$$f(x) = -\frac{9}{5}x + 180$$

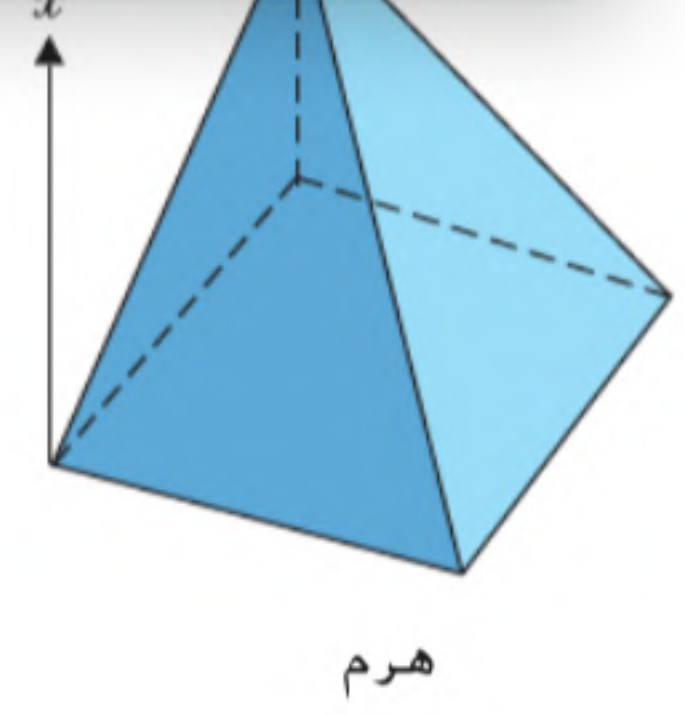
إن مساحة المقطع العرضي هي ببساطة مربع $f(x)$ ، لذا فمن (2.1)، نحصل على

$$V = \int_0^{100} A(x) dx = \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx$$

لاحظ أنه يمكننا إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام التعويض. بأخذ $u = -\frac{9}{5}x + 180$ ، فيكون $du = -\frac{9}{5} dx$ هذا يعطينا:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx = -\frac{5}{9} \int_{180}^0 u^2 du \\ &= \frac{5}{9} \int_0^{180} u^2 du = \frac{5}{9} \frac{u^3}{3} \Big|_0^{180} = 1,080,000 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

في العديد من التطبيقات الهامة، تكون مساحة المقطع العرضي غير معروفة على وجه التحديد، ولكن يجب تقريبها باستخدام القياسات. في مثل هذه الحالات، يمكننا تقريب الحجم باستخدام التكامل العددي.



هرم

مثال 2.2 تقدير الحجم من بيانات المقطع العرضي

في التصوير الطبي، مثل التصوير المقطعي بالحاسوب (CT) والتصوير بالرنين المغناطيسي (MRI)، يؤخذ العديد من القياسات ويتم معالجتها بواسطة حاسوب لإنشاء صورة ثلاثية الأبعاد للأنسجة التي يرغب الطبيب في دراستها. تشبه هذه العملية عملية التجزئة إلى شرائح التي استخدمناها لإيجاد حجم مجسم. ولكن، في هذه الحالة، يتم دمج التمثيلات في الرياضيات للشرائح المختلفة من الأنسجة لإنتاج صورة ثلاثية الأبعاد يقوم الأطباء باستعراضها لتحديد مدى صحة الأنسجة. على فرض أن التصوير بالرنين المغناطيسي أظهر أن مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم ما مغطاة بالقيم المذكورة في الجدول.

x (cm)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm ²)	0.0	0.1	0.4	0.3	0.6	0.9	1.2	0.8	0.6	0.2	0.1

قدر حجم الورم.

الحل لإيجاد حجم الورم، سنقوم بالحساب [باتباع (2.1)]

$$V = \int_0^1 A(x) dx$$

إلا أننا لا نعرف سوى $A(x)$ عند عدد محدود من النقاط. وعلى الرغم من أننا لا نستطيع حساب هذا بشكل دقيق، يمكننا استخدام قاعدة سمبسون مع $\Delta x = 0.1$ لتقدير قيمة هذا التكامل:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) dx \\ &\approx \frac{b-a}{3n} \left[A(0) + 4A(0.1) + 2A(0.2) + 4A(0.3) + 2A(0.4) + 4A(0.5) \right. \\ &\quad \left. + 2A(0.6) + 4A(0.7) + 2A(0.8) + 4A(0.9) + A(1) \right] \\ &= \frac{0.1}{3} (0 + 0.4 + 0.8 + 1.2 + 1.2 + 3.6 + 2.4 + 3.2 + 1.2 + 0.8 + 0.1) \\ &\approx 0.49667 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

ننتقل الآن إلى مسألة إيجاد حجم القبة في الشكل 6.13b. بما أن المقاطع العرضية الأفقية هي دوائر، فلن نحتاج سوى لتحديد نصف قطر كل دائرة.

مثال 2.3 حساب حجم قبة

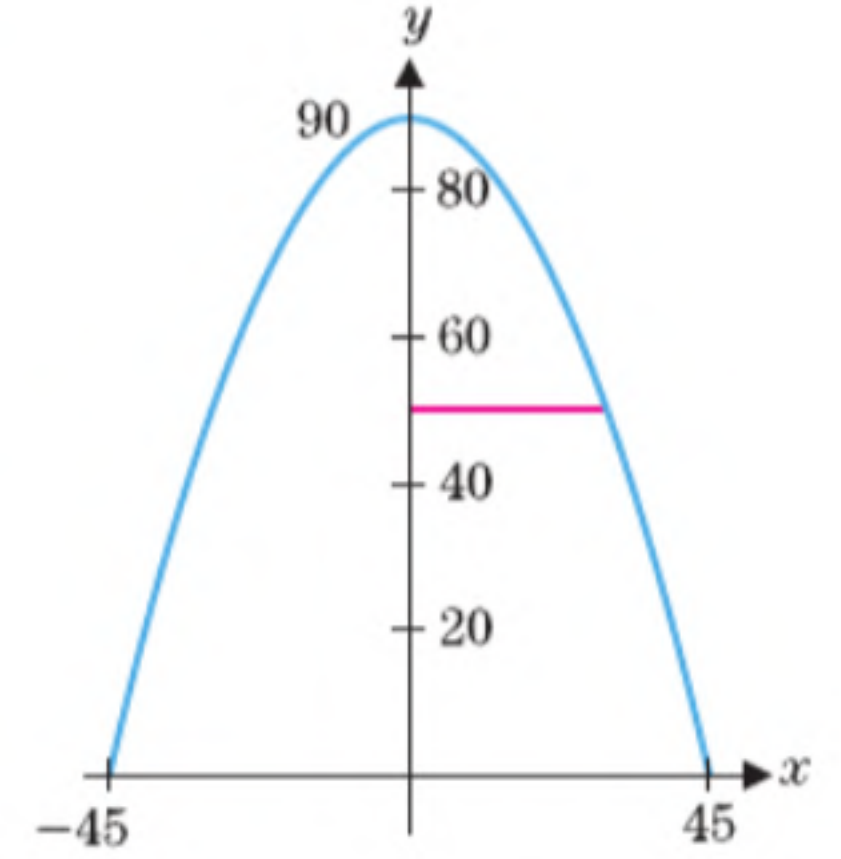
على فرض أن للقبة مقاطع عرضية دائرية، لها رسم تخطيطي يُعطى بالعلاقة $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$. لكل $-45 \leq x \leq 45$. (بالسنتيمترات، يعطي هذا الأمر أبعادًا مشابهة لقبة المبنى في الشكل 6.13b). يوضح الشكل 6.15 تمثيلًا بيانيًا. ج - د حجم القبة.

الحل حسبما هو مبين في الشكل 6.15 تحدث المقاطع العرضية الدائرية عند كل قيمة لـ y . مع $0 \leq y \leq 90$. لقيمة y مُعطاة، يمتد نصف القطر من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)}$. يُعطى نصف القطر لهذه القيمة لـ y بالعلاقة $r(y) = \sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)}$. بحيث تُعطى مساحات المقاطع العرضية بالعلاقة

$$A(y) = \pi \left(\sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)} \right)^2$$

لكل $0 \leq y \leq 90$. يُعطى الحجم عندئذٍ بالعلاقة

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{90} A(y) dy = \int_0^{90} \pi \left(\sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)} \right)^2 dy = \int_0^{90} \pi \left(2025 - \frac{45}{2}y \right) dy \\ &= \pi \left[2025y - \frac{45}{4}y^2 \right]_0^{90} = 91,125\pi \approx 286,278 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



الشكل 6.15

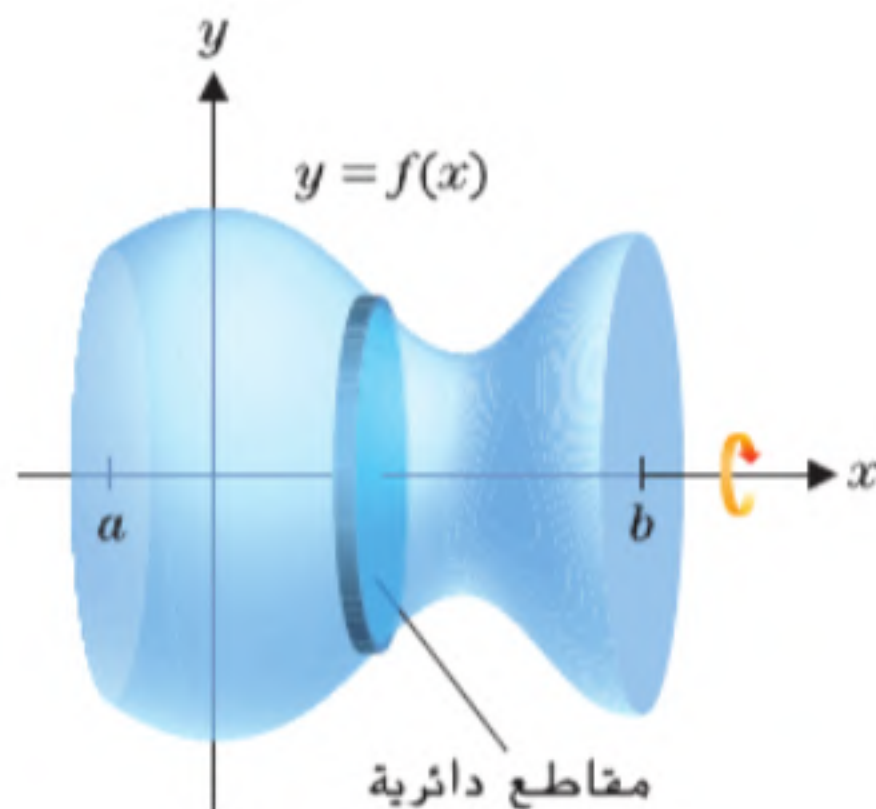
$$y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$$

نلاحظ أن طريقة بديلة لذكر المسألة في المثال 2.3 هي أن نقول: ج - د الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنى $x = \sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)}$ والمحور y ، حيث $0 \leq y \leq 90$. حول المحور y .

يمكن تعميم مثال 2.3 على طريقة الأقراص المستخدمة لحساب حجم مجسم يتكوّن من دوران منطقة ثنائية الأبعاد حول مستقيم أفقي أو رأسي. وسنفكر في هذه الطريقة العامة في ما يلي.

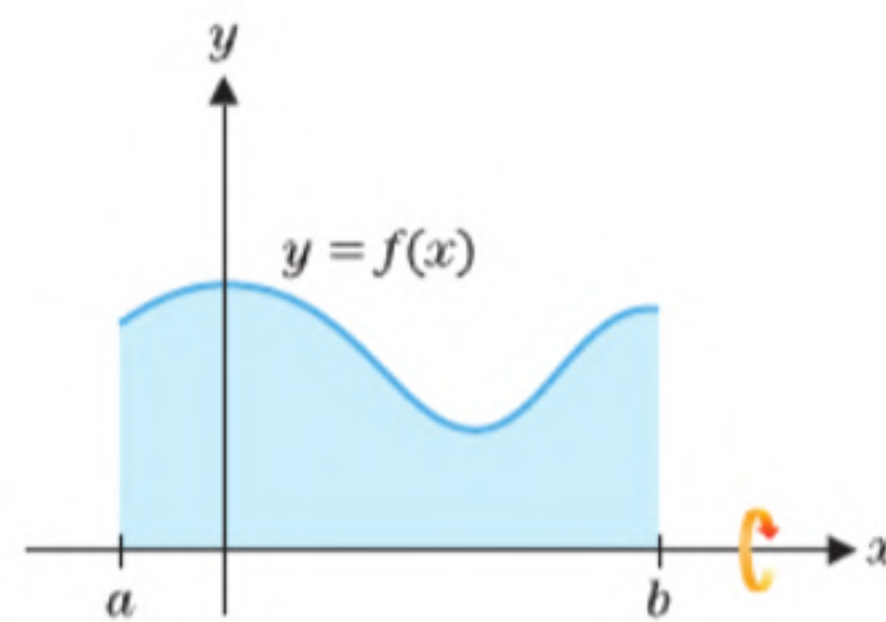
طريقة الأقراص

على فرض أن $f(x) \geq 0$ و f متصلة على الفترة $[a, b]$. نأخذ المنطقة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ والمحور x . لكل $a \leq x \leq b$ ، ونقوم بتدويرها حول المحور x . لإنشاء مجسم. (انظر الشكلين 6.16a و 6.16b). يمكننا إيجاد حجم هذا المجسم بتجزئته إلى شرائح عمودية على المحور x والتعرف على أن كل مقطع عرضي هو قرص دائري له نصف القطر $r = f(x)$. (انظر الشكل 6.16b). من (2.1)، نعلم أن حجم المجسم عندئذٍ هو



الشكل 6.16b

المجسم الناتج عن الدوران



الشكل 6.16a

$$y = f(x) \geq 0$$

حجم مجسم ناتج عن التدوير
(طريقة الأقراص)

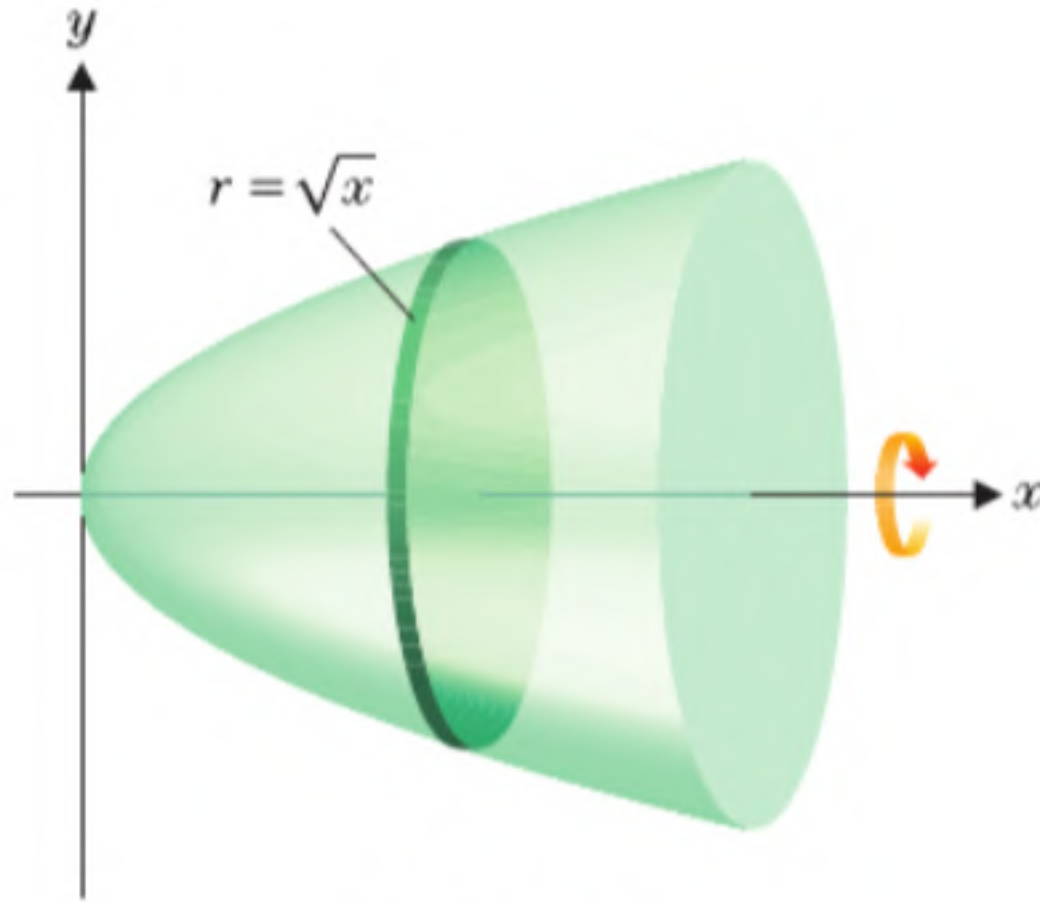
(2.2)

$$V = \int_a^b \underbrace{\pi [f(x)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} dx.$$

بما أنَّ كل المقاطع العرضية لمثل هذا المجسم الناتج عن الدوران هي أقراص، نشير إلى طريقة إيجاد الحجم هذه باسم **طريقة الأقراص**.

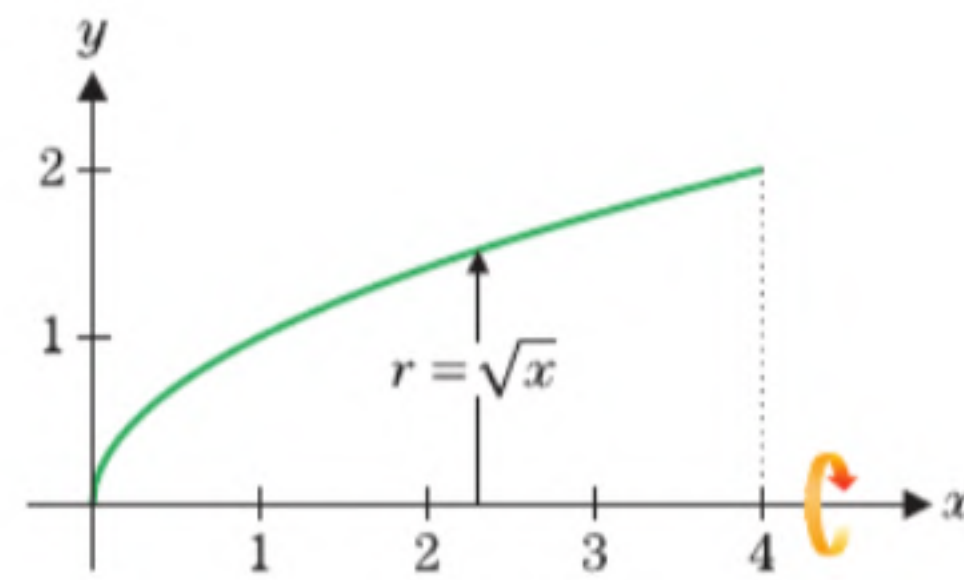
مثال 2.4 استخدام طريقة الأقراص لحساب الحجم

قم بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[0, 4]$ حول المحور x وجـ - د حجم المجسم الناتج عن الدوران.



الشكل 6.17b

المجسم الناتج عن الدوران



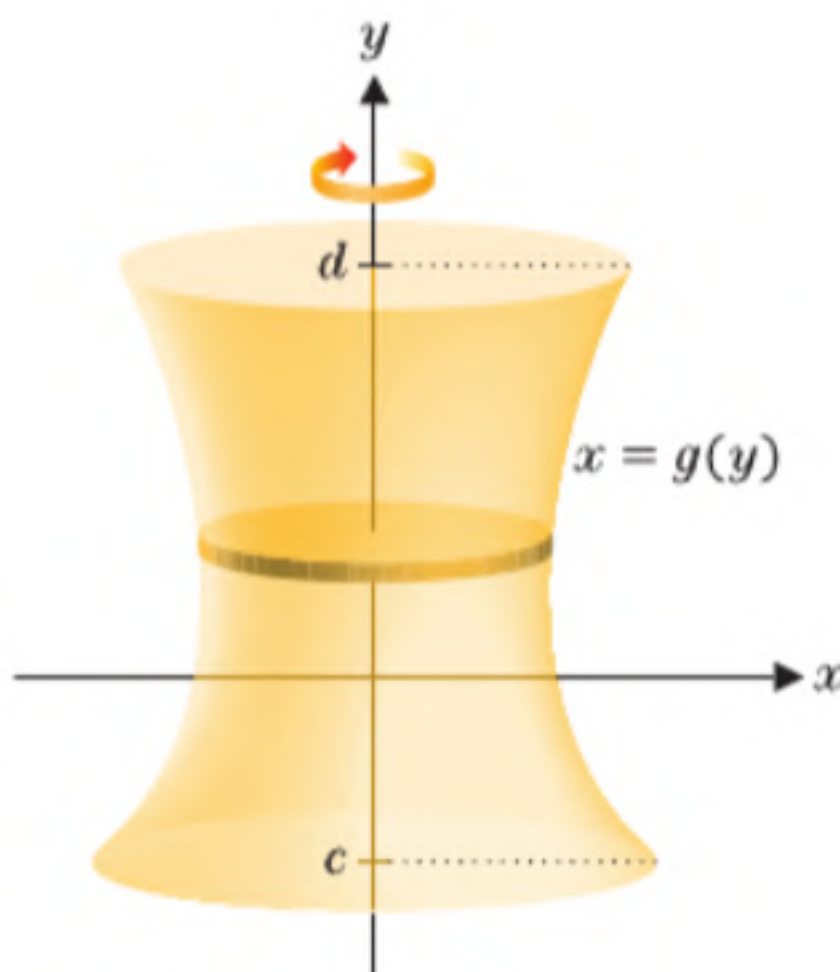
الشكل 6.17a

 $y = \sqrt{x}$

الحل من المهم جدًا رسم صورة للمنطقة والمجسم الناتج عن الدوران، بحيث يمكنك الحصول على فكرة واضحة عن أنصاف أقطار المقاطع العرضية الدائرية. يمكنك أن ترى من الأشكال 6.17a و 6.17b أنَّ نصف قطر كل مقطع عرضي يُعطى بالعلاقة $r = \sqrt{x}$ من (2.2). نحصل عندئذٍ على الحجم:

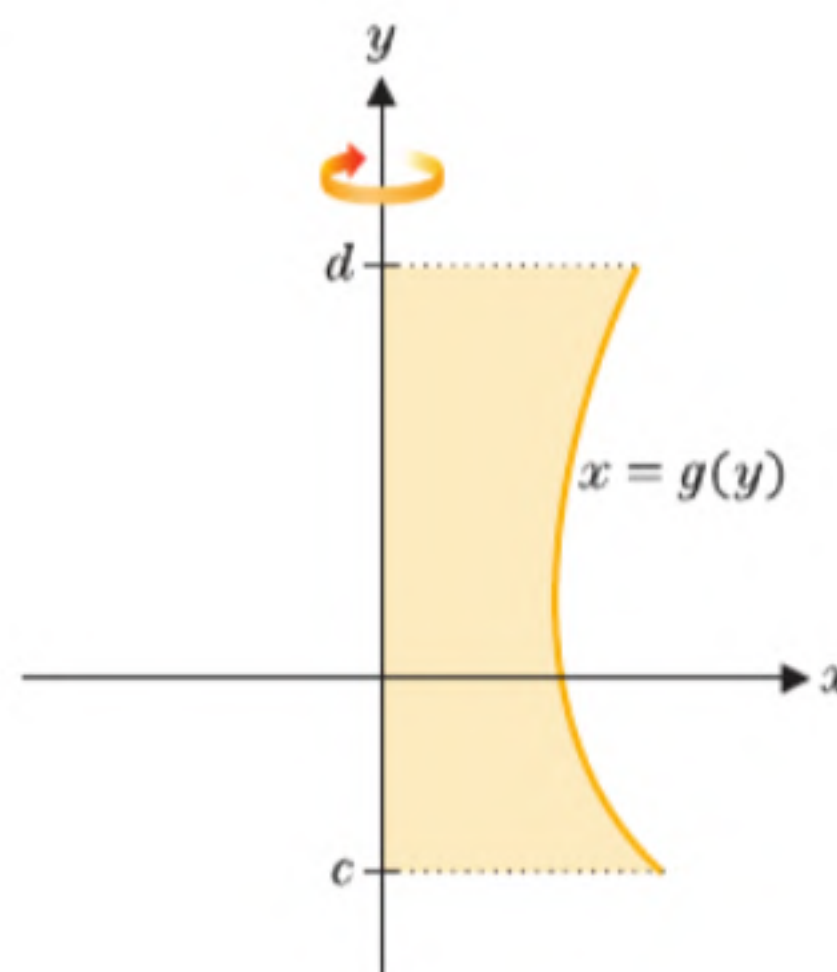
$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi [\sqrt{x}]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$$

بالطريقة ذاتها، على فرض أنَّ $g(y) \geq 0$ و g متصلة على الفترة $[c, d]$. ثم ينتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنى $x = g(y)$ والمحور y ، لكل $c \leq y \leq d$ ، حول المحور y تولّد مجسم. (انظر الشكلين 6.18a و 6.18b). مرة أخرى، نلاحظ من الشكل 6.18b أنَّ المقاطع



الشكل 6.18b

المجسم الناتج عن الدوران



الشكل 6.18a

الدوران حول المحور y

العرضية للمجسم الناتج عن الدوران هي أقراص دائرية بنصف قطر $r = g(y)$. كل ما تغيّر هنا هو أننا قمنا بتبديل أدوار المتغيّرين x و y . يُعطى حجم المجسم عندئذٍ بالعلاقة

(2.3)

$$V = \int_c^d \underbrace{\pi[g(y)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2} dy.$$

حجم مجسم ناتج عن الدوران
(طريقة الأقراص)

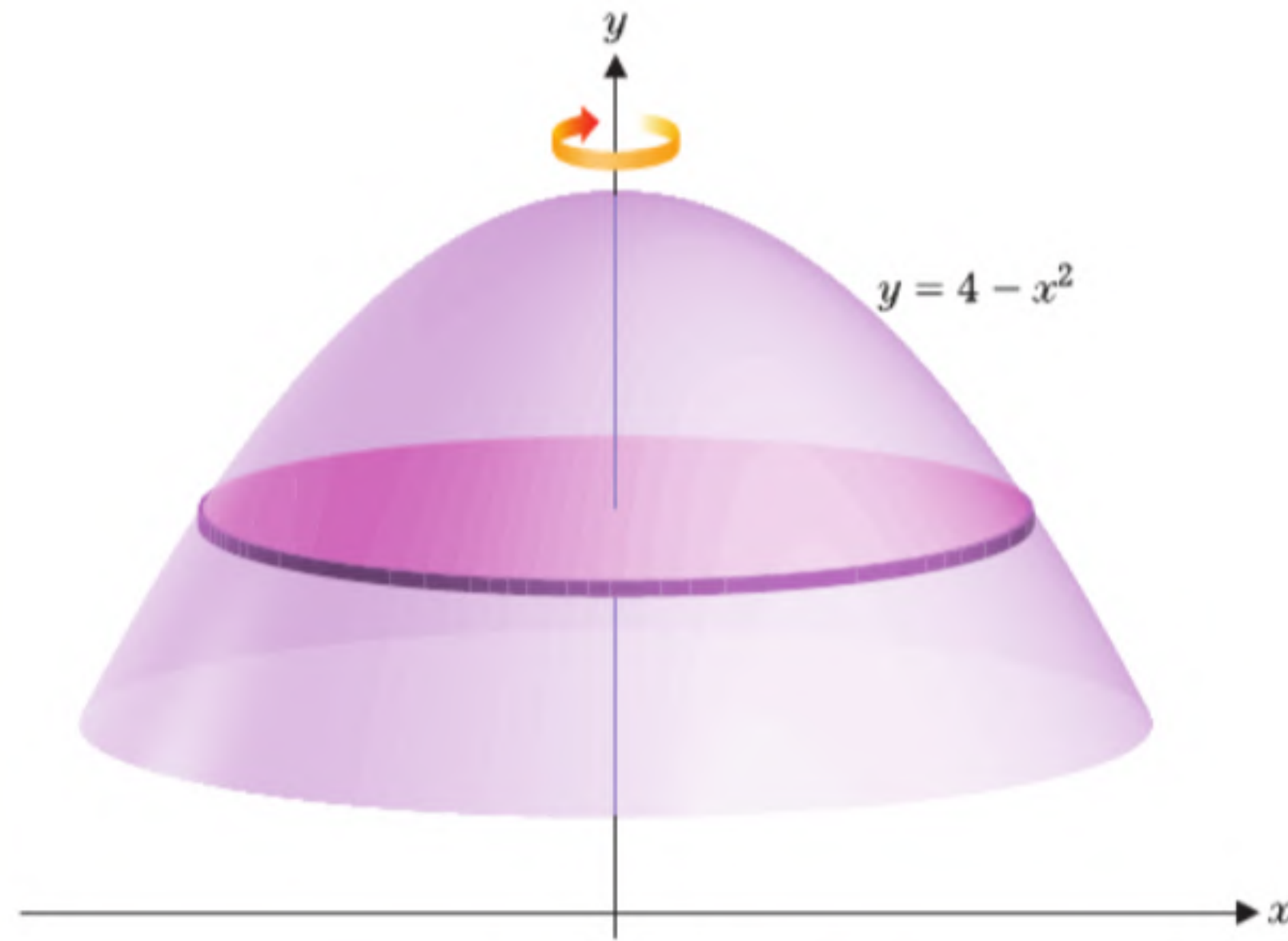
ملحوظة 2.2

عند استخدام طريقة الأقراص، يعتمد متغيّر التكامل فقط على المحور الذي تقوم بدوران المنطقة ثنائية الأبعاد حوله: يتطلب الدوران حول المحور x تكاملاً بمعلومية x ، بينما يتطلب الدوران حول المحور y تكاملاً بمعلومية y . يتم تحديد هذا الأمر بسهولة من خلال النظر إلى رسم للمجسم. لا تتركب خطأ التفكير في النقاط وأماكن وضعها فقط. فسيقودك ذلك إلى الإخفاق، حيث إنّ بقية هذه الوحدة ستتطلب منك اتخاذ خيارات مشابهة، يعتمد كل منها على المتطلبات المميزة للمسألة المطروحة.

مثال 2.5 استخدام طريقة الأقراص مع y كمتغيّر مستقل

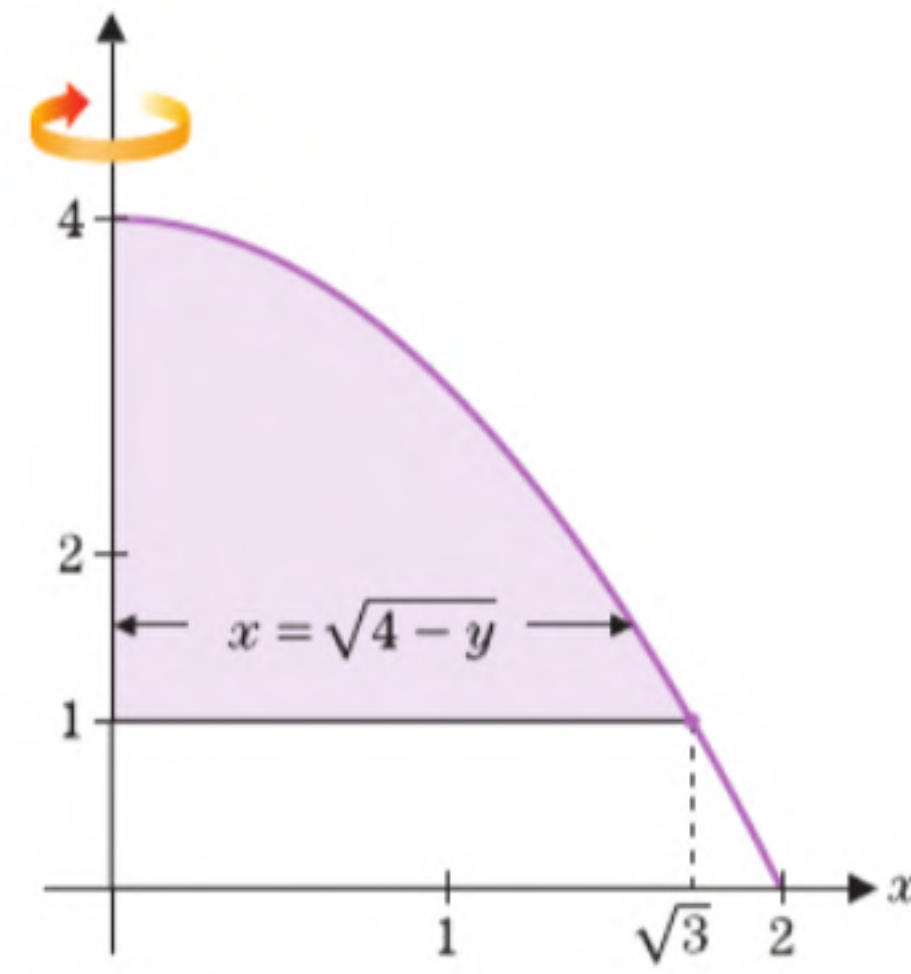
جـ - د حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{3}$ حول المحور y .

الحل ستجد تمثيلاً بيانياً للمنحنى في الشكل 6.19a وللمجسم في الشكل 6.19b.



الشكل 6.19b

المجسم الناتج عن الدوران



الشكل 6.19a

$y = 4 - x^2$

لاحظ في الأشكال: 6.19a و 6.19b أنّ نصف القطر لأيّ مقاطع عرضية تعطى بـ x . لذا يجب حل المعادلة $y = 4 - x^2$ لكل y لنحصل على $x = \sqrt{4 - y}$ بما أنّ المساحة تتوسّع من $y = 1$ إلى $y = 4$ يعطى الحجم من (2.3) فيكون:

$$V = \int_1^4 \underbrace{\pi(\sqrt{4 - y})^2}_{\pi r^2} dy = \int_1^4 \pi(4 - y) dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_1^4 = \pi \left[(16 - 8) - \left(4 - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{9\pi}{2}$$

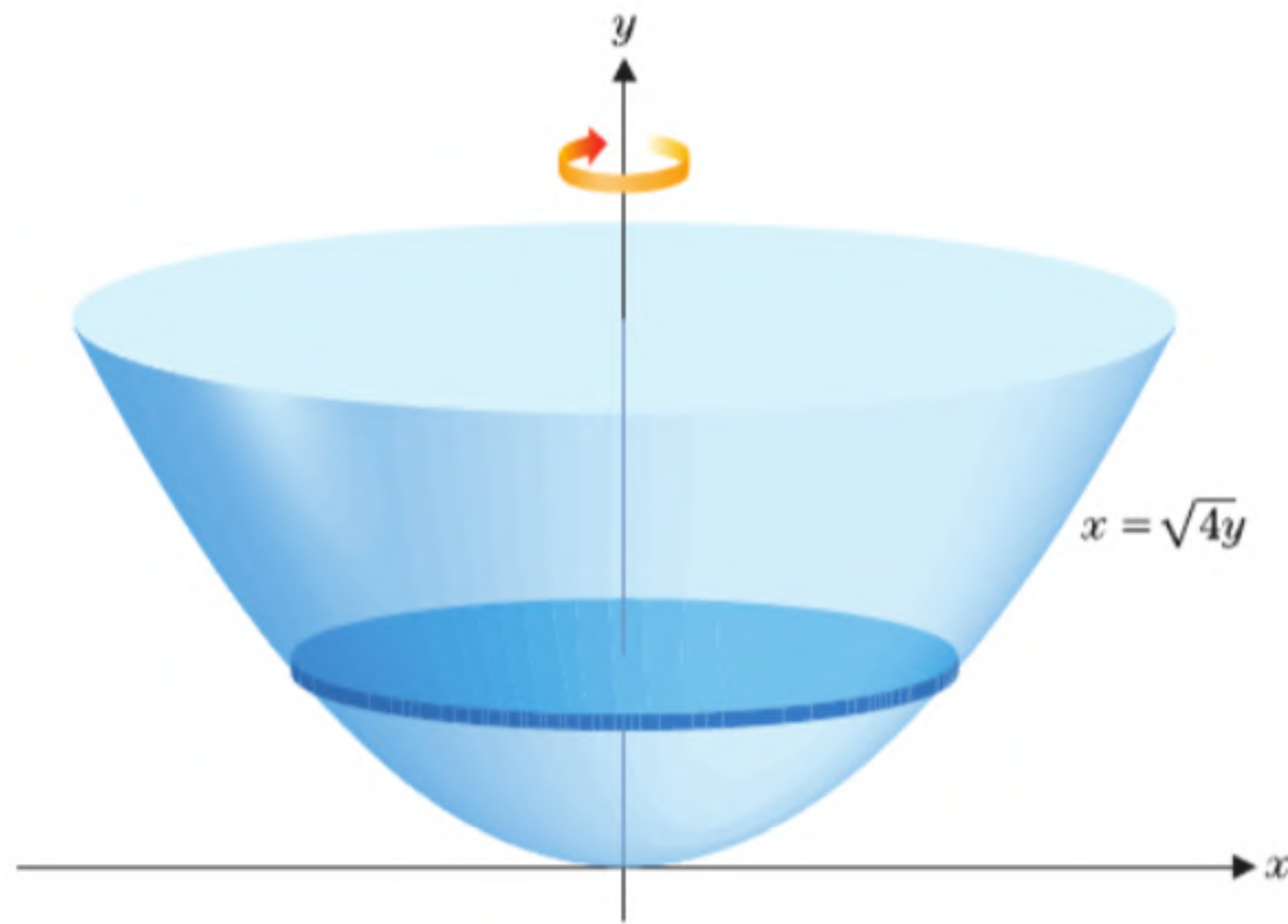
طريقة الحلقات

إنّ أحد التعقيدات التي تحدث عند حساب الأحجام هو أنه قد يحتوي الجسم على تجويف أو "ثقب". ويحدث تعقيد آخر عندما تدور منطقة حول مستقيم بخلاف المحور x أو المحور y . لن تشكل لك الحالتين صعوبات كبيرة، إذا نظرت بتمعن إلى الأشكال. وسنوضح تلك الأفكار في المثالين 2.6 و 2.7.

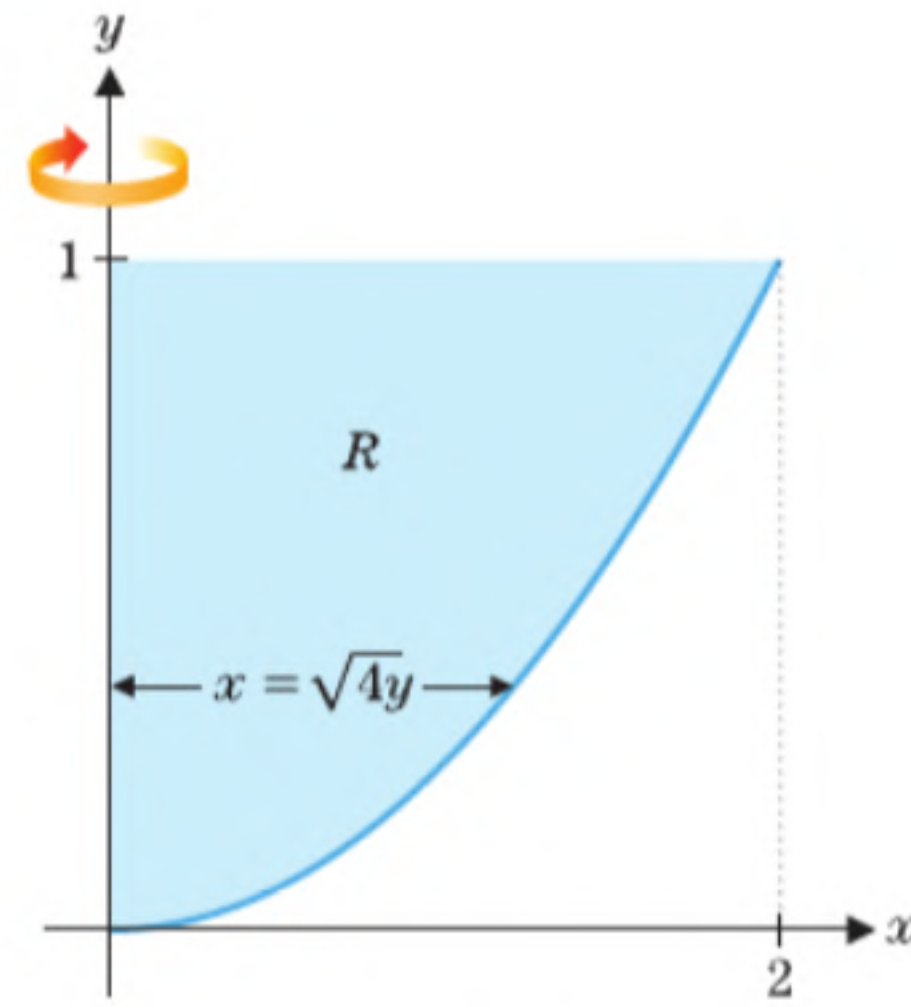
مثال 2.6 حساب أحجام المجسمات المجوفة وغير المجوفة

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = 1$ و $y = \frac{1}{4}x^2$, $x = 0$ المحور y الذي تكوّن من دوران R حول (a) المحور y و (b) المحور x و (c) المستقيم $y = 2$.

الحل (a) تبدو المنطقة R في الشكل 6.20a ويبدو الجسم الذي تكوّن من دورانه حول المحور y في الشكل 6.20b لاحظ أنّ هذا الجزء من المسألة مشابه للمثال 2.5.



الشكل 6.20b
المجسم الناتج عن الدوران



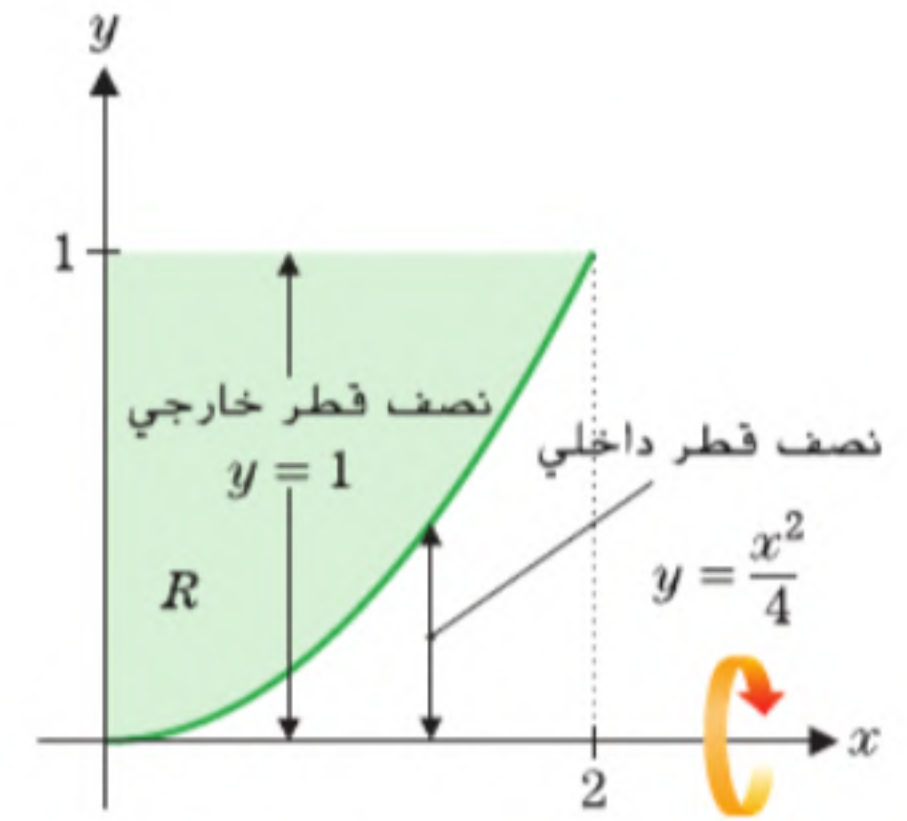
الشكل 6.20a
 $x = \sqrt{4y}$

من (2.3)، يتم إعطاء الحجم بالصيغة

$$V = \int_0^1 \underbrace{\pi (\sqrt{4y})^2}_{\pi r^2} dy = \pi \frac{4}{2} y^2 \Big|_0^1 = 2\pi.$$

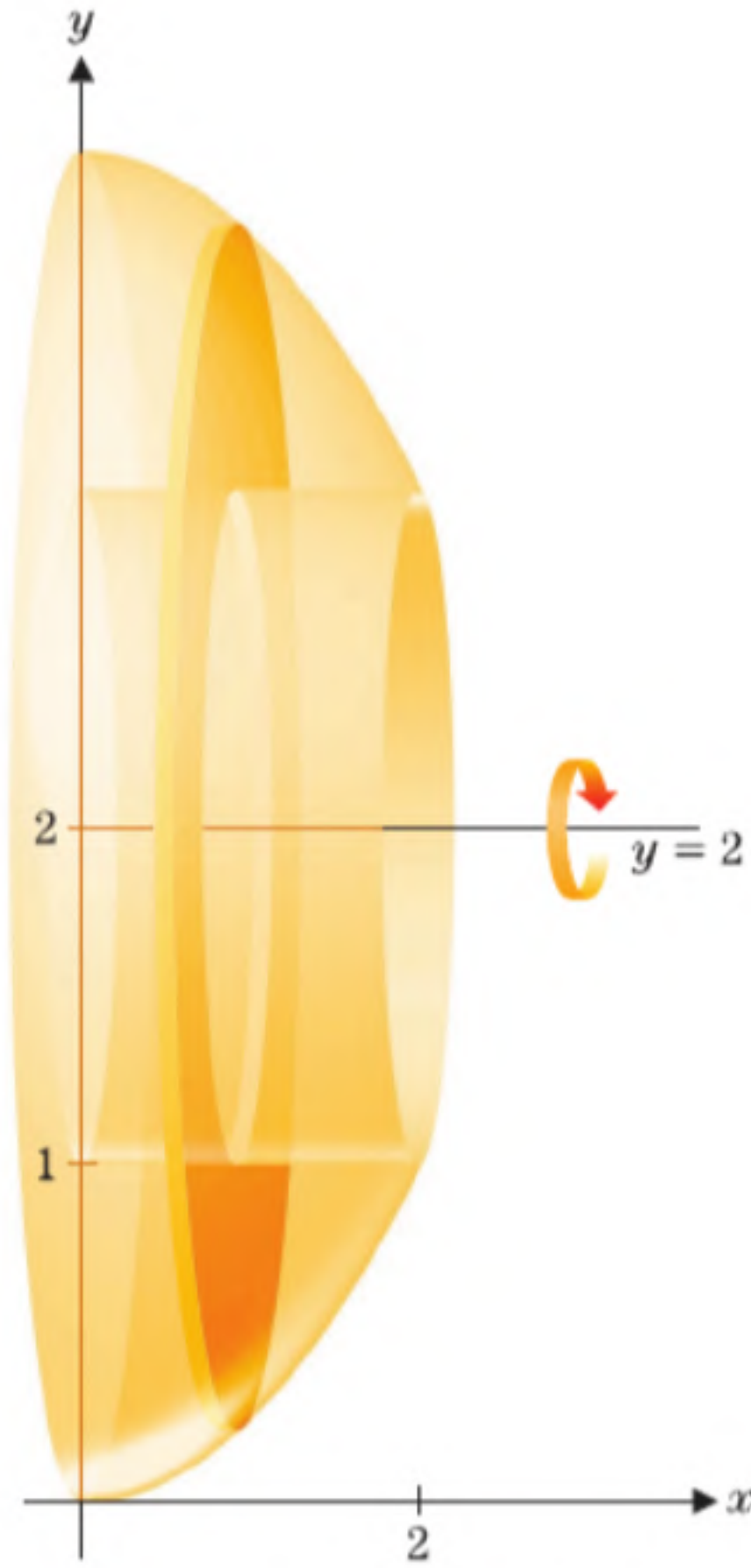
(b) دوران المنطقة R حول المحور x ينشأ عنه تجويف في وسط الجسم. انظر الشكل 6.21a لتمثيل بياني للمنطقة R والشكل 6.21b (في الصفحة التالية) لصورة الجسم. إنّ استراتيجيتنا هي حساب حجم الجزء الخارجي للجسم (كما لو كان مجسماً) ثم طرح حجم التجويف. قبل الخوض في عملية حساب، تأكد من تصور الشكل الهندسي وراء هذا. هنا، يتكوّن الجزء الخارجي لسطح مجسم من دوران المستقيم $y = 1$ حول المحور x . ينشأ التجويف من دوران المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ حول المحور x . انظر بتمعن إلى الشكلين 6.21a و 6.21b وتأكد أنّك ترى هذا. إنّ نصف القطر الخارجي، r_O ، هو المسافة من المحور x إلى المستقيم $y = 1$ أو $r_O = 1$. إنّ نصف القطر الخارجي، r_I ، هو المسافة من المحور x إلى المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ أو $r_I = \frac{1}{4}x^2$. عند تطبيق (2.2) مرتين، نرى أنه يتم إعطاء الحجم بالصيغة

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \underbrace{\pi (1)^2}_{\pi (\text{نصف القطر الخارجي})^2} dx - \int_0^2 \underbrace{\pi \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2}_{\pi (\text{نصف القطر الداخلي})^2} dx \\ &= \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x^4}{16}\right) dx = \pi \left(x - \frac{1}{80}x^5\right) \Big|_0^2 = \pi \left(2 - \frac{32}{80}\right) = \frac{8}{5}\pi \end{aligned}$$



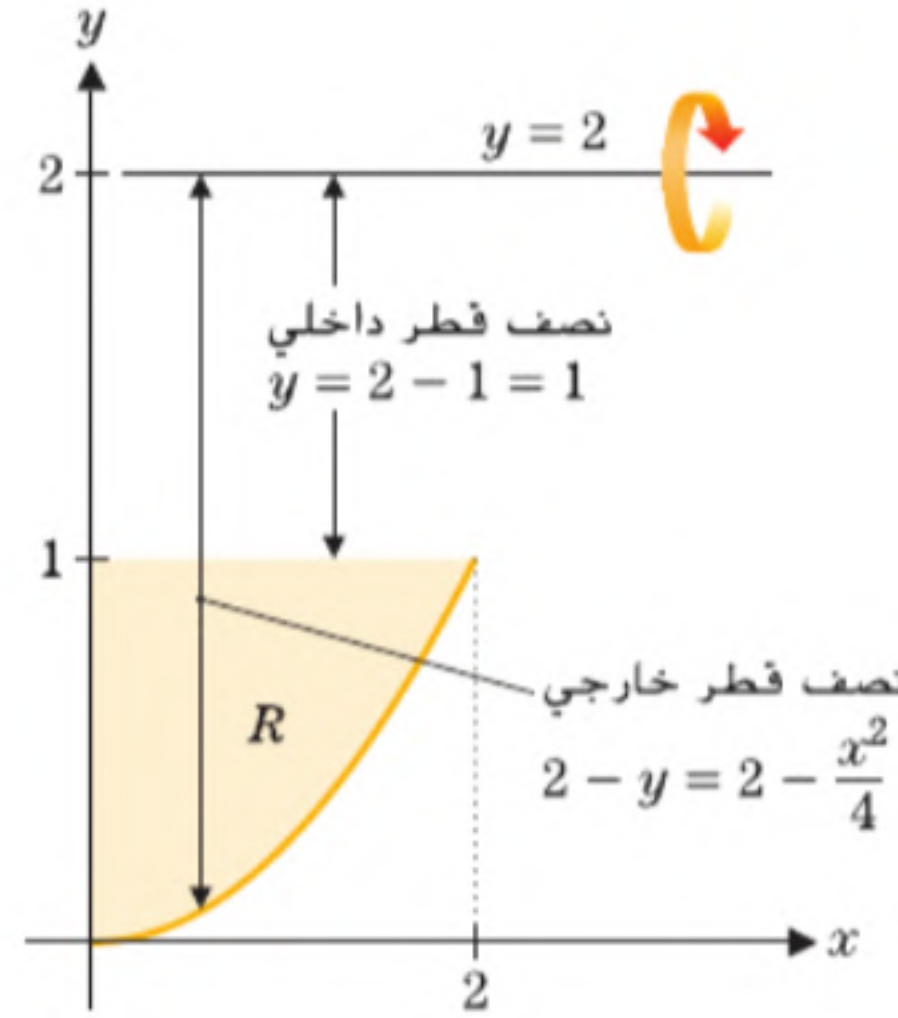
الشكل 6.21a
 $y = \frac{1}{4}x^2$

(c) إن دوران المنطقة R حول المستقيم $y = 2$ ينتج مجسمًا يشبه الحلقة وفيه ثقب أسطواني في الوسط. (a) تبدو المنطقة R في الشكل 6.22a ويبدو المجسم في الشكل 6.22b.



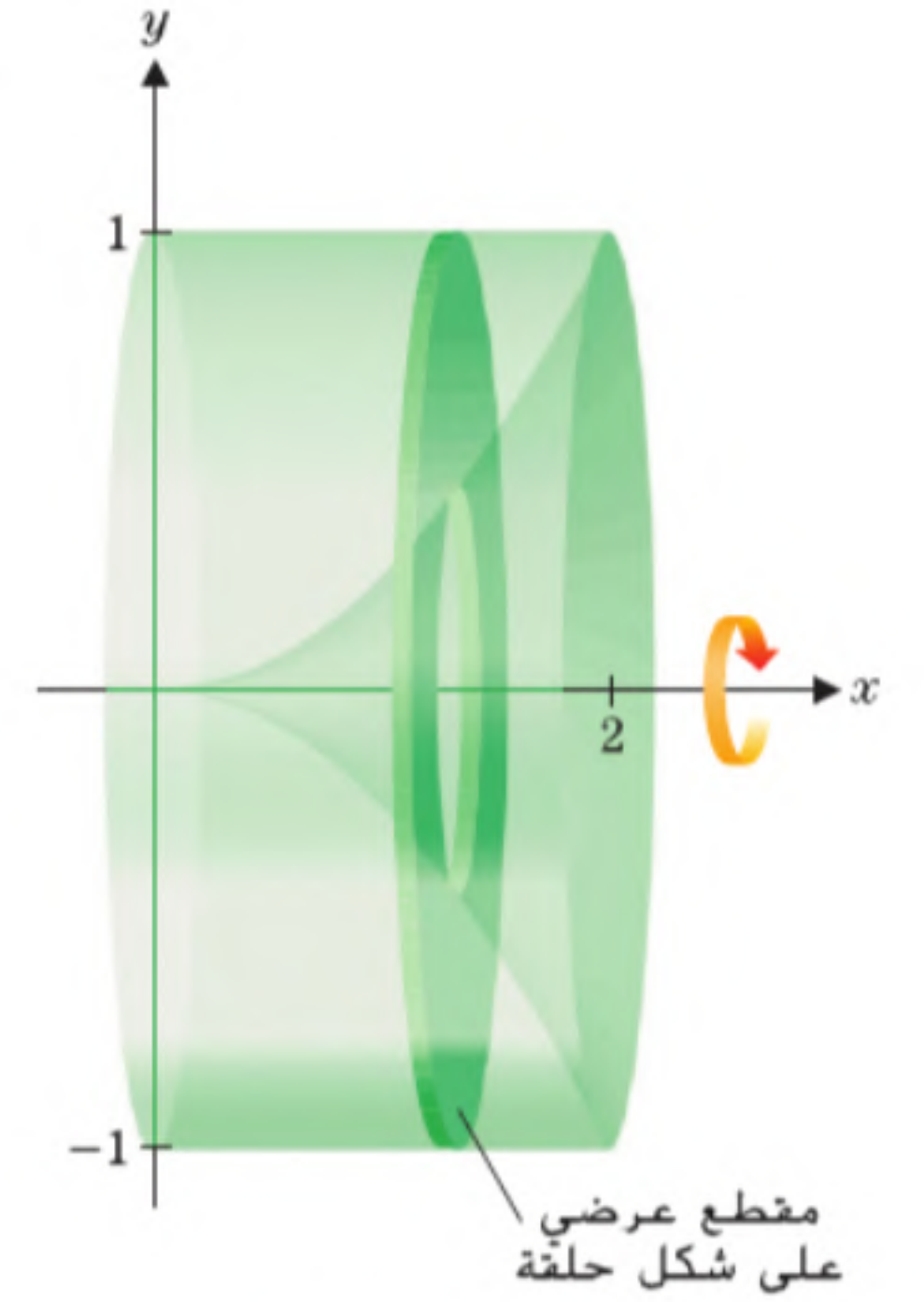
الشكل 6.22b

المجسم الناتج عن الدوران



الشكل 6.22a

الدوران حول $y = 2$



الشكل 6.21b

المجسم المجوف

يتم حساب الحجم بالطريقة نفسها المستخدمة في الجزء (b). بطرح حجم التجويف من حجم الجزء الخارجي للمجسم. من الشكلين 6.22a و 6.22b، لاحظ أن نصف قطر السطح الخارجي هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ أو $r_O = 2 - \frac{1}{4}x^2$. ونصف قطر الثقب الداخلي هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المستقيم $y = 1$ أو $r_I = 2 - 1 = 1$. من (2.2)، يعطى الحجم بالصيغة

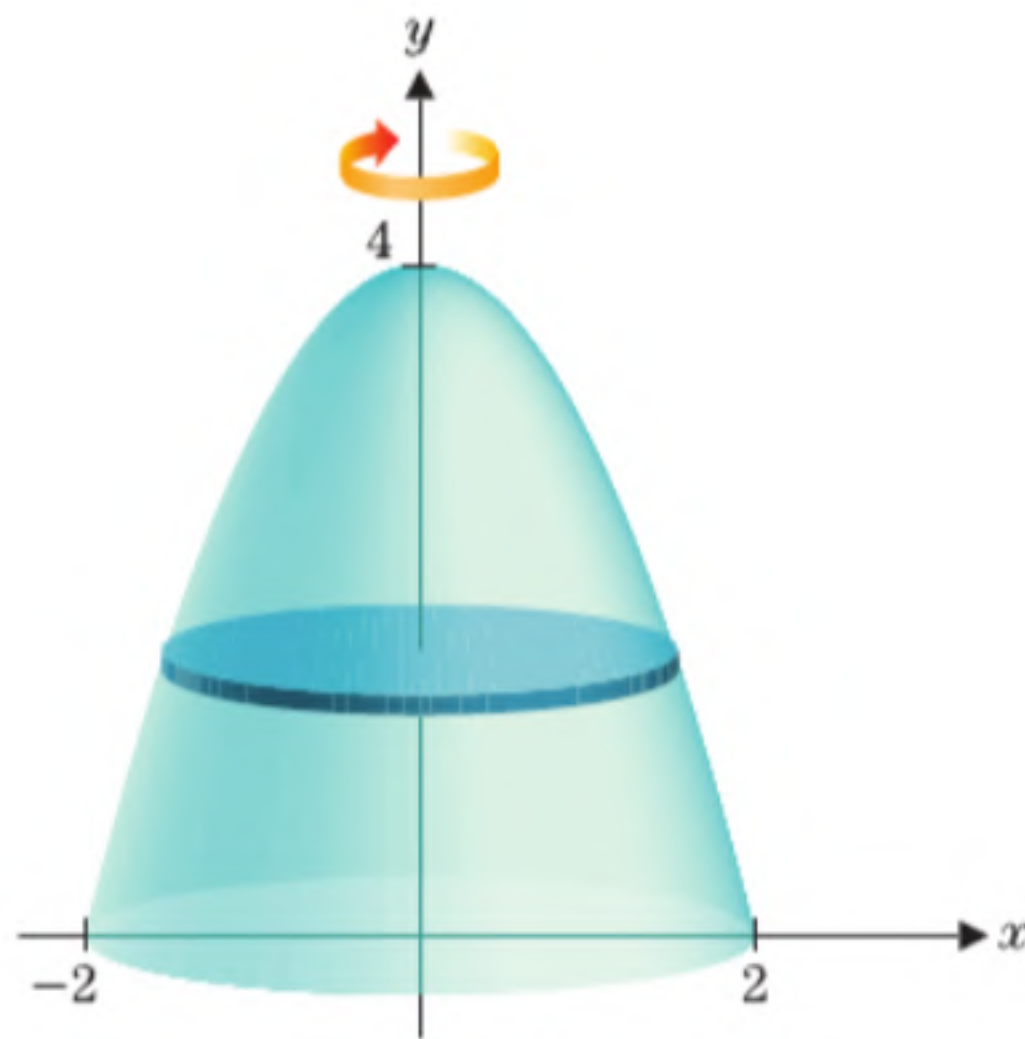
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \underbrace{\pi \left(2 - \frac{1}{4}x^2 \right)^2}_{\pi (\text{نصف قطر خارجي})^2} dx - \int_0^2 \underbrace{\pi (2 - 1)^2}_{\pi (\text{نصف قطر داخلي})^2} dx \\ &= \pi \int_0^2 \left[\left(4 - x^2 + \frac{x^4}{16} \right) - 1 \right] dx = \pi \left[3x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{80}x^5 \right]_0^2 \\ &= \pi \left(6 - \frac{8}{3} + \frac{32}{80} \right) = \frac{56}{15} \pi \end{aligned}$$

في الجزأين (b) و (c) في المثال 2.6، تم حساب الحجم بطرح حجم داخلي من حجم خارجي للتعويض عن وجود تجويف داخل المجسم. يُعدّ هذا الأسلوب تعميماً بسيطاً لطريقة الأقراص ويشار إليه باسم **طريقة الحلقات**. نظرًا إلى أن المقاطع العرضية للمجسم تبدو مثل الحلقات.

مثال 2.7 دوران منطقة حول مستقيمت مختلفة

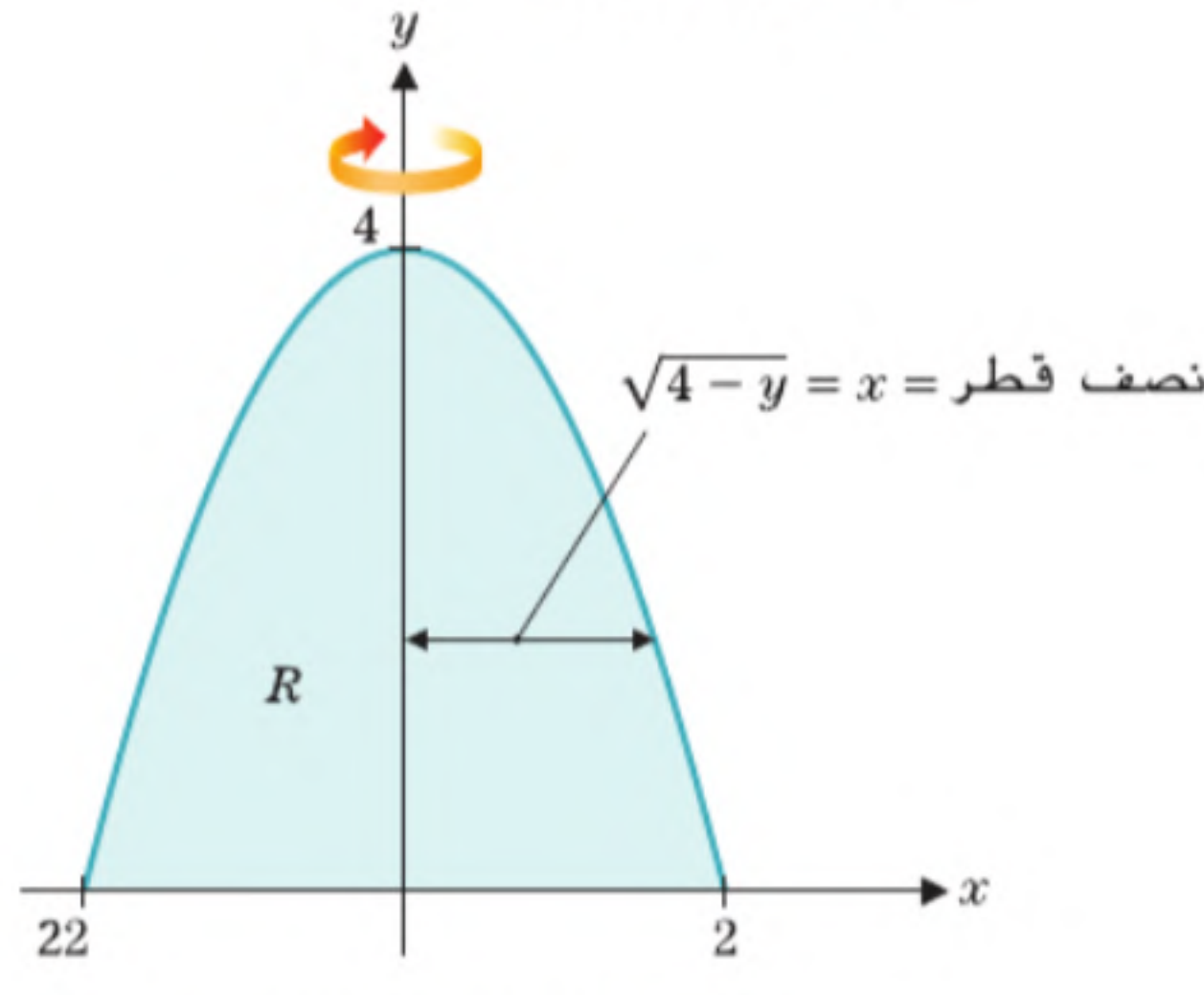
لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$. جـد أحجام المجسمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول كل من التالي: (a) المحور y و (b) المستقيم $y = -3$ و (c) المستقيم $y = 7$ و (d) المستقيم $x = 3$.

الحل للجزء (a). نرسم المنطقة R في الشكل 6.23a والمجسم الناتج عن الدوران في الشكل 6.23b.



الشكل 6.23b

المجسم الناتج عن الدوران



الشكل 6.23a

الدوران حول المحور y

من الشكل 6.23b. لاحظ أن كل مقطع عرضي للمجسم يكون قرصاً دائرياً يبلغ نصف قطره بشكل مبسط x . الحل من أجل x نأخذ: $x = \sqrt{4-y}$. حيث نختار x لتكون موجبة، بما أنه في هذا السياق x تمثل مسافة. من (2.3)، يعطى حجم المجسم الناتج عن الدوران بالصيغة

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi (\sqrt{4-y})^2}_{(\text{نصف قطر})^2} dy = \pi \int_0^4 (4-y) dy = \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

للجزء (b). رسمنا المنطقة R في الشكل 6.24a والمجسم الناتج عن الدوران في الشكل 6.24b. لاحظ من الشكل 6.24b أن المقاطع العرضية للمجسم على شكل حلقات وأن نصف القطر الخارجي r_O هو المسافة من محور التدوير $y = -3$ إلى المنحنى $y = 4 - x^2$. والذي هو،

$$r_O = y - (-3) = (4 - x^2) - (-3) = 7 - x^2$$

بينما يكون نصف القطر الداخلي هو المسافة من المحور x إلى المستقيم $y = -3$. والذي هو،

$$r_I = 0 - (-3) = 3$$

من (2.2)، يكون الحجم

$$V = \int_{-2}^2 \underbrace{\pi (7 - x^2)^2}_{(\text{نصف قطر خارجي})^2} dx - \int_{-2}^2 \underbrace{\pi (3)^2}_{(\text{نصف قطر داخلي})^2} dx = \frac{1472}{15} \pi$$

حيث قمنا بترك تفاصيل عملية الحساب كتمرين.

الجزء (c) (إن الدوران حول المستقيم $y = 7$ مشابه تماماً للجزء (b)). يمكنك رؤية المنطقة R في الشكل 6.25a والمجسم في الشكل 6.25b (موجودان في الصفحة التالية).

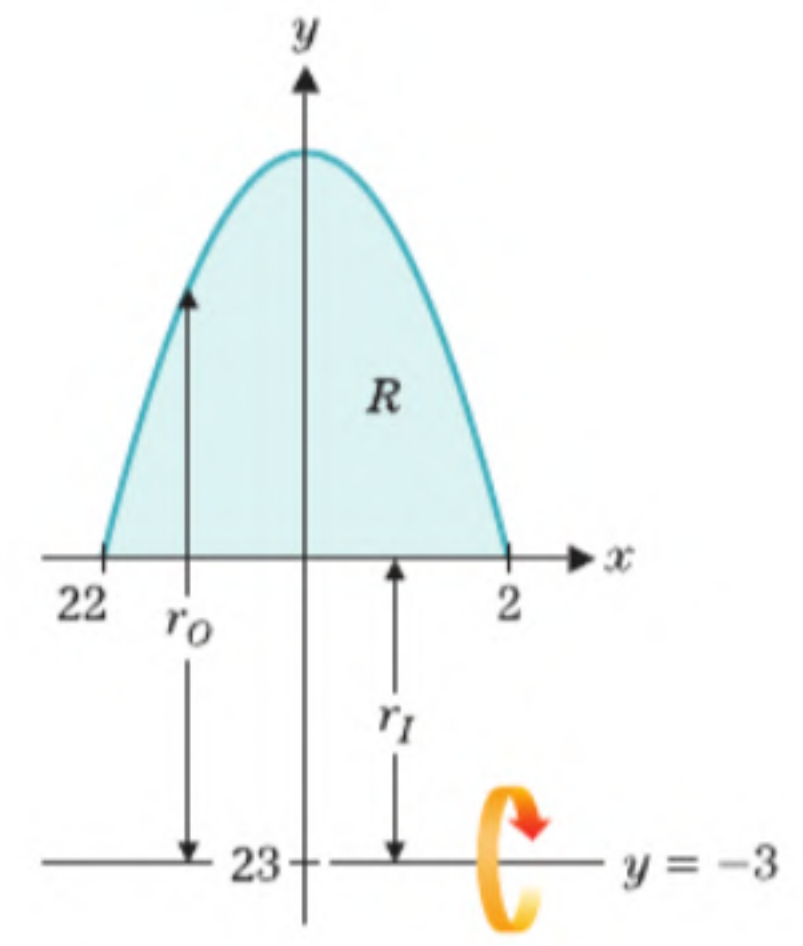
إن المقاطع العرضية للمجسم على شكل حلقات مجدداً. لكن هذه المرة، يكون نصف القطر الخارجي هو المسافة من المستقيم $y = 7$ إلى المحور x ، والذي هو، $r_O = 7$. ونصف القطر الداخلي هو المسافة من المستقيم $y = 7$ إلى المنحنى $y = 4 - x^2$.

$$r_I = 7 - (4 - x^2) = 3 + x^2$$

من (2.2)، يكون عندئذ حجم المجسم

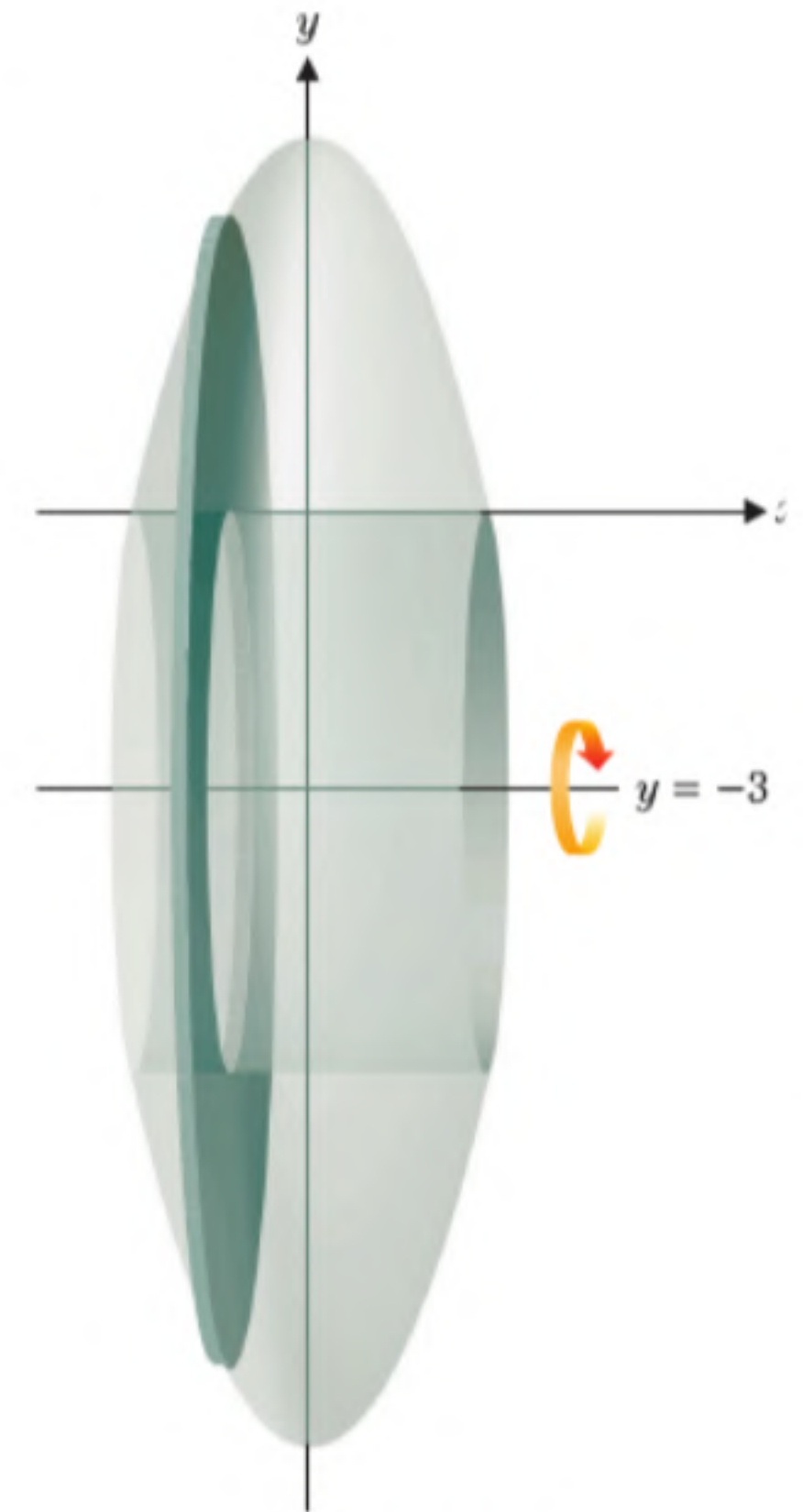
$$V = \int_{-2}^2 \underbrace{\pi (7)^2}_{(\text{نصف قطر خارجي})^2} dx - \int_{-2}^2 \underbrace{\pi (3 + x^2)^2}_{(\text{نصف قطر داخلي})^2} dx = \frac{576}{5} \pi,$$

حيث نترك مجدداً تفاصيل عملية الحساب كتمرين.



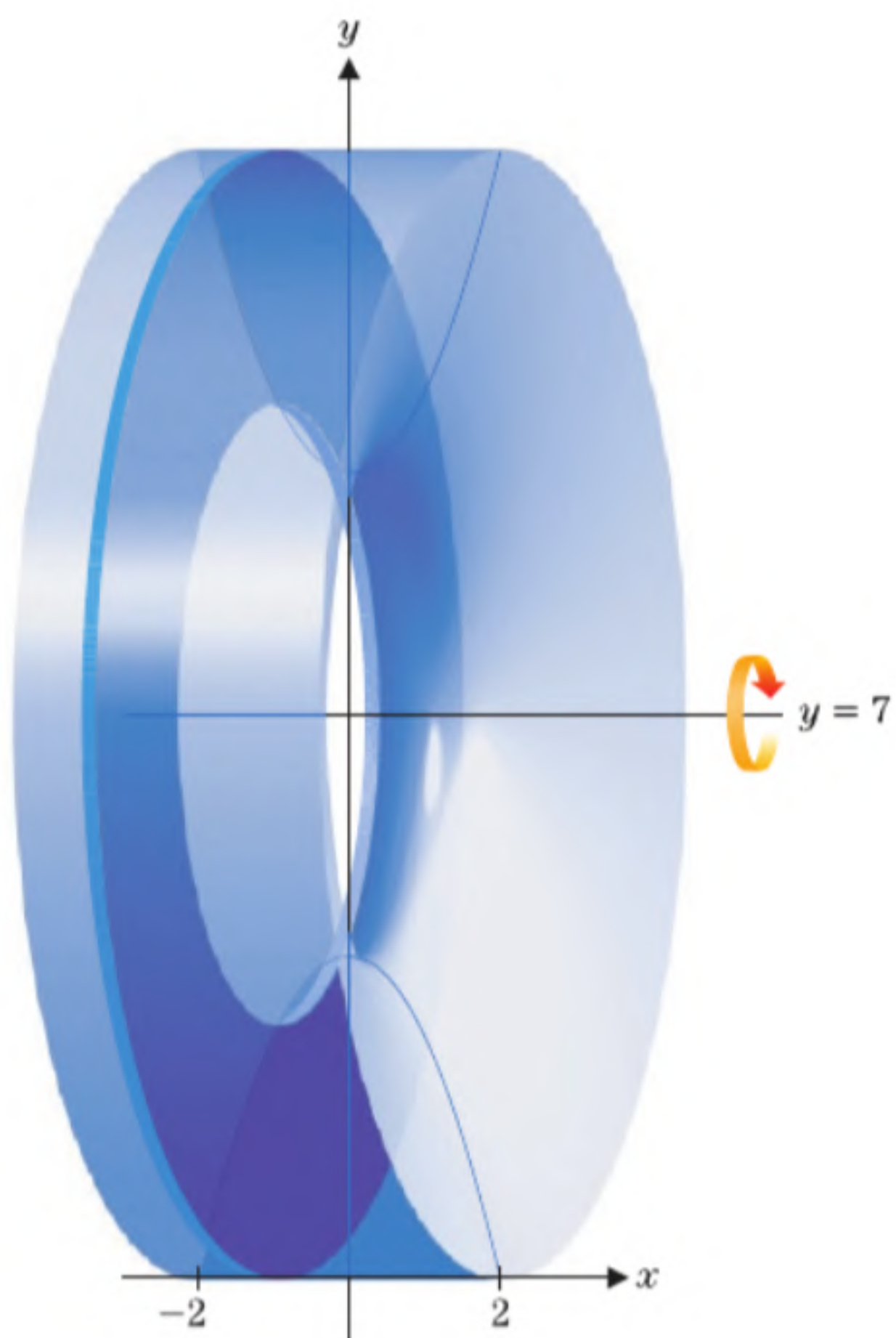
الشكل 6.24a

الدوران حول $y = -3$

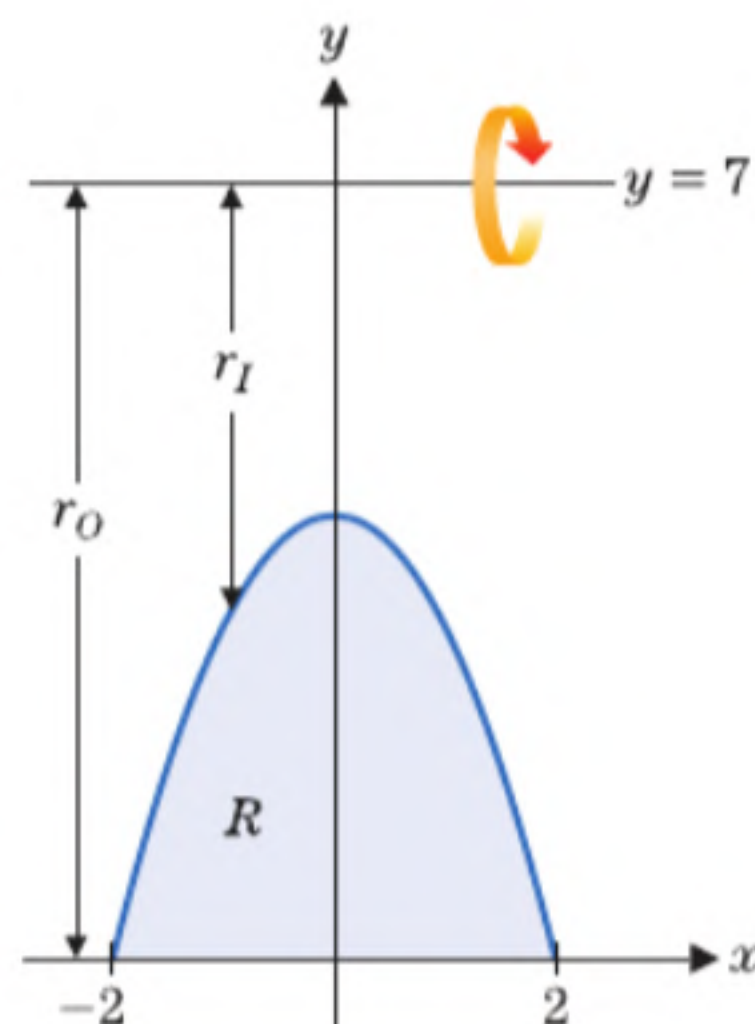


الشكل 6.24b

المجسم الناتج عن الدوران

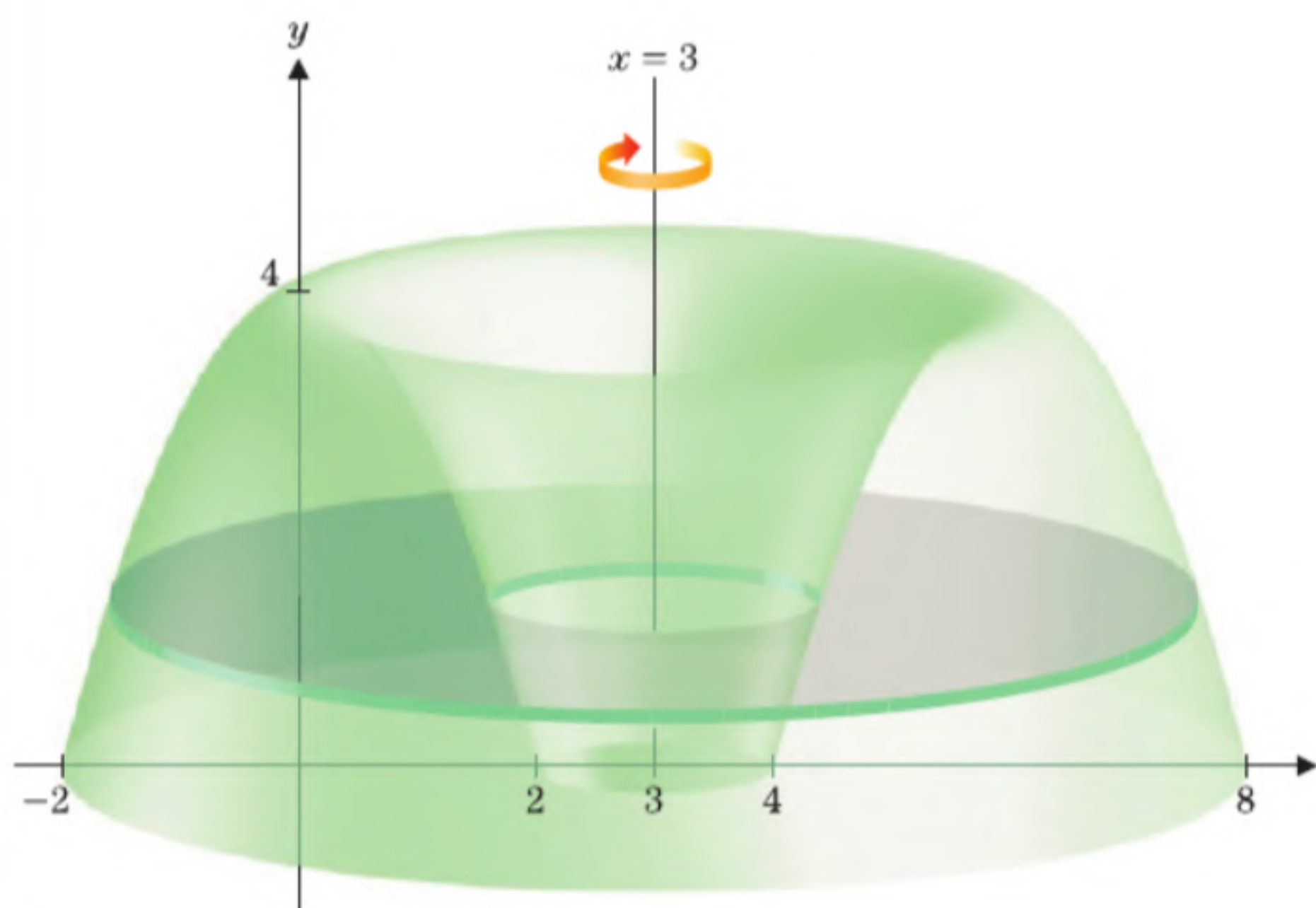


الشكل 6.25b
المجسم الناتج عن الدوران

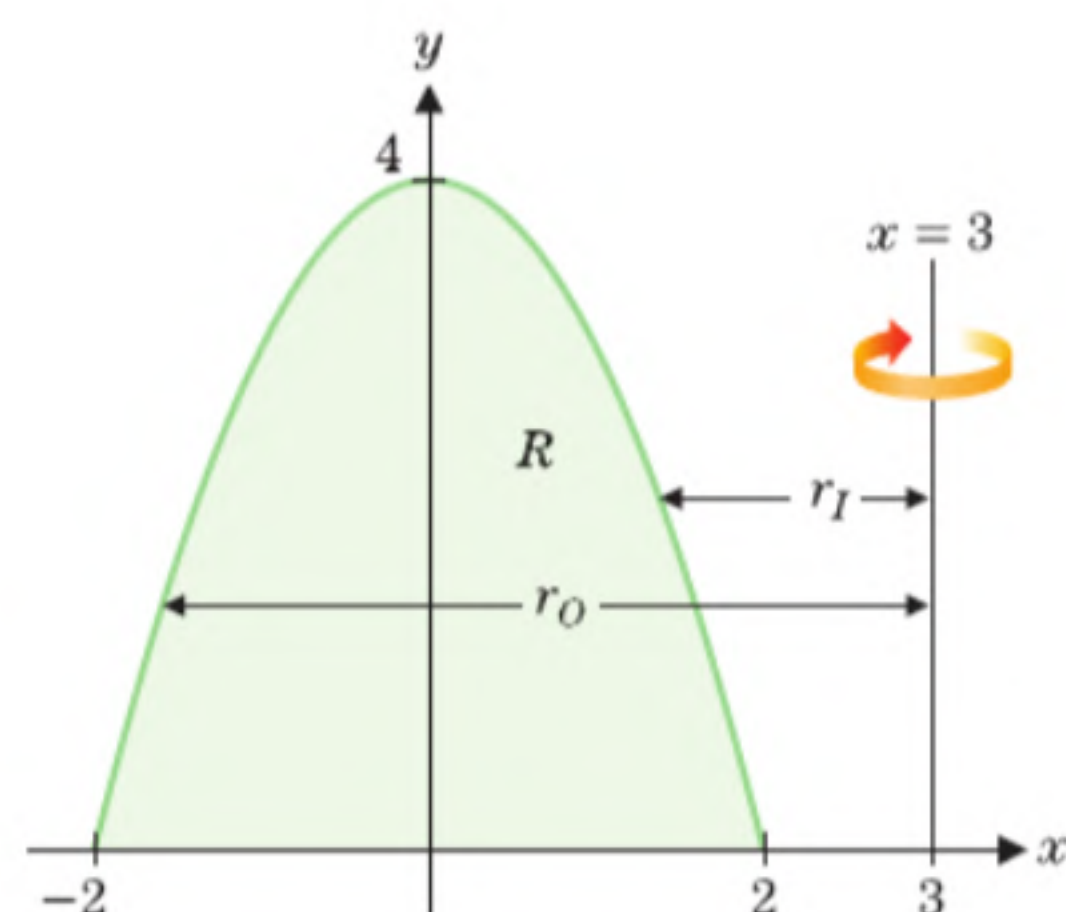


الشكل 6.25a
الدوران حول $y = 7$

أخيرًا، للجزء (d) (الدوران حول المستقيم $x = 3$). تبين لمنطقة R في الشكل 6.26a ويبدو
المجسم الناتج عن الدوران في الشكل 6.26b. في هذه الحالة، تكون المقاطع العرضية
للمجسم حلقات، ولكن يشكل نصف القطر الداخلي والخارجي صعوبة أكبر في تحديدهما عن
الأجزاء السابقة. إن نصف القطر الخارجي هو المسافة بين المستقيم $x = 3$ والنصف الأيسر
للقطع المكافئ، بينما نصف القطر الداخلي هو المسافة بين المستقيم $x = 3$ والنصف الأيمن
للقطع المكافئ. يعطى القطع المكافئ بالمعادلة $y = 4 - x^2$. بحيث يكون $x = \pm\sqrt{4 - y}$.



الشكل 6.26b
المجسم الناتج عن الدوران



الشكل 6.26a
الدوران حول $x = 3$

لاحظ أن $x = \sqrt{4-y}$ تناظر النصف الأيمن للقطع المكافئ، بينما تصف $x = -\sqrt{4-y}$ النصف الأيسر للقطع المكافئ. ذلك يعطينا

$$r_O = 3 - (-\sqrt{4-y}) = 3 + \sqrt{4-y} \quad \text{and} \quad r_I = 3 - \sqrt{4-y}$$

وبناءً عليه، نحصل على الحجم

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi(3 + \sqrt{4-y})^2}_{\pi(\text{نصف قطر خارجي})^2} dy - \int_0^4 \underbrace{\pi(3 - \sqrt{4-y})^2}_{\pi(\text{نصف قطر داخلي})^2} dy = 64\pi$$

حيث نترك تفاصيل عملية الحساب غير المرتبة نوعاً ما هذه إليك. في الدرس 6.3، نقدم طريقة بديلة لإيجاد حجم مجسم ناتج عن الدوران، التي، في المسألة الحالية، ستنتج تكاملات مبسطة بشكل أكبر.

ملحوظة 2.3

ستحقق النجاح الأكبر في إيجاد أحجام المجسمات الناتجة عن الدوران إذا رسمت أشكالاً معقولة وسميتها بحرص. لا تفكر فقط في النقاط وأماكن وضعها. فأنت لا تحتاج سوى أن تتذكر طريقة إيجاد مساحة المقطع العرضي للمجسم. يتكفل أسلوب التكامل بما تبقى.

تمارين 2.6

تمارين كتابية

3. $A(x) = \pi(4-x)^2, 0 \leq x \leq 2$

4. $A(x) = 2(x+1)^2, 1 \leq x \leq 4$

في التمارين 5-12، قم بإعداد تكامل و حساب الحجم.

5. (a) يبلغ ارتفاع الهرم الأكبر في الجيزة 152 m، و يرتفع من قاعدة مربعة طول ضلعها 230 m. احسب حجمه باستخدام التكامل.



- (b) على فرض أنه بدلاً من إكمال الهرم، توقف عمال البناء في الجيزة عند ارتفاع 250 ft (بهضبة علوية مربعة طول ضلعها 375 ft). احسب حجم هذا البناء. اشرح سبب كون الحجم أكبر من نصف حجم الهرم في الجزء (a).

6. جـد حجم هرم ارتفاعه 160 ft بقاعدة مربعة طول ضلعها 300 ft. تبلغ هذه الأبعاد نصف تلك الخاصة بالهرم في مثال 2.1. كيف تتم مقارنة الحجم؟

1. ناقش العلاقات (مثل العمودية أو المتوازية) مع المحورين x و y للأقراص في المثالين 2.4 و 2.5. اشرح الطريقة التي تمكنك بها هذه العلاقة من تحديد متغير التكامل بشكل صحيح.

2. تم تطوير طريقة الأقراص والحلقات بشكل منفصل في ما يتعلق بالنص ولكن تُعدّ كل منها حالة خاصة للقانون العام للحجم. ناقش فوائد تعلم قوانين منفصلة في مقابل اشتقاق كل مثال بشكل منفصل من القانون العام. على سبيل المثال، هل تفضل تعلم قوانين إضافية أو حل كل مسألة من خلال المبادئ الأساسية؟ كم عدد القوانين الذي يُعدّ أكثر من القدرة على التعلم؟

3. لإيجاد منطقة مثلث من الشكل Δ في الدرس 6.1، اشرح سبب رغبتك في استخدام التكامل y . في هذا الدرس، هل سيكون من الأسهل حساب حجم المجسم الذي تكوّن عن طريق دوران هذا المثلث حول المحور x أو y ؟ اشرح تفضيلك.

4. في الجزء (a) من المثال 2.7، يمتد الشكل 6.23a من $x = -\sqrt{4-y}$ إلى $x = \sqrt{4-y}$. لكننا استخدمنا $\sqrt{4-y}$ بمثابة نصف القطر. اشرح سبب كون هذا نصف القطر صحيحاً وليس $2\sqrt{4-y}$.

في التمارين 1-4، جـد حجم المجسم مع مساحة المقطع العرضي $A(x)$.

1. $A(x) = x+2, -1 \leq x \leq 3$
2. $A(x) = 10e^{0.01x}, 0 \leq x \leq 10$

7. يبلغ طول قبة كنيسة 30 ft بمقاطع عرضية مربعة. طول ضلع المربع الموجود في القاعدة 3 ft. و طول ضلع المربع في الجزء العلوي 6 in و يتغير الضلع خطيًا بينهما. احسب الحجم.

8. تحتوي علبة منزل على مقاطع عرضية مستطيلة موازية للأرض و مقاطع عرضية مثلثة متطابقة على الأرض. إبعاد المستطيل 30 ft في 60 ft عند الجزء السفلي للعلبة وتبلغ قاعدة المثلثات 30 ft و ارتفاع 10 ft. احسب حجم العلبة.

9. يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة $y = 60 - \frac{x^2}{60}$ لكل $-60 \leq x \leq 60$ (بالأمتار). بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y . ج - د حجمه.

10. ارسم التخطيطي لقبة حجمها "ضعف" حجم تمرين 9 هـ و $y = 40 - \frac{x^2}{40}$ لكل $-40 \leq x \leq 40$ (بالأمتار). ج - د حجمه.

11. لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 + \sin \frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \leq x \leq 2\pi$. ارسم صورة للإناء و احسب حجمه.

12. لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 - \sin \frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \leq x \leq 2\pi$. ارسم صورة للإناء و احسب حجمه.

1. 13 على فرض أن فحص تصوير MRI يبين أن مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول. استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم.

x (cm)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$A(x)$ (cm ²)	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.4

x (cm)	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm ²)	0.3	0.2	0.2	0.1	0.0

14 على فرض أن فحص تصوير MRI يبين أن مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول. استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم.

x (cm)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$A(x)$ (cm ²)	0.0	0.2	0.3	0.2	0.4	0.2	0.0

15. قدّر الحجم من مساحات المقطع العرضي.

x (m)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$A(x)$ (m ²)	1.0	1.2	1.4	1.3	1.2

16. قدّر الحجم من مساحات المقطع العرضي.

x (m)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$A(x)$ (m ²)	2.0	1.8	1.7	1.6	1.8

x (m)	0.5	0.6	0.7	0.8
$A(x)$ (m ²)	2.0	2.1	2.2	2.4

في التمارين 17-20، احسب حجم الجسم الذي تكوّن من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور.

17. المنطقة المحدودة بواسطة $y = 0$, $y = 2 - x$, و $x = 0$ حول المحور x : (a) $y = 3$ (b)

18. المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$, $y = 4 - x^2$ حول (a) المحور x : (b) $y = 4$

19. المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ و $x = 0$ حول (a) المحور y : (b) $y = 4$

20. المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $x = y^2$ حول (a) المحور y : (b) $x = 1$

في التمارين 21-24، يتكوّن مجسم من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور. احسب الحجم بالضبط إن أمكن و قدره إذا لزم الأمر.

21. المساحة المحدودة بواسطة $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$ و $y = 0$ حول (a) المحور y : (b) $y = -2$

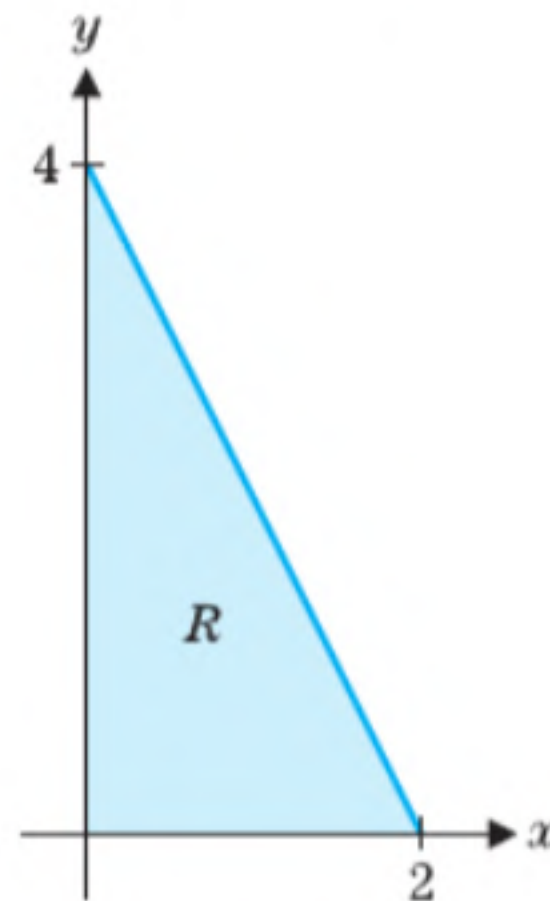
22. المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sec x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ و $x = \pi/4$ حول (a) $y = 2$ (b) المحور x

23. المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+2}}$ و المحور x و $x = 1$ حول (a) المحور x : (b) $y = 3$

24. المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^{-x^2}$ و $y = x^2$ حول (a) المحور x : (b) $y = -1$

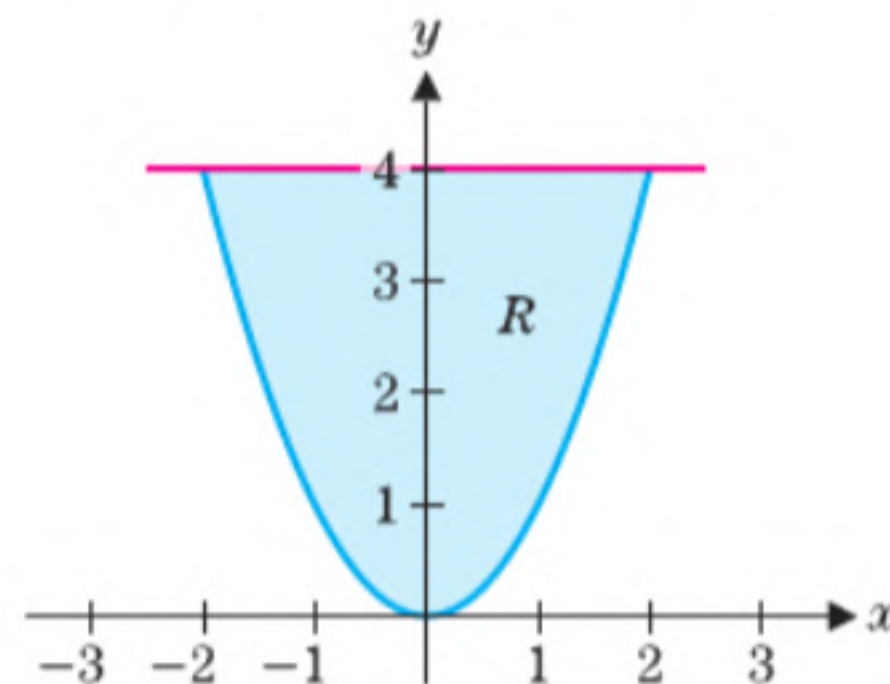
25. لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ و المحور x و المحور y . احسب حجم الجسم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $y = 4$ (d) $y = -4$ (e) $x = 2$ (f) $x = -2$



26. لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$. احسب حجم الجسم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) $y = 4$ (b) المحور y (c) $y = 6$ (d) $y = -4$ (e) $y = -2$ (f) $x = -4$



50. ارسم تمثيل بياني لمعدل التدفق في مقابل الزمن إذا قمت بسكب الماء في الأصبص الموجودة في التمرين 49 بمثل تلك الطريقة التي يتزايد من خلالها ارتفاع الماء في الأصبص بمعدل ثابت.

تمارين استكشافية

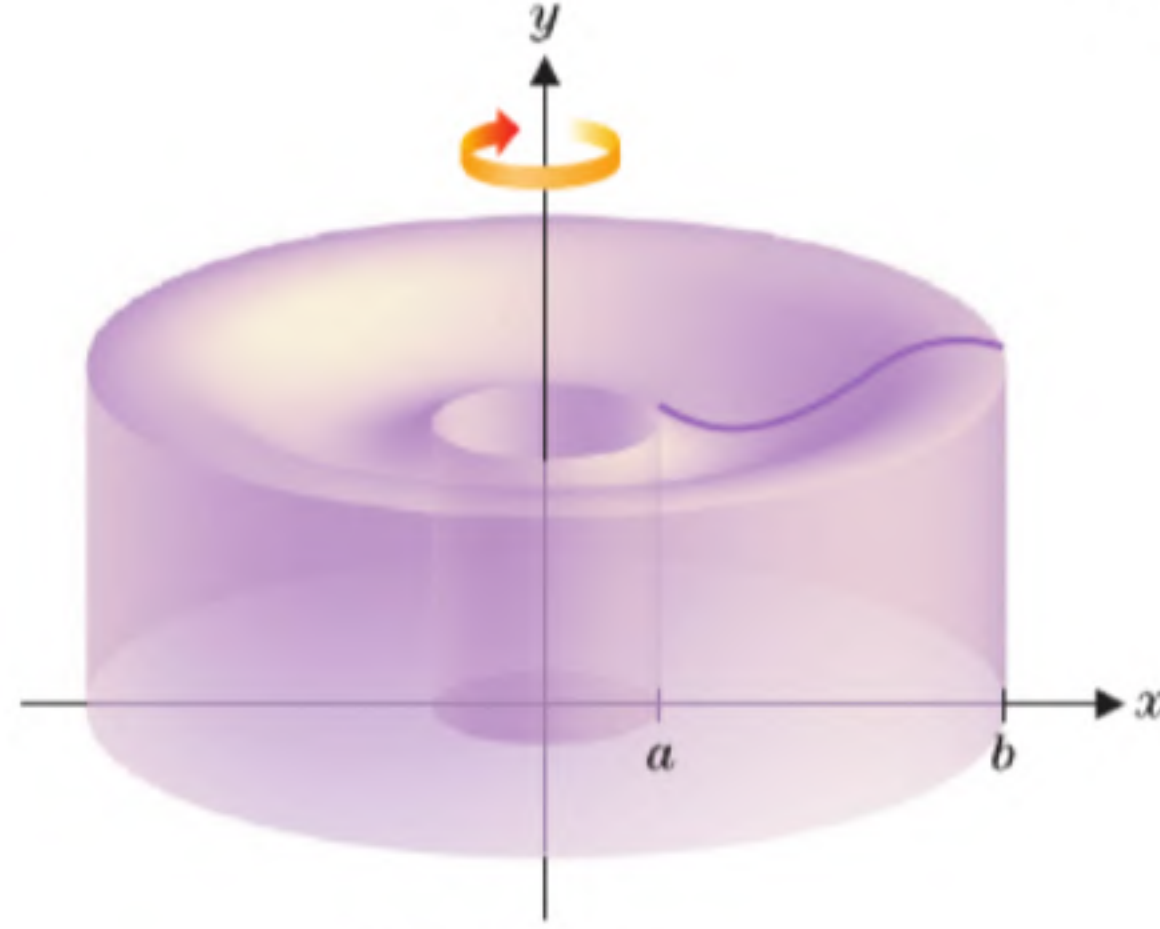
1. قم بتعميم نتيجة التمرين 34 على أي مستطيل. والذي هو. ارسم المستطيل مع $-a \leq x \leq a$ و $-b \leq y \leq b$ ، والقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ والمثلث رؤوسه $(-a, -b)$ و $(0, b)$ و $(a, -b)$.

أثبت أن الأحجام النسبية للمجسم الذي تكوّن بدوران هذه المناطق حول المحور y تكون 3:2:1.

2. قم بدوران الدائرة $(x-2)^2 + y^2 = 1$ حول المحور y . يطلق على المجسم الناتج الشبيه بكعكة حلقيه محلاة اسم **حلقة دورانية**. احسب حجمها. بقی أن الحجم يساوي مساحة الدائرة مضروبة في المسافة التي قطعها مركز الدائرة. وهذا مثال على **نظرية بآبوس**، التي يرجع تاريخها إلى القرن الرابع قبل الميلاد. تحقق من أن النتيجة تنطبق على المثلث الموجود في التمرين 25، الأجزاء (c) و (d).

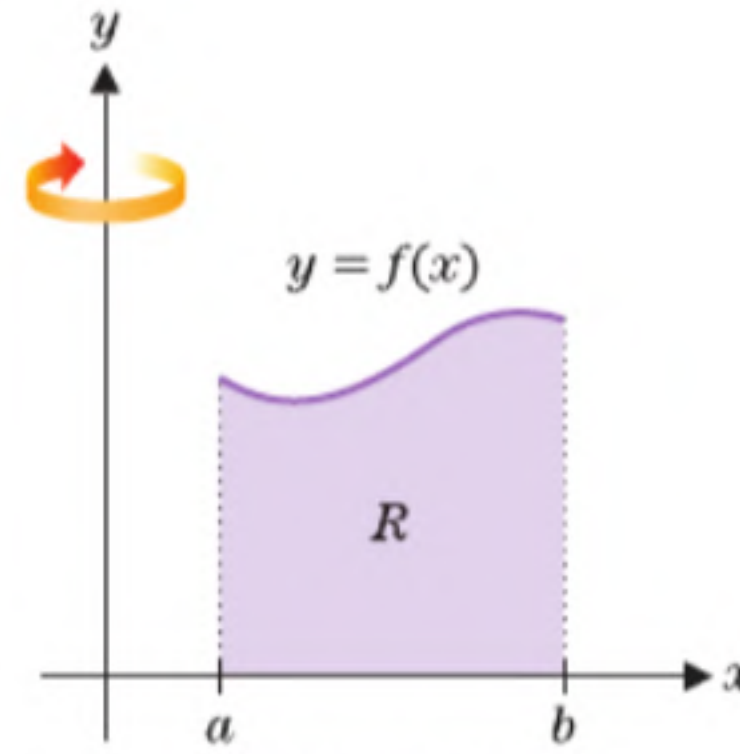
الأحجام بالأسطوانات

في هذا الدرس، نقدم بديلاً لطريقة الحلقات التي تمت مناقشتها في الدرس 6.2. لتكن R ترمز إلى المنطقة المحدودة بالتمثيل البياني $y = f(x)$ والمحور x على الفترة $[a, b]$. حيث $0 < a < b$ و $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$. (أنظر الشكل 6.27a). إذا قمنا بدوران هذه المنطقة حول المحور y ، نحصل على الجسم المبين في الشكل 6.27b. إن إيجاد حجم هذا الجسم بطريقة الحلقات صعب، حيث إننا سنحتاج إلى تقطيع المنطقة إلى عدة أجزاء.



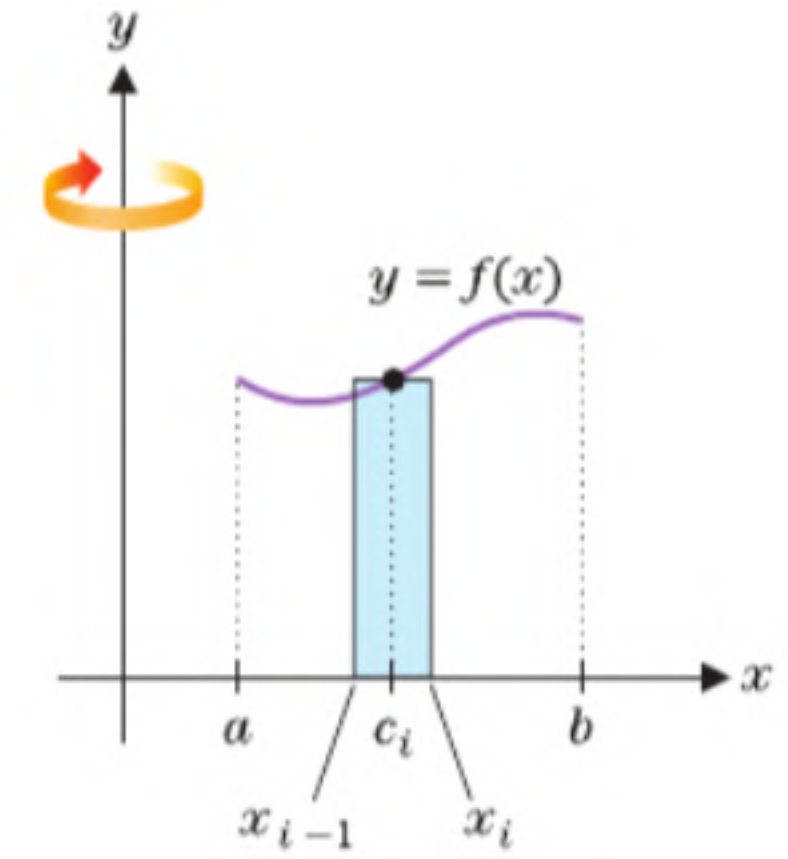
الشكل 6.27b

المجسم الناتج عن الدوران



الشكل 6.27a

الدوران حول المحور y



الشكل 6.28

مستطيل الحد i

وبدلاً من ذلك، نجزئ الفترة $[a, b]$ إلى n فترة جزئية متساوية $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. عند كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ اختر نقطة c_i وقم بإنشاء المستطيل ارتفاعه $f(c_i)$ كما هو موضح في الشكل 6.28. إن تدوير هذا المستطيل حول المحور y يشكل صدفة أسطوانية رفيعة (أي، أسطوانة مجوفة، مثل أنبوب) كما في الشكل 6.29a.

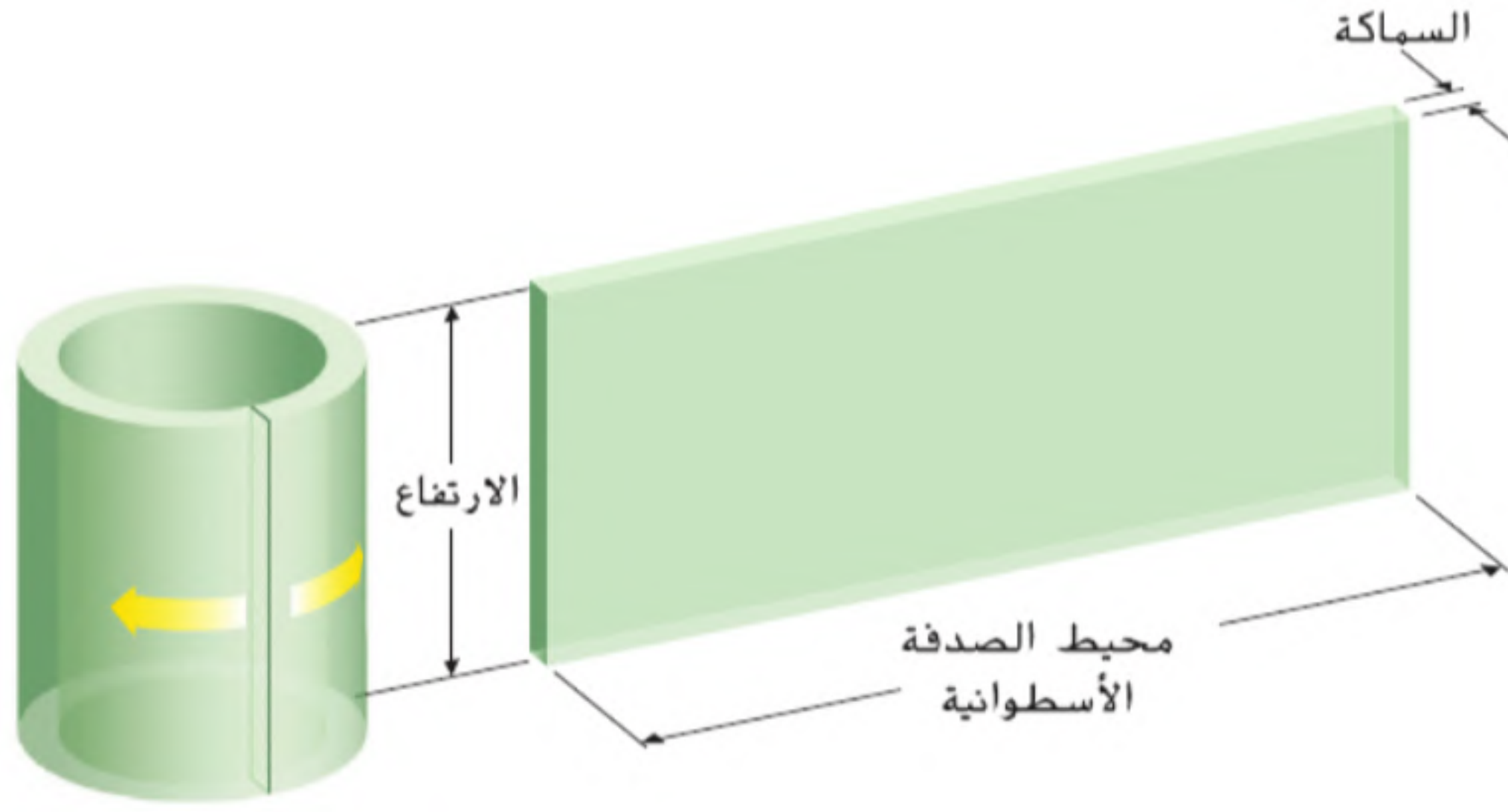
لإيجاد حجم هذه الصدفة، تخيل أنك تقطعها من أعلى لأسفل ثم تقوم بتسوية صدفتها. بعد إجراء هذا، ينبغي أن تحصل بشكل أساسي على لوحة مستطيلة رفيعة، كما يظهر في الشكل 6.29b.

لاحظ أن طول مثل هذه اللوحة الرفيعة يناظر محيط الصدفة الأسطوانية، وهو $2\pi c_i$ نصف القطر $\times 2\pi$. لذلك، فإن حجم V_i للصدفة الأسطوانية عند الحد i يبلغ بشكل تقريبي

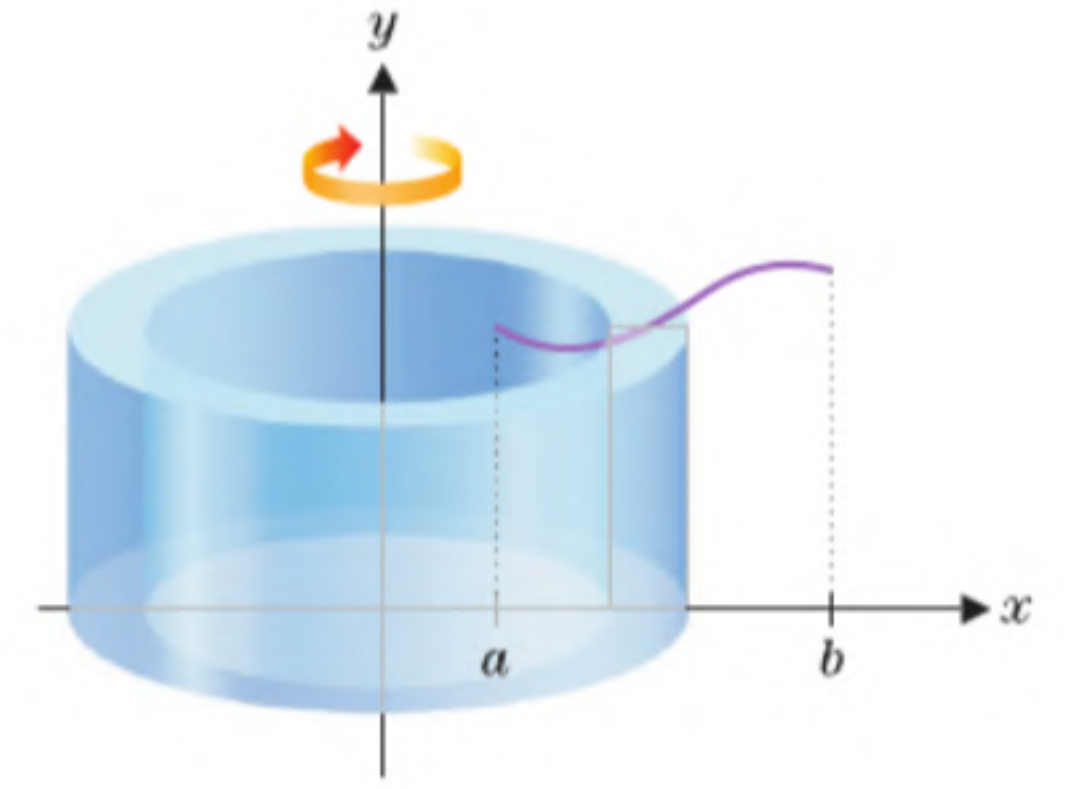
$$\begin{aligned} V_i &\approx \text{الارتفاع} \times \text{السماكة} \times \text{الطول} \\ &= (2\pi \times \text{نصف القطر}) \times \text{الارتفاع} \times \text{السماكة} \\ &\approx (2\pi c_i) \Delta x f(c_i). \end{aligned}$$

يمكن عندئذ تقريب إجمالي حجم V الجسم بإيجاد ناتج جمع أحجام الصدقات الأسطوانيات n :

$$V \approx \sum_{i=1}^n 2\pi \underbrace{c_i}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{f(c_i)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{\Delta x}_{\text{السماكة}}$$



الشكل 6.29b
صدفة أسطوانية مستوية



الشكل 6.29a
صدفة أسطوانية

وكما قلنا، بذلك عدة مرات الآن، يمكننا الحصول على الحجم الدقيق للمجسم بأخذ النهاية عندما $n \rightarrow \infty$ والتعرف على التكامل المحدود الناتج. لدينا

$$(3.1) \quad V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i) \Delta x = \int_a^b \underbrace{2\pi x}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{f(x)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dx}_{\text{السماكة}}$$

حجم مجسم ناتج عن الدوران
(أصداف أسطوانية)

ملحوظة 3.1

لأسباب واضحة، يمكننا تسمية هذا طريقة الأصداف الأسطوانية.

المثال 3.1 استخدام طريقة الأصداف الأسطوانية

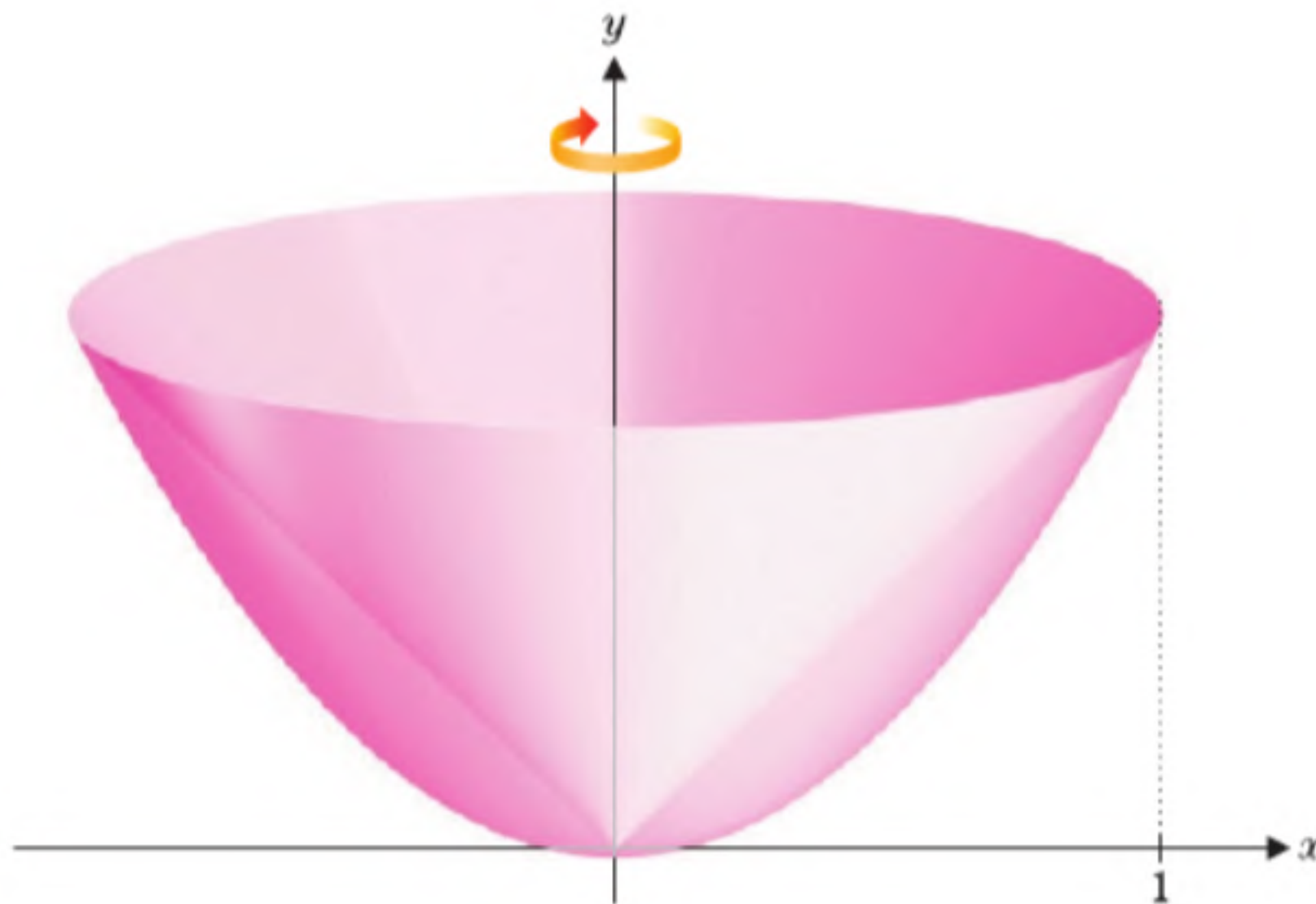
استخدم طريقة الأصداف الأسطوانية لإيجاد حجم المجسم الذي تكوّن بدوران المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x^2$ و $y = x$ في الربع الأول حول المحور y .

الحل من الشكل 6.30a لاحظ أنّ للمنطقة حد أعلى عند $y = x$ وحد أدنى عند $y = x^2$ وتمتد من $x = 0$ إلى $x = 1$. هنا، لقد رسمنا مستطيلاً بسيطاً يولد صدفة أسطوانية. يمكن رؤية المجسم الناتج عن الدوران في الشكل 6.30b. يمكننا كتابة تكامل

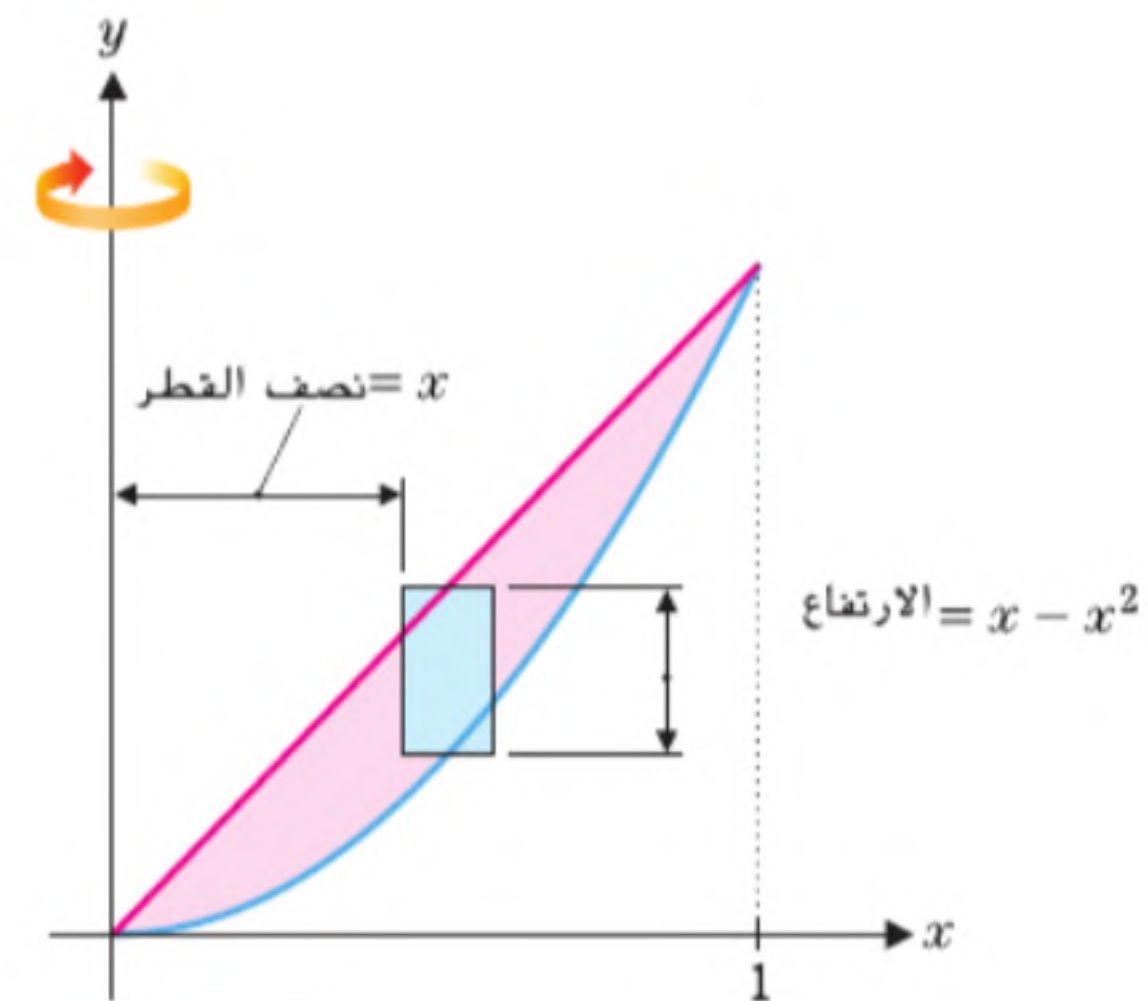
لا تعتمد فقط على حفظ الصيغة (3.1). يجب أن تسعى لفهم معنى المركبات. يسهل إجراء الأمر إذا فكرت فقط في تناظرها مع حجم الصدفة الأسطوانية:

(السماكة) (الارتفاع) (نصف القطر) 2π

إذا فكرت في الأحجام بهذه الطريقة، فلن تجد صعوبة مع طريقة الأصداف الأسطوانية.



الشكل 6.30b
المجسم الناتج عن الدوران



الشكل 6.30a
مستطيل بسيط يولد صدفة أسطوانية

للحجم بتحليل المركبات المتنوعة للمجسم في الشكلين 6.30a و 6.30b. من (3.1). لدينا

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{x}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{(x-x^2)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dx}_{\text{السماكة}}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

يمكننا تعميم هذه الطريقة لحل المسألة في المثال 2.7 الجزء (d) بأسلوب مبسط وأكبر.

المثال 3.2 الحجم حيث الصدقات أبسط من الحلقات

جـ - د حجم المجسم الذي تكوّن بدوران المنطقة المحصورة بين التمثيل البياني $y = 4 - x^2$ والمحور x حول المستقيم $x = 3$.

الحل أنظر بتمعن إلى الشكل 6.31a. حيث رسمنا مستطيلاً بسيطاً يولّد صدفة أسطوانية وإلى المجسم لموضّح في الشكل 6.31b لاحظ أنّ نصف قطر الصدفة الأسطوانية هو المسافة من المستقيم $x = 3$ إلى الصدفة:

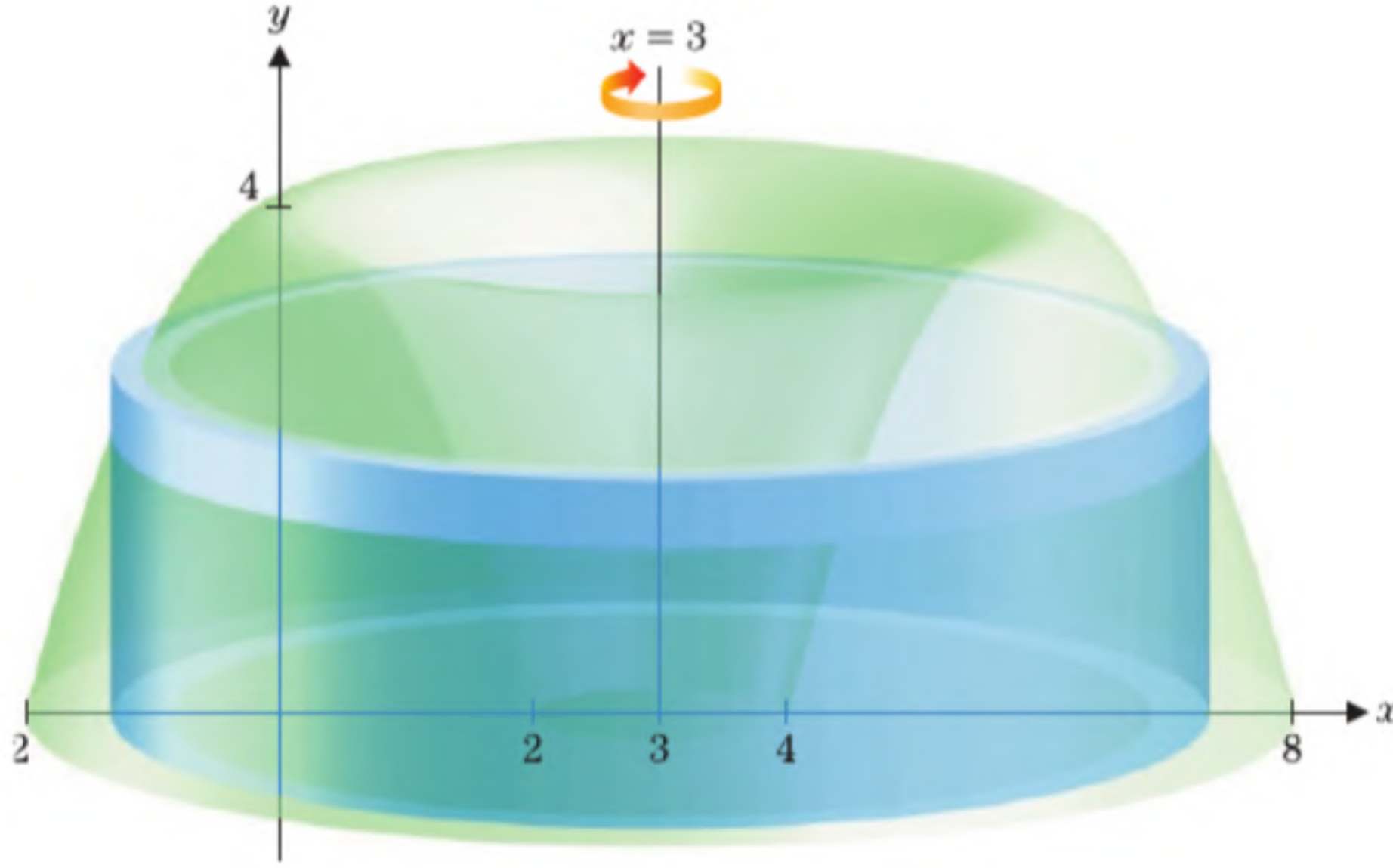
$$r = 3 - x$$

يعطينا هذا الحجم

$$V = \int_{-2}^2 2\pi \underbrace{(3-x)}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{(4-x^2)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dx}_{\text{السماكة}}$$

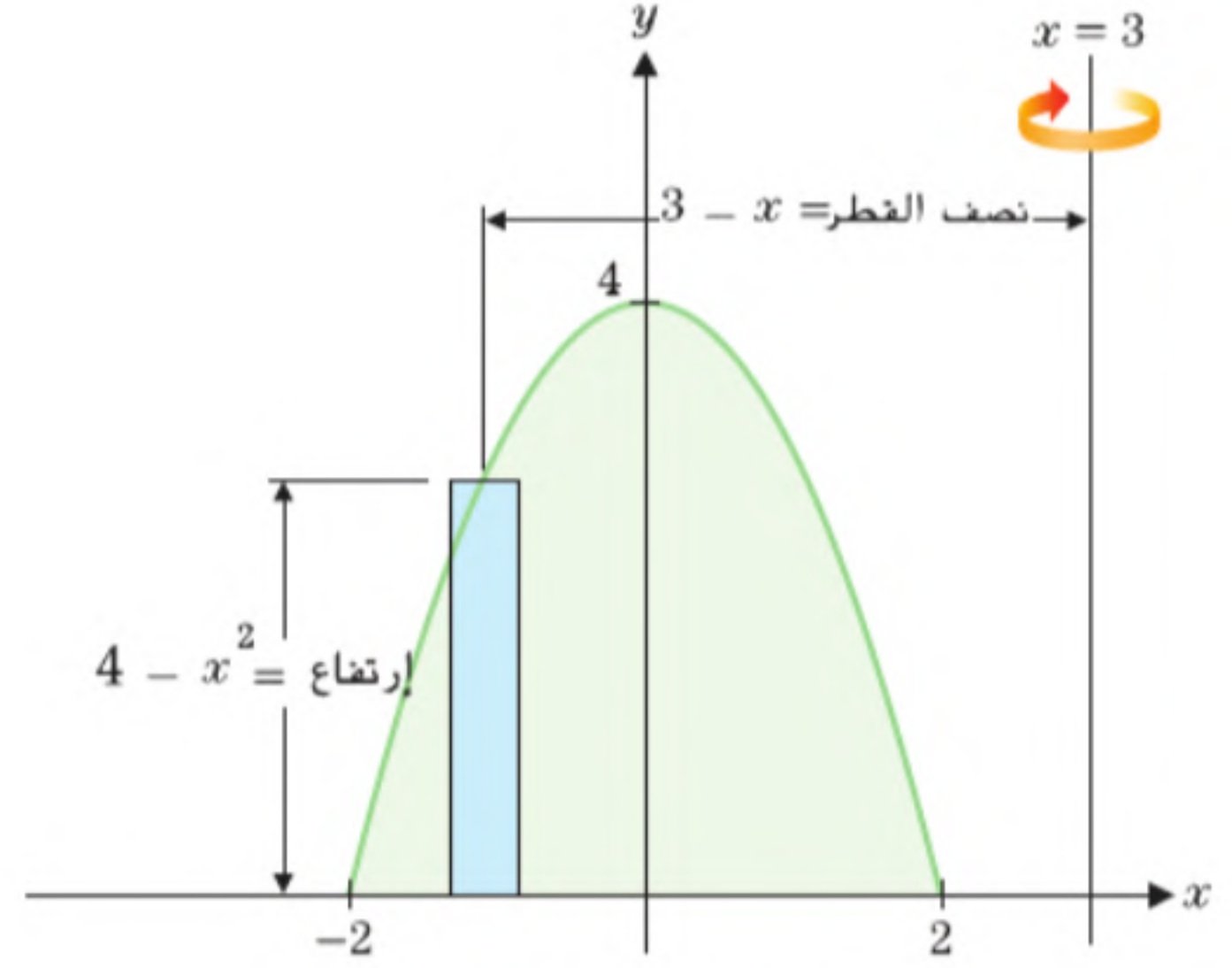
$$= 2\pi \int_{-2}^2 (x^3 - 3x^2 - 4x + 12) dx = 64\pi,$$

حيث نترك التفاصيل الروتينية لعملية حساب التكامل إلى القارئ.



الشكل 6.31b

المجسم الناتج عن الدوران



الشكل 6.31a

مستطيل بسيط يولّد صدفة أسطوانية

ينبغي أن تكون الخطوة الأولى التي تتخذها في عملية حساب الحجم هي تحليل الشكل الهندسي للمجسم وإتخاذ قرار بشأن إذا كان من الأسهل إجراء تكامل بمعلومية x أو y . لاحظ أنّه لأجل مجسم معطى، يكون متغير التكامل في طريقة الأصداف الأسطوانية عكس تمامًا لتلك الخاصة بطريقة الحلقات. لذا، سيحدد اختيارك لمتغير التكامل الطريقة التي تستخدمها.

المثال 3.3 حساب الأحجام باستخدام الأصداف والحلقات

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x$ و $y = 2 - x$ و $y = 0$. احسب حجم الجسم الذي تكوّن بتدوير R حول المستقيمتين (a) $y = 2$ ، (b) $y = -1$ و (c) $x = 3$. **الحل** تبدو المنطقة R في الشكل 6.32a. يشير الشكل الهندسي للمنطقة إلى أنه يجب التفكير في y باعتبارها متغير التكامل. أنظر بتمعن للاختلافات بين الأحجام الثلاثة التالية.

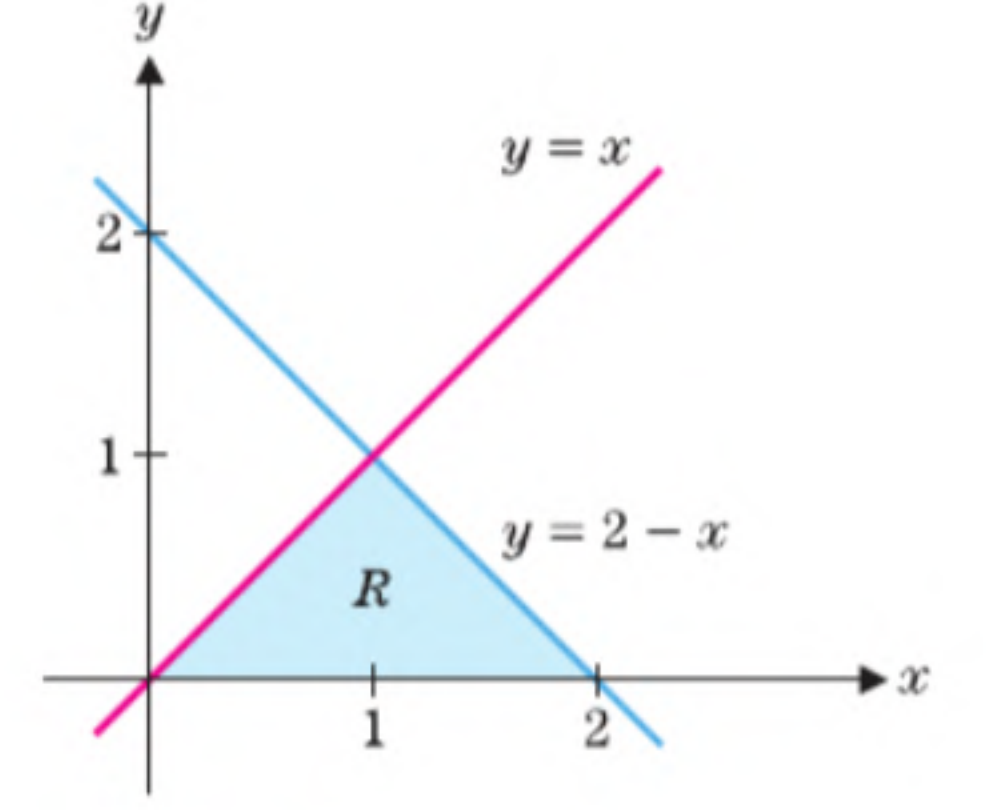
(a) عند تدوير R حول المستقيم $y = 2$ ، لاحظ أنّ نصف قطر الصدف الأسطوانية هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى الصدف: $r = 2 - y$ لكل $0 \leq y \leq 1$. (أنظر الشكل 6.32b). يُعتبر الارتفاع الفرق في قيم x على المنحنيين: عند إجراء الحل لإيجاد x ، نحصل على $x = y$ و $x = 2 - y$. باتباع (3.1)، نحصل على الحجم

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{(2-y)}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{[(2-y)-y]}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dy}_{\text{السمك}} = \frac{10}{3}\pi$$

حيث نترك التفاصيل الروتينية لعملية الحساب إليك.

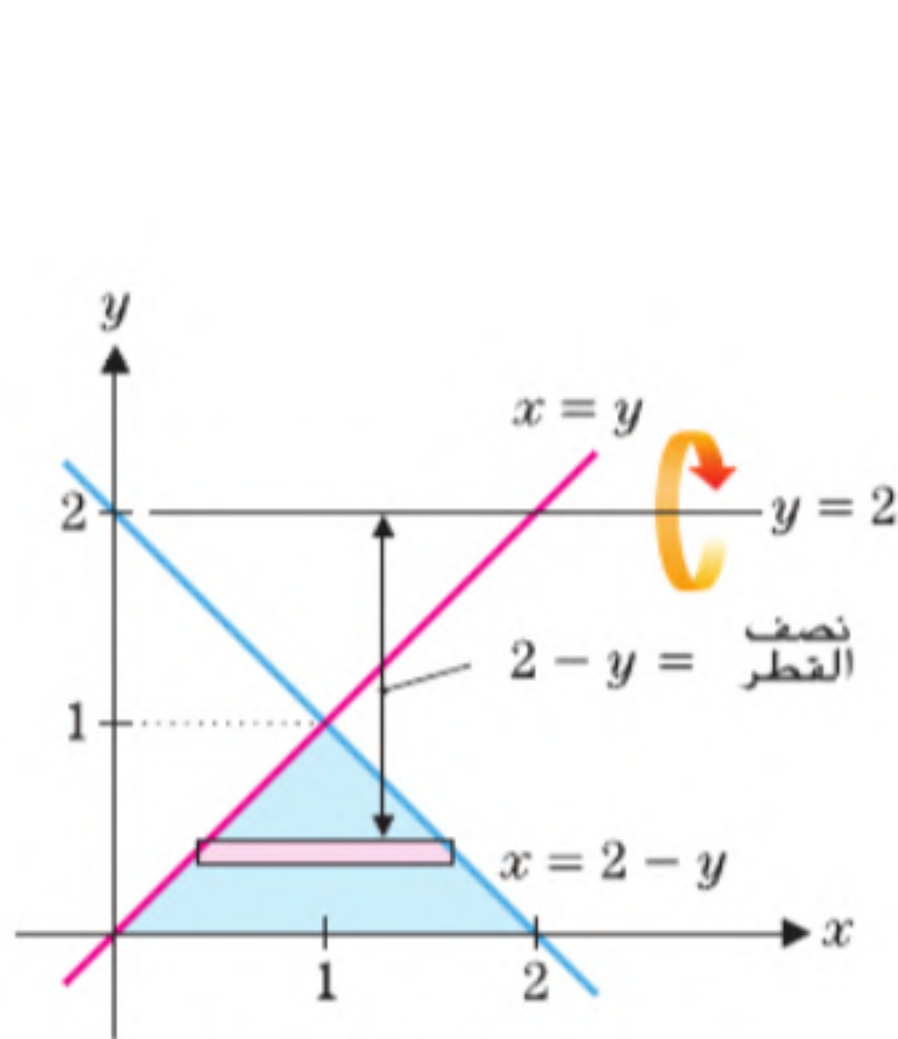
(b) عند تدوير R حول المستقيم $y = -1$ ، لاحظ أنّ ارتفاع الأصداف الأسطوانية هو مماثل للموجود في الجزء (a). ولكن نصف القطر r هو المسافة من المستقيم $y = -1$ إلى الصدف: $r = y - (-1) = y + 1$. (أنظر الشكل 6.32c). يعطينا هذا الحجم

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{[y - (-1)]}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{[(2-y)-y]}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dy}_{\text{السمك}} = \frac{8}{3}\pi$$



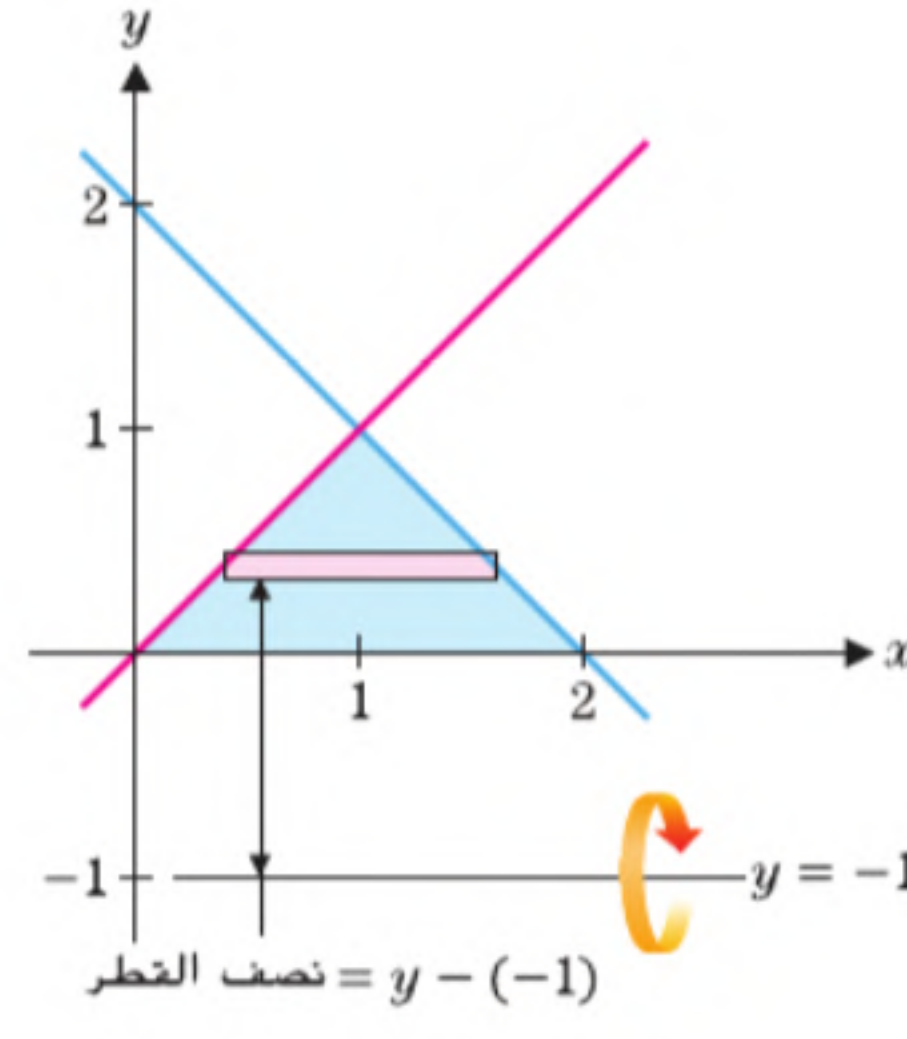
الشكل 6.32a

$y = 2 - x$ و $y = x$



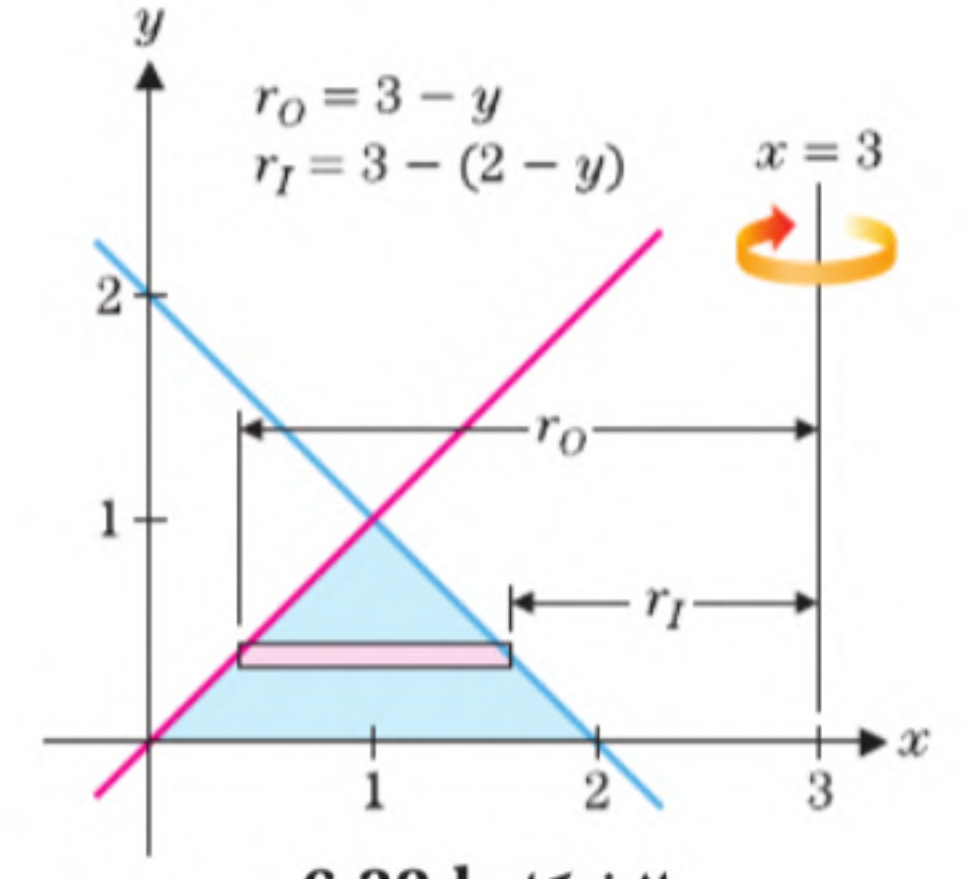
الشكل 6.32b

الدوران حول $y = 2$



الشكل 6.32c

الدوران حول $y = -1$



الشكل 6.32d

الدوران حول $x = 3$

(c) في النهاية، عند تدوير R حول المستقيم $x = 3$ ، لاحظ أنّه لإيجاد الحجم باستخدام الأصداف الأسطوانية، سنحتاج إلى تقسيم R إلى جزأين، حيث إنّ ارتفاع الأصداف الأسطوانية سيكون مختلفاً بالنسبة لـ $x \in [0, 1]$ عن $x \in [1, 2]$. (فكر في هذا الأمر بعض الشيء). على الجانب الآخر، يمكن إجراء هذا بسهولة بواسطة طريقة الحلقات. لاحظ أنّ نصف القطر الخارجي هو المسافة من المستقيم $x = 3$ إلى المستقيم $x = y$: $r_O = 3 - y$ ، بينما نصف القطر الداخلي هو المسافة من المستقيم $x = 3$ إلى المستقيم $x = 2 - y$: $r_I = 3 - (2 - y)$. (أنظر الشكل 6.32d). يعطينا هذا الحجم

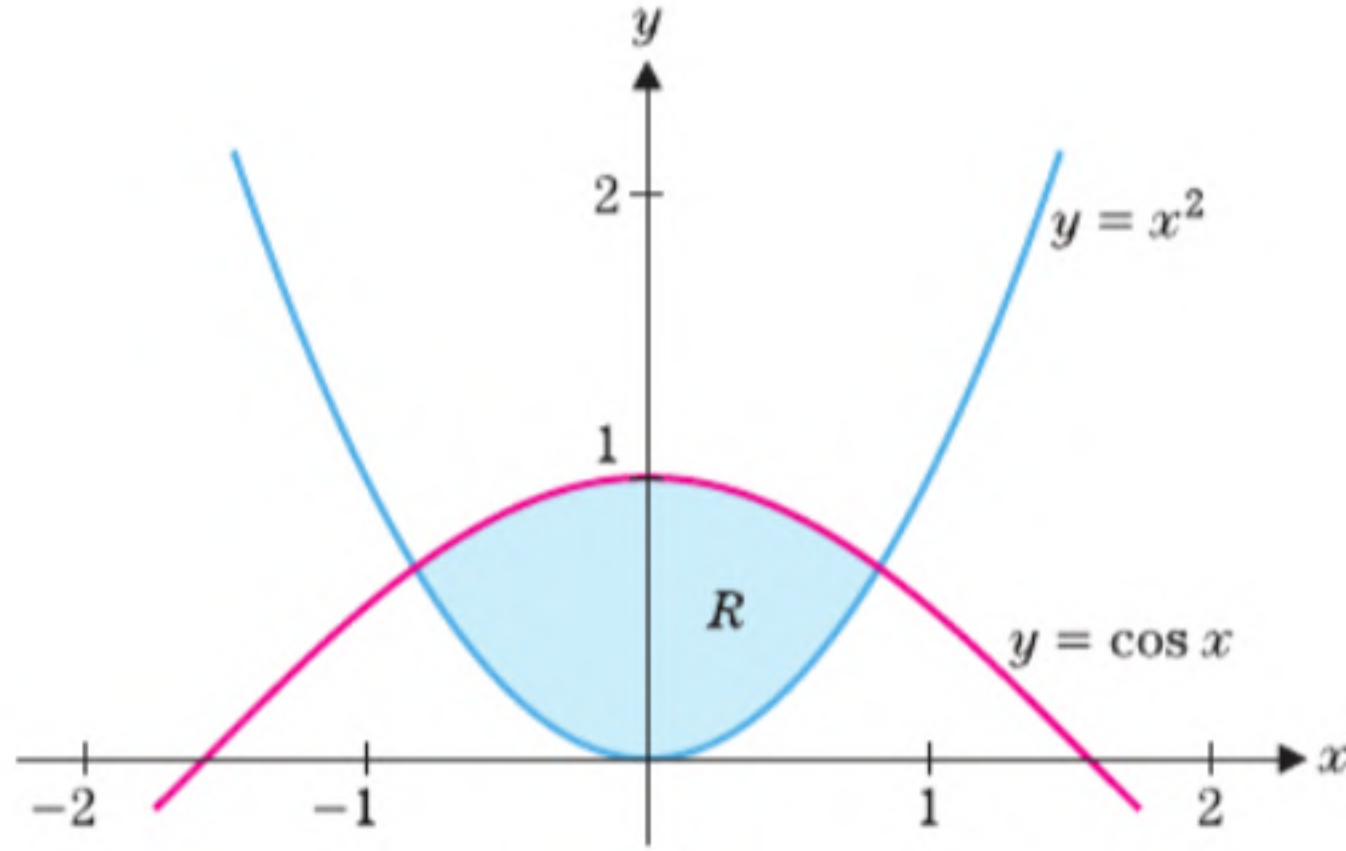
$$V = \int_0^1 \pi \left\{ \underbrace{(3-y)^2}_{\text{مربع نصف قطر خارجي}} - \underbrace{[3-(2-y)]^2}_{\text{مربع نصف قطر داخلي}} \right\} dy = 4\pi$$

مرة أخرى، ينبغي ملاحظة أهمية رسم المنطقة وتسميتها بعناية. سيسهل إجراء ذلك من إعداد التكامل بشكل صحيح. في النهاية، قم بكل ما يلزم لتقدير التكامل. إذا كنت لا تعرف طريقة تقديره، يمكنك المحاولة من خلال CAS الخاص بك أو قم بتقريبه عددياً (مثال بواسطة قاعدة سمبسون).

المثال 3.4 تقريب الأحجام باستخدام الأصداف والحلقات

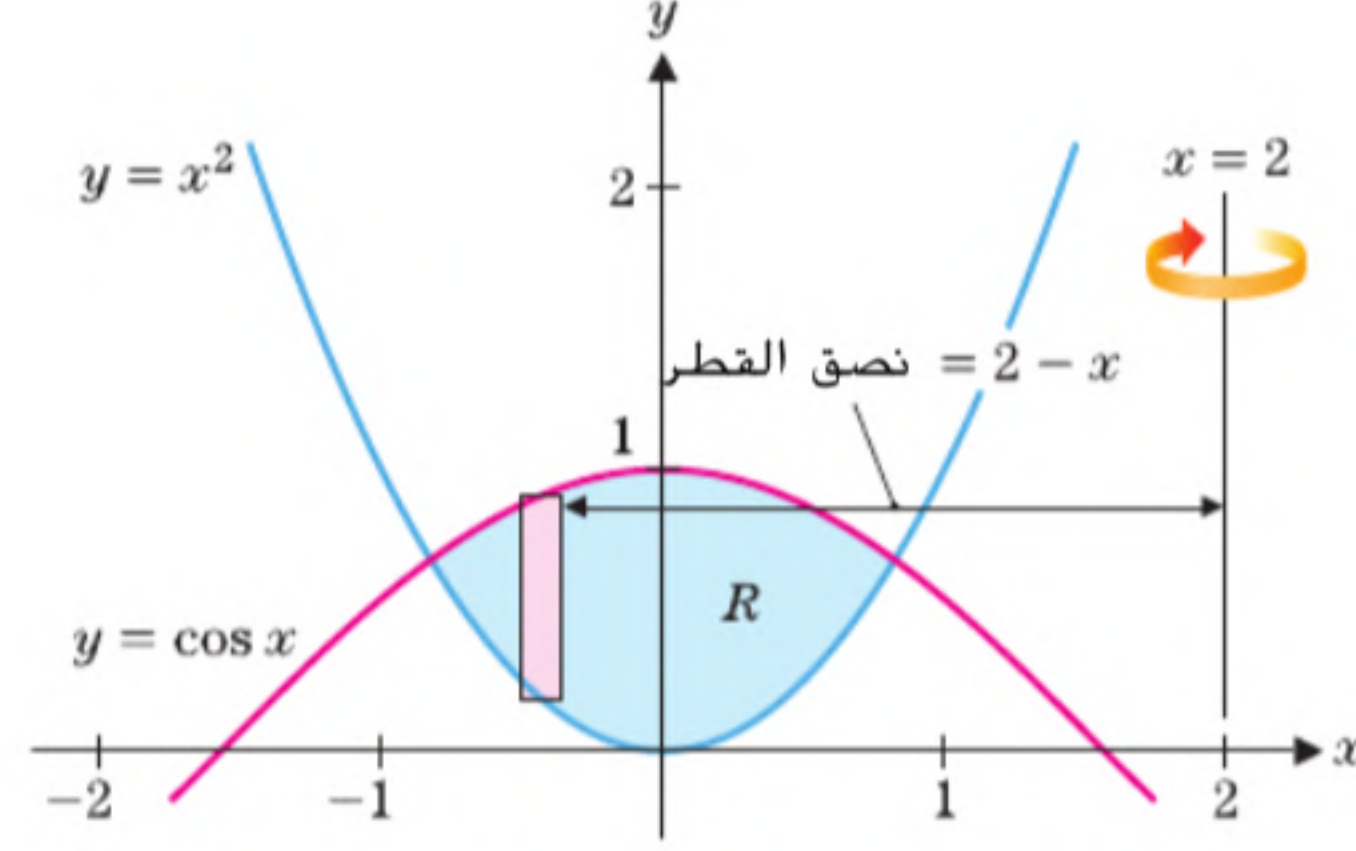
لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \cos x$ و $y = x^2$. احسب حجم الجسم الذي تكوّن بدوران R حول المستقيمين (a) $x = 2$ و (b) $y = 2$.

الحل أولاً، نرسم المنطقة R . (أنظر الشكل 6.33 a) بما أنّ x يتم تحديد كل من الجزء الأعلى والأدنى لـ R بواسطة منحنى بالشكل $y = f(x)$ ، سنرغب في إجراء تكامل بمعلومية x . نبحث تاليًا عن نقاط تقاطع المنحنيين، بحل المعادلة $\cos x = x^2$. نظرًا إلى أنّه لا يمكننا حل هذا بالضبط، يجب أن نستخدم طريقة تقريبية (مثال طريقة نيوتن) للحصول على التقاطعات التقريبية عند $x = \pm 0.824132$.



الشكل 6.33b

الدوران حول $x = 2$



الشكل 6.33a

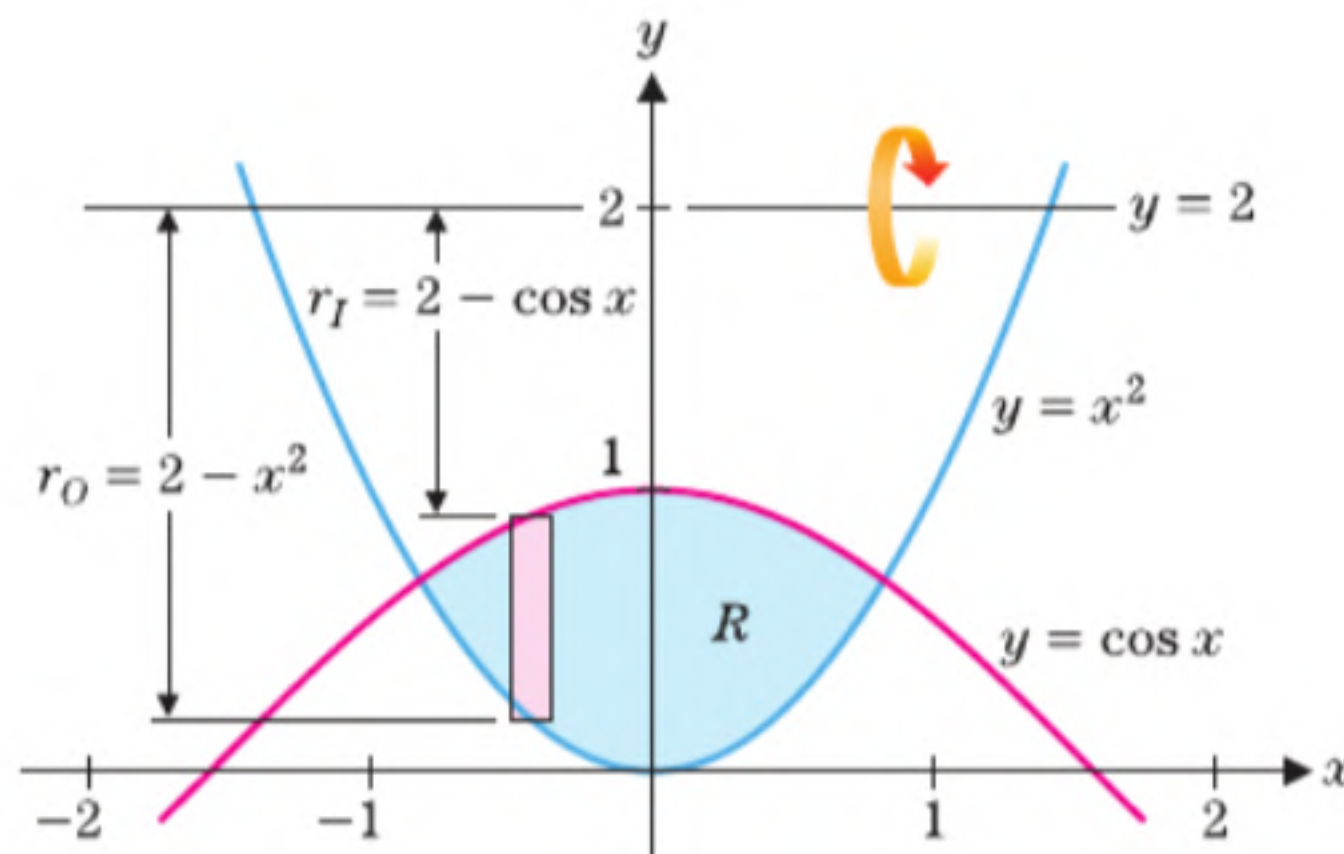
$y = \cos x, y = x^2$

(a) بدورنا المحلّة حول المستقيم $x = 2$. ينبغي أن نستخدم أهداف أسطوانية. (أنظر الشكل 6.33b). في هذه الحالة، لاحظ أنّ نصف القطر r للصدفة الأسطوانية هو المسافة من المستقيم $x = 2$ إلى الصدفة: $r = 2 - x$. بينما ارتفاع الصدفة هو $\cos x - x^2$. نحصل على الحجم

$$V \approx \int_{-0.824132}^{0.824132} 2\pi \underbrace{(2 - x)}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{(\cos x - x^2)}_{\text{الارتفاع}} dx \approx 13.757$$

حيث قربنا قيمة التكامل عدديًا.

(b) بدوران المنطقة حول المستقيم $y = 2$. (أنظر الشكل 6.33c). نستخدم طريقة الحلقات. في هذه الحالة، لاحظ أنّ نصف القطر الخارجي لـ حلقة هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المنحنى $y = x^2$: $r_O = 2 - x^2$. بينما نصف القطر الداخلي هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المنحنى $y = \cos x$: $r_I = 2 - \cos x$. (مرة أخرى، أنظر



الشكل 6.33c

الدوران حول $y = 2$

الشكل 6.33c. يعطينا هذا الحجم

$$V \approx \int_{-0.824132}^{0.824132} \pi \left[\underbrace{(2-x^2)^2}_{\text{مربع نصف قطر اهر}} - \underbrace{(2-\cos x)^2}_{\text{مربع نصف قطر داخلي}} \right] dx \approx 10.08$$

حيث قَرَّبنا قيمة التكامل عدديًا.

نختم هذا الدرس بملخص لاستراتيجيات حساب أحجام المجسّمات الناتجة عن الدوران.

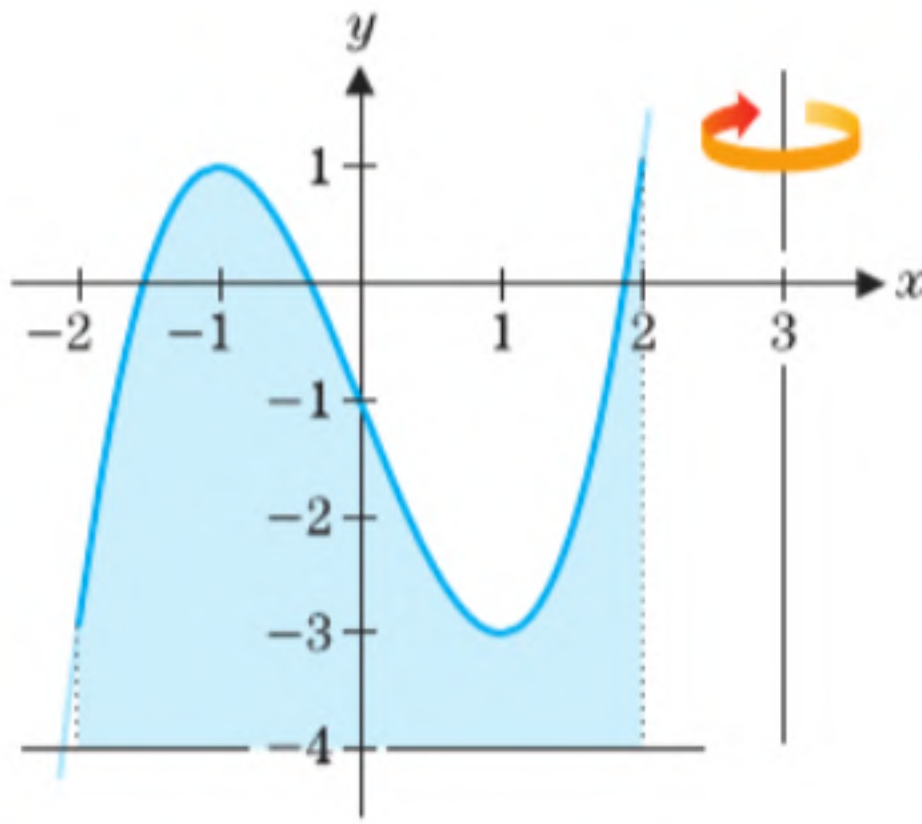
حجم مجسّم ناتج عن الدوران

- ارسم المنطقة التي سيتم دوائها ومحور الدوران.
- حدد متغيّر التكامل Δ إذا كان في المنطقة حد أعلى وحد أدنى معرّفان جيدًا. y إذا كان في المنطقة حد أيسر وأيمن معرّفان جيدًا.
- استنأ إلى محور الدوران ومتغيّر التكامل. حدد الطريقة (الأقراص أو الحلقات لتكامل x - حول محور أفقي أو تكامل y حول محور رأسي، الأصداف لتكامل x حول محور رأسي أو تكامل y حول محور أفقي).
- عيّن على الرسم نصف القطر الداخلي ونصف القطر الخارجي للأقراص وللحلقات وعيّن نصف القطر والارتفاع للأصداف الأسطوانية.
- قم بإعداد التكامل (التكاملات) وجد القيمة.

تمارين 6.3

تمارين كتابية

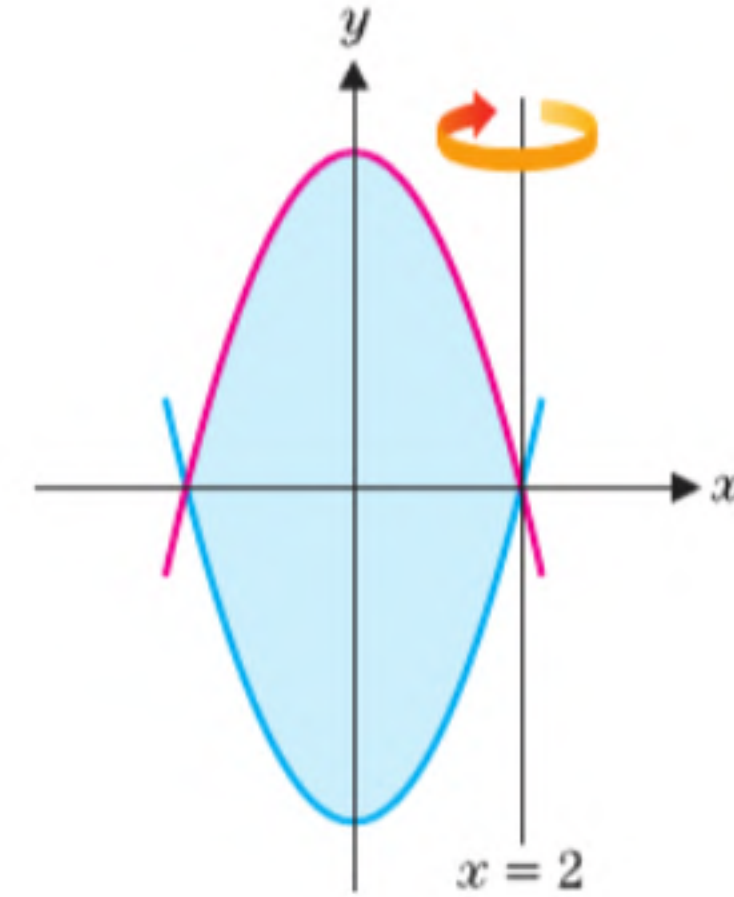
4. على فرض أنّ المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^3 - 3x - 1$ و $y = -4$ ، $-2 \leq x \leq 2$ ، يتم دورانها حول $x = 3$. اشرح ما سيلزم لحساب الحجم باستخدام طريقة الحلقات وما سيلزم لاستخدام طريقة الأصداف الأسطوانية. أي طريقة تفضل ولماذا؟



1. اشرح السبب في أنّ طريقة الأصداف الأسطوانية تنتج تكاملاً حيث يُعتَبَر x متغيّر التكامل عند الدوران حول محور رأسي. (قم بوصف موقع الأصداف والاتجاه الذي سوف تأخذه عندما تتحرّك من صفة إلى صفة).

2. اشرح لم طريقة الأصداف الأسطوانية لها الشكل نفسه سواء كان للمجسّم ثقب أو تجويف. أي إنّه ما من حاجة لطرائق منفصلة مماثلة للأقراص والحلقات.

3. على فرض أنّ المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2 - 4$ و $y = 4 - x^2$ يتم تدويرها حول المستقيم $x = 2$. اشرح بدقة الطريقة (الأقراص أو الحلقات أو الأصداف) التي ستكون الأسهل في الاستخدام لحساب الحجم.



في التمارين 1-8، ارسم المنطقة وارسم صفة نوعية وحدد نصف قطر وارتفاع كل صفة واحسب الحجم.

1. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحور x ، $-1 \leq x \leq 2$ حول $x = 2$.
2. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحور x ، $-1 \leq x \leq 1$ حول $x = -2$.

3. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$ و $y = -x$ و $x = 1$ حول المحور y
4. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$ و $y = -x$ و $x = 1$ حول $x = 1$
5. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x^2 + 1}$ و $y = 0$ و $0 \leq x \leq 4$ حول $x = 0$
6. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 0$ و $-1 \leq x \leq 1$ حول $x = 2$
7. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x^2 + y^2 = 1$ حول $y = 2$
8. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x^2 + y^2 = 2y$ حول $y = 4$

في التمارين 9-16، استخدم الأصداف الأسطوانية لحساب الحجم.

9. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ حول $x = -2$
10. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ حول $x = 2$
11. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 4$ حول $y = -2$
12. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 4$ حول $y = 2$
13. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x + 1$ و $y = x^2 - 2$ حول $x = 3$
14. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$ و $y = x^2 - 2$ حول $x = 3$
15. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = (y - 1)^2$ و $x = 9$ حول $y = 5$
16. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = (y - 1)^2$ و $x = 9$ حول $y = -3$

في التمارين 17-26، استخدم أفضل طريقة مناسبة لإيجاد كل حجم.

17. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 4 - x$ و $y = 4$ حول $y = x$
- (a) المحور x (b) المحور y (c) $x = 4$ (d) $y = 4$
18. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x + 2$ و $y = -x - 2$ حول $x = 0$
- (a) $y = -2$ (b) $x = -2$ (c) المحور y (d) المحور x
19. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x$ و $y = x^2 - 6$ حول
- (a) $x = -6$ (b) $y = 3$ (c) $x = -3$ (d) $y = -3$
20. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x = y^2$ و $x = 2 + y$ حول
- (a) $x = -1$ (b) $y = -1$ (c) $x = -2$ (d) $y = -2$

21. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ ($x \geq 0$) و $y = 2 - x$ حول $x = 0$
- (a) المحور x (b) المحور y (c) $x = 1$ (d) $y = 2$

22. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 2 - x^2$ و $y = x$ ($x > 0$) حول
- (a) المحور x (b) المحور y (c) $x = -1$ (d) $y = -1$

23. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 2 - x$ و $y = x - 2$ حول
- (a) المحور x (b) المحور y

24. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = e^x - 1$ و $y = 2 - x$ حول
- (a) المحور x (b) المحور y

25. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \cos x$ و $y = x^4$ حول
- (a) $x = 2$ (b) $y = 2$ (c) المحور x (d) المحور y

26. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sin x$ و $y = x^2$ حول
- (a) $y = 1$ (b) $x = 1$ (c) المحور y (d) المحور x

في التمارين 27-30، يمثل التكامل حجم مجسم. ارسم المنطقة ومحاور الدوران اللذين ينتج عنهما الجسم.

27. $\int_0^1 \pi[(\sqrt{y})^2 - y^2] dy$ 28. $\int_0^2 \pi(4 - y^2)^2 dy$
29. $\int_0^1 2\pi x(x - x^2) dx$ 30. $\int_0^2 2\pi(4 - y)(y + y) dy$

31. استخدم طريقة مشابهة لاشتقاقنا للمعادلة (3.1) لاشتقاق الحقيقة التالية حول دائرة نصف قطرها R .
حيث $c(r) = 2\pi r$ المساحة، $\pi R^2 = \int_0^R c(r) dr$ هو محيط دائرة نصف قطرها r .

32. لقد لاحظت على الأرجح أن محيط دائرة $(2\pi r)$ يساوي الاشتقاق بمعلومية r مساحة الدائرة (πr^2) . استخدم التمرين 31 لشرح سبب أن هذا ليس مصادفة.

التطبيقات

33. تتكون خرزة مهيئت بأحداث ثقب طول نصف قطره $\frac{1}{2}$ cm من مركز كرة طول نصف قطرها 1 cm. اشرح سبب إعطاء الحجم بواسطة $\int_{1/2}^1 4\pi x \sqrt{1 - x^2} dx$. جـ - د قيمة هذا التكامل أو احسب الحجم في طريقة أسهل بعض الشيء.

34. جـ - د حجم الثقب في التمرين 33 بحيث يكون قد تمت إزالة نصف الحجم بالضبط.

35. إن كتيب نمل شبيه بالشكل الذي تكوّن عند تدوير المنطقة المحدودة بواسطة $y = 1 - x^2$ والمحور x حول المحور y . يزيل باحث نواة أسطوانية من مركز الكتيب. كم ينبغي أن يكون طول نصف القطر لإعطاء الباحث 10% من التربة؟

36. الرسم التخطيطي لكرة رجبي على شكل $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{16} = 1$. تُعدّ الكرة نفسها ناتج تدوير هذا القطع الناقص حول المحور x . جـ - د حجم الكرة.



1. يتم إحداث ثقب طول نصف قطره r في مركز كرة طول نصف قطرها R . احسب الحجم الذي تمت إزالته بدلالة R و r . احسب طول L للثقب بدلالة R و r . أعد كتابة الحجم بدلالة L . هل من المعقول اعتبار أن الحجم الذي تمت إزالته يعتمد على L وليس R ؟

2. في كل حالة، ارسم الجسم ووجد الحجم الذي تكوّن بدوران المنطقة حول (i) المحور x و (ii) المحور y .
احسب الحجم بالضبط إن أمكن وقدره عدديًا إذا لزم الأمر. (a) منطقة محدودة بواسطة $y = \sec x \sqrt{\tan x + 1}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{\pi}{4}$. (b) منطقة محدودة بواسطة $x = \sqrt{y^2 + 1}$, $x = 0$, $y = -1$ و $y = 1$. (c) منطقة محدودة بواسطة $y = \frac{\sin x}{x}$, $y = 0$, $x = 0$ و $x = \pi$. (d) منطقة محدودة بواسطة $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $y = 0$ و $y = 0$. (e) منطقة محدودة بواسطة $y = e^{-x^2}$ و $y = (x - 1)^2$.

طول القوس ومساحة السطح

في هذا الدرس، سنحسب طول منحنى في بعدين ومساحة سطح في ثلاثة أبعاد. كما هو الحال دائماً، انتبه بصورة خاصة للمشتقات.

طول القوس

كيف يمكننا إيجاد طول جزء من منحنى sine الموضح في الشكل 6.34a؟ (نطلق على طول منحنى اسم **طول القوس** الخاص به). إذا كان المنحنى بالفعل قطعة من الخيط، يمكنك جعل الخيط مستقيماً ثم القيام بقياس طوله بمسطرة. مع وضع هذا في الاعتبار، نبدأ بتقريب.

نقوم أولاً بتقريب المنحنى مع عدة قطع مستقيمة متصلة ببعضها البعض. في الشكل 6.34b، تربط القطع المستقيمة النقاط $(0, 0)$ ، $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ، $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ، $(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ و $(\pi, 0)$ على المنحنى $y = \sin x$. يعطى تقريب طول القوس s للمنحنى من ناتج جمع أطوال هذه القطع المستقيمة:

$$s \approx \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 3.79$$

يمكن أن نلاحظ أن هذا التقدير صغير جداً. (ما السبب وراء هذا؟) سنقوم بتحسين التقريب الذي نجريه بطريقة استخدام أكثر من أربع قطع مستقيمة. في الجدول الموجود على اليسار، نعرض تقديرات لطول المنحنى باستخدام n قطع مستقيمة للقيم الأكبر لـ n . كما تتوقع، ستقترب قيمة التقريب من طول المنحنى الفعلي بازدياد عدد القطع المستقيمة. من المفترض أن تبدو هذه الفكرة العامة مألوفة.

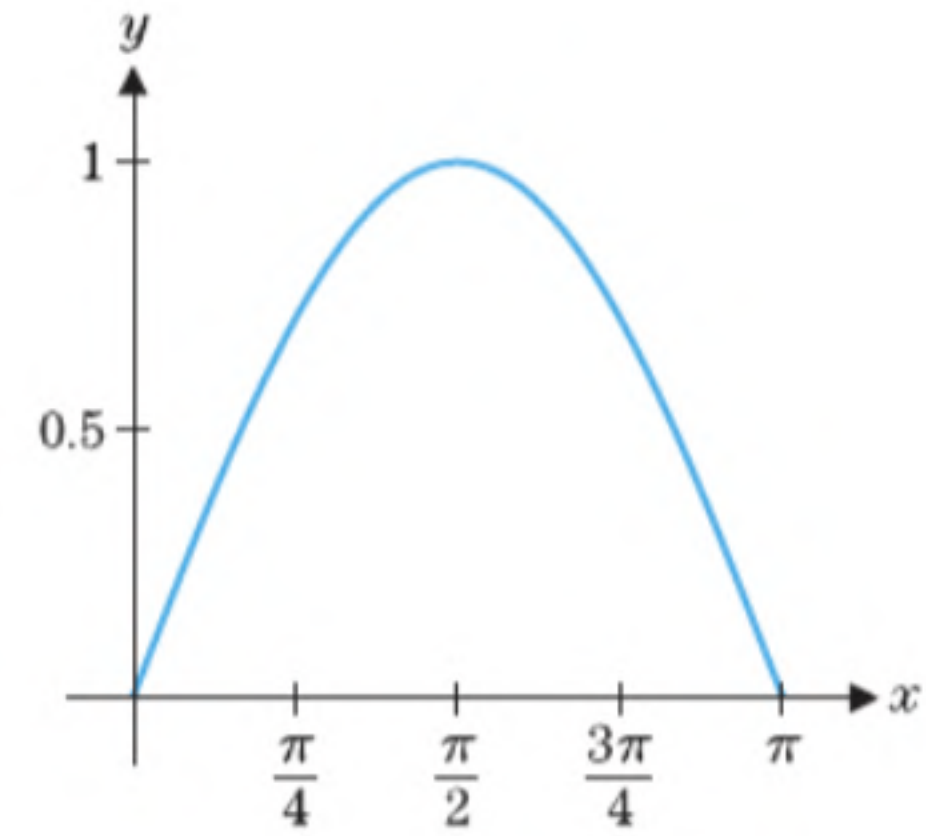
نقوم بمزيد من التطوير لهذا المفهوم للمسائل العامة بشكل أكبر لإيجاد طول قوس المنحنى $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$. وهنا، سوف نفترض أن f متصلة على $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على (a, b) . (أين رأيت مثل هذه الفرضيات من قبل؟) كالعادة، بدأنا بتجزئة الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية: $i = 1, 2, \dots, n$. لكل $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، حيث $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

بين كل زوج من النقاط المتجاورة على المنحنى، $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ و $(x_i, f(x_i))$ ، نقرب طول القوس s_i من مسافة المستقيم بين النقطتين. (انظر الشكل 6.35 في الصفحة التالية). من قانون المسافة المستخدم، يوجد لدينا

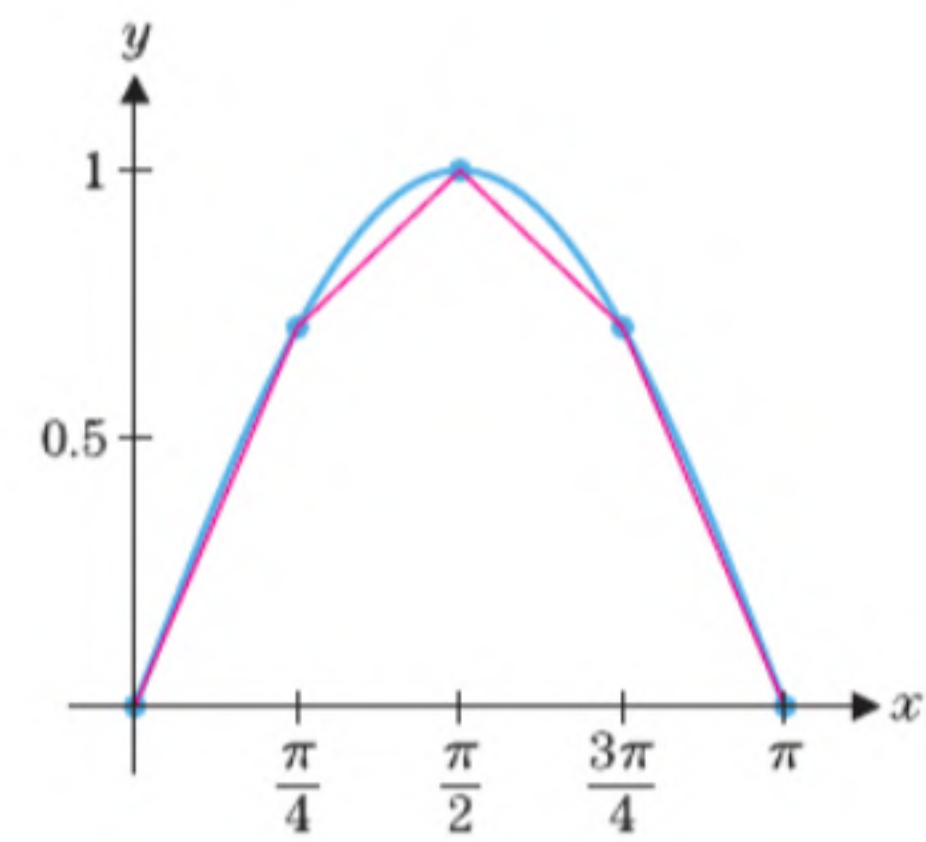
$$s_i \approx d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

حيث إن f متصلة لكل القيم على $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على (a, b) ، f متصلة أيضاً على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ وقابلة للإشتقاق على (x_{i-1}, x_i) . بواسطة نظرية القيمة المتوسطة، يوجد لدينا إذاً

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$



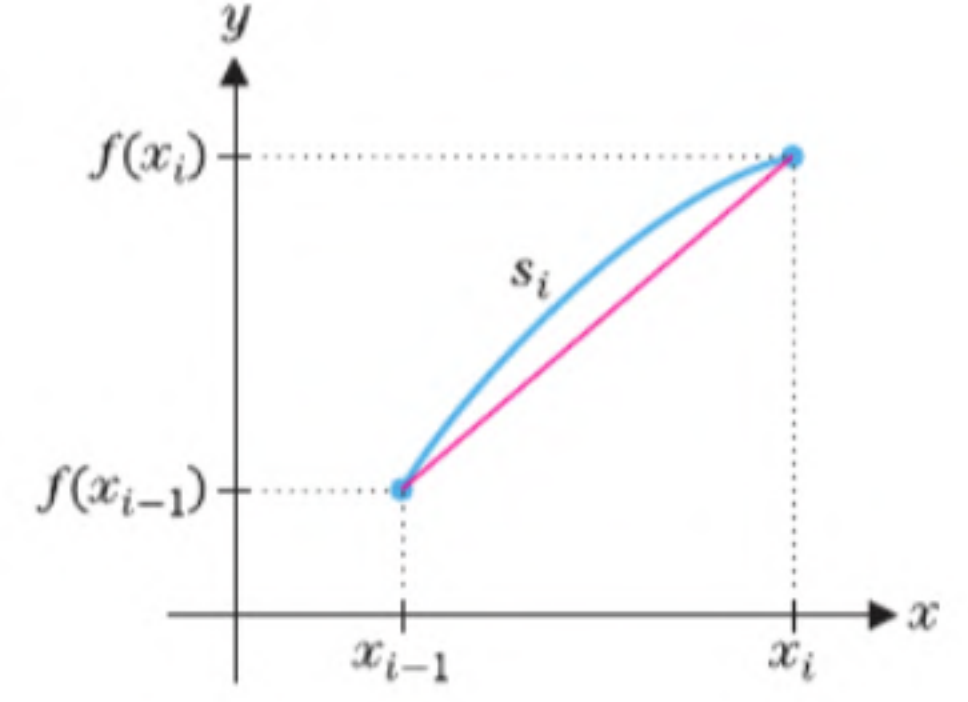
الشكل 6.34a
 $y = \sin x$



الشكل 6.34b
تقريب أربع قطع مستقيمة
 $y = \sin x$

الطول	n
3.8125	8
3.8183	16
3.8197	32
3.8201	64
3.8202	128

$$\begin{aligned}
& \text{لبعض الأعداد } c_i \in (x_{i-1}, x_i) \text{ يعطينا ذلك التقريب} \\
s_i & \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \\
& = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2} \\
& = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x
\end{aligned}$$



الشكل 6.35

تقريب المستقيم لطول القوس

بجمع أطوال قطع مستقيمة عددها n ، نحصل على تقريب بالطول الكلي للقوس،

$$s \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x$$

لاحظ أنه كلما كبرت قيمة n ، ينبغي أن يبلغ هذا التقريب طول القوس بالضبط، وهو،

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x$$

يجب عليك التعرف على هذا الأمر باعتباره النهاية لمجموع ريمان لـ $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ ، بحيث يتم إعطاء طول القوس بالضبط من التكامل المحدود:

(4.1)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

طول قوس $y = f(x)$
على الفترة $[a, b]$

حيثما توجد النهاية.

ملحوظة 4.1

قانون طول القوس بسيط للغاية. للأسف، عدد قليل جدًا من الدوال ينتج تكاملات لطول القوس يمكن إيجاد قيمته بالضبط. ينبغي أن تتوقع استخدام أسلوب تكامل عددي على آلتك الحاسبة أو الحاسوب الخاص بك لحساب معظم أطوال الأقواس.

المثال 4.1 استخدام قانون طول القوس

جـ - د طول القوس الخاص بجزء من منحنى $y = \sin x$ مع $0 \leq x \leq \pi$. (لقد قدّ رنا ذلك في المثال 3.79 بعد المقدمة).

الحل من (4.1)، طول القوس

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx$$

حاول إيجاد دالة أصلية لـ $\sqrt{1 + \cos^2 x}$ ، لكن تجد أول ذلك لفترة طويلة. (إنّ أفضل ما يمكن أن يقوم به CAS الخاص بنا هو $\sqrt{2} \text{EllipticE}[x, \frac{1}{2}]$ ، والذي لا يبدو مفيداً بشكل خاص). باستخدام أسلوب تكامل عددي، يكون طول القوس

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx \approx 3.8202$$

وحتى لأي منحنيات بسيطة للغاية، يمكن أن يمثّل إيجاد قيمة تكامل طول القوس بالضبط تحديًا كبيرًا.

المثال 4.2 تقدير طول قوس

جـ - د طول قوس جزء من منحنى $y = x^2$ مع $0 \leq x \leq 1$.

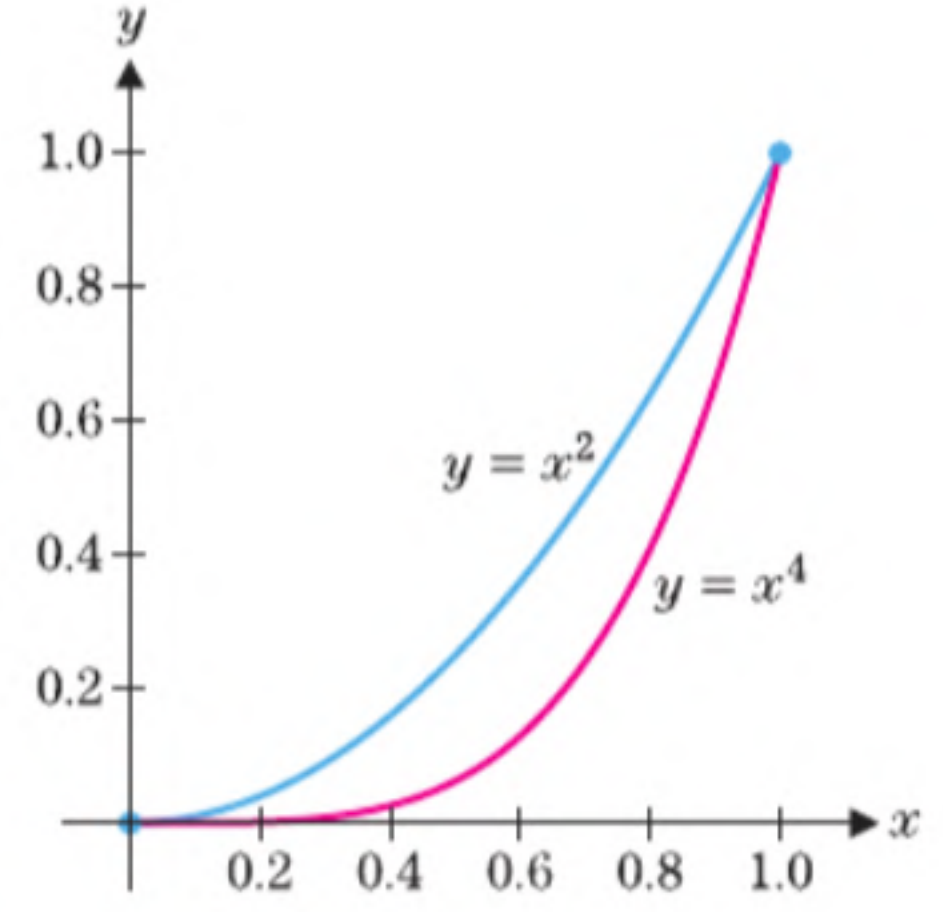
الحل باستخدام قانون طول القوس (4.1)، نجد أنّ

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx 1.4789$$

حيث أوجدنا قيمة التكامل عدديًا مرة أخرى. (في هذه الحالة، يمكنك إيجاد دالة أصلية

باستخدام تقنية متطورة في لدرس 6.3 وإيجاد قيمة التكامل بالضبط باعتباره $\frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.)

يبدو التمثيلان البيانيان $y = x^2$ و $y = x^4$ متماثلين بشكل يثير الدهشة على الفترة $[0, 1]$. (انظر الشكل 6.36). يربط كلاهما النقطتين $(0, 0)$ و $(1, 1)$ وتتزايد قيمتهما ويصبحان مقعرين لأعلى. إذا قمت بتمثيلهما على التولي، ستلاحظ أن $y = x^4$ تبدأ بشكل أكثر تسطيحاً ثم تصبح أكثر انحداراً بدايةً من حوالي $x = 0.7$ فما فوق. (حاول إثبات أن هذا صحيح!) يقدم لنا طول القوس طريقة واحدة لتحديد أوجه الاختلاف بين التمثيلين البيانيين.



الشكل 6.36
 $y = x^4$ و $y = x^2$

المثال 4.3 مقارنة أطوال القوس لدوال القوة

جـ - عد طول القوس جزء من المنحنى $y = x^4$ مع $0 \leq x \leq 1$ وقارنه بطول قوس جزء من المنحنى $y = x^2$ على الفترة نفسها.

الحل من (4.1)، يعطى طول القوس لـ $y = x^4$ بالصيغة:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (4x^3)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 16x^6} dx \approx 1.6002$$

لاحظ أن طول القوس هذه تزيد بنسبة 8% عن طول القوس على منحنى $y = x^2$ ، كما وجدناها في المثال 4.2. ■

في الممارين، سيطلب منك اكتشاف هذا التوجه في أطوال جزء من المنحنيات $y = x^6$ ، $y = x^8$ ولم إلى لك، على الفترة $[0, 1]$. هل يمكنك الآن أن تخمن ماذا يحدث لطول القوس لجزء من منحنى $y = x^n$ ، على الفترة $[0, 1]$ ، عندما $n \rightarrow \infty$ ؟

يمكن أن يكون الاستخدام اليومي لكلمات مثل الطول غامضة ومضللة. على سبيل المثال، يشير طول رمية قرص هوائي عادةً إلى المسافة الأفقية المقطوعة، وليس طول قوس المسار الذي قطعه القوس الهوائي. من ناحية أخرى، على فرض أنك تحتاج إلى تعليق لافتة بين عمودين البعد بينهما 20 ft. في هذه الحالة، ستحتاج إلى أكثر من 20 ft من الحبال حيث إن طول الحبل المطلوب محدد من خلال طول القوس، بدلاً من المسافة الأفقية.

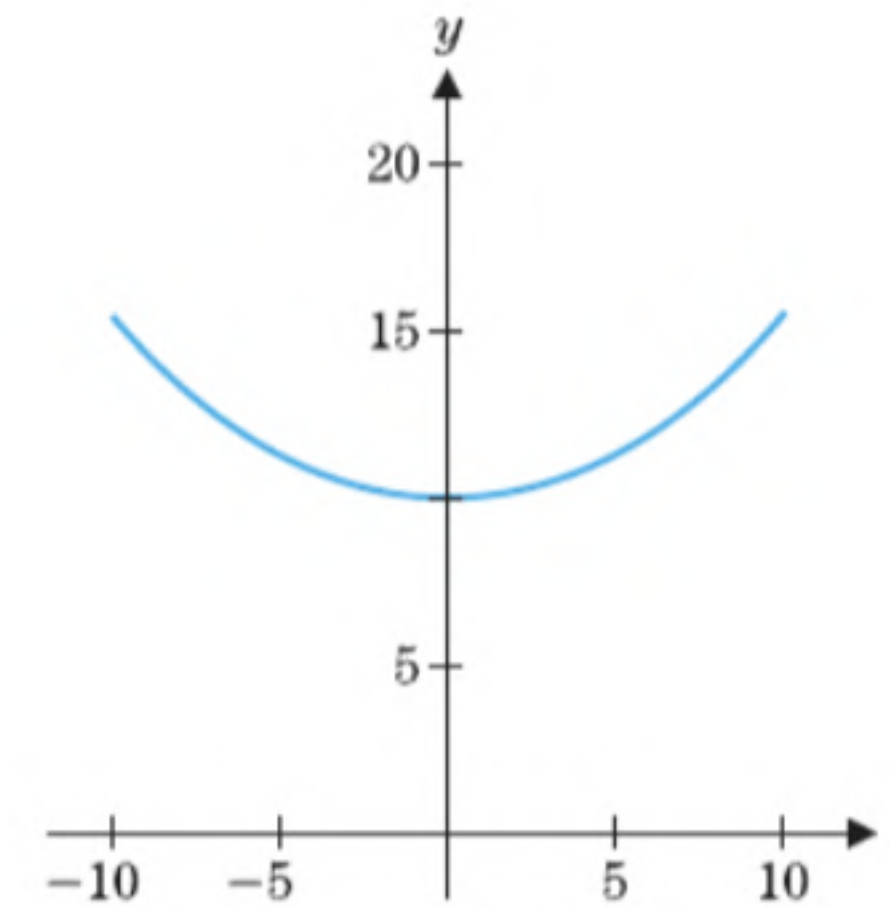
المثال 4.4 حساب طول كابل معلق بين عمودين

لربط كابل بين عمودين متساويين في الارتفاع والبعد بينهما 20 m. يمكن توضيح أن مثل هذا الكابل المعلق معادلته سلسلة، وعموماً معادلته $y = a \cosh x/a = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$. في هذه الحالة، على فرض أن الكابل يتخذ شكل $y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$ ، لأجل $-10 \leq x \leq 10$ ، كما هو ظاهر في الشكل 6.37. كم يبلغ طول هذا الكابل؟

الحل من (4.1)، يعطى طول القوس من المنحنى بالصيغة:

$$\begin{aligned} s &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{x/10}}{2} - \frac{e^{-x/10}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{x/5} - 2 + e^{-x/5})} dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x/5} + 2 + e^{-x/5})} dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x/10} + e^{-x/10})^2} dx \\ &= \int_{-10}^{10} \frac{1}{2}(e^{x/10} + e^{-x/10}) dx \\ &= 5(e^{x/10} - e^{-x/10}) \Big|_{x=-10}^{x=10} \\ &= 10(e - e^{-1}) \\ &\approx 23.504 \text{ m} \end{aligned}$$

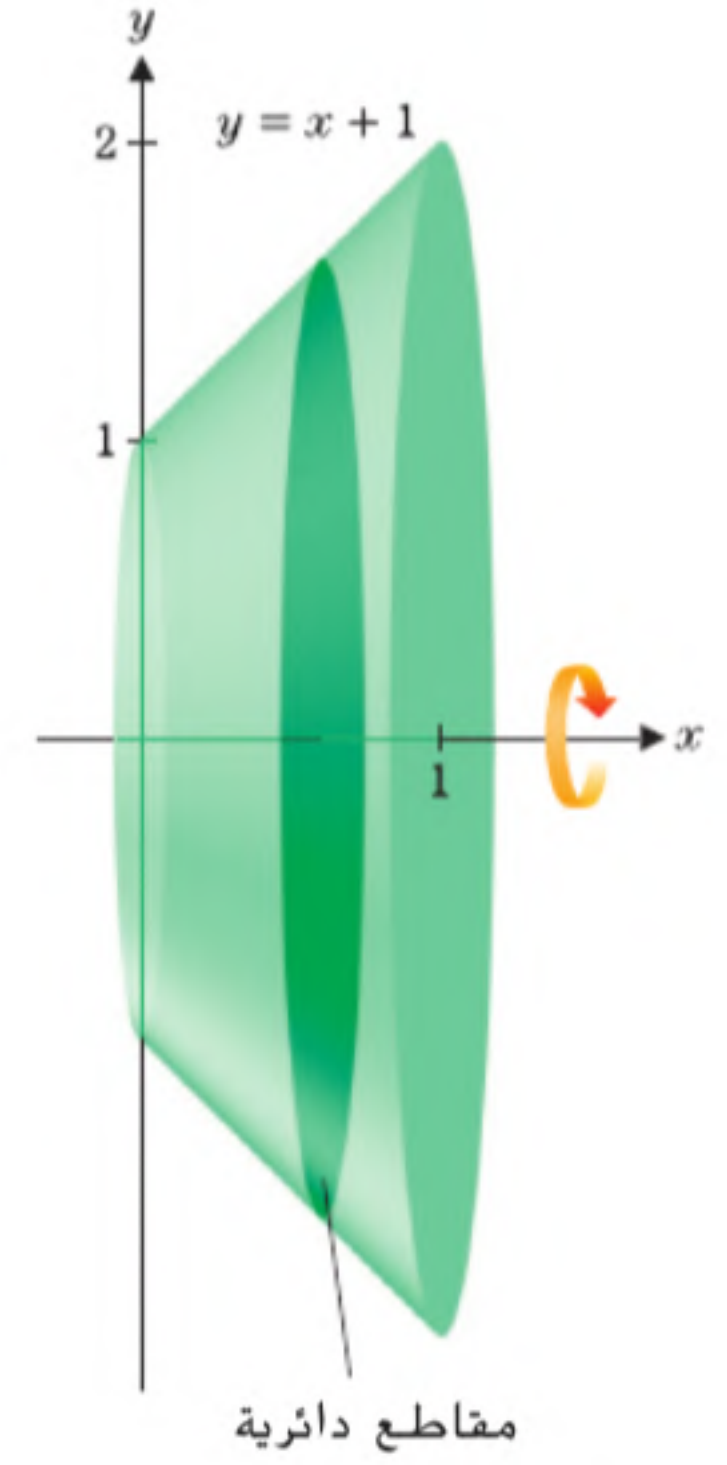
والذي يقابل المسافة الأفقية 20 m بالإضافة إلى حوالي 3.5 m من الطول المرفقي.



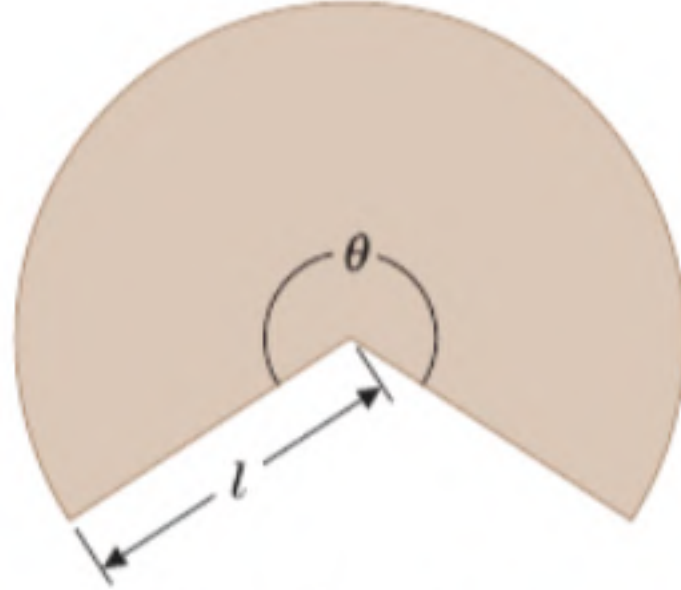
الشكل 6.37
 $y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$

مساحة السطح

في الدرسين 6.2 و 6.3، تعلمنا كيفية حساب حجم مجسم بتدوير منطقة ثنائية الأبعاد حول محور ثابت. بالإضافة إلى ذلك، نود في العادة تحديد مساحة السطح الذي يتكون بالدوران. على سبيل المثال، عند تدوير المستقيم $y = x + 1$ ، لكل $0 \leq x \leq 1$ ، حول المحور x ، السطح المكوّن هو الجزء الأدنى من مخروط دائري قائم حيث يقطع الجزء الأعلى منه بمستوى مواز للقاعدة، كما هو موضح في الشكل 6.38.



الشكل 6.38
 $y = x^4$ و $y = x^2$



الشكل 6.39b
مخروط مسطح



الشكل 6.39a
مخروط دائري قائم

سطح الدوران

نجد أولاً مساحة السطح المنحني لمخروط دائري قائم. في الشكل 6.39a، نبيّن مخروطاً دائرياً قائماً لنصف قطر القاعدة r والراسم l . (كما ستري لاحقاً، يُعد أكثر ملاءمة في هذا السياق تحديد الاختلاف بين الراسم والارتفاع). إذا قصينا المخروط على طول الراسم وقمنا بتسطيحه، نحصل على القطاع الدائري الموضح في الشكل 6.39b. لاحظ أنّ مساحة السطح المنحني للمخروط هي نفسها مساحة A للقطاع الدائري. هذه مساحة دائرة بنصف قطر l مضروبة في كسر الدائرة الذي يتضمن: θ من 2π راديان يمكنه أو

$$(4.2) \quad A = \pi \left(\text{نصف قطر} \right)^2 \frac{\theta}{2\pi} = \pi l^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2} l^2$$

المشكلة الوحيدة في هذه الحالة هو أننا لا نعرف قيمة θ . مع ذلك، لاحظ أنّه بالطريقة التي أنشأنا بها القطاع (أي من خلال تسطيح المخروط)، كان محيط القطاع هو نفسه محيط قاعدة المخروط. أي إنّ،

$$2\pi r = 2\pi l \frac{\theta}{2\pi} = l\theta$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{l} \quad \text{وبالقسمه على يعطي}$$

من (4.2)، تكون إذاً مساحة السطح المنحني للمخروط

$$A = \frac{\theta}{2} l^2 = \frac{\pi r}{l} l^2 = \pi r l$$

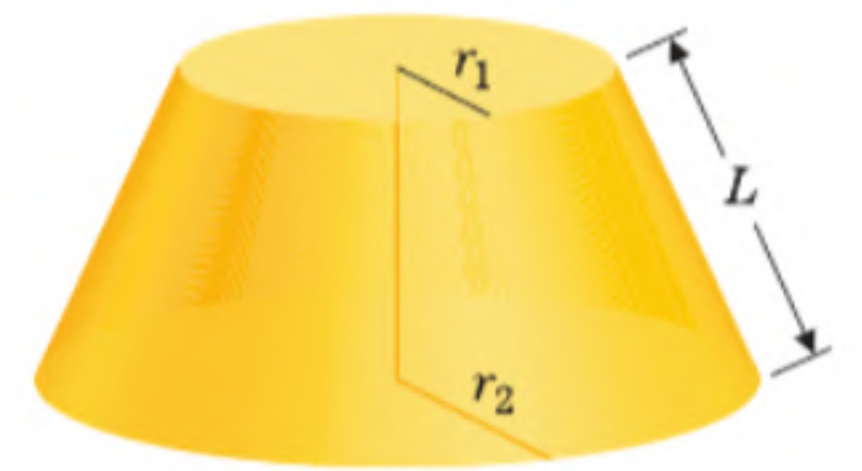
تذكّر أنّنا كنا مهتمين في الأصل بإيجاد مساحة السطح جزء فقط من مخروط دائري قائم. (راجع الشكل 6.38). لأجل مقطع من مخروط موضح في الشكل 6.40، تعطى مساحة السطح المنحني بالصيغة :

$$A = \pi(r_1 + r_2)L$$

يمكنك إثبات ذلك بطرح مساحة السطح المنحني لمخروطين، حيث يجب عليك استخدام مثلثات مشابهة لإيجاد ارتفاع المخروط الأكبر الذي يتم قصّ المخروط الناقص منه. نترك تفاصيل ذلك كتمرين.

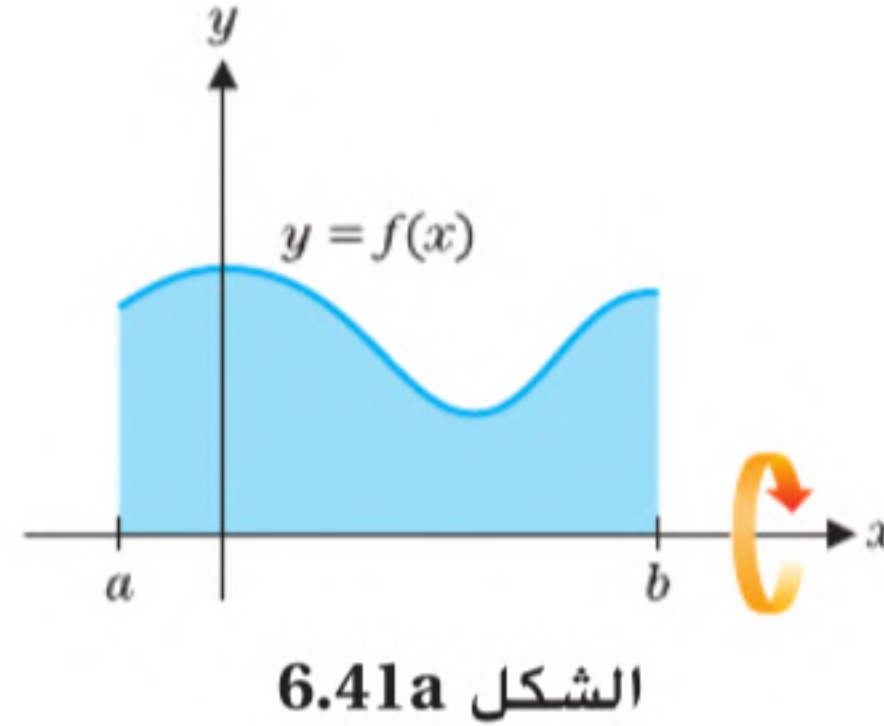
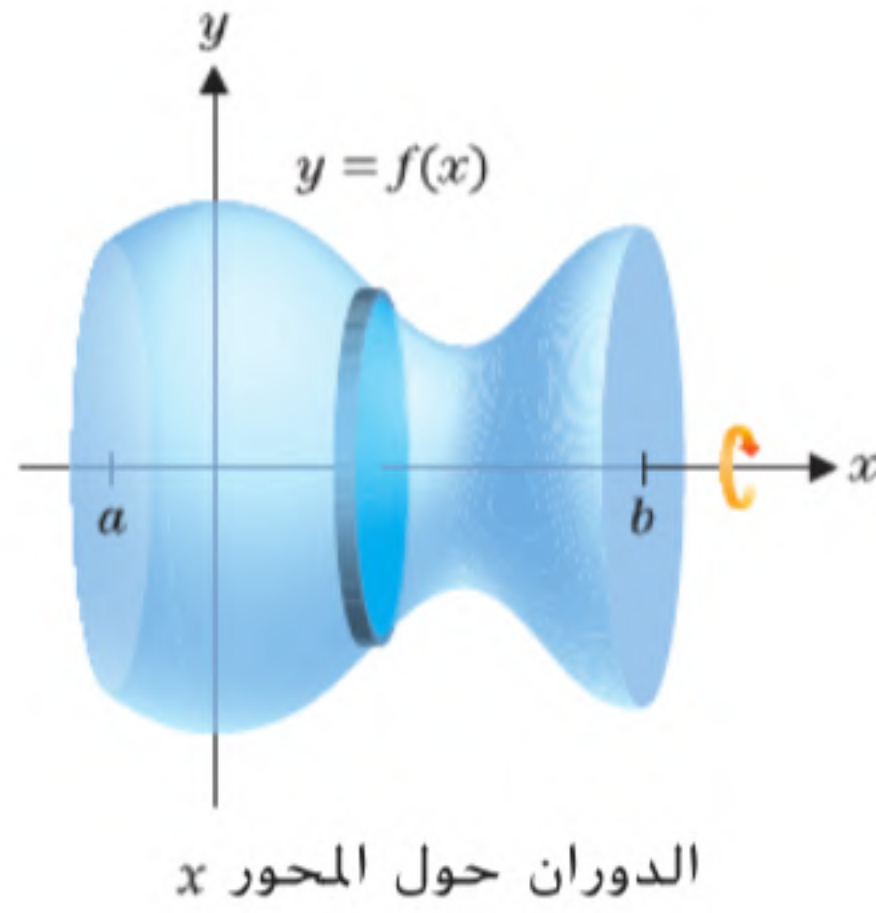
بالعودة إلى المسألة الأصلية لدوران المستقيم $y = x + 1$ على الفترة $[0, 1]$ حول المحور x (الظاهر في الشكل 6.38)، يوجد لدينا $r_1 = 1$ ، $r_2 = 2$ ، و $L = \sqrt{2}$ (نظرية فيثاغورس). تكون قيمة مساحة السطح المنحني إذاً

$$A = \pi(1 + 2)\sqrt{2} = 3\pi\sqrt{2} \approx 13.329$$



الشكل 6.40
مقطع من مخروط

لمسألة العامة عند إيجاد مساحة السطح المنحني لدوران مساحة، لنأخذ الحالة حيث $f(x) \geq 0$ وحيث تكون f متصلة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على (a, b) . إذا قمنا بدوران التمثيل البياني $y = f(x)$ حول المحور x على الفترة $[a, b]$ (انظر الشكل 6.41a)، نحصل على سطح الدوران الظاهر في الشكل 6.41b.



الشكل 6.41b

سطح الدوران

وكما فعلنا في العديد من المرات الى الآن نجزيء الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية الحجم: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ حيث $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$ على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ يمكننا تقريب المنحنى بالقطعة المستقيمة التي تربط النقطتين $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ و $(x_i, f(x_i))$. كما يوجد في الشكل 6.42 لاحظ أن دوران هذه القطعة المستقيمة حول المحور x ينشأ عنه مقطع مخروط. ستعطينا مساحة سطح مقطع المخروط تقريباً المساحة السطح على الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ أولاً، لاحظ أن الراسم لمقطع المخروط هو

$$L_i = d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

من قانون المسافة المستخدم. نظراً لفرضياتنا على f ، يمكننا تطبيق نظرية القيمة المتوسطة للحصول على:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

لبعض الأعداد $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ يعطينا ذلك

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x}$$

قيمة المساحة S_i لهذا الجزء من السطح على الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ هي تقريباً مساحة سطح قطع المخروط،

$$\begin{aligned} S_i &\approx \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})] \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x \\ &\approx 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x \end{aligned}$$

بما أن Δx هي صغيرة

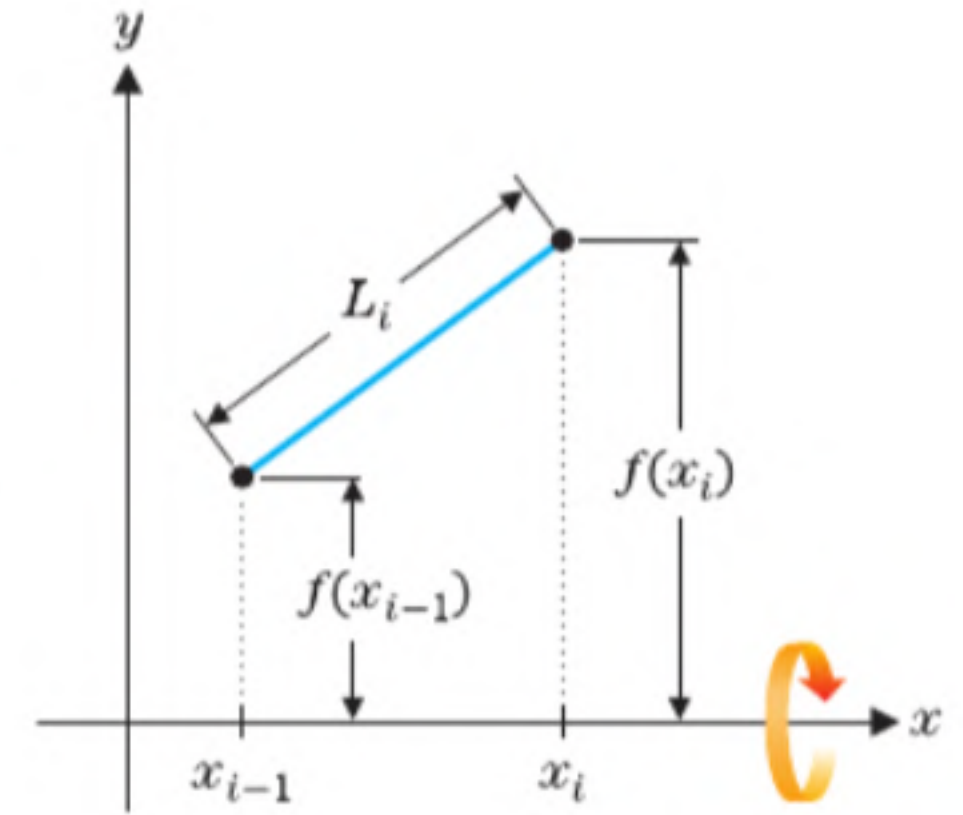
$$f(x_i) + f(x_{i-1}) \approx 2f(c_i)$$

بتكرار هذا البرهان لكل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ يعطينا تقريباً المساحة السطح الكلية S

$$S \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x$$

كلما كبرت n ، يقترب هذا التقريب إلى مساحة السطح الفعلية،

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x$$



الشكل 6.42

الدوران حول المحور x

إنَّ التعرف على هذا باعتباره النهاية لمجموع ريمان يعطينا التكامل

(4.3)

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

مساحة سطح مجسم ناتج عن الدوران

حيثما يوجد التكامل.

يجب عليك ملاحظة أنَّ العامل $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ في لمكامل الموجود في (4.3) يناظر طول قوس الجزء الصغير من منحنى $y = f(x)$ ، بينما العامل $2\pi f(x)$ يناظر محيط المجسم الناتج عن الدوران. ينبغي أن يكون لذلك معنى إليك، كما يأتي لأي قطعة صغيرة من المنحنى، إذا قَرَّبنا مساحة السطح بتدوير القطعة المستقيمة الصغيرة من المنحنى لنصف القطر $f(x)$ حول المحور x ، تكون مساحة السطح المتولد هي ببساطة مساحة سطح أسطوانة

ملحوظة 4.2

يوجد عدد قليل بشكل استثنائي من الدوال f حيث يمكن حساب التكامل في (4.3) بالضبط. لا تقلق؛ يوجد لدينا تكامل عددي لمثل تلك الحالات فقط.

$$S = 2\pi rh = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

وفيما يبلغ نصف قطر مثل هذه القطعة الأسطوانية الصغيرة $f(x)$ ، يكون إرتفاع الأسطوانة $h = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$. لا شك في أنَّه من الأفضل التفكير في قانون مساحة السطح بهذه الطريقة بدلاً من مجرد حفظ القانون.

المثال 4.5 حساب مساحة السطح

جـ - د مساحة سطح متولد من تدوير منحنى $y = x^4$ ، لكل $0 \leq x \leq 1$ ، حول المحور x .

الحل باستخدام قانون مساحة السطح (4.3)، لدينا:

$$S = \int_0^1 2\pi x^4 \sqrt{1 + (4x^3)^2} dx = \int_0^1 2\pi x^4 \sqrt{1 + 16x^6} dx \approx 3.4365$$

حيث استخدمنا طريقة عددية لتقريب قيمة التكامل.

التمارين 6.4

تمارين كتابية

في التمارين 14-5، احسب طول المنحنى بدقة.

1. اشرح لفظياً كيفية اشتقاق تكامل طول القوس من تقريب أطوال قطع مستقيمة قاطعة.
2. اشرح لمَّ ناتج جمع أطوال القطع المستقيمة في الشكل 6.34b أصغر من طول قوس المنحنى في الشكل 6.34a.
3. ناقش إذا كان تكامل طول القوس يُطلق عليه قانون أو تعريف بشكل أكثر دقة (أي، هل يمكنك تعريف طول المنحنى بالضبط بدون استخدام التكامل؟).
4. على فرض أنَّك قمت بالتمثيل البياني لـ $y = x + 1$ و $y = -x - 1$ ، ثم قمت بتقطيعه ولفه. اشرح سبب عدم حصولك على الشكل 6.38 (إرشاد: قارن بين المساحات وفكر بتمعن في الشكلين 6.39a و 6.39b).

في التمارين 1-4، قَرَّب طول المنحنى باستخدام n قطع مستقيمة قاطعة حيث $n = 2$ ؛ $n = 4$

5. $y = 2x + 1, 0 \leq x \leq 2$
6. $y = \ln(\sec x)$ between $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
7. $y = 4x^{3/2} + 1, 1 \leq x \leq 2$
8. $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}), 0 \leq x \leq 1$
9. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, 1 \leq x \leq 2$
10. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, 1 \leq x \leq 3$
11. $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}, -2 \leq y \leq -1$
12. $x = e^{y/2} + e^{-y/2}, -1 \leq y \leq 1$
13. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}, 1 \leq x \leq 4$
14. $y = 2\ln(4 - x^2), 0 \leq x \leq 1$

في التمارين 15-22، ضع تكامل طول المنحنى ثم قَرَّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

15. $y = x^3, -1 \leq x \leq 1$
16. $y = x^3, -2 \leq x \leq 2$

1. $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$
2. $y = x^4, 0 \leq x \leq 1$
3. $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$
4. $y = \ln x, 1 \leq x \leq 3$

17. $y = 2x - x^2, 0 \leq x \leq 2$ 18. $y = \tan x, 0 \leq x \leq \pi/4$
 19. $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$ 20. $y = \ln x, 1 \leq x \leq 3$
 21. $y = \int_0^x u \sin u \, du, 0 \leq x \leq \pi$
 22. $y = \int_0^x e^{-u} \sin u \, du, 0 \leq x \leq \pi$

23. عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 40 ft. إذا كان الحبل يبدو أنه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$ ، فاحسب طول الحبل.
 24. عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 60 ft. إذا كان الحبل يبدو أنه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 15(e^{x/30} + e^{-x/30})$ ، فاحسب طول الحبل.
 25. في المثال 4.4، احسب قيمة "الارتخاء" الموجودة في الكابل- التي تشكّل الفرق بين قيم y في الوسط ($x = 0$) وعند العمودين ($x = 10$). على أساس ذلك، هل كان حساب طول المنحنى مثيلاً للدهشة؟

26. ارسم واحسب طول شكل نجمي معرف بالمعادلة $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

27. لأجل $y = x^6, y = x^8$ و $y = x^{10}$ ، احسب طول القوس لكل $0 \leq x \leq 1$. باستخدام النتائج من المثالين 4.2 و 4.3، حدّد نط طول $y = x^n, 0 \leq x \leq 1$ ، عندما تتزايد قيمة n . ختم النهاية عندما $n \rightarrow \infty$.

28. (a) للمساعدة في فهم نتيجة التمرين 27، حدّد $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ لكل $0 \leq x < 1$. احسب طول هذا المنحنى عند النهاية. اربط هذا المنحنى بنقطة النهاية (1, 1)، ما هو الطول الكلي؟

- (b) أثبت أن $y = x^4$ مسطحة أكثر من $y = x^2$ لكل $0 < x < \sqrt{1/2}$ وأن $y = x^6$ أكثر انحداراً لكل $x > \sqrt{1/2}$. قارن بين سطح وانحدار كلا من $y = x^4$ و $y = x^6$.

في التمارين 29–36، ضع التكامل لمساحة السطح الناتج من الدوران وقرب التكامل باستخدام طريقة عددية.

29. $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ ، تم دورانها حول المحور x
 30. $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ ، تم دورانها حول المحور x
 31. $y = 2x - x^2, 0 \leq x \leq 2$ ، تم دورانها حول المحور x
 32. $y = x^3 - 4x, -2 \leq x \leq 0$ ، تم دورانها حول المحور x
 33. $y = e^x, 0 \leq x \leq 1$ ، تم دورانها حول المحور x
 34. $y = \ln x, 1 \leq x \leq 2$ ، تم دورانها حول المحور x
 35. $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi/2$ ، تم دورانها حول المحور x
 36. $y = \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 2$ ، تم دورانها حول المحور x

في التمرينين 37 و 38، احسب طول القوس L_1 للمنحنى وطول L_2 للمستقيم القاطع الذي يربط نقاط النهاية بالمنحنى. احسب النسبة L_2/L_1 ؛ كلما كان هذا العدد قريباً من 1، يقترب المنحنى من أن يكون خطاً مستقيماً.

37. (a) $y = \sin x, -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
 38. (a) $y = e^x, 3 \leq x \leq 5$ (b) $-5 \leq x \leq -3$

39. (a) على فرض أنه تم دوران المربع المكون من جميع (x, y) مع $-1 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq y \leq 1$ حول المحور y . احسب مساحة السطح.

- (b) على فرض أنه تم تدوير الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y . احسب مساحة السطح.

- (c) على فرض أنه تم تدوير المثلث رؤوسه $(-1, -1)$ و $(0, 1)$ و $(1, -1)$ حول المحور y . احسب مساحة السطح.

- (d) ارسم المربع والدائرة والمثلث في الأجزاء (a)–(c) على المحاور نفسها. أثبت أن مساحات السطح النسبية للمجسمات التي تم تدويرها (الأسطوانية والكروية والمخروطية، على الترتيب) تكون $3:2:\pi$ حيث τ يكون المتوسط الحسابي الذهبي المعرف بواسطة $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

40. اشتق القوانين العامة لمساحة السطح لـ (a) أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها r وارتفاعها h و (b) كرة نصف قطرها r و (c) مخروط نصف قطره r وارتفاعه h .

التطبيقات

41. يسير شخصان في مسارين مختلفين بدءاً من نقطة الأصل. ويكون لهما الإحداثي x الموجب نفسه عند كل زمن. يتبع أحدهما المحور x الموجب ويتبع الآخر $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$. (a) جد النقطة التي بلغت فيها المسافة التي اجتازها أحدهما ضعف المسافة التي اجتازها الآخر. (b) لتكن $f(t)$ هي المسافة التي اجتازها على طول $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ لكل $0 \leq x \leq t$. احسب $f'(t)$ واستخدمه لتحديد في أي نقطة تساوي نسبة سرعات السائرين 2. (اقترح ذلك تيم بينينجر).

42. تم تحديد التكامل الناقص من النوع الثاني بواسطة $\text{EllipticE}(\phi, m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2 u} \, du$. بالعودة إلى المثال 4.1، أشارت العديد من $\text{C} \& \text{AS}$ أن $\sqrt{2} \text{EllipticE}(x, \frac{1}{2})$ تُعتبر دالة أصلية لـ $\sqrt{1 + \cos^2 x}$. تحقق من كون هذا هو دالة أصلية.

- (b) أشارت العديد من CASS إلى الدالة الأصلية الآتية:

$$\int \sqrt{1 + 16x^6} \, dx = \frac{1}{4}x\sqrt{1 + 16x^6} + \int \frac{3/4}{\sqrt{1 + 16x^6}} \, dx$$

تحقق من كون هذا هي دالة أصلية.

43. يتبع ركل كرة وإسقاطها مسار $y = \frac{1}{15}x(60 - x)$ ياردة. ارسم تمثيلاً بيانياً. كم بلغت المسافة التي قطعها ركلة الكرة أفقياً؟ كم بلغ ارتفاعها؟ احسب طول القوس. إذا استمر مكوث الكرة في الهواء لمدة 4 ثوان، كم بلغ متوسط السرعة المتجهة للكرة؟

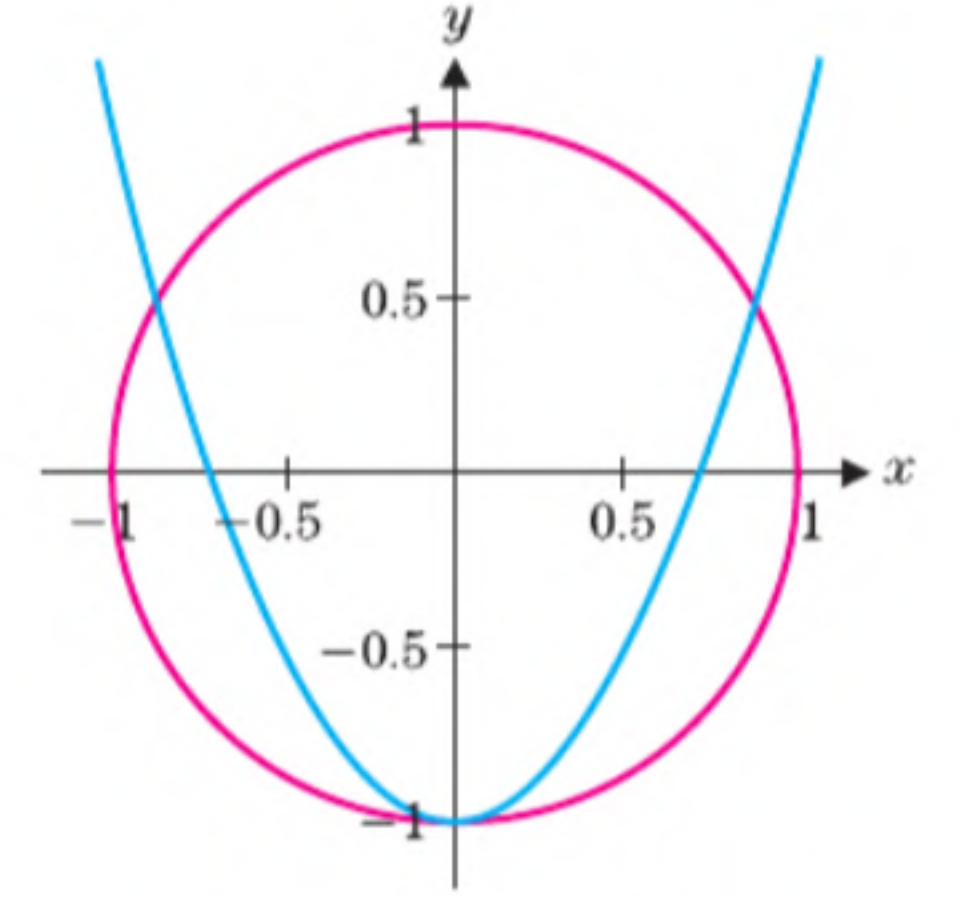
44. يتبع رمي لاعب دفاع لكرة بيسبول مسار $y = \frac{1}{300}x(100 - x)$ ياردة. ارسم تمثيلاً بيانياً. كم بلغت المسافة التي قطعها الكرة أفقياً؟ كم بلغ ارتفاعها؟ احسب طول القوس. اشرح سبب احتياج لاعب البيسبول إلى طول قوس صغير، بينما يحتاج لاعب كرة القدم في التمرين 43 طول قوس كبير.

تمارين استكشافية

1. في هذا التمرين، سوف تستكشف مفارقة شهيرة (تسمى عادةً بوق جبول). على فرض أن المنحنى $y = 1/x$ ، لكل $1 \leq x \leq R$ (حيث R عدد ثابت موجب كبير). يتم تدويره حول المحور x . احسب الحجم ومساحة السطح الداخليين للسطح الناتج.

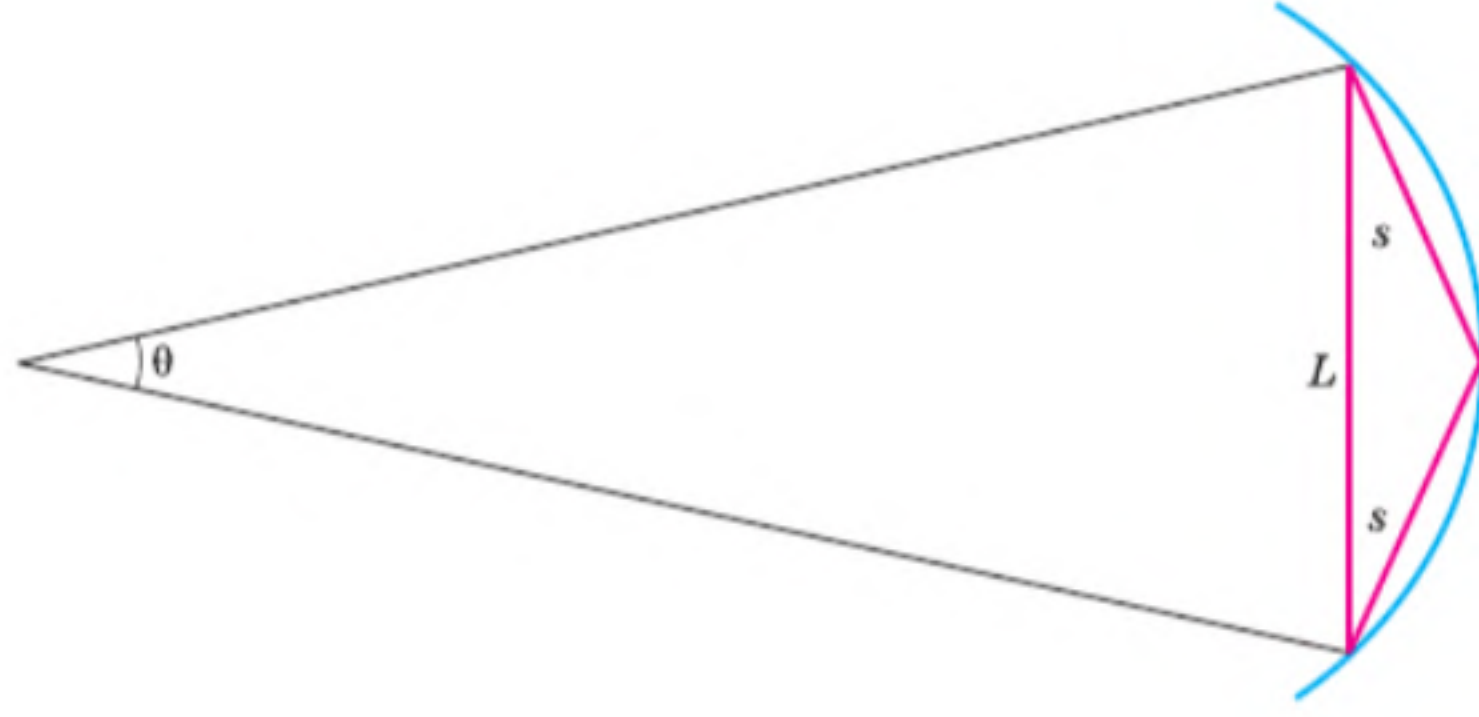
(في كلتا الحالتين، يمكن إيجاد دوال أصلية، على الرغم من إمكانية احتياجك لمساعدة من CAS الخاصة بك للحصول على مساحة السطح). جـ - د النهاية للحجم ومساحة السطح عندما $R \rightarrow \infty$ والآن لأجل المفارقة. استنادًا إلى إجاباتك، ينبغي أن يكون لديك مجسم له حجم منتهي، لكن له مساحة سطح غير منتهية وبالتالي، قد يكون المجسم ثلاثي الأبعاد ممتلئًا بالكامل بكمية منتهية من الطلاء ولكن السطح الخارجي لا يمكن طلاؤه بالكامل على الإطلاق.

2. لتكن C هو جزء القطع المكافئ $y = ax^2 - 1$ داخل الدائرة $x^2 + y^2 = 1$.



جـ - د قيمة $a > 0$ التي تحقق قيمة عظمى لطول القوس C .

3. يوضّح الشكل قوس دائرة تحصره زاوية θ ، بوتر طوله L ووترين طولهما s . بَيِّنْ أنَّ $2s = \frac{L}{\cos(\theta/4)}$



ابدأ برقع دائرة واستخدم هذه الصيغة بشكل متكرر لاشتقاق الناتج غير المحدود

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{32} \dots = \frac{2}{\pi}$$

حيث يمثّل الجانب الأيسر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{2^n} \cos \frac{\pi}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

حركة المقذوفات

في الدروس 2.1 و 2.3 و 4.1، ناقشنا مظاهر حركة جسم يتحرك في مسار مستقيم (حركة مستقيمة). ورأينا أنه إذا علمنا بدالة تصف موقع جسم في أي زمن t إذًا يمكننا تحديد سرعته المتجهة وتسارعه بالإشتقاق. وهناك مسألة أكثر أهمية وهي الرجوع إلى الخلف، وهذا، لإيجاد الموقع والسرعة المتجهة لجسم ما، إذا كان التسارع معطى. في الرياضيات، يعني هذا أنه، بدلًا من مشتقة دالة، يجب علينا أن نجد الدالة الأصلية. والآن بعد أن أصبح لدينا تكامل في حوزتنا، يمكننا تحقيق ذلك بكل سهولة.

قد تكون على دراية بقانون نيوتن الثاني للحركة والذي ينص على

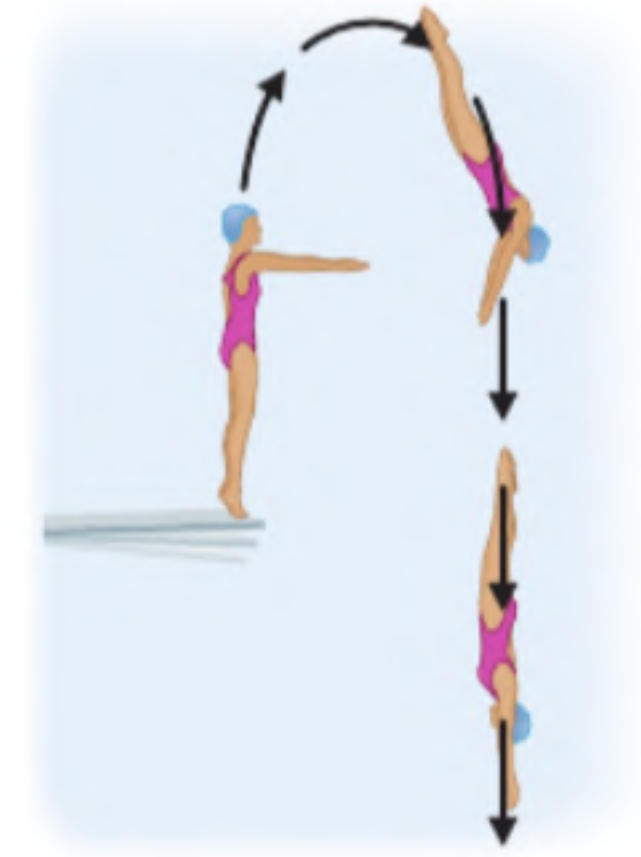
$$F = ma$$

حيث يكون F هو مجموع القوى المؤثرة على جسم ما و m هو كتلة الجسم و a هو تسارع الجسم. ابدأ بأن تتخيل أنك تغوص. القوى الأساسية المؤثرة عليك خلال عملية الغوص هي الجاذبية. القوة الناتجة عن الجاذبية هي الوزن الخاص بك، والذي يرتبط بالكتلة بواسطة $W = mg$. حيث g هي ثابت الجاذبية. (قيم التقريب الشائعة لـ g ، الدقيقة بالقرب من مستوى سطح البحر، هي 9.8 m/s^2). للإبقاء على بساطة المسألة في الرياضيات، سوف نتجاهل أي قوى أخرى، مثل مقاومة الهواء.

لتكن $h(t)$ تمثّل ارتفاعك فوق المياه بعد t ثوانٍ من بدء غوصك. إذا القوة الناتجة عن الجاذبية هي $F = -mg$. حيث تدل إشارة السالب إلى أنّ القوة تؤثر لأسفل على الجسم، في الاتجاه السالب. من عملنا السابق، نعلم أنّ التسارع هو $a(t) = h''(t)$. يعطينا قانون نيوتن الثاني إذاً $-mg = mh''(t)$ أو

$$h''(t) = -g$$

لاحظ أنّ دالة الموقع الخاصة بأي جسم (بغض النظر عن كتلته) تخضع للجاذبية ولن تلائم أي قوى



أخرى المعادلة نفسها. تُعد الاختلافات الوحيدة من موقف آخر هي الشروط الابتدائية (السرعة المتجهة الابتدائية والموقع الابتدائي) والأسئلة التي يتم طرحها.

المثال 5.1 إيجاد السرعة المتجهة لغواص عند الاصطدام

إذا كن ارتفاع لوح الغطس 4.5 m فوق مستوى سطح المياه وبدأ الغواص بسرعة متجهة ابتدائية 2.4 m/s (في اتجاه لأعلى). كم بلغت السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء)؟

الحل إذا أعطي الارتفاع (بالمتر) عند الزمن t بالدالة $h(t)$. يعطينا قانون نيوتن الثاني $h''(t) = -9.8$.

بما أن الغواص انطلق من ارتفاع 4.5 m فوق سطح المياه بسرعة ابتدائية 2.4 m/s. يوجد لدينا الشروط الابتدائية $h(0) = 4.5$ و $h'(0) = 2.4$. إيجاد $h(t)$ يتطلب الآن أكثر قليلاً من تكامل أولي. لدينا

$$\int h''(t) dt = \int -9.8 dt$$

$$h'(t) = -9.8t + c \quad \text{أو}$$

من السرعة المتجهة الابتدائية، لدينا

$$2.4 = h'(0) = -9.8(0) + c = c$$

حيث إن $c = 2.4$ والسرعة المتجهة في أي زمن t تعطى بالصيغة:

$$h'(t) = -9.8t + 2.4$$

لإيجاد السرعة المتجهة عند التصادم، نحتاج أولاً إلى إيجاد زمن التصادم. لاحظ أن الغواص سيصطدم بالمياه عند $h(t) = 0$ (أي، عندما يكون الارتفاع فوق المياه قيمته 0).

يعطينا تكامل دالة السرعة المتجهة دالة الارتفاع:

$$\int h'(t) dt = \int (-9.8t + 2.4) dt$$

$$h(t) = -4.9t^2 + 2.4t + c \quad \text{أو}$$

من الارتفاع الابتدائي، لدينا

$$4.5 = h(0) = -4.9(0)^2 + 2.4(0) + c = c$$

حيث إن $c = 4.5$ و الارتفاع فوق مستوى المياه في أي زمن t يعطى بالصيغة:

$$h(t) = -4.9t^2 + 2.4t + 4.5$$

يحدث الاصطدام حينذاك عندما

$$0 = h(t) = -4.9t^2 + 2.4t + 4.5$$

حيث إن $t = 1.2$ هو زمن الاصطدام. (تجاهل الحل الدخيل $t = -0.7$). عندما يكون $t = 1.2$ تكون السرعة المتجهة $h'(1.2) = -9.36(1.2) + 2.4 = -9.36$ m/s (السرعة المتجهة عند الاصطدام). لوضوح القيم في وحدات متعارف عليها بشكل أكبر للسرعة المتجهة، اضرب في 3600/1000 للتحويل وحدة كيلومترات في الساعة. في هذه الحالة، تبلغ السرعة المتجهة عند الاصطدام حوالي 34 km/h. (أنت غالباً لا ترغب في الغوص في موقع خاطئ بتلك السرعة!) ■

في المثال 5.1، تدل إشارة سالب للسرعة المتجهة إلى أن الغواص كان يغوص لأسفل. في العديد من المواقف، تُعد الحركات إلى الأعلى وإلى الأسفل مهمة.

المثال 5.2 معادلة الحركة الرأسية لكرة

تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s. بتجاهل مقاومة الهواء، جـد معادلة لارتفاع الكرة عند أي زمن t . وأيضاً حدّد القيمة العظمى للارتفاع ومقدار الزمن الذي قطعته الكرة في الهواء.

الحل مع الجاذبية على لها القوة الوحيدة، الارتفاع $h(t)$ يحقق $h''(t) = -9.8$. الشروط الابتدائية هي $h'(0) = 19.6$ و $h(0) = 0$. لدينا إذن

$$\int h''(t) dt = \int -9.8 dt$$

$$h'(t) = -9.8t + c$$

من السرعة المتجهة الابتدائية، لدينا

$$19.6 = h'(0) = -9.8(0) + c = c$$

$$h'(t) = 19.6 - 9.8t$$

ومنه،

$$\int h'(t) dt = \int (19.6 - 9.8t) dt$$

$$h(t) = 19.6t - 4.9t^2 + c$$

من الارتفاع الابتدائي لدينا

$$0 = h(0) = 19.6(0) - 4.9(0)^2 + c = c$$

$$h(t) = 19.6t - 4.9t^2$$

لذا،

بما أن دالة الارتفاع هي تربيعية، تحدث القيمة العظمى عند الزمن حيث $h'(t) = 0$. [يجب أيضًا اعتبار الفيزياء في الموقف: ماذا يحدث فيزيائيًا عندما تكون $h'(t) = 0$] حل $19.6 - 9.8t = 0$ يعطي $t = 2$ (الزمن عندما تتحقق القيمة العظمى للارتفاع) والارتفاع المناظر في سولي $h(2) = 19.6(2) - 4.9(2)^2 = 19.6$ m. مرة أخرى، تلامس الكرة الأرض عندما تكون $h(t) = 0$ نحل

$$0 = h(t) = 19.6t - 4.9t^2 = 4.9t(4 - t)$$

يعطي $t = 0$ (زمن قذف الكرة) و $t = 4$ (زمن ملامسة الكرة للأرض). بالتالي يبلغ زمن انطلاق الكرة في الهواء 4 ثوان. ■

يمكنك ملاحظة خاصية مثيرة للاهتمام لحركة المقذوفات من خلال التمثيل البياني لدالة الارتفاع من المثال 5.2 بالإضافة إلى $y = 14.4$. (انظر الشكل 6.43). لاحظ أن التمثيلات البيانية تتقاطع عند $t = 1$ و $t = 3$. بالإضافة لذلك، تقابل الفترة الزمنية $[1, 3]$ مع نصف الفترة المستغرقة في الهواء بالضبط. لاحظ أن ذلك يشير إلى أن الكرة استقرت على أعلى ربع من ارتفاعها لنصف المدة التي استغرقتها في الهواء. قد تكون أصبت بالدهشة من كيفية قيام بعض الرياضيين بالقفز بارتفاع عال للغاية بحيث يبدو أنهم "معلقون في الهواء". وكما تشير هذه الحسابات، يبدو أن جميع الأجسام تعلق في الهواء.

المثال 5.3 إيجاد السرعة المتجهة الابتدائية المطلوبة لبلوغ ارتفاع معين

لغفادت التقارير أن نجم كرة السلة السابق مايكل جوردان كانت له قفزة عمودية بلغت 135 cm. بتجاهل مقاومة الهواء، ما هي السرعة المتجهة الابتدائية المطلوبة للقفز بهذا الارتفاع؟

الحل مرة أخرى، يقودنا قانون نيوتن الثاني إلى المعادلة $h''(t) = -9.8$ للارتفاع $h(t)$. نحن نطلق على السرعة المتجهة الابتدائية v_0 ، بحيث يكون $h'(0) = v_0$ ونبحث عن قيمة v_0 التي ستعطي

قيمة عظمى لارتفاع 135 cm وكما سبق، قمنا بإجراء تكامل للحصول على

$$h'(t) = -9.8t + c$$

باستخدام السرعة المتجهة الابتدائية، نحصل على

$$v_0 = h'(0) = -9.8(0) + c = c$$

يعطينا هذا دالة السرعة المتجهة

$$h'(t) = v_0 - 9.8t$$

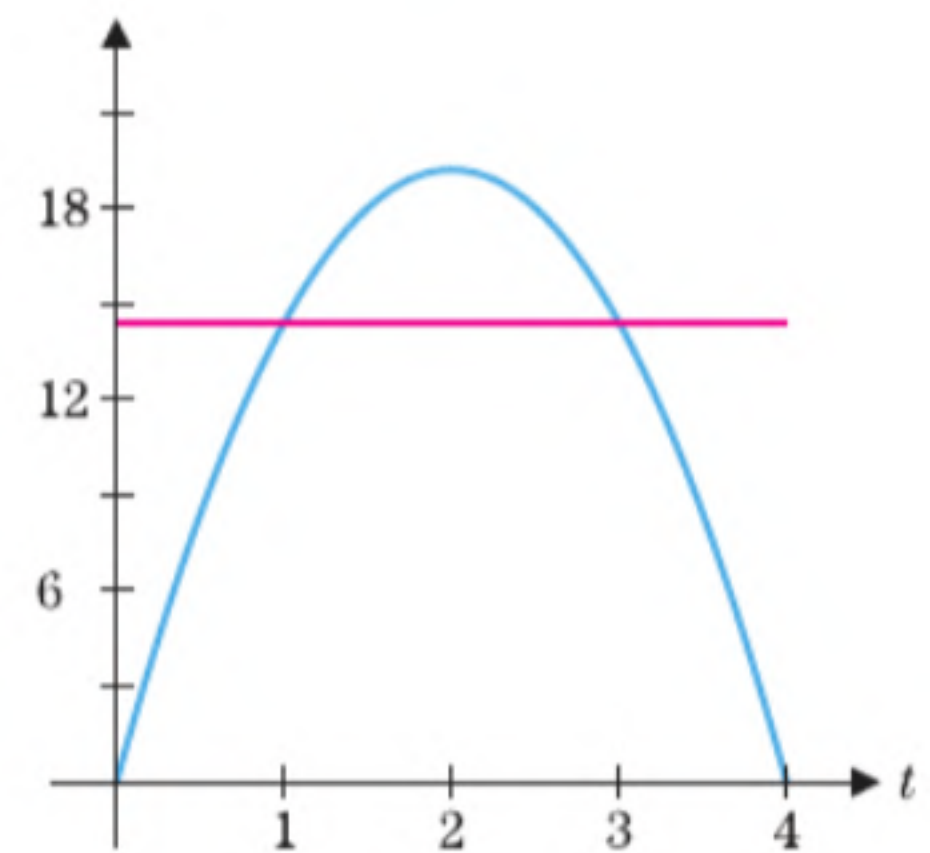
اليوم في الرياضيات



فلاديمير أرنولد (1937 -)

عالم رياضيات روسي له مساهمات مهمة في العديد من مجالات علم الرياضيات، على صعيد كل من مجال البحث والتفسير الرائج. يمكن أن يقاس التقدير الذي يكتنه له زملاؤه بالمؤتمر الدولي المعروف باسم "أرنولد فيست" الذي عقد في تورونتو تكريمًا لعيد ميلاده الـ 60. يتم استخدام العديد من كتبه على نطاق واسع الآن، بما في ذلك مجموعة من التحديات بعنوان مسائل أرنولد.

الارتفاع



الشكل 6.43

ارتفاع الكرة عند الزمن t

بالقيام بالتكامل مرة أخرى واستخدام الموقع الابتدائي $h(0) = 0$ نحصل على

$$h(t) = v_0 t - 4.9t^2$$

يتم تحقيق القيمة العظمى للارتفاع عندما تكون $h'(t) = 0$ (لماذا؟) إعداد

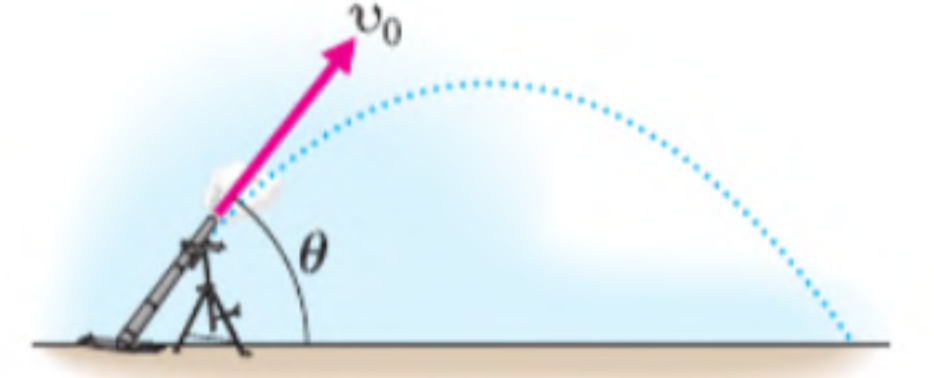
$$0 = h'(t) = v_0 - 9.8t$$

يعطينا $t = \frac{v_0}{9.8}$. يبلغ الارتفاع عند هذا الزمن (أي، القيمة العظمى للارتفاع) إذا

$$h\left(\frac{v_0}{9.8}\right) = v_0\left(\frac{v_0}{9.8}\right) - 4.9\left(\frac{v_0}{9.8}\right)^2 = \frac{v_0^2}{9.8} - \frac{v_0^2}{19.6} = \frac{v_0^2}{19.6}$$

إذا، قفزة بارتفاع $135 \text{ cm} = 1.35 \text{ m}$ تتطلب $\frac{v_0^2}{19.6} = 1.35$ أو $v_0^2 = 26.46$. بحيث يكون

$$v_0 = \sqrt{26.46} \approx 5 \text{ m/s} \text{ (يساوي حوالي } 18.5 \text{ km/h).}$$



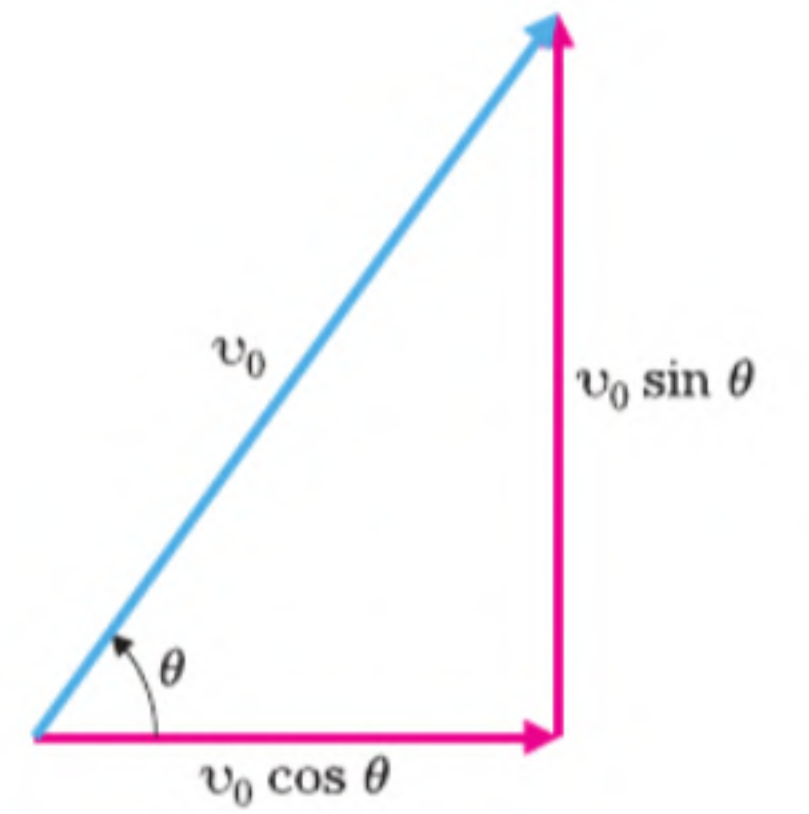
الشكل 6.44a

مسار المقذوفات

حتى الآن، لقد درسنا فقط المقذوفات التي تتحرك رأسيًا. في الواقع، يجب علينا أيضًا التفكير في الحركة في الاتجاه الأفقي. بتجاهل مقاومة الهواء، تُعتبر هذه الحسابات أيضًا واضحة نسبيًا. والفكرة هي تطبيق قانون نيوتن الثاني منفصلاً على المركبات الأفقية والرأسية للحركة. إذا كان $y(t)$ يمثل الموقع الرأسي، فإذاً يوجد لدينا $y''(t) = -g$. كما سبق. بتجاهل مقاومة الهواء، لا توجد قوى مؤثرة أفقيًا على المقذوف. لذا، إذا كان $x(t)$ يمثل الموقع الأفقي، يعطينا قانون نيوتن الثاني $x''(t) = 0$.

تعتبر الشروط الابتدائية أكثر تعقيداً هنا. وبشكل عام، نرغب في التعامل مع المقذوفات التي يتم إطلاقها بسرعة ابتدائية v_0 بزاوية θ من لركبة الأفقية. يبين الشكل 6.44a مقذوفًا تم إطلاقه بزاوية $\theta > 0$. لاحظ أن زاوية ابتدائية $\theta < 0$ ستشير إلى سرعة متجهة ابتدائية هبوطاً.

كما هو مبين في الشكل 6.44b، يمكن فصل السرعة المتجهة الابتدائية إلى مركبات أفقية ورأسية. من حسب المثلثات الأولية، تكون المركبة الأفقية للسرعة المتجهة الابتدائية هي $v_x = v_0 \cos \theta$ والمركبة الرأسية هي $v_y = v_0 \sin \theta$.



الشكل 6.44b

المركبات الرأسية والأفقية للسرعة المتجهة

المثال 5.4 حركة مقذوف في بُعدين

يتم إطلاق جسم أفقيًا بزاوية $\theta = \pi/6$ حيث سرعته الابتدائية $v_0 = 98 \text{ m/s}$. حدّد زمن الانطلاق ومدى المقذوف (الأفقي).

الحل بدءًا بالمركبة الرأسية للحركة (ومرة أخرى بتجاهل مقاومة الهواء)، لدينا $y''(t) = -9.8$ (حيث تعطى السرعة الابتدائية بدلالة متر في الثانية). بالعودة إلى الشكل 6.44b، لاحظ أن المركبة الرأسية للسرعة المتجهة الابتدائية هي $y'(0) = 98 \sin \pi/6 = 49$ والارتفاع الابتدائي هو $y(0) = 0$. تعطينا اثنان من عمليات التكامل البسيطة دالة السرعة المتجهة $y'(t) = -9.8t + 49$ ودالة الموقع $y(t) = -4.9t^2 + 49t$. يرتطم الجسم بالأرض عندما يكون $y(t) = 0$ (أي، عندما يكون ارتفاعه فوق الأرض قيمته 0). حل

$$0 = y(t) = -4.9t^2 + 49t = 49t(1 - 0.1t)$$

يعطي $t = 0$ (زمن قذف الجسم) و $t = 10$ (زمن ملاسة الأرض). إذاً يبلغ زمن الانطلاق في الهواء 10 ثوان. يتم تحديد المركبة الأفقية للحركة من المعادلة $x''(t) = 0$ بسرعة متجهة ابتدائية

$$x'(0) = 98 \cos \pi/6 = 49\sqrt{3} \text{ و } x(0) = 0 \text{ يعطينا التكامل } x'(t) = 49\sqrt{3}$$

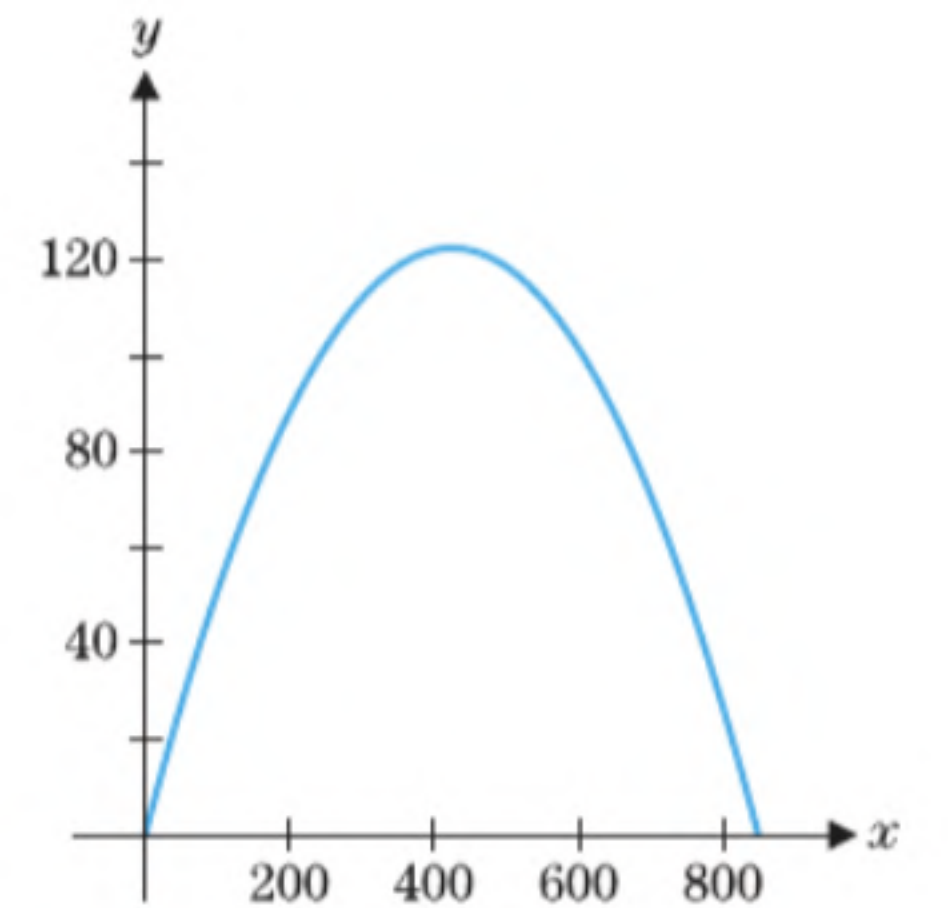
و $x(t) = (49\sqrt{3})t$. في الشكل 6.45، نقوم بتخطيط مسار الكرة. [يمكنك القيام بذلك باستخدام

وضع التخطيط الوسيط على حاسبة تمثيل بياني أو CAS، بإدخال معادلات $x(t)$ و $y(t)$ وإعداد مدى قيم t لتكون $0 \leq t \leq 10$. وبدلاً من ذلك، يمكنك بسهولة حل t ، للحصول

على $t = \frac{1}{49\sqrt{3}}x$ ، لنجد أن المنحنى ببساطة هو قطع مكافئ. يكون المدى الأفقي عندئذ

هو قيمة $x(t)$ عند $t = 10$ (زمن ملاسة الأرض).

$$x(10) = (49\sqrt{3})(10) = 490\sqrt{3} \approx 849 \text{ m}$$



الشكل 6.45

مسار الكرة

ملحوظة 5.1

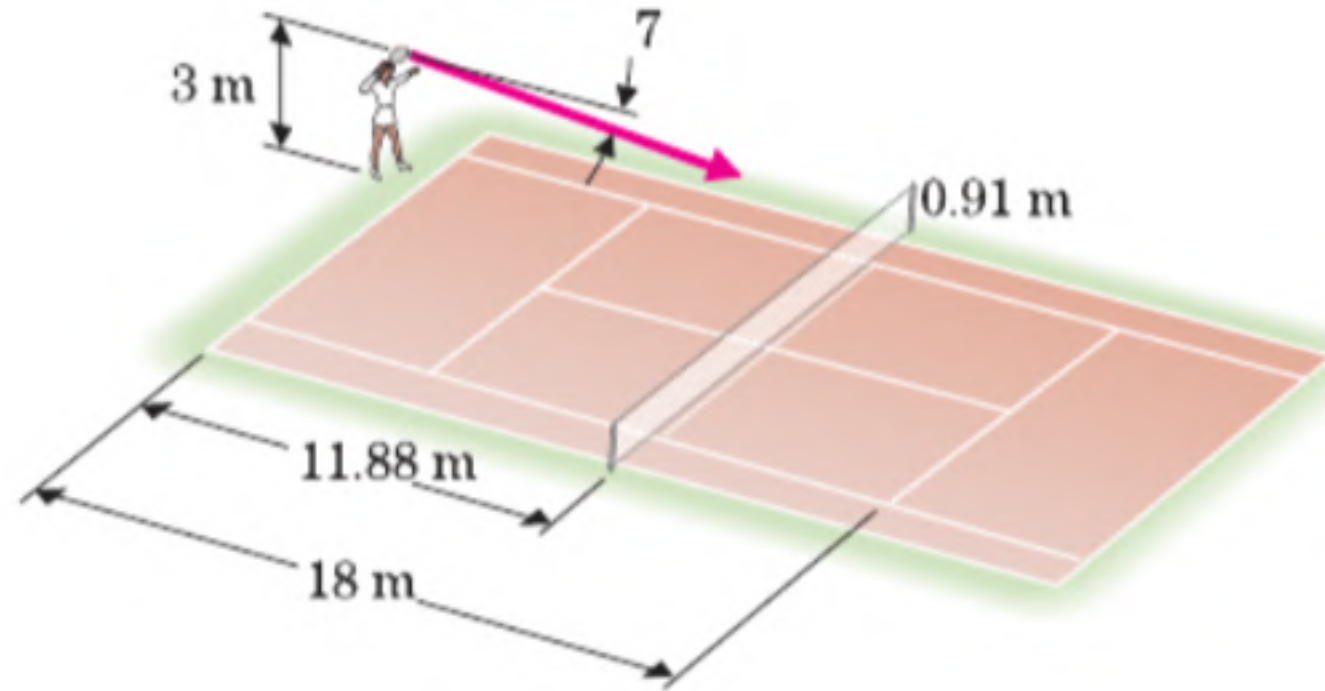
ينبغي عليك مقاومة إغراء تصغير هذا الدرس إلى بضع صيغ محفوظة. إنها حقيقة، أذك إذا تجاهلت مقاومة الهواء، ستكون قيمة المركبة الرأسية للموقع دائماً

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + y(0)$$

ومع ذلك، سيتحسن فهمك للعملية وفرصك في إيجاد الحل الصحيح بشكل كبير إذا بدأت كل مسألة بقانون نيوتن الثاني وقمت بإجراء التكاملات (التي ليست صعبة).

المثال 5.5 حركة ضربة تنس

فسيوو ليامز واحدة مُنبرع الضربتافي تنللسيدات . على فرض لُتًا سددت ضربة من ارتفاع 3 أمتار بسرعة ابتلثية 190 km/h وبزاوية 7° تحت المركبة الأفقية. تكون الضربة موجهة "داخل الحد" إذا مرت الكرة على شبكة ارتفاعها 0.91 m وتبعد مسافة 18 m وترتطم بالأرض أمام خط التسديد على بُعد 18 m. (نوضح ذلك الموقف في الشكل 6.46). حدّد ما إذا كانت الضربة داخل أو خارج الحد.



الشكل 6.46

ارتفاع ضربة تنس

الحل كما في المثال 6.4، نبدأ بال حركة الرأسية للكرة. حيث تعطى المسافة بالمتري، معادلة الحركة هي $y''(t) = -9.8$. يجب تحويل السرعة الابتدائية إلى متر في الثانية: $190 \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 53 \text{ m/s}$

$$y'(0) = 53 \sin(-7^\circ) \approx -6.45 \text{ m/s}$$

$$y'(t) = -9.8t - 6.45$$

الارتفاع الابتدائي $y(0) = 3 \text{ m}$. لذا يعطينا تكاملاً آخر

$$y(t) = -4.9t^2 - 6.45t + 3$$

تحدّد المركبة الأفقية للحركة من $x''(t) = 0$ بسرعة متجهة ابتدائية $x'(0) = 53 \cos(-7^\circ) \approx 52.6 \text{ m/s}$ وموقع ابتدائي $x(0) = 0$. تعطينا التكاملات $x'(t) = 52.6$ و $x(t) = 52.6t$ بإجّازاً. لدينا

$$x(t) = 52.6t$$

$$y(t) = -4.9t^2 - 6.45t + 3$$

كي لا تصطدم الكرة بالشبكة، يجب أن تكون قيمة y على الأقل 0.91 عند $x = 11.88$. لدينا $x(t) = 11.88$ عندما تكون $52.6t = 11.88$ أو $t \approx 0.2233$. في هذا الزمن، $y(0.2233) \approx 1.3$. مما يبيّن أنّ الكرة مرتفعة بما يكفي لكي لا تصطدم بالشبكة. المطلوب د أنيأهو الحاجة إلى وجود $x \leq 18$ عند ملامسة الكرة للأرض ($y = 0$). لدينا $y(t) = 0$ عندما تكون $-4.9t^2 - 6.45t + 3 = 0$. من الصيغة التربيعية، نحصل على $t \approx -1.7$ و $t \approx 0.3662$. بتجاهل الحل السالب، نحسب $x(0.3662) \approx 19.2$. بحيث تلامس الكرة الأرض بعد حد التسديد بحوالي 1.2 m. الضربة ليست داخل الحد.

أحد الأسباب التي تجعلك تبدأ كل مسألة بقانون نيوتن الثاني هو أن يتسنى لك التوقف برهة للتفكير في القوى التي يتم (ولا يتم) التفكير فيها. على سبيل المثال، نكون بذلك قد تجاهلنا حتى مقاومة الهواء. كتبسيط للواقع، تكون بعض العمليات الحسابية باستخدام هذه المعادلات المبسطة دقيقة إلى حد معقول. البعض الآخر، كما هو الحال في المثال 5.6، ليست كذلك.

المثال 5.6 مثال حيث لا يمكن تجاهل مقاومة الهواء

على فرض أنّ قطرات المطر تسقط من غيمة على ارتفاع 900 m فوق سطح الأرض. بتجاهل مقاومة الهواء، ما هي سرعة سقوط قطرة المطر عند ارتطامها بالأرض؟

الحل إذا أعطينا ارتفاع قطرة المطر في الزمن t بالدالة $y(t)$ ، من قانون نيوتن الثاني للحركة أنّ $y''(t) = -32$. بالإضافة إلى ذلك، لنأخذ السرعة المتجهة لقطرة المطر $y'(0) = 0$ (بما أنّ قطرة المطر تسقط كما لو أنّها تمّ قذفها) والارتفاع الابتدائي $y(0) = 3000$. يعطينا التكامل واستخدام الشروط الابتدائية $y'(t) = -9.8t$ و $y(t) = 3000 - 16t^2$. تصطم قطرة الماء بالأرض عندما تكون $y(t) = 0$. لنضع $0 = y(t) = 3000 - 16t^2$

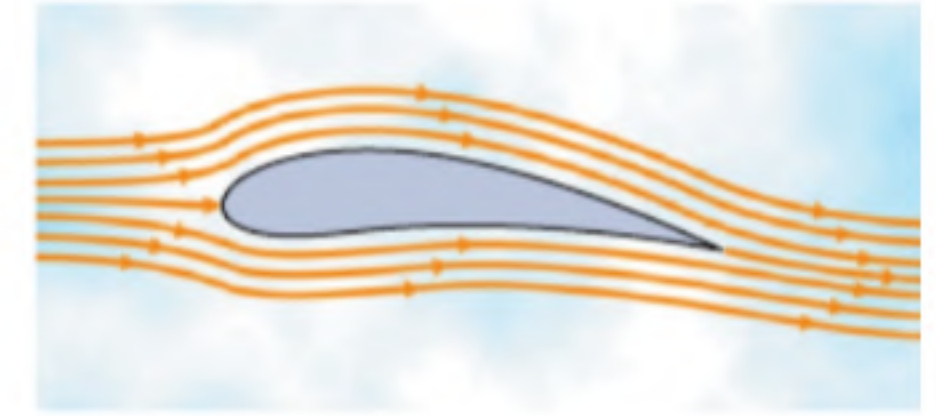
يعطينا $t = \sqrt{3000/16} \approx 13.553$ ثوان. تكون السرعة المتجهة في هذا الزمن إذاً

$$y'(\sqrt{3000/16}) = -9.8\sqrt{3000/16} \approx -438.18 \text{ ft/s}$$

ينظر حوالي 300 mi/h ! لحسن الحظ، تلعب مقاومة الهواء هنا دوراً هاماً في سقوط قطرات المطر، التي لديها سرعة هبوط فعلية تقديراً حوالي 10 mi/h.

الدرس الواضح المستفاد من المثال 5.6 هو أنّه ليس من المعقول دائماً تجاهل مقاومة الهواء. سوف نطوّر بعض الأدوات الضرورية في الرياضيات لتحليل أكثر اكتمالاً لحركة المقذوف مع مقاومة الهواء في وحدة أخرى.

إن مقاومة الهواء (على نحو أدق، سحب الهواء) التي تبطل من سرعة سقوط قطرات المطر ليست سوى واحدة من الطرائق التي يمكن للهواء أن يؤثر بها على حركة أحد الأجسام. يمكن أن تتسبب **قوة ماغنوس**، الناتجة عن دوران جسم ما أو عدم تماثل شكل جسم ما، في تغيير اتجاهات ومنحنى الجسم. ولعل المثال الأكثر شيوعاً لقوة ماغنوس يحدث على متن طائرة. يعد جانب واحد من جناحي الطائرة منحنياً والجانب الآخر مسطحاً نسبياً. (انظر الشكل 6.47). يسبب عدم التماثل يتحرّك الهواء فوق أعلى الجناح بسرعة أكثر من تحركه أسفل الجناح. وهذا ينتج قوة ماغنوس في الاتجاه إلى الأعلى (الصعود). ارتفاع الطائرة في الهواء.



الشكل 6.47

المقطع العرضي لجناح

وهناك مثال أكثر بساطة لقوة ماغنوس يحدث في رمية بيسبول غير عادية تسمى قذيفة الكرة الجنونية. لإلقاء هذه الرمية، يمسك الرامي الكرة بأنامله ويلقي الكرة بأقل قدر ممكن من الدوران. يزعم لاعبو البيسبول بأنّ قذيفة الكرة الجنونية "تدور" بشكل لا يمكن التنبؤ به ومن الصعب للغاية تسديدها أو التقاطها. لا يوجد اتفاق كامل حتى الآن على سبب تحرك قذيفة الكرة الجنونية بشكل كبير، لكننا سنقدم نظرية حالية واحدة لعالمي الفيزياء روبرت واتس وتيري باهيل.

تمت خياطة غطاء كرة البيسبول بغرز مرتفعة قليلاً عن بقية الكرة. تعمل هذه الغرز المنحنية كجناح طائرة، مما يشكل قوة ماغنوس التي تؤثر على الكرة. يعتمد اتجاه قوة ماغنوس على التوجه الدقيق لغرز الكرة. تشير قياسات واتس وباهيل إلى أنّ القوة الجانبية (اليسار/اليمن من وجهة نظر الرامي) هي حوالي $F_m = -0.45 \sin(4\theta) \text{ N}$ ، حيث θ هي زاوية (بالراديان) موقع الكرة عند دورانها من موقع انطلاق محدد.



تنظيم كرة البيسبول،
الخياطة الظاهرة

بما أنّ الجاذبية لا تؤثر على الحركة الجانبية للكرة، القوة الوحيدة المؤثرة على الكرة جانبياً هي قوة ماغنوس. يعطينا قانون نيوتن الثاني المطبق على الحركة الجانبية لقذيفة الكرة الجنونية $mx''(t) = -0.1 \sin(4\theta)$. تبلغ كتلة كرة البيسبول حوالي 0.098 kg. لدينا الآن

$$x''(t) = -10 \sin(4\theta)$$

تدور الكرة بمعدل ω راديان في الثانية، إذاً $4\theta = 4\omega t + \theta_0$. حيث تعتمد الزاوية الابتدائية θ_0 على أين سيمسك الرامي بالكرة. لدينا إذاً

$$(5.1) \quad x''(t) = -10 \sin(4\omega t + \theta_0)$$

مع شروط ابتدائية $x'(0) = 0$ و $x(0) = 0$. للحصول على سرعة قذيفة كرة جنونية عادية تبلغ 96 km/h، يستغرق الأمر 0.68 ثانية للرمية لتصل إلى اللوحة الرئيسية..

المثال 5.7 معادلة حركة قذيفة جنونية

لمعدل دوران $\omega = 2$ راديان في الثانية مع $\theta_0 = 0$. جـ د معادلة الحركة الجانبية لقذيفة جنونية ومثلها بياناً لكل $0 \leq t \leq 0.68$. كرّر ذلك لأجل $\theta_0 = \pi/2$.

الحل لأجل $\theta_0 = 0$. يعطينا قانون نيوتن الثاني $x''(t) = -10 \sin 8t$ من (5.1). يعطينا التكامل واستخدام الشرط الابتدائي $x'(0) = 0$

$$x'(t) = -\frac{10}{8}[-\cos 8t - (-\cos 0)] = 1.25(\cos 8t - 1)$$

وبالتكامل مرة أخرى واستخدام الشرط الثاني $x(0) = 0$ نحصل على

$$x(t) = 1.25 \left(\frac{1}{8} \right) (\sin 8t - 0) - 1.25t = 0.15625 \sin 8t - 1.25t$$

يبين تمثيل بياني لهذه الدالة الحركة الجانبية للكرة. (انظر الشكل 6.48a). يبين التمثيل البياني مسار الرمية كما تظهر من أعلى. لاحظ أن بعد الانطلاق بشكل مستقيم، تخرج هذه الرمية عن الخط المستقيم على بُعد حوالي متر من مركز اللوحة الرئيسية!!

لأجل $\theta_0 = \pi/2$. لدينا من (5.1) أن

$$x''(t) = -10 \sin \left(8t + \frac{\pi}{2} \right)$$

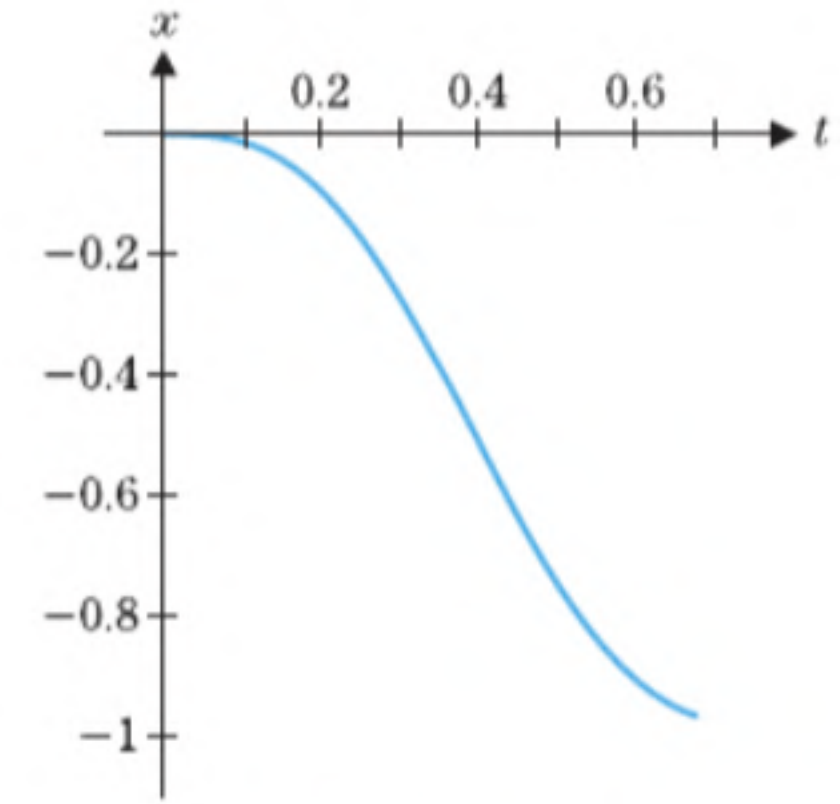
تكامل هذا واستخدام الشرط الأول الابتدائي يعطينا

$$x'(t) = -\frac{10}{8} \left\{ -\cos \left(8t + \frac{\pi}{2} \right) - \left[-\cos \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = 1.25 \cos \left(8t + \frac{\pi}{2} \right)$$

التكامل مرة ثانية يعطينا الناتج

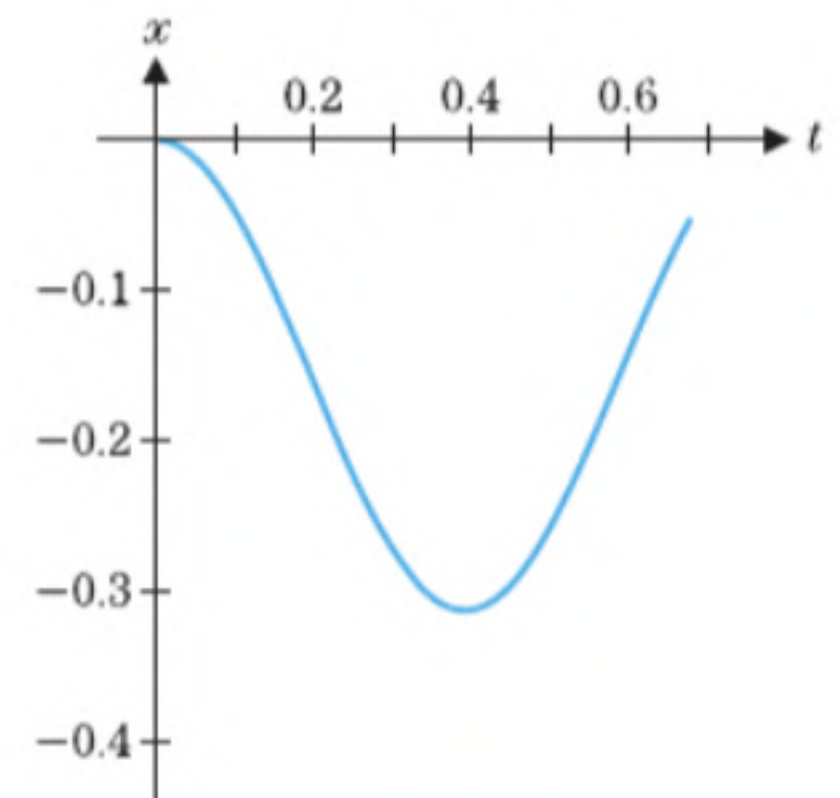
$$x(t) = 1.25 \left(\frac{1}{8} \right) \left[\sin \left(8t + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = 0.15625 \left[\sin \left(8t + \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right]$$

ويوضح الشكل 6.48b تمثيلاً بيانياً للحركة الجانبية في هذه الحالة. لاحظ أن رمية الكرة هذه تخترق ما يقارب 4 cm إلى يمين الضارب ومن ثم تنحني إلى الورا فوق القاعدة لتسجيل ضربة! يمكنك أن ترى أنه، من الناحية النظرية، إن قذيفة الكرة الجنونية حساسة جداً للدوران والموقع الابتدائي، وقد يكون من الصعب جداً ضربها إذا ألقيت بشكل صحيح.



الشكل 6.48a

الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = 0$



الشكل 6.48b

الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

تمارين 6.5

تمارين كتابية

سيكون معقولاً. (في أغلب الحالات، اتضح أن $[v(t)]^2$ يطابق البيانات التجريبية على نحو أفضل).

في التمارين 1-4 حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

1. أسقط جسم من ارتفاع 80 ft.
2. أسقط جسم من ارتفاع 100 ft.
3. أطلق جسم من ارتفاع 60 ft مع سرعة متجهة صعوداً 10 ft/s.
4. أطلق جسم من ارتفاع 20 ft مع سرعة متجهة نزولاً 4 ft/s.

في التمارين 5-56 ، تجاهل مقاومة الهواء.

5. يسقط غطاس من ارتفاع 30 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس الأولمبية نفسه تقريباً). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟
6. يسقط غطاس من ارتفاع 120 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس في مسابقة Acapulco Cliff Diving نفسه تقريباً). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟
7. قارن السرعات المتجهة لحظة الاصطدام للأجسام الساقطة من ارتفاع 30 ft (تمرين 5) و 120 ft (تمرين 6) و 3000 ft (مثال 5.6). إذا زاد الارتفاع بعامل مقداره h بأي عامل تزيد السرعة المتجهة لحظة الاصطدام؟

1. في المثال 5.6، يتضح أن الفرضية الذي يشير إلى أنه يمكن تجاهل مقاومة الهواء غير صحيح. ناقش صحة هذه الفرضية في المثالين 5.1 و 5.3.

2. في المناقشة التي تسبق المثال 5.3، وضحنا أن مايكل جوردان (وأي إنسان آخر) يقضي نصف الزمن الذي يقضيه في الهواء في الربع الأعلى من الارتفاع. قارن سرعته المتجهة عند نقاط مختلفة أثناء القفز لشرح سبب قضاء زمن أكبر نسبياً في الجزء الأعلى منه في الجزء الأدنى.

3. في المثال 5.4، قمنا بإشتقاق معادلات منفصلة للمكونات الأفقية والرأسية للموقع. لاكتشاف إحدى نتائج هذا الانفصال، فكر في الموقف التالي. شخصان يقفان بجانب بعضهما البعض وأيديهما مرفوعة إلى الارتفاع نفسه. أطلق أحدهما رصاصة أفقياً من بندقية. وفي الزمن نفسه، أسقط الآخر رصاصة. اشرح سبب (مع تجاهل مقاومة الهواء) وصول الرصاصتين إلى الأرض في الزمن نفسه.

4. لأجل قطرة المطر المنهمرة في المثال 5.6، إن نموذج أكثر دقة سيكون $y''(t) = -32 + f(t)$ ، حيث $f(t)$ تمثل القوة المؤثرة من مقاومة الهواء (مقسومة على كتلة). إذا كانت $v(t)$ هي سرعة هبوط قطرة المطر، اشرح لماذا هذه المعادلة تكافئ $v'(t) = 32 - f(t)$. اشرح في حدود فيزيائية لماذا $v(t)$ هي أكبر، و $f(t)$ هي أكبر. لذا فإن نموذجاً مثل $f(t) = v(t)$ أو $f(t) = [v(t)]^2$

8. ارتفاع نصب واشنطن 555 ft, 5 1/8 in. في تجربة شهيرة، أسقطت كرة بيسبول من أعلى النصب التذكاري لمعرفة إذا ما كان اللاعب يمكنه الإمساك بها. ما مدى سرعة انطلاق الكرة؟
9. اكتشف ذئب بري أنه قد خطا خارج حافة جرف. بعد أربع ثوانٍ، اصطدم بالأرض في سحابة من الغبار. ما ارتفاع الجرف بالأمتار؟

10. سقطت صخرة كبيرة انزاحت بسبب سقوط الذئب البري في التمرين 9 وذلك قِوان قبل أن تلامس الذئب البري. إلى أي مدى سقطت الصخرة بالأمتار؟ ما سرعتها المتجهة بـ m/s عندما لامست الأرض مع الذئب البري؟

11. يتضمن المخطط التالي للذئب البري إطلاق نفسه في الهواء باستخدام منجنيق. إذا تم دفع الذئب البري رأسًا من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s جـ - د معادلة لارتفاع الذئب في أي زمن t . جـ - د أقصى ارتفاع له ومقدار الزمن الذي يمضيه في الهواء وسرعته المتجهة عندما يترد بقوة مرة أخرى إلى داخل المنجنيق.

12. عند الارتداد، تم دفع الذئب في التمرين 11 إلى ارتفاع يبلغ 78.4 m. ما هي السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية للوصول إلى هذا الارتفاع؟

13. أحد اللاعبين له "قفزة" رأسية تبلغ 20 in. ما السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية للقفز بهذا الارتفاع؟ كيف يمكن مقارنة هذا بالسرعة المتجهة لمايكل جوردان المذكورة في المثال 5.3؟

14. إذا خضع المؤلف لبرنامج تدريبي وتزايدت سرعته المتجهة الابتدائية بنسبة 10%، بأي نسبة مئوية ستزيد قفزته الرأسية؟

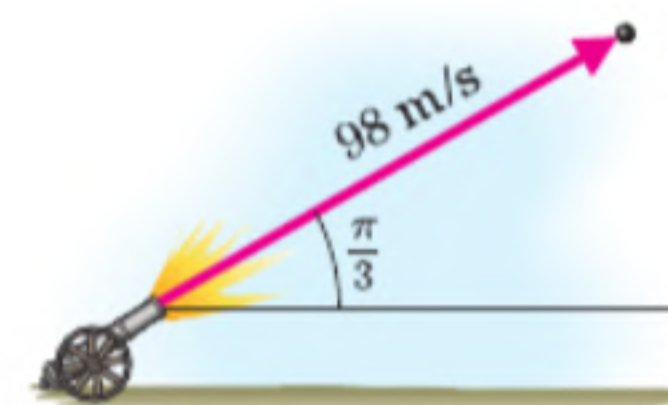
15. (a) أثبت أن جسمًا ما يسقط من ارتفاع H ft سيصطدم بالأرض عند الزمن $T = \frac{1}{4}\sqrt{H}$ ثانية مع سرعة متجهة لحظة الاصطدام تبلغ $V = -8\sqrt{H}$ ft/s.

- (b) أثبت أن جسم ما مدفوع من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ v_0 ft/s يحقق قيمة عظمى للارتفاع $v_0^2/64$ ft.

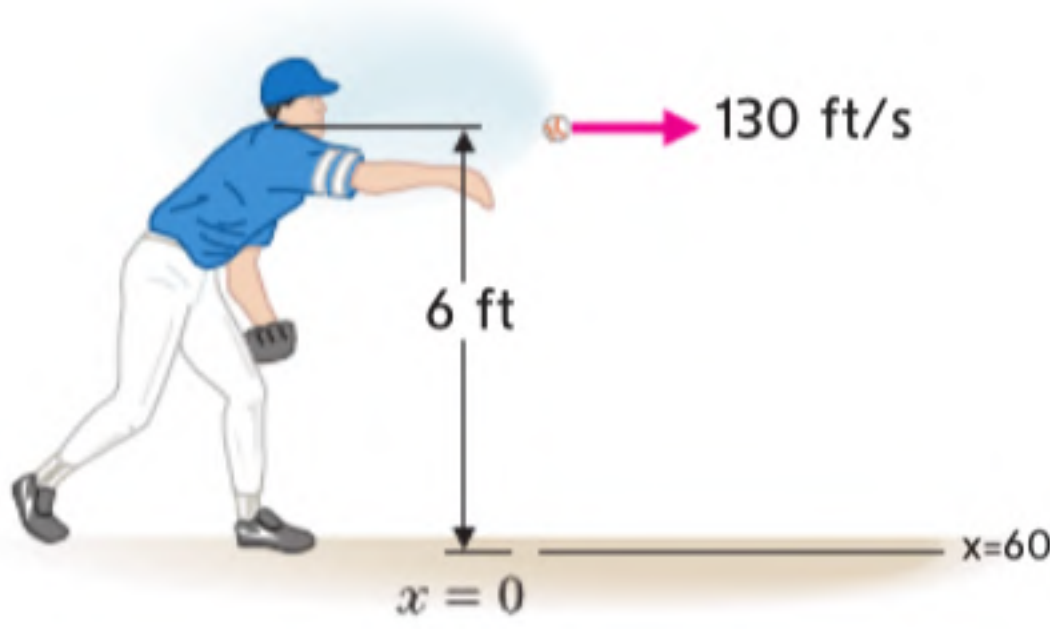
16. (a) وفقًا للأسطورة، أسقط جاليليو كرتين من برج بيزا المائل. عندما ضربت كل من كرة الرصاص الثقيلة والكرة الخشبية الخفيفة الأرض في الزمن نفسه، عرف جاليليو أن تسارع الجاذبية هو نفسه لكل الأجسام. ستؤثر مقاومة الهواء على مثل هذه التجربة. بوضع مقاومة الهواء في الحسبان، ستسقط كرة خشبية مقاس 6 in مسافة $f(t) = \frac{7225}{8} \ln \left[\cosh \left(\frac{16}{85}t \right) \right]$ قدم في t ثانية، بينما ستسقط كرة رصاص مقاس 6 in مسافة $g(t) = 12,800 \ln \left[\cosh \left(\frac{1}{20}t \right) \right]$ قدم حيث $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. من ارتفاع يبلغ 179 ft جـ - د ارتفاع الكرة الخشبية عندما تصطدم كرة الرصاص بالأرض.

- (b) إذا كان منتج مسرحي يرغب في أن يبقَ أن كرتي الجزء (a) تصلان في الزمن نفسه، فكم من الزمن يلزم أن يتم إطلاق الكرة الخشبية بشكل مبكر؟

17. يطلق جسم ما بزاوية $\theta = \pi/3$ راديان من الأفق مع سرعة ابتدائية 98 m/s. حدد زمن التحليق والمدى الأفقي. قارن مع المثال 5.4.



18. جـ - د زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم أطلق بزاوية 30° مع سرعة ابتدائية 40 m/s. كرر العملية مع زاوية 60°.
19. كرر المثال 5.5 مع زاوية ابتدائية 6°. باستخدام التجربة والخطأ، جـ - د أصغر وأكبر زاوية ستكون عندها رمية الإرسال.
20. كرر المثال 5.5 مع سرعة ابتدائية 170 ft/s. باستخدام التجربة والخطأ، جـ - د أصغر وأكبر سرعة ابتدائية ستكون عندها رمية الإرسال.
21. يُطلق ضوب كرة بيسبول الكرة أفقيًا من ارتفاع 6 ft مع سرعة ابتدائية 130 ft/s. حدد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الرئيسية على بعد 60 ft. (إرشاد: حدد زمن التحليق من المعادلة x ، ثم استخدم المعادلة y لتحديد الارتفاع).



22. كرر التمرين 21 مع سرعة ابتدائية 80 ft/s (إرشاد: فسر الإجابة السالبة بعناية).

23. يرمي لاعب بيسبول كرة باتجاه القاعدة الأولى على بعد 120 ft يطلق الكرة من ارتفاع 5 ft مع سرعة ابتدائية 120 ft/s بزاوية 5° أعلى الأفق. جـ - د ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الأولى.

24. باستخدام التجربة والخطأ، جـ - د الزاوية التي ستصل إليها الكرة في التمرين 23 إلى القاعدة الأولى يمكنه الإمساك بها على ارتفاع 5 ft. عند هذه الزاوية، ما مقدار المسافة أعلى رأس لاعب القاعدة الأولى التي يهدف إليها الرامي؟

25. يخطط مخاطر للقفز فوق 25 سيارة. إذا كانت السيارات كلها سيارات مدمجة بعرض 5 ft وزاوية الانحدار هي 30°، حدد السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية لإتمام القفزة بنجاح. كرر العملية مع زاوية انطلاق تبلغ 45°. على الرغم من مطلب تصغير السرعة المتجهة الابتدائية، لماذا قد يفضل المخاطر زاوية 30° على 45°؟

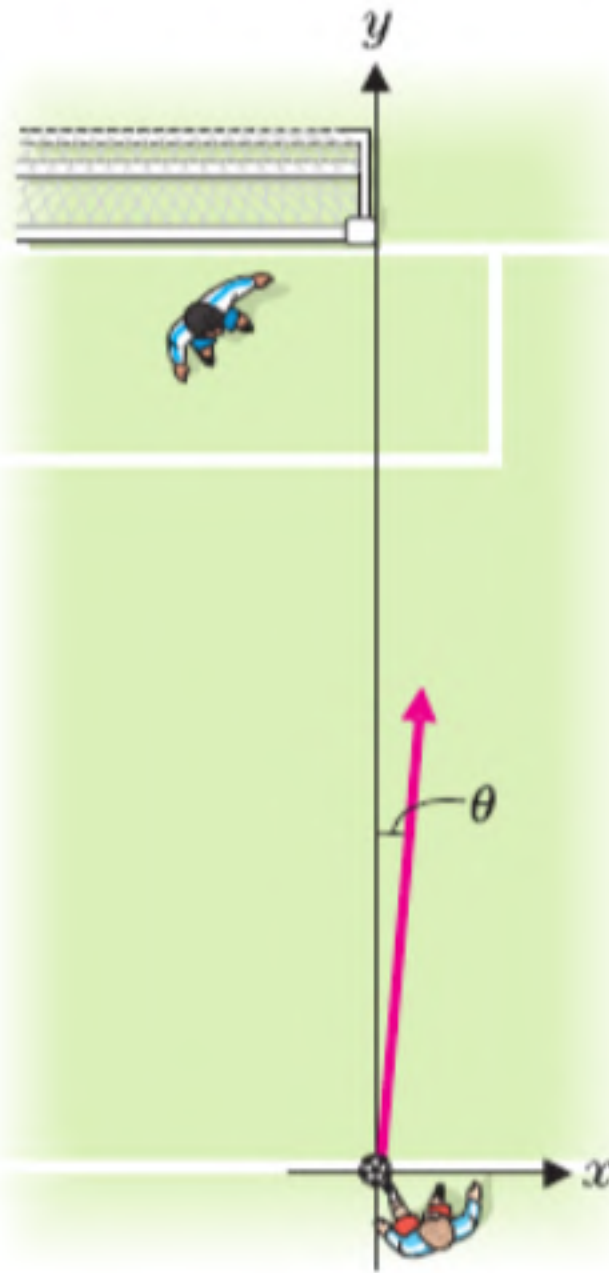
26. تريد طائرة على ارتفاع 256 ft إسقاط إمدادات إلى موقع معين على الأرض. إذا كان للطائرة سرعة أفقية 100 ft/s، فما المسافة التي ينبغي أن تبعد الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات من أجل أن تسقط في الموقع المستهدف؟ (إرشاد: استخدم المعادلة y لتحديد زمن التحليق، ثم استخدم المعادلة x لتحديد المدى الذي ستجرف إليه الإمدادات).

27. لنأخذ في ذهنا كرة جنونية المظهر (المثال 5.7) لها حركة جاذبية تحقق مسألة القيمة الابتدائية $x''(t) = -25 \sin(4\omega t + \theta_0)$ مع $x'(0) = x(0) = 0$ و $\omega = 1$. جـ - د معادلة $x(t)$ ومثل الحل بيانيًا حيث $0 \leq t \leq 0.68$ مع $\theta_0 = 0$ (a) و $\theta_0 = \pi/2$ (b).

28. كرر التمرين 27 لأجل $\theta_0 = \pi/4$ و $\omega = 2$ (a) و $\omega = 1$ (b).

إلى اليسار بسبب دوران الكرة.

- (a) مع $x''(t) = -20$ و $y''(t) = 0$ حدد إذا ما كانت الكرة ستدخل المرمى عند $y = 90$ و $-24 \leq x \leq 0$.



- (b) اصطف حائط من اللاعبين على بعد 10 yd. امتد من $x = -10$ إلى $x = 1$. حدد إذا ما كانت الكرة ستلتف حول الحائط.

36. لتدريب رواد الفضاء على العمل في بيئة من انعدام الجاذبية، ترسلهم وكالة ناسا في تدريب على طائرة خاصة (تلقب بمذنب القيء). لتدكين الكاب من تجربة انعدام الجاذبية، يجب أن يتطابق التسارع العمودي للطائرة بشكل تام مع تسارع الجاذبية. إذا كان $y''(t)$ التسارع العمودي للطائرة، تكون عندئذ $y''(t) = -g$. أثبت أن الطائرة تتبع مساراً على شكل قطع مكافئ، لسرعة متجهة أفقية ثابتة. تخلق طائرة NAS A في مسارات على شكل قطع مكافئ لارتفاع حوالي 2500 ft (2500 ft لأعلى و 2500 ft لأسفل). والزمن المستغرق لإكمال مثل هذا المسار هو مدة انعدام الجاذبية للركاب. احسب هذا الزمن.

في التمارين 37-42، نستكشف جانبيين من جوانب ألعاب الخفية. ويمكن العثور على المزيد من المعلومات في The Mathematics of Juggling بقلم بوركارد بولستر.

37. يتفق لاعبي الخفية المحترفون بشكل عام على أن 10 هو القيمة العظمى لعدد الكرات التي يمكن للإنسان الاحتفاظ بها بنجاح. للحصول على سبب الفكرة، على فرض أن الأمر يستغرق $\frac{1}{2}$ ثانية للقاطات وإلقاء الكرة. (وبعبارة أخرى، يستطيع لاعب الخفية التعامل مع أربع كرات في الثانية، وذلك باستخدام كلتا يديه). للعب بـ 10 كرات، يجب أن تبقى كل كرة في الهواء لمدة 2.5 ثانية. بتجاهل مقاومة الهواء، إلى أي ارتفاع يتعين إلقاء الكرة لتبقى في الهواء لهذه المدة؟ إلى أي ارتفاع يتعين إلقاء الكرات للتمكن من اللعب بـ 11 كرة؟

38. تُعتبر الدقة الجلبد الآخر من جوانب اللعب بالكرات. يجب أن تجتاز الكرة التي يتم اللعب بها من اليد اليمنى إلى اليد اليسرى المسافة الأفقية الصحيحة ليصبح من الممكن الإمساك بها. على فرض أنه تم إلقاء كرة بسرعة متجهة أفقية ابتدائية v_{0x} وسرعة رأسية ابتدائية v_{0y} . فرضاً أنه تم الإمساك بالكرة عند الارتفاع الذي لقيت عنده. أثبت أن المسافة الأفقية

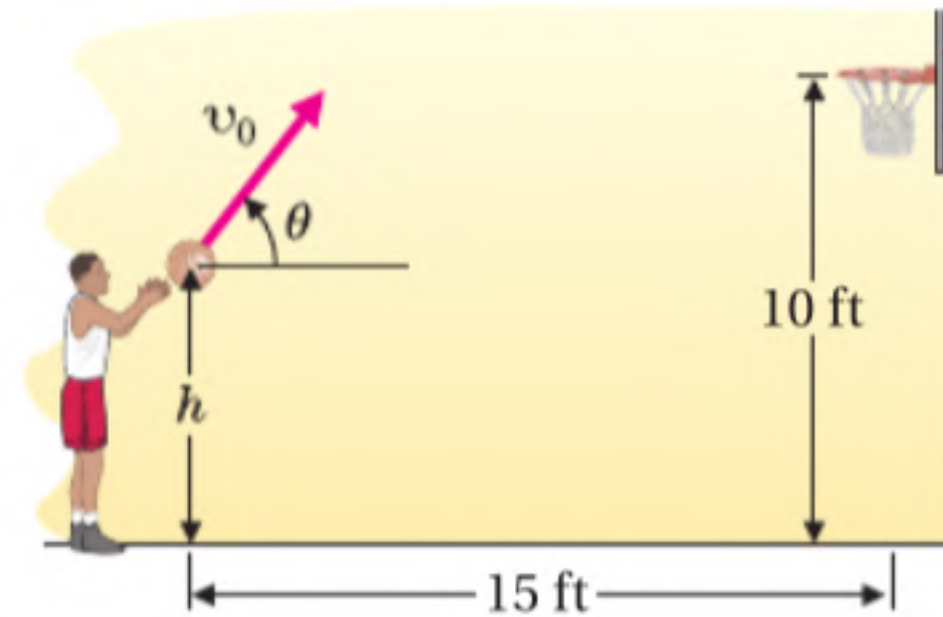
المجتازة هي $w = \frac{v_{0x}v_{0y}}{16}$ قدم (إرشاد: هذه مسألة أساسية في المقذوفات، مشابه للمثال 5.4).

29. يمكنك قياس مدة رد فعلك باستخدام مسطرة. ثبت إصبعي الإبهام والسبابة على جنبي عصا قياس بطول ياردة دع صديقاً لك يسقط عصا القياس وأمسكها بأسرع ما يمكنك. خذ المسافة d التي سقطتها عصا القياس واحسب طول مدة سقوط المسطرة. بَيِّن أنه إذا تم قياس d بالـ cm، فإن زمن رد فعلك حوالي $t \approx 0.045\sqrt{d}$. لأهداف مقارنة، يكون لأحد كبار الرياضيين زمن رد فعل حوالي 0.15 s.

30. يقيس معامل الارتداد للكرة مدى كون الارتداد "لبض بالحيوية". وفقاً للتعريف v_2 ، حيث v_1 هي سرعة (هبوط) الكرة عندما تصطدم بالأرض و v_2 هي سرعة انطلاق (صعود) الكرة بعد أن تصطدم بالأرض. إذا تم إسقاط كرة من ارتفاع H متر وارتدت إلى ارتفاع cH لعدد ثابت c مع $0 < c < 1$ ، احسب معامل الارتداد.
31. للغطاس الأولمبي في التمرين 5، كم ستبلغ السرعة للزاوية المتوسطة (التي تم قياسها بالراديان في الثانية) الضرورية لإكمال $2\frac{1}{2}$ دورة؟

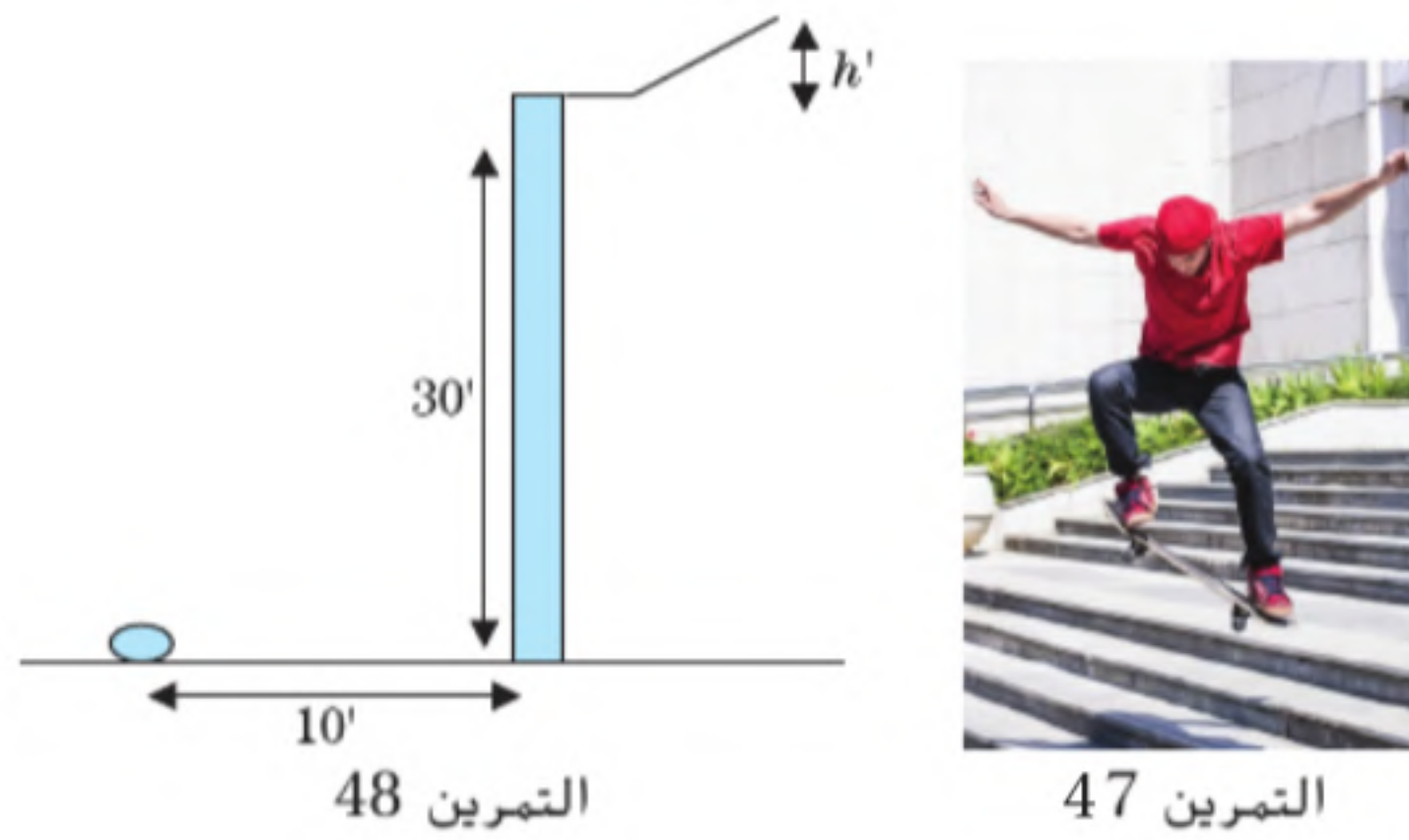
32. في عرض قذيفة المدفع البشرية في سيرك Circus، يتم إطلاق أحد اللاعبين من المدفع من ارتفاع 10 ft بزاوية 45° مع سرعة ابتدائية 160 ft/s. إذا كانت شبكة الأمان تمتد على مسافة 5 ft فوق سطح الأرض، فما هي المسافة التي ينبغي أن تبعد عنها شبكة الأمان عن المدفع؟ إذا كان باستطاعة شبكة الأمان تحمّل سرعة متجهة لحظة الاصطدام 160 ft/s، فهل سيسقط Flying Zucchini بأمان أم سيُسحق؟

33. في رمية حرة في لعبة كرة السلة، تم رمي كرة من ارتفاع يبلغ h قدم باتجاه سلة ارتفاعها 10 ft عن سطح الأرض مع مسافة أفقية 15 ft. (انظر الشكل أدناه). إذا كان $h = 6$ و $\theta = 52^\circ$ و $v_0 = 25$ ft/s، بَيِّن أن الرمية الحرة جيدة. بما أن السلة أكبر من الكرة، يكون للرمية الحرة هامش خطأ يبلغ عدة بوصات إذا وُجد أن أي رمية تمر عبر ارتفاع 10 ft مع $4.4 \leq x \leq 15.354$ تكون جيدة، فبين أنه للسرعة الابتدائية المعطاة التي تبلغ v_0 يكون هامش الخطأ هو $48^\circ \leq \theta \leq 57^\circ$. ارسم تمثيلات بيانية وسيطية لإظهار عدد من هذه الرميات الحرة.



34. تم رمي كرة سلة من ارتفاع 8 ft عند مسافة أفقية 15 ft من السلة. السرعة الابتدائية هي 27 ft/s والزاوية الابتدائية هي 30° فوق الأفق. تتواجد السلة على ارتفاع 10 ft وتمتد من $x = 14.25$ ft إلى $x = 15.75$ ft. (a) أثبت أن مركز الكرة يمر عبر السلة. (b) حدد أصغر مسافة بين مركز الكرة والجزء الأمامي من الحافة عند (14.25, 10) وبين مركز الكرة والجزء الخلفي من الحافة عند (15.75, 10). (c) إذا كان قطر الكرة هو 9 in، بَيِّن أن الكرة تصطدم بالحافة. (راجع مقال هوارد بينس في Mathematics and Sports).

35. يشتهر لاعب كرة القدم روبرتو كارلوس البرازيلي بركلاته المنحنية. على فرض أن لديه ركلة حرة من مسافة 30 yd بتحديد اتجاه x والمحور y كما هو مبين في الشكل، على فرض أن للركلة سرعة ابتدائية 30 yd/s بزاوية 5° من محور y الموجب. فرضاً أن القوة الوحيدة على الكرة هي قوة ماغنوس



48. يقوم أحد الصفوف الدراسية في مادة العلوم ببناء منحدر لدراجة كرة بولينج خارج نافذة ترتفع مسافة 30 ft عن الأرض. وهدفهم هو أن تهبط الكرة على بطيخة تبعد عن المبنى بمسافة 10 ft. بافتراض عدم وجود احتكاك أو مقاومة هواء، حدد ارتفاع المنحدر اللازم لتحطيم البطيخة

تمارين استكشافية

- في النص والتمرينين 27 و 28، ناقشنا المعادلة التفاضلية $x''(t) = -25 \sin(4\omega t + \theta_0)$ للحركة الجانبية لقذيفة كرة جنوبية. استخدم التكامل وطبق الشرطين الابتدائيين $x'(0) = 0$ و $x(0) = 0$ لإشتقاق المعادلة العامة $x(t) = \frac{25}{16\omega^2} \sin(4\omega t + \theta_0) - \left(\frac{25}{4\omega} \cos \theta_0\right)t - \frac{25}{16\omega^2} \sin \theta_0$. إذا كنت تستطيع الوصول إلى تمثيلات بيانية ثلاثية الأبعاد، مثل $x(t, \omega)$ بيانياً لأجل $\theta_0 = 0$ مع $0 \leq t \leq 0.68$ و $0.01 \leq \omega \leq 10$. (ملحوظة: سيواجه بعض المخططين صعوبة مع $\omega = 0$) كرر مع $\theta_0 = \pi/4, \theta_0 = \pi/2$ وخيارين من نفسك حيث θ_0 . يريد أحد الضاربين أن تتحرك الكرة أكبر قدر ممكن ذهاباً وإياباً ولكن أن ينتهي بها الأمر بالقرب من القاعدة الرئيسية ($x = 0$). بناءً على هذه المعايير، اختر تركيبات من θ_0 و ω تنتج أفضل أربع ضربات. مثل هذه الضربات بيانياً باستخدام بعددين مع $x = x(t)$ كما هو مبين في الشكلين 6.48a و 6.48b.
- على الرغم من أننا قد علّقنا على بعض أوجه القصور في نموذج الجاذبية فقط لحركة المقذوفات، إلا أننا لم نقدم بدائل. تميل مثل هذه النماذج إلى أن تكون إلى حد ما أكثر تعقيداً من الناحية الحسابية. يأخذ النموذج المستكشف في هذا التمرين في الاعتبار مقاومة الهواء بطريقة يتم التعامل معها وحلها من الناحية الحسابية ولكن لا زلنا غير واقعية تماماً. فرضاً أن قوة مقاومة الهواء تتناسب مع السرعة وتعمل في الاتجاه المعاكس للسرعة. لأجل حركة أفقية (مع عدم وجود جاذبية)، لدينا $a(t) = F(t)/m = -cv(t)$ لعدد ثابت c . اشرح إلى ماذا تدل إشارة رمز ناقص. بما أن $a(t) = v'(t)$ ، فإن النموذج هو $v'(t) = -cv(t)$. أثبت أن الدالة $v(t) = v_0 e^{-ct}$ تحقق المعادلة $v'(t) = -cv(t)$ والشرط الابتدائي $v(0) = v_0$. إذا بدأ جسم عند $x(0) = a$ ، فقم بتكامل $v(t) = v_0 e^{-ct}$ لإيجاد موقعه في أي زمن t . أثبت أن مقدار الزمن المطلوب للوصول إلى $x = b$ (حيث $a < b$) يُعطى بالعلاقة $T = -\frac{1}{c} \ln \left(1 - c \frac{b-a}{v_0}\right)$ (لأجل كرة بيسبول $c = 0.15$). ثم رميها بسرعة 125 ft/s من $a = 0$. حدد الفترة الزمنية التي تستغرقها للوصول إلى $b = 60$ واحسب سرعتها المتجهة عند تلك النقطة. بأي نسبة قد انخفضت سرعتها المتجهة؟ في لعبة

- بالعودة إلى التمرين 38، على فرض أنه قد تم قذف الكرة بزاوية α من الخط الرأسي. أثبت أن $\tan \alpha = \frac{v_{0x}}{v_{0y}}$. بدمج هذه النتيجة مع التمرينين 15(b) و 38، أثبت أن $w = 4h \tan \alpha$. حيث h هي القيمة العظمى لارتفاع الرمية.
- جـ - د التقريب الخطي لـ $\tan^{-1} x$ عند $x = 0$. استخدم التقريب والتمرين 39 لتثبت أن $\alpha \approx \frac{w}{4h}$. إذا كانت زاوية بمقدار α تُنتج مسافة قدرها w وزاوية بمقدار $\alpha + \Delta\alpha$ تُنتج مسافة قدرها $w + \Delta w$ ، فاثبت أن $\Delta\alpha \approx \frac{\Delta w}{4h}$.
- على فرض أن Δw هو الفرق بين المسافة الأفقية المثالية لرمية والمسافة الأفقية الفعلية للرمية. لأي لاعب خفّ عادي، فإن خطأ يبلغ $\Delta w = 1$ ft يكون مقدوراً عليه. ليكن $\Delta\alpha$ هو الخطأ المناظر في زاوية الرمية. إذا كان h هو الارتفاع المطلوب للعب بـ 11 كرات (انظر التمرين 37)، جـ - د القيمة العظمى للخطأ في زاوية الرمي.
- كرر التمرين 41 باستخدام الارتفاع المطلوب للعب بـ 11 كرة. ما مقدار الدقة التي يحتاجها لاعب الخفة للعب بـ 11 كرة؟
- قام رائد الفضاء آلان شيبيرد بتعديل بعض م علّت العمل على سطح القمر وأصبح هو الشخص الوحيد الذي ضرب كرة جولف على سطح القمر. فرضاً أنه قد تم ضرب الكرة بسرعة 6 ft/s بزاوية 25° فوق الأفق. بافتراض عدم وجود مقاومة هواء، جـ - د المسافة التي كادت ستقطعها الكرة على الأرض. ثم جـ - د المسافة التي ستقطعها على القمر، حيث لا يوجد فعلاً أي مقاومة هواء (استخدم $g = 5.2$ ft/s²). تبلغ قوة الجاذبية للقمر سدس قوة جاذبية الأرض. قد يكون تخمين بسيط هو أن كرة جولف ستنتقل على القمر بارتفاع أكبر بستة أضعاف ومسافة أبعد بستة أضعاف مقارنةً بالأرض. حدد ما إذا كان هذا صحيحاً.
- على فرض أن أحد رجال الإطفاء يحمل خرطوم الماء بميل m والماء يتدفق من الخرطوم بسرعة v ft/s. أثبت أن الماء يتبع المسار $y = -16 \left(\frac{1+m^2}{v^2} \right) x^2 + mx$. إذا كان رجل الإطفاء يقف على مسافة 20 ft من حائط لسرعة مُعطاة تبلغ v ، فما هي القيمة العظمى للارتفاع على الحائط الذي يمكن للماء أن يصل إليه؟
- على فرض أن إسقاط هدف رأسياً على مسافة أفقية تبعد 20 ft منك. إذا أطلقت كرة طلاء أفقياً مباشرةً على الهدف، أثبت أنك ستصطدم به (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء وبافتراض أن الكرة الطلاء تبلغ الهدف قبل أن يصطدم أي منهما بالأرض).
- قُطع جسم من ارتفاع 100 ft. يتم إطلاق جسم آخر تحت الجسم الأول مباشرةً رأسياً من الأرض مع سرعة متجهة ابتدائية 40 ft/s. حدد متى وكيف سيصطدم الجسمان ومدى الارتفاع الذي سيصطدمان عنده.
- ما مدى سرعة لاعب تزلج عمودي مثل توني هوك وهو ينطلق أسفل منحدر؟ بتجاهل الاحتكاك ومقاومة الهواء، تأتي الإجابة من قانون حفظ الطاقة، والذي يص على أن مجموع طاقة الحركة $\frac{1}{2}mv^2$ زائد طاقة الوضع mgy يبقى ثابتاً. على فرض أن الطاقة في أعلى المسار عند الارتفاع H هي كلها طاقة وضع والطاقة في أسفل المنحدر هي كلها طاقة حركة. (a) جـ - د السرعة في أسفل كدالة H . (b) احسب السرعة إذا كان $H = 16$ ft. (c) جـ - د السرعة في منتصف المسافة لأسفل $y = 8$. (d) إذا كان للمنحدر شكل $y = x^2$ حيث $-4 \leq x \leq 4$ ، جـ - د المركب بين الأفقي والرأسي للسرعة في منتصف المسافة عند $y = 8$.

البيسبول، يُستخدم نوعان مختلفان من بنادق الرادار لقياس سرعة الرمية. يقيس أحدهما سرعة الكرة بمجرد أن تترك يد الرامي مباشرةً. بينما يقيس الآخر سرعة الكرة في الطريق إلى القاعدة الرئيسية. إذا سجلت البندقية الأولى 94 mph وسجلت الثانية 98 mph فما هي المسافة التي تأخذ عندها البندقية الثانية قياسها؟

3. إنَّ الهدف في لعبة الكمبيوتر القديمة "الغوريلا" هو إدخال سرعة وزاوية لإطلاق موز متفجر في محاولة لضرب الغوريلا في مكان آخر. على فرض أنَّ موضعك هو عند نقطة الأصل والغوريلا عند (40, 20). (a) جـ د تركيبتين من السرعة/الزاوية التي ستصطدم بالغوريلا. (b) قُدِّر أصغر سرعة يمكن استخدامها للاصطدام بالهدف. (c) كرر الجزأين (a) و (b) إذا كان يوجد مبنى في الطريق يشغل $20 \leq x \leq 30$ و $0 \leq y \leq 30$.

تطبيقات التكامل على الفيزياء والهندسة

في هذا الدرس، نستكشف العديد من تطبيقات التكامل في الفيزياء. في كل حالة، سنعرّف مفهومًا أساسيًا ومن ثم نستخدم التكامل المحدود لتعميم المفهوم وحل نطاق أوسع من المسائل.

تخيل أنك في أسفل تل تكسوه الثلوج معزلة. للحصول على جولة تزلج جيدة، يجب أن تدفع المزلة إلى أعلى التل إلى أقصى حد ممكن. يقول أي فيزيائي أنه كلما ازدادت طاقة الجهد الذي لديك، يحوّل التزلج لأسفل التل طاقة الجهد إلى طاقة حركة. (هذا هو الجزء الممتع!) ولكن دفع المزلة أعلى التل يتطلب منك بذل بعض الشغل؛ يجب عليك بذل قوة على مسافة طويلة.

تتمثل مهمتنا الأولى بتحديد مقدار الشغل. بالتأكيد، إذا كنت تدفع مثلي الوزن (أي تبذل مثلي القوة)، فأنت تبذل مثلي الشغل. وعلاوة على ذلك، إذا كنت تدفع المزلة لمثلي المسافة، فإنك تبذل مثلي الشغل. في ضوء تلك الملاحظات، لأي قوة ثابتة F مبذولة لمسافة d ، نعرّف الشغل W المبذول على أنه

$$W = Fd$$

نوسع مفهوم الشغل هذا إلى حالة القوة غير الثابتة $F(x)$ المبذولة على الفترة $[a, b]$ كما يأتي: أولاً، نجد زىء الفترة $[a, b]$ إلى n فترات جزئية متساوية، عرض كل منها $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ونأخذ الشغل المبذول على كل فترة جزئية. إذا كان Δx صغيراً، يمكن عندئذٍ تقريب القوة $F(x)$ المبذولة على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ باستخدام القوة الثابتة $F(c_i)$ لبعض النقاط $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. يبلغ الشغل المبذول لتحريك الجسم على طول الفترة الجزئية عندئذٍ تقريباً $F(c_i) \Delta x$. يكون مقدار الشغل الكلي W هو تقريباً

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x$$

يجب عليك التعرف على هذا باعتباره مجموع ريمان، والذي، عندما تصبح n أكبر، يقترب من مقدار الشغل الفعلي.

(6.1)

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x = \int_a^b F(x) dx.$$

الشغل

نأخذ (6.1) بوصفه تعريفاً للشغل.

لقد لاحظت على الأرجح أنه كلما إنكمش (أو تمدد) نابض عن طوله الطبيعي، زادت القوة المطلوبة لإنكمش (أو لتمدد) النابض بشكل أكبر. وفقاً لقانون هوك، إنّ القوة المطلوبة للحفاظ على النابض في وضع معيّن تتناسب مع المسافة التي إنكمش (أو تمدد) إليها.

بمعنى أن، إذا كانت x هي المسافة التي ينكمش (أو يتمدد) إليها نابض من طوله الطبيعي، تُعطى القوة $F(x)$ المبذولة من النابض بالعلاقة

$$F(x) = kx \quad (6.2)$$

لعدد ثابت k (ثابت النابض)

مثال 6.1 حساب الشغل المبذول لتمدد نابض

تعمل قوة قدرها 3 lb على تمديد نابض $\frac{1}{4}$ ft من طوله الطبيعي. (انظر الشكل 6.49). جـ - د الشغل المبذول في تمديد النابض 6 in أكثر من طوله الطبيعي.

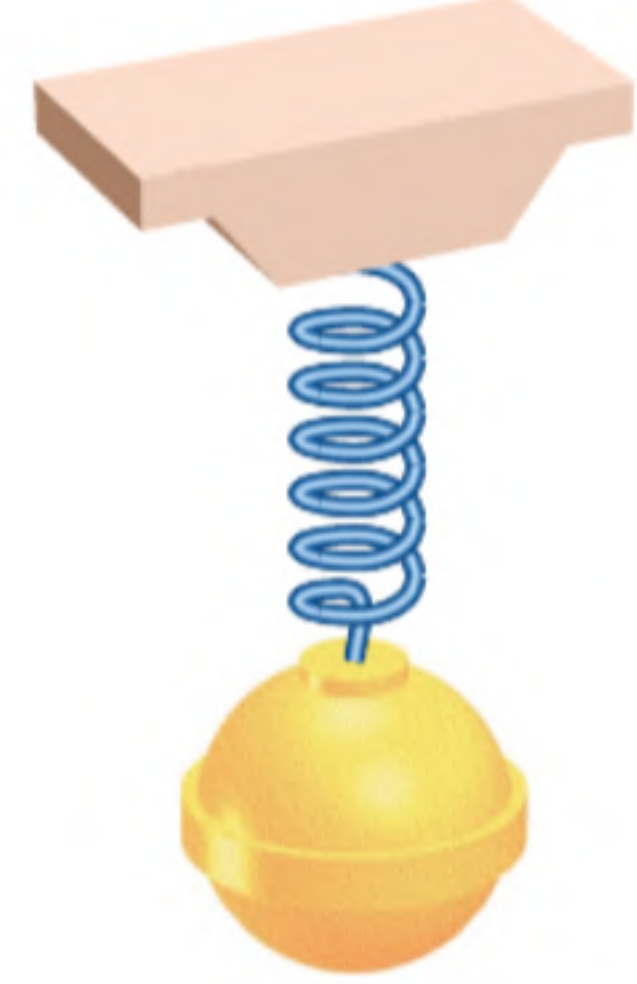
الحل أولاً، نحدد قيمة ثابت النابض. ومن قانون هوك (6.2)، لدينا

$$3 = F(1/4) = k(1/4)$$

بحيث يكون $k = 12$ و $F(x) = 12x$. من (6.1)، يكون الشغل المبذول في تمديد النابض 6 in عندئذ هو

$$W = \int_0^{1/2} F(x) dx = \int_0^{1/2} 12x dx = 3/2 \text{ ft-lb}$$

في هذه الحالة، لاحظ أن تمديد النابض ينقل طاقة جهد إلى النابض. (إذا أُطلق النابض في وقت لاحق، فإنه يترد مرة أخرى إلى طوله الطبيعي محولاً طاقة الجهد إلى طاقة حركة). ■



الشكل 6.49 نابض متمدّد

مثال 6.2 حساب الشغل المبذول من حامل أثقال

يرفع حامل أثقال كتلة حديدية وزن 200 lb مسافة 3 ft هبط. ما هو مقدار الشغل المبذول؟ حدد أيضاً الشغل الذي يبذله حامل الأثقال إذا رفع الوزن 4 ft فوق الأرض ومن ثم أعاده إلى مكانه مرة أخرى.

الحل بما أن القوة (الوزن) هو ثابت هنا، يكون لدينا ببساطة

$$W = Fd = 200 \times 3 = 600 \text{ ft-lb}$$

قد يبدو الأمر غريباً، ولكن إذا كان حامل الأثقال يرفع الوزن نفسه 4 ft عن الأرض ثم يعيده إلى موقعه مرة أخرى، فعندئذٍ بما أن الثقل الحديدي ينتهي في الموقع نفسه حيث بدأ، تكون المسافة الصافية المقطوعة هي صفراً والشغل المبذول هو صفراً. بطبيعة الحال، سيشعر حامل الأثقال أنه بذل شغلاً، ولكن كما سبق أن عرفناه، يتم حساب الشغل حسب تغير الطاقة في الجسم. وبما أن الثقل الحديدي لديه الطاقة الحركية وطاقة الجهد نفسها التي بدأت بها، يكون مقدار الشغل الكلي المبذول عليه هو صفراً. ■

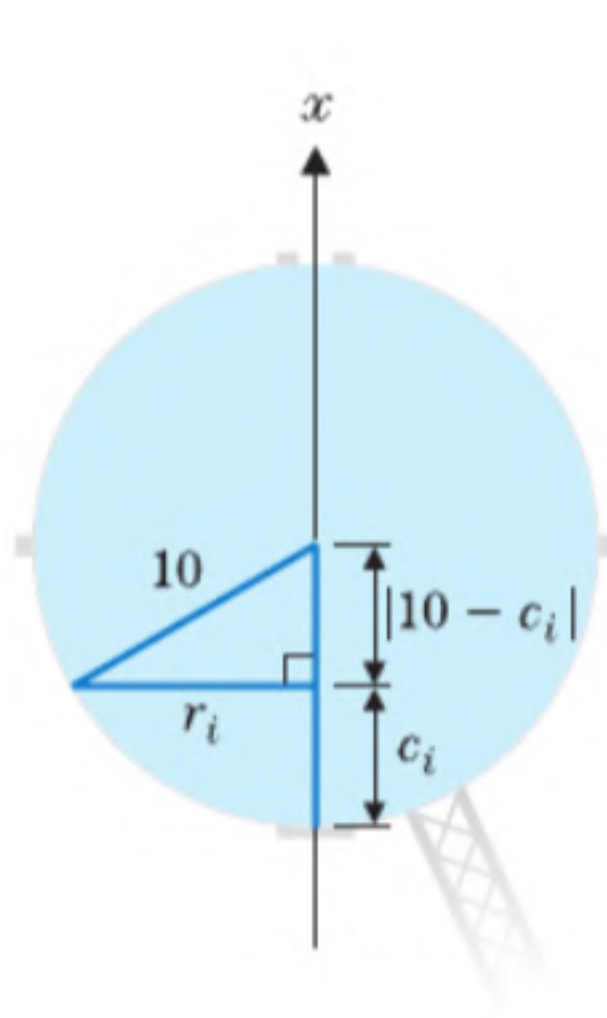
في المثال 6.3، كل من القوة والمسافة كميات غير ثابتة. يُمثل هذا بعض التحديات الفريدة من نوعها وسنحتاج أولاً إلى تقريب الشغل ومن ثم نتعرف على التكامل المحدود الذي تولده عملية التقريب هذه.

مثال 6.3 حساب الشغل المطلوب لضخ ماء من خزان

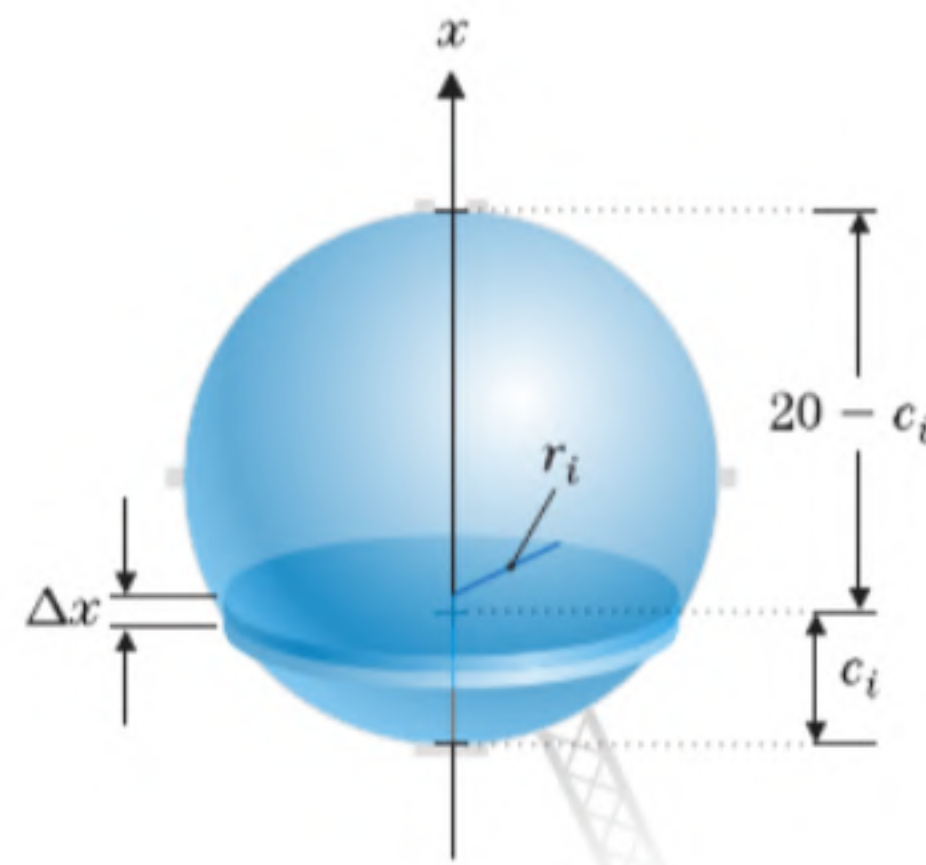
يبلغ نصف قطر خزان كروي الشكل 10 ft مملوء بالماء. جـ - د الشغل المبذول في ضخ كل كمية الماء للخارج من خلال الجزء العلوي من الخزان.

الحل لا تنطبق الصيغة الأساسية $W = Fd$ مباشرة هنا، لعدة أسباب. والسبب الأكثر وضوحاً من هذه الأسباب هو اختلاف المسافة التي يقطعها الماء في كل جزء من الخزان، حيث إن الماء باتجاه الجزء السفلي من الخزان يجب أن يُضخ على طول المسافة إلى الأعلى في حين أن الماء بالقرب من أعلى الخزان يجب أن يُضخ فقط لمسافة قصيرة. لتكن x دُمثل المسافة التي تم قياسها من الجزء السفلي من الخزان، كما هو مبين في الشكل 6.50a. ينظر الخزان بأكمله الفترة $0 \leq x \leq 20$ ، والتي نجزئها إلى

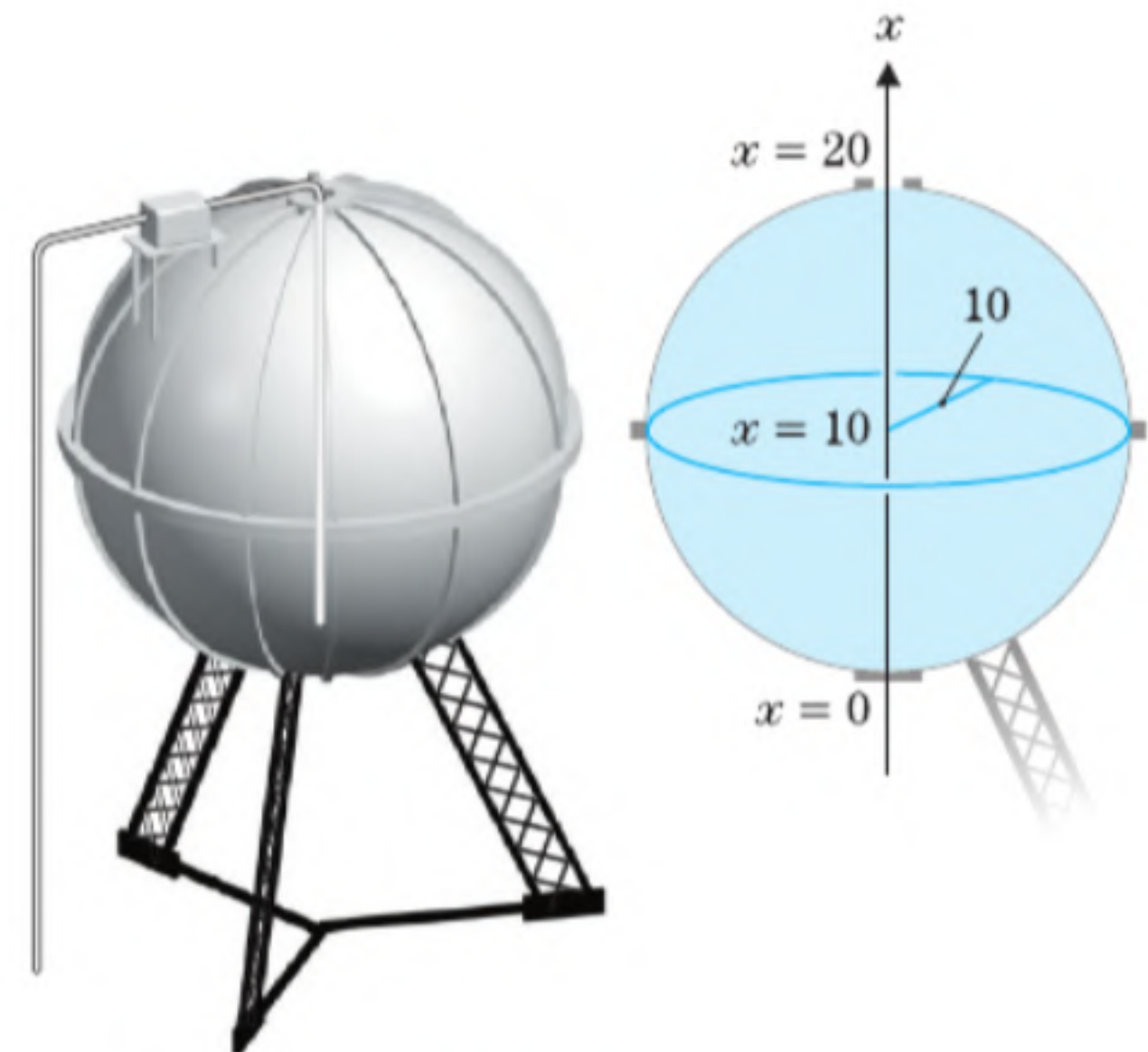
$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 20$$



الشكل 6.50c
مقطع عرضي للخرزان



الشكل 6.50b
الشريحة عند الحد i من الماء



الشكل 6.50a
خرزان دائري

حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{20}{n}$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$. يقوم هذا على تجزئة الخزان إلى n طبقات رفيعة، يناظر كل منها فترة $[x_{i-1}, x_i]$ (انظر الشكل 6.50b). يمكنك التفكير في الماء الموجود في الطبقة المناظرة لـ $[x_{i-1}, x_i]$ بأنها أسطوانية تقريبًا، ارتفاعها Δx . يجب ضخ هذه الطبقة إلى مسافة تبلغ تقريبًا $20 - c_i$. لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ، لا حظ من الشكل 6.50b أنّ نصف قطر الطبقة عند الحد i يعتمد على قيمة x من الشكل 6.50c (حيث نبتن مقطعًا عرضيًا للخرزان). نصف القطر r_i الذي يقابل عمقًا يبلغ c_i هو قاعدة مثلث قائم الزاوية له وتر يبلغ 10 وارتفاع يبلغ $|10 - c_i|$ من نظرية فيثاغورس، لدينا الآن

$$(10 - c_i)^2 + r_i^2 = 10^2$$

بحل هذا لـ r_i^2 ، لدينا

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 10^2 - (10 - c_i)^2 = 100 - (100 - 20c_i + c_i^2) \\ &= 20c_i - c_i^2 \end{aligned}$$

إنّ القوة F_i المطلوبة لتحريك الطبقة عند الحد i هي عندئذٍ يساوية القوة المبذولة على الماء بواسطة الجاذبية (أي، وزنها). بما أنّ كثافة وزن الماء هي 62.4 lb/ft^3 لدينا الآن

$$\begin{aligned} F_i &\approx (\text{وزن الماء في وحدة الحجم}) (\text{حجم الشريحة الأسطوانية}) \\ &= (\pi r_i^2 h) (62.4 \text{ lb/ft}^3) \\ &= 62.4 \pi (20c_i - c_i^2) \Delta x \end{aligned}$$

يُعطى الشغل المطلوب لضخ الشريحة عند الحد i للخارج عندئذٍ بصورة تقريبية بالعلاقة

$$\begin{aligned} W_i &\approx (\text{المسافة}) (\text{القوة}) \\ &= 62.4 \pi (20c_i - c_i^2) \Delta x (20 - c_i) \\ &= 62.4 \pi c_i (20 - c_i)^2 \Delta x \end{aligned}$$

ويكون الشغل المطلوب لضخ كل كمية الماء للخارج هو عندئذٍ مجموع الشغل المطلوب لكلٍ من الـ n شرائح:

$$W \approx \sum_{i=1}^n 62.4 \pi c_i (20 - c_i)^2 \Delta x$$

أخيرًا، بأخذ النهاية عندما $n \rightarrow \infty$ يعطي المقدار الدقيق للشغل، والذي ينبغي أن نتعرف عليه باعتباره التكامل المحدود:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 62.4\pi c_i (20 - c_i)^2 \Delta x = \int_0^{20} 62.4\pi x (20 - x)^2 dx \\ &= 62.4\pi \int_0^{20} (400x - 40x^2 + x^3) dx \\ &= 62.4\pi \left[400 \frac{x^2}{2} - 40 \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^{20} \\ &= 62.4\pi \left(\frac{40,000}{3} \right) \approx 2.61 \times 10^6 \text{ lb/ft} \end{aligned}$$

الدفع هو كمية فيزيائية ترتبط ارتباطًا وثيقًا بالشغل. فبدلًا من الربط بين القوة والمسافة، يربط الدفع بين الطاقة، يربط الدفع بين القوة والتغيرات في السرعة المتجهة. أولًا، على فرض أنه تم بذل قوة ثابتة F على جسم من الزمن $t = 0$ إلى الزمن $t = T$. إذا أعطي موقع الجسم عند الزمن t بالعلاقة $x(t)$ ، ينص قانون نيوتن الثاني على أن $F = ma = mx''(t)$ تكامل هذه المعادلة مرة واحدة بمعلومية t يعطينا

$$\int_0^T F dt = m \int_0^T x''(t) dt,$$

$$FT = m[x'(T) - x'(0)] \quad \text{أو}$$

تذكر أن $x'(t)$ هي السرعة المتجهة $v(t)$ بحيث يكون

$$FT = m[v(T) - v(0)]$$

أو $FT = m\Delta v$ ، حيث $\Delta v = v(T) - v(0)$ هو التغير في السرعة المتجهة. يُطلق على الكمية FT اسم **الدفع**، و $mv(t)$ هو **الزخم** عند الزمن t والمعادلة التي تربط بين الدفع والتغير في السرعة المتجهة تسمى **معادلة الدفع والزخم**.

مثلما توسّعنا مفهوم الشغل ليتضمّن قوى غير ثابتة، يجب أن نعمم مفهوم الدفع. فكّر في الآتي وحاول أن تخمن ما ينبغي أن يكون عليه التعريف.

نعرّف **الدفع J** لقوة $F(t)$ مبدولة على الفترة الزمنية $[a, b]$ بأنه

$$J = \int_a^b F(t) dt \quad \text{الدفع}$$

نترك مشتقات هذا كتمرين. نعمم معادلة الدفع والزخم على الشكل الآتي:

$$J = m[v(b) - v(a)] \quad \text{معادلة الدفع والزخم}$$

مثال 6.4 تقدير الزخم لكرة بيسبول

على فرض أن كرة بيسبول تنطلق بسرعة 130 ft/s تصطدم بمضرب. تبين البيانات التالية (مقتبسة من *The Physics of Baseball* بقلم روبرت أدير) القوة المبدولة من المضرب على الكرة عند فترات تبلغ 0.0001 ثانية.

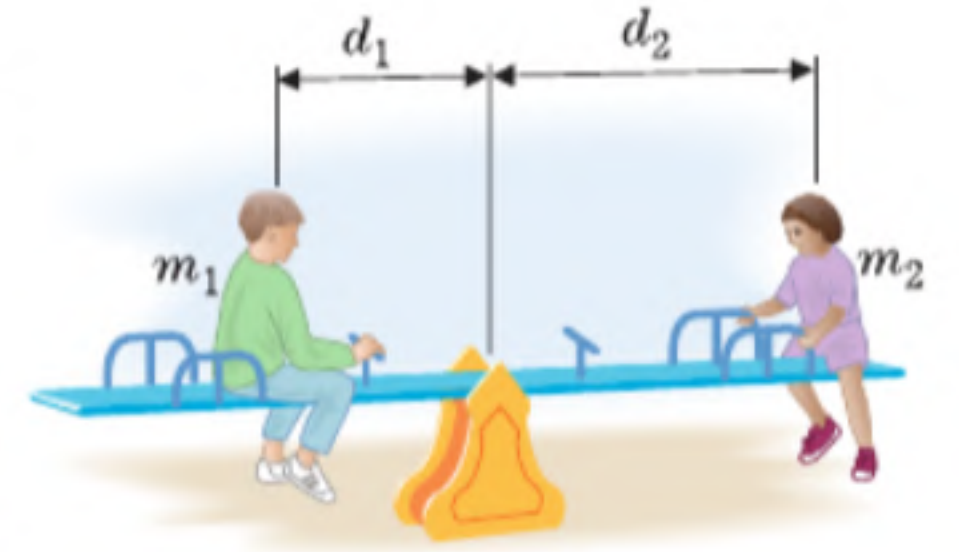
t (s)	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007
$F(t)$ (lb)	0	1250	4250	7500	9000	5500	1250	0

قدّر دفع المضرب على الكرة و(باستخدام $m = 0.01 \text{ kg}$) وسرعة الكرة بعد التصادم.

الحل في هذه الحالة، يُعطى الدفع J بالعلاقة $\int_0^{0.0007} F(t) dt$. بما أننا لم نُعط سوى عدد ثابت من القياسات $F(t)$ ، فإنَّ أفضل ما يمكننا القيام به هو تقريب التكامل عددياً (على سبيل المثال، باستخدام قاعدة سمبسون). تذكرنا أنَّ أعقد سمبسون تتطلب عدداً زوجياً من الفترات الجزئية، مما يعني أنك تحتاج عدداً فردياً $n+1$ من النقاط في التقسيم. باستخدام $n=8$ وبإضافة قيمة دالة صفرية عند $t=0.0008$ (لماذا يُعقل القيام بهذا؟)، تُعطينا قاعدة سمبسون

$$J \approx [0 + 4(1250) + 2(4250) + 4(7500) + 2(9000) + 4(5500) + 2(1250) + 4(0) + 0] \frac{0.0001}{3} \approx 2.867$$

في هذه الحالة، إنَّ معادلة الدفع والزخم $J = m \Delta v$ تصبح $2.867 = 0.01 \Delta v$ أو $\Delta v = 286.7 \text{ ft/s}$. بما أنَّ الكره قد بدأت بسرعة 130 ft/s في اتجاه واحد وانتهى بها الأمر بالتحرك في الاتجاه المعاكس، تكون السرعة بعد التصادم هي 156.7 ft/s . ■

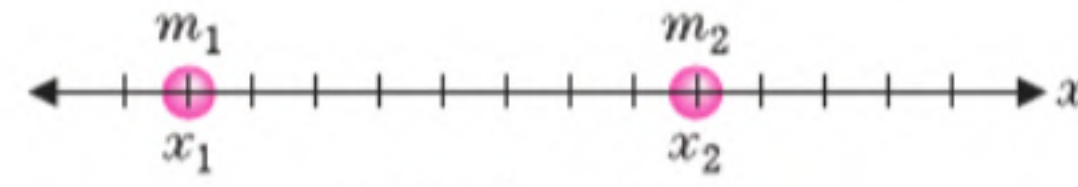


الشكل 6.51a
الموازنة بين كتلتين

لنأخذ طفلين m_1 و m_2 على أرجوحة في ملعب (أو أرجوحة توازن). على فرض أنَّ الطفل الموجود على اليسار في الشكل 6.51a أثقل (أي، له كتلة أكبر) من الطفل الموجود على اليمين. إذا كان الطفلان يجلسان على مسافة متساوية من النقطة المحورية، فأنت تعرف ما سيحدث: سيُسحب الجانب الأيسر إلى أسفل. غير أنَّه يمكن للطفلين موازنة بعضهما البعض إذا تحرك الطفل الأثقل والموقف أقرب من النقطة المحورية. بمعنى أنَّه، يتم تحديد الموازنة بالوزن (القوة) والمسافة من النقطة المحورية على حدٍ سواء. إذا كان للطفلين كتلتان m_1 و m_2 ويجلسان على مسافتين d_1 و d_2 على التوالي، من النقطة المحورية، فإنهما يوازنان بعضهما البعض إذا وفقط إذا

$$(6.3) \quad m_1 d_1 = m_2 d_2$$

بقلب المسألة قليلاً، على فرض أنَّ هناك جسمين، كتلتاهما m_1 و m_2 ، ويقعان عند x_1 و x_2 على الترتيب، مع $x_1 < x_2$. لنعتبر أنَّ الجسمين كتل نقطية. بمعنى أنَّه، يتم التعامل مع كلٍّ منهما كنقطة فردية، مع تركيز كل الكتلة في تلك النقطة. (انظر الشكل 6.51b).



الشكل 6.51b

اثان من الكتل النقطية

نريد إيجاد **مركز الكتلة** $\bar{x}$ والذي هو الموقع الذي يمكننا نضع عنده النقطة المحورية للأرجوحة ونوازن بين الجسمين. من معادلة التوازن (6.3)، سنحتاج $m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$. إنَّ حل هذه المعادلة من أجل $\bar{x}$ يعطينا

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

لاحظ أنَّ اللقام في هذه المعادلة هو كتلة "النظام" الإجمالية (أي، الكتلة الكلية للجسمين). يُطلق على بسط هذا التعبير اسم **العزم الأول للنظام**.

وعموماً، لنظام من n كتلة $m_1, m_2, \dots, m_n$ تقع عند $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ على الترتيب، يُعطى مركز الكتلة $\bar{x}$ من العزم الأول مقسوماً على الكتلة الإجمالية، أي أنَّ

مركز الكتلة

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

الآن، على فرض أننا نرغب في إيجاد الكتلة ومركز الكتلة لجسم له كثافة متغيرة $\rho(x)$ (تقاس بوحدة الكتلة لكل وحدة طول) ويمتد من $x = a$ إلى $x = b$. لاحظ أنه إذا كانت الكثافة ثابتة ρ ، فإن كتلة الجسم تُعطى ببساطة بالعلاقة $m = \rho L$ ، حيث $L = b - a$ هو طول الجسم. من ناحية أخرى، إذا كانت الكثافة تتغير في كل أنحاء الجسم، يمكننا تقريـب الكتلة بتجزئ الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية العرض $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، تكون القيمة التقريبية للكتلة

$\rho(c_i)\Delta x$ ، حيث c_i هي نقطة في الفترة الجزئية. تكون الكتلة الإجمالية تقريباً

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(c_i) \Delta x$$

عليك معرفة أن هذا هو مجموع ريمان، والذي يقترب من الكتلة الإجمالية عندما $n \rightarrow \infty$.

(6.4)

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(c_i) \Delta x = \int_a^b \rho(x) dx$$

الكتلة

مثال 6.5 حساب كتلة مضرب البيسبول

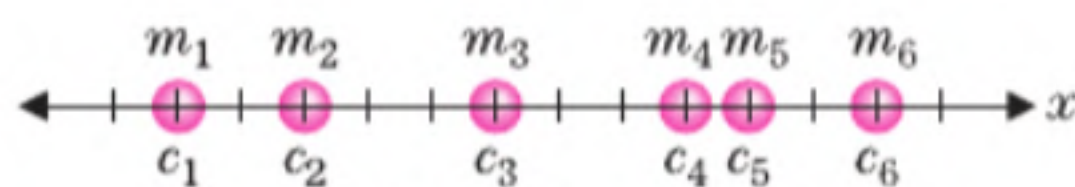
يمكن تمثيل مضرب البيسبول طوله 30 بوصة تمثيلاً تقريبياً عن طريق جسم يمتد من $x = 0$ إلى $x = 30$ بوصة، بكثافة مقدارها $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2$ صلج لكل بوصة. وفي نموذج دالة الكثافة هذا، تؤخذ في الاعتبار حقيقة أن مضرب البيسبول يشبه مخروطاً طولي الشكل. أوجد كتلة الجسم.

الحل من مثال (6.4)، تحدد الكتلة من خلال

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{30} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2 dx \\ &= \frac{690}{3} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^3 \Big|_0^{30} = \frac{690}{3} \left[\left(\frac{1}{46} + \frac{30}{690}\right)^3 - \left(\frac{1}{46}\right)^3\right] \\ &\approx 6.144 \times 10^{-2} \text{ صلج.} \end{aligned}$$

لحساب الوزن (بالأوقية)، اضرب الكتلة في $16 \cdot 32$ وزن المضرب حوالي 31.5 أوقية. ■

لحساب العزم الأول لجسم ما له كثافة غير ثابتة $\rho(x)$ يمتد من $x = a$ إلى $x = b$ ، نجزي الفترة إلى n أجزاء متساوية. من برهاننا السابق، لكل $i = 1, 2, \dots, n$ تكون كتلة الشريحة عند الحد i من الجسم هي تقريباً $\rho(c_i) \Delta x$ ، لاختيار $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. نُمثل الشريحة عند الحد i من الجسم الذي له جسيم كتلته $m_i = \rho(c_i) \Delta x$ ويقع عند $x = c_i$. يمكننا الآن التفكير في الجسم الأصلي بأنه قد تم تقريبه بواسطة n كتل نقطية مميزة، كما هو مبين في الشكل 6.52.



الشكل 6.52

ست كتل نقطية

لاحظ أن العزم الأول M_n لهذا النظام التقريبي هو

$$\begin{aligned} M_n &= [\rho(c_1) \Delta x]c_1 + [\rho(c_2) \Delta x]c_2 + \cdots + [\rho(c_n) \Delta x]c_n \\ &= [c_1\rho(c_1) + c_2\rho(c_2) + \cdots + c_n\rho(c_n)] \Delta x = \sum_{i=1}^n c_i\rho(c_i)\Delta x \end{aligned}$$

بأخذ النهاية عندما $n \rightarrow \infty$ ، يقترب ناتج الجمع إلى العزم الأول

(6.5)

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i\rho(c_i) \Delta x = \int_a^b x\rho(x) dx$$

العزم الأول

يُعطى مركز كتلة الجسم عندئذٍ بالعلاقة

(6.6)

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}$$

مركز الكتلة

مثال 6.6 إيجاد مركز الكتلة (البقعة الحلوة)

في مضرب البيسبول

أوجد مركز الكتلة في مضرب البيسبول المذكور في المثال 6.5.

الحل من مثال (6.5). يحدّد العزم الأول من خلال

$$M = \int_0^{30} x \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690} \right)^2 dx = \left[\frac{x^2}{4232} + \frac{x^3}{47,610} + \frac{x^4}{1,904,400} \right]_0^{30} \approx 1.205$$

تذكر أننا قد توصلنا بالفعل إلى أن $m \approx 6.144 \times 10^{-2}$ ص.ج. ومن ثمّ من

مثال (6.6). يكون مركز كتلة المضرب

$$\bar{x} = \frac{M}{m} \approx \frac{1.205}{6.144 \times 10^{-2}} \approx 19.6 \text{ in}$$

لاحظ أنه في مضرب البيسبول، يعدّ مركز الكتلة مرشحاً واحداً لما يطلق عليه اسم "البقعة الحلوة" للمضرب، وهو أفضل مكان لضرب الكرة. ■



سد هوفر

لتطبيقنا النهائي للتكامل في هذا الدرس، نفكر في القوة الهيدروستاتيكية. تخيل سد يحجم بحيرة مليئة بالمياه. ما هي القوة التي يجب أن يصمد أمامها السد؟

كالعادة، نقوم بحل المسائل الأبسط أولاً. إذا كانت لديك لوحة مستطيلة مسطحة موجهة أفقياً تحت المياه، لاحظ أنّ القوة التي تمارسها المياه على اللوحة (القوة الهيدروستاتيكية) هي ببساطة وزن المياه فوق اللوحة. هذا ناتج حجم المياه فوق اللوحة وكثافة وزن المياه (62.4 lb/ft^3). إذا كانت مساحة اللوحة تبلغ $A \text{ ft}^2$ وتقع أسفل السطح (انظر الشكل 6.53)، إذاً تبلغ القوة المؤثرة على اللوحة

$$F = 62.4 A d$$

وفقاً لمبدأ باسكال، يكون الضغط في عمق معطى d في سائل هو نفسه في جميع الاتجاهات. يشير هذا الأمر إلى أنّه، إذا غمرنا لوحة مسطحة في سائل، يكون الضغط إذاً على جانب واحد من اللوحة عند نقطة معطاة هو $\rho \cdot d$. حيث ρ هو كثافة وزن السائل و d هو العمق. وخصوصاً، يشير ذلك إلى ما إذا كانت اللوحة مغمورة رأسياً أو أفقياً أو غير ذلك. (انظر الشكل 6.54).

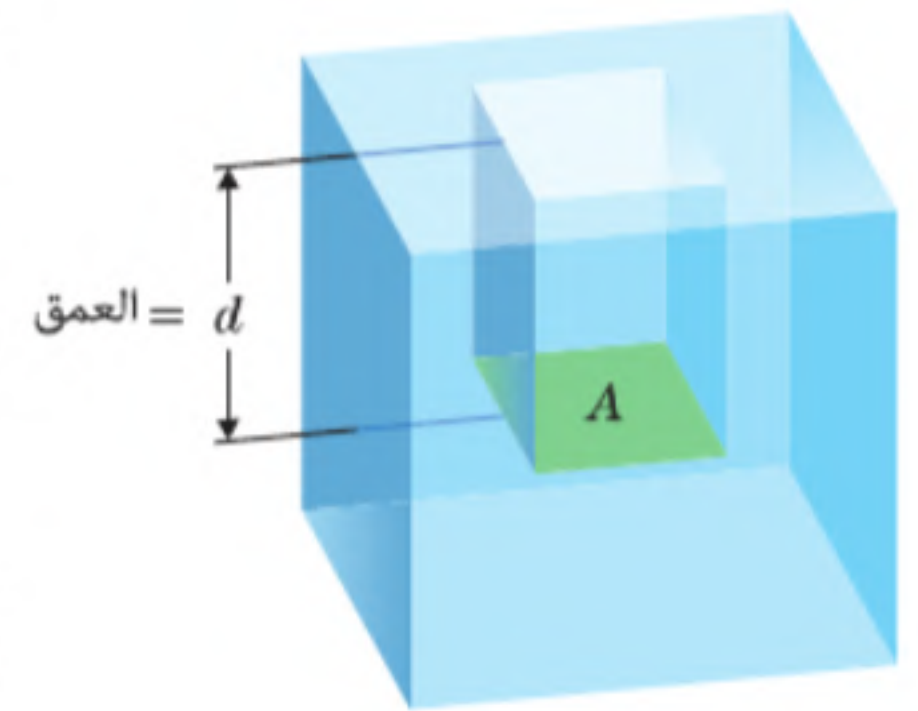
لنأخذ الآن جداراً رأسياً يحجم بحيرة. من الملائم توجيه المحور x رأسياً مع $x = 0$ تقع عند سطح المياه وأسفل الجدار عند $x = a > 0$. (انظر الشكل 6.55). بهذه الطريقة، x يقيس عمق جزء من السد. على فرض أنّ $w(x)$ هو عرض الجدار عند عمق x (حيث يتم حساب جميع المسافات بالأقدام).

نجزئ الفترة $[0, a]$ إلى n فترات جزئية متساوية العرض $\Delta x = \frac{a}{n}$. مما يؤثر على تجزئة السد إلى n شرائح، كل شريحة عرضها Δx . لكل $i = 1, 2, \dots, n$ ، لاحظ أنّ مساحة الشريحة عند الحد i هي حوالي $w(c_i) \Delta x$ ، حيث c_i هي بعض النقاط في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$. بالإضافة إلى ذلك، يكون العمق في كل نقطة على هذه الشريحة حوالي c_i . يمكننا عندئذٍ تقريب القوة F_i المؤثرة على هذه الشريحة من السد من وزن المياه الواقع فوق لوحة بحجم هذا الجزء لكن موجهة أفقياً:

$$F_i \approx \underbrace{62.4}_{\text{كثافة الوزن}} \underbrace{w(c_i)}_{\text{الطول}} \underbrace{\Delta x}_{\text{العرض}} \underbrace{c_i}_{\text{العمق}} = 62.4 c_i w(c_i) \Delta x$$

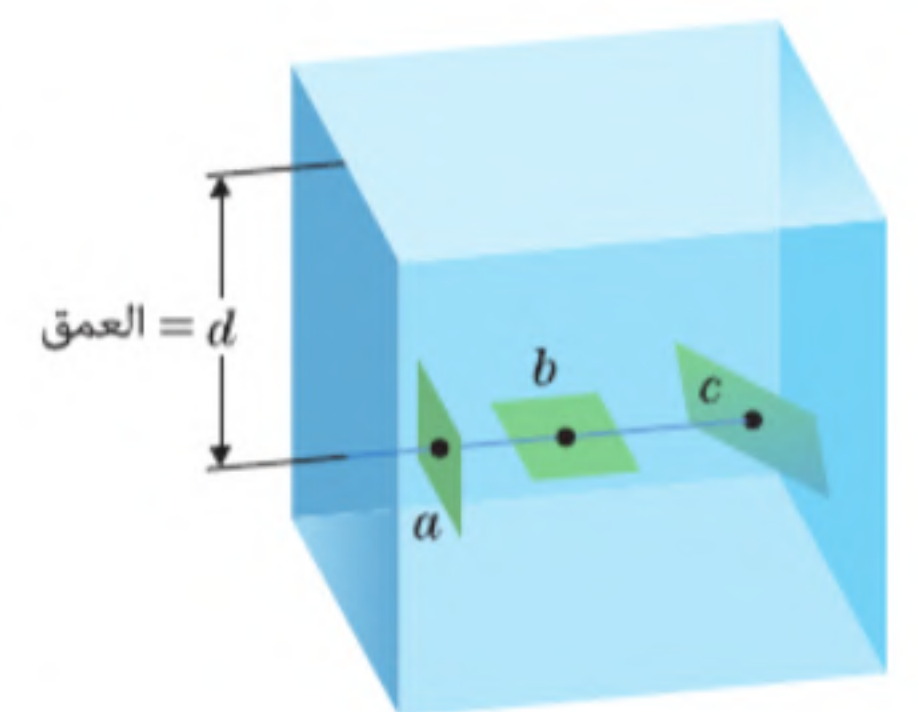
بإضافة القوى المؤثرة على كل شريحة معاً، تكون القوة الإجمالية F على السد حوالي

$$F \approx \sum_{i=1}^n 62.4 c_i w(c_i) \Delta x$$



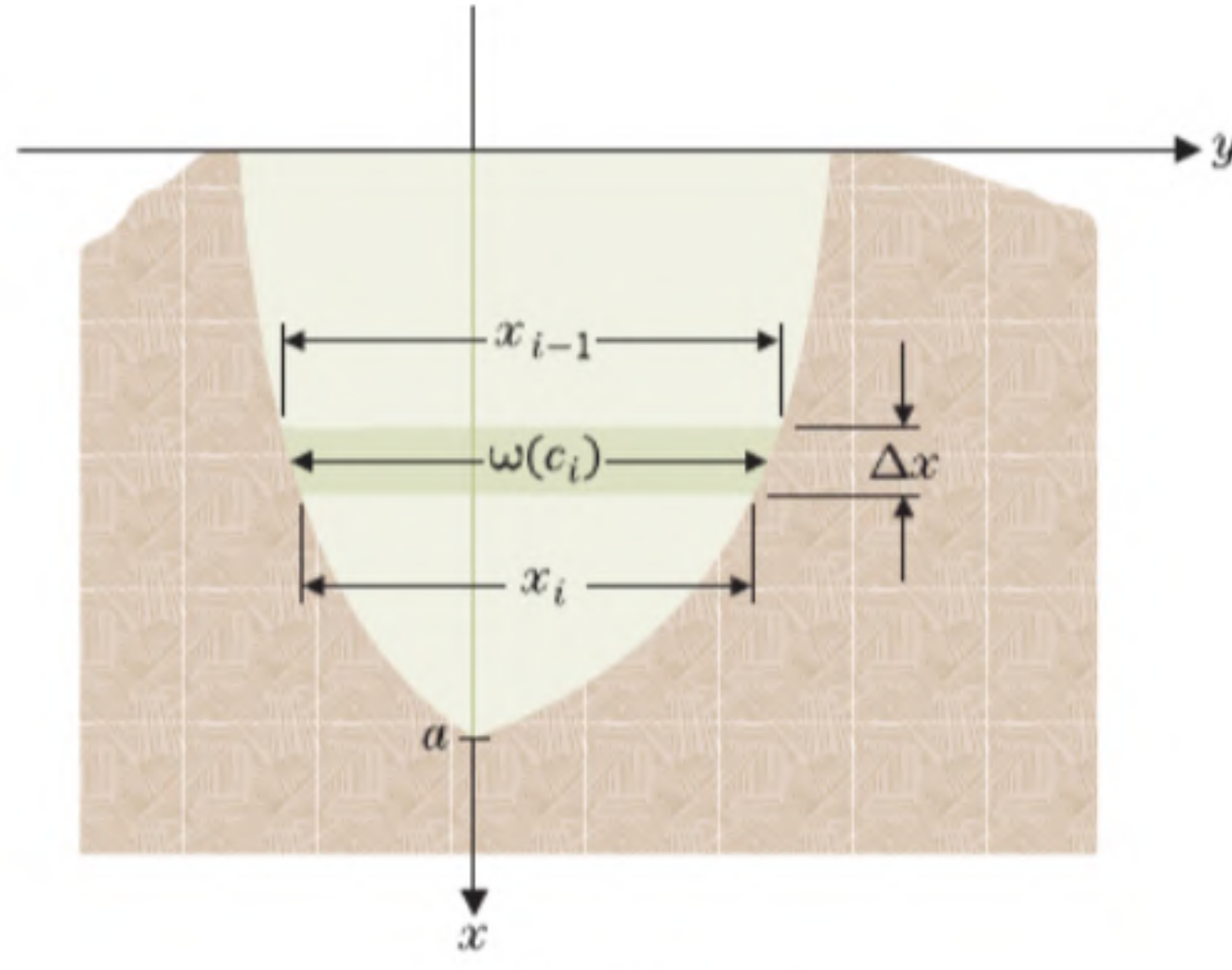
الشكل 6.53

لوحة مساحتها A مغمورة حتى عمق d



الشكل 6.54

الضغط عند عمق معطى هو نفسه بغض النظر عن الاتجاه



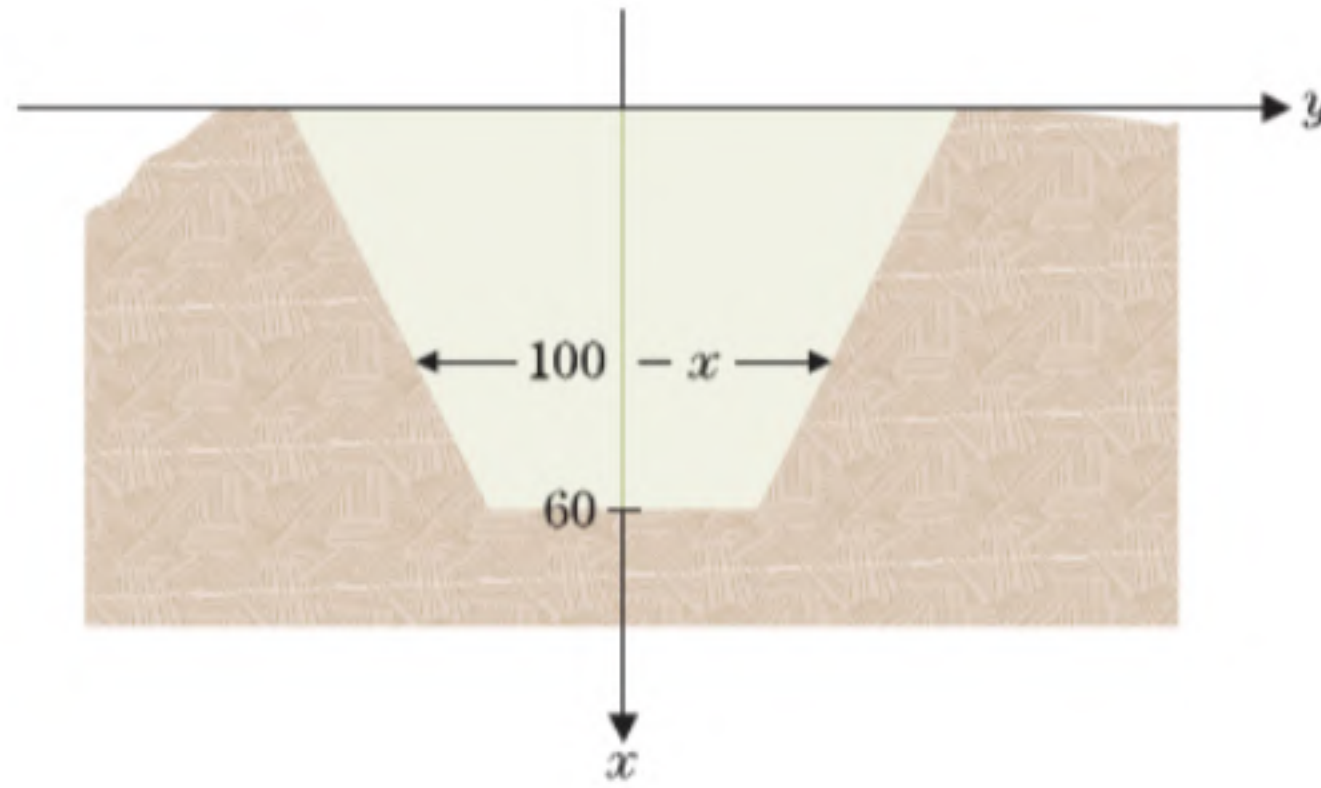
الشكل 6.55
القوة المؤثرة على سد

بالتعرف على هذا كونه مجموع ريمان وبأخذ النهاية عندما $n \rightarrow \infty$, نحصل على القوة الهيدروستاتيكية الإجمالية على السد.

$$(6.7) \quad F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 62.4 c_i w(c_i) \Delta x = \int_0^a 62.4 x w(x) dx$$

مثال 6.7 إيجاد القوة الهيدروستاتيكية على سد

يتخذ السد شكلاً لشبه منحرف بارتفاع 60 ft يبلغ العرض في الجزء العلوي 100 ft والعرض في الجزء السفلي 40 ft. (انظر الشكل 6.56). جـ - د القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج إليها السد كي يصمد. جـ - د القوة الهيدروستاتيكية إذا أدي الجفاف إلى خفض منسوب مستوى المياه إلى 10 ft.



الشكل 6.56
سد على شكل شبه منحرف

الحل لاحظ أن دالة العرض هي دالة خطية للعمق حيث $w(0) = 100$ و $w(60) = 40$. يكون الميل عندئذ $\frac{60}{-60} = -1$ وهكذا، $w(x) = 100 - x$. من (6.7)، تكون القوة الهيدروستاتيكية عندئذ

$$F = \int_0^{60} \underbrace{62.4}_{\text{كثافة الوزن}} \underbrace{x}_{\text{العمق}} \underbrace{(100 - x)}_{\text{العرض}} dx$$

$$= 3120x^2 - 62.4 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{60} = 6,739,200 \text{ lb}$$

إذا انخفض مستوى المياه 10 ft، سيبلغ عرض السد عند مستوى المياه 90 ft. وبإنخفاض نقطة الأصل بقيمة 10 ft، تحقق دالة العرض الجديدة $w(0) = 90$ و $w(50) = 40$. يبقى

الميل يساوي -1 - ولذلك، يعطى العرض بالصيغة $w(x) = 90 - x$ من (6.7). تكون القوة الهيدروستاتيكية الآن

$$F = \int_0^{50} \underbrace{62.4}_{\text{كثافة الوزن}} \underbrace{x}_{\text{العمق}} \underbrace{(90 - x)}_{\text{العرض}} dx$$

$$= 2808x^2 - 62.4 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{50} = 4,420,000 \text{ lb}$$

لاحظ أن هذا يمثل تصغيراً للقوة بنسبة تزيد عن 34%.

تمارين 6.6

تمارين كتابية

1. لكل شغل ودفع وعزم أول: حدّد الكميات الموجودة في التعريف (مثال، القوة والمسافة) والحسابات التي تُستخدم لها (مثال، تغيّر في السرعة المتجهة).
2. لا يكون مركز الكتلة دائماً هو المكان الذي يكون فيه نصف الكتلة على جانب والنصف الثاني من الكتلة على الجانب الآخر. أعط مثالاً حيث يوجد أكثر من نصف الكتلة على أحد الجانبين (راجع المثالين 6.5 و 6.6) وشرح سبب توازن الجسم عند مركز الكتلة.
3. يتمتع الأشخاص الذين يلعبون دور الالتقاط بطريقة ما تبدو غريزية حيث يسحبون أيديهم للوراء عند قيامهم بالالتقاط الكرة. لا لتقاط كرة، يجب عليك تطبيق دفع يساوي الكتلة مضروبة في السرعة المتجهة للكرة. بسحب يدك للوراء، يتزايد مقدار الزمن الذي تقوم فيه بإبطاء الكرة. استخدم معادلة زخم الدفع لتفسير سبب تصغير هذا الأمر للقوة المتوسطة في يدك.
4. تنطلق كرة تنس نحوك بسرعة 100 mph. بعد ضربك للكرة، تتحرّك مبتعدة عنك بسرعة 100 mph. يقيس الشغل التغيّلات في الطاقة. اشرح سبب وجود شغل مبذول من مضرب التنس على الكرة على الرغم من أنّ الكرة لها السرعة نفسها قبل وبعد الضربة.

1. أحدثت قوة من 5 lb تمدد على نابض 4 in. جـ - د الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 in أبعد من طوله الطبيعي.
2. أحدثت قوة من 10 lb تمدد نابض 2 in. جـ - د الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 3 in أبعد من طوله الطبيعي.
3. رافع أثقال يرفع 25 lb لمسافة 20 in. جـ - د الشغل المبذول (كما تم قياسه بالقدم - رطل).
4. مصارع يرفع منافسه الذي يزن 300 lb من فوق رأسه، على ارتفاع 6 ft. جـ - د الشغل المبذول (كما تم قياسه بالقدم - رطل).
5. يزن صاروخ ممتلئ بالوقود 1000 lb عند الإطلاق. بعد الإطلاق، يحظى الصاروخ بارتفاع ويفقد وزناً حيث يتم حرق الوقود. على فرض أنّ الصاروخ فقد 1 lb من الوقود لكل 15 ft من الارتفاع المكتسب. اشرح سبب أنّ الشغل المبذول لإرتفاع الصاروخ إلى 30,000 ft هو $\int_0^{30,000} (10000 - x/15) dx$ واحسب التكامل.
6. بالعودة إلى التمرين 5، على فرض أنّ صاروخاً يزن 8000 lb

- عند الإطلاق ويفقد 1 lb من الوقود لكل 10 ft من الارتفاع المكتسب. جـ - د الشغل المطلوب ليرتفع الصاروخ إلى 10,000 ft.
7. تزن سلسلة طولها 40 ft 1000 lb ويتم سحبها لأعلى على سطح قارب. السلسلة موجهة رأسياً والجزء العلوي من السلسلة يبدأ في المياه 30 ft أسفل السطح. احسب الشغل المبذول.
8. تم رفع دلو مسافة 80 ft بمعدل 4 ft/s يحتوي الدلو بمبدئيّاً على 100 lb من الرمال لكن تتسرّب منه الرمال بمعدل 2 lb/s. احسب الشغل المبذول.
9. (a) على فرض أنّ محرك سيارة بذل قوة $800x(1-x)$ رطل عندما تكون السيارة في الموقع x ميل، $0 \leq x \leq 1$. احسب الشغل المبذول. (b) تقيس القوة بالأحصنة معدل الشغل المبذول كدالة بالزمن. اشرح سبب كون ذلك لا يساوي $800x(1-x)$. إذا استغرقت السيارة 80 ثانية لتقطع مسافة ميل، احسب متوسط القوة بالأحصنة ($1 \text{ hp} = 550 \text{ ft-lb/s}$).
10. (a) يوجد برج مائي كروي الشكل طول نصف قطره 50 ft. يمتد من 200 ft إلى 300 ft فوق سطح الأرض. احسب الشغل المبذول في ملء الخزان من الأرض. (b) احسب الشغل المبذول في ملء الخزان من نصف المسافة.
11. أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها 1 m وارتفاعها 3 m ممتلئة بالماء. احسب الشغل المبذول عند ضخ كل الماء إلى الخارج انطلاقاً من الجزء العلوي للأسطوانة إذا (a) كانت الأسطوانة في وضع قائم (المقاطع العرضية الدائرية موازية للأرض) و (b) كانت الأسطوانة على جانبها (المقاطع العرضية الدائرية متعامدة على الأرض). تبلغ كثافة وزن الماء 9800 N/m^3 .
12. خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه 10 ft وطول نصف قطر قاعدته 5 ft حيث أنّ رأسه على الأرض. (فكر في مخروط مثلجات نقطته الرأسية موجهة لأسفل). إذا كان الخزان ممتلئاً، فجد الشغل المبذول عند ضخ كل الماء إلى الخارج انطلاقاً من الجزء العلوي للخزان.
13. يتشارك عاملان في مهمة حفر فجوة مستطيلة الشكل إلى عمق 10 ft. يقوم عامل آخر بنزول التراب الناتج من حفر الفجوة بافتراض وجود كثافة ثابتة للتراب، ما العمق الذي ينبغي أن يصل إليه العطل الأول في الحفر للقيام بنصف الشغل؟ اشرح السبب أنّ 5 ft هي إجابة غير صحيحة.
14. سيتم حفر حوض على عمق 6 ft المقطع العرضية لها شكل ∇ عرضها 2 ft في الجزء السفلي و 5 ft في الجزء العلوي منها. جـ - د العمق الذي تم فيه بذل نصف الشغل.

15. في المثال 6.4، على فرض أنّ كرة البيسبول كانت تنطلق في سرعة 100 ft/s. ستتغير القوة المبذولة من المضرب على الكرة إلى القيم الموجودة في الجدول. قُدّر دفع وسرعة الكرة بعد الاصطدام.

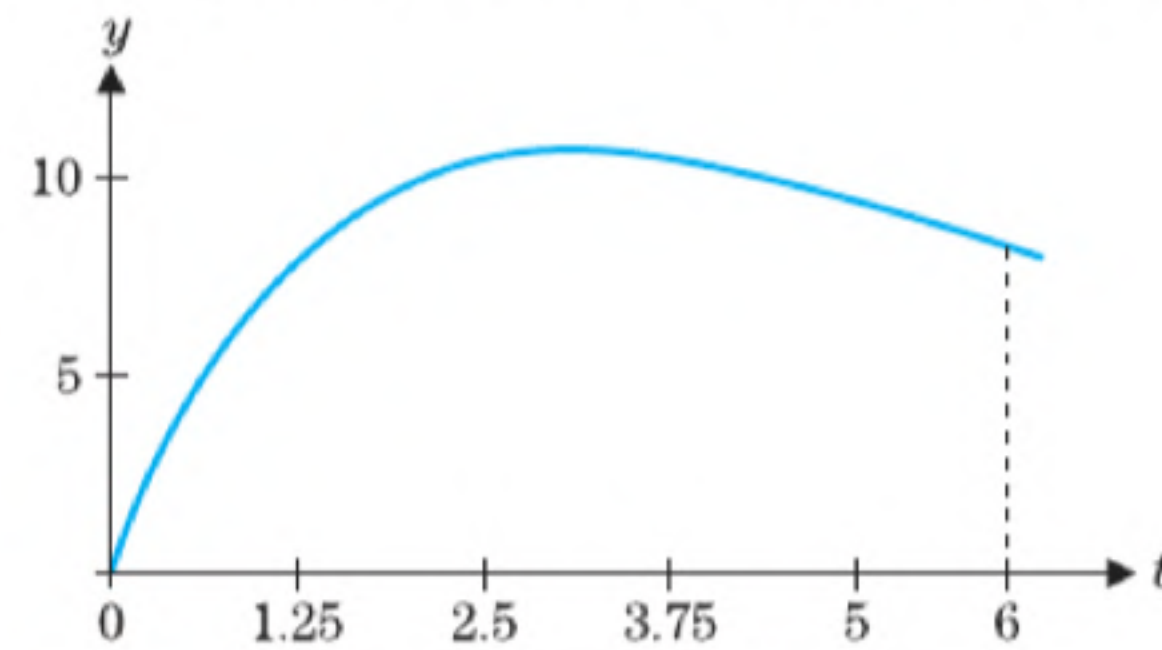
t (s)	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004
F (lb)	0	1000	2100	4000	5000

t (s)	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008
F (lb)	5200	2500	1000	0

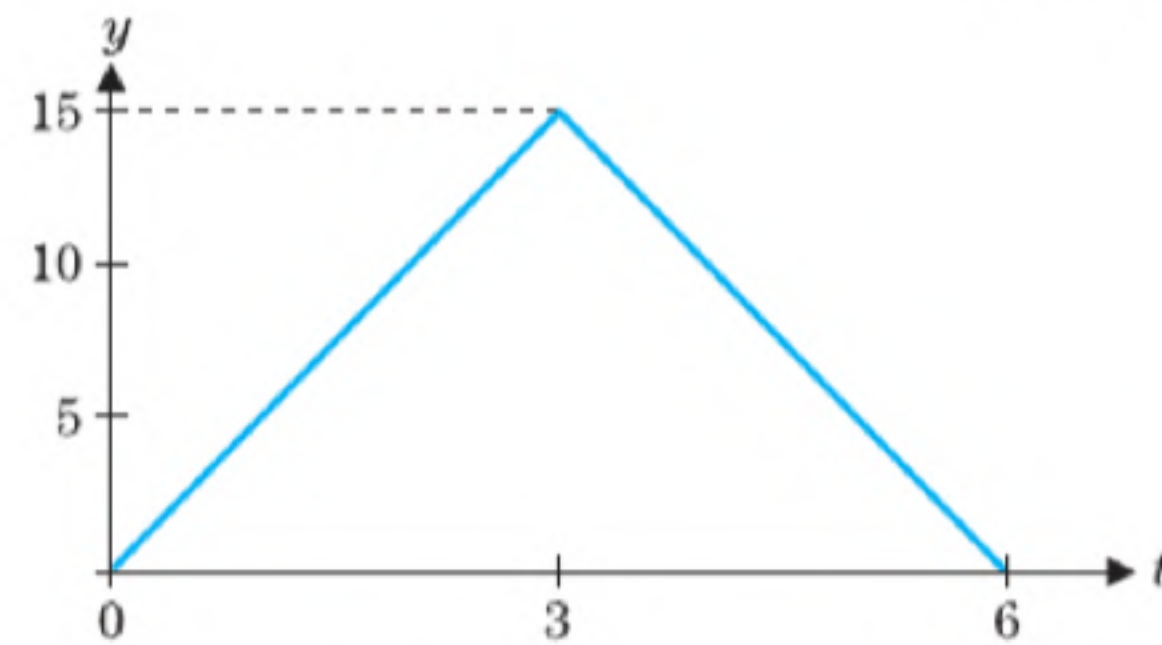
16. تم إجراء فحص تصادم لسيارة ما. قوة الجدار على المصدر الأمامي مبينة في الجدول. قُدّر دفع وسرعة السيارة (استخدم صلاح $m = 200$). (إرشاد: 1 صلاح = 32.174 lb تقريباً)

t (s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
F (lb)	0	8000	16,000	24,000	15,000	9000	0

17. يبين أدناه منحنى الضغط مع الزمن $f(t) = 10te^{-t/3}$ لنموذج صاروخ. احسب القيمة العظمى للضغط. احسب الدفع.



18. يبين أدناه منحنى الضغط مع الزمن لنموذج صاروخ. احسب الدفع. واستناداً إلى إجاباتك في التمرينين 17 و 18، أي صاروخ سيصل إلى ارتفاع أعلى؟



19. احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما بكثافة تبلغ $\rho(x) = \frac{x}{6} + 2$ kg/m، $0 \leq x \leq 6$. اشرح بإيجاز بدلالة دالة الكثافة السبب أنّ مركز الكتلة ليس عند $x = 3$.

20. احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما بكثافة $\rho(x) = 3 - \frac{x}{6}$ kg/m، $0 \leq x \leq 6$. اشرح بإيجاز بدلالة دالة الكثافة السبب أنّ مركز الكتلة ليس عند $x = 3$.

21. احسب الوزن بالجرامات لجسم يمتد من $x = -3$ إلى $x = 27$ له كثافة $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x+3}{690}\right)^2$ cm/صلاح.

22. احسب الوزن بالجرامات لجسم يمتد من $x = 0$ إلى $x = 32$ له كثافة $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x+3}{690}\right)^2$ cm/صلاح.

23. احسب مركز الكتلة للجسم المذكور في التمرين 21. ينمذج هذا الجسم مضرب البيسبول في المثال 6.5 وهو "ممسوك بإحكام" (ممسوك من مكان أعلى المقبض بـ 3 in). قارن بين الكتل ومراكز الكتل للمضربين.

24. احسب مركز الكتلة للجسم المذكور في التمرين 22. ينمذج هذا الجسم مضرب بيسبول يزيد طوله 5 cm عن المضرب المذكور في المثال 6.5. قارن بين الكتل ومراكز الكتل للمضربين.

25. احسب الكتلة والوزن بالجرامات ومركز الكتلة لجسم يمتد من $x = 0$ إلى $x = 30$ كثافته $\rho(x) = 0.00468 \left(\frac{3}{16} + \frac{x}{60}\right)$ cm/صلاح.

26. ينمذج الجسم في التمرين 25 مضرب بيسبول من الألومنيوم (مجوف وسماكته 1 cm). قارن الكتلة ومركز الكتلة بتلك الخاصة بالمضرب الخشبي المذكور في المثال 6.5. يزعم خبراء البيسبول أنّه من الأسهل تسديد رمية داخلية (قيمة x صغيرة) باستخدام مضرب من الألومنيوم. اشرح السبب أنّ حساباتك تشير إلى صحة ذلك.

27. يبين الشكل أدناه الرسم التخطيطي لنموذج صاروخ. على فرض أنّ المقياس الرأسى يرتفع 3 وحدات والمقياس الأفقى عرضه 6 وحدات. استخدم الهندسة الأساسية لحساب مساحة كل من المناطق الثلاث من الرسم التخطيطي للصواريخ. على فرض أنّ كثافة ثابت ρ ، حدّد موقع الإحداثي x لمركز كتلة كل منطقة. (إرشاد: يمكن التفكير في المنطقة الأولى باعتبارها تمتد من $x = 0$ إلى $x = 1$ بكثافة $\rho(3 - 2x)$. تمتد المنطقة الثالثة من $x = 5$ إلى $x = 6$ بكثافة $\rho(6 - x)$.)



28. لنموذج الصاروخ في التمرين 27، استبدل الصاروخ بـ 3 جسيمات، واحد لكل منطقة. على فرض أنّ كتلة كل جسيم تساوي مساحة المنطقة وأنّ موقع الجسيم الموجود على المحور x يساوي مركز كتلة المنطقة. جـ - د مركز الكتلة للنظام من 3 جسيمات. أتم تصميم الصواريخ بزعانف سفلية كبيرة بما فيه الكفاية بحيث يتحرك مركز الكتلة بالقرب من الجزء السفلي (أو، في الشكل الموجود هنا، الجانب الأيسر) من الصاروخ. يحسّن هذا الأمر من استقرار انطلاق الصاروخ.

في التمارين 29–32، جـ د نقطة المركز لكل منطقة. نقطة المركز هي مركز الكتلة لمنطقة لها كثافة ثابتة. (إرشاد: بدّل في المثال (6.6) لإيجاد الإحداثي y .)

29. المثلث رؤوسه $(0, 0)$ و $(4, 0)$ و $(4, 6)$

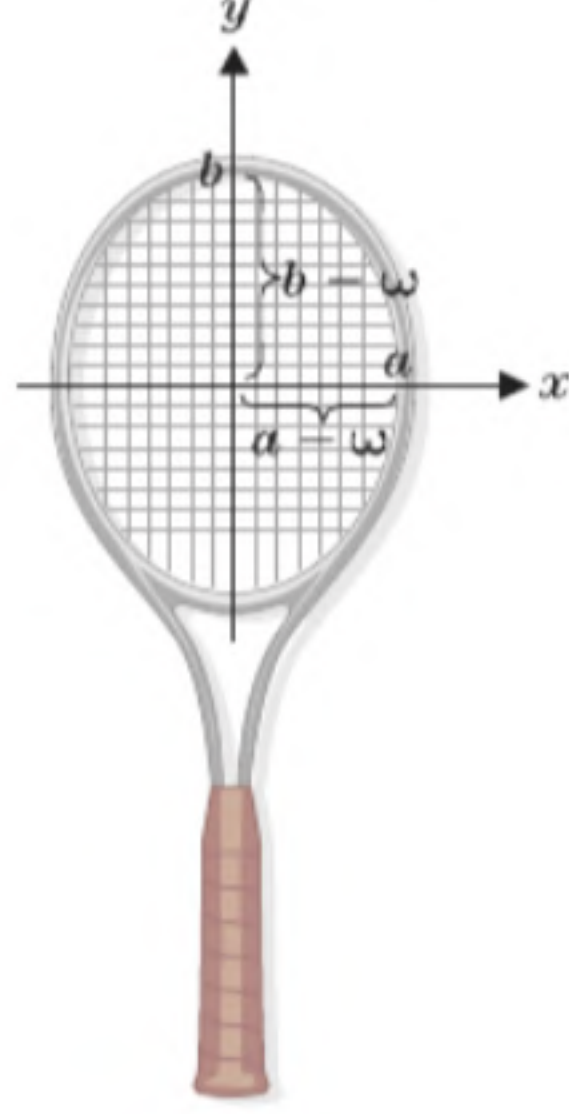
30. المعين رؤوسه $(0, 0)$ و $(3, 4)$ و $(8, 4)$ و $(5, 0)$

31. المنطقة محدودة بواسطة $y = 0$ و $y = 4 - x^2$

32. المنطقة محدودة بواسطة $y = x$ و $y = -x$ و $x = 4$

43. يعطى العزم الثاني (انظر التمرين 41) لقرص كثافته ρ له شكل القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالتكامل المحدود $\int_{-a}^a 2\rho bx^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$ استخدم CAS الخاص بك لإيجاد قيمة هذا التكامل.

44. استخدم النتيجة من التمرين 43 لتبين أن العزم الثاني لرأس مضرب التنس في الرسم التخطيطي (في الصفحة التالية) هو $M = \rho \frac{\pi}{4} [ba^3 - (b-w)(a-w)^3]$.



45. لمضارب التنس، يعني عزم ثاني كبير (انظر التمرين 43 و 44) تدوير أقل للمضرب عند تسديد الضربات خارج المركز. قارن العزم الثاني لمضرب خشبي ($a = 9, b = 12, w = 0.5$) ومضرب متوسط الحجم ($a = 10, b = 13, w = 0.5$) ومضرب كبير الحجم ($a = 11, b = 14, w = 0.5$).

46. لتكن M هي العزم الثاني الموجود في التمرين 44. أثبت أن $\frac{dM}{da} > 0$ واستنتج أن المضرب الأكبر حجمًا لها قيم عزم ثاني أكبر. وأيضًا، أثبت أن $\frac{dM}{dw} > 0$ وفسّر هذه النتيجة.

تمارين استكشافية

1. حيث تحسنت الأوقات، زادت مستويات الارتفاع التي يتم قطعها في القفز بالزانة ويمكن استمداد تقدير أولي للقيمة العظمى الممكنة للقفز للزانة والحفاظ على مبادئ القدرة. على فرض أن القيمة العظمى للسرعة التي يستطيع أن يجري بها لاعب قفز بالزانة حاملًا عصا طويلة هو 40 km/h حول هذه السرعة إلى m/s. ستبلغ الطاقة الحركية للاعب القفز هذا $\frac{1}{2}mv^2$ (ترك m كقيمة مجهولة حاليًا). ستساوي هذه الطاقة الحركية الألية طاقة الجهد في الجزء العلوي من الزانة ناقص أي طاقة امتصتها العصا الطويلة (والتي سنقوم بتجاهلها). قم بإعداد طاقة الجهد، $32mh$ تساوي الطاقة الحركية وحل حيث h . يمثل هذا القيمة العظمى التي يمكن أن ترتفع له مركز الكتلة الخاص بلاعب القفز. أضف 1 m لارتفاع مركز الكتلة الخاص بلاعب القفز وستحصل على تقدير للقيمة العظمى الممكنة للقفز بالزانة. قارن هذا برقم سيرجي بوبكا القياسي للقفز بالزانة لعام 1994 $20'1\frac{3}{4}$.

2. سيبقى جسم ما على طاولة طالما أن مركز كتلة الجسم يقع على الطاولة. على سبيل المثال، ستتوازن لوحة طول قياسها 1 إذا كان نصف اللوحة يقع على حافة الطاولة. أثبت أن

33. يتخذ السد شكل شبه منحرف ارتفاعه 60 ft وعرضه في الجزء العلوي 40 ft والعرض في الجزء السفلي 100 ft جـ - د القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج الجدار أن يصمد أمامها. اشرح السبب أن القوة أكبر بكثير من القوة المبذولة في المثال 6.7.

34. جـ - د القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية في المثال 33 إذا حدث جفاف يخفّض منسوب مستوى المياه إلى 10 ft

35. تم تثبيت نافذة رؤية تحت الماء في حوض للأسماك. طول نصف قطرها الدائري 5 ft يقع مركز الدائرة 40 ft تحت مستوى الماء. جـ - د القوة الهيدروستاتيكية المبذولة على النافذة.

36. توجد نافذة رؤية تحت الماء مستطيلة الشكل عرضها 40 ft تمتد النافذة من سطح الماء حتى عمق 10 ft. جـ - د القوة الهيدروستاتيكية المبذولة على النافذة.

37. نافذة آلة التصوير الموجودة في غواصة آلية تتخذ شكلًا دائريًا طول نصف قطرها 3 in. ما مقدار القوة الهيدروستاتيكية التي ستحتاج النافذة وقادرة على تحملها للوصول إلى عمق 1000 ft؟

38. يحمل أحد الغواصين ساعة يد إلى عمق 60 ft. طول نصف قطر غطاء وجه الساعة دائري الشكل 1 in. ما مقدار القوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج غطاء وجه الساعة لتستمر الساعة في العمل؟

التطبيقات

39. علما أن القدرة هي ناتج ضرب القوة والسرعة المتجهة، أحسب القوة بالأحصنة التي تحتاج إليها لرفع جسم وزنه 100 طن مثل حوت أزرق عند 20 mph (1 hp = 550 ft-lb/s). (لاحظ أن الحيتان الزرقاء تسبح بكفاءة بحيث تتمكن من الحفاظ على هذه السرعة بناتج يبلغ 60-70 hp).

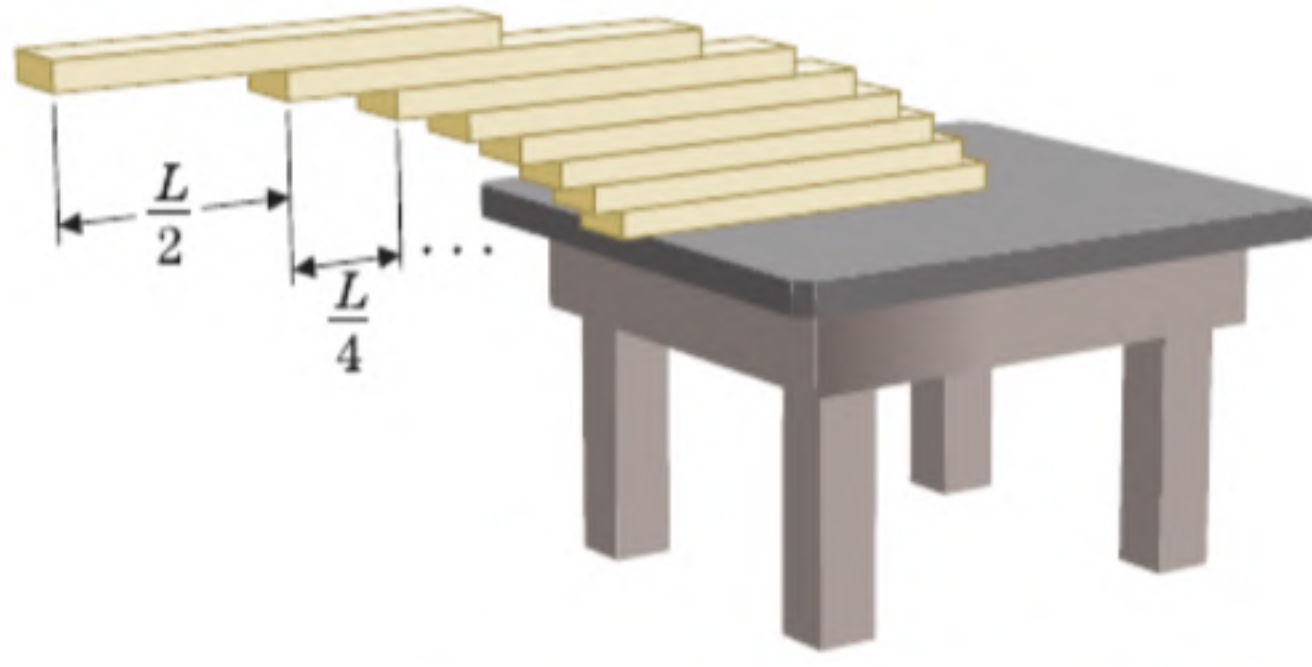
40. لقوة ثابتة F مبذولة على طول فترة زمنية t ، يعرف الدفع بالصيغة $F \cdot t$. لأجل قوة متغيرة $F(t)$ ، اشتق صيغة الدفع $J = \int_a^b F(t) dt$.

41. العزم الأول لجسم صلب كثافته $\rho(x)$ هو $\int_a^b x\rho(x) dx$. يُعد العزم الثاني حول المحور y ، المعرف بالتكامل المحدود $\int_a^b x^2\rho(x) dx$ ، مهمًا أيضًا في التطبيقات. كلما كبر هذا العدد، زادت صعوبة تدوير الجسم حول المحور y . احسب قيم العزم الثاني لمضارب البيسبول الموجودة في المثال 6.5 والتمرين 21. إن إمساك المضرب بإحكام يجعل من السهل أرجحته (والتحكم فيه). احسب النسبة المئوية التي يقل بها العزم الثاني من خلال إمساك المضرب بإحكام على بُعد 3 in.

42. صدفة، يقوم لاعبو البيسبول بشكل غير قانوني بـ "بسد" مضاربهم عن طريق حفر جزء من الخشب من نهاية المضارب وحشو الثقب بمادة خفيفة مثل الفلين. إن ميزة هذا الإجراء هو أن العزم الثاني يصغر بشكل ملحوظ. لنمذجة هذا، استخدم المضرب من المثال 6.5 وقم بتغيير الكثافة إلى

$$\rho(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2, & 0 \leq x \leq 28 \\ \left(\frac{1}{92} + \frac{x}{690}\right)^2, & 28 < x \leq 30 \end{cases}$$

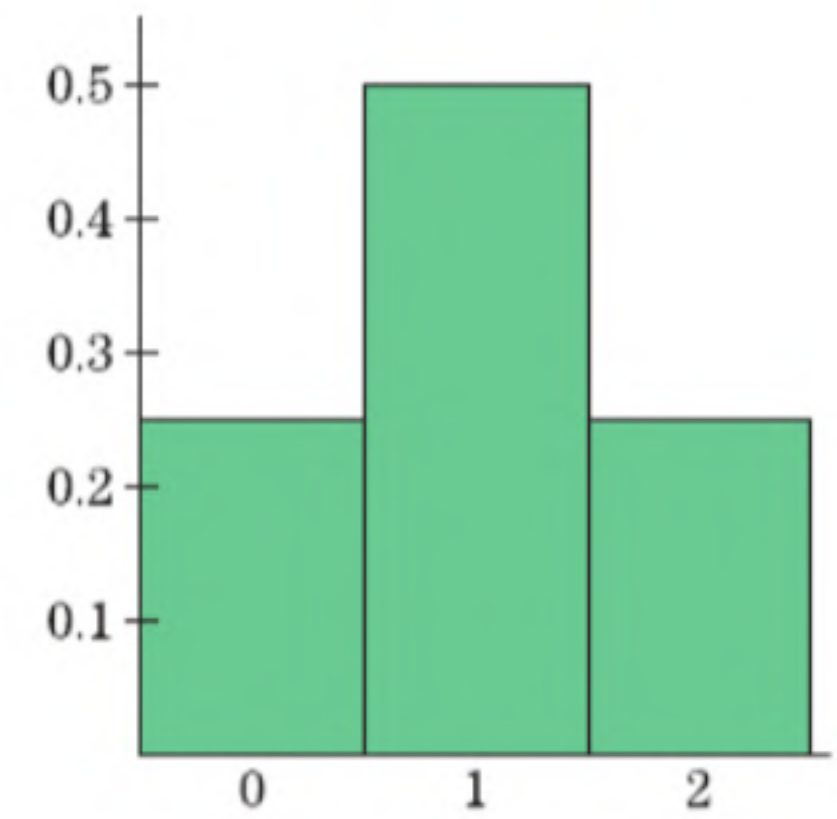
بتمثيل فجوة لنصف قطر $\frac{1}{4}$ وطول 2" احسب الكتلة والعزم الثاني للمضرب المحشو بالفلين وقارنه بالمضرب الأصلي.



للوحتين المتجاستين اللتين سيبلغ طولهما 1 ستتوازن إذا كان $\frac{1}{4}$ اللوحة الأولى يقع على حافة الطاولة و $\frac{1}{2}$ اللوحة الثانية يقع على حافة 1 للوحة الأولى أثبت أن اللوحات الثلاثة التي طول قيسها ستتوازن إذا كان $\frac{1}{6}$ اللوحة الأولى يقع على حافة الطاولة و $\frac{1}{4}$ اللوحة الثانية يقع على حافة اللوحة الأولى و $\frac{1}{2}$ اللوحة الثالثة يقع على حافة اللوحة الثانية. قم بتعميم هذا على إجراء لتوازن n لوحة. كم لوحة تحتاج إليها بحيث تقع اللوحة الأخيرة بالكامل فوق حافة الطاولة؟

تركز مجالات الاحتمال والإحصاء في الرياضيات على تحليل العمليات العشوائية. في هذا الدرس، نعطي مقدمة مختصرة عن استخدام حساب التفاضل والتكامل في نظرية الاحتمال.

نبدأ بمثال بسيط يتضمن القاء قطع نقود معدنية. على فرض أنك القيت قطعتي نقد معدنية كل منهما لديها فرصة 50% أن تستقر على الصورة. نظراً إلى أن الأمر عشوائياً، لا يمكنك حساب عدد موك حصو لك على الصورة بالضبط عند القاء قطع النقد المعدنية لعدد جدد من المرات. ولكن يمكنك حساب ترجيح لكل نتيجة ممكنة. إذا رمزنا إلى الصورة بواسطة H والكتابة بواسطة T، إذا تكون الأربعة نتائج الممكنة من القاء قطعتي نقد معدنية هي HH و HT و TH و TT. يُعد كل من هذه النتائج الأربعة ترجيحاً بشكل متساوٍ، لذا يمكننا قول أنه لكل منها احتمالاً $\frac{1}{4}$. هذا يعني أنه، في المتوسط، سيقع كل من هذه الأحداث بمعدل يبلغ ربع المحاولات التي تقوم بها. ولقول هذا بطريقة أخرى، يبلغ معدل التكرار النسبي الذي سيقع به كل حدث في عدد كبير من التجارب بشكل تقريبي $\frac{1}{4}$.



الشكل 6.57

مدوّج تكراري لالقاء قطعتي نقود معدنية

لاحظ أنه بناءً على عمليتنا الحسابية أعلاه، فإن احتمال الحصول على الصورتين مع بعضهما هو $\frac{1}{4}$ واحتمال الحصول على صورة واحدة هو $\frac{2}{4}$ (بما أنه يوجد طريقتان لحدوث هذا: HT و TH) واحتمال عدم الحصول على أي صورة هو $\frac{1}{4}$. غالباً ما نلخص مثل تلك المعلومات بعرضها على مدوّج تكراري، تمثيل بياني بالأعمدة حيث تكون النتائج منظمّة على محور أفقي. (انظر الشكل 6.57).

بدلاً من ذلك إذا قمنا بقطع نقد معدنية، فإن احتمالات الحصول على عدد معروف من الصور معطى في الجدول المرافق ويوضّح الشكل 6.58 المدرج التكراري المناظر. يتوجّب عليك ملاحظة أن مجموع جميع الاحتمالات هو 1 (أو 100% حيث إنّه من المؤكد أن واحدة من النتائج الممكنة ستحدث في محاولة معطاة). هذه هي واحدة من خصائص التعريف لنظرية الاحتمال. يطلق على خاصية أساسية أخرى اسم **مبدأ الجمع**: لحساب احتمال الحصول على 6 أو 7 أو 8 صور (أو أي نتائج متنافية أخرى)، ببساطة اجمع الاحتمالات الفردية مع بعضها البعض:

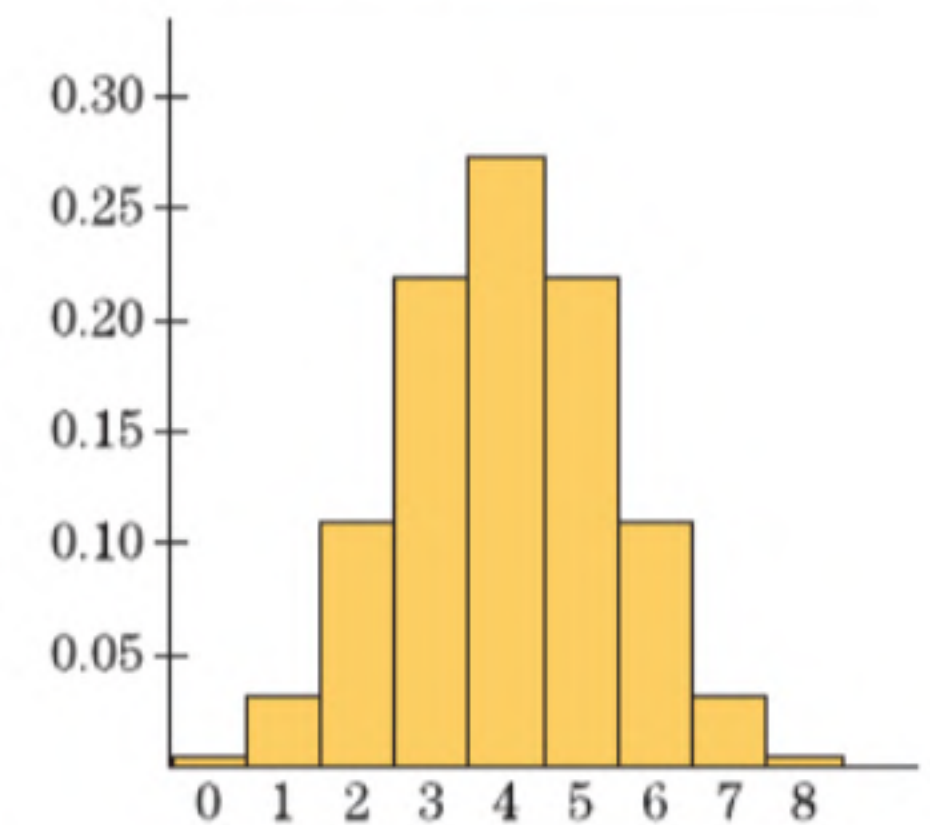
$$P(6 \text{ or } 7 \text{ or } 8 \text{ صور}) = \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256} = \frac{37}{256} \approx 0.145$$

يكشف التفسير البياني لعملية الحساب هذه الكثير. في المدوّج التكراري الموجود في الشكل 6.58، لاحظ أن كل عمود هو مستطيل بعرض يبلغ 1. إذا الاحتمال المرتبط بكل عمود يساوي مساحة المستطيل. بمصطلحات بيانية،

- المساحة الكلية في مثل ذلك المدوّج التكراري تساوي 1.
- احتمال الحصول على ما بين 6 و 8 صور (ضمنياً) يساوي ناتج جمع مساحات المستطيلات التي تقع بين 6 و 8 (ضمنياً).

يُعدّ للوالد المعتقد بشك أكبر هو الاستفسار حول احتمال أن يكون طول شخص مختار بشكل عشوائي (69" أو 5' 9" أو 70" أو 5' 10") لا توجد نظرية سهلة يمكننا استخدامها هنا لحساب الاحتمالات (حيث إنّ ليست جميع الأطوال مرجّح أن تتساوى). في هذه الحالة، نستخدم التناظر بين الاحتمال والتكرار النسبي. إذا جمّعنا معلومات حول أطوال عدد كبير من البالغين، يمكننا إيجاد ما يأتي:

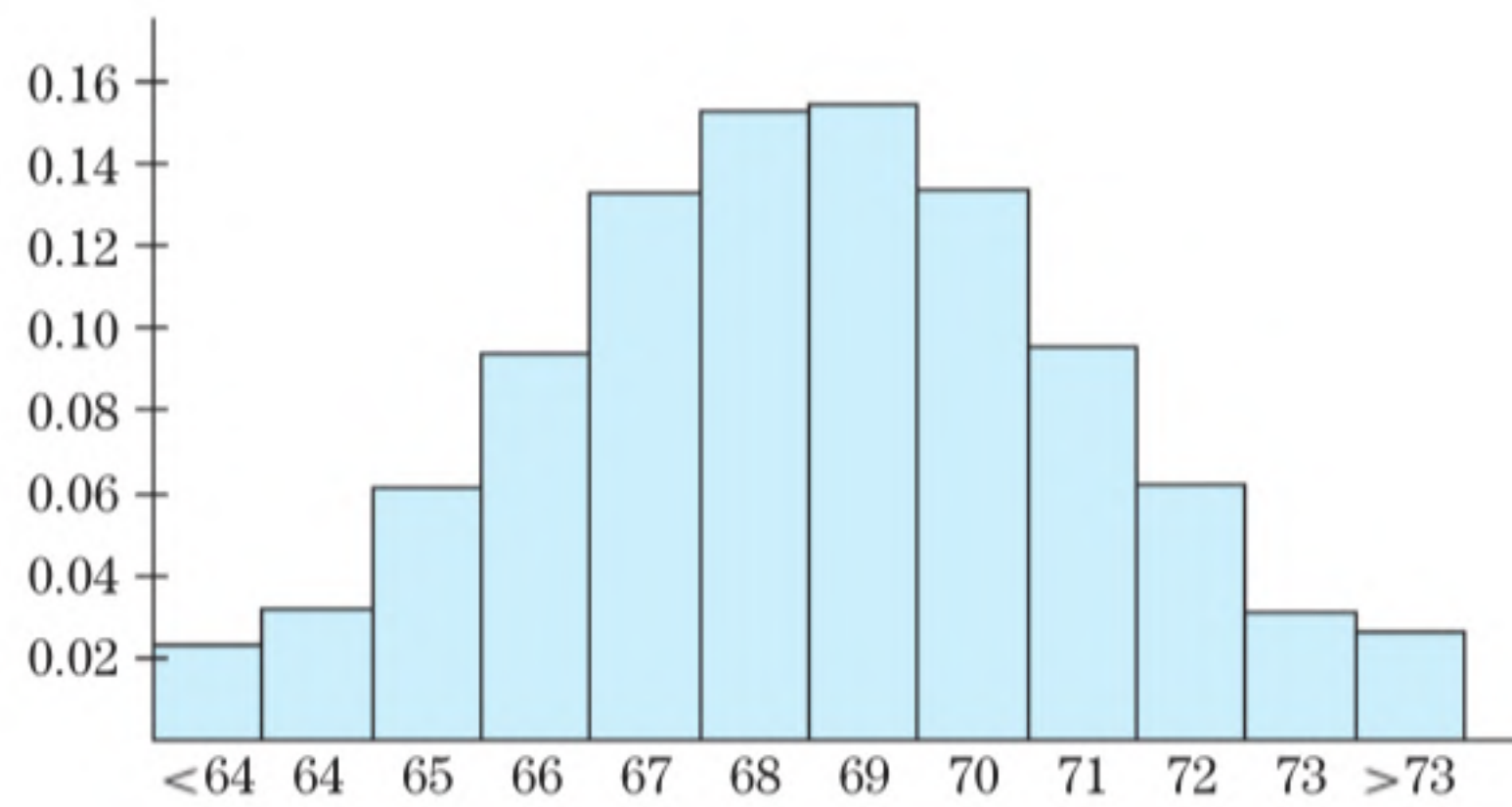
الطول (in)	< 64	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	> 73
عدد الأشخاص	23	32	61	94	133	153	155	134	96	62	31	26



الشكل 6.58

مدوّج تكراري لالقاء ثمانية قطع نقود معدنية

بما أنَّ العدد الإجمالي للأشخاص المشاركين في الاستبيان هو 1000، يكون التكرار النسبي للطول (69") 5' 9" هو $\frac{155}{1000} = 0.155$ والتكرار النسبي للطول (70") 5' 10" هو $\frac{134}{1000} = 0.134$. تقدير احتمال 5' 9" أو 5' 10" هو $0.155 + 0.134 = 0.289$. يوضّح الشكل 6.59 مدوّج تكراري.



الشكل 6.59

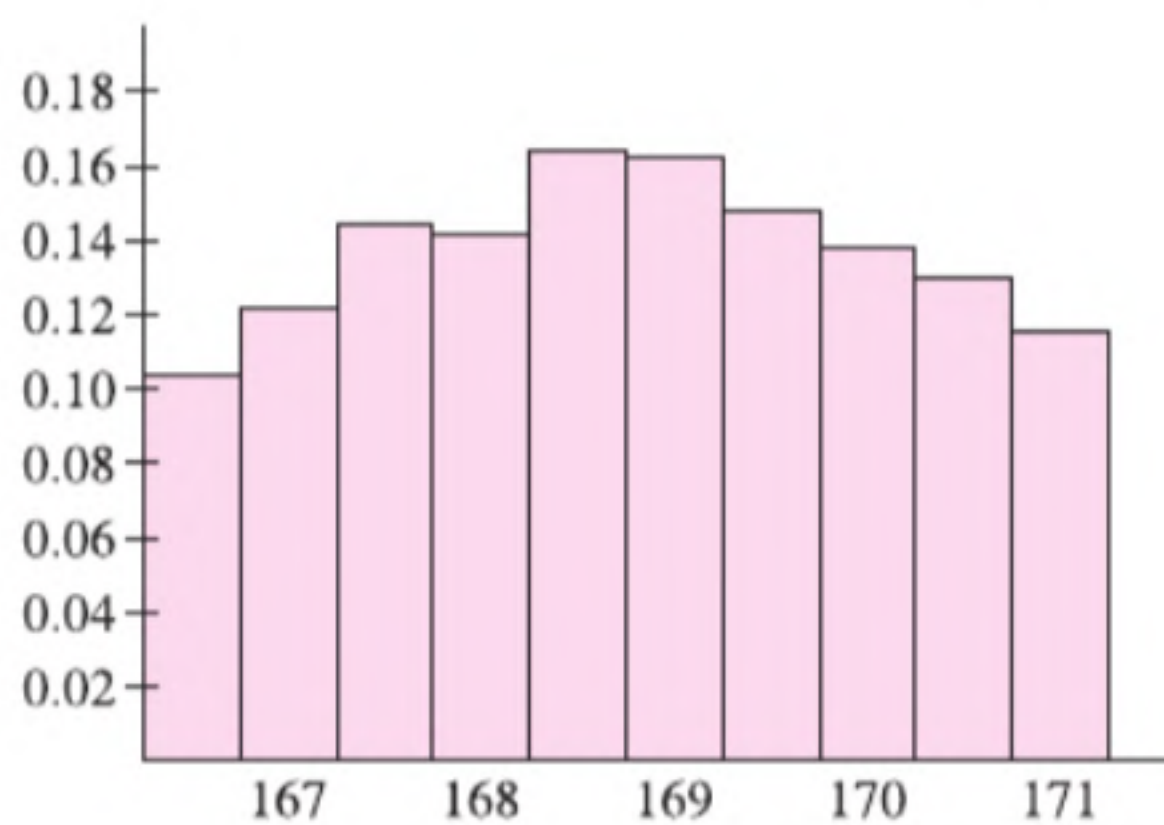
مدوّج تكراري للتكرار النسبي للأطوال

للإجابة عن سؤال أكثر تحديداً، مثل ما احتمال أن يكون اختيار أحد الأشخاص عشوائياً طوله 5 ft 8.5 in أو 5' 9" ، سوف نحتاج إلى تجزئ بياناتنا كما هي التجزئة في الجدول الآتي:

66½"	67"	67½"	68"	68½"	69"	69½"	70"	70½"	71"
52	61	72	71	82	81	74	69	65	58

يمكن تقدير احتمال أن يكون شخص ما بطول 5 ft 9 in بواسطة معدل التكرار النسبي للأشخاص بطول 5 ft 9 in المشاركين في الاستبيان الخاص بنا، والذي هو $\frac{81}{1000} = 0.081$. وبالمثل، لاحتفال أن يكون شخص ما بطول 5 ft 8.5 in هو $\frac{82}{1000} = 0.082$ تقريباً. إذاً يكون الاحتمال 5 ft 9 in أو 5 ft 8.5 in هو $0.081 + 0.082 = 0.163$ تقريباً. يوضّح الشكل 6.60a مدوّج تكراري لهذا الجزء من البيانات.

لاحظ أنه، بما أنَّ كل عمود من المدوّج التكراري يمثل الآن مدى نصف بوصة من الطول، لم يعد بإمكاننا تفسير المساحة في المدوّج التكراري على أنها الاحتمال. سنقوم بتعديل المدوّج التكراري لصنع ترابط مساحة بشكل أوضح. في الشكل 6.60b، لقد قمنا بتسمية الطول على المحور الأفقي بالبوصة بينما يبيّن الرأس مئلي التكرار النسبي. طول العمود الواقع عند 5 ft 9 in هو 0.162 وعرضه $\frac{1}{2}$. وتناظر مساحته، $\frac{1}{2}(0.162) = 0.081$ ، التكرار النسبي (أو الاحتمال) للطول 5 ft 9 in.



الشكل 6.60a

مدوّج تكراري للتكرار النسبي للأطوال

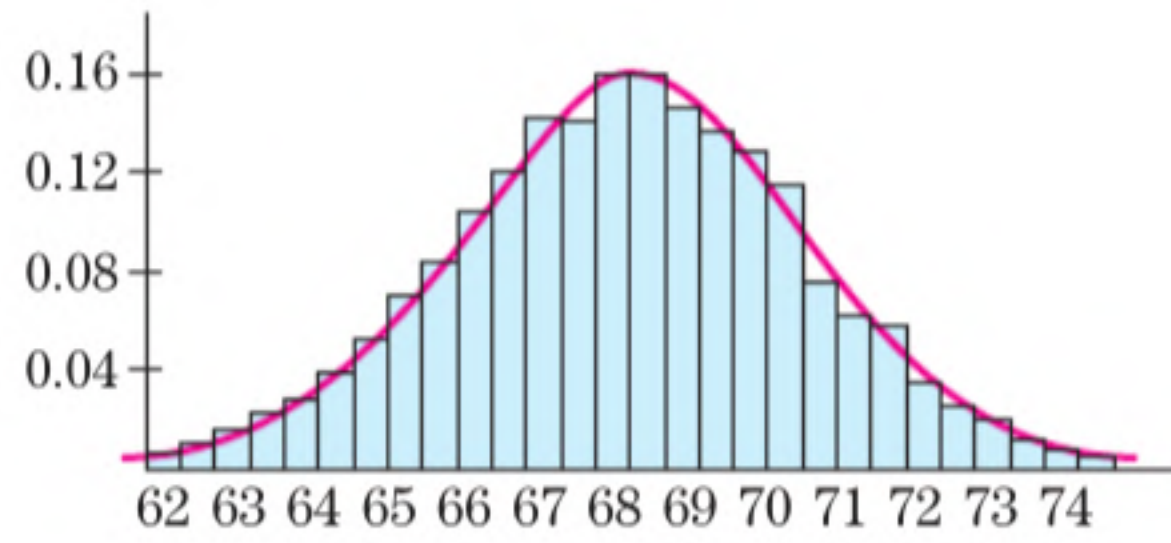
مدوّج تكراري يبيّن مئلي التكرار النسبي

بالطبع ، يمكننا الاستمرار في تجزئة فترات الطول إلى أجزاء أصغر وأصغر. ففكر في إجراء ذلك بينما تقوم بتعديل المقياس الموجود على المحور الرأس بحيث تعطي مساحة كل مستطيل (الطول مضروباً في عرض الفترة) التكرار النسبي (الاحتمال) لفترة الطول تلك دائماً. مثال ذلك: على فرض أنَّ هناك n فترات طول بين 5 ft 8 in و 5 ft 9 in، لتكن x تمثل الطول بالبوصة و $f(x)$ تساوي

طول مودل درج التكراري لفترة التي تحتوي على x . لتكن $x_1 = 68 + \frac{1}{n}$, $x_2 = 68 + \frac{2}{n}$ وهكذا. لتكن $x_i = 68 + \frac{i}{n}$ لكل $1 \leq i \leq n$ ولتكن $\Delta x = \frac{1}{n}$. يتم تقدير احتمال أن يكون طول شخص تم اختياره عشوائياً بين 6 ft 8 in و 6 ft 9 in بواسطة مجموع مساحات مستطيلات المدرج التكراري المتناظرة. المعطى بواسطة

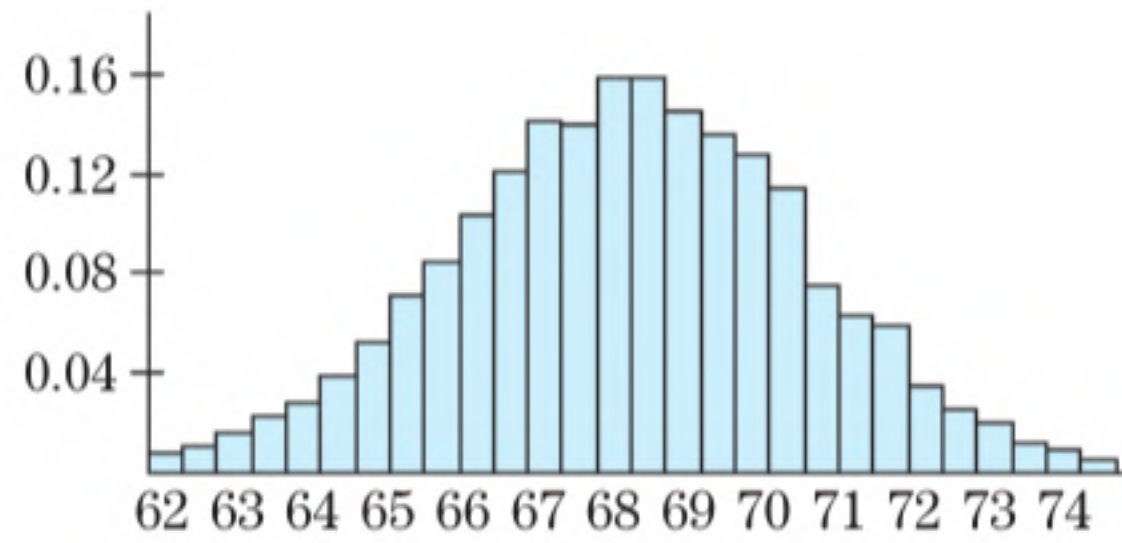
$$(7.1) \quad P(68 \leq x \leq 69) \approx f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \cdots + f(x_n) \Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

لاحظ أنه يتزايد العدد n . "سيستوي" المدرج التكراري الموجود في الشكل 6.61 ليقترب من شكل منحنى كما يبدو في الشكل 6.62.



الشكل 6.62

دالة كثافة احتمالية ومدرج تكراري للأطوال



الشكل 6.61

مدرج تكراري للأطوال

نطلق على هذه الدالة لانهائية $f(x)$ اسم دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) للأطوال. لاحظ أنه لأي معطى $i = 1, 2, \dots, n$ لا تعطي احتمال أن يساوي طول شخص ما x_i بدلاً من ذلك، لقيم Δx الصغيرة. تُعدّ الكمية $f(x_i) \Delta x$ تقريب للاحتمال أن يكون طول شخص تم اختياره عشوائياً هو في مدى $[x_{i-1}, x_i]$.

لاحظ أنه عندما $n \rightarrow \infty$ يجب أن يقترب مجموع ريمان في (7.1) من تكامل $\int_a^b f(x) dx$. هنا، تكون حدود التكامل 68 و 69. لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_{68}^{69} f(x) dx$$

لاحظ أنه بتعديل قيم الدالة لكي ينظر الاحتمال المساحة، نكون قد عثرنا على أسلوب مألوف ومباشر لحساب الاحتمالات. نلخص الآن مناقشتنا ببعض التعريفات. تُعدّ الأمثلة السابقة خاصة بتوزيعات احتمال متقطعة (متقطعة انطلاقاً من فرضية أن الكمية التي يتم قياسها هي قيم من مجموعة معيّنة منتهية). على سبيل المثال، عند القاء قطع النقد المعدنية، يجب أن يكون عدد الصور عدداً صحيحاً. وعلى النقيض، تكون العديد من التوزيعات متصلة أي إن، كمّيّة الفائدة (المتغير العشوائي) هي قيم فرضية من مدى متصل للأعداد (فترة). على سبيل المثال، على الرغم من أنه يتم تقريب الطول عادة إلى أقرب عدد صحيح من السنتيمترات، يمكن أن يكون الطول الفعلي لأحد الأشخاص أي عدد.

يكون التمثيل البياني المناظر لمدرج تكراري للتوزيعات المتصلة، هو التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية (pdf). نقدم الآن تعريف دقيق لـ pdf.

التعريف 7.1

على فرض أن X هي متغير عشوائي له فرضية أي قيمة x لكل $a \leq x \leq b$. تكون دالة الكثافة الاحتمالية لـ X دالة $f(x)$ تحقق

$$(i) \quad f(x) \geq 0 \text{ لكل } a \leq x \leq b \quad \text{لا تكون دوال الكثافة الاحتمالية سالبة أبداً.}$$

و

$$(ii) \quad \int_a^b f(x) dx = 1 \quad \text{الاحتمال الكلي 1.}$$

يعطى الاحتمال الذي تقع فيه قيمة X (المرتبّة) بين c و d بالمساحة تحت التمثيل البياني لـ pdf على تلك الفترة. أي إن،

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx \quad \text{ينظر الاحتمال المساحة تحت المنحنى.}$$

الملاحظات التاريخية



بليز باسكال (1623–1662)

عالم رياضيات وفيزياء فرنسي كون فريفاً مع بيير فيرما لبدء دراسة نظامية للاحتمال. (انظر The Unfinished Game لـ ديفلين للحصول على حساب حول هذا). يُنسب إلى باسكال فضل العديد من الاختراعات، بما في ذلك ساعة معصم ومقياس ضغط جوي ومكبس هيدروليكي ومحقنة ومجموعة متنوعة من آلات الحساب. واكتشف كذلك ما يُعرف الآن باسم مبدأ باسكال في إستانكا الموائع. (انظر القسم 5.6). من الممكن أن يكون قد أصبح باسكال واحد من مؤسسي حساب التفاضل والتكامل، ولكن قللت حالته الصحية السيئة والفترات الزمنية الكبيرة التي كرسها للتأملات الدينية والفلسفية من إنجازاته الرياضية.

لإثبات أن دالة تُعرف pdf من أجل متغير عشوائي ما (مجهول). يجب إثبات أدّها تحقق الخاصيتين (i) و(ii) بالتعريف 7.1.

المثال 7.1 إثبات أن دالة هي pdf على فترة

أثبت أن $f(x) = 3x^2$ تُعرف pdf على الفترة $[0, 1]$ بإثبات الخاصيتين (i) و(ii) للتعريف 7.1.

الحل بشكل واضح، $f(x) \geq 0$ للخاصية (ii). نقوم بتكامل pdf في مجالها. لدينا

$$\int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1$$

المثال 7.2 استخدام pdf لتقدير الاحتمالات

على فرض أن $f(x) = \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}$ هي دالة كثافة احتمالية لأطوال ذكور بالغين بالبوصة.

جـ - د احتمال أن يكون طول ذكر بالغ تم اختياره عشوائيًا بين 5 ft 8 in و 5 ft 9 in. كذلك،

جـ - د احتمال أن يكون طول ذكر بالغ تم اختياره عشوائيًا بين 6 ft 2 in و 6 ft 4 in.

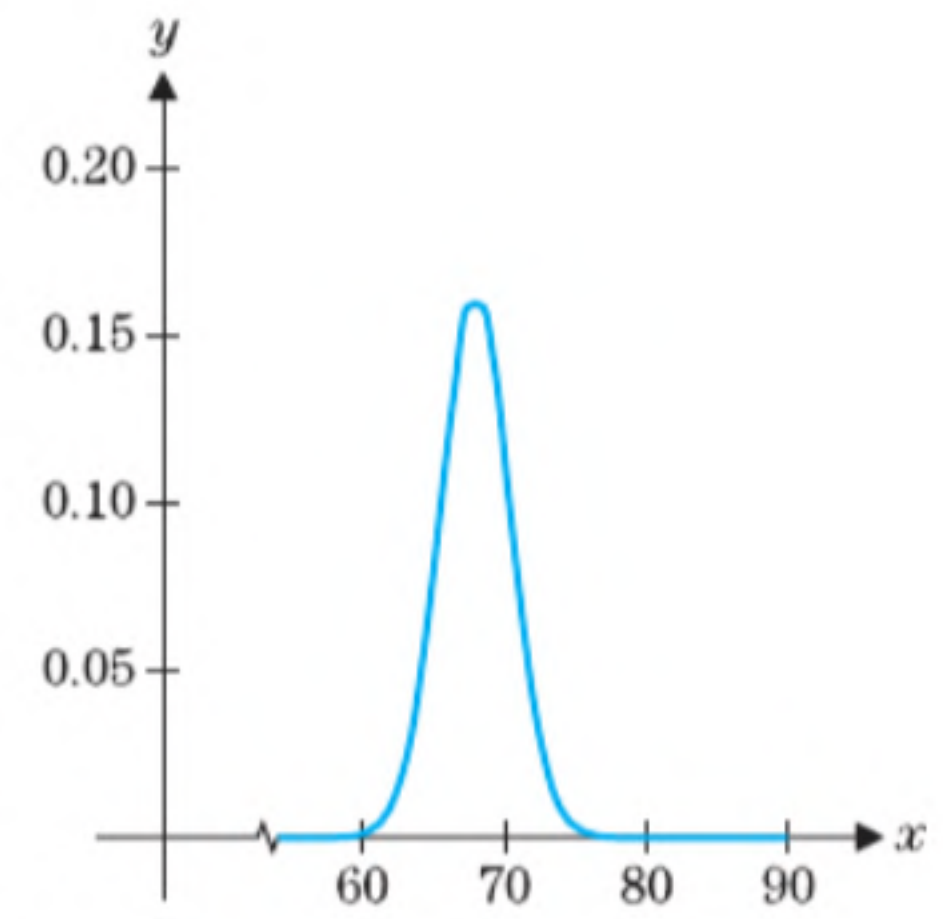
الحل لحساب الاحتمالات، نحتاج أولاً إلى تحويل الأطوال المحددة إلى بوصات (إذا كانت غير ذلك). الإحتمال أن يكون الطول بين 68 in و 69 in هو

$$P(68 \leq X \leq 69) = \int_{68}^{69} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.15542$$

هنا، قمنا بتقريب قيمة التكامل عدديًا. (يمكنك استخدام قاعدة سمبسون أو طريقة التكامل العددي المدمجة في آلتك الحاسبة أو CAS). والإحتمال أن يكون الطول بين 74 in و 76 in هو

$$P(74 \leq X \leq 76) = \int_{74}^{76} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.00751$$

حيث قربنا قيمة التكامل عدديًا مرة أخرى. ■



الشكل 6.63
أطوال الذكور البالغين

وفقًا للبيانات الموجودة في كتاب جيلز براندرث *Your Vital Statistics*، فإن pdf أطوال الذكور البالغين تبدو مثل التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}$ الموضح في الشكل 6.63 والمستخدم في مثال 7.2. لقد رأيت على الأرجح منحنيات على شكل جرس مثل هذا من قبل. يشار إلى هذا التوزيع باسم **التوزيع الطبيعي**. إلى جانب التوزيع الطبيعي، توجد توزيعات احتمال عديدة أخرى مهمة في التطبيقات.

المثال 7.3 حساب احتمال مع pdf أسية

على فرض أن العمر الافتراضي بالأعوام لعلامة تجارية معينة لمصباح يتم توزيعه أسياً بواسطة pdf $f(x) = 4e^{-4x}$. جـ - د احتمال أن يدوم مصباح محدّد لمدة 3 أشهر أو أقل.

الحل أولاً، بما أن المتغير العشوائي يقيس العمر الافتراضي بالأعوام، حول 3 أشهر إلى $\frac{1}{4}$ عام. إذاً يكون الاحتمال

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} 4e^{-4x} dx = 4 \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-4x} \Big|_0^{1/4} = -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$$

في بعض الحالات، من الممكن أن تكون هناك أسباب نظرية لافتراض أن pdf لها صيغة معينة. في هذه الحالة، تكون المهمة الأولى هي تحديد قيم أي ثوابت للوصول إلى خصائص pdf.

المثال 7.4 تحديد معامل pdf

على فرض أن pdf لمتغير عشوائي صيغتها $f(x) = ce^{-3x}$ لبعض الثوابت c ، مع $0 \leq x \leq 1$. جـ - د قيمة c التي تجعل هذه الدالة pdf.

الحل لتكون pdf، نحتاج أولاً إلى أن تكون $f(x) = ce^{-3x} \geq 0$ لكل $x \in [0, 1]$. (ستكون هذه هي الحالة ما دام $c \geq 0$) كذلك، يجب أن يساوي التكامل في مجاله العدد 1. لذا، نضع

$$1 = \int_0^1 ce^{-3x} dx = c \left(-\frac{1}{3} \right) e^{-3x} \Big|_0^1 = \frac{c}{3} (1 - e^{-3})$$

فهي الآن تتبع أن $c = \frac{3}{1 - e^{-3}} \approx 3.1572$

عند pdf معطاة، يمكن حساب إحصاءات متعددة لإختصار خصائص المتغير العشوائي. يُعد الإحصاء الأكثر شيوعاً هو **المتوسط الحسابي**، أكثر وسيلة مشهورة لقياس القيمة المتوسطة. إذا رغبت في حساب متوسط درجات اختبار 85، 89، 93، و 93، فستقوم على الأرجح بحساب المتوسط الحسابي، المعطى كما يأتي: $\frac{85+89+93+93}{4} = 90$

لاحظ هنا أنه كان هناك ثلاثة من نتائج اختبار مختلفة مسجلة: 85، التي لديها تكرار نسبي $\frac{1}{4}$ ، وأيضاً 89، بتكرار نسبي $\frac{1}{4}$ وكذلك 93، بتكرار نسبي $\frac{2}{4}$. يمكننا كذلك حساب المتوسط، ضرب كل قيمة بالتكرار النسبي الخاص بها ثم إيجاد ناتج الجمع: $(85)\frac{1}{4} + (89)\frac{1}{4} + (93)\frac{2}{4} = 90$ الآن، على فرض أننا نرغب في حساب المتوسط الحسابي لطول الأشخاص في الجدول التالي.

الطول (in)	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
العدد	23	32	61	94	133	153	155	134	96	62	31	26

سيكون من غير المنطقي كتابة أطوال الـ 1000 شخص جميعهم وإيجاد ناتج الجمع ثم القسمة على 1000. فمن الأسهل ضرب كل طول بالتكرار النسبي الخاص به وجمع النتائج. باتباع هذا الطريق، المتوسط m تكون معطاة كما يأتي:

$$m = (63) \frac{23}{1000} + (64) \frac{32}{1000} + (65) \frac{61}{1000} + (66) \frac{94}{1000} + (67) \frac{133}{1000} + \dots + (74) \frac{26}{1000} = 168$$

إذا رمزنا إلى القوائم $x_1, x_2, \dots, x_n$ وافترضنا أن $f(x_i)$ هي معدل التكرار النسبي أو الاحتمال المناظر لـ $x = x_i$ ، إذاً يكون للمتوسط الحسابي الصيغة

$$m = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \dots + x_n f(x_n)$$

إذا كانت الأطوال معطاة في مجموعة البيانات الخاص بنا لكل نصف سنتيمتر أو عُشر سنتيمتر، سوف نحسب المتوسط، ضرب كل x في الاحتمال المناظر $f(x_i) \Delta x$ ، حيث Δx هي كسر سنتيمتر بين نقاط البيانات. تكون للمتوسط الآن الصيغة

$$m = [x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \dots + x_n f(x_n)] \Delta x = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \Delta x$$

حيث n هي عدد نقاط البيانات. لاحظ أنه، بتزايد n واقترب Δx من 0، يقترب مجموع ريمان من التكامل $\int_a^b x f(x) dx$. وهذا يعطينا التعريف التالي.

التعريف 7.2

يعطى **المتوسط الحسابي** μ لمتغير عشوائي له pdf $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ بالصيغة:

$$\mu = \int_a^b x f(x) dx \quad (7.2)$$

على الرغم من أننا نستخدم المتوسط الحسابي بشكل شائع لذكر القيم المتوسطة لمتغير عشوائي، من المهم إدراك أنه ليس وسيلة القياس الوحيدة للمتوسط التي يستخدمها علماء الإحصاء. وسيلة قياس بديلة

اليوم في الرياضيات



بيرسي دياكونيس (1945–)

عالم إحصاء أمريكي كان من أول الحاصلين على زمالة مؤسسة MacArthur المربحة، التي كثيراً ما يطلق عليها اسم "منحة العبقريّة". تدرب دياكونيس على الكمان في جوليارد حتى بلغ 14 عامًا، عندما غادر موطنه ليصبح موسيقى محترف لمدة 10 أعوام. عبّر عن اهتماماته المتنوعة من خلال عمله، حيث يستخدم جميع مجالات الرياضيات والإحصاء في حل مسائل من جميع جوانب العلوم والهندسة.

للمتوسط هي الوسيط. قيمة x التي تقسم الاحتمال إلى النصف. (أي إن ، نصف جميع قيم المتغير العشوائي تقع عند أو تحت الوسيط ويقع النصف الآخر عند أو فوق الوسيط). في المثال 7.5 وفي التمارين، ستستكشف الحالات التي يقدم فيها كل قياس دليلاً مختلفاً عن متوسط متغيرات عشوائية.

المثال 7.5 إيجاد المتوسط الحسابي والوسيط لعمر مجموعة من الخلايا

على فرض أن العمر بالأيام لكائن وحيد الخلية pdf له $f(x) = (\ln 2)e^{-kx}$ ، حيث $k = \frac{1}{2} \ln 2$. يكون المجال $0 \leq x \leq 2$ (الفرضية هنا أنه عند الوصول لعمر يومين، تنقسم كل خلية إلى خليتين ولديتين). جـ - د (a) متوسط الخاص بعمر الخلايا و (b) نسبة أعمار الخلايا الأصغر من المتوسط، و (c) الوسيط لعمر الخلايا.

الحل للجزء (a)، لدينا من (7.2) أنه يعطى المتوسط الحسابي بالصيغة

$$\mu = \int_0^2 x(\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2} dx \approx 0.88539 \text{ يوم}$$

حيث قربنا قيمة التكامل عددياً. لاحظ أنه، على الرغم من أن الخلايا تتراوح في العمر من 0 يوم إلى يومين، لا يبلغ المتوسط 1. يوضح التمثيل البياني ل pdf في الشكل 6.64 أن صغار الأعمار على الأرجح أكثر من كبار الأعمار ويتسبب هذا في أن يكون المتوسط أقل من 1.

للجزء (b)، لاحظ أن نسبة الخلايا أعمارها أصغر من المتوسط هي نفسها كإحتمال أن تكون خلية تم اختيارها عشوائياً عمرها أصغر من المتوسط. يتم إعطاء الاحتمال كما يأتي:

$$P(0 \leq X \leq \mu) \approx \int_0^{0.88539} (\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2} dx \approx 0.52848$$

حيث قربنا قيمة التكامل عددياً مرة أخرى. لذا، فإن نسبة أعمار الخلايا الأصغر من المتوسط 53% تقريباً لاحظ أن في هذه الحالة لا يمثل المتوسط درجة 50% للاحتمالات. وبعبارة أخرى، لا يكون المتوسط مماثل للوسيط.

لإيجاد الوسيط في الجزء (c)، يجب أن نحل لإيجاد قيمة العدد الثابت c بحيث تكون

$$0.5 = \int_0^c (\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2} dx$$

بما أن الدالة الأصلية للدالة $e^{-(\ln 2)x/2}$ هي $-\frac{2}{\ln 2}e^{-(\ln 2)x/2}$ ، نحصل على

$$\begin{aligned} 0.5 &= \int_0^c \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2} dx \\ &= \ln 2 \left[-\frac{2}{\ln 2} e^{-(\ln 2)x/2} \right]_0^c \\ &= -2e^{-(\ln 2)c/2} + 2 \end{aligned}$$

ب طرح 2 من كلا الطرفين، نحصل على

$$-1.5 = -2e^{-(\ln 2)c/2}$$

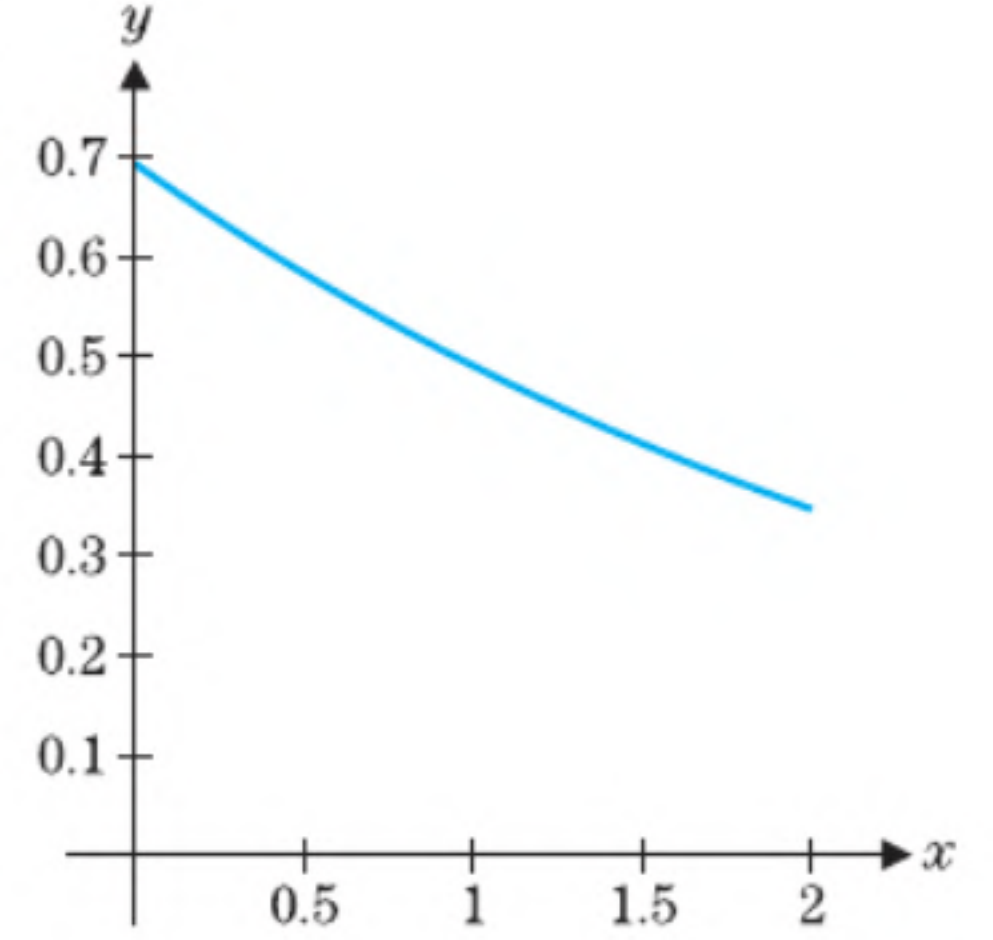
بحيث تعطينا القسمة على -2 الناتج $0.75 = e^{-(\ln 2)c/2}$

وعند أخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين يعطينا

$$\ln 0.75 = -(\ln 2)c/2$$

في النهاية، الحل لإيجاد قيمة c يعطينا $c = \frac{-2 \ln 0.75}{\ln 2}$

حيث يبلغ الوسيط $0.83 \approx -2 \ln 0.75 / \ln 2$. يمكننا الآن استنتاج أن نصف الخلايا أعمارها أصغر من 0.83 يوم والنصف الآخر من الخلايا أعمارها أكبر من 0.83 يوم. ■



الشكل 6.64

$$y = (\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2}$$

تمارين كتابية

1. في النص، ذكرنا أنَّ احتمال القاء قطعتي نقد معدنيتين عادلتين والحصول على صورتين هو $\frac{1}{4}$. إذا حاولت إجراء هذه التجربة أربع مرات، اشرح سبب عدم حصولك دائمًا على صورتين بالضبط في مرقص الأربع مرات. إذا كان الاحتمال لا يعطيك توقعات دقيقة، فما فائدته؟ للإجابة على هذا السؤال، ناقش المعلومات التي تم الوصول إليها بمعرفة أنَّ احتمال الحصول على صورة واحدة وكتابة واحدة في التجربة الموجودة أعلاه هو $\frac{1}{2}$ (أي مثلي الكسر $\frac{1}{4}$).
2. على فرض أنك تلقي قطعتي نقد معدنيتين عدة مرات (أو قم بمحاكاة هذا على آلتك الحاسبة أو الحاسوب الخاص بك). نظرًا، يكون احتمال الحصول على صورتين هو $\frac{1}{4}$. على المدى البعيد (عند القاء قطعتي نقد معدنيتين بمعدل أكبر وفي كثير من الأحيان)، كم ينبغي أن تكون النسبة لعدد مَرَّات الحصول على صورتين؟ حاول إجراء هذا وناقش كيفية مقارنة نتائجك بعملية الحساب النظرية.
3. وفقًا للشكلين 6.57 و 6.58، صف الصورة التي تتوقع أن يبدو عليها المدجج التكراري لعدد أكبر من قطع النقود المعدنية. قارن مع الشكل 6.63.
4. يحدد طول الشخص بعوامل متعددة، وراثية وبيئية على حد سواء (مثال: النظام الغذائي). اشرح سبب إمكانية إنتاج مدجج تكراري مشابه لذلك الناتج عن القاء عدد كبير من قطع النقد المعدنية.

في التمارين 1-6 أثبت أنَّ الدالة المعطاة هي pdf على الفترة المعينة.

1. $f(x) = 4x^3, [0, 1]$
2. $f(x) = \frac{3}{8}x^2, [0, 2]$
3. $f(x) = x + 2x^3, [0, 1]$
4. $f(x) = \cos x, [0, \pi/2]$
5. $f(x) = \frac{1}{2} \sin x, [0, \pi]$
6. $f(x) = e^{-x/2}, [0, \ln 4]$

في التمارين 7-12، جـ - د قيمة لـ c التي تكون عندها $f(x)$ pdf على الفترة المعينة.

7. $f(x) = cx^3, [0, 1]$
8. $f(x) = cx + x^2, [0, 1]$
9. $f(x) = ce^{-4x}, [0, 1]$
10. $f(x) = 2ce^{-cx}, [0, 2]$
11. $f(x) = \frac{c}{1+x^2}, [0, 1]$
12. $f(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, [0, 1]$

في التمارين 13-16، استخدم pdf الخاصة بمثال 7.2 لإيجاد احتمال أن يكون طول ذكر إماراتي تم اختياره عشوائيًا في المدى المعين.

13. بين 5 ft 10 in و 6 ft.

14. بين 6 ft 6 in و 6 ft 10 in.

15. بين 7 ft و 10 ft.

16. بين 2 ft و 5 ft.

في التمارين 17-20، جـ - د الاحتمالات المعينة، إذا علمت أنَّ العمر الافتراضي لمصباح يتم توزيعه أسياً باستخدام pdf $f(x) = 6e^{-6x}$ (حيث يتم قياس x بالأعوام).

17. يدوم عمر المصباح لمدة أصغر من 3 أشهر.

18. يدوم عمر المصباح لمدة أصغر من 6 أشهر.

19. يدوم عمر المصباح لمدة تتراوح بين عام واحد وعامين.

20. يدوم عمر المصباح لمدة تتراوح بين 3 و 10 أعوام.

في التمارين 21-24، على فرض أنَّ عمر كائن حي له pdf $f(x) = 4xe^{-2x}$ (حيث يتم قياس x بالأعوام).

21. جـ - د احتمال أن يكون للكائن الحي عمر أصغر من عام واحد.

22. جـ - د احتمال أن يكون للكائن الحي عمر يتراوح بين عام واحد وعامين.

23. جـ - د متوسط العمر $(0 \leq x \leq 10)$.

24. مثل pdf بيانيًا وقارن القيمة العظمى لـ pdf بالمتوسط.

في التمارين 25-30، جـ - د (a) المتوسط، و (b) وسيط المتغير العشوائي من pdf المعطاة.

25. $f(x) = 3x^2, [0, 1]$
26. $f(x) = 4x^3, [0, 1]$
27. $f(x) = \frac{4/\pi}{1+x^2}, [0, 1]$
28. $f(x) = \frac{2/\pi}{\sqrt{1-x^2}}, [0, 1]$
29. $f(x) = \frac{1}{2} \sin x, [0, \pi]$
30. $f(x) = \cos x, [0, \pi/2]$

31. لكل $f(x) = ce^{-4x}$ ، جـ - د c بحيث تكون pdf $f(x)$ على الفترة $[0, b]$ لكل $b > 0$. ماذا يحدث لـ c عندما $b \rightarrow \infty$ ؟32. لأجل pdf من التمرين 31، جـ - د المتوسط بالضبط (استخدم CAS لدالة أصلية). عندما تتزايد b ، ما الذي يحدث للمتوسط؟33. كرر التمرينين 31 و 32 لأجل $f(x) = ce^{-6x}$.34. وفقًا لنتائج التمارين 31-33، ختم قيم c والمتوسط عندما $a \rightarrow \infty$ ، لأجل $f(x) = ce^{-ax}$ ، $a > 0$.

التطبيقات

35. في نسخة من نسخ لعبة كينو، تختار 10 أعداد تتراوح بين 1 و 80. تسحب 20 عددًا بين 1 و 80. يعتمد ربحك على الأعداد الخاصة التي يتم اختيارها. استخدم الاحتمالات المعطاة (مقربة إلى 4 أرقام) لإيجاد احتمال كل حدث محدد أدناه. (للفوز، يجب أن يتم اختيار 5 من أعدادك على الأقل. في مراهنة على 2 AED، تربح 40 AED أو أكثر إذا تم اختيار 6 أو أكثر من أعدادك).

العدد الذي تم اختياره	0	1	2	3	4
الاحتمال	0.0458	0.1796	0.2953	0.2674	0.1473

العدد الذي تم اختياره	5	6	7	8	9	10
الاحتمال	0.0514	0.0115	0.0016	0.0001	0.0	0.0

(a) الربح (يتم اختيار 5 على الأقل)

(b) الخسارة (يتم اختيار 4 أو أقل)

(c) تحقيق ربح كبير (6 أو أكثر)

(d) يتم اختيار 3 أو 4 أعداد

36. على فرض أن لاعب كرة سلة يحرز نسبة 70% من رمياته الحرة. إذا صوّب ثلاث رميات حرة وكان احتمال إحراز كل منها 0.7، فتكون احتمالات العدد الإجمالي المحرز كما هو موضح. جـ - د احتمال كل حدث محدّد أدناه.

العدد المحرز	0	1	2	3
الاحتمال	0.027	0.189	0.441	0.343

(a) يحرز 2 أو 3 (b) يحرز 1 على الأقل

37. (a) على فرض أن لاعب بإحدى الألعاب ربح m دور من n بنسبة مئوية للربح تبلغ $75 < \frac{m}{n} < 100$. إذا يربح اللاعب في عدة أدوار متتالية، بحيث تتخطى النسبة المئوية للربح 75%. وضح أنه في مرحلة ما في هذه العملية تبلغ النسبة المئوية للربح للاعب 75% بالضبط.

(b) قم بتعميم هذا على نسبة مئوية للربح يمكن كتابتها بالصيغة $\frac{k}{k+1}$ لعدد صحيح k .

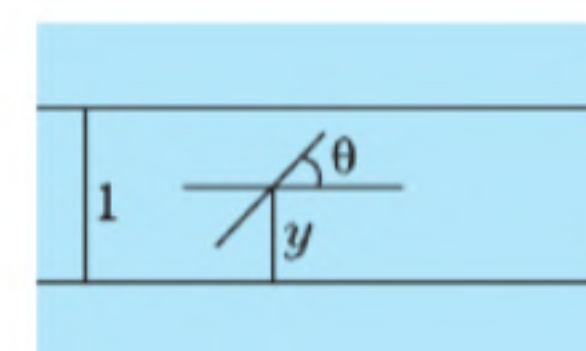
38. في المثال 7.5 وجدنا أن الوسيط (كذلك يطلق عليه اسم الربيع الثاني). الآن جـ - د الربيعان الأول والثالث، الأعوام بحيث يكون احتمال أعمار الصغار 0.25 و 0.75 على الترتيب.

39. pdf في المثال 7.2 هي pdf لمتغير عشوائي موزع طبيعيًا. يمكن قراءة المتوسط، وسط بسهولة من $f(x)$ ؛ في المثال 7.2، يكون المتوسط 68. يميز المتوسط والعدد الذي يطلق عليه اسم الانحراف المعياري التوزيعات الطبيعية. كما يوضح الشكل 6.63، لدى التمثيل البياني ل pdf قيمة عظمى عند المتوسط ونقطتي انعطاف تقعان على جوانب مقابلة للمتوسط. يساوي الانحراف المعياري المسافة من المتوسط إلى نقطة انعطاف. جـ - د الانحراف المعياري في المثال 7.2.

40. في التمرين 39 وجدت الانحراف المعياري ل pdf في المثال 2. عند ا لرمز إلى المتوسط، والانحراف المعياري ب σ ، جـ د احتمال أن يتراوح طول معطى بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ (أي إثنين انحراف معياري واحد للمتوسط). جـ - د احتمال أن يكون طول معطى ضمن انحرافين معياريين للمتوسط، $\mu - 2\sigma$ إلى $\mu + 2\sigma$ (وضمن ثلاثة انحرافات معيارية للمتوسط). تكون هذه الاحتمالات هي نفسها لأي توزيع طبيعي. لذا، إذا علمت المتوسط والانحراف المعياري لمتغير عشوائي توزيعه طبيعي، فأنت تعلم تلقائيًا هذه الاحتمالات.

41. إذا كان احتمال حدث هو p فإن احتمال حدوثه m مرة في n محاولة هو $f(p) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$. جـ - د قيمة p التي تحقق قيمة عظمى ل $f(p)$. يطلق على هذا اسم مقدّر قيمة عظمى ترجيحية ل p . اشرح بإيجاز سبب أن إجابتك منطقية.

42. مسألة إبرة بوفون هي واحدة من أقدم وأشهر مسائل الاحتمال. على فرض أن سلسلة من المستقيمات الأفقية تبعد وحدة واحدة عن بعضها البعض ويتم وضع إبرة طولها وحدة واحدة بشكل عشوائي. فما احتمال أن تتقاطع الإبرة مع واحد من المستقيمات الأفقية؟



في الشكل، y هي المسافة من مركز الإبرة إلى أقرب مستقيم و θ هي الزاوية الموجبة التي تشكلها الإبرة مع المركبة الأفقية. أثبت أن الإبرة تتقاطع مع المستقيم إذا وفقط إذا $0 \leq y \leq \frac{1}{2} \sin \theta$. حيث $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$. يكون الاحتمال المرغوب فيه $\frac{\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \frac{1}{2} d\theta}$. احسب هذا.

43. إن pdf ماكسويل-بولتزمان للسرعات الجزيئية في غاز عند حالة توازن هي $f(x) = ax^2 e^{-bx^2}$ للوسيطات الموجبة a و b . جـ - د أكثر السرعات شيوعًا (أي، جـ - د x تحقق قيمة $f(x)$).

44. تكون pdf لفتوك ذات ارتفاع حاد مشترك لإطلاق خلايا عصبية بنواة فوقية لقطعة هي $f(t) = kt^{-3/2} e^{bt-a/t}$. حيث يتم قياس t بالميكرو ثانية (انظر كتاب *From Clocks to Chaos* لماكي وجلاس). استخدم CAS الخاص بك لإيجاد قيمة k التي تجعل f pdf على الفترة $[0, 40]$. ثم جـ - د احتمال أن يتم إطلاق خلايا عصبية بين 20 و 30 ميكرو ثانية.

45. على فرض أن لدى لاعب كرة قدم احتمال p إحراز الهدف التالي في مباراة. احتمال أن تنتهي مباراة مُحرز بها هدفين بالتعادل 1-1 هو $2p(1-p)$ واحتمال أن تنتهي مباراة مُحرز بها 4 أهداف

بالتعادل 2-2 هو $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} p^2 (1-p)^2$ واحتمال أن تنتهي مباراة مُحرز بها 6 أهداف بالتعادل 3-3 هو $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} p^3 (1-p)^3$ وهكذا.

فرضًا أن يتم إحراز عدد متساو من الأهداف. أثبت أن احتمال التعادل هو دالة متناقصة لعدد الأهداف المحرزة.

46. يقوم لاعبان بالقاء قطعة نقد معدنية عادلة حتى يتم الحصول على المتتالية HTT أو المتتالية HHT. يفوز اللاعب A إذا تم الحصول على HTT أولاً ويفوز اللاعب B إذا تم الحصول على HHT أولاً. أثبت أن احتمال أن يفوز اللاعب B يبلغ الضعف.

47. لتكن f هي دالة بحيث تكون كل من f و g pdf في $[0, 1]$. حيث $g(x) = f(x^2)$.

(a) جـ - د تلك الدالة للصيغة $f(x) = a + bx + cx^2$.

(b) جـ - د متوسط أي متغير عشوائي ب pdf g .

تمارين استكشاف

1. تشير نظرية الفوضى في الرياضيات إلى أن الأعداد الناتجة باستخدام خوارزميات بسيطة جدًا يمكن أن تبدو عشوائية. ينظر الباحثون في نظرية الفوضى لمجموعة متنوعة من التمثيلات البيانية لمحاولة تمييز الفوضى العشوائية من الحتمية. على سبيل المثال، كرّر الدالة $f(x) = 4x(1-x)$ بدءًا من $x = 0.1$. هذا يعني، احسب $f(0.1) = 0.36$ ، $f(0.36) = 0.9216$ ، $f(0.9216) \approx 0.289$ وما إلى ذلك. كرّر إلى 50 مرة وسجل كم مرة كل عدد أول يحدث (حتى الآن، يوجد لدينا 1 و 3 و 9 و 2). إذا كانت العملية عشوائية حقًا، فإن الأعداد ستكرّر عدد المرات نفسه تقريبًا. هل يبدو أن هذا يحدث؟ للكشف عن هذه العملية بكونها غير عشوائية، يمكنك رسم صورة للطور. للقيام بذلك، اتّخذ تكرارات متتالية كإحداثيات نقطة (x, y) وارسم النقاط. أول ثلاث نقاط هي $(0.1, 0.36)$ ، $(0.36, 0.9216)$ و $(0.9216, 0.289)$. صف النمط (غير العشوائي) الذي يظهر، مع تعريفه بأكبر قدر من الدقة.

2. على فرض أن نابض يتأرجح صعودًا وهبوطًا في وضع رأسي بالمعادلة $u(t) = \sin t$. إذا اخترت وقتًا عشوائيًا وألقيت نظرة

على موقع النابض، فهل سيكون من المرجح بشكل أكبر أن تجد النابض بالقرب من موقع متطرف ($u = 1$ أو $u = -1$) أو بالقرب من المتوسط ($u = 0$)؟ تتناسب pdf عكسيًا مع السرعة. (ما سبب كون هذا منطقيًا؟) أثبت أن السرعة مُعطاة بالمعادلة $|\cos t| = \sqrt{1 - u^2}$ ، إذاً تكون الـ pdf هي $f(u) = c/\sqrt{1 - u^2}$.

$-1 \leq u \leq 1$ لعدد ثابت c أثبت أن $c = 1/\pi$ ، ثم مثل بيانيًا $f(x)$ وصف المواقع التي من المرجح أن تجد عليها النابض. استخدم هذه النتيجة لشرح ما يلي. إذا كنت تقود السيارة في حي سكني، فمن المرجح كثيرًا أن تتقاطع مع سيارة قادمة في الاتجاه الآخر عند مفترق طرق في منتصف المجمع السكني.

أسئلة مراجعة

تمارين كتابية

تتضمن القائمة التالية المصطلحات التي تم تعريفها والنظريات التي تم توضيحها في هذه الوحدة. لكل مصطلح أو نظرية، (1) قدم تعريفًا أو عبارة دقيقة، (2) اذكر ما تعنيه عمومًا (3) صف أنواع المسائل التي تقترب من ذلك.

الحجم بالتجزئة	الحجم بالأقراص	الحجم بالحلقات
الحجم بالأصداف	طول القوس	مساحة السطح
قانون نيوتن الثاني	الشغل	الدفع
مركز الكتلة	دالة كثافة	المتوسط
	احتمالية	

صواب أم خطأ

اذكر ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة واطرح السبب بإيجاز. إذا كانت العبارة خاطئة، حاول "تصحيحها" بتعديل العبارة الموضحة إلى العبارة الجديدة الصحيحة.

1. تُعطى المساحة بين f و g بالتكامل $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$
2. قد طريقة الأقراص حالة خاصة للحجم بالتقسيم.
3. لمنطقة مذكورة، ستستخدم دائمًا طرائق الأقراص والأصداف متغيرات جديدة للتكامل.
4. دائمًا ما يعطي مجموع ريمان لطول القوس تقريبًا كبيرًا للغاية.
5. لمعظم الدوال، يمكن إيجاد قيمة تكامل طول القوس بالضبط.
6. القوة الوحيدة المؤثرة على مقذوف هي الجاذبية.
7. لحركة المقذوفات ثنائية الأبعاد، يمكنك دائمًا إيجاد الحل لأجل $x(t)$ و $y(t)$ بشكل مستقل.
8. كلما تحركت جسم ما، زاد الشغل المبذول من قبله.
9. يكون متوسط متغير عشوائي أكبر دائمًا من الوسيط.

في التمارين 1-8، جـ - د المساحة المشار إليها بالضبط إن أمكن (قدّر إذا لزم الأمر).

1. المساحة بين $y = \sin x$ و $y = x^2 + 2$ لكل $0 \leq x \leq \pi$
2. المساحة بين $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ لكل $0 \leq x \leq 1$
3. المساحة بين $y = x^3$ و $y = 2x^2 - x$
4. المساحة بين $y = x^2 - 3$ و $y = -x^2 + 5$

5. المساحة بين $y = e^{-x}$ و $y = 2 - x^2$

6. المساحة بين $x = y^2$ و $y = 1 - x$

7. مساحة المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ ، $y = 2 - x$ و $y = 0$

8. مساحة المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ ، $y = 0$ و $x = 2$

9. مدينة تعداد سكانها 10,000 لها معدل المواليد $10 + 2t$ شخص سنويًا ومعدل الوفيات $4 + t$ شخص سنويًا. احسب تعداد سكان المدينة بعد 6 سنوات.

10. من البيانات المعطاة، قدّر المساحة بين المنحنيات لكل $0 \leq x \leq 2$.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	3.2	3.6	3.8	3.7	3.2	3.4
$g(x)$	1.2	1.5	1.6	2.2	2.0	2.4

x	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x)$	3.0	2.8	2.4	2.9	3.4
$g(x)$	2.2	2.1	2.3	2.8	2.4

11. جـ - د حجم الجسم مساحة المقطع العرضي $A(x) = \pi(3 + x)^2$ لكل $0 \leq x \leq 2$.

12. يبدو حمام سباحة تتم مشاهدته من فوقه إطارًا معطى بالمعادلة $y = \pm(5 + x)$ لكل $0 \leq x \leq 2$. ويعطى العمق بالتعبير $4 + x$ (جميع القياسات بالمتري). احسب الحجم.

13. مساحات المقطع العرضي لجسم تحت الماء معطاة في الجدول أدناه. قدّر الحجم.

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
$A(x)$	0.4	1.4	1.8	2.0	2.1	1.8	1.1	0.4	0

في التمارين 14-18، جـ - د حجم الجسم الناتج عن الدوران المشار إليه.

14. المنطقة المحددة من $y = x^2$ ، $y = 0$ و $x = 1$ التي يتم تدويرها حول (a) المحور x ؛ (b) المحور y ؛ (c) $x = 2$ ؛ (d) $y = -2$

15. المنطقة المحددة من $y = x^2$ و $y = 4$ التي يتم تدويرها حول (a) المحور x ؛ (b) المحور y ؛ (c) $x = 2$ ؛ (d) $y = -2$

16. المنطقة المحددة من $y = x$ ، $y = 2x$ و $x = 2$ التي يتم تدويرها حول (a) المحور x ؛ (b) المحور y ؛ (c) $x = -1$ ؛ (d) $y = 4$

17. المنطقة المحددة من $y = x$ ، $y = 2 - x$ و $y = 0$ التي يتم دورانها حول (a) المحور x ؛ (b) المحور y ؛ (c) $x = -1$ ؛ (d) $y = 4$
18. المنطقة المحددة من $x = 4 - y^2$ و $x = y^2 - 4$ التي يتم دورانها حول (a) المحور x ؛ (b) المحور y ؛ (c) $x = 4$ ؛ (d) $y = 4$

في التمارين 19–22، ضع تكامل لطول القوس وقرب التكامل عددياً.

19. الجزء من $y = x^4$ لكل $-1 \leq x \leq 1$

20. الجزء من $y = x^2 + x$ لكل $-1 \leq x \leq 0$

21. الجزء من $y = e^{x/2}$ لكل $-2 \leq x \leq 2$

22. الجزء من $y = \sin 2x$ لكل $0 \leq x \leq \pi$

في التمرينان 23 و 24، ضع تكامل لمساحة السطح وقرب التكامل عددياً.

23. السطح الناتج عن الدوران $y = 1 - x^2$ ، $0 \leq x \leq 1$ حول المحور x

24. السطح الناتج عن الدوران $y = x^3$ ، $0 \leq x \leq 1$ حول المحور x

في التمارين 25–32، تجاهل مقاومة الهواء.

25. يقفز غواص من ارتفاع 64 ft. ما هي السرعة المتجهة لحظة الاصطدام؟

26. إذا كان الغواص في التمرين 25 له سرعة متجهة ابتدائية 4 ft/s، كم ستكون السرعة المتجهة لحظة الاصطدام؟

27. يتم إطلاق جسم ما من الأرض بزاوية 20° بسرعة ابتدائية 48 ft/s. جـ - د زمن التحليق والمدى الأفقي.

28. أعد التمرين 27 لجسم تم إطلاقه من ارتفاع 6 ft.

29. يتم إطلاق كرة قدم من ارتفاع 6 ft مع سرعة ابتدائية 80 ft/s بزاوية 8° . يقف شخص ما على بُعد 40 yd آخر الملعب في اتجاه الرمية. هل من الممكن التقاط الكرة؟

30. كرر التمرين 29 مع زاوية إطلاق 24° . بالتجربة والخطأ، جـ - د مدى الزوايا (مقربة إلى أقرب درجة) التي تشكل رمية قابلة للالتقاط.

31. جـ - د السرعة الابتدائية المطلوبة لدفع جسم ما إلى ارتفاع 128 ft حدّ د السرعة المتجهة للجسم لحظة الاصطدام.

32. تقوم طائرة على ارتفاع 120 ft بإسقاط إمدادات إلى موقع على الأرض. إذا كان للطائرة سرعة متجهة أفقية 100 ft/s، ما المسافة التي يجب أن يبعدها مكان إطلاق الإمدادات عن الموقع المستهدف؟

33. أحدثت قوة مقدارها 60 lb تمدد على نابض 1 ft جـ - د الشغل المبذول لتمدد النابض 8 in أكثر من طوله الطبيعي.

34. محرك سيارة بذل قوة $800 + 2x$ رطل عندما تكون السيارة في الموقع x ميل. جـ - د الشغل المبذول عند انطلاق السيارة من $x = 0$ إلى $x = 8$.

35. احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما كثافته $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$ لكل $0 \leq x \leq 4$. اشرح سبب عدم وجود مركز الكتلة عند $x = 2$.

36. احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما كثافته $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$ لكل $0 \leq x \leq 2$. اشرح سبب وجود مركز الكتلة عند $x = 1$.

37. سدّ على شكل شبه منحرف إرتفاعه 80 ft وعرضه في الجزء العلوي 60 ft وعرضه في الجزء السفلي 140 ft. جـ - د القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج إليها السد كي يصمد أمامها.

38. توجد نافذة رؤية تحت الماء مستطيلة الشكل عرضها 20 ft تمتد من 5 ft تحت السطح إلى 10 ft تحت السطح. جـ - د القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي ستحتاج إليها النافذة كي تصمد أمامها.

39. القوة المبذولة من مضرب على كرة على فترة زمنية مبيّنة في الجدول. استخدم البيانات لتقدير الدفع. إذا كان للكرة كتلة $m = 0.01$ ص (ص لـ سرعة 120 ft/s قبل الاصطدام، قدر سرعتها بعد الاصطدام).

t (s)	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004
$F(t)$ (N)	0	800	1600	2400	3000

t (s)	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008
$F(t)$ (N)	3600	2200	1200	0

40. إذا مثل لجدار قوة $f(t) = 3000t(2 - t)$ نيوتن على سيارة لكل $0 \leq t \leq 2$. جـ - د الدفع. إذا كانت حركة السيارة ساكنة (ص لـ الكتلة $m = 100$ بعد الاصطدام، احسب سرعتها قبل الاصطدام).

41. أثبت أن $f(x) = x + 2x^3$ هي pdf على الفترة $[0, 1]$.

42. أثبت أن $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$ هي pdf على الفترة $[0, \ln 2]$.

43. جـ - د قيمة c بحيث تكون $f(x) = \frac{c}{x^2}$ هي pdf على الفترة $[1, 2]$.

44. جـ - د قيمة c بحيث تكون $f(x) = ce^{-2x}$ هي pdf على الفترة $[0, 4]$.

45. العمر الافتراضي لمصباح له pdf $f(x) = 4e^{-4x}$ (x بالأعوام). جـ - د احتمال استمرار المصباح صالحاً لمدة (a) أصغر من 6 أشهر؛ (b) بين 6 أشهر وعام واحد.

46. عمر الكائن الحي له pdf $f(x) = 9xe^{-3x}$ (x بالأعوام). جـ - د احتمال استمرار الكائن الحي لمدة (a) أصغر من شهرين؛ (b) بين 3 أشهر وعام واحد.

47. جـ - د (a) المتوسط و (b) وسيط متغير عشوائي له pdf $f(x) = x + 2x^3$ على الفترة $[0, 1]$.

48. جـ - د (a) المتوسط و (b) وسيط متغير عشوائي له pdf $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$ على الفترة $[0, \ln 2]$.

1. كما هو مشار إليه في الدرس 6.5، يمكن اشتقاق الصيغ العامة للعديد من الكميات المهمة في حركة المقذوفات. لجسم تم إطلاقه من الأرض بزاوية θ_0 بسرعة ابتدائية v_0 m/s، جـ - د المدى الأفقي R m واستخدم متطابقة حساب المثلثات $\sin(2\theta_0) = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$ لتثبت أن $R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{32}$. استنتج أن القيمة العظمى للمدى يمكن تحقيقه من الزاوية $\theta_0 = \pi/4$ (45°).

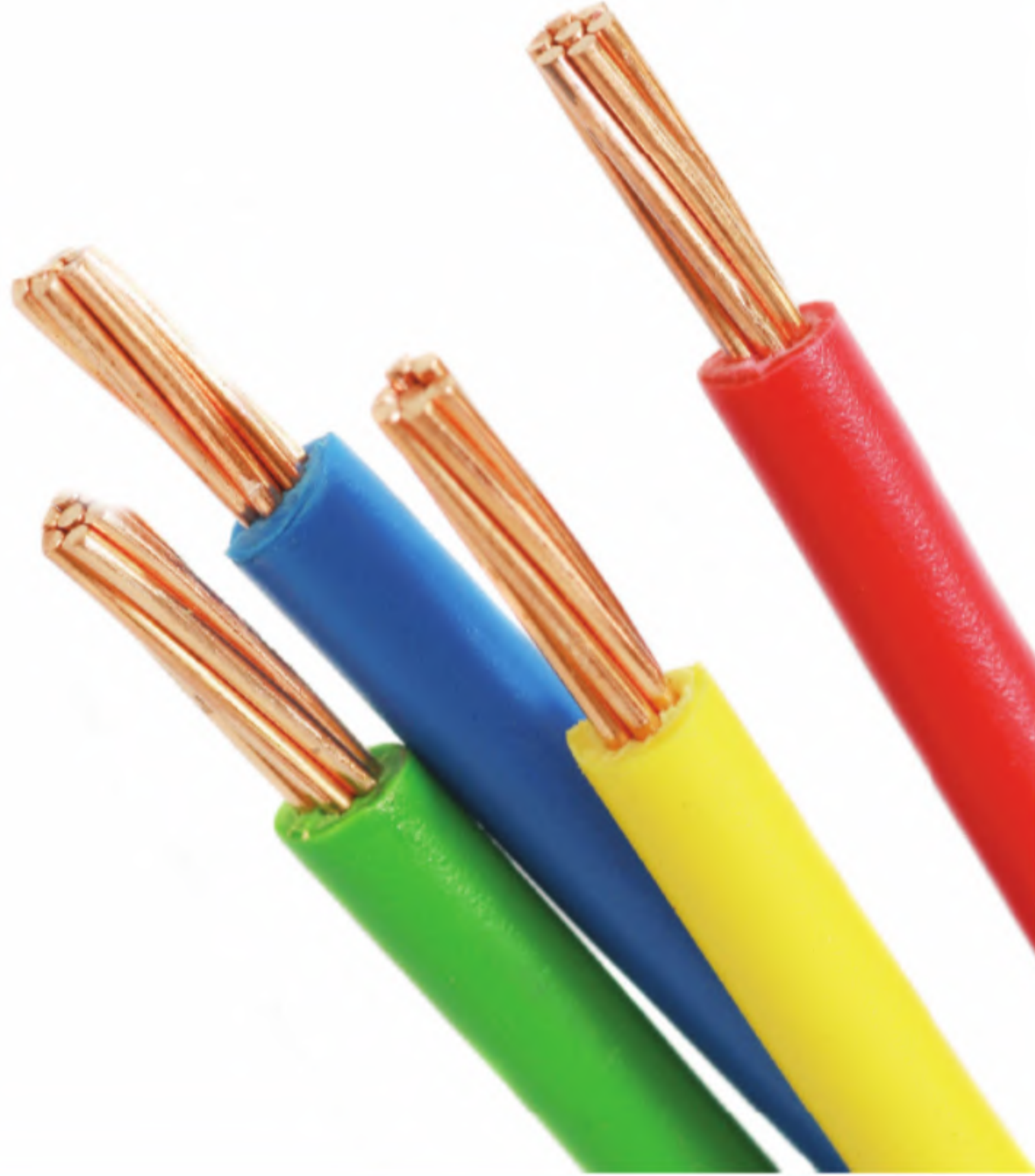
2. لتابعه لتمرين الاستكشافي 1 على فرض أن الأرض تشكل زاوية A مع المركبة الأفقية. إذا $A > 0$ (أي، يتم إطلاق المقذوف لأعلى التل)، فاشرح سبب أن القيمة العظمى للمدى سيتم

الوصول إليها من زاوية أكبر من 45° . إذا $A < 0$ (يتم الإطلاق لأسفل التل)، فاشرح سبب أن القيمة العظمى للمدى سيتم الوصول إليه من زاوية أصغر من 45° . لتحديد قيمة الزاوية المثلى بالضبط، أولاً أثبت أنه يمكن تمثيل الأرض بالمستقيم $y = (\tan A)x$. أثبت أن المقذوف يلامس الأرض

عند الزمن $t = v_0 \frac{\sin \theta_0 - \tan A \cos \theta_0}{16}$. احسب $x(t)$ لهذه

القيمة t واستخدم متطابقة حساب مثلثات لاستبدال الكمية $\sin \theta_0 \cos A - \sin A \cos \theta_0$ بـ $\sin(\theta_0 - A)$. ثم استخدم متطابقة حساب مثلثات أخرى لاستبدال $\cos \theta_0 \sin(\theta_0 - A)$ بـ $\sin A - \sin(2\theta_0 - A)$. في هذه المرحلة، سيكون الحد الوحيد الذي يتضمن θ_0 هو $\sin(2\theta_0 - A)$. لإيجاد القيمة العظمى للمدى، جد القيمة العظمى لهذا الحد بأخذ $\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}A$.

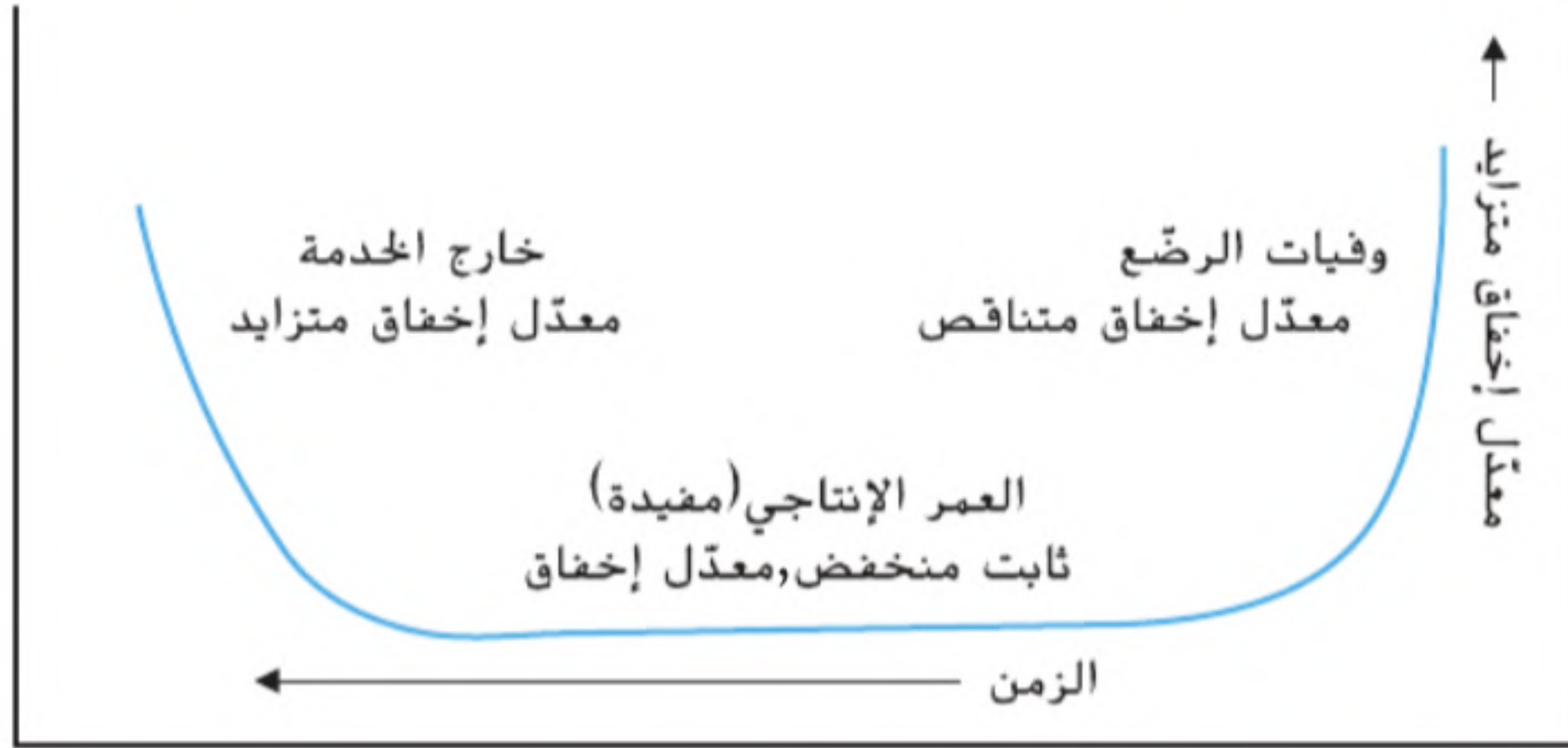
طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى



تجري شركات الإلكترونيات اختبارات على منتجاتها بشكل ثابت للتأكد من الوثوق بها. غالبًا ما يتم استعراض العمر الافتراضي لأحد المكونات الإلكترونية على أنّ لها ثلاث مراحل، كما هو موضح من قبل ما يسمى معدل الإخفاق المبين في الشكل.

يشير هذا المنحنى إلى متوسط معدل الإخفاق لأحد المكونات بوصفها دالة عمرية. في المرحلة الأولى (التي يطلق عليها **وفيات الرضع**)، ينخفض معدل الإخفاق بشكل سريع حيث يحدث إخفاق في المكونات التالفة بسرعة. تدخل المكونات التي تمر بسلام من هذه المرحلة الأولية في مرحلة ثانية مطوّلة (**مرحلة العمر الإنتاجي**) من معدل الإخفاق الثابت. وتظهر المرحلة الثالثة زيادة في معدل الإخفاق حيث تصل المكونات إلى النهاية الفيزيائية من دورة عمرها.

يحظى معدل الإخفاق الثابت لمرحلة العمر الإنتاجي بالعديد من النتائج المثيرة للاهتمام. أولاً، تعد الإخفاقات "بدون ذاكرة"، بمعنى أنّ احتمال أنّ المكوّن يدوم ساعة أخرى، أمراً مستقلاً عن عمر المكوّن. قد يكون المرجح أن يستمر مكوّن عمره 40 ساعة لمدة ساعة أخرى مثل مكوّن عمره 10 ساعات فقط. تتمتع بهذه الخاصية غير العادية المكونات الإلكترونية مثل المصابيح، خلال مرحلة العمر الإنتاجي.



يشير معدل الإخفاق الثابت أيضا إلى أنّ إخفاقات المكوّن تتبع ما يسمى التوزيع الأسّي. (انظر التمرين 73 في تمارين مراجعة في نهاية هذه الوحدة). يتطلب حساب الإحصاءات للتوزيع الأسّي طرائق تكامل أكثر تطورًا من تلك التي نوقشت حتى الآن. على سبيل المثال، يعطى وسط (متوسط) العمر الافتراضي لمكونات إلكترونية معينة بالتكامل $\int_0^{\infty} cxe^{-cx}dx$. لعدد ثابت ما $c > 0$. لإيجاد قيمته، سنحتاج أولاً إلى التوسع في مفهومنا عن التكامل لتضمين التكاملات المعتلة مثل تلك، حيث يكون حد واحد أو اثنان من حدود التكامل لانهائية. نعالج هذا في الدرس 7.6. ثمة تحدّ آخر أيضاً وهو أننا لا نعرف في الحاضر أي دالة أصلية لـ $f(x) = xe^{-cx}$. في الدرس 7.2، نقدّم طريقة فعالة تسمى التكامل بالأجزاء والذي يمكن استخدامه لإيجاد دوال أصلية من مثل هذه الدوال.

تقدّم لنا طرائق التكامل الجديدة التي تم توضيحها في هذه الوحدة مجموعة واسعة من الأدوات المستخدمة في حل مسائل لا حصر لها تحظى باهتمام المهندسين والرياضيين والعلماء.

مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

في هذا الدرس الموجز، نعرض معا جميع صيغ التكامل وطريقة تكامل واحدة (التكامل بالتعويض) الذي قمنا بتطويره سابقاً. نحن نستخدم هذه لتطوير بعض الصيغ العامة الأخرى، بالإضافة إلى حل مسائل التكامل الأكثر تعقيداً. أولاً، نطلع إلى الجدول التالي لصيغ التكامل الأساسية المطورة في الوحدة 4.

$$\begin{array}{ll} \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, & \text{for } r \neq -1 \text{ (قاعدة القوة)} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c, \quad \text{for } x \neq 0 \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \int \cos x dx = \sin x + c \\ \int \sec^2 x dx = \tan x + c & \int \sec x \tan x dx = \sec x + c \\ \int \csc^2 x dx = -\cot x + c & \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c \\ \int e^x dx = e^x + c & \int e^{-x} dx = -e^{-x} + c \\ \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c & \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c \end{array}$$

تذكر أنّ كل واحدة من هذه تتبع قاعدة اشتقاق مناظرة لها. حتى الآن، توسعنا بهذه القائمة قليلاً باستخدام طريقة التعويض، كما في المثال 1.1.

المثال 1.1 تعويض بسيط

جد قيمة $\int \sin(ax) dx$ ، حيث $a \neq 0$

الحل يتمثل الاختيار الأوضح هنا بأن نكن $u = ax$ ، حيث أنّ $du = a dx$ يعطينا ذلك

$$\begin{aligned} \int \sin(ax) dx &= \frac{1}{a} \int \underbrace{\sin(ax)}_{\sin u} \underbrace{a dx}_{du} = \frac{1}{a} \int \sin u du \\ &= -\frac{1}{a} \cos u + c = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c \end{aligned}$$

لا توجد حاجة إلى حفظ القواعد العامة مثل تلك الواردة في المثالين 1.1 و 1.2، على الرغم من أنه غالباً ما يكون مناسباً القيام بذلك. يمكنك إعادة إنتاج القواعد العامة في أي زمن كنت في حاجة إليها باستخدام التعويض.

المثال 1.2 تعميم قاعدة تكامل أساسية

جد قيمة $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ حيث $a \neq 0$.

الحل لاحظ أن ذلك مماثل تقريبًا لـ $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ ويمكننا كتابة

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$$

الآن، لنكن $u = \frac{x}{a}$ ، فيكون $du = \frac{1}{a} dx$ ، وإذاً،

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^2}_{1+u^2}} \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right) dx}_{du} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{a} \tan^{-1} u + c = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + c \end{aligned}$$

لن يحل التعويض جميع ما تواجه من صعوبات في التكامل، كما نرى في المثال 1.3.

المثال 1.3 مكامل يجب إيجاد مفكوكه

جد قيمة $\int (x^2 - 5)^2 dx$.

الحل قد يكون الدافع الأول هو تعويض $u = x^2 - 5$ ، مع ذلك، فشل هذا الأمر، حيث لا يوجد لدينا $du = 2x dx$ في التكامل. (يمكننا فرض الثابت 2 في التكامل، لكن لا يمكننا وضع x هناك). من ناحية أخرى، يمكنك دائماً تفكيك ذات الحدين للحصول على

$$\int (x^2 - 5)^2 dx = \int (x^4 - 10x^2 + 25) dx = \frac{x^5}{5} - 10\frac{x^3}{3} + 25x + c$$

يتمثل المغزى من المثال 1.3 بالتأكد من أنك لم تغفل طرائق أبسط. القاعدة الأكثر عمومية في التكامل هي الاستمرار في المحاولة. في بعض الأحيان، ستحتاج إلى القيام ببعض العمليات الجبرية قبل أن تتمكن من التعرف على شكل المكامل.

المثال 1.4 تكامل حيث يجب علينا إكمال المربع

جد قيمة $\int \frac{1}{\sqrt{-5 + 6x - x^2}} dx$.

الحل قد لا يتبادر الكثير إلى الذهن هنا. لا يعمل التعويض إما للمقام بأكمله أو الكمية تحت الجذر التربيعي. (لم لا؟) إذاً، ما الذي تبقى للقيام به؟ تذكر أنه ثمة أساساً شيئين فقط يمكنك إجراؤهما على كثير الحدود التربيعي: إما تحليله إلى العوامل أو إكمال المربع. هنا، القيام بما سبق يلقي بعض الضوء على التكامل. لدينا

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5 + 6x - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{-5 - (x^2 - 6x + 9) + 9}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x - 3)^2}} dx$$

لاحظ كيف يبدو ذلك مثل $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$. إذا قمنا بإخراج الـ 4 الموجودة في الجذر التربيعي كعامل مشترك، نحصل على

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}} \frac{1}{2} dx \\ \text{بأخذ } u &= \frac{x-3}{2}, \text{ لدينا } du = \frac{1}{2} dx \text{ ولذلك،} \\ \int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}}_{\sqrt{1-u^2}}} \underbrace{\frac{1}{2} dx}_{du} = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= \sin^{-1} u + c = \sin^{-1} \left(\frac{x-3}{2} \right) + c \end{aligned}$$

المثال 1.5 يوضح قيمة المتغيرة.

المثال 1.5 تكامل يتطلب بعض التخيل

جد قيمة $\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10} dx$

الحل كما هو الحال مع معظم التكاملات، لا يمكنك إيجاد قيمة ذلك كما هو موضح. ومع ذلك، فإنّ البسط هو مشتقة قريبة جدًا من المقام (ولكن ليس تمامًا). يدرك أنه يمكنك إكمال المربع في المقام، للحصول على

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10} dx = \int \frac{4x+1}{2(x^2+2x+1)-2+10} dx = \int \frac{4x+1}{2(x+1)^2+8} dx$$

الآن، يبدو المقام بالكاد مثل المقام في $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$. بإخراج 8 كعامل مشترك من المقام، نحصل على

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10} dx = \int \frac{4x+1}{2(x+1)^2+8} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{4x+1}{\frac{1}{4}(x+1)^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{4x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx$$

الآن، بأخذ $u = \frac{x+1}{2}$ ، لدينا $du = \frac{1}{2} dx$ و $x = 2u - 1$ ولذلك،

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10} dx &= \frac{1}{8} \int \frac{4x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{\overbrace{4x+1}^{4(2u-1)+1}}{\underbrace{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}_{u^2+1}} \underbrace{\frac{1}{2} dx}_{du} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{4(2u-1)+1}{u^2+1} du = \frac{1}{4} \int \frac{8u-3}{u^2+1} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{4} \int \frac{2u}{u^2+1} du - \frac{3}{4} \int \frac{1}{u^2+1} du \\
&= \ln(u^2+1) - \frac{3}{4} \tan^{-1} u + c \\
&= \ln \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right] - \frac{3}{4} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{2} \right) + c
\end{aligned}$$

كان المثال 1.5 مرهقًا، ولكن واضح إلى حد معقول. تتمثل المشكلة في التكامل بالتعريف على ماهية الأجزاء الموجودة في تكامل معين ومعرفة طريقة إعادة كتابة التكامل في صيغة أكثر انتشارًا.

تمارين 7.1

تمارين كتابية

1. في المثال 1.2، اشرح كيف ينبغي عليك معرفة كتابة المقام في صورة $a^2 \left[1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]$. هل ستبقى هذه خطوة أولى جيدة إذا كان البسط x بدلا من 1؟ ماذا ستفعل إذا كان المقام $\sqrt{a^2 - x^2}$ ؟
2. في كلا المثالين 1.4 و 1.5، أكملنا المربع ووجدنا دوال أصلية تتضمن $\tan^{-1} x$ ، $\sin^{-1} x$ و $\ln(x^2 + 1)$. صف بإيجاز كيف أنّ وجود x في البسط أو جذر تربيعي في المقام يؤثر على كون أي من هذه الدوال سيكون في الدالة الأصلية.

في التمارين 1-40، جـد قيمة التكامل.

23. $\int_0^\pi \cos x e^{\sin x} dx$
24. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x e^{\tan x} dx$
25. $\int_{-\pi/4}^0 \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$
26. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 t} dt$
27. $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$
28. $\int \frac{x^5}{1+x^6} dx$
29. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$
30. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$
31. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$
32. $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$
33. $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$
34. $\int \frac{1}{\sqrt{x+x}} dx$
35. $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln x^2}{x} dx$
36. $\int_1^3 e^{2 \ln x} dx$
37. $\int_3^4 x \sqrt{x-3} dx$
38. $\int_0^1 x(x-3)^2 dx$
39. $\int_1^4 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx$
40. $\int_{-2}^0 x e^{-x^2} dx$

في التمارين 41-46، تم إعطاؤك زوجا من التكاملات. جـد قيمة التكامل الذي يمكن إجراؤه باستخدام الطرائق التي تمت تغطيتها حتى الآن (لا يمكن استخدام الأخرى).

41. $\int \frac{5}{3+x^2} dx$ and $\int \frac{5}{3+x^3} dx$
42. $\int \sin 3x dx$ and $\int \sin^3 x dx$
43. $\int \ln x dx$ and $\int \frac{\ln x}{2x} dx$
44. $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$ and $\int \frac{x^4}{1+x^8} dx$
45. $\int e^{-x^2} dx$ and $\int x e^{-x^2} dx$

1. $\int e^{ax} dx, a \neq 0$
2. $\int \cos(ax) dx, a \neq 0$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, a > 0$
4. $\int \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - a^2}} dx, a > 0$
5. $\int \sin 6t dt$
6. $\int \sec 2t \tan 2t dt$
7. $\int (x^2 + 4)^2 dx$
8. $\int x(x^2 + 4)^2 dx$
9. $\int \frac{3}{16 + x^2} dx$
10. $\int \frac{2}{4 + 4x^2} dx$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$
12. $\int \frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$
13. $\int \frac{4}{5+2x+x^2} dx$
14. $\int \frac{4x+4}{5+2x+x^2} dx$
15. $\int \frac{4t}{5+2t+t^2} dt$
16. $\int \frac{t+1}{t^2+2t+4} dt$
17. $\int e^{3-2x} dx$
18. $\int \frac{3}{e^{6x}} dx$
19. $\int \frac{4}{x^{1/3}(1+x^{2/3})} dx$
20. $\int \frac{2}{x^{1/4} + x} dx$
21. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
22. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2} dx$

1. جـد $\int x e^{-x^2} dx$ ، $\int x^3 e^{-x^2} dx$ و $\int x^5 e^{-x^2} dx$. وعموماً أعط صيغة $\int x^n e^{-x^2} dx$ لأي عدد صحيح موجب فردي n .

2. في العديد من الحالات، يجب التوسع مع التكامل كما قمنا بتعريفه إلى تكامل ريمان-شتيلتيز الذي تم اعتباره في هذا التمرين. للدالتين f و g ، لتكن P هي تجزئة عادية لـ $[a, b]$ بنقاط القيم $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ وعرف المجاميع $R(f, g, P) = \sum_{i=1}^n f(c_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$ التكامل $\int_a^b f(x) dg(x)$ يساوي نهاية المجموع $R(f, g, P)$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، إذا كانت النهاية موجودة وتساوي العدد نفسه لكل قيم النقاط c_i . (a) أثبت أنه إذا كان g' موجودة، إذا $\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx$.

(b) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq d \\ 2 & d < x \leq b \end{cases}$ لعدد ثابت d حيث $a < d < b$.

جـد قيمة $\int_a^b f(x) dg(x)$. (c) جـد دالة $g(x)$ بحيث يكون $\int_0^1 \frac{1}{x} dg(x)$ موجوداً.

46. $\int \sec x dx$ and $\int \sec^2 x dx$

47. جـد $\int_0^2 f(x) dx$ حيث $f(x) = \begin{cases} x/(x^2+1) & x \leq 1 \\ x^2/(x^2+1) & x > 1 \end{cases}$

48. أعد العمل على المثال 1.5 من خلال إعادة كتابة التكامل في صورة $\int \frac{3}{2x^2+4x+10} dx - \int \frac{4x+4}{2x^2+4x+10} dx$ وإكمال المربع

49. جـد $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ ، $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ ، $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ و $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$. وعموماً أعط صيغة $\int \frac{x^n}{1+x^2} dx$ لأي عدد صحيح موجب n تماماً بقدر ما تستطيع.

50. جـد $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ ، $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$ و $\int \frac{x^5}{1+x^4} dx$. وعموماً أعط صيغة $\int \frac{x^n}{1+x^4} dx$ لأي عدد صحيح موجب فردي n ، تماماً بقدر ما تستطيع.

التكامل بالأجزاء

إلى الآن، ستكون قد أدركت أنّ هناك العديد من التكاملات التي لا يمكن إيجاد قيمها باستخدام الصيغ الأساسية أو التكامل بالتعويض. فعلى سبيل المثال،

$$\int x \sin x \, dx$$

لا يمكن إيجاد قيمتها بما تعرفه حتى الآن.

وقد لاحظنا أنّ كل قاعدة اشتقاق تعطي قاعدة تكامل مناظرة لها. إذاً، لأجل قاعدة الضرب:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

يعطينا التكامل لطرفي هذه المعادلة

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \, dx = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x) \, dx$$

بتجاهل ثابت التكامل، يكون التكامل على الطرف الأيسر من المعادلة ببساطة $f(x)g(x)$. يقدّم إذاً حل التكامل الثاني على الطرف الأيمن من المعادلة

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

تسمى هذه القاعدة **التكامل بالأجزاء**. باختصار، تسمح لنا هذه القاعدة الجديدة باستبدال تكامل معطى بآخر أسهل. سنترك للأمثلة مهمة إقناعك بفاعلية هذه الطريقة. أولاً، من المناسب دائماً كتابة

الملاحظات التاريخية



بروك تايلور (1685–1731)

عالم رياضيات إنجليزي يرجع إليه الفضل في ابتكار التكامل بالأجزاء. قدّم تايلور مساهمات هامة في الاحتمال ونظرية المغناطيسية واستخدام خطوط التلاشي في المنظور الخطي. ومع ذلك، فقد اشتهر بنظرية تايلور (انظر القسم 8.7). حيث قام بتعميم نتائج نيوتن وهالي وبيرنولي وغيرهم. إنّ المأساة في حياته الشخصية (كلتا زوجتيه توفيتا أثناء الولادة) واعتلال صحته عملت على الحد من الناتج الرياضي لعالم الرياضيات الرائع هذا.

هذا باستخدام المفهوم $u = f(x)$ و $v = g(x)$. إذًا.

$$dv = g'(x) dx \quad \text{و} \quad du = f'(x) dx$$

حيث تصبح خوارزمية التكامل بالأجزاء.

التكامل بالأجزاء

$$(2.1) \quad \int u dv = uv - \int v du$$

لتطبيق التكامل بالأجزاء، تحتاج إلى القيام بخيار حكيم لـ u و dv بحيث يكون التكامل على الطرف الأيمن من (2.1) هو تكامل تستطيع إيجاد قيمته.

المثال 2.1 التكامل بالأجزاء

جد قيمة $\int x \sin x dx$.

الحل أولاً، لاحظ أنّ هذا ليس واحدًا من تكاملاتنا الأساسية ولا يوجد تعويض واضح سيفيد. لاستخدام التكامل بالأجزاء، ستحتاج إلى اختيار u (شيء للإشتقاق) و dv (شيء للتكامل). إذا أخذنا

$$dv = \sin x dx \quad \text{و} \quad u = x$$

إذًا $du = dx$ و تكامل dv نحصل على

$$v = \int \sin x dx = -\cos x + k$$

عند إجراء التكامل بالأجزاء، نقوم بإسقاط ثابت التكامل هذا. (فكر في سبب منطقية القيام بذلك). أيضًا، عادةً نكتب هذه المعلومات باعتبارها كتلة:

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x dx}_{dv} = \int u dv = uv - \int v du \quad \text{يعطينا ذلك}$$

$$= -x \cos x - \int (-\cos x) dx$$

$$(2.2) \quad = -x \cos x + \sin x + c$$

إنها مسألة بسيطة لإشتقاق التعبير على الطرف الأيمن من (2.2) والتحقق مباشرة من أنك قد وجدت في الواقع دالة أصلية لـ $x \sin x$. ■

يتوجب عليك سريعًا إدراك أنّ اختيار u و dv مهم. لاحظ النتيجة إذا قمنا بتبديل اختيار u و dv كما في المثال 2.2.

المثال 2.2 اختيار خطأ لـ u و dv

لنأخذ $\int x \sin x dx$ كما في المثال 2.1، لكن هذه المرة اعكس اختيار u و dv .

الحل هنا، لتكن

$$\begin{array}{ll} u = \sin x & dv = x dx \\ du = \cos x dx & v = \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

$$\int \underbrace{(\sin x)}_u \underbrace{x dx}_{dv} = uv - \int v du = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx \quad \text{يعطينا ذلك}$$

ملحوظة 2.1

عند استخدام التكامل بالأجزاء، ضع في اعتبارك أنك تقوم بتقطيع المكامل إلى جزأين. إن واحدة من هذه الأجزاء، المناظرة مع u ، تفاضلها والآخرى، المناظرة dv ، سيتم تكاملها. بما أنه يمكنك اشتقاق كل دالة تمر عليها، ينبغي عليك اختيار dv التي تعرف دالتها الأصلية واختار الاثنين اللتين سينتج عنهما تكامل أسهل. إن أمكن، اختيار $u = x$ ينتج عنه $du = dx$ البسيط. ستتعلم أفضل ما يمكن القيام به من خلال العمل على الكثير من المسائل. حتى وإن كنت لا تعلم كيفية انتهاء المسألة، حاول القيام بأي شيء!

الذي لاحظ أن التكامل الأخير لا نعرف كيف نقوم بحسابه بطريقة أفضل من الطريقة الأصلية. في الحقيقة، لقد جعلنا الموقف أسوأ حيث أن قوة x في التكامل الجديد أعلى منها في التكامل الأصلي. ■

المثال 2.3 مكامل مع حد إفرادي

جد قيمة $\int \ln x \, dx$

الحل قد يبدو هذا بسيطاً، ولكنه ليس واحداً من التكاملات الأساسية، وليست هناك تعويضات واضحة من شأنها تبسيطه. يترك لنا هذا التكامل بالأجزاء. تذكر أنه ينبغي عليك اختيار u (لإيجاد تفاضلها) و dv (ليتم تكاملها). من الواضح أنه لا يمكنك الاختيار $dv = \ln x \, dx$ حيث أن المسألة هنا الهدف منها إيجاد طريقة لتكامل هذا الحد. لذلك، حاول

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= x \end{aligned}$$

يعطينا التكامل بالأجزاء الآن

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} &= uv - \int v \, du = x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x} \right) dx \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c \end{aligned}$$

في كثير من الأحيان، ينتج عن التكامل بالأجزاء تكامل لا يمكننا إيجاد قيمته مباشرة، ولكن بدلاً من ذلك، نستطيع إيجاد تكامل بتكرار التكامل بالأجزاء مرة واحدة أو أكثر.

المثال 2.4 التكامل بتكرار بالأجزاء

جد قيمة $\int x^2 \sin x \, dx$

الحل بالتأكيد، لا يمكنك إيجاد قيمة هذا كما هو عليه ولا يوجد تبسيط أو تعويض واضح من شأنه أن يفيد. نختار

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= \sin x \, dx \\ du &= 2x \, dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

بهذا الاختيار، يقدم التكامل بالأجزاء

$$\int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$

بالطبع، لا يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل الأخير كما هو عليه، ولكن يمكننا القيام بذلك باستخدام التكامل بالأجزاء. نختار الآن

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \cos x \, dx \\ du &= dx & v &= \sin x \end{aligned}$$

بتطبيق التكامل بالأجزاء على التكامل الأخير، لدينا الآن

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 \int \underbrace{x}_u \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} \\ &= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \end{aligned}$$

ملحوظة 2.2

في التكامل بالأجزاء الثاني في المثال 2.4، إذا قمت باختيار $u = \cos x$ و $dv = x \, dx$ ، إذا سترك لك التكامل بالأجزاء فقط الاستنتاج الأقل من مذهب حيث يساوي التكامل الذي بدأت به نفسه. (قم بتجربة ذلك كتمرين).

استنادًا إلى عملنا في المثال 2.4، حاول معرفة عدد التكاملات بالأجزاء المطلوبة لإيجاد قيمة $\int x^n \sin x \, dx$ لكل عدد صحيح موجب n . (سيكون هناك المزيد من أجل ذلك، بما في ذلك اختصار، في التمارين.)

يعيدك تكرار التكامل بالأجزاء في بعض الأحيان إلى التكامل الذي بدأت به. يمكن أن يكون ذلك خبرًا سيئًا (انظر الملاحظة 2.2)، أو يمكن أن يقدم لنا طريقة ذكية لإيجاد قيمة التكامل، كما في المثال 2.5.

المثال 2.5 تكرار التكامل بالأجزاء المتطور

جد قيمة $\int e^{2x} \sin x \, dx$.

الحل لا تعمل أي من الطرائق الأولى على هذا التكامل. للتكامل بالأجزاء، يوجد خياران قابلان للتطبيق لـ u و dv . نأخذ:

$$u = e^{2x} \quad dv = \sin x \, dx$$

$$du = 2e^{2x} \, dx \quad v = -\cos x$$

(الاختيار المقابل مناسب أيضًا. قم بتجربة ذلك كتمرين). يعطي التكامل بالأجزاء

$$\int \underbrace{e^{2x}}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx$$

يتطلب التكامل المتبقي مرة أخرى تكاملًا بالأجزاء. نختار

$$u = e^{2x} \quad dv = \cos x \, dx$$

$$du = 2e^{2x} \, dx \quad v = \sin x$$

فهي تتبع الآن

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin x \, dx &= -e^{2x} \cos x + 2 \int \underbrace{e^{2x}}_u \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 \left(e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx \right) \\ (2.3) \quad &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

لاحظ أن السطر الأخير يتضمن التكامل الذي بدأنا به. بالتعامل مع التكامل $\int e^{2x} \sin x \, dx$ باعتباره القيمة المجهولة، يمكننا إضافة $4 \int e^{2x} \sin x \, dx$ إلى طرفي المعادلة (2.3)، مما يعطي

$$5 \int e^{2x} \sin x \, dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + K$$

حيث أضفنا ثابت التكامل K إلى الطرف الأيمن. بقسمة كلا الطرفين على 5 إذاً نحصل على

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = -\frac{1}{5} e^{2x} \cos x + \frac{2}{5} e^{2x} \sin x + c$$

حيث استبدلنا ثابت التكامل العشوائي $\frac{K}{5}$ بـ c .

لاحظ أنه لأي عدد صحيح موجب n ، سيتطلب التكامل $\int x^n e^x \, dx$ تكاملًا بالأجزاء. في هذه المرحلة، ينبغي ألا يكون مفاجئًا إذا أخذنا

$$u = x^n \quad dv = e^x \, dx$$

$$du = nx^{n-1} \, dx \quad v = e^x$$

ملحوظة 2.3

للتكاملات مثل $\int e^{2x} \sin x \, dx$ (أو تكاملات ذات صلة مثل $\int e^{-3x} \cos 2x \, dx$)، سينتج عن تكرار التكامل بالأجزاء كما في المثال 2.5 دالة أصلية. الاختيار الأول لـ u و dv يرجع لك (أي الاختيارين سيكون مناسبًا) لكن اختيارك لـ u و dv في التكامل بالأجزاء الثاني يجب أن يكون متسقًا مع اختيارك الأول. على سبيل المثال، في المثال 2.5، اختيارنا الأولي لـ $u = e^{2x}$ يلزمنا باستخدام $u = e^{2x}$ للتكامل بالأجزاء الثاني أيضًا. لمعرفة السبب، أعد العمل على التكامل الثاني حيث تأخذ $u = \cos x$ ولاحظ ما سيحدث!

إنّ تطبيق تكامل بالأجزاء يعطينا

$$(2.4) \quad \int \underbrace{x^n}_u \underbrace{e^x dx}_{dv} = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

لاحظ أنه إذا $n - 1 > 0$ ، فسنحتاج إلى إجراء تكامل بالأجزاء مرة أخرى. في الواقع، سنحتاج إلى إجراء إجمالي n تكاملات بالأجزاء لإكمال العملية. يتمثل الحل البديل بتطبيق الصيغة (2.4) (التي يطلق عليها صيغة الاختزال) بشكل متكرر لإيجاد قيمة تكامل معين. نوضح ذلك في المثال 2.6.

المثال 2.6 استخدام صيغة اختزال

جد قيمة التكامل $\int x^4 e^x dx$.

الحل لإجراء أربعة تكاملات بالأجزاء هي مضیعة للوقت. ومع ذلك، يمكننا استخدام صيغة الاختزال (2.4) بشكل متكرر لإيجاد قيمة التكامل بسهولة نسبية. على النحو التالي. من (2.4)، حيث $n = 4$ ، نحصل على

$$\int x^4 e^x dx = x^4 e^x - 4 \int x^{4-1} e^x dx = x^4 e^x - 4 \int x^3 e^x dx$$

بتطبيق (2.4) مرة أخرى، حيث $n = 3$ ، يعطينا

$$\int x^4 e^x dx = x^4 e^x - 4 \left(x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx \right)$$

الآن، يجب عليك ملاحظة أنه يمكننا الحل بتطبيق صيغة الاختزال مرتين أخريين. وبذلك نحصل على

$$\int x^4 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24e^x + c$$

حيث نترك تفاصيل الحسابات المتبقية لك. ■

لاحظ أنه لإيجاد قيمة التكامل المحدود، فمن الممكن دائماً تطبيق التكامل بالأجزاء على التكامل المناظر غير المحدود ثم ببساطة إيجاد قيمة الدالة الأصلية من الناتج بين حدود التكامل. مع ذلك، كلما كان الأمر ممكناً (أي، عندما يتضمن التكامل بشكل كبير)، يجب عليك تطبيق التكامل بالأجزاء مباشرة على التكامل المحدود. لاحظ أنّ خوارزمية التكامل بالأجزاء للتكاملات المحدودة هي ببساطة

$$\int_{x=a}^{x=b} u dv = uv \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v du$$

التكامل بالأجزاء
لتكامل محدود

حيث كتبنا حدود التكامل، علينا تذكيرك بأنّ هذه تشير إلى قيم x . (تذكر أننا قمنا باشتقاق صيغة التكامل بالأجزاء من خلال أخذ u و v ليكون كلاهما دالتين لـ x).

المثال 2.7 التكامل بالأجزاء لتكامل محدود

جد قيمة $\int_1^2 x^3 \ln x dx$.

الحل مرة أخرى، بما أنّ استخدام الطرائق الأولى هو بدون فائدة، نجرب التكامل بالأجزاء. بما أننا لا نعلم كيف نقوم بتكامل $\ln x$ (باستثناء التكامل بالأجزاء)، نختار:

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x^3 dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{1}{4} x^4 \end{aligned}$$

ومنه، لدينا

$$\begin{aligned}\int_1^2 \underbrace{\ln x}_u \underbrace{x^3 dx}_{dv} &= uv \Big|_1^2 - \int_1^2 v du = \frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{4} \int_1^2 x^4 \left(\frac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{1}{4} (2^4 \ln 2 - 1^4 \ln 1) - \frac{1}{4} \int_1^2 x^3 dx \\ &= \frac{16 \ln 2}{4} - 0 - \frac{1}{16} x^4 \Big|_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{1}{16} (2^4 - 1^4) \\ &= 4 \ln 2 - \frac{1}{16} (16 - 1) = 4 \ln 2 - \frac{15}{16}\end{aligned}$$

يعد التكامل بالأجزاء أقوى أداة في مجموعة التكامل الخاصة بنا. من أجل إتقان استخدامه، ستحتاج إلى العمل على العديد من المسائل. نحن نقدم تشكيلة واسعة من هذه المسائل في مجموعة التمارين التالية.

تمارين 7.2

تمارين كتابية

1. ناقش أفضل استراتيجية خاصة بك لتحديد أي جزء من المكامل يجب أن يكون u وأي جزء يجب أن يكون dv .
2. نحصل على التكامل بالأجزاء من قاعدة ناتج الضرب للمشتقات. قم باشتقاق طريقة تكامل يتم الحصول عليه من قاعدة ناتج القسمة. ناقش بإيجاز سبب عدم فائدة القاعدة.

في التمارين 1-28، جـد قيمة التكاملات.

1. $\int x \cos x dx$
2. $\int x \sin 4x dx$
3. $\int x e^{2x} dx$
4. $\int x \ln x dx$
5. $\int x^2 \ln x dx$
6. $\int \frac{\ln x}{x} dx$
7. $\int x^2 e^{-3x} dx$
8. $\int x^2 e^{x^3} dx$
9. $\int e^x \sin 4x dx$
10. $\int e^{2x} \cos x dx$
11. $\int \cos x \cos 2x dx$
12. $\int \sin x \sin 2x dx$
13. $\int x \sec^2 x dx$
14. $\int (\ln x)^2 dx$
15. $\int x^3 e^{x^2} dx$
16. $\int \frac{x^3}{(4+x^2)^{3/2}} dx$
17. $\int \cos x \ln(\sin x) dx$
18. $\int x \sin x^2 dx$
19. $\int_0^1 x \sin 2x dx$
20. $\int_0^\pi 2x \cos x dx$
21. $\int_0^1 x^2 \cos \pi x dx$
22. $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$

29. يستخدم عدة صيغ للتكامل (يطلق عليها اسم صيغ الاختزال) لجعل عملية إجراء عدة تكاملات بالأجزاء آلية. أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب n

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

(استخدم التكامل بالأجزاء مع $u = \cos^{n-1} x$ و $dv = \cos x dx$.)

30. استخدم التكامل بالأجزاء لتثبت أنه لأي عدد صحيح موجب n

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

في التمارين 31-38، جـد قيمة التكامل باستخدام صيغ الاختزال من التمارين 29 و 30 و (2.4).

31. $\int x^3 e^x dx$
32. $\int \cos^5 x dx$
33. $\int \cos^3 x dx$
34. $\int \sin^4 x dx$
35. $\int_0^1 x^4 e^x dx$
36. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$
37. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$
38. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$

39. وفقاً للتمارين 38-36 والتكاملات المشابهة، خمن صيغة $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$ لـ m فردية ولـ m زوجية. (ملحوظة: ستحتاج إلى صيغ عديدة لـ m)

40. خمن صيغة $\int_0^{\pi/2} \cos^m x \, dx$.

في التمارين 41-50، جـد قيمة التكامل باستخدام التكامل بالأجزاء والتعويض. (كما أوصينا في النص، "قم بتجربة شيء ما!")

41. $\int \cos^{-1} x \, dx$ 42. $\int \tan^{-1} x \, dx$
43. $\int \sin \sqrt{x} \, dx$ 44. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$
45. $\int \sin(\ln x) \, dx$ 46. $\int x \ln(4 + x^2) \, dx$
47. $\int e^{6x} \sin(e^{2x}) \, dx$ 48. $\int \cos \sqrt[3]{x} \, dx$
49. $\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} \, dx$ 50. $\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$

51. كم مرّة سيكون هناك حاجة إلى إجراء تكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة $\int x^n \sin x \, dx$ (حيث n هي عدد صحيح موجب)؟

52. كم عدد المرات التي ستكون هناك حاجة إلى إجراء تكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة $\int x^n \ln x \, dx$ (حيث n هي عدد صحيح موجب)؟

في التمارين 53 و 54، اذكر اسم الطريقة من تحديد ما إذا كان يمكن استخدام التعويض أو التكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة التكامل.

53. (a) $\int x \sin x^2 \, dx$ (b) $\int x^2 \sin x \, dx$
(c) $\int x \ln x \, dx$ (d) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$
54. (a) $\int x^3 e^{4x} \, dx$ (b) $\int x^3 e^{x^4} \, dx$
(c) $\int x^{-2} e^{4/x} \, dx$ (d) $\int x^2 e^{-4x} \, dx$

55. يروي فيلم *Stand and Deliver* قصة معلم الرياضيات جايبي إسكالانتي، الذي طور برنامج بارز للمستوى المتقدم من حساب التفاضل والتكامل في داخل مدينة لوس أنجلوس. في أحد المشاهد، يوضح إسكالانتي لطالب كيفية إيجاد قيمة التكامل $\int x^2 \sin x \, dx$ ويقوم بتكوين مخطط كالتالي:

	$\sin x$	
x^2	$-\cos x$	+
$2x$	$-\sin x$	-
2	$\cos x$	+

عند ضرب كل صف بكامله، تكون الدالة الأصلية $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$. اشرح كيفية الحصول على نتائج كل عمود وسبب نجاح الطريقة في هذه المسألة.

في التمارين 56-61، استخدم الطريقة الموجودة بالتمرين 55 لإيجاد قيمة التكامل.

56. $\int x^4 \sin x \, dx$ 57. $\int x^4 \cos x \, dx$

58. $\int x^4 e^x \, dx$ 59. $\int x^4 e^{2x} \, dx$
60. $\int x^5 \cos 2x \, dx$ 61. $\int x^3 e^{-3x} \, dx$

62. يجب أن تدرك أنّ الطريقة الموجودة في التمرين 55 لا تنجح دائماً، خاصة إذا كان لكل من عمودي المشتقة والدالة الأصلية قوّة x . وضح أنّ الطريقة لا تنجح على $\int x^2 \ln x \, dx$.

63. أثبت أنّ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = 0$ و $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) \, dx = 0$ للأعداد الصحيحة الموجبة $m \neq n$.

64. أثبت أنّ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) \, dx = 0$ للأعداد الصحيحة الموجبة m و n و $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) \, dx = \pi$ لأي عدد صحيح موجب n .

65. جـد جميع الأخطاء في محاولة الإثبات (غير الصحيحة) التالية $-1 = 0$. ابدأ بـ $\int e^x e^{-x} \, dx$ ثم طبق التكامل بالأجزاء مع $u = e^x$ و $dv = e^{-x} \, dx$. يعطى هذا $\int e^x e^{-x} \, dx = -1 + \int e^x e^{-x} \, dx$. ثم اقسم على $\int e^x e^{-x} \, dx$ للحصول على $-1 = 0$.

66. جـد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x\sqrt{\sin x}$ و $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$) حول المحور x .

67. جـد قيمة $\int e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx$ باستخدام التكامل بالأجزاء على $\int e^x \ln x \, dx$.

68. عمم الطريقة المستخدمة في التمرين 67 على أي تكامل من الصيغة $\int e^x [f(x) + f'(x)] \, dx$. أثبت نتيجتك بدون استخدام التكامل بالأجزاء.

69. على فرض أنّ f و g هي دوال تحقق $f(0) = g(0) = 0$. $f(1) = g(1) = 0$ ومشتقات من الرتبة الثانية متصلة f'' و g'' . استخدم التكامل بالأجزاء مرتين لتوضيح أنّ

$$\int_0^1 f''(x)g(x) \, dx = \int_0^1 f(x)g''(x) \, dx$$

70. على فرض أنّ f هي دالة لها مشتقة متصلة من الرتبة الثانية. أثبت أنّ $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(x)(b-x) \, dx$. استخدم هذه النتيجة لتثبت أنّ $|\int_a^b (b-x) \sin x \, dx| = |\sin b - b|$ واستنتج أنّ الخطأ في التقريب $\sin x \approx x$ هو $\frac{1}{2}x^2$ على أقصى تقدير.

تمارين استكشافية

1. يمكن استخدام التكامل بالأجزاء لحساب معاملات دالة مهمة يطلق عليها اسم متسلسلة فورييه. هنا، ستكتشف ما وراء بعض من هذه الجلبة. ابدأ بحساب $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$ لعدد صحيح موجب غير محدد n . اكتب القيم المحددة لـ a_1, a_2, a_3 و a_4 ثم كوّن الدالة

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x$$

قارن التمثيل البياني لـ $y = x$ و $y = f(x)$ على الفترة $[-\pi, \pi]$. من كتابة a_1 من خلال a_4 ، ينبغي أن تلاحظ نمطا جيدا. استخدمه لتكوّن الدالة.

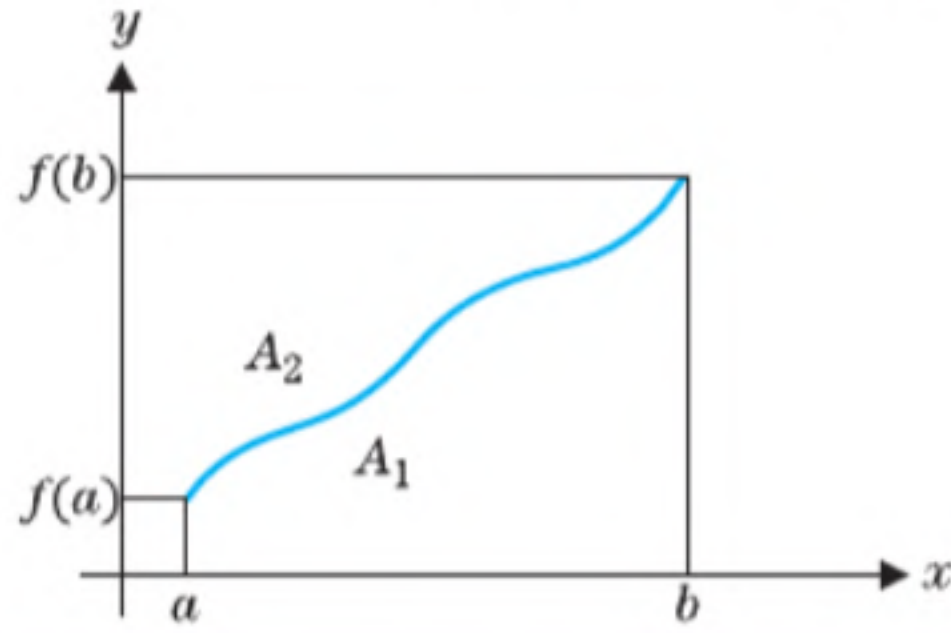
$$g(x) = f(x) + a_5 \sin 5x + a_6 \sin 6x + a_7 \sin 7x + a_8 \sin 8x$$

قارن التمثيل البياني لـ $y = x$ و $y = g(x)$ على الفترة $[-\pi, \pi]$. هل من المدهش أنه يمكنك جمع دوال sine مع بعضها البعض والحصول على ما يشابه خط مستقيم؟ يتضح أنه يمكن استخدام متسلسلة فورييه لإيجاد تقريبين cosine و sine لأي دالة متصلة على فترة مغلقة.

2. فرضا أن f هي دالة متزايدة متصلة على $[a, b]$ مع $0 \leq a < b$ و $f(x) \geq 0$. لتكن A_1 هي المساحة تحت $y = f(x)$ من $x = a$ إلى

$x = b$ ولتكن A_2 هي المساحة على يسار $y = f(x)$ من $f(a)$ إلى $f(b)$. أثبت أن $A_1 + A_2 = bf(b) - af(a)$

و $\int_a^b f(x) dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy$. استخدم هذه النتيجة لإيجاد قيمة $\int_0^{\pi/4} \tan^{-1} x dx$.



طرائق تكامل الدوال المثلثية

تكاملات تتضمن قوى الدوال المثلثية

غالبًا ما يتضمن إيجاد قيمة تكامل يحتوي مكامله على قوى دالة مثلثية واحدة أو أكثر إجراء تعويض ذكي. تعدّ هذه التكاملات شائعةً بشكل كافٍ لتقديمها هنا كمجموعة.

أولاً نضع في الاعتبار التكاملات بالصيغة

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

حيث يكون m و n عددين صحيحين موجبين.

الحالة 1: m أو n هي عدد صحيح فردي موجب

إذا كان m عددًا فرديًا، عزل أولاً واحد من عوامل $\sin x$. (ستحتاج ذلك من أجل du). ثم استبدل أي من عوامل $\sin^2 x$ باستخدام $1 - \cos^2 x$ وقم بإجراء التعويض $u = \cos x$. وبالمثل، إذا كان n عددًا فرديًا، قم أولاً بعزل واحد من عوامل $\cos x$. (ستحتاج ذلك من أجل du). ثم استبدل أي من عوامل $\cos^2 x$ باستخدام $1 - \sin^2 x$ وقم بإجراء التعويض $u = \sin x$.

نوضح هذا للحالة التي يكون فيها m عدد فردي في المثال 3.1.

المثال 3.1 تعويض نوعي

جد قيمة $\int \cos^4 x \sin x dx$.

الحل بما أنه لا يمكنك إيجاد قيمة هذا التكامل كما هو، يجب إجراء تعويض. (إرشاد: ابحث عن حدود تكون مشتقات لحدود أخرى). هنا، لنأخذ $u = \cos x$. فتكون $du = -\sin x dx$. يعطينا

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin x dx &= - \int \underbrace{\cos^4 x}_{u^4} \underbrace{(-\sin x) dx}_{du} = - \int u^4 du \\ &= -\frac{u^5}{5} + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + c \quad \text{بما أن } u = \cos x \end{aligned}$$

بينما لم يكن هذا المثال الأول تحديًا على وجه الخصوص، فسوف يعطيك فكرة عن كيفية تعاملك مع مثال 3.2.

المثال 3.2 مكامل مع قوّة فردية لـ Sine

جد قيمة $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$.

الحل هنا، لنأخذ $u = \cos x$. فتكون $du = -\sin x dx$ بحيث أنّ:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin^3 x dx &= \int \cos^4 x \sin^2 x \sin x dx = - \int \cos^4 x \sin^2 x (-\sin x) dx \\ &= - \int \underbrace{\cos^4 x (1 - \cos^2 x)}_{u^4(1-u^2)} \underbrace{(-\sin x) dx}_{du} = - \int u^4(1-u^2) du \\ &= - \int (u^4 - u^6) du = - \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} \right) + c \\ &= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c \quad \text{بما أن } u = \cos x \end{aligned}$$

يمكن تطبيق الأفكار المستخدمة في المثال 3.2 على أي تكامل بالصيغة المحددة.

المثال 3.3 مكامل مع قوّة فردية لـ Cosine

جد قيمة $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx$.

الحل لاحظ أنه يمكننا إعادة كتابة ذلك في صورة

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx = \int \sqrt{\sin x} \cos^4 x \cos x dx = \int \sqrt{\sin x} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx$$

بتعويض $u = \sin x$. فتكون $du = \cos x dx$. لدينا

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx &= \int \underbrace{\sqrt{\sin x} (1 - \sin^2 x)^2}_{\sqrt{u}(1-u^2)^2} \underbrace{\cos x dx}_{du} \\ &= \int \sqrt{u}(1-u^2)^2 du = \int u^{1/2}(1-2u^2+u^4) du \\ &= \int (u^{1/2} - 2u^{5/2} + u^{9/2}) du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} - 2\left(\frac{2}{7}\right)u^{7/2} + \frac{2}{11}u^{11/2} + c \\ &= \frac{2}{3}\sin^{3/2} x - \frac{4}{7}\sin^{7/2} x + \frac{2}{11}\sin^{11/2} x + c. \quad \text{بما أن } u = \sin x \end{aligned}$$

بالنظر إلى أبعد من تفاصيل عملية الحساب الموجودة هنا، يجب أن تلاحظ النقطة الأساسية: أنه يتم حساب جميع التكاملات من هذه الصيغة بالطريقة نفسها في الأساس.

الحالة 2: m و n عدداً صحيحان زوجيان موجبان

في هذه الحالة، يمكننا استخدام صيغ نصف الزاوية لـ $\sin$ و $\cos$ (موضحة في الهامش) لاختصار الأسس في المكامل. نوضح هذه الحالة في المثال 3.4.

ملاحظات

صيغ نصف الزاوية

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

المثال 3.4 تكامل الدوال المثلثية لـ Sine

جد قيمة $\int \sin^2 x \, dx$.

الحل باستخدام صيغة نصف الزاوية، يمكننا إعادة كتابة التكامل في صورة

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx$$

يمكننا إيجاد قيمة هذا التكامل الأخير باستخدام التعويض $u = 2x$ ، فتكون $du = 2 \, dx$. يعطينا ذلك

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \int \underbrace{(1 - \cos 2x)}_{1 - \cos u} \underbrace{2 \, dx}_{du} = \frac{1}{4} \int (1 - \cos u) \, du \\ &= \frac{1}{4} (u - \sin u) + c = \frac{1}{4} (2x - \sin 2x) + c. \end{aligned}$$

بما أن $u = 2x$

مع بعض التكاملات، تحتاج إلى تطبيق صيغ نصف الزاوية عدة مرات، كما في المثال 3.5.

المثال 3.5 تكامل قوّة زوجيّة لـ Cosine

جد قيمة $\int \cos^4 x \, dx$.

الحل باستخدام صيغة نصف الزاوية لـ cosine، لدينا

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \end{aligned}$$

باستخدام صيغة نصف الزاوية مرة أخرى، على الحد الأخير في المكامل، نحصل على

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int \left[1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right] \, dx \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \end{aligned}$$

حيث نترك تفاصيل التكامل الأخير كتمرين. ■

إنّ هدفنا التالي يقوم على وضع استراتيجية لإيجاد قيمة التكاملات بالصيغة

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$

حيث يكون m و n عددين صحيحين.

الحالة 1: m هي عدد صحيح فردي موجب

إعزل أولاً واحد من عوامل $\sec x \tan x$. (ستحتاج هذا من أجل du). ثم استبدل أي من عوامل $\tan^2 x$ باستخدام $\sec^2 x - 1$ وقم بإجراء التعويض $u = \sec x$.

نوضح ذلك في المثال 3.6.

المثال 3.6 تكامل قوة فردية لدالة الظل

جد قيمة $\int \tan^3 x \sec^3 x dx$.

الحل عند البحث عن حدود هي مشتقات لحدود أخرى، نعيد كتابة التكامل في صورة

$$\int \tan^3 x \sec^3 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x (\sec x \tan x) dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x (\sec x \tan x) dx$$

حيث استخدمنا متطابقة فيثاغورس

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

يجب أن نلاحظ التعويض الآن. لنأخذ $u = \sec x$. فتكون $du = \sec x \tan x dx$ وبالتالي،

$$\int \tan^3 x \sec^3 x dx = \int \underbrace{(\sec^2 x - 1)}_{(u^2 - 1)u^2} \underbrace{\sec^2 x (\sec x \tan x)}_{du} dx$$

$$= \int (u^2 - 1)u^2 du = \int (u^4 - u^2) du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + c \quad \text{بما أن } u = \sec x$$

الحالة 2: n هي عدد صحيح زوجي موجب

أولاً، نعزل واحد من عوامل $\sec^2 x$. (ستحتاج هذا من أجل du). ثم استبدل أي عوامل متبقية $\sec^2 x$ باستخدام $1 + \tan^2 x$ وقم بإجراء التعويض $u = \tan x$.
نوضح ذلك في المثال 3.7.

المثال 3.7 تكامل قوة زوجية للقاطع

جد قيمة $\int \tan^2 x \sec^4 x dx$.

الحل حيث $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$. نعيد كتابة التكامل في صورة

$$\int \tan^2 x \sec^4 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx$$

نفترض الآن أن $u = \tan x$. فتكون $du = \sec^2 x dx$ و

$$\int \tan^2 x \sec^4 x dx = \int \underbrace{\tan^2 x (1 + \tan^2 x)}_{u^2(1 + u^2)} \underbrace{\sec^2 x dx}_{du}$$

$$= \int u^2(1 + u^2) du = \int (u^2 + u^4) du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c \quad \text{بما أن } u = \tan x$$

الحالة 3: m هو عدد صحيح زوجي موجب و n هو عدد صحيح فردي موجب

استبدل أيًا من عوامل $\tan^2 x$ بـ $\sec^2 x - 1$ ثم استخدم صيغة اختزال خاصة (معطاة في التمرين) لإيجاد قيمة التكاملات من الصيغة $\int \sec^n x dx$. ستتم تغطية هذه الحالة المعقدة بإيجاز في التمارين. يعتمد الجزء الأكبر من هذا على المثال 3.8.

المثال 3.8 تكامل غير عادي

جد قيمة التكامل $\int \sec x dx$.

الحل يعتمد إيجاد دالة أصلية هنا على رؤية غير عادية. لاحظ أنه إذا ضربنا المكامل بالكسر $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ (وهو بالطبع مساويًا لـ 1)، نحصل على

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx\end{aligned}$$

انظر إلى القيمة في البسط هي تمامًا مشتقة المقام. أي إن:

$$\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = \sec x \tan x + \sec^2 x$$

لنأخذ $u = \sec x + \tan x$ يعطينا

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c\end{aligned}$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| + c \quad u = \sec x + \tan x \text{ بما أن}$$

التعويض مع الدوال المثلثية

إذا كان تكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$ ، $\sqrt{a^2 + x^2}$ أو $\sqrt{x^2 - a^2}$ لبعض $a > 0$ ، غالبًا ما يمكنك إيجاد قيمة التكامل بتعويض يتضمن دالة مثلثية (ومن هنا جاءت تسمية التعويض مع الدوال المثلثية).

أولاً، على فرض أن مكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$ لبعض $a > 0$. لتكن $x = a \sin \theta$ حيث $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. يمكننا حذف الجذر التربيعي، كالتالي:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \\ &= a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = a \sqrt{\cos^2 \theta} = a \cos \theta\end{aligned}$$

بما أن $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ، $\cos \theta \geq 0$. يعدّ المثال 3.9 نموذجيًا لكيفية استخدام هذه التعويضات.

ملاحظة

يمكن كذلك تبسيط الحدود بالصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$ عن طريق التعويض $x = a \cos \theta$. باستخدام قيد مختلف لـ θ .

المثال 3.9 تكامل يتضمن $\sqrt{a^2 - x^2}$

جد قيمة $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} dx$.

الحل يجب عليك دائماً التفكير أولاً إذا بالإمكان إجراء تكامل مباشرة بالتعويض أو بالأجزاء. بما أن أيًا من هذه الطرائق لا تقدّم مساعدة هنا، نأخذ التعويض مع الدوال المثلثية. تذكر أن الهدف

المباشر هنا هو حذف الجذر التربيعي. إنَّ التعويض الذي سيحقق هذا الأمر هو

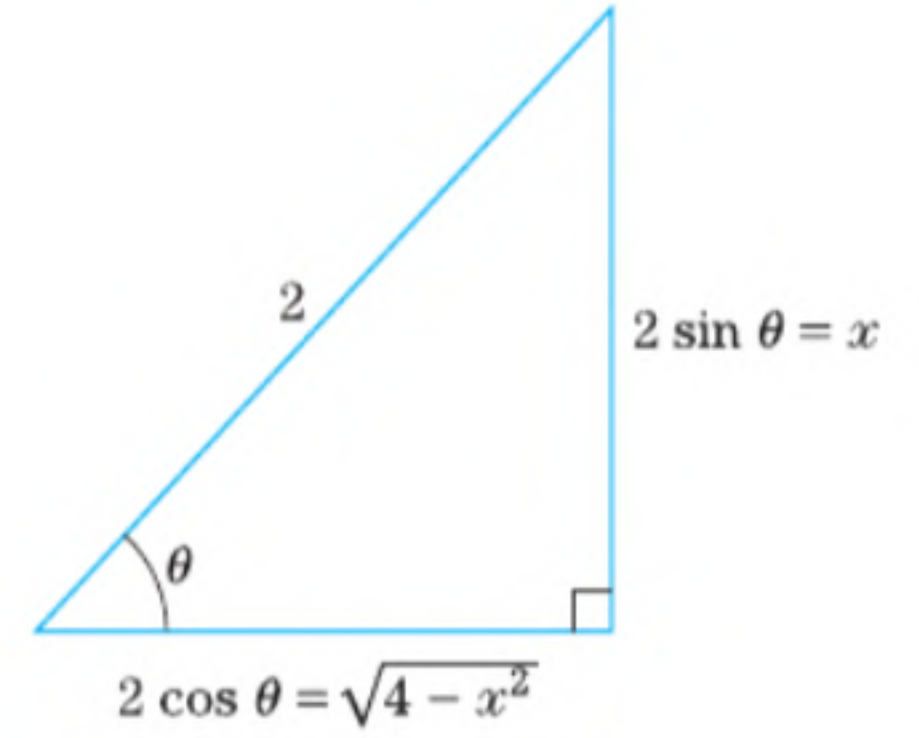
$$x = 2 \sin \theta \quad \text{لكل } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(لماذا نحتاج إلى متباينات تامة هنا؟) يعطينا ذلك

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

وبالتالي،

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{1}{(2 \sin \theta)^2 \sqrt{4-(2 \sin \theta)^2}} 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int \frac{2 \cos \theta}{4 \sin^2 \theta \sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \int \frac{\cos \theta}{(2 \sin^2 \theta) 2 \sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \int \frac{\cos \theta}{4 \sin^2 \theta \cos \theta} d\theta \quad \text{بما أن } 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \\ &= \frac{1}{4} \int \csc^2 \theta d\theta = -\frac{1}{4} \cot \theta + c \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} = \csc^2 \theta \quad \text{بما أن} \end{aligned}$$



الشكل 7.1

تعدّ المسألة الوحيدة المتبقية هنا كتابة الدالة الأصلية بدلالة المتغير θ . عند التحويل مجددًا إلى المتغير الأصلي $x = 2 \sin \theta$ ، نحتك على رسم مخطط، كما في الشكل 7.1. بما أنَّ التعويض كان $x = 2 \sin \theta$ ، لدينا $\sin \theta = \frac{x}{2} = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ولهذا نقوم بتسمية الوتر 2. $2 \sin \theta$ هو الضلع المقابل للزاوية θ . وفقًا لنظرية فيثاغورس، يكون الضلع المجاور $\sqrt{4-x^2}$. كما هو مشار إليه. لذا، لدينا

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

ومنه

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{4} \cot \theta + c = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

بعد ذلك، على فرض أنَّ مكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{a^2+x^2}$ ، لبعض $a > 0$. بأخذ $x = a \tan \theta$ حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، نحذف الجذر التربيعي، كالتالي:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2+(a \tan \theta)^2} = \sqrt{a^2+a^2 \tan^2 \theta} \\ &= a \sqrt{1+\tan^2 \theta} = a \sqrt{\sec^2 \theta} = a \sec \theta \end{aligned}$$

بما أنَّ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\sec \theta > 0$ يتسم المثال 3.10 بكونه نموذجيًا لكيفية استخدام هذه التعويضات.

المثال 3.10 تكامل يتضمن $\sqrt{a^2+x^2}$

جد قيمة التكامل $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$.

الحل يمكنك حذف الجذر التربيعي بأخذ أن $x = 3 \tan \theta$ لكل $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. يعطينا ذلك $dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$ بحيث تكون

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{9+(3 \tan \theta)^2}} 3 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{\sqrt{9+9 \tan^2 \theta}} d\theta \\ &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{3 \sqrt{1+\tan^2 \theta}} d\theta \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta \quad \text{بما أن } 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \\ &= \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c \end{aligned}$$

من المثال 3.8. لم ننته هنا بعد نظرًا إلى أنه لا يزال علينا التعبير عن التكامل بدلالة المتغير الأصلي x . لاحظ أنه لدينا $x = 3 \tan \theta$ بحيث تكون $\tan \theta = \frac{x}{3}$. يتبقى فقط الحل لإيجاد قيمة $\sec \theta$ على الرغم من أنه يمكنك إجراء ذلك باستخدام مثلث، كما في المثال 3.9. فإن الطريقة الأبسط لهذا الإجراء هي التعرف على ذلك لـ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \sec \theta &= \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c \quad \text{ويترك هذا الأمر لنا} \\ &= \ln \left| \sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} + \frac{x}{3} \right| + c \end{aligned}$$

في النهاية، على فرض أن مكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{x^2 - a^2}$ لبعض $a > 0$. بأخذ $x = a \sec \theta$ حيث $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. نحذف الجذر التربيعي، كما يأتي:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{(a \sec \theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} \\ &= a \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = a \sqrt{\tan^2 \theta} = a |\tan \theta| \end{aligned}$$

لاحظ الحاجة إلى القيم المطلقة على فرض أن مكامل يحتوي، حيث $\tan \theta$ يمكن أن يكون موجبًا وسالبًا على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. يتسم المثال 3.11 بكونه نموذجيًا لكيفية استخدام هذه التعويضات.

المثال 3.11 تكامل يتضمن $\sqrt{x^2 - a^2}$

جد قيمة التكامل $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx$ لكل $x \geq 5$.

الحل هنا، لتكن أن $x = 5 \sec \theta$ لكل $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. حيث نختار النصف الأول من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. بحيث تكون $x = 5 \sec \theta > 5$ (إذا كان لدينا $x < -5$ ، فسوف نختار

$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ يعطينا ذلك $dx = 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$ ويصبح التكامل عندئذ:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{(5 \sec \theta)^2 - 25}}{5 \sec \theta} (5 \sec \theta \tan \theta) d\theta \\ &= \int \sqrt{25 \sec^2 \theta - 25} \tan \theta d\theta \\ &= \int 5 \sqrt{\sec^2 \theta - 1} \tan \theta d\theta \\ &= 5 \int \tan^2 \theta d\theta \quad \text{بما أن } \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta \\ &= 5 \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta \\ &= 5(\tan \theta - \theta) + c \end{aligned}$$

في النهاية، لاحظ بما أن $x = 5 \sec \theta$ لكل $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ لدينا

$$\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 1} = \frac{1}{5} \sqrt{x^2 - 25}$$

و $\theta = \sec^{-1} \left(\frac{x}{5} \right)$ لدينا الآن

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx &= 5(\tan \theta - \theta) + c \\ &= \sqrt{x^2 - 25} - 5 \sec^{-1} \left(\frac{x}{5} \right) + c \end{aligned}$$

ستجد عددًا من التكاملات الإضافية التي تتطلب التعويض مع الدوال المثلثية في التمارين. تتمثل الفكرة الرئيسية هنا بملاحظة أنه يمكنك حذف حدود معينة للجذر التربيعي في مكامل باستخدام تعويض مع الدوال المثلثية يتم اختياره بعناية.

نلخص التعويضات مع الدوال المثلثية التي تم عرضها هنا في الجدول التالي.

التعبير	التعويض مع الدوال المثلثية	الفترة	المتطابقة
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

7.3 التمارين

تمارين كتابية

1. على فرض أن أحد الأصدقاء أثناء دراسة حساب التفاضل والتكامل أخبرك أنه يوجد في هذا الدرس قواعد عديدة أكثر من القدرة على الحفظ. ساعد صديقك على إيضاح أن كل قاعدة تشير إلى الحالة التي ستنتج فيها تعويضات معينة. وبالتالي، ينجح تعويض $u(x)$ إذا كان التعبير $u'(x)$ يظهر في المكامل ويصبح التكامل الناتج أسهل في إجراء التكامل له. لكل

2. من القواعد المغطاة في النص، حدد $u'(x)$ ووضح سبب أن n يجب أن يكون عددًا فرديًا (أو أيما تنص عليه القاعدة) لكي يكون المكامل المتبقي مقبولاً. بدون حفظ القواعد، يمكنك تذكر عدد صغير من التعويضات المقبولة وترى أيًا منها تناسب مسألة معطاة.

3. في النص، نقترح أنه عندما يحتوي المكامل على حد بالصيغة $\sqrt{4 - x^2}$ ، يمكنك محاولة إجراء التعويض مع الدوال المثلثية

$x = 2 \sin \theta$. يجب أن نعرف الآن بأن هذا لا ينجح دائماً. بعد إجراء تعويض، كيف يسعك معرفة ما إذا كان التعويض قد نجح أم لا؟

في التمارين 45 و 46، جـد قيمة التكامل باستخدام كل من التعويضان $u = \tan x$ و $u = \sec x$ وقارن النتائج.

$$45. \int \tan x \sec^4 x \, dx \quad 46. \int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$$

في التمارين 1-44، جـد قيمة التكاملات.

1. $\int \cos x \sin^4 x \, dx$
2. $\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx$
3. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin^3 2x \, dx$
4. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x \, dx$
5. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$
6. $\int_{-\pi/2}^0 \cos^3 x \sin x \, dx$
7. $\int \cos^2 (x+1) \, dx$
8. $\int \sin^4 (x-3) \, dx$
9. $\int \tan x \sec^3 x \, dx$
10. $\int \cot x \csc^4 x \, dx$
11. $\int x \tan^3 (x^2+1) \sec (x^2+1) \, dx$
12. $\int \tan (2x+1) \sec^3 (2x+1) \, dx$
13. $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$
14. $\int \cot^2 x \csc^2 x \, dx$
15. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x \, dx$
16. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x \sec^2 x \, dx$
17. $\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$
18. $\int (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx$
19. $\int_{-\pi/3}^0 \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx$
20. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x \csc^4 x \, dx$
21. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} \, dx$
22. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16-x^2}} \, dx$
23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} \, dx$
24. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} \, dx$
25. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$
26. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$
27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} \, dx$
28. $\int x^3 \sqrt{x^2-1} \, dx$
29. $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} \, dx$
30. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \, dx$
31. $\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x} \, dx$
32. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} \, dx$
33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} \, dx$
34. $\int x^3 \sqrt{8+x^2} \, dx$
35. $\int \sqrt{16+x^2} \, dx$
36. $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \, dx$
37. $\int_0^1 x \sqrt{x^2+8} \, dx$
38. $\int_0^2 x^2 \sqrt{x^2+9} \, dx$
39. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$
40. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}} \, dx$
41. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x}} \, dx$
42. $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-6x}} \, dx$
43. $\int \frac{x}{\sqrt{10+2x+x^2}} \, dx$
44. $\int \frac{2}{\sqrt{4x-x^2}} \, dx$

47. (a) أثبت أنه لأي عدد صحيح $n > 1$ ، توجد لدينا صيغة الاختزال

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

جـد قيمة (b) $\int \sec^3 x \, dx$ ، (c) $\int \sec^4 x \, dx$ و (d) $\int \sec^5 x \, dx$.

48. تعطى مساحة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالتكامل $\frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$. احسب هذا التكامل.

49. أثبت أن $\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + c$ و جـد قيمة $\int \csc^3 x \, dx$.

50. أثبت أن $\int \frac{1}{\cos x - 1} \, dx = \csc x + \cot x + c$ و $\int \frac{1}{\cos x + 1} \, dx = \csc x - \cot x + c$.

51. جـد قيم الدوال الأصلية في الأمثلة 3.2، 3.3، 3.5، 3.6 و 3.7 باستخدام CAS الخاص بك. وفقاً لهذه الأمثلة، خمن ما إذا كان CAS الخاص بك يستخدم طرائق التكامل نفسها التي نجريها أم لا. في الحالات التي يعطيك فيها CAS الخاص بك دالة أصلية عما نعطيه، أعط رأيك بأي دالة أصلية تبدو أبسط.

52. (a) يعطي CAS نتيجة $\frac{2}{35} \cos^5 x - \frac{1}{7} \sin^2 x \cos^5 x$ كدالة أصلية في المثال 3.2. جـد c بحيث يساوي هذا الدالة الأصلية $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + c$.

(b) يعطي CAS نتيج $\frac{1}{5} \sec^4 x \tan x + \frac{1}{15} \sec^2 x \tan x - \frac{2}{15} \tan x$ كدالة أصلية في المثال 3.7. جـد c بحيث يساوي هذا الدالة الأصلية الخاص بنا $\frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c$.

53. في دائرة المكيف، يكون للتردد صيغة $i(t) = I \cos(\omega t)$ للعديد الثابتين I و ω . يتم تعريف الطاقة في صورة Ri^2 لعدد ثابت R . جـد القيمة المتوسطة للطاقة بإجراء تكامل على الفترة $[0, 2\pi/\omega]$.

تمارين استكشافية

1. في الدرس 6.2، طلب منك إيضاح أنه للعديدين الصحيحين الموجبين m و n حيث $m \neq n$ ،

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) \, dx = 0$ و $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = 0$ وأيضاً، فإن $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) \, dx = \pi$ في النهاية. لأي عددين صحيحين موجبين m و n ، سنستخدم هذه الصيغ لشرح الطريقة التي يمكن من خلالها ضبط جهاز راديو على محطة AM.

يرسل جهاز راديو تعديل السعة الموجة (أو AM) إشارة (مثال: موسيقى) تعدّل التردد الخاص بمقدّم الخدمة. على سبيل المثال، إذا كانت الإشارة $2 \sin t$ والتردد الخاص بمقدّم الخدمة

سنقوم بتحليل هذه الإشارة. وتمثل الخطوة الأولى بإعادة كتابة الإشارة باستخدام المتطابقة

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \cos(B - A) - \frac{1}{2} \cos(B + A)$$

إذا تساوي الإشارة

$$f(t) = \cos 15t - \cos 17t + \frac{3}{2} \cos 31t - \frac{3}{2} \cos 33t$$

إذا كان جهاز الراديو "يدرك" أن الإشارة بالصيغة $c \sin t$ لبعض الأعداد الثابتة c ، يمكنه تحديد العدد الثابت c بالتردد 16 بحساب التكامل $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos 15t dt$ والضرب في $2/\pi$. أثبت أن $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos 15t dt = \pi$ بحيث يكون العدد الثابت الصحيح $c = \pi(2/\pi) = 2$. إذا تكون الإشارة $2 \sin t$. لاستعادة الإشارة المرسل من قبل المحطة الثانية، احتسب $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos 31t dt$ واضرب في $2/\pi$. أثبت أنك قمت باستعادة إشارة $3 \sin t$ صحيحة وكاملة.

2. في هذا التمرين، نشق نتيجة مهمة يطلق عليها اسم **ناتج ضرب واليس**.

عرّف التكامل $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ لعدد صحيح موجب n .

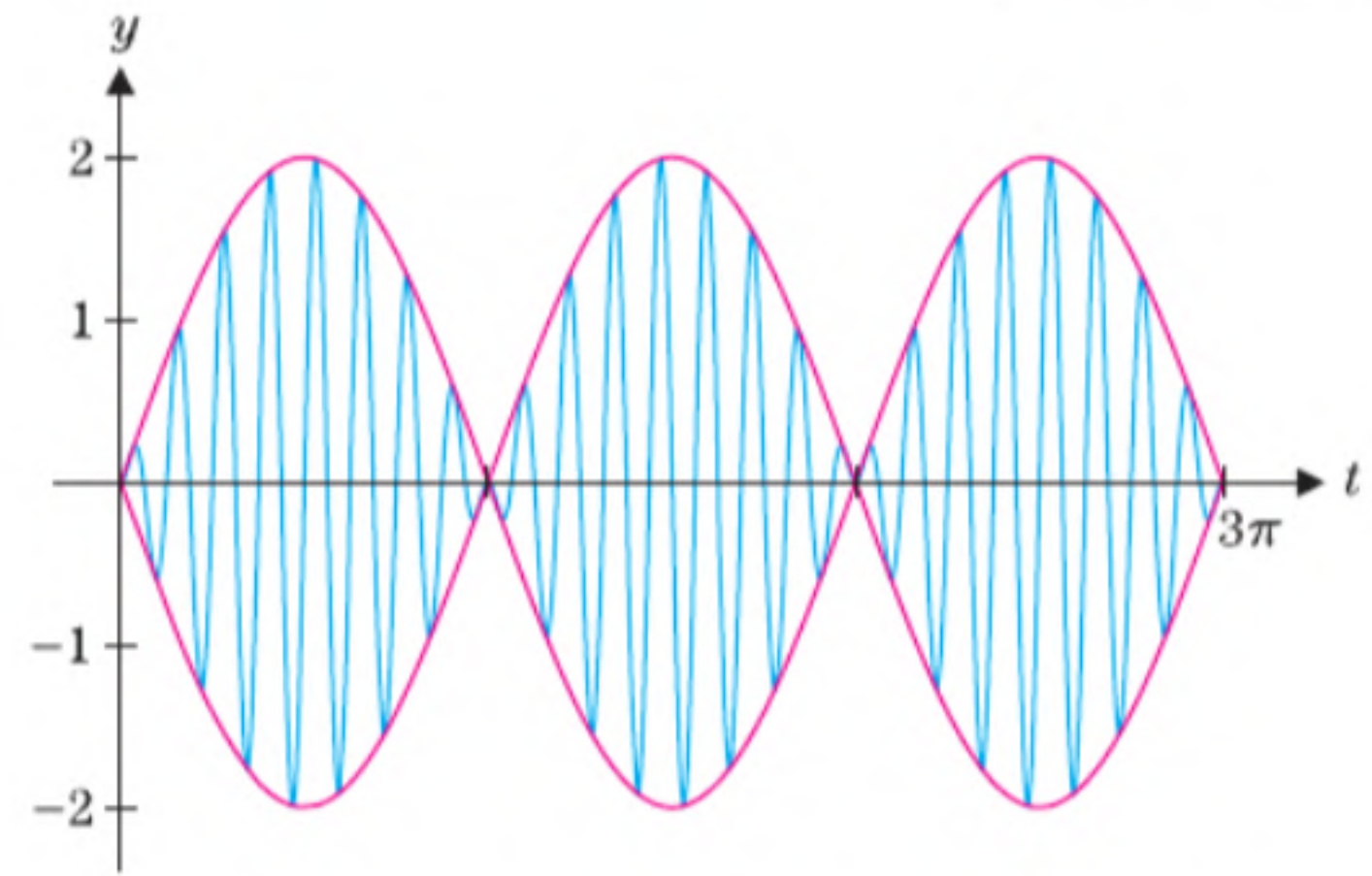
(a) أثبت أن $I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2}$. (b) أثبت أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1 \quad \text{بما أن} \quad (c) \quad \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^2 4^2 \dots (2n)^2 2}{3^2 5^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1) \pi}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 4^2 \dots (2n)^2}{3^2 5^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1)} \quad \text{استنتج}$$

16. إذا يرسل جهاز الراديو الإشارة المعدلة $2 \sin t \sin 16t$.

يوضح الشكل التمثيل البياني $y = 2 \sin t$ و $y = -2 \sin t$ و $y = 2 \sin t \sin 16t$.



يتذبذب التمثيل البياني $y = 2 \sin t \sin 16t$ بسرعة مماثلة لـ $\sin 16t$ الخاصة بمقدم الخدمة، ولكن سعة الموجة تتغير بين $2 \sin t$ و $-2 \sin t$ (ومن هنا جاء المصطلح تعديل سعة الموجة). إن المسألة الخاصة بجهاز الراديو هي ضبط التردد 16 واستعادة الإشارة $2 \sin t$. تكمن الصعوبة في أن المحطات الإذاعية الأخرى تبث في زمن واحد. يتلقى جهاز الراديو جميع الإشارات مختلطة مع بعضها البعض. لرؤية الكيفية التي يعمل بها هذا، على فرض أن محطة ثانية تبث الإشارة $3 \sin t$ بالتردد 32. تكون الإشارة المجمعة التي يتلقاها جهاز الراديو $2 \sin t \sin 16t + 3 \sin t \sin 32t$.

تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

في هذا الدرس، نقدّم طريقة لإعادة صياغة بعض الدوال النسبية يمكن أن تكون مفيدة للغاية في التكامل بالإضافة إلى تطبيقات أخرى. ونبدأ بنظرة بسيطة. لاحظ أنّ

$$(4.1) \quad \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5} = \frac{3(x-5) - 2(x+2)}{(x+2)(x-5)} = \frac{x-19}{x^2-3x-10}$$

لذلك، على فرض أنك أردت إيجاد قيمة تكامل الدالة على الطرف الأيمن من (4.1). في حين أنه ليس من الواضح كيفية إيجاد قيمة هذا التكامل، من السهل إيجاد قيمة تكامل الدالة (مكافئة) على الطرف الأيسر في (4.1). من (4.1)، لدينا

$$\int \frac{x-19}{x^2-3x-10} dx = \int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5} \right) dx = 3 \ln |x+2| - 2 \ln |x-5| + c$$

المكامل، $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5}$

يسمى: **تفكيك الكسور الجزئية للمكامل الأول**. وعموماً، إذا كانت العوامل الثلاثة $a_1x + b_1$ ، $a_2x + b_2$ و $a_3x + b_3$ جميعها واضحة (أي، لا يعدّ أي منها مضاعف عدد ثابت للآخر)، إذاً يمكننا أن نكتب

$$\frac{a_1x + b_1}{(a_2x + b_2)(a_3x + b_3)} = \frac{A}{a_2x + b_2} + \frac{B}{a_3x + b_3}$$

وذلك لاختيار العددين الثابتين A و B وتحديدتهما. لاحظ أنه إذا أردت إيجاد تكامل هذا التعبير، سيكون من السهولة للغاية إيجاد تكامل الكسور الجزئية على الطرف الأيمن.

المثال 4.1 الكسور الجزئية: العوامل الخطية متميزة

$$\text{جد قيمة } \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$$

الحل أولاً، لاحظ أنه لا يمكنك إيجاد قيمة هذا كما هو عليه وكل الطرائق السابقة التي استخدمناها لا تساعد. (فكر في كل واحدة من تلك لهذه المسألة). ومع ذلك، يمكننا إجراء تفكيك للكسور الجزئية، كما يأتي:

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

بضرب كلا طرفي هذه المعادلة في المقام المشترك $(x-1)(x+2)$ ، نحصل على

$$(4.2) \quad 1 = A(x+2) + B(x-1)$$

نود حل هذه المعادلة لأجل A و B . الفكرة الأساسية هي أن تحقق هذه المعادلة كل قيم x . وخصوصاً $x=1$ ، لاحظ أنه من (4.2)، نحصل على

$$1 = A(1+2) + B(1-1) = 3A$$

لذلك $A = \frac{1}{3}$. بالمثل، بأخذ $x = -2$ ، نحصل على

$$1 = A(-2+2) + B(-2-1) = -3B$$

لذلك $B = -\frac{1}{3}$. وبالتالي، نحصل على

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx &= \int \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+2} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \ln |x+2| + c \end{aligned}$$

يمكننا إجراء الخطوات نفسها التي قمنا بها في المثال 4.1 كلما كان لتعبير نسبي مقام يتم تحليله إلى n من العوامل الخطية المتميزة، على النحو التالي. إذا كانت درجة $P(x) < n$ وعوامل $(a_i x + b_i)$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$ جميعها متميزة، إذاً يمكننا كتابة

$$\frac{P(x)}{(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \cdots (a_n x + b_n)} = \frac{c_1}{a_1 x + b_1} + \frac{c_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{c_n}{a_n x + b_n}$$

الكسور الجزئية:
العوامل الخطية المتميزة

لأجل بعض الأعداد الثابتة $c_1, c_2, \dots, c_n$.

المثال 4.2 الكسور الجزئية: ثلاثة عوامل خطية مختلفة

$$\text{جد قيمة } \int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} dx$$

الحل مرة أخرى، لا تساعدنا الطرائق السابقة، ولكن يمكننا إعادة كتابة المكامل باستخدام الكسور الجزئية. لدينا

$$\frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} = \frac{3x^2 - 7x - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

الضرب في المقام المشترك $x(x-1)(x+1)$ ، نحصل على

$$(4.3) \quad 3x^2 - 7x - 2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

في هذه الحالة، لاحظ أنه بأخذ $x = 0$ ، نحصل على

$$-2 = A(-1)(1) = -A$$

لذلك $A = 2$. وبالمثل، بأخذ $x = 1$ ، نجد أن $B = -3$ وبأخذ $x = -1$ ، نجد أن $C = 4$. وبالتالي، لدينا:

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1} \right) dx$$

$$= 2 \ln |x| - 3 \ln |x-1| + 4 \ln |x+1| + c$$

ملحوظة 4.1

إذا كان البسط لتعبير نسبي له الدرجة نفسها أو أعلى من درجة المقام، يجب عليك أولاً إجراء قسمة مطولة وإتباع هذا بتحليل كسور جزئية للكسر (العادي) المتبقي.

المثال 4.3 الكسور الجزئية حيث يتطلب إجراء قسمة مطولة

جد التكامل غير المحدود لـ $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}$ باستخدام تفكيك كسور جزئية.

الحل بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، أقسم أولاً:

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2 - 2x - 8 \overline{) 2x^3 - 4x^2 - 15x + 5} \\ \underline{2x^3 - 4x^2 - 16x} \\ x + 5 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8} = 2x + \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 8}$$

وبالتالي، نحصل على

يمكن تفكيك الكسر العادي المتبقي كما يأتي:

$$\frac{x + 5}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x + 5}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 2}$$

من السهولة إيجاد: $A = \frac{3}{2}$ و $B = -\frac{1}{2}$. (يترك هذا في شكل تمرين). لدينا الآن

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8} dx = \int \left[2x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x-4} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} \right) \right] dx$$

$$= x^2 + \frac{3}{2} \ln |x-4| - \frac{1}{2} \ln |x+2| + c$$

إذا كان المقام الخاص بتعبير نسبي يحتوي على عوامل خطية مكررة، يكون التفكيك كما يأتي. إذا كانت درجة $P(x)$ أصغر من n ، إذاً يمكننا كتابة

$$\frac{P(x)}{(ax + b)^n} = \frac{c_1}{ax + b} + \frac{c_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(ax + b)^n}$$

للأعداد $c_1, c_2, \dots, c_n$ تحدد لاحقاً

الكسور الجزئية:
العوامل الخطية المكررة

المثال 4.4 مطابق

المثال 4.4 كسور جزئية تحتوي على عامل خطي مكرر

استخدم تفكيك الكسور الجزئية لإيجاد دالة أصلية لـ

$$f(x) = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$$

الحل أولاً، لاحظ أن هناك عاملاً خطياً مكرراً في المقام. لدينا

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

بالضرب في المقام المشترك $x(x+1)^2$ ، نحصل على

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

بأخذ $x = 0$ ، نجد أن $A = 6$. وبالمثل، بأخذ $x = -1$ ، نجد أن $C = 9$. لتحديد قيمة B ، نعوض قيمة مناسبة لـ x ، مثلاً $x = 1$. للأسف، لاحظ عدم وجود اختيار x من شأنه أن يجعل الحدين اللذين يحتويان على A و C قيمة كليهما صفر، بدون أن يجعل أيضاً الحد الذي يحتوي على B صفراً. ينبغي عليك إيجاد أن $B = -1$. لذا، يوجد لدينا

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \int \left[\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$= 6 \ln |x| - \ln |x+1| - 9(x+1)^{-1} + c$$

يمكننا التوسع في تفكيك الكسور الجزئية إلى تعابير نسبية مقاماتها تحتوي على عوامل تربيعية غير قابلة للاختزال (أي عوامل تربيعية ليست لها تحليل حقيقي إلى العوامل). إذا كانت درجة $P(x)$ أصغر من n (درجة المقام) وكل العوامل في المقام متميزة، إذاً يمكننا كتابة

$$(4.4) \quad \frac{P(x)}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \cdots (a_nx^2 + b_nx + c_n)} = \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}$$

الكسور الجزئية:
العوامل التربيعية غير القابلة للاختزال

فكر في هذا بدلالة المقامات التربيعية غير القابلة للاختزال في تفكيك كسور جزئية للحصول على بسوط خطية، في حين أن المقامات الخطية لها قيم بسط ثابت. إذا كنت تعتقد أن هذا يبدو فوضوياً، فأنت على حق، ولكن فقط في الجبر الأمر فوضوي (ويمكنك دائماً استخدام CAS للقيام بعملية جبرية لك). ينبغي عليك ملاحظة أن الكسور الجزئية على الطرف الأيمن من (4.4) تم تكاملها بسهولة نسبياً باستخدام التعويض جنباً إلى جنب مع الإكمال الممكن للمربع.

المثال 4.5 كسور جزئية مع عامل تربيعي

استخدم تفكيك الكسور الجزئية لإيجاد دالة أصلية لـ $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x}$.

الحل أولاً، لاحظ أن

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

الضرب في المقام المشترك $x(x^2 + 1)$ يعطينا

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 2 &= A(x^2 + 1) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + A \end{aligned}$$

بدلاً من تعويض الأعداد لـ x (لاحظ أنه لا توجد قيم مناسبة لإدخالها، باستثناء $x = 0$)، بدلاً من ذلك نطابق المعاملات المشابهة لقوى x :

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ -5 &= C \\ 2 &= A \end{aligned}$$

ومن هنا نجد $B = 0$ ولذلك،

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2 + 1} \right) dx = 2 \ln |x| - 5 \tan^{-1} x + c$$

وكثيراً ما يؤدي تفكيك الكسور الجزئية التي تتضمن حدود تربيعية غير قابلة للاختزال إلى تعابير تحتاج إلى مزيد من العمل (مثل إكمال المربع) قبل أن تتمكن من إيجاد دالة أصلية. نوضح ذلك في المثال 4.6.

المثال 4.6 كسور جزئية مع عامل تربيعي

استخدم تفكيك الكسور الجزئية لإيجاد دالة أصلية لـ

$$f(x) = \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)}$$

الحل أولاً، لاحظ أن العامل التربيعي في المقام لا يتحلل إلى العوامل ولذلك، التفكيك الصحيح هو

$$\frac{5x^2 + 6x + 2}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5}$$

بالضرب في $(x + 2)(x^2 + 2x + 5)$ ، نحصل على

$$5x^2 + 6x + 2 = A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x + 2)$$

بمطابقة المعاملات المشابهة لقوى x ، نحصل على

$$\begin{aligned} 5 &= A + B \\ 6 &= 2A + 2B + C \\ 2 &= 5A + 2C \end{aligned}$$

ستحتاج إلى حل هذه بالحذف. ونتركها كتمرين لتثبت أن: $A = 2$ ، $B = 3$ و $C = -4$. بالتكامل، لدينا

$$(4.5) \quad \int \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)} dx = \int \left(\frac{2}{x + 2} + \frac{3x - 4}{x^2 + 2x + 5} \right) dx$$

تكامل الحد الأول ينقذ بسهولة، ولكن ماذا عن الحد الثاني؟ بما أن المقام لا يتحلل إلى العوامل، لديك عدد قليل جداً من الخيارات. حاول التعويض في المقام، لتكن $u = x^2 + 2x + 5$.

لذا $du = (2x + 2) dx$. لاحظ أنه يمكننا كتابة تكامل الحد الثاني كما يأتي:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{3(x+1)-7}{x^2+2x+5} dx = \int \left[\left(\frac{3}{2}\right) \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} - \frac{7}{x^2+2x+5} \right] dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} dx - \int \frac{7}{x^2+2x+5} dx \\ (4.6) \quad &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \int \frac{7}{x^2+2x+5} dx. \end{aligned}$$

بإكمال المربع في مقام التكامل المتبقية، نحصل على

$$\int \frac{7}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{7}{(x+1)^2+4} dx = \frac{7}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{2} \right) + c$$

(نترك تفاصيل هذا التكامل السابق كتمرين). بالنظر في هذا مع (4.5) و(4.6)، يوجد لدينا الآن

$$\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx = 2 \ln|x+2| + \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{2} \right) + c$$

ملحوظة 4.2

تم استكشاف التعابير النسبية بالعوامل التربيعية المتكررة غير القابلة للاختزال في المقام في التمارين. إنَّ الفكرة هذه هي نفسها فكرة التفكيكات السابقة، ولكن العملية الجبرية فيها أكثر فوضوية. باستخدام هذه التقنيات التي تمت تغطيتها في هذا الدرس، يجب أن تكون قادرًا على تفكيك الكسور الجزئية لدالة نسبية، حيث يمكن دائمًا تحليل كثيري الحدود إلى العوامل خطية وتربيعية، قد تكون بعضها مكررة.

تتضمن معظم Regular CAS أوامر لتفكيك كسور جزئية. ومع ذلك، فإننا ندعوكم إلى العمل على التمارين الموجودة في هذا الدرس يدويًا. بمجرد أن تكون لديك فكرة عن طريقة إجراء هذه التفكيكات، وبكل الوسائل، استخدم CAS الخاص بك للقيام بهذا العمل الكادح لك. حتى ذلك الوقت، تحلى بالصبر واعمل بدقة يدويًا.

ملخص موجز لطرائق التكامل

إلى الآن، نتوقف لحظة لنلخص بإيجاز ما تعلمناه عن طرائق التكامل. في حين يمكنك إيجاد مشتقة لأي دالة يمكنك كتابتها، بالكاد حالفنا الحظ مع التكاملات. لا يمكن إيجاد قيم عدد كبير من التكامل بالضبط، في حين يمكن إيجاد قيم تكامل أخرى فقط بالتعريف على الطريقة التي قد تؤدي إلى حل. مع أخذ هذه الأمور في الاعتبار، نقدم الآن بعض الإرشادات لإيجاد قيمة التكاملات.

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) du \quad \text{التكامل بالتعويض:}$$

ما الذي يجب أن تبحث عنه:

1. تركيب الصيغة $f(u(x))$ ، حيث يحتوي المكامل أيضًا على $u'(x)$ ؛ على سبيل المثال،

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int \underbrace{\cos(x^2)}_{\cos u} \underbrace{2x dx}_{du} = \int \cos u du$$

2. تركيبات الصيغة $f(ax+b)$: على سبيل المثال.

$$\int \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x+1}}}_{\sqrt{u}} \underbrace{dx}_{du} = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{التكامل بالأجزاء:}$$

ما الذي يجب أن تبحث عنه: نواتج لأنواع مختلفة من الدوال: $x^n, \cos x, e^x$: على سبيل المثال.

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x dx & \quad \begin{cases} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{cases} \\ & = x \sin x - \int \sin x dx \end{aligned}$$

التعويض مع الدوال المثلثية:

ما الذي يجب أن تبحث عنه:

1. حدود مثل $\sqrt{a^2 - x^2}$: لنأخذ $x = a \sin \theta$ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) فيكون $dx = a \cos \theta d\theta$ و $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = a \cos \theta$ على سبيل المثال.

$$\int \underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}_{\cos \theta} \underbrace{dx}_{\cos \theta d\theta} = \int \sin^2 \theta d\theta$$

2. حدود مثل $\sqrt{x^2 + a^2}$: لنأخذ $x = a \tan \theta$ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) فيكون $dx = a \sec^2 \theta d\theta$ و $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta + a^2} = a \sec \theta$ على سبيل المثال.

$$\int \underbrace{\frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}}_{3 \sec \theta} \underbrace{dx}_{3 \sec^2 \theta d\theta} = 27 \int \tan^3 \theta \sec \theta d\theta$$

3. حدود مثل $\sqrt{x^2 - a^2}$: لنأخذ $x = a \sec \theta$ حيث $\theta \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ فيكون $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ و $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = a \tan \theta$ على سبيل المثال.

$$\int \underbrace{x^3}_{8 \sec^3 \theta} \underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{2 \tan \theta} \underbrace{dx}_{2 \sec \theta \tan \theta d\theta} = 32 \int \sec^4 \theta \tan^2 \theta d\theta$$

الكسور الجزئية:

ما الذي يجب أن تبحث عنه: الدوال النسبية: على سبيل المثال.

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+3} dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \right) dx$$

تمارين كتابية

25. $\int \frac{4x^3 - 1}{x^4 - x} dx$ 26. $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx$
 27. $\int \frac{4x - 2}{16x^4 - 1} dx$ 28. $\int \frac{3x + 7}{x^4 - 16} dx$
 29. $\int \frac{x^3 + x}{3x^2 + 2x + 1} dx$ 30. $\int \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 3x + 2} dx$
 31. $\int \frac{4x^2 + 3}{x^3 + x^2 + x} dx$ 32. $\int \frac{4x + 4}{x^4 + x^3 + 2x^2} dx$
 33. $\int x^2 \sin x dx$ 34. $\int x e^{2x} dx$
 35. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - 4} dx$ 36. $\int \frac{2e^x}{e^{3x} + e^x} dx$

1. هناك اختصار لتحديد الأعداد الثابتة للحدود الخطية في تفكيك الكسور الجزئية. على سبيل المثال، لنأخذ

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

لإكمال A ، قم بأخذ الكسر الأصلي على الطرف الأيسر وتغطية $x+1$ في المقام وعوض x بـ -1 : $A = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}$. وبالمثل،

لحل B ، قم بتغطية $x-2$ وعوض x بـ 2 : $B = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

اشرح سبب صحة هذه التقنية على هذا التفكيك وعدم

صحته في تفكيك: $\frac{x-1}{(x+1)^2(x-2)}$.

37. في هذا التمرين، نجد تفكيك الكسور الجزئية لـ $\frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2}$. إن

صيغة هذا التفكيك هي

$$\frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

بالضرب في $(x^2+1)^2$ نحصل على

$$4x^2+2 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx+D$$

$$= Ax^3 + Bx^2 + Ax + B + Cx + D$$

كما في المثال 4.5، نطابق المعاملات المشابهة لقوى x . لأجل x^3 ، نحصل على $A=0$. لأجل x^2 ، نحصل على $B=4$. ونطابق معاملات x والثوابت لإنهاء التفكيك.

في التمارين 38-40، جـد تفكيك الكسور الجزئية. (راجع التمرين 37).

38. $\frac{x^3+2}{(x^2+1)^2}$ 39. $\frac{4x^2+3}{(x^2+x+1)^2}$ 40. $\frac{x^4+x^3}{(x^2+4)^2}$

41. في كثير من الأحيان، يمكن تطبيق أكثر من طريقة تكامل. جـد

قيمة $\int \frac{3}{x^4+x} dx$ في الطرائق الآتية. أولاً، استخدم

التعويض $u = x^3 + 1$ والكسور الجزئية. ثانيًا، استخدم التعويض $u = \frac{1}{x}$ وجـد قيمة التكامل الناتج. أثبت أن الإجابتين متساويتان.

42. جـد قيمة $\int \frac{2}{x^3+x} dx$ في الطرائق الآتية. أولاً،

استخدم التعويض $u = x^2 + 1$ والكسور الجزئية. ثانيًا، استخدم التعويض $u = \frac{1}{x}$ وجـد قيمة التكامل الناتج. أثبت أن الإجابتين متساويتان.

في التمرينين 43 و 44 اذكر الطريقة بتحديد ما إذا كان يمكن إيجاد قيمة التكامل باستخدام التعويض أو التكامل بالأجزاء أو الكسور الجزئية.

43. (a) $\int \frac{2}{x^2-1} dx$ (b) $\int \frac{x}{x^2-1} dx$
 (c) $\int \frac{x+1}{x^2-1} dx$ (d) $\int \frac{2}{x^2+1} dx$

2. للكسور الجزئية، هناك فرق كبير بين الدوال التربيعية التي يمكن تحليلها إلى حدود خطية والدوال التربيعية غير القابلة للاختزال. تذكر أن الدوال التربيعية يمكن تحليلها إلى العوامل في صورة $(x-a)(x-b)$ فقط إذا كانت a و b أصفار الدالة. اشرح كيف يمكنك استخدام الصيغة التربيعية لتحديد ما إذا كانت دالة تربيعية معينة غير قابلة للاختزال.

في التمارين 1-20، جـد تفكيك الكسور الجزئية والدالة الأصلية. إذا كان لديك CAS متاح، فاستخدمه للتحقق من إجابتك.

1. $\frac{x-5}{x^2-1}$ 2. $\frac{5x-2}{x^2-4}$
 3. $\frac{6x}{x^2-x-2}$ 4. $\frac{3x}{x^2-3x-4}$
 5. $\frac{-x+5}{x^3-x^2-2x}$ 6. $\frac{3x+8}{x^3+5x^2+6x}$
 7. $\frac{5x-23}{6x^2-11x-7}$ 8. $\frac{3x+5}{5x^2-4x-1}$
 9. $\frac{x-1}{x^3+4x^2+4x}$ 10. $\frac{4x-5}{x^3-3x^2}$
 11. $\frac{x+2}{x^3+x}$ 12. $\frac{1}{x^3+4x}$
 13. $\frac{4x^2-7x-17}{6x^2-11x-10}$ 14. $\frac{x^3+x}{x^2-1}$
 15. $\frac{2x+3}{x^2+2x+1}$ 16. $\frac{2x}{x^2-6x+9}$
 17. $\frac{x^3-4}{x^3+2x^2+2x}$ 18. $\frac{4}{x^3-2x^2+4x}$
 19. $\frac{3x^3+1}{x^3-x^2+x-1}$ 20. $\frac{2x^4+9x^2+x-4}{x^3+4x}$

في التمارين 21-36، جـد قيمة التكامل.

21. $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+2x-8} dx$ 22. $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x-6} dx$
 23. $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x} dx$ 24. $\int \frac{1}{x^3-1} dx$

لها صيغة دقيقة، لأنّ هذا ناتج جمع تلسكوبي. لمعرفة معنى هذا، اكتب تفكيك الكسور الجزئية لـ $\frac{2}{i^2 + i}$. باستخدام صيغة الكسور الجزئية، اكتب عدة حدود للمجموع ولاحظ كم الإلغاء الموجود. صف بإيجاز سبب كون المصطلح تلسكوبي ملائماً وحدد $\sum_{i=1}^n \frac{2}{i^2 + i}$ ثم جد النهاية عندما $n \rightarrow \infty$. أعد هذه

العملية لناتج الجمع التلسكوبي $\sum_{i=2}^n \frac{4}{i^2 - 1}$.

2. استخدم التعويض $u = x^{1/4}$ لإيجاد قيمة $\int \frac{1}{x^{5/4} + x} dx$. استخدم تعويضات مشابهة لإيجاد قيمة $\int \frac{1}{x^{1/4} + x^{1/3}} dx$. جد صيغة التعويض $\int \frac{1}{x^{1/4} + x^{1/6}} dx$ و $\int \frac{1}{x^{1/5} + x^{1/7}} dx$ للتكامل العام $\int \frac{1}{x^p + x^q} dx$.

44. (a) $\int \frac{2}{(x+1)^2} dx$ (b) $\int \frac{2x+2}{(x+1)^2} dx$
(c) $\int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$ (d) $\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx$

45. جد قيمة $\int \sec^3 x dx$ بإعادة كتابة المكامل في صورة $\frac{\cos x}{\cos^4 x}$ بالقيام بالتعويض $u = \sin x$ واستخدام الكسور الجزئية.

تمارين استكشافية

1. عند تطوير التكامل المحدود، أخذنا في اعتبارنا نواتج جمع مثل $\sum_{i=1}^n \frac{2}{i^2 + i}$ لنواتج جمع مشابهة، نهتم بشكل خاص بالنهاية عندما $n \rightarrow \infty$. اكتب عدة حدود للمجموع وحاول تخمين قيمة النهاية. تبين أنّ هذا هو واحد من نواتج الجمع القليلة التي يوجد

جداول التكامل وأنظمة الحاسوب الجبرية

اسأل أي شخص بحاجة إلى إيجاد قيم عدد أكبر من التكاملات كجزء من عملهم (وهذا يشمل المهندسين وعلماء الرياضيات والفيزياء وغيرهم) وسيخبرونك بأنهم قد قاموا بشكل واسع باستخدام جداول التكامل و/أو وأنظمة الحاسوب الجبرية. تعتبر هذه أدوات فعالة للغاية لمستخدمي الرياضيات المحترفين. مع ذلك، فهي لا تحل محل تعلم كافة طرائق التكامل الأساسية. لاستخدام جدول، يجب عليك أولاً في كثير من الأحيان إعادة كتابة التكامل بصيغة واحد من التكاملات في الجدول. قد يتطلب منك هذا إجراء بعض العمليات الجبرية أو إجراء تعويض. في حين سيخبر CAS عن وجود دالة أصلية، سيقدمها أحياناً بصيغة غير ملائمة. الأهم من ذلك، سيخبر CAS من وقت لآخر عن إجابة (على الأقل من الناحية الطريقة) غير صحيحة. وسنشير إلى بعض من هذه العيوب في الأمثلة الآتية.

استخدام جداول التكامل

لقد قمنا بتضمين جدول صغير للتكاملات غير المحدودة في الجزء الأخير من الكتاب.

المثال 5.1 استخدام جدول تكامل

استخدم جدول لإيجاد قيمة $\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x} dx$

الحل بالتأكيد، يمكنك إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام تعويض مع الدوال المثلثية. مع ذلك، إذا نظرت في جدول التكامل الخاص بنا، ستجد

$$(5.1) \quad \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + c$$

وللأسف، فإنّ التكامل في السؤال ليس تماما بالصيغة (5.1). مع ذلك، يمكننا إثبات هذا بالتعويض $u = 2x$ ، فيكون $du = 2 dx$. ذلك يعطينا

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{3+(2x)^2}}{2x} (2) dx = \int \frac{\sqrt{3+u^2}}{u} du \\ &= \sqrt{3+u^2} - \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3+u^2}}{u} \right| + c \\ &= \sqrt{3+4x^2} - \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3+4x^2}}{2x} \right| + c\end{aligned}$$

يسمى عدد من الصيغ الموجودة في الجدول **صيغ الاختزال**. تأخذ هذه الصيغ الصورة

$$\int f(u) du = g(u) + \int h(u) du$$

حيث يكون التكامل الثاني أبسط من الأول. يتم كثيرًا تطبيقها بشكل متكرر، كما في المثال 5.2.

المثال 5.2 استخدام صيغة اختزال

استخدم صيغة اختزال لإيجاد قيمة $\int \sin^6 x dx$.

الحل يجب أن تدرك أنه يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام طرائق تكامل تعرفها مسبقًا. (كيف؟) مع ذلك، لأي عدد صحيح $n \geq 1$ ، توجد لدينا صيغة الاختزال

$$(5.2) \quad \int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du$$

(انظر العدد 59 في جدول التكاملات الموجود على الغلاف الأخير للكتاب). إذا طبّقنا (5.2) حيث $n = 6$ ، نحصل على

$$\int \sin^6 x dx = -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x dx$$

بتطبيق صيغة الاختزال نفسها (هذه المرة مع $n = 4$) لإيجاد قيمة $\int \sin^4 x dx$ ، نحصل على

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x dx &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x dx \\ &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \left(-\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx \right)\end{aligned}$$

وأخيرًا، لأجل $\int \sin^2 x dx$ ، يمكننا استخدام (5.2) مرة أخرى (مع $n = 2$) أو إيجاد قيمة التكامل باستخدام صيغة نصف الزاوية. نختار السابق هنا ونحصل على

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x dx &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \left(-\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx \right) \\ &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{5}{24} \sin^3 x \cos x + \frac{5}{8} \left(-\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int dx \right) \\ &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{5}{24} \sin^3 x \cos x - \frac{5}{16} \sin x \cos x + \frac{5}{16} x + c\end{aligned}$$

يجب أن نذكر في هذه المرحلة أنّ هناك العديد من الطرائق المختلفة لإيجاد دالة أصلية. إنّ الدوال الأصلية التي يتم إيجادها باستخدام وسائل متعددة قد تبدو مختلفة تمامًا، على الرغم من أنها متكافئة. على سبيل المثال، لاحظ أنه إذا كان لدالة أصلية الصيغة $\sin^2 x + c$ ، إذاً تكون الدالة الأصلية المكافئة هي $-\cos^2 x + c$ ، حيث يمكننا كتابة

$$\sin^2 x + c = 1 - \cos^2 x + c = -\cos^2 x + (1 + c)$$

وأخيرًا، حيث إنّ c هو عدد ثابت عشوائي، وهكذا $1 + c$. في المثال 5.2، لاحظ أنّ أول ثلاثة حدود لها جميعًا عوامل $\sin x \cos x$ ، والتي تساوي $\frac{1}{2} \sin 2x$. باستخدام هذا ومتطابقات أخرى، يمكنك

أن تثبت أن الحل الذي قدّمناه في المثال 5.2 يكافئ الحلّ التالي الذي تم الحصول عليه من CAS مشهور:

$$\int \sin^6 x \, dx = \frac{5}{16}x - \frac{15}{64} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{192} \sin 6x + c$$

لذلك، لا داعي لأن تصاب بالذعر إذا كانت إجابتك تختلف عن الإجابة الموجودة في الجزء الأخير من الكتاب. قد تكون كلتا الإجابتين صحيحتين. إذا كنت غير متأكد، جـد مشتقة إجابتك. إذا حصلت على المكامل، تكون إجابتك صحيحة. سترغب في بعض الأحيان في تطبيق صيغ اختزال مختلفة عند نقاط مختلفة في مسألة معطاة.

المثال 5.3 إجراء تعويض قبل استخدام صيغة اختزال

جـد قيمة $\int x^3 \sin 2x \, dx$.

الحل من جدولنا (انظر العدد 63)، لدينا صيغة الاختزال

$$(5.3) \quad \int u^n \sin u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$$

من أجل استخدام (5.3)، يجب علينا أولاً إجراء التعويض $u = 2x$. فيكون $du = 2 \, dx$. مما يعطينا

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x)^3}{2^3} \sin 2x(2) \, dx = \frac{1}{16} \int u^3 \sin u \, du \\ &= \frac{1}{16} \left(-u^3 \cos u + 3 \int u^2 \cos u \, du \right) \end{aligned}$$

حيث استخدمنا صيغة الاختزال (5.3) مع $n = 3$. الآن، لإيجاد قيمة هذا التكامل الأخير، نستخدم صيغة الاختزال (العدد 64 في الجدول الخاص بنا)

$$\int u^n \cos u \, du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du$$

مع $n = 2$ للحصول على

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin 2x \, dx &= -\frac{1}{16} u^3 \cos u + \frac{3}{16} \int u^2 \cos u \, du \\ &= -\frac{1}{16} u^3 \cos u + \frac{3}{16} \left(u^2 \sin u - 2 \int u \sin u \, du \right) \end{aligned}$$

بتطبيق صيغة الاختزال الأولى (5.3) مرة أخرى (هذه المرة، مع $n = 1$). نحصل على

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin 2x \, dx &= -\frac{1}{16} u^3 \cos u + \frac{3}{16} u^2 \sin u - \frac{3}{8} \int u \sin u \, du \\ &= -\frac{1}{16} u^3 \cos u + \frac{3}{16} u^2 \sin u - \frac{3}{8} \left(-u \cos u + \int u^0 \cos u \, du \right) \\ &= -\frac{1}{16} u^3 \cos u + \frac{3}{16} u^2 \sin u + \frac{3}{8} u \cos u - \frac{3}{8} \sin u + c \\ &= -\frac{1}{16} (2x)^3 \cos 2x + \frac{3}{16} (2x)^2 \sin 2x + \frac{3}{8} (2x) \cos 2x - \frac{3}{8} \sin 2x + c \\ &= -\frac{1}{2} x^3 \cos 2x + \frac{3}{4} x^2 \sin 2x + \frac{3}{4} x \cos 2x - \frac{3}{8} \sin 2x + c \end{aligned}$$

كما سنرى في المثال 5.4، تتطلب بعض التكاملات تبصراً قبل استخدام جدول تكامل.

المثال 5.4 إجراء تعويض قبل استخدام جدول تكامل

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 \cos x - 1}} \, dx$$

الحل لن تجد هذا التكامل أو مقارب له على وجه الخصوص في جدول التكامل الخاص بنا. ومع ذلك، مع قليل من المحاولات، يمكننا إعادة كتابة هذا بصيغة أبسط. أولاً، استخدم صيغة ضعف الزاوية لإعادة كتابة بسط المكامل. نحصل على

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 \cos x - 1}} dx = 2 \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{4 \cos x - 1}} dx$$

تذكر أن تكون دائماً ملماً بالحدود التي هي مشتقات من حدود أخرى. هنا، لنأخذ $u = \cos x$. فيكون $du = -\sin x dx$ وإذاً،

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 \cos x - 1}} dx = 2 \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{4 \cos x - 1}} dx = -2 \int \frac{u}{\sqrt{4u - 1}} du$$

من جدولنا (انظر العدد 18)، لاحظ أن

$$(5.4) \quad \int \frac{u}{\sqrt{a + bu}} du = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a) \sqrt{a + bu} + c$$

لنأخذ $a = -1$ و $b = 4$ في (5.4). لدينا

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 \cos x - 1}} dx &= -2 \int \frac{u}{\sqrt{4u - 1}} du = (-2) \frac{2}{3(4^2)} (4u + 2) \sqrt{4u - 1} + c \\ &= -\frac{1}{12} (4 \cos x + 2) \sqrt{4 \cos x - 1} + c \end{aligned}$$

التكامل باستخدام نظام حاسوب جبري

تعدّ أنظمة الحاسوب الجبرية بعضاً من الأدوات الجديدة الأقوى التي ظهرت على مسرح الرياضيات في السنوات الـ 25 الماضية. وهي تدير السلسلة انطلاقاً من الآلات الحاسبة المحمولة إلى أنظمة البرمجيات القوية.

تركز الأمثلة التالية على بعض المشاكل النادرة التي قد تواجهها عند استخدام CAS. نحن نعترف بأننا تعمّدنا البحث عن أخطاء CAS. والخبر السار هو أنّ الأخطاء لم تكن شائعة جداً وأنّ CAS الذي نستخدمه لن يقوم بالضرورة بأي منها. كن على علم أنّ هذه عيوب في البرامج والإصدار التالي من CAS الخاص بك قد يقضي عليها تماماً. كمستخدم ذكي للتكنولوجيا، تحتاج إلى أن تكون على دراية بالأخطاء الشائعة ولديك مهارات حساب التفاضل والتكامل للتعرف على الأخطاء عند حدوثها.

أول شيء تلاحظه عند استخدام CAS لإيجاد قيمة تكامل غير محدود هو أنه يقدم عادةً دالة أصلية، بدلاً من الأكثر عمومية (التكامل غير المحدود) من خلال ترك ثابت التكامل (عيب صغير في هذا البرنامج القوي للغاية).

المثال 5.5 عيب في بعض أنظمة الحاسوب الجبرية

استخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int \frac{1}{x} dx$.

الحل العديد من CAS تعمل على إيجاد قيمة

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

(في الواقع، يخبر أحد أنظمة CAS بشأن التكامل بوصفه اللوغاريتم x ، حيث يستخدم $\ln x$ ليرمز إلى اللوغاريتم الطبيعي). ولا يعمل ذلك فقط على إغفال ثابت التكامل، لكن

لاحظ أن الدالة الأصلية هذه صالحة فقط لـ $x > 0$. تعطي آلة حاسبة شهيرة دالة أصلية الأكثر عموماً

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

والذي بالرغم من إستمراره في إغفال ثابت التكامل، يكون صالحاً على الأقل لكل $x \neq 0$. ومن ناحية أخرى، تقوم بشكل صحيح جميع CAS التي اختبرناها بإيجاد قيمة

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = -\ln 2$$

بالرغم من أن الدالة الأصلية المعلنة $\ln x$ لم يتم تعريفها في حدود التكامل.

في بعض الأحيان تكون الدالة الأصلية المبلّغ عنه بواسطة CAS غير صالحة، كما هو مكتوب، لأي قيم حقيقية لـ x ، كما في المثال 5.6. (في بعض الحالات، تقدّم CAS دالة أصلية صحيحة للحالة الأكثر تقدّماً لدالة متغيّر مركّب).

المثال 5.6 دالة أصلية غير صحيحة

إستخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int \frac{\cos x}{\sin x - 2} dx$.

الحل يعرض أحد أنظمة CAS الدوال الأصلية غير الصحيحة

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - 2} dx = \ln(\sin x - 2)$$

للوهلة الأولى، قد لا يبدو أن هذا الأمر خطأ، لا سيما وأن قاعدة السلسلة تشير إلى أنها صحيحة على الأرجح:

$$\frac{d}{dx} \ln(\sin x - 2) = \frac{\cos x}{\sin x - 2}$$

يعدّ الخطأ أكثر أهمية (وغير ملحوظ) من إساءة استخدام قاعدة السلسلة. لاحظ أن التعبير $\ln(\sin x - 2)$ غير معرّف لجميع القيم الحقيقية لـ x ، حيث $\sin x - 2 < 0$ لكل x . إنّ القاعدة العامة للدالة الأصلية التي تنطبق هنا هي

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

حيث تكون القيمة المطلقة مهمة. الدالة الأصلية الصحيحة هي $\ln |\sin x - 2| + c$ ، الذي يمكن أيضاً كتابته في صورة عندما $\ln(2 - \sin x) + c$ بما أن $2 - \sin x > 0$ لكل قيم x .

ربما أكثر الأخطاء شيوعاً التي ستواجهك هي في الواقع أخطاءك الخاصة. إذا كنت أدخلت على CAS الخاص بك مسألة في صيغة خاطئة، فقد يحلّ مسألة مختلفة عما كنت تقصدها. تم في المثال 5.7 توضيح خطأ بسيط لكن شائع.

المثال 5.7 مشكلة يخطئ فيها CAS في فهم ما تدخله

إستخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int 4x8x dx$.

الحل بعد إدخال المكامل في صورة $4x8x$ ، قدّم أحد أنظمة CAS الإجابة الفردية

$$\int 4x8x dx = 4x8xx$$

يمكنك إيجاد قيمة التكامل بسهولة (أولاً، أعد كتابة المكامل في صورة $32x^2$) لتبيّن أن ذلك غير صحيح، لكن أين كان الخطأ؟ نظراً إلى الطريقة الغريبة التي استخدمناها لكتابة المكامل، فسرّها CAS باعتبارها أربعة أمثال متغيّر اسمه $x8x$ ، وهو غير مرتبط بمتغيّر التكامل x . إنّ صيغة إجابته هي على الشكل $\int 4c dx = 4cx$.

لن تكون صيغة دالة أصلية المعلن عنها بواسطة CAS دائماً هي الأكثر ملاءمة.

المثال 5.8 صيغة غير ملائمة لدالة أصلية

استخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int x(x^2 + 3)^5 dx$.

الحل العديد من CAS تعمل على إيجاد قيمة

$$\int x(x^2 + 3)^5 dx = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{3}{2}x^{10} + \frac{45}{4}x^8 + 45x^6 + \frac{405}{4}x^4 + \frac{243}{2}x^2$$

بينما يقدم آخرون التعبير الأبسط من ذلك بكثير

$$\int x(x^2 + 3)^5 dx = \frac{(x^2 + 3)^6}{12}$$

تعدّ الإجابتان متكافئتين، على الرغم من اختلافهما بثابت. ■

سيقوم CAS عادةً بإجراء حتى التكاملات المطوّلة بسهولة.

اليوم في الرياضيات



جان سي يوكوز (1957–)

عالم رياضيات فرنسي حصل على ميدالية فيلدز لإسهاماته في الأنظمة الديناميكية.

المثال 5.9 بعض التكاملات الجيدة لاستخدام CAS

استخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int x^3 \sin 2x dx$ و $\int x^{10} \sin 2x dx$.

الحل باستخدام CAS. يمكنك الحصول بخطوة واحدة

$$\int x^3 \sin 2x dx = -\frac{1}{2}x^3 \cos 2x + \frac{3}{4}x^2 \sin 2x + \frac{3}{4}x \cos 2x - \frac{3}{8} \sin 2x + c$$

بنفس الجهد الذي يمكنك الحصول فيه على

$$\begin{aligned} \int x^{10} \sin 2x dx = & -\frac{1}{2}x^{10} \cos 2x + \frac{5}{2}x^9 \sin 2x + \frac{45}{4}x^8 \cos 2x - 45x^7 \sin 2x \\ & - \frac{315}{2}x^6 \cos 2x + \frac{945}{2}x^5 \sin 2x + \frac{4725}{4}x^4 \cos 2x \\ & - \frac{4725}{2}x^3 \sin 2x - \frac{14,175}{4}x^2 \cos 2x + \frac{14,175}{4}x \sin 2x \\ & + \frac{14,175}{8} \cos 2x + c \end{aligned}$$

إذا أردت، يمكنك حتى إيجاد قيمة

$$\int x^{100} \sin 2x dx$$

على الرغم من أنّ عددًا كبيرًا من الحدود يجعل عرض النتيجة محظورًا. فكر في القيام بذلك يدويًا، باستخدام 100 تكامل بالأجزاء أو من خلال تطبيق صيغة اختزال 100 مرة. ■

يجب أن تكون قد فهمت الفكرة الآن؛ يمكن لنظام CAS إجراء عمليات حسابية متكررة (عددية أو رمزية) لا يمكن تصور إجرائك لها يدويًا على الإطلاق. من الصعب العثور على دالة لها دالة أصلية أولى لا يمكن لنظام CAS الخاص بك العثور عليها. لنأخذ المثال التالي لتكاملٍ صعب.

المثال 5.10 تكامل صعب للغاية

جد قيمة $\int x^7 e^x \sin x dx$.

الحل فكر في ما الذي ستحتاج إليه لإيجاد قيمة هذا التكامل يدويًا ثم استخدم نظام حاسوب جبري. على سبيل المثال، يقوم أحد أنظمة CAS بعرض دالة أصلية كما يأتي:

$$\begin{aligned} \int x^7 e^x \sin x dx = & \left(-\frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{2}x^6 - \frac{21}{2}x^5 + 105x^3 - 315x^2 + 315x \right) e^x \cos x \\ & + \left(\frac{1}{2}x^7 - \frac{21}{2}x^5 + \frac{105}{2}x^4 - 105x^3 + 315x - 315 \right) e^x \sin x \end{aligned}$$

لا تحاول إجراء ذلك يدويًا إلا إذا كان لديك الكثير من الوقت والصبر. ومع ذلك، بناءً على تجربتك، لاحظ أنّ صيغة الدالة الأصلية غير مثيرة للدهشة. (على كل حال، أي نوع من الدوال يمكن أن يكون له $x^7 e^x \sin x$ كدالة أصلية خاصة بها؟) ■

ما وراء الصيغ

قد تتساءل لماذا أضعنا الكثير من الزمن في العمل على طرائق التكامل في الزمن الذي يمكنك أن تدع CAS دائماً القيام بالعمل نيابةً عنك. لا، إنها ليست لتحضيرك في حال غرقت سفينتك على ضفاف جزيرة مهجورة بدون وجود CAS معك. يمكن لنظام CAS الخاص بك حل تقريباً جميع المسائل الحسابية التي تبدو في هذا الدرس. إنما وفي حالات نادرة، قد تكون الإجابة الناتجة بواسطة CAS غير صحيحة أو مضللة وتحتاج إلى أن تكون مستعداً لذلك. الأهم من ذلك، يتطلب العديد من الأفكار الهامة في العلوم والهندسة فهماً لأساليب التكامل الأساسية.

تمارين 7.5

تمارين كتابية

1. على فرض أنه قد تم تعيينك من قبل شركة لتطوير نظام CAS جديد. ضع الخطوط العريضة لاستراتيجية تكامل رمزي. قم بتضمين أحكام تتعلق بالصيغ في جدول التكاملات في الجزء الأخير من الكتاب وطرائق التكامل المتنوعة التي درستها.
2. ناقشنا في الدرس أهمية معرفة القواعد العامة للتكامل. فكر في التكامل في المثال 5.4. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 \cos x - 1}} dx$. هل يمكن لنظام CAS الخاص بك إيجاد قيمة هذا التكامل؟ العديد من التكاملات مثل هذه والتي تظهر في التطبيقات (يوجد أصعب منها في التمارين الاستكشافية). يجب عليك القيام ببعض العمل قبل أن تدع التكنولوجيا تنهي مهمتك. لهذا الغرض، ناقش أهمية التعرف على الصيغ الأساسية وفهم طريقة عمل التعويض.

في التمارين 1-28، استخدم جدول التكاملات في الجزء الأخير من الكتاب لإيجاد دالة أصلية. ملاحظة: عند التحقق من الجزء الأخير من الكتاب أو CAS للحصول على إجابات، احذر من الدوال التي تبدو مختلفة للغاية ولكنها متكافئة (من خلال متطابقات الدوال المثلثية، على سبيل المثال).

1. $\int \frac{x}{(2+4x)^2} dx$
2. $\int \frac{x^2}{(2+4x)^2} dx$
3. $\int e^{2x} \sqrt{1+e^x} dx$
4. $\int e^{3x} \sqrt{1+e^{2x}} dx$
5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+4x^2}} dx$
6. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x (3+2 \sin x)} dx$
7. $\int_0^1 t^8 \sqrt{4-t^6} dt$
8. $\int_0^{\ln 4} \sqrt{16-e^{2t}} dt$
9. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}} dx$
10. $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{x \sqrt{x^4-9}}{x^2} dx$
11. $\int \frac{\sqrt{6x-x^2}}{(x-3)^2} dx$
12. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x \sqrt{8 \tan x - \tan^2 x}} dx$
13. $\int \tan^6 u du$
14. $\int \csc^4 u du$
15. $\int \frac{\cos x}{\sin x \sqrt{4+\sin x}} dx$
16. $\int \frac{x^5}{\sqrt{4+x^2}} dx$

17. $\int x^3 \cos x^2 dx$
18. $\int x \sin 3x^2 \cos 4x^2 dx$
19. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$
20. $\int \frac{x \sqrt{1+4x^2}}{x^4} dx$
21. $\int \frac{\sin^2 t \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 4}} dt$
22. $\int \frac{\ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$
23. $\int \frac{e^{-2/x^2}}{x^3} dx$
24. $\int x^3 e^{2x^2} dx$
25. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}} dx$
26. $\int e^{5x} \cos 3x dx$
27. $\int e^x \tan^{-1}(e^x) dx$
28. $\int (\ln 4x)^3 dx$

29. تحقق من CAS الخاص بك مقابل جميع الأمثلة الموجودة في هذا الدرس. ناقش أي أخطاء يقوم بها CAS. إن وجدت.

30. اعرف كيف يقوم CAS الخاص بك بإيجاد قيمة $\int x \sin x dx$ إذا لم تتمكن من ترك مسافة بين x و $\sin x$.

31. اجعل CAS الخاص يقوم بإيجاد قيمة $\int (\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1}) dx$. إذا حصلت على إجابة، اشرح سبب كونها خاطئة.

32. لمعرفة ما إذا كان نظام CAS الخاص بك "يعرف" التكامل بالأجزاء، قم بتجربة $\int x^3 \cos 3x dx$ و $\int x^3 e^{5x} \cos 3x dx$. لمعرفة ما إذا كان "يعرف" صيغ الاختزال، قم بتجربة $\int \sec^5 x dx$.

33. لإيجاد عدد طرائق تكامل الدوال المثلثية التي "يعرفها" نظام CAS الخاص بك، قم بتجربة $\int \sin^6 x dx$ ، $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ و $\int \tan^4 x \sec^3 x dx$.

34. اعرف إذا كان نظام CAS الخاص بك لديه أوامر خاصة (مثل، APART in Mathematica) لتفكيك كسور جزئية.

أيضاً، قم بتجربة $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+4)} dx$ و $\int \frac{3x}{(x^2+x+2)^2} dx$.

35. لمعرفة ما إذا كان نظام CAS الخاص بك "يعرف"

طريقة التعويض، قم بتجربة $\int \frac{1}{x^2(3+2x)} dx$ و $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x (3+2 \sin x)} dx$. حاول معرفة الأمور التي لا يستطيع CAS الخاص بك القيام بها؛ ابدأ بصيغة أساسية مثل

$\int \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$ وقم بتعويض دالتك المفضلة.

مع $x = e^u$ ، يصبح التكامل السابق $\int \frac{e^u}{e^u \sqrt{e^{2u}-1}} du$ الذي يمكنك استخدامه لاختبار نظام CAS الخاص بك.

36. لحساب مساحة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ لاحظ أن الربع الأيمن العلوي من القطع الناقص معطى بالصيغة

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

لكل $0 \leq x \leq a$. لذلك، مساحة القطع الناقص هي

$$4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

بك. إنَّ الفرضية (الضمنية) التي نقوم بها عادةً هي $a > 0$ ، لكن ينبغي ألا يقوم نظام CAS الخاص بك بهذه الفرضية نيابةً عنك. هل يقدم لك نظام CAS الخاص بك πab أو $\pi b|a|$ ؟

37. اشرح بإيجاز معنى قيام CAS الخاص بك بإعادة $\int f(x) dx$ عند طلب إيجاد قيمة $\int f(x) dx$.

تمارين استكشافية

1. يستكشف هذا التمرين جانبين من مسألة مشهورة للغاية تدعى مسألة منحنى الزمن الأقصر. تخيل خرزة تنزلق إلى أسفل في سلك رفيع يمتد في شكل ما من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(\pi, -2)$. فرضاً أن الجاذبية تسحب الخرزة لأسفل ولكن لا يوجد أي احتكاك أو قوة أخرى تؤثر على الخرزة. يكون من السهل تحليل هذا الموقف باستخدام **المعادلات الوسيطة** حيث لدينا دوال $x(u)$ و $y(u)$ مع الأخذ في الاعتبار موقع الخرزة الأفقي والرأسي بدلالة المتغير u . إنَّ

$$\begin{cases} x(u) = \pi u \\ y(u) = -2u \end{cases}$$
 أمثلة المسارات التي قد تتبعها الخرزة هي

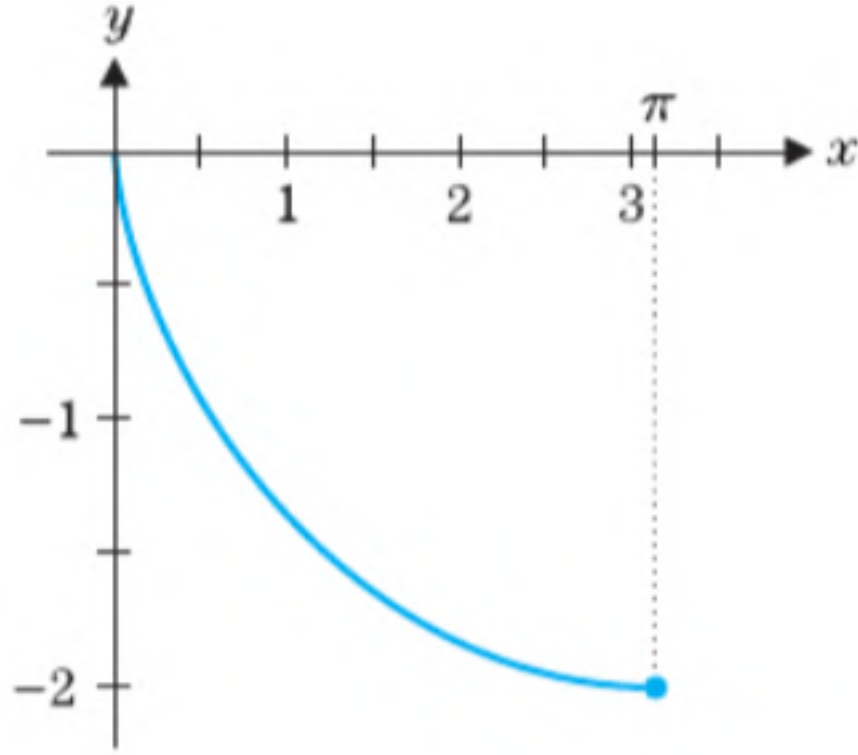
$$\begin{cases} x(u) = \pi u - \sin \pi u \\ y(u) = \cos \pi u - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x(u) = \pi u \\ y(u) = 2(u-1)^2 - 2 \end{cases}$$

الحالات، تنطلق الخرزة من نقطة الأصل $(0, 0)$ لـ $u = 0$ وتنتهي عند $(\pi, -2)$ لـ $u = 1$. مثل كل مسار بيانيًا على حاسبة بيانية. المسار الأول هو مستقيم والثاني قطع مكافئ والثالث منحنى خاص يسمى دويري. يبلغ الزمن الذي تستغرقه خرزة للانتقال في مسار معين

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^1 \sqrt{\frac{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2}{-2y(u)}} du$$

حيث g هو ثابت الجاذبية. احسب هذه الكمية للمستقيم والقطع المكافئ. اشرح سبب اعتبار القطع المكافئ بمثابة مسار أسرع للخرزة لتنزلق، على الرغم من أنَّ المستقيم أقصر في المسافة. (فكر أي ثل سيكون أسرع للتزلج عليه نزولاً). يمكن إثبات أنَّ الدويري هو أسرع مسار ممكن. حاول إحضار CAS الخاص بك لحساب الزمن الأمثل. بمقارنة التمثيلات البيانية للقطع المكافئ والدويري، ما هي الميزة المهمة الموجودة لدى الدويري في بداية المسار؟

2. اتضح أنَّ الدويري المذكور في التمرين الاستكشافي 1 له ميزة مذهشة، بالإضافة إلى توفيره أسرع زمن (والذي هو أساساً ما يعنيه المصطلح منحنى الزمن الأقصر). المسار موضح في الشكل.



على فرض أنه بدلاً من بدء انتقال الخرزة من النقطة $(0, 0)$ يبدأ انزلاق الخرزة من المنتصف لأسفل المسار عند $x = c$. كيف ستتم مقارنة زمن بلوغ الجزء السفلي من $x = c$ بالزمن الكلي من $x = 0$ ؟ لاحظ أنَّ الإجابة ليست واضحة، حيث إنَّ كلما بدأت من أسفل، ستقل السرعة التي ستكتسبها الخرزة. إذا كانت $x = c$ مقابلة لـ $u = a$ ، يتم إعطاء زمن بلوغ الجزء

$$\text{السفلي بالصيغة } \frac{\pi}{\sqrt{g}} \int_a^1 \sqrt{\frac{1 - \cos \pi u}{\cos a\pi - \cos \pi u}} du \text{ إذا}$$

$a = 0$ (وهي أنَّ الخرزة تبدأ من الجزء العلوي). يكون الزمن $\pi/\sqrt{g}$ (التكامل يساوي 1). إذا كان لديك نظام CAS جيد للغاية، حاول إيجاد قيمة التكامل للعديد من قيم a بين 0 و 1. إذا لم يتمكن نظام CAS الخاص بك التعامل معه، قم بتقريب التكامل عددياً. ينبغي أن تكتشف الحقيقة المدهشة حول أنَّ التكامل دائماً يساوي 1. يقوم أيضاً الدويري بحل مسألة الزمن المتشابه.

نمذجة المعادلات التفاضلية

مسائل النمو والتضائل

في هذا العصر، ندرك جميعاً كيفية تسبب العدوى عن طريق الكائنات الحية الدقيقة مثل الإشريكية القولونية (إي كولاي) في نقل المرض. يمكن للعديد من الكائنات الحية (مثل إي كولاي) أن تتكاثر في أجسادنا بمعدل سريع جداً، ساحقة دفاعات أجسادنا الطبيعية بسبب إنتاجها لكمية هائلة من السموم. ويبيّن الجدول في الهامش عدد بكتيريا إي كولاي (بملايين من البكتيريا في كل ملتر) في مزرعة مختبر يتم قياسها كل نصف ساعة خلال فترة التجربة. لقد وضعنا مخططاً لعدد البكتيريا في كل ملتر مقابل الزمن في الشكل 7.2. ما هذا الشيء الذي يمكن أن تقول عنه أنه يشبه التمثيل البياني؟ إذا قلت "دالة أسية"، فتخمينك صحيح. لقد أظهر تحليل دقيق للبيانات التجريبية أنّ العديد من المجتمعات تنمو بمعدل يتناسب مع مستواها الحالي. تتم ملاحظة هذا الأمر بسهولة تامة في المستنبتات البكتيرية، حيث تتكاثر البكتيريا بالانشطار الثنائي البسيط (أي أنّ كل خلية تتكاثر بالانقسام إلى خليتين). وفي هذه الحالة، يتناسب المعدل الذي تنمو به المستنبتات البكتيرية طردياً مع المجتمع الحالي (حتى يحين الزمن الذي تصبح فيه الموارد نادرة أو يصبح الاكتظاظ عاملاً مقيّداً). وإذا كانت $y(t)$ تمثل عدد البكتيريا في مزرعة ما عند الزمن t ، فإنّ معدل التغيّر في المجتمع بمعلومية الزمن يصبح $y'(t)$. إذًا، بما أنّ $y'(t)$ متناسب مع $y(t)$ ، فيكون لدينا

الزمن (ساعات)	عدد البكتيريا (مليون لكل mL)
0	1.2
0.5	2.5
1	5.1
1.5	11.0
2	23.0
2.5	45.0
3	91.0
3.5	180.0
4	350.0

$$(6.1) \quad y'(t) = ky(t)$$

لبعض التناسب الثابت k (النمو ثابت). بما أنّ المعادلة (6.1) تتضمن اشتقاقاً لدالة مجهولة، فإننا نطلق عليها المعادلة التفاضلية. إنّ هدفنا هو حلّ المعادلة التفاضلية، أي، إيجاد الدالة $y(t)$. فرضاً أنّ $y(t) > 0$ (وهذه الفرضية معقولة، لأنّ $y(t)$ تمثل مجتمعا)، فيكون لدينا

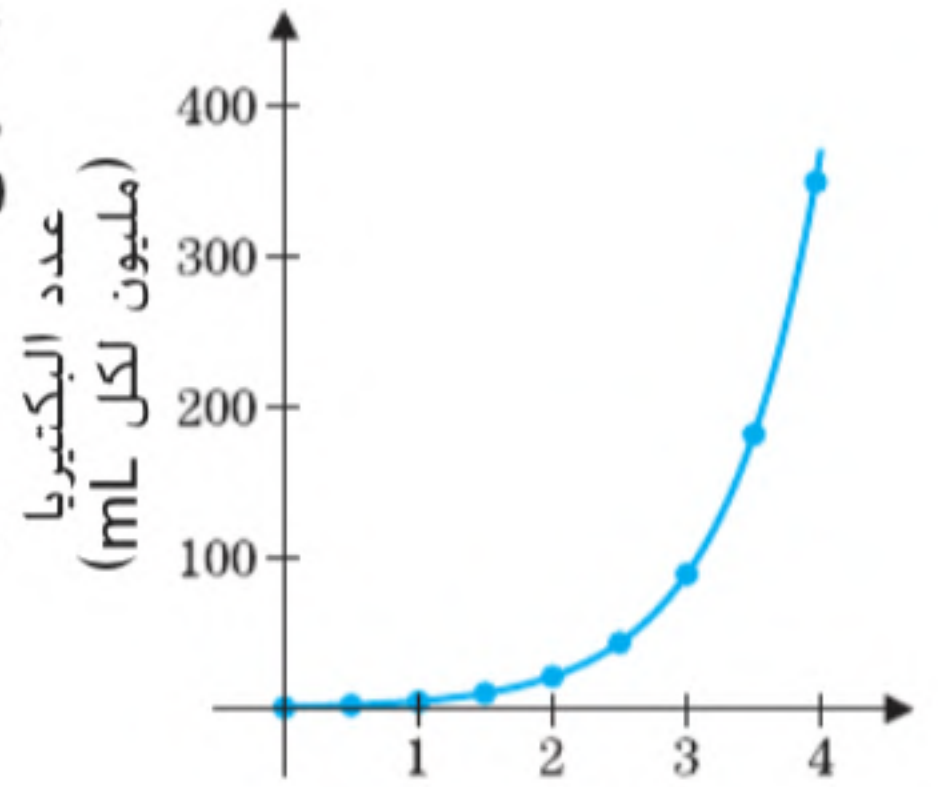
$$(6.2) \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = k$$

مع تكامل كلٍ من طرفي المعادلة (6.2) بالنسبة إلى t ، فإننا نحصل على

$$(6.3) \quad \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int k dt$$

وبالتعويض $y = y(t)$ في التكامل على الطرف الأيسر ولدينا $dy = y'(t) dt$. تصبح المعادلة (1.3) على الصورة

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dt$$



الزمن (ساعات)

الشكل 7.2
نمو البكتيريا

بإجراء هذه التكاملات، فإننا نحصل على

$$\ln |y| + c_1 = kt + c_2$$

حيث c_1 و c_2 عددين ثابتين للتكاملين. بطرح c_1 من كلا الطرفين، نحصل على

$$\ln |y| = kt + (c_2 - c_1) = kt + c$$

لعدد ثابت معين c . بما أن $y(t) > 0$ ، فإننا نحصل على

$$\ln y(t) = kt + c$$

وبأخذ أسس طرفي المعادلة، نجد أن

$$y(t) = e^{\ln y(t)} = e^{kt+c} = e^{kt} e^c$$

بما أن c عدد ثابت إفتراضي، فإننا نكتب $A = e^c$ ونحصل على

$$y(t) = Ae^{kt} \quad (6.4)$$

نشير إلى (6.4) على أنه **الحل العام** للمعادلة التفاضلية (6.1). لكل $k > 0$ ، فإن المعادلة (6.4) تسمى **قانون النمو الأسي** ولكل $k < 0$ ، فتسمى المعادلة **قانون التضاؤل الأسي**. (فكر في الفرق).

في المثال 6.1، رأينا كيفية توقع قانون النمو الأسي لعدد الخلايا في مستنبت بكتيري.

المثال 6.1 النمو الأسي لمستعمرة بكتيريا

مستنبت بكتيري ملقح حديثاً بكتيريا عقدية A (مجموعة مشتركة من الكائنات الحية الدقيقة التي تسبب التهاب الحلق) تتكوّن من 100 خلية. عندما تم فحص المستنبت بعد 60 دقيقة، ثبت أنه ثمة 450 خلية حية. فرضاً أن النمو أسي، حدّد عدد الخلايا في أيّ زمن t (يقاس بالدقائق) وجد الزمن المضاعف.

الحل النمو الأسي يعني أن

$$y'(t) = ky(t)$$

$$y(t) = Ae^{kt} \quad (6.4)$$

(6.5)

حيث A و k هما عددان ثابتان يجب تحديدهما. إذا وضعنا الزمن الابتدائي عند $t = 0$ ، فسنجد أن

$$y(0) = 100 \quad (6.6)$$

تسمى المعادلة (6.6) **الشرط الابتدائي**. بوضع $t = 0$ في (6.5)، فإننا نحصل الآن على

$$100 = y(0) = Ae^0 = A$$

$$y(t) = 100 e^{kt}$$

يمكننا استخدام الملاحظة الثانية لتحديد قيمة ثابت النمو k لدينا

$$450 = y(60) = 100 e^{60k}$$

وبقسمة كلا الطرفين على 100 وأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين، فإننا نحصل على

$$\ln 4.5 = \ln e^{60k} = 60k$$

$$k = \frac{\ln 4.5}{60} \approx 0.02507$$

لدينا الآن قانون يمثل عدد الخلايا الحالية عند أي زمن t :

$$y(t) = 100 e^{kt} = 100 \exp\left(\frac{\ln 4.5}{60} t\right)$$

في الشكل 7.3، أنظر التمثيل البياني للنمو البكتيري المخطط خلال أول 120 دقيقة. يوجد سؤال إضافي آخر مهم لعلماء الأحياء المجهرية وهو **مضاعفة الزمن**، أي الزمن الذي يستغرقه عدد الخلايا لكي يتضاعف. يمكننا إيجاد ذلك بالحل لإيجاد الزمن t الذي عنده $y(t) = 2y(0) = 200$. لدينا

$$200 = y(t) = 100 \exp\left(\frac{\ln 4.5}{60} t\right)$$

وبقسمة كلا الطرفين على 100 وأخذ اللوغاريتمات، نحصل على

$$\ln 2 = \frac{\ln 4.5}{60} t$$

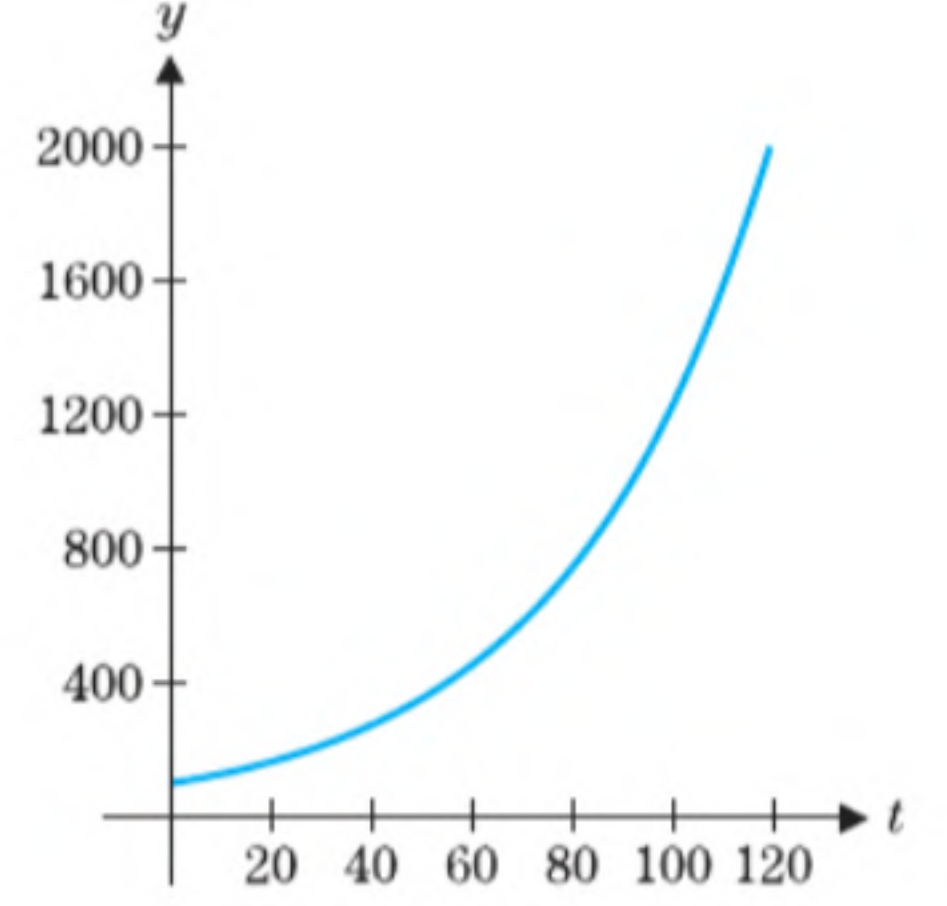
$$t = \frac{60 \ln 2}{\ln 4.5} \approx 27.65$$

إذًا، الزمن المضاعف لمستنبت بكتيريا عقدية A يبلغ حوالي 28 دقيقة. يعتمد الزمن المضاعف للخلية البكتيرية على سلالة معينة من البكتيريا، وكذلك نوعية وكمية الإمدادات الغذائية ودرجة الحرارة والعوامل البيئية الأخرى. وعلى الرغم من ذلك، لا يعتمد ذلك على الجماعة الأحيائية الابتدائية. وهنا، يمكنك بكل سهولة التحقق من وصول عدد الجماعة الأحيائية إلى 400 في زمن:

$$t = \frac{120 \ln 2}{\ln 4.5} \approx 55.3$$

(يساوي تمامًا ضعف الزمن الذي يستغرقه هذا العدد للوصول إلى 200).

أي أنّ عدد أفراد المجتمع الابتدائي يتضاعف من 100 إلى 200 في حوالي 28 دقيقة وتضاعف مرة أخرى (إلى 400) في 28 دقيقة أخرى وهكذا. ■



الشكل 7.3

$$y = 100 e^{\left(\frac{\ln 4.5}{60} t\right)}$$

تتوافق العديد من الظواهر الفيزيائية مع قوانين النمو أو التضاؤل الأسي. على سبيل المثال، أظهرت التجارب أنّ معدّل تضاؤل أحد العناصر المشعة يتناسب طردياً مع الكمية الحالية. (تذكر أنّ العناصر المشعة هي عناصر غير مستقرة كيميائياً وتحلّل تدريجياً إلى عناصر أخرى، أكثر استقراراً). لتكن $y(t)$ هي كمية (كتلة) أحد العناصر المشعة الحالية عند الزمن t . سنجد إذا أنّ معدل تغير (معدل تضاؤل) $y(t)$ يساوي

$$(6.7) \quad y'(t) = ky(t)$$

لاحظ أنّ (6.7) هي تحديداً المعادلة التفاضلية نفسها مثل (1.1)، التي واجهتك في المثال 6.1 لنمو البكتيريا ولذلك، من (1.4)، نجد أنّ

$$y(t) = Ae^{kt}$$

لكل الأعداد الثابتة A و k (هنا، يجب تحديد ثابت التضاؤل)

ومن الشائع مناقشة معدل التضاؤل للعناصر المشعة بدلالة نصف العمر، الزمن المطلوب لنصف الكمية الابتدائية للاضمحلال إلى عناصر أخرى. على سبيل المثال، لقد حسب العلماء أنّ فترة نصف العمر للكربون-14 (^{14}C) هي 5730 عاماً تقريباً. أي أنه إذا كان لديك اليوم جرامان من ^{14}C وعدت بعد 5730 عاماً، فسيكون لديك 1g تقريباً من ^{14}C المتبقي. إنّ طول مدة نصف العمر والحقيقة التي تقرّر أنّ الكائنات الحية تمتص ^{14}C باستمرار مما يجعل قياسات ^{14}C مفيدة في تحديد التاريخ باستخدام الكربون المشع. (انظر التمرين الموضوع للاطلاع على مزيد من المعلومات حول هذا التطبيق المهم).

المثال 6.2 الاضمحلال الإشعاعي

إذا كان لديك 50 g من ^{14}C اليوم، فما مقدار الكمية المتبقية بعد 100 عام؟

الحل لتكن $y(t)$ هي الكتلة (بالجرام) من ^{14}C الآن عند الزمن t . إذا، لدينا

$$y'(t) = ky(t)$$

$$y(t) = Ae^{kt} \quad \text{وكما رأينا بالفعل،}$$

الشرط الابتدائي هو $y(0) = 50$. إذا

$$50 = y(0) = Ae^0 = A$$

$$y(t) = 50e^{kt} \quad \text{و}$$

لإيجاد ثابت الاضمحلال k ، نستخدم نصف العمر:

$$25 = y(5730) = 50e^{5730k}$$

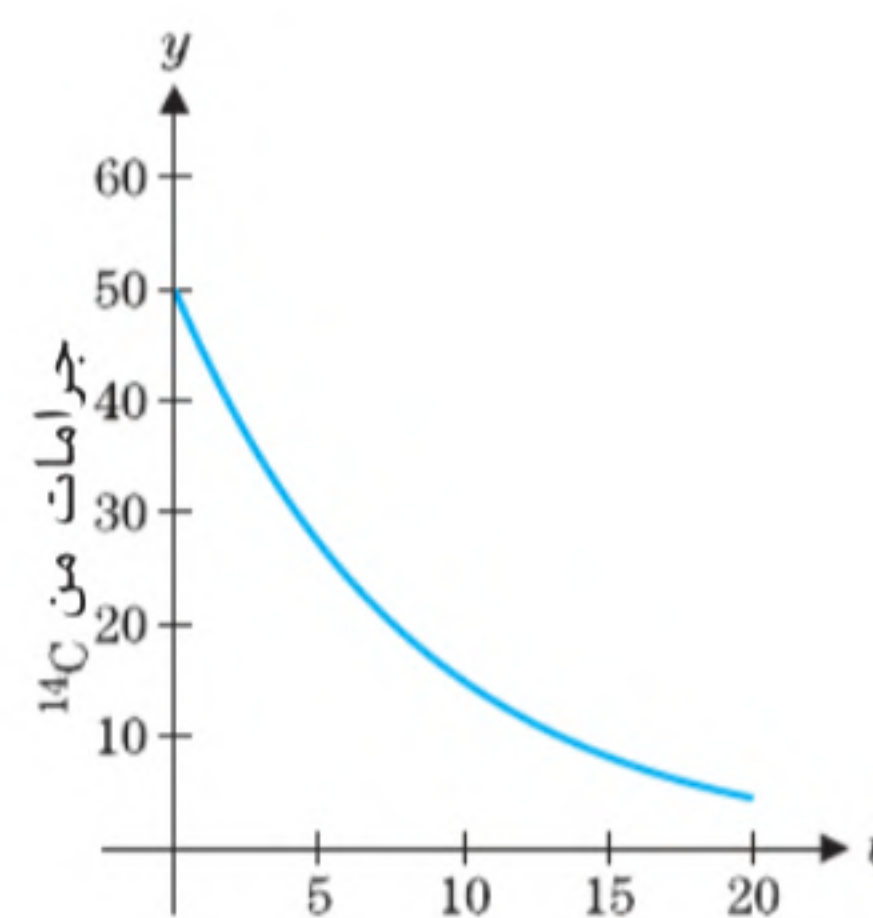
وبقسمة كلا الطرفين على 50 وبأخذ اللوغاريتمات، نجد أنّ

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{5730k} = 5730k$$

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5730} \approx -1.20968 \times 10^{-4} \quad \text{حيث}$$

يمكن رؤية تمثيل بياني لكتلة ^{14}C كدالة للزمن، في الشكل 7.4. لاحظ أنّ الجدول الزمني الكبير موضح. ويجب أن يمنحك ذلك فكرة عن معدل تضاؤل ^{14}C البطيء جداً. وأخيراً، لاحظ أنه إذا بدأنا باستخدام 50 g إذا ستكون الكمية المتبقية بعد 100 عام تساوي

$$y(100) = 50e^{100k} \approx 49.3988 \text{ g}$$



الشكل 7.4

تضاؤل ^{14}C

يوجد مبدأ فيزيائي يشبه مبادئ الرياضيات وهو قانون نيوتن للتبريد. إذا كان إدخال كائن ساخن في محيط بارد (أو بطريقة مكافئة، كائن بارد في محيط دافئ)، فإنّ المعدل الذي يبرد به الكائن (أو يصبح دافئاً) لا يتناسب مع درجة حرارته، ولكن بدلاً من ذلك، فإنه يتناسب مع الفرق في درجة الحرارة بين الكائن والمناطق المحيطة به. وبطريقة استخدام الرموز، لتكن $y(t)$ تمثل درجة حرارة الكائن عند الزمن t ولتكن T_a تمثل درجة الحرارة المحيطة (درجة الحرارة المحيطة، التي نفترض أنها ثابتة). فسنحصل على المعادلة التفاضلية

$$(6.8) \quad y'(t) = k[y(t) - T_a]$$

لاحظ أنّ المعادلة (6.8) ليست هي المعادلة التفاضلية نفسها التي تصف النمو أو التضاؤل الأسي. (قارن بينهما؛ ما الفرق؟) وحتى مع ذلك، يمكننا أن نقرب من إيجاد حل بالطريقة نفسها. وفي حالة التبريد، فنحن نفترض أنّ

$$T_a < y(t)$$

(لماذا تعدّ هذه الفرضية مقبولة؟) إذا قسمنا كلا طرفي المعادلة (6.8) على $y(t) - T_a$ ومن ثم أجرينا عملية التكامل لكلا الطرفين، فإننا نحصل على

$$(6.9) \quad \int \frac{y'(t)}{y(t) - T_a} dt = \int k dt = kt + c_1$$

لاحظ أنه يمكننا إجراء التكامل على الطرف الأيسر بالتعويض $u = y(t) - T_a$. حيث $du = y'(t) dt$. إذا، سنجد أنّ

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(t)}{y(t) - T_a} dt &= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c_2 = \ln |y(t) - T_a| + c_2 \\ &= \ln [y(t) - T_a] + c_2, \end{aligned}$$

بما أنّ $y(t) - T_a > 0$ من المعادلة (6.9)، فإننا نحصل على

$$\ln [y(t) - T_a] = kt + c \quad \text{أو} \quad \ln [y(t) - T_a] + c_2 = kt + c_1$$

حيث دمجنا ثابتي التكامل. وبأخذ الأسس في كلا الطرفين، فإننا نحصل على

$$y(t) - T_a = e^{kt+c} = e^{kt} e^c$$

أخيرًا، وبفرض سهولة العمل، فإننا نكتب $A = e^c$. لنحصل على

$$y(t) = Ae^{kt} + T_a$$

حيث A و k هما عدداً ثابتان يجب تحديدهما.

سنوضح قانون نيوتن للتبريد في المثال 6.3.

المثال 6.3 قانون نيوتن لتبريد فنجان من القهوة

تبلغ درجة حرارة فنجان من القهوة السريعة 80°C عندما يسكب طازجا. بعد دقيقتين في غرفة درجة حرارتها 20°C ، تم تبريد القهوة حتى وصلت إلى 75°C . جـد درجة الحرارة في أي زمن t وجـد الزمن الذي تصل فيه درجة حرارة القهوة إلى 50°C .

الحل لتكن $y(t)$ هي درجة حرارة القهوة عند الزمن t فنجد أنّ

$$y'(t) = k[y(t) - 20]$$

متابعةً لما ذكر أعلاه، يمكننا الحصول على

$$y(t) = Ae^{kt} + 20$$

لاحظ أنّ الشرط الابتدائي هنا هي درجة الحرارة الابتدائية، $y(0) = 80$. يعطينا ذلك

$$80 = y(0) = Ae^0 + 20 = A + 20$$

$$\text{حيث } A = 60 \quad \text{و} \quad y(t) = 60e^{kt} + 20$$

ويمكننا الآن استخدام درجة الحرارة الثانية التي تم قياسها لإيجاد حل للعدد الثابت k . لدينا

$$75 = y(2) = 60e^{2k} + 20$$

ب طرح 20 من كلا طرفي المعادلة والقسمة على 60، فإننا نحصل على

$$e^{2k} = \frac{75 - 20}{60} = \frac{55}{60}$$

وبأخذ اللوغاريتمات من كلا الطرفين، فإننا نحصل على

$$2k = \ln\left(\frac{55}{60}\right)$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{55}{60} \right) \approx -0.0435056 \quad \text{ومن ثم،}$$

تم عرض رسم بياني لدرجة الحرارة المخططة مقابل الزمن في الشكل 7.5. من الشكل 7.5، قد تلاحظ انخفاض درجة الحرارة في ما يبدو إلى 50°C بعد حوالي 16 دقيقة. يمكننا إيجاد حل ذلك بطريقة رمزية بإيجاد الزمن t حيث أن

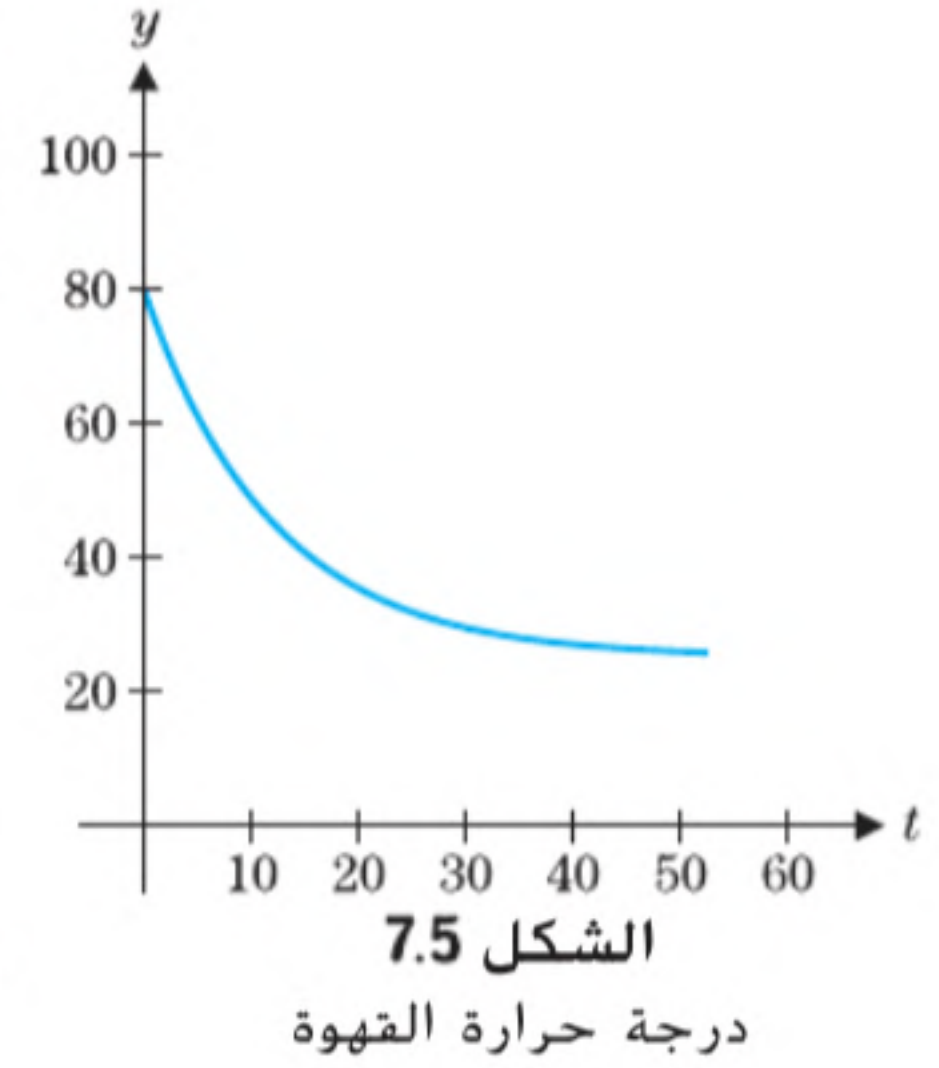
$$50 = y(t) = 60 e^{kt} + 20$$

ليس من الصعب حل ذلك للحصول على

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{5}{6} \approx 15.93 \text{ دقيقة}$$

التفاصيل متروكة كتمرين.

المربحة المركبة



إذا وافق أحد المصارف أن يدفع لك مربحة 8% (سنوياً) على مبلغ استثمارك AED 10,000. إذا في نهاية العام، سيكون لديك

$$\text{AED } 10,000 + (0.08)\text{AED } 10,000 = \text{AED } 10,000(1 + 0.08) = \text{AED } 10,800$$

من ناحية أخرى، إذا وافق البنك على دفع المربحة مرتين في العام بالمعدل السنوي 8% نفسه، سوف تكون الفائدة $\frac{8}{2}\%$ مرتين كل عام. في نهاية العام، ستحصل على

$$\begin{aligned} \text{AED } 10,000 \left(1 + \frac{0.08}{2}\right) \left(1 + \frac{0.08}{2}\right) &= \text{AED } 10,000 \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^2 \\ &= \text{AED } 10,816 \end{aligned}$$

و بالاستمرار على هذا النمط، لاحظ أن دفع الفائدة (المركبة) شهرياً سوف يكون $\frac{8}{12}\%$ كل شهر (فترة). ينتج عن ذلك رصيد قدره

$$\text{AED } 10,000 \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} \approx \text{AED } 10,830.00$$

علاوة على ذلك، إذا كانت المربحة تزداد يومياً، فسيكون معك في نهاية المطاف

$$\text{AED } 10,000 \left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{365} \approx \text{AED } 10,832.78$$

لا بد أن يكون واضحاً أنه كلما زاد عدد المرات الذي تتضاعف فيها المربحة المركبة، سوف تكون المربحة أكبر. لنطرح سؤالاً معقولاً عما إذا كان هناك نهاية لقيمة المربحة يمكن أن يعود على استثمار معين بمقدار محدد من المربحة. إذا كانت n هي عدد المرات في السنة التي تزداد فيه المربحة، فنريد حساب النسبة المئوية السنوية للمردود (APY) مع فائدة مركبة مستمرة.

$$\text{APY} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.08}{n}\right)^n - 1$$

لتحديد هذه النسبة، يجب مراجعة ذلك (انظر الوحدة 2)

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

لاحظ أنه إذا جعلنا التغير في المتغير $n = 0.08m$ ، فسنحصل على

$$\begin{aligned} \text{APY} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.08}{0.08m}\right)^{0.08m} - 1 \\ &= \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^{0.08} - 1 \\ &= e^{0.08} - 1 \approx 0.083287 \end{aligned}$$

ومع المربحة المركبة المستمرة، سيكون ربحك حينئذٍ حوالي 8.3% أو

$$\text{AED } 10,000(e^{0.08} - 1) \approx \text{AED } 832.87$$

في المراجعة، سيصل استثمارك إلى قيمة إجمالية AED 10,832.87. وعموماً، على فرض أنك تستثمر AEDP بمراجعة سنوية r مركبة n مرات كل عام. إذا ستكون قيمة استثمارك بعد t سنوات هي

$$\text{AEDP} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

بمراجعة مركبة مستمرة (أي بأخذ النهاية عندما $n \rightarrow \infty$)، فيكون:

$$(6.10) \quad \text{AEDP}e^{rt}$$

وبدلاً من ذلك، إذا كان $y(t)$ هو قيمة استثمارك بعد سنوات t بمراجعة مركبة مستمرة، سيكون معدل التغير $y(t)$ متناسباً مع $y(t)$. أي إن:

$$y'(t) = ry(t)$$

حيث r هو معدل المراجعة السنوية. من (6.4)، لدينا

$$y(t) = Ae^{rt}$$

لاستثمار ابتدائي يقدر بـ AEDP. نجد أن

$$\text{AEDP} = y(0) = Ae^0 = A$$

$$y(t) = \text{AEDP}e^{rt}$$

حيث

وهذا هو الشيء نفسه مثل (6.10).

المثال 6.4 مقارنة بين أنواع المراجعة المركبة

إذا استثمرت AED 7000 بمعدل مراجعة سنوية 5.75%. قارن قيمة استثمارك بعد 5 سنوات بأنواع مختلفة لزمن المراجعة المركبة.

الحل مع مراجعة مركبة سنوية، تصبح القيمة

$$\text{AED } 7000 \left(1 + \frac{0.0575}{1}\right)^5 \approx \text{AED } 9257.63$$

مع مراجعة مركبة شهرية، تصبح القيمة

$$\text{AED } 7000 \left(1 + \frac{0.0575}{12}\right)^{12(5)} \approx \text{AED } 9325.23$$

مع مراجعة مركبة يومية، نحصل على

$$\text{AED } 7000 \left(1 + \frac{0.0575}{365}\right)^{365(5)} \approx \text{AED } 9331.42$$

وأخيراً، بمراجعة مركبة مستمرة، تصبح القيمة

$$\text{AED } 7000 e^{0.0575(5)} \approx \text{AED } 9331.63$$

الرياضيات المستخدمة لوصف مراجعة مركبة تنطبق أيضاً على الحسابات التي تتناقص قيمتها.

المثال 6.5 انخفاض قيمة الأصول

(a) على فرض أن قيمة أحد الأصول هي AED 10,000 تتناقص باستمرار بمعدل ثابت 24% في كل عام. جـد قيمته بعد 10 سنوات؛ وبعد 20 سنة. (b) قارن بين هذه القيم وأحد الأصول قيمته AED 10,000 ولن يكون له قيمة خلال 20 عاماً باستخدام الانخفاض الخطي.

الحل القيمة $v(t)$ لأي كمية تتغير بمعدل ثابت r تصبح $v' = rv$. هنا، $r = -0.24$. حيث

$$v(t) = Ae^{-0.24t}$$

بما أن قيمة الأصل الابتدائية هي 10,000، فيصبح لدينا

$$10,000 = v(0) = Ae^0 = A$$

$$v(t) = 10,000 e^{-0.24t}$$

ولدينا الآن

وعند الزمن $t = 10$ ، تصبح قيمة الأصل

$$\text{AED } 10,000 e^{-0.24(10)} \approx \text{AED } 907.18$$

وعند الزمن $t = 20$ ، تنخفض القيمة إلى

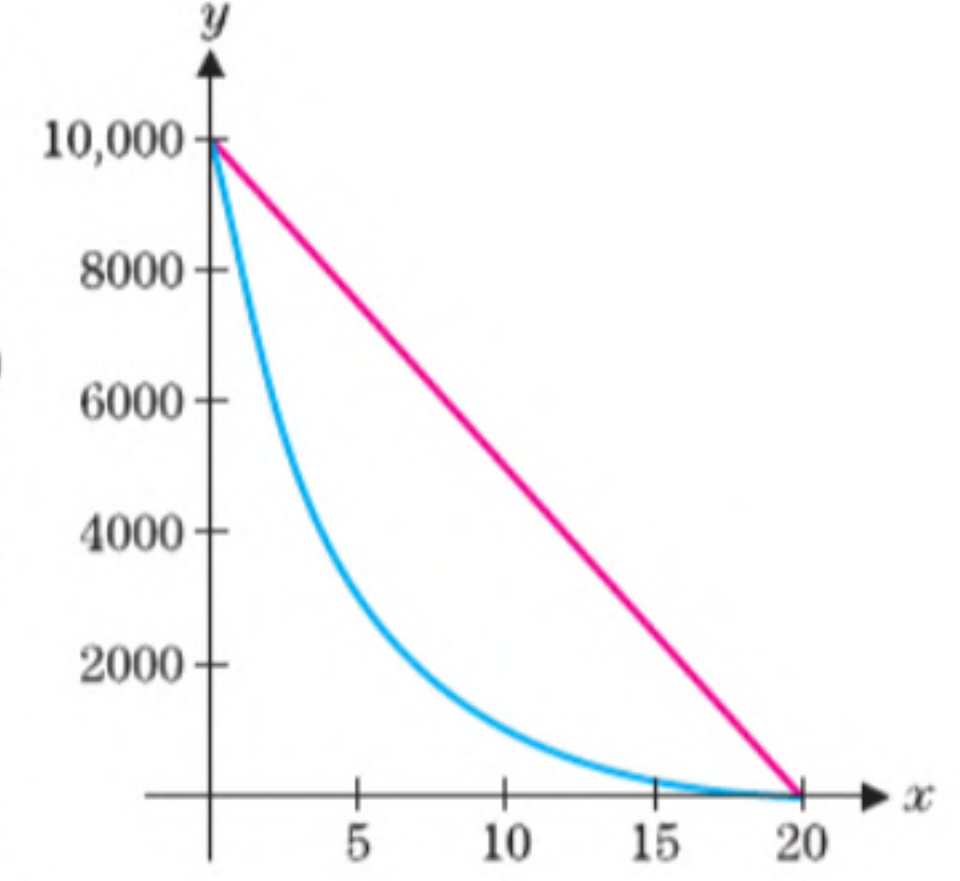
$$\text{AED } 10,000 e^{-0.24(20)} \approx \text{AED } 82.30$$

للجزء (b). إنَّ التناقص الخطي يعني أننا نستخدم دالةً خطية $v(t) = mt + b$ لقيمة الأصل. نبدأ من $v(0) = 10,000$ وننتهي عند $v(20) = 0$. من $v(0) = 10,000$ يصبح لدينا $b = 10,000$ وباستخدام النقاط $(0, 10,000)$ و $(20, 0)$ ، يمكننا حساب الميل

$$m = \frac{10,000}{-20} = -500$$

$$v(t) = -500t + 10,000$$

عند الزمن $t = 10$ ، $v(10) = \text{AED } 5000$. لاحظ أنَّ هذا إلى حد كبير أكثر من حوالي $\text{AED } 900$ تلك القيمة التي يطينا إياها التناقص الأسّي. وعند الزمن $t = 20$ ، مع ذلك، تصل قيمة التناقص الخطي عند $\text{AED } 0$ إلى أقل من قيمة التناقص الأسّي عند $\text{AED } 82.30$. يوضح التمثيل البياني في الشكل 7.6 هذه المقارنات.



الشكل 7.6

التناقص الخطي مقابل
التناقص الأسّي

ما بعد الصيغ

مع فهم أساسي للمعادلات التفاضلية، يمكنك نمذجة مجموعة متنوعة من الظواهر الفيزيائية التي تنشأ في الاقتصاد والعلوم والهندسة. إنَّ فهم الفرضيات التي تدخل في النموذج يسمح لك بتفسير معنى الحل في سياق المشكلة الأصلية. علاوة على ذلك، فإنَّ جزءًا من قوة الرياضيات يكمن في عموميتها. وفي هذه الحالة، قد تعمل معادلة تفاضلية معيّنة على نمذجة مجموعة من الظواهر المختلفة اختلافًا كبيرًا. وبهذا المعنى، فإننا نستفيد من علمنا بقليل من الرياضيات. وبعد إيجاد حل لمضاعفة الزمن في المثال 6.1، إذا تمَّ إخبارك أنَّ قيمة الاستثمار أو حجم الورم تمَّ نمذجتها بالمعادلة نفسها، فلن تحتاج إلى إعادة حل أي معادلات لإيجاد أزمنة مضاعفة الاستثمار أو حجم الورم.

التمارين 7.6

تمارين كتابية

4. في أمثلة النمو والتضائل، اتضح أنَّ الثابت A مساوٍ للقيمة الابتدائية. في أمثلة التبريد، اتضح أنَّ الثابت A غير مساوٍ للقيمة الابتدائية. اشرح سبب اختلاف أمثلة التبريد.

في التمارين 1–8، جِد حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة تحقق الشرط الابتدائي المشار إليه.

1. $y' = 4y, y(0) = 2$
2. $y' = 3y, y(0) = -2$
3. $y' = -3y, y(0) = 5$
4. $y' = -2y, y(0) = -6$
5. $y' = 2y, y(1) = 2$
6. $y' = -y, y(1) = 2$
7. $y' = y - 50, y(0) = 70$
8. $y' = -0.1y - 10, y(0) = 80$

1. تتسم الدالة الخطية بالميل الثابت. إذا أظهر عدد سكان زيادة عددية ثابتة عاماً بعد عام، فسر لماذا يمكن تمثيل عدد السكان بدالة خطية. إذا أظهر عدد السكان زيادةً مئوية ثابتةً بدلاً من ذلك، فسر لماذا يمكن تمثيل عدد السكان بدالة أسية.
2. إذا كان لعدد السكان معدل مواليد ثابت ومعدل وفاة ثابت (أصغر من معدل المواليد)، فصف ما سيبدو عليه السكان مع مرور الزمن. في الولايات المتحدة، هل معدل الوفيات في زيادة أم تناقص أم يبقى كما هو؟ لماذا إذن يوجد اهتمام بشأن الحد من معدل المواليد؟
3. اشرح، من الناحية المالية، لماذا معدل مربحة معيّن كلما زاد عدد مرات المربحة المركبة. زاد المال في الحساب في نهاية العام.

تتضمن التمارين 14-9 النمو الأسّي.

9. على فرض أنّ مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 400 خلية. وبعد ساعة واحدة، يتضاعف عدد أفراد المجتمع إلى 800. (a) حدّد عدد أفراد المجتمع بسرعة بعد 3 ساعات. (b) جدّ معادلة للمجتمع في أيّ زمن. (c) كم سيكون عدد أفراد المجتمع بعد 3.5 ساعات؟
10. على فرض أنّ مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 100 خلية. وبعد ساعتين، تضاعف عدد أفراد المجتمع إلى 400. (a) حدّد عدد الأفراد بعد 6 ساعات. (b) جدّ معادلة للمجتمع في أيّ زمن. (c) كم سيكون عدد الأفراد بعد 7 ساعات؟
11. على فرض أنّ مستنبت بكتيري يتضاعف تعدادة كل 4 ساعات. إذا كان عدد أفراد المجتمع 100 في البداية، (a) فحدّد سريعاً متى تصل إلى 400. (b) جدّ معادلة للمجتمع في أيّ زمن. (c) حدّد الزمن الذي يصل فيه عدد الأفراد إلى 6000.
12. على فرض أنّ مستنبت بكتيري يتضاعف تعدادة ثلاث مرات كل 5 ساعات. إذا كان عدد أفراد المجتمع 200 في البداية، (a) حدّد سريعاً متى تصل إلى 5400. (b) جدّ معادلة للمجتمع في أيّ زمن. (c) حدّد متى يصل عدد الأفراد إلى 20,000.
13. على فرض أنّ تعداد إي كولاي يتضاعف كل 20 دقيقة. أزال علاج للعدوى 90% من إي كولاي الحالية وهو الزمن المناسب لإنجاز ما يلي. بدأ أفراد المجتمع بالعدد 10^8 . ونمت لمدة T دقيقة، وتم تطبيق العلاج فعاد التعداد إلى العدد 10^8 . جدّ الزمن T .
14. تشير الأبحاث التي قام بها ميدوز وميدوز وراندرز وبهرينز إلى أنّ كوكب الأرض به حالياً $12950 \times 10^3 \text{ km}^2$ من اليابسة صالحة للزراعة. تطلب التعداد السكاني العالمي في عام 1950 إلى $4047 \times 10^6 \text{ km}^2$ للتغذي عليهم، واحتاج التعداد في عام 1980 إلى $8094 \times 10^6 \text{ km}^2$ إذا كانت المساحة المطلوبة تنمو بنسبة مئوية ثابتة، ففي أيّ سنة سيصل تعداد السكان إلى القيمة العظمى للعدد الذي يمكن تحمله؟
15. على فرض أنّ كمية ما تزداد بطريقة أسّيّة (أي عدد الخلايا في مستنبت بكتيري) بمعدل نمو r . أثبت أنّ ضعف الزمن هو $\frac{\ln 2}{r}$.
16. على فرض أنّ كمية ما تتناقص بطريقة أسّيّة بثابت تضائل r . أثبت أنّ نصف العمر هو $-\frac{\ln 2}{r}$. ما أوجه الفرق بين نصف العمر هنا وضعف الزمن في التمرين 15؟

التمارين من 29 إلى 32 تتضمن المربحة المركبة.

28. إذا استثمرت AED 1000 بمعدّل مربحة سنوية 8%. قارن بين قيمة الاستثمار بعد عام واحد مع انواع المربحة المركبة الآتية: سنوياً، شهرياً، يومياً، مستمرة.
29. كرّر التمرين 29 لقيمة الاستثمار بعد 5 سنوات.
30. استثمر الشخص A مبلغ AED 10,000 في عام 1990 واستثمر الشخص B مبلغ AED 20,000 في عام 2000. (a) فإذا كان معدّل المربحة السنوية لكلا الشخصين 12% (مربحة مركبة مستمرة)، فما قيم الاستثمارات في 2010؟ (b) كرّر مع معدّل مربحة سنوية 4%. (c) حدّد معدّل المربحة السنوية حيث يتساوى استثمار الشخص A بالضبط مع استثمار الشخص B. (إرشاد: تريد من الشخص A أن يمتلك AED 20,000 في عام 2000).

تتضمن التمارين 22-17 التضائل الأسّي.

17. يعتبر الأسترونيتيوم-90 أحد النظائر المشعة الخطيرة. وبسبب تشابهه مع الكالسيوم، تمتصه العظام البشرية بكل سهولة. ويبلغ نصف العمر للأسترونيتيوم-90 حوالي 28 عاماً. إذا امتصت العظام كميةً منه نتيجة تعرّضها لانفجار نوويّ، فما النسبة المئوية التي ستبقى بعد مرور (a) 84 عاماً؟ (b) 100 عام؟
18. إنّ نصف العمر لليورانيوم ^{235}U هو حوالي 0.7×10^9 عاماً. إذا تم دفن 50 جراماً في أحد مواقع النفايات النووية، فما الكمية المتبقية بعد مرور (a) 100 عام؟ (b) 1000 عام؟
19. إنّ نصف العمر للمورفين في دماء الإنسان هو 3 ساعات. إذا كان في البداية هناك 0.4 mg مورفين في مجرى الدم،

31. اشترى أحد المؤلفين مجموعة من البطاقات التجارية لكرة السلة في عام 1985 بمبلغ 34 AED. وفي عام 1995، كان "السعر الإجمالي" لهذه المجموعة 9800 AED. (a) فرضا أنه يوجد نسبة مئوية ثابتة للعائد على هذا الاستثمار، فجد معادلة استحقاق المجموعة عند الزمن t سنة (حيث $t = 0$ يناظر 1985). (b) عند معدل العائد هذا، فما هو المبلغ المستحق للمجموعة في 2005؟ (c) اشترى هذا المؤلف أيضا مجموعة من بطاقات البيسبول في عام 1985، تكلفت 22 AED. في 1995، كان الربح من هذه المجموعة 32 AED. باستخدام معدل الربح هذا، ما هو الربح العائد للمجموعة في 2005؟

32. على فرض أن قيمة أحد الأصول 40,000 AED تتناقص بنسبة مئوية ثابتة 10%. جد قيمته بعد (a) 10 سنوات؛ وبعد (b) 20 سنة. قارن بين هذه القيم وأحد الأصول الذي تبلغ قيمته 40,000 AED ويصبح بلا قيمة خلال 20 عاما باستخدام التناقص الخطي.

33. على فرض أن قيمة أحد الأصول 400,000 AED تتناقص بنسبة مئوية ثابتة تبلغ 40%. جد قيمته بعد (a) 5 سنوات؛ وبعد (b) 10 سنوات. قارن بين هذه القيم وأحد الأصول الذي تبلغ قيمته 40,000 AED ويصبح بلا قيمة خلال 10 أعوام باستخدام التناقص الخطي.

تتضمن التمارين من 35 إلى 38 معدلات الضريبة.

34. في عام 1975، كانت الضرائب على الدخل الذي يتراوح بين 16,000 AED و 16,000 AED تقدر بـ 28%. وفي عام 1988، كانت الضرائب على الدخل الذي يتراوح بين 16,000 AED و 20,000 AED تقدر بـ 15%. وهذا يجعل الأمر يبدو كما لو كانت الضرائب قد انخفضت إلى حد كبير بين عامي 1975 و 1988. مع أخذ التضخم في الاعتبار، اشرح بإيجاز لماذا تعدّ هذه المقارنة غير صحيحة.

35. لجعل المقارنة في التمرين 35 أكثر إنصافاً قليلاً، لاحظ أن ضريبة الدخل الذي يزيد عن 30,000 AED كانت 28% في عام 1988. وافترض أن متوسط التضخم بلغ 5.5% بين عامي 1975 و 1988. حدّد مبلغ 16,000 AED للتضخم بحساب قيمته بعد تزايد مستمر بنسبة 5.5% لمدة 13 عاما. وبناء على هذا الحساب، كيف يمكن مقارنة المعدلات الضريبية؟

36. على فرض أن هيكلية ضريبة الدخل على النحو التالي: تفرض ضريبة بنسبة 15% على أول 30,000 AED، وبنسبة 28% على ما تبقى. احسب الضريبة T_1 على دخل مقداره 40,000 AED. افترض الآن أن التضخم بلغ 5% وتلقّى زيادة تكلفة معيشة (5%) إلى 42,000 AED. احسب الضريبة T_2 على هذا الدخل. لمقارنة قيم الضرائب، عليك ضبط الضريبة T_1 مع التضخم (أضف 5%).

37. في التمرين 37، ظلّ قانون الضرائب كما هو، ولكنّ الضريبة المستحقة (المنضبطة مع التضخم) لم تظلّ كما هي. اشرح باختصار سبب حدوث ذلك. ما الذي يجب عمله لتظل الضريبة المستحقة ثابتة؟

38. باستخدام بيانات المجتمع البكتيري في بداية هذا الجزء، حدّد x لترمز إلى الزمن و y لتمثل اللوغاريتم الطبيعي للمجتمع. ارسّم نقاط البيانات (x, y) واعط رأيك على كيفية إغلاق البيانات لكونها خطية. خذ نقطتين نموذجيتين وجد معادلة للخط المستقيم المار بالنقطتين. ثم جد دالة المجتمع $p(x) = e^{y(x)}$.

39. (a) كما فعلنا في التمرين 39، جد نموذجا أسياً لبيانات المجتمع $(0, 10)$ و $(1, 15)$ و $(2, 22)$ و $(3, 33)$ و $(4, 49)$. (b) جد نموذجا أسياً لبيانات المجتمع $(0, 20)$ و $(1, 16)$ و $(2, 13)$ و $(3, 11)$ و $(4, 9)$.

40. استخدام أسلوب التمرين 39 لإعداد نموذج أسّي على البيانات التالية التي تمثل النسبة المئوية لسكان الولايات المتحدة مُصنّفين على أنهم يعيشون في المزارع الريفية (البيانات من مكتب التعداد الأمريكي).

السنة	1960	1970	1980	1990
نسبة مؤوية لسكان المزرعة	7.5	5.2	2.5	1.6

41. استخدم أسلوب التمرين 39 لإعداد نموذج أسّي للبيانات التالية التي تمثل النسبة المئوية لسكان الولايات المتحدة مُصنّفين على أنهم يعيشون في المناطق الحضرية (البيانات من مكتب التعداد الأمريكي).

السنة	1960	1970	1980	1990
نسبة مؤوية لسكان المزرعة	69.9	73.5	73.7	75.2

42. أثبت أنه لأي عدد ثابت c ، $y = x - \frac{1}{2} + ce^{-2x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية. $y' + 2y = 2x$.

43. أثبت أنه لأي عدد ثابت c ، $y = \sqrt{3x^2 + c}$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' = 3x/y$.

التطبيقات

44. يفيد موقع على شبكة الإنترنت أن العقاقير المضادة للاكتئاب مثل أميتربتيلين لها نصف العمر داخل الجسم البشري من 31 إلى 46 ساعة. لجرعة 150 mg، قارن بين الكميات التي تبقى في مجرى الدم بعد يوم واحد لشخص له نصف العمر 31 ساعة مقابل شخص له نصف العمر 46 ساعة. هل هذا الفرق كبير؟

45. أفادت التقارير أن عقار "بروزاك" له نصف العمر من يومين إلى 3 أيام ولكن قد يبقى في أجهزة الجسم لأسابيع عديدة بعد توقّفك عن تناوله. ما النسبة المئوية للجرعة الأصلية التي تبقى في الجسم بعد أسبوعين إذا كان نصف العمر يومين؟ ما الكمية التي ستبقى إذا كان نصف العمر 3 أيام؟

46. يبلغ نصف العمر للمضاد الحيوي "إرتابينيم" 4 ساعات في مجرى الدم في الإنسان. تبلغ الجرعة 1 gm في اليوم. جد الكمية الموجودة في الدم ومثلها بيانياً t ساعة بعد تناوله $(0 \leq t \leq 24)$.

47. قارن إجابتك بالتمرين 47 مع دواء مماثل يؤخذ بجرعة 1 gm أربع مرات في اليوم، ونصف العمر له ساعة واحدة. (لاحظ أنه عليك القيام بأربع عمليات حسابية منفصلة هنا)

48. يعرض مصرف بيع أوراق نقدية ستصل قيمة استحقاقها مبلغ 10,000 AED في 10 سنوات. ما المبلغ الذي عليك دفعه الآن مقابل البنكنوت إذا كنت ترغب في الحصول على عائد 8% على استثمارائك؟ (ملحوظة: يُسمّى هذا بالقيمة الحالية للأوراق النقدية). بشكل عام، بيّن أن القيمة الحالية لشيء ما تستحق AEDP في t عاما بمعدل فائدة سنوية ثابتة r يتم استنتاجها من $AEDPe^{-rt}$.

49. على فرض أن قيمة قطعة أرض t عاما من الآن $AED 40,000e^{2\sqrt{t}}$. إذا كانت نسبة التضخم السنوي هي 6%، فجد t التي تزيد من قيمة استثمارك الحالي إلى القيمة العظمى: $AED 40,000e^{2\sqrt{t-0.06t}}$.

50. على فرض أن عملا تجارياً له دخل مقداره $AEDP(t)$ كل عام. القيمة الحالية مع معدل مربحة سنوية r لهذا الدخل لمدة T سنة قادمة هي $\int_0^T P(t)e^{-rt} dt$. قارن بين القيم الحالية بنسبة 5% لثلاثة أشخاص لديهم الرواتب التالية لمدة 3 سنوات: $B: P(t) = 60,000 + 3000t$; $A: P(t) = 60,000$ و $C: P(t) = 60,000e^{0.05t}$.

51. القيمة المستقبلية لمدخل بعد T عاماً مع معدل مرابحة سنوية r يتم استنتاجها من $\int_0^T P(t)e^{r(T-t)} dt$. احسب القيمة المستقبلية للحالات الثلاثة A و B و C في التمرين 51. صف باختصار أوجه الاختلاف بين ما تقيسه القيمة الحالية والقيمة المستقبلية.

52. إذا ربح مبلغ قدره "مليون درهم"، فهل تكون أفضل حالا عند حصولك على المال الخاص بك على أربع دفعات سنوية قيمة كل دفعة AED 280,000، أم على دفعة واحدة من واحد مليون درهم؟ (a) على فرض أنه، في بداية العام، تم تسديد مدفوعات مع معدل مرابحة سنوية 8%. كرر السابق مع معدل مرابحة سنوية نسبتها (b) 6% و (c) 10%.

53. يستخدم الكثير من المستثمرين القاعدة 72 لتقدير سريع لمدى السرعة التي ستتضاعف بها قيمة استثماراتهم. فعلى سبيل المثال، تقترح هذه القاعدة أنه عند 8% سيبلغ ضعف الزمن $\frac{72}{8} = 9$ سنة تقريباً. احسب ضعف الزمن الفعلي. اشرح لماذا ستكون القاعدة 69 أكثر دقة. اذكر سبباً واحداً على الأقل لاستخدام 72 بدلاً من ذلك.

تمارين استكشافية

1. يتم تحديد كمية الكربون-14 في الغلاف الجوي إلى حد كبير بقصف الأشعة الكونية. تحافظ الكائنات الحية على مستوى ثابت من الكربون-14 من التبادلات مع البيئة. وبموت الكائن الحي، تتوقف عملية امتصاص الكربون-14، لذا تقل مستويات الكربون-14 بنصف العمر 5730 عاماً. يستطيع العلماء قياس معدل التضاؤل للكربون-14. (يمكنك تصوّر عداد جيجر). إذا كانت $y(t)$ هي كمية الكربون-14 المتبقية عند الزمن t .

ومعدل التغير هو $y'(t) = ky(t)$. لنفترض أن معدل التحلل عند زمن الوفاة هو المعدل الحالي نفسه للكائنات الحية؛ ونسمي ذلك $ky(0)$. نسبة معدلات التحلل هي $y(t)/y(0)$. فرضاً أن $ky(t) = -2.4$ (التحلل في الدقيقة) و $ky(0) = -6.7$ (التحلل في الدقيقة). حل لإيجاد قيمة t . لنفترض الآن خطأ الافتراض الخاص بالمستويات الثابتة للكربون-14. إذا تم تخفيض $ky(0)$ بنسبة 5%، فما النسبة المئوية التي يتغير بها تقدير الزمن t ؟ إذا تم تخفيض $ky(t)$ بنسبة 5%، فبأي نسبة مئوية يتغير تقدير الزمن؟ تقريباً، كيف تتحوّل أخطاء في القياسات إلى أخطاء في تقدير الزمن؟

2. بدأ ثلاثة نسور في الطيران من رؤوس مثلث متساوي الأضلاع من الضلع 1. يطير كل نسر بسرعة ثابتة متوجهاً مباشرة إلى الطائر الآخر في اتجاه حركة عقارب الساعة. تتوقف المطاردة عندما يلتقي النسور في الوسط. ما مقدار المسافة التي يطير عليها كل نسر؟ [إرشادات: مثل مكان كل نسر بالإحداثيات القطبية (r, θ) بمركز المثلث عند الأصل. وعن طريق التماثل، لكل نسر قيمة r نفسها؛ وإذا كانت زاوية أحد النسور هي θ ، فإنه يتوجه إلى النسر الذي تبلغ زاويته $\theta - \frac{2\pi}{3}$. (a) ضع معادلة تفاضلية لحركة أحد النسور موضحاً أنه ثمة حل إذا كان $r'(\theta) = \sqrt{3}r$. استخدم صيغة طول القوس $L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta$. (b) لتعميم. افترض أنه ثمة n نسراً يبدأون عند رؤوس شكل منتظم n وعند الضلع s . إذا كانت هي الزاوية الداخلية من مركز n -gon إلى الرؤوس المجاورة، فأثبت أن مسافة طيران كل نسر تساوي $\frac{s}{1 - \cos \alpha}$. ماذا يحدث للمسافة عندما n تتزايد بلا قيود؟ اشرح هذا من خلال مسارات النسور.

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

7-7

قمنا سابقًا بحل معادلتين تفاضليتين مختلفتين:

$$y'(t) = ky(t) \quad \text{و} \quad y'(t) = k[y(t) - T_a]$$

باستخدام الطريقة نفسها بشكل أساسي. إن هذين المثالين يدلان على المعادلات التفاضلية التي يمكن فصلها. سندرس هذا النوع من المعادلات ببعض الإسهاب في هذا الدرس. أولاً، نفكر في معادلة تفاضلية عادية من الدرجة الأولى أكثر تعميمًا

$$(7.1) \quad y' = f(x, y)$$

وهنا، المشتقة y' لدالة مجهولة $y(x)$ هي معطاة كدالة f لكل من x و y . هدفنا هو إيجاد بعض الدوال $y(x)$ (حل) تحقق المعادلة (7.1) على بعض الفترات، I . المعادلة من الرتبة الأولى. بما أنها تتضمن المشتقة الأولى من الدالة المجهولة. سنفكر في الحالة التي يمكن فيها فصل x و y . نسمي المعادلة (7.1) قابلة للفصل إذا تمكنا من فصل المتغيرات، أي إذا تمكنا من كتابتها بالصيغة

$$g(y)y' = h(x)$$

حيث يوجد كل x في أحد طرفي المعادلة ويوجد كل y في الطرف الآخر.

ملاحظات

لا تجعل الحرف الذي يرمز إلى المتغير المستقل يشترك. فكثيرًا ما نستخدم المتغير المستقل x . كما هو الحال في المعادلة (7.1). كلما كان المتغير المستقل يمثل الزمن، فإننا نستخدم t كمتغير مستقل، من أجل تعزيز هذا الرابط. كما فعلنا في المثال 6.2. بالتالي، وضعت المعادلة التي تصف الانحلال الإشعاعي على الصورة

$$y'(t) = ky(t)$$

المثال 7.1 المعادلة التفاضلية القابلة للفصل

تحديد ما إذا كانت المعادلة التفاضلية

$$y' = xy^2 - 2xy$$

قابلة للفصل.

الحل لاحظ أنّ هذه المعادلة قابلة للفصل، حيث يمكننا إعادة كتابتها على الصورة

$$y' = x(y^2 - 2y)$$

ثم القسمة على $(y^2 - 2y)$ (بافتراض أنها لا تساوي صفرًا)، فنحصل على

$$\frac{1}{y^2 - 2y} y' = x$$

المثال 7.2 المعادلة غير القابلة للفصل

$$y' = xy^2 - 2x^2y$$

المعادلة

غير قابلة للفصل، حيث لا يمكننا فصل x و y . (جرب ذلك بنفسك!)

في الأساس، يجب فصل المتغيرين x و y بالضرب أو القسمة لكي تكون المعادلة قابلة للفصل. لاحظ أنه في مثال 7.2، يمكنك التحليل إلى العوامل للحصول على $y' = xy(y - 2x)$ ، ولكن يمنع التعبير $y - 2x$ أن تكون المعادلة قابلة للفصل.

تعتبر المعادلات التفاضلية القابلة للفصل ذات أهمية نظرًا إلى وجود وسيلة بسيطة جدًا لحلها. لاحظ أنه إذا أجرينا عملية التكامل لكلا الطرفين في المعادلة يكون:

$$g(y)y'(x) = h(x)$$

$$(7.2) \quad \int g(y)y'(x) dx = \int h(x) dx \quad \text{بمعلومية } x. \text{ نجد أن}$$

بما أنّ $dy = y'(x) dx$ ، فإنّ التكامل على الجانب الأيسر من (7.2) يصبح

$$\int g(y) \underbrace{y'(x) dx}_{dy} = \int g(y) dy$$

وبالتالي، من (7.2)، نجد أنّ

$$\int g(y) dy = \int h(x) dx$$

لذا إذا كان يمكننا إيجاد قيمة كل من هذه التكاملات، سيصبح لدينا المعادلة التي تربط بين x و y ، ولا تتضمن y' .

المثال 7.3 حل معادلة قابلة للفصل

جد حل المعادلة

$$y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}$$

الحل بعد فصل المتغيرات، لاحظ أننا نحصل على

$$y^2 y' = x^2 + 7x + 3$$

مع تكامل كلا طرفي المعادلة بالنسبة إلى x فإننا نحصل على

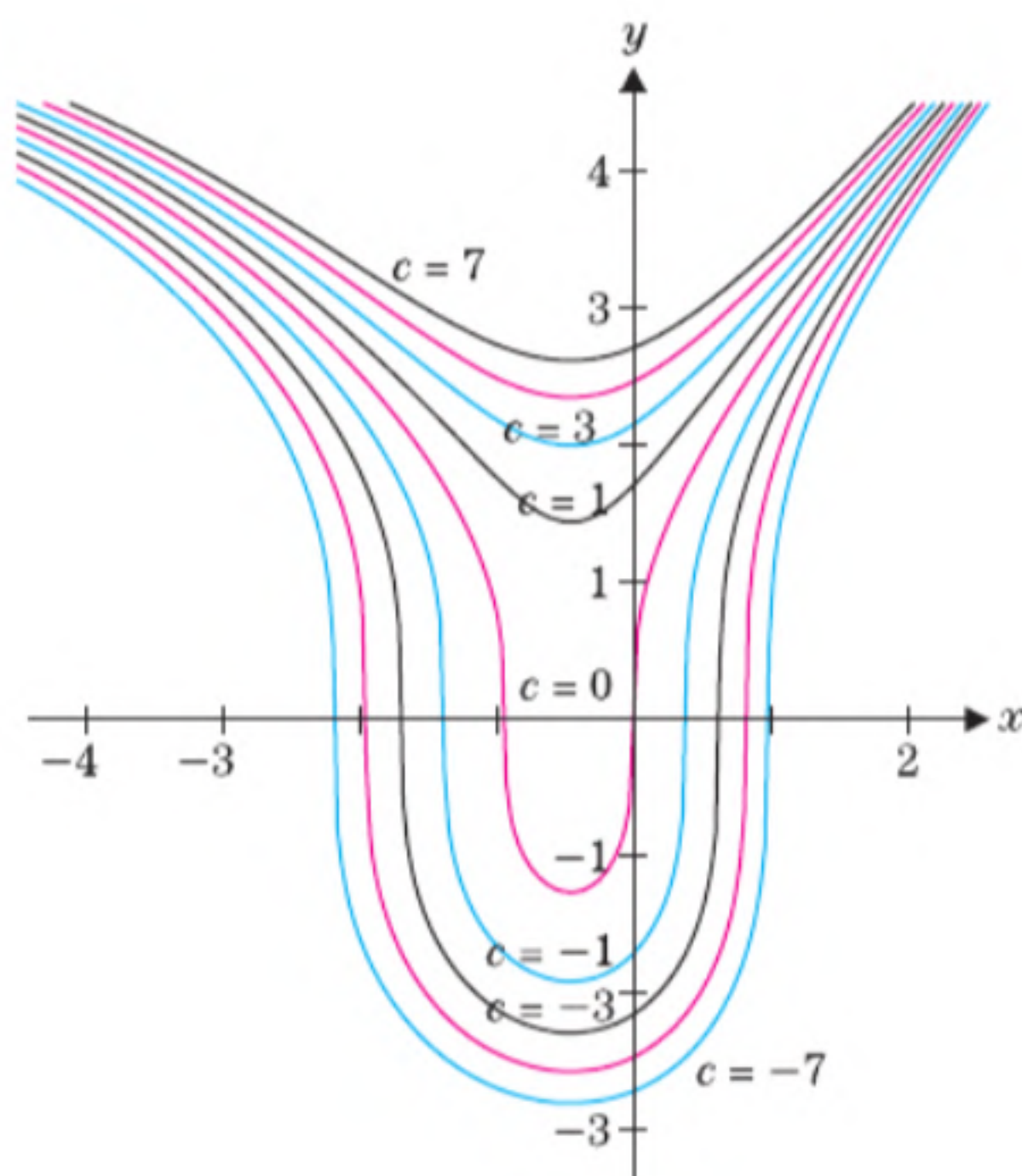
$$\int y^2 y'(x) dx = \int (x^2 + 7x + 3) dx$$

$$\int y^2 dy = \int (x^2 + 7x + 3) dx \quad \text{أو}$$

بإجراء التكاملات المشار إليها نحصل على:

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + 3x + c$$

حيث دمجنا ثابتين من ثوابت التكامل في ثابت واحد على الطرف الأيمن.



الشكل 7.7
عائلة الحلول

بحل y ، نجد أنّ

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c}$$

لاحظ أنّ لكل قيمة من c ، نحصل على حل آخر للمعادلة التفاضلية. وهذا يسمى مجموعة من الحلول (أو الحل العام) للمعادلة التفاضلية. في الشكل 7.7، رسمنا عددًا من عائلة الحلول هذه. ■

وعموماً، سيشمل حل معادلة قابلة للفصل من الرتبة الأولى على قيمة ثابت افتراضي (ثابت التكامل). لاختيار منحنى واحد فقط من منحنيات الحلول هذه، سنحدد نقطة واحدة يمرّ بها منحنى الحل، لنقل (x_0, y_0) . إذاً، نحن نطلب ذلك

$$y(x_0) = y_0$$

وهذا يسمى الشرط الابتدائي (لأنّ هذا الشرط كثيراً ما يحدد الحالة الابتدائية للنظام الفيزيائي). يشار إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى مع الشرط الابتدائي على أنها مسألة قيمة ابتدائية أو (IVP).

المثال 7.4 حل مسألة قيمة ابتدائية

$$y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}, \quad y(0) = 3$$

الحل في مثال 7.3، وجدنا أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c}$$

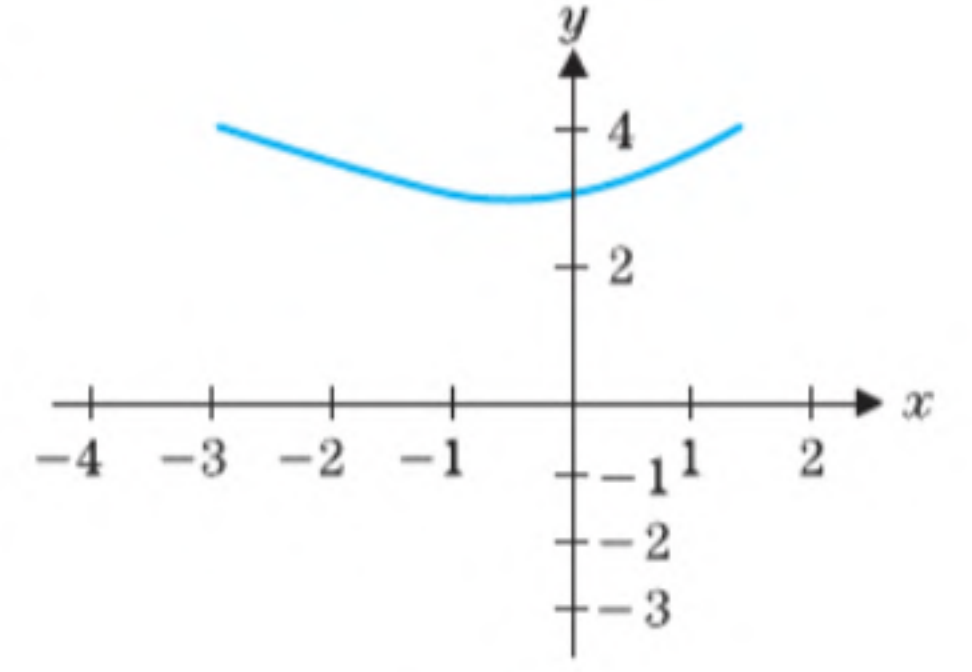
من الشرط الابتدائي لدينا:

$$3 = y(0) = \sqrt[3]{0 + 3c} = \sqrt[3]{3c}$$

ومن ثم، $c = 9$. الحل لمسألة القيمة الابتدائية (IVP) هو:

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 27}$$

يبين الشكل 7.8 تمثيلاً بيانياً لهذا الحل. لاحظ أنّ هذا التمثيل البياني أعلاه سيتلائم مع المنحنيات التي رأيناها في الشكل 7.7. سنستكشف آثار الشروط الابتدائية الأخرى في التمارين. ■



الشكل 7.8

لسنا دائماً محظوظين، كما حدث في المثال 7.2 وفي هذا المثال، كنا قادرين على الحصول على تمثيل صريح للحل (أي وجدنا صيغة لـ y بدلالة x). في معظم الأحيان، يجب أن نقبل بوجود تمثيل ضمني للحل، أي المعادلة التي تربط بين x و y والتي لا يمكن إيجاد الحل للمتغير y بدلالة x وحدها.

المثال 7.5 مسألة قيمة ابتدائية لها حل ضمني فقط

جد الحل لمسألة القيمة الابتدائية الآتية:

$$y' = \frac{9x^2 - \sin x}{\cos y + 5e^y}, \quad y(0) = \pi$$

الحل لاحظ أولاً أنّ هذه المعادلة التفاضلية قابلة للفصل، بما أنه يمكننا إعادة كتابتها على الصورة

$$(\cos y + 5e^y)y'(x) = 9x^2 - \sin x$$

مع تكامل كلا طرفي المعادلة بمعلومية x ، نجد:

$$\int (\cos y + 5e^y)y'(x) dx = \int (9x^2 - \sin x) dx$$

$$\int (\cos y + 5e^y) dy = \int (9x^2 - \sin x) dx$$

أو

بإيجاد قيم التكاملات، فإننا نحصل على

$$\sin y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + c \quad (7.3)$$

لاحظ أنه لا يوجد طريقة لحل هذه المعادلة بصورة صريحة للمتغير y بدلالة x . ومع ذلك، لا يزال بإمكانك رسم التمثيلات البيانية لبعض عناصر هذه العائلة من الحلول باستخدام المخطط الضمني على أداة الرسم البياني الخاصة بك. وتم رسم العديد منها في الشكل 7.9a. وعلى الرغم من عدم إيجاد حل لـ y بصورة صريحة بدلالة x ، ما زال بإمكاننا استخدام الشرط الابتدائي. بالتعويض عن $x = 0$ وعن $y = \pi$ في المعادلة (7.3)، فإننا نحصل على

$$\sin \pi + 5e^\pi = 0 + \cos 0 + c$$

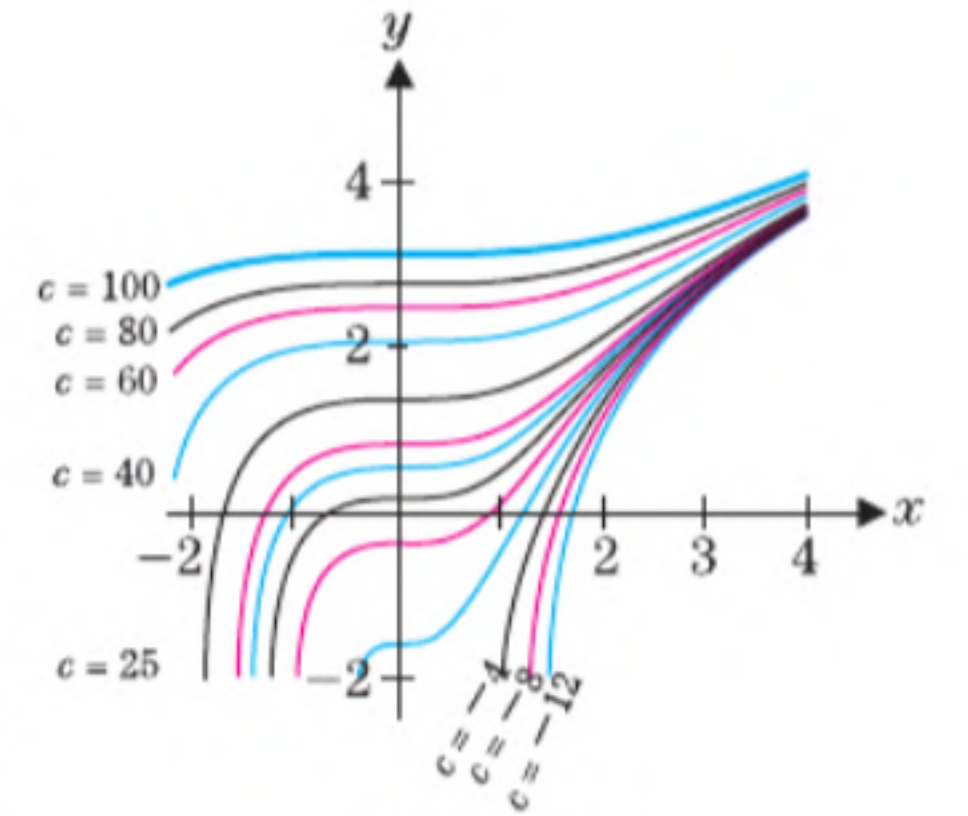
$$5e^\pi - 1 = c$$

أو

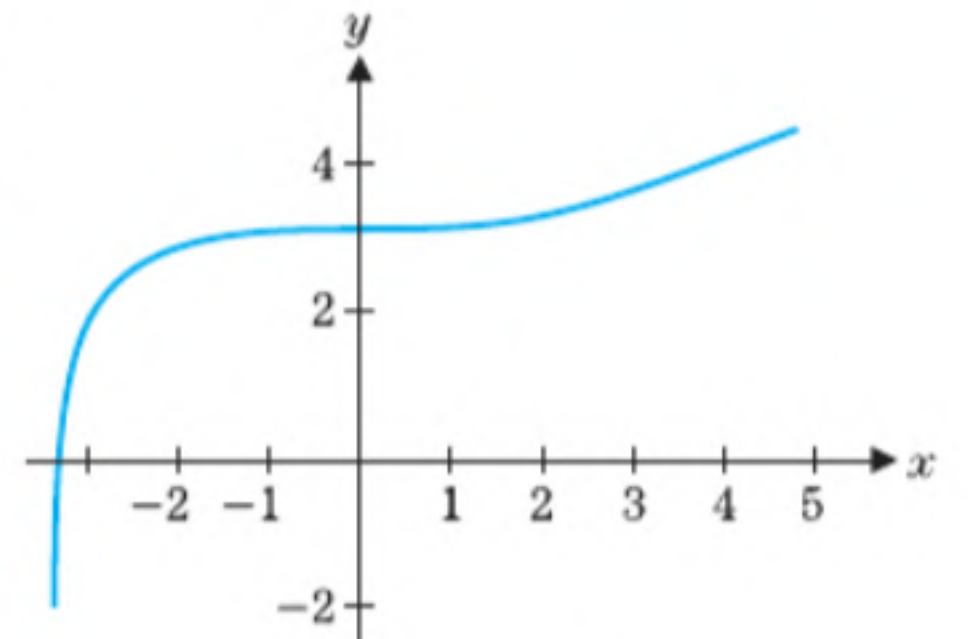
سينتج عن هذا

$$\sin y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + 5e^\pi - 1$$

كتمثيل ضمني لحل مسألة القيمة الابتدائية. وبالرغم من أنه لا يمكننا حلًا بدلالة x وحدها؛ وبإعطاء أي قيمة خاصة لـ x ، يمكننا استخدام طريقة نيوتن (أو بعض الطرائق العددية الأخرى) لتقريب قيمة y المناظرة. وهذا في الأساس ما تفعله أنظمة الحاسوب الجبرية CAS (مع نقاط كثيرة جداً) عندما تستخدمها لرسم تمثيل بياني بالطريقة الضمنية. يوضح الشكل 7.9b مخططاً لحل مسألة القيمة الابتدائية. ■



الشكل 7.9a
عائلة الحلول



الشكل 7.9b
حل مسألة القيمة الابتدائية

نمو لوجستي

في الدرس 7.6، قدّمنا المعادلة التفاضلية

$$y' = ky$$

كنموذج لنمو المجتمع البكتيري، وصالحة للتعدادات السكانية المتزايدة مع موارد غير محدودة ومساحة غير محدودة للنمو. بالطبع، إنّ كل المجتمعات السكانية لديها عوامل تحدّد من نموها في النهاية. وهكذا، لا يوفّر هذا النموذج الخاص معلومات مفيدة بصورة عامة إلا لفترات زمنية قصيرة نسبياً.

ملاحظات تاريخية



بيير فيرهولست (1804–1849)

عالم رياضيات بلجيكي اقترح النموذج اللوجستي للنمو السكاني. كان بيير فيرهولست أستاذاً للرياضيات في بروكسل وأجرى بحثاً عن نظرية الأعداد والإحصاءات الاجتماعية. كانت المعادلة اللوجستية من أعظم إسهاماته (وتسمى أيضاً معادلة فيرهولست) والتي منحتنا أول نموذج واقعي للسكان ذوي الموارد المحدودة. تجدر الإشارة إلى أنّ تقدير فيرهولست لتوازن السكان في بلجيكا يتطابق مع سكان بلجيكا الحاليين.

يفترض نموذج بديل للنمو السكاني أن يكون هناك قيمة عظمى لعدد السكان المستدام، M (ويسمى **القدرة الاستيعابية**). والتي تحددها الموارد المتاحة. بالإضافة إلى ذلك، عندما يقترب عدد السكان من M (عندما تصبح الموارد المتاحة أكثر ندرة)، يصبح النمو السكاني بطيئاً. لنعكس الضوء على هذا الأمر، نفترض أنّ معدل النمو السكاني يتناسب سويّاً مع مستوى السكان الحالي والفرق بين المستوى الحالي والقيمة العظمى، M . وهذا يعني، إذا كان $y(t)$ هو عدد السكان عند زمن ما t ، نفترض أنّ

$$y'(t) = ky(M - y)$$

يتم الإشارة إلى هذه المعادلة التفاضلية على أنها **المعادلة اللوجستية**.

وهناك اثنان من الحلول الواضحة الخاصة بهذه المعادلة التفاضلية. الدوال الثابتة $y = 0$ و $y = M$ كلاهما حل لهذه المعادلة التفاضلية. وهذه تسمى **حلول التوازن** لأنه، على فرضيّة النمو اللوجستي، بهجرد وصول المجتمع البكتيري إلى أحد هذه المستويات، فإنها تظل هناك طوال الزمن. إذا كان $y \neq 0$ و $y \neq M$ ، فيمكننا حل المعادلة التفاضلية، بما أنها قابلة للفصل

$$(7.4) \quad \frac{1}{y(M - y)} y'(t) = k$$

مع تكامل كلا طرفي المعادلة بالنسبة إلى t ، نحصل على

$$\int \frac{1}{y(M - y)} y'(t) dt = \int k dt$$

$$(7.5) \quad \int \frac{1}{y(M - y)} dy = \int k dt \quad \text{أو}$$

باستخدام الكسور الجزئية، يمكننا أن نكتب

$$\frac{1}{y(M - y)} = \frac{1}{My} + \frac{1}{M(M - y)}$$

من المعادلة (7.5)، فإننا نحصل على

$$\int \left[\frac{1}{My} + \frac{1}{M(M - y)} \right] dy = \int k dt$$

إجراء التكامل يعطينا

$$\frac{1}{M} \ln |y| - \frac{1}{M} \ln |M - y| = kt + c$$

بضرب كلا الطرفين في M وباستخدام الحقيقة أن $0 < y < M$ ، نجد أنّ

$$\ln y - \ln(M - y) = kMt + Mc$$

وبأخذ الأسس لكلا الطرفين، فإننا نحصل على

$$\exp[\ln y - \ln(M - y)] = e^{kMt + Mc} = e^{kMt} e^{Mc}$$

وبعد ذلك، باستخدام قوانين الأسس واللوغاريتمات واستبدال الحد الثابت e^{Mc} بثابت جديد A ، فإننا نحصل على

$$\frac{y}{M - y} = Ae^{kMt}$$

لحل هذه لـ y ، نضرب أولاً كلا الطرفين في $(M - y)$ لنحصل على

$$y = Ae^{kMt}(M - y) \\ = AMe^{kMt} - Ae^{kMt}y$$

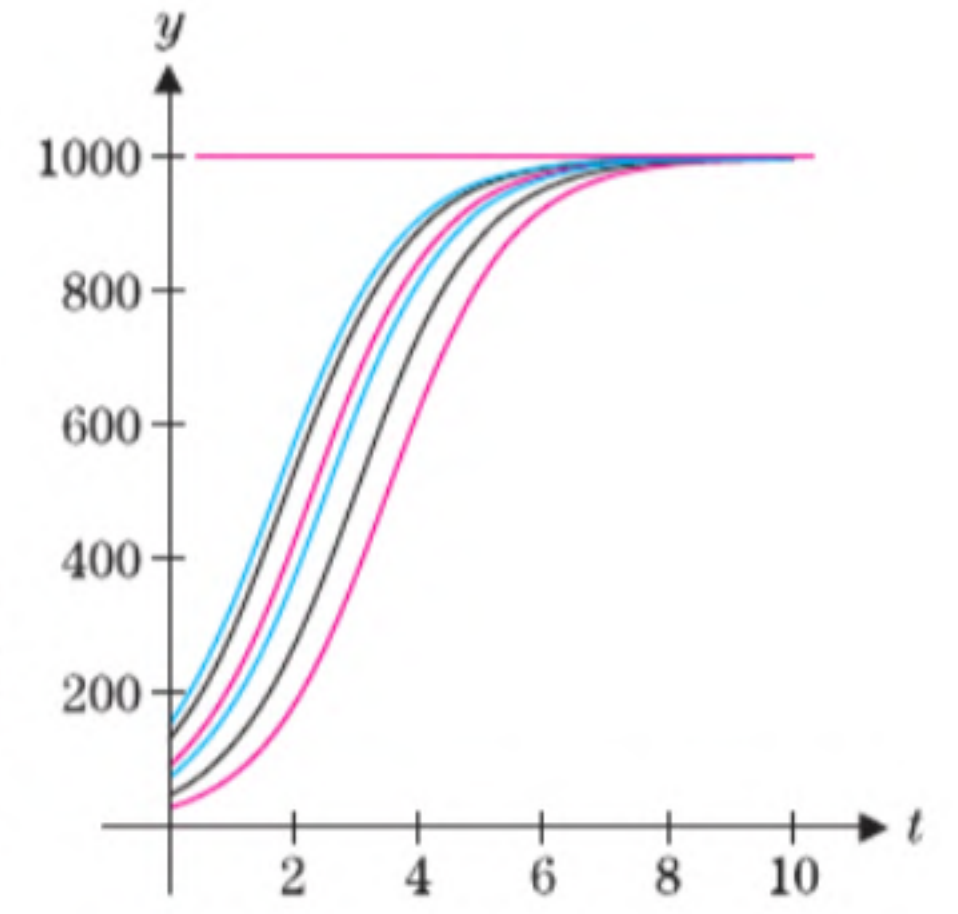
وبدمج حدّي y ، نجد أنّ

$$y(1 + Ae^{kMt}) = AMe^{kMt}$$

الذي يعطينا الحل الصريح للمعادلة اللوجستية.

$$(7.6) \quad y = \frac{AMe^{kMt}}{1 + Ae^{kMt}}$$

في الشكل 7.10، رسمنا مخططاً لعدد من منحنيات هذه الحلول بقيم متعددة من A (للحالة التي فيها $M = 1000$ و $k = 0.001$)، إلى جانب حل التوازن $y = 1000$. يمكنك أن ترى من الشكل 7.10 أنّ النمو اللوجستي يتكون من نمو أسي تقريباً في بادئ الأمر، متبوعاً بالتمثيل البياني الذي يصبح مقعراً لأسفل ثم يقترب من القيمة العظمى M .



الشكل 7.10

العديد من منحنيات الحل

المثال 7.6 حل مسألة النمو اللوجستي

$M = 1000$ قيمة عظمى معطاة في المجتمع السكاني المستدام (وهذا يمكن أن يقاس بالملايين أو بالطن، وما إلى ذلك) ومعدل نمو $k = 0.007$. جـد تعبيراً مناسباً للمجتمع السكاني في أي زمن t . لمجتمع سكاني إبتدائي معطى $y(0) = 350$ وبفرضية النمو اللوجستي.

الحل من الحل (7.6) للمعادلة اللوجستية، نجد أنّ $kM = 7$ و

$$y = \frac{1000Ae^{7t}}{1 + Ae^{7t}}$$

من الشرط الإبتدائي، نحصل على

$$350 = y(0) = \frac{1000A}{1 + A}$$

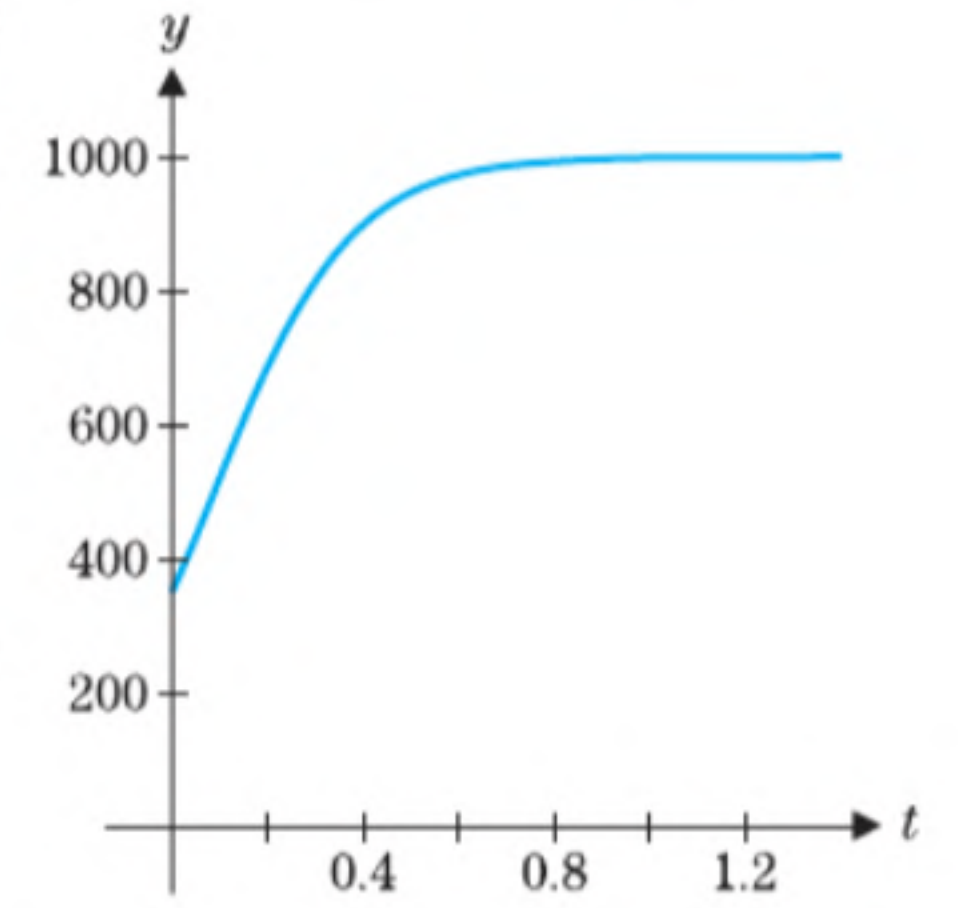
حل للثابت A . نحصل على $A = \frac{35}{65}$ الذي يعطينا الحل لمسألة القيمة الإبتدائية

$$y = \frac{35,000e^{7t}}{65 + 35e^{7t}}$$

تم رسم هذا الحل في الشكل 7.11. ■

يجب علينا ملاحظة، وبشكل عملي، أنّ قيم M و k مجهولة ويجب تقديرها عبر دراسة وافية لمجتمع خاص. سنستكشف هذه المشاكل بتعمق أكبر في التمارين.

في المثال الأخير، سنعتبر النمو من خلال خطة استثمارية.



الشكل 7.11

$$y = \frac{35,000e^{7t}}{65 + 35e^{7t}}$$

المثال 7.7 استراتيجيات الاستثمار لصنع مليون

يتم استثمار المال بمربحة سنوية 8% مركبة مستمرة. إذا تم الإيداع بشكل مستمر بمعدل AED 2000 سنوياً، فجد حجم الاستثمارات الإبتدائية المطلوبة لبلوغ مليون درهم خلال 20 عاماً.

الحل هنا، معدل المربحة المكتسبة هو 8% وودائع إضافية يفترض أن تتم على أساس مستمر. إذا كان معدل الإيداع AED d في السنة، فإنّ المبلغ $A(t)$ المودع في الحساب بعد t سنة يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dA}{dt} = 0.08A + d$$

هذه المعادلة قابلة للفصل ويمكن حلها بقسمة كلا الطرفين على $0.08A + d$ وإجراء عملية التكامل. لدينا

$$\int \frac{1}{0.08A + d} dA = \int 1 dt$$

لذلك

$$\frac{1}{0.08} \ln |0.08A + d| = t + c$$

باستخدام $d = 2000$. نجد أنّ

$$12.5 \ln |0.08A + 2000| = t + c$$

بوضع $t = 0$ وبأخذ $A(0) = x$ سنحصل على ثابت التكامل:

$$12.5 \ln |0.08x + 2000| = c$$

لذلك

$$(7.7) \quad 12.5 \ln |0.08A + 2000| = t + 12.5 \ln |0.08x + 2000|$$

لإيجاد قيمة x حيث $A(20) = 1,000,000$. نعوض عن $t = 20$ و $A = 1,000,000$ في المعادلة (7.7) لنحصل على

$$12.5 \ln |0.08(1,000,000) + 2000| = 20 + 12.5 \ln |0.08x + 2000|$$

$$12.5 \ln |82,000| = 20 + 12.5 \ln |0.08x + 2000| \quad \text{أو}$$

يمكننا حل هذه لإيجاد x . بطرح 20 من كلا الطرفين ثم القسمة على 12.5، لنحصل على

$$\frac{12.5 \ln 82,000 - 20}{12.5} = \ln |0.08x + 2000|$$

وبأخذ الأسس من كلا الطرفين، فإننا نحصل الآن على

$$e^{(12.5 \ln 82,000 - 20)/12.5} = 0.08x + 2000$$

الحل لإيجاد ناتج x

$$x = \frac{e^{\ln 82,000 - 1.6} - 2000}{0.08} \approx 181,943.93$$

إذاً، يجب أن يكون الاستثمار الابتدائي AED 181,943.93 (أقل من AED 200,000) لكي يستحق مبلغ مليون درهم في نهاية 20 عاماً. ■

لنكون منصفين، يجب تفسير الأعداد في مثال 7.7 (مثل معظم أعداد الاستثمار) تفسيراً دقيقاً. وبطبيعة الحال، بعد 20 سنة من الآن، من المرجح ألا يشتري مليون درهم ما يشتريه اليوم. على سبيل المثال، ستكون قيمة مليون درهم مع معدل تضخم $8\% \approx AED 201,896$ $AED 1,000,000e^{-0.08(20)}$ وهي ليست أكبر بكثير من مبلغ AED 181,943. الاستثمار الابتدائي المطلوب. ومع ذلك، إذا كان معدل التضخم 4% فقط، ستكون قيمة مليون درهم (بالدرهم الحالي) هي AED 449,328. الدرس هنا هو الدرس الواضح: احرص على استثمار أموالك بمعدل مرابحة يتعدى معدل التضخم.

7.7 التمارين

تمارين كتابية

فعندئذ ثمة حلان يتفقان مع الشرط الابتدائي $y(x_1) = y_1$. اشرح سبب عدم حدوث ذلك. في ما يتعلق بالمعادلة اللوجستية كنموذج لنمو المجتمع، اشرح لماذا من الضروري أن نعرف أنّ هذا لا يحدث.

4. تحتوي المعادلة اللوجستية على حد في المعادلة التفاضلية يعمل على تباطؤ النمو السكاني عندما يتزايد المجتمع. ناقش بعض أسباب حدوث ذلك في مجتمع حقيقي (إنسان وحيوان ونبات).

في التمارين من 1 إلى 4، حدد ما إذا كانت المعادلة التفاضلية قابلة للفصل أم لا.

1. (a) $y' = (3x + 1) \cos y$ (b) $y' = (3x + y) \cos y$
2. (a) $y' = 2x(\cos y - 1)$ (b) $y' = 2x(y - x)$

1. ناقش أوجه الاختلاف بين حل المعادلات الجبرية (مثل، $x^2 - 1 = 0$) وحل المعادلات التفاضلية. لاحظ على وجه الخصوص نوع عنصر الرياضيات الذي تبحث عن حله.

2. المعادلة التفاضلية هي غير قابلة للفصل إذا لم تكتب في الصورة $g(y)y' = h(x)$. إذا كان لديك معادلة لا يمكنك كتابتها بهذا الشكل، فكيف يمكنك أن تعرف ما إذا كان هذا مستحيلاً بالفعل أو أنك فقط لم ترسمها حتى الآن؟ ناقش بعض الصيغ العامة (مثل، $x + y$ و xy) التي تعطيك أدلة على إذا ما كانت المعادلة قابلة للفصل أم لا.

3. لا تبدو منحنيات الحل الموجودة في الأشكال 7.7 و 7.9a و 7.10 أنها تتقاطع. في الحقيقة، هذه المنحنيات لا تتقاطع أبداً. إذا كانت منحنيات الحل تتقاطع عند النقطة (x_1, y_1) .

3. 10^8 kg ، فما الزمن الذي سيستغرقه لينخفض عدد أفراد المجتمع مرة أخرى إلى حدود 10% من القدرة الاستيعابية؟

تتعلق التمارين من 37 إلى 40 بالاستثمارات المالية.

37. (a) إذا تم إيداع الودائع بشكل مستمر في أحد الحسابات بمعدل 2000 AED سنوياً ومعدل مرابحة سنوية 6% مركبة مستمرة، جـد حجم الاستثمارات الإبتدائية المطلوبة لبلوغ مليون درهم خلال 20 عاماً. بمقارنة إجابتك بالإجابة عن المثال 7.7، ما مقدار الاختلاف الذي صنعه معدل المرابحة؟ (b) إذا تم استثمار مبلغ 10,000 AED في بداية الأمر بمعدل مرابحة 6% مركبة مستمرة، فجد معدل الإيداع المستمر (سنوياً) اللازم لبلوغ مليون درهم خلال 20 سنة. ما مقدار الفرق الذي يحدثه الإيداع الإبتدائي؟

38. الرهن العقاري لمنزل هو قرض يجب أن يدفع على مدى فترة محددة من الزمن. على فرض أنه تم اقتراض مبلغ 150,000 AED بمرابحة سنوية 8%. إذا كان مقدار القسط الشهري هو AED P ، فاشرح لماذا تمثل المعادلة المستحق بعد t سنة، لتمويل عقاري مدته 30 عاماً، ثم وضع دفعة الأقساط P بحيث $A(30) = 0$. (a) جـد P . ثم احسب المبلغ الإجمالي المدفوع وقيمة المرابحة المدفوعة. (b) أعد العمل في الجزء (a) بقرض 7.5%. هل انخفاض معدل المرابحة بقيمة نصف بالمائة يحدث فرقاً؟ (c) أعد العمل في الجزء (a) بتمويل عقاري مدته 15 عاماً. قارن بين الدفعات الشهرية والمبلغ الكلي المدفوع. (d) أعد العمل في الجزء (a) بقرض قيمته 125,000 AED. ما مقدار الفرق الذي يحدث عند عمل دفعة أولى إضافية قيمتها 25,000 AED؟

39. (a) يساهم شخص بمبلغ 10,000 AED كل عام لصالح أحد صناديق التقاعد باستمرار لمدة 10 سنوات حتى سن 40 ولكنه لم يقدم دفعة إبتدائية أو دفعات إضافية. عند معدل مرابحة سنوية قيمتها 8%، ما قيمة الصندوق عند سن 65؟ (b) يساهم شخص بمبلغ 20,000 AED كل عام لصالح أحد صناديق التقاعد من سن 40 حتى سن 65 ولكنه لم يقدم دفعة إبتدائية. مع معدل مرابحة سنوية قيمتها 8%، ما قيمة الصندوق عند سن 65؟ (c) جـد معدل المرابحة السنوية r التي تتساوى عندها صناديق التقاعد لدى المستثمرين.

40. كانت نواة أحد التبرعات 1,000,000 AED وتم استثمار هذا المبلغ بمعدل مرابحة مركبة مستمرة قيمتها 10%. حدد المبلغ الذي يمكن سحبه سنوياً (باستمرار) بحيث تستمر الوديعة لمدة 30 عاماً.

41. (a) في مثال 7.3، جـد الحل البار بالنقطة $(0, 0)$ ومثله بيانياً. (b) لاحظ أن مسألة القيمة الإبتدائية هي $y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}$ مع $y(0) = 0$. إذا عوضت عن $y = 0$ في المعادلة التفاضلية، فما هو $y'(0)$ ؟ صف بالتمثيل البياني ما يحدث عند $x = 0$. (c) لاحظ أن $y'(x)$ لا توجد عند أي x لكل $y(x) = 0$. من الحل المعطى في مثال 7.4، فهذا يحدث إذا كان $x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c = 0$. جـد القيم c_1 و c_2 بحيث يكون لهذه المعادلة ثلاثة حلول حقيقية إذا وفقط إذا $c_1 < c < c_2$.

42. (a) مثل بيانياً حل $y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}$ مع $c = c_2$. (انظر التمرين 41). (b) مع $c = c_2$ في التمرين 41، ناقش أن حل $y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}$ مع $y(0) = \sqrt[3]{3c_2}$ له نقطتان مع مماسات رأسية. قَدِّر أماكن النقاط الثلاثة مع المماسات الرأسية في التمرين 41.

$$\begin{array}{ll} 3. (a) y' = x^2 y + y \cos x & (b) y' = x^2 y - x \cos y \\ 4. (a) y' = 2x \cos y - xy^3 & (b) y' = x^3 - 2x + 1 \end{array}$$

في التمارين من 5 إلى 16، المعادلة التفاضلية قابلة للفصل. جـد الحل العام، بصيغة صريحة إذا أمكن.

$$\begin{array}{ll} 5. y' = (x^2 + 1)y & 6. y' = 2x(y - 1) \\ 7. y' = 2x^2 y^2 & 8. y' = 2(y^2 + 1) \\ 9. y' = \frac{6x^2}{y(1 + x^3)} & 10. y' = \frac{3x}{y + 1} \\ 11. y' = \frac{2x}{y} e^{y-x} & 12. y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x} \\ 13. y' = \frac{\cos x}{\sin y} & 14. y' = x \cos^2 y \\ 15. y' = \frac{xy}{1 + x^2} & 16. y' = \frac{2}{xy + y} \end{array}$$

في التمارين 17 إلى 20، جـد الحل العام بصيغة صريحة وارسم عدة عناصر من عائلة الحلول.

$$\begin{array}{ll} 17. y' = -xy & 18. y' = \frac{-x}{y} \\ 19. y' = \frac{1}{y} & 20. y' = 1 + y^2 \end{array}$$

في التمارين 21-28، جـد حل مسألة القيمة الإبتدائية IVP بصورة صريحة إذا أمكن.

$$\begin{array}{ll} 21. y' = 3(x+1)^2 y, y(0) = 1 & 22. y' = \frac{x-1}{y^2}, y(0) = 2 \\ 23. y' = \frac{4x^2}{y}, y(0) = 2 & 24. y' = \frac{x-1}{y}, y(0) = -2 \\ 25. y' = \frac{4y}{x+3}, y(-2) = 1 & 26. y' = \frac{3x}{4y+1}, y(1) = 4 \\ 27. y' = \frac{4x}{\cos y}, y(0) = 0 & 28. y' = \frac{\tan y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

في التمارين من 29 إلى 34، استخدم المعادلة (7.6) للمساعدة في حل مسألة القيمة الإبتدائية.

$$\begin{array}{ll} 29. y' = 3y(2-y), y(0) = 1 & 30. y' = y(3-y), y(0) = 2 \\ 31. y' = 2y(5-y), y(0) = 4 & 32. y' = y(2-y), y(0) = 1 \\ 33. y' = y(1-y), y(0) = \frac{3}{4} & 34. y' = y(3-y), y(0) = 0 \end{array}$$

35. أحياناً تتم كتابة المعادلة اللوجستية بالصيغة $y'(t) = ry(t)(1 - y(t)/M)$. أثبت أنها مكافئة للمعادلة (7.4) التي فيها $r/M = k$. قام علماء الأحياء بقياس قيم القدرة الاستيعابية M ومعدل النمو r لمجموعة متنوعة من الأسماك. وكانت القيم التقريبية لسماك الهلبوت فقط هي $r = 0.71 \text{ year}^{-1}$ و $M = 8 \times 10^7 \text{ kg}$. (a) إذا كانت الكتلة الإبتدائية لسماك الهلبوت تساوي $y(0) = 2 \times 10^7 \text{ kg}$ ، جـد معادلة تقيس الكتلة الأحيائية (الحيوية) للهلبوت في أي زمن. (b) ارسم التمثيل البياني للكتلة الأحيائية كدالة للزمن. (c) قَدِّر كم من الزمن ستستغرق الكتلة الحيوية للحصول على حدود 10% من القدرة الاستيعابية.

36. (a) جـد حل المعادلة (7.4) إذا كان $y(t) > M$. (b) إذا ارتفعت الكتلة الأحيائية للهلبوت (انظر التمرين 35) ارتفاعاً مفاجئاً إلى

التمارين من 43 إلى 46 ترتبط بالتفاعلات الكيميائية ثنائية التجزئة العكسية، حيث يتحد الجزيئان A و B ليكونا جزيئين آخرين C و D والعكس صحيح. إذا كان $x(t)$ و $y(t)$ هما تركيزان لكل من C و D، بالترتيب، والتركيزات الابتدائية لـ A، B، C، D هي a, b, c, d ، بالترتيب، ثم يتم تمثيل التفاعل بواسطة

$$x'(t) = k_1(a + c - x)(b + c - x) - k_{-1}x(d - c + x)$$

لثوابت المعدل k_1 و k_{-1} .

43. إذا كان $k_1 = 1, k_{-1} = 0.625, a + c = 0.4, b + c = 0.6, c = d$ ، $x(0) = 0.2$ ، فجد التركيز $x(t)$. مثل بيانياً $x(t)$ وجد مستوى التركيز النهائي.

44. كرر تمرين 43 مع (a) $x(0) = 0.3$ و (b) $x(0) = 0.6$. اشرح باختصار ما هو الشيء المستحيل للشرط الابتدائي في الجزء (b).

45. للتفاعل ثنائي التجزئ مع $k_1 = 0.6, k_{-1} = 0.4, a + c = 0.5, b + c = 0.6, c = d$ ، اكتب المعادلة التفاضلية لتركيز C. $x(0) = 0.2$. قم بالحل لإيجاد التركيز في أي زمن ومثل الحل بيانياً.

46. للتفاعل ثنائي التجزئ مع $k_1 = 1.0, k_{-1} = 0.4, a + c = 0.6, b + c = 0.4, d - c = 0.1$ ، اكتب المعادلة التفاضلية لتركيز C. $x(0) = 0.2$. قم بالحل لإيجاد التركيز في أي زمن ومثل الحل بيانياً.

التمارين من 47 إلى 50 ترتبط بالنمو اللوجستي مع الحصاد. على فرض أن مجتمع منعزل يحقق المعادلة اللوجستية $y'(t) = ky(M - y)$. إذا تم حصاد مجتمع (بالصيد، على سبيل المثال) بمعدل R ، ثم أصبح تمثيل هذا المجتمع $y'(t) = ky(M - y) - R$.

47. على فرض أن نوعاً من الأسماك له مجتمع يقدر بمئات الآلاف وتتبع النموذج اللوجستي مع $k = 0.025$ و $M = 8$. (a) حدد التأثير طويل المدى على المجتمع إذا كان المجتمع الابتدائي $y(0) = 8$ ويتناقص عدد الأسماك بمعدل 20,000 كل عام بسبب الصيد. (b) كرر ذلك إذا كان معدل صيد الأسماك 60,000 في السنة.

48. لنموذج الصيد $P'(t) = 0.025P(t)[8 - P(t)] - R$ ، يكون عدد أفراد المجتمع ثابت إذا كان $P'(t) = P^2 - 8P + 40R = 0$. تسمى الحلول بنقاط التوازن. قارن بين نقاط التوازن في الأجزاء (a) و (b) من التمرين 47.

49. حل نموذج المجتمع

$$P'(t) = 0.05P(t)[8 - P(t)] - 0.6 \\ = 0.4P(t)[1 - P(t)/8] - 0.6$$

مع $P(0) > 2$ وحدد النهاية $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$. ماذا يحدث إذا كان $P(0) < 2$ ؟

50. يمثل العدد الثابت 0.4 في التمرين 49 معدل النمو الطبيعي للنوع الحيائي. بمقارنة إجابات التمارين من 47 إلى 49، ناقش كيفية تأثير هذا الثابت على حجم المجتمع.

التطبيقات

51. تتناقص قيمة إعادة البيع $r(t)$ لآلة بمعدل يتناسب مع الفرق بين السعر الحالي وقيمة الخردة S . اكتب معادلة تفاضلية لإيجاد r .

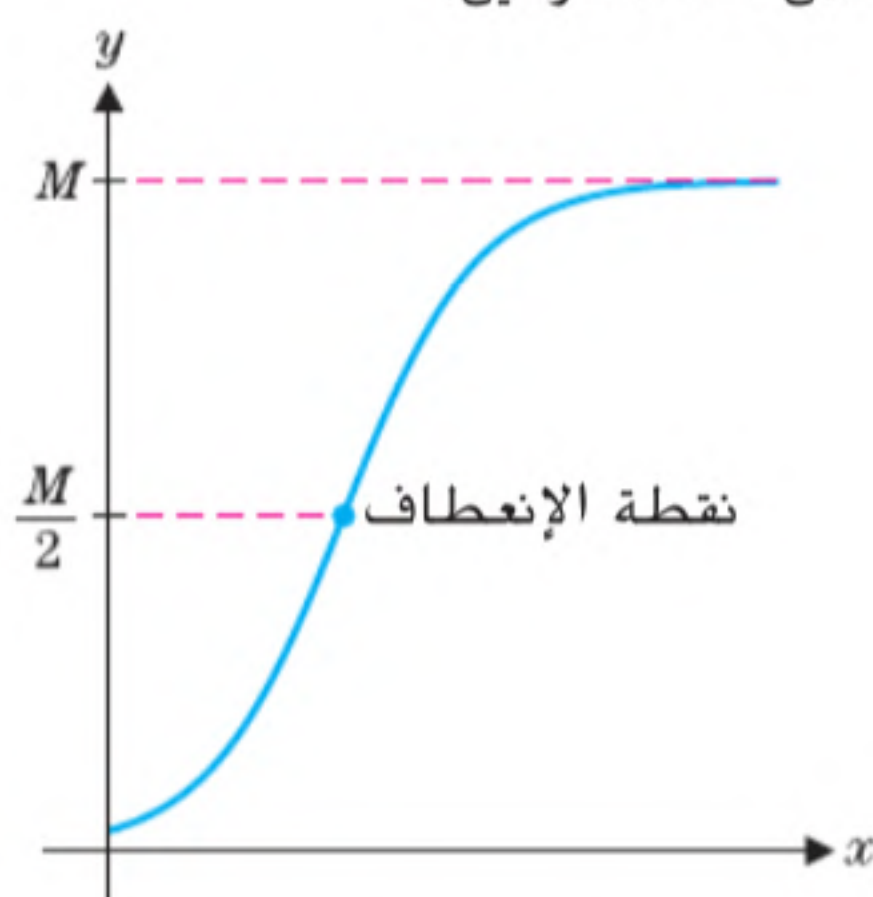
إذا كان سعر بيع الآلة جديدة هو AED 14,000. وتصبح AED 8000 بعد 4 سنوات و تبلغ قيمتها كخردة AED 1000. جـد معادلة لقيمة إعادة البيع في أي زمن.

52. تم ملء صومعة بحبوب قدرها 6000 kg. يتم شحن الحبوب بمعدل ثابت 1000 kg في الشهر. تبلغ تكاليف التخزين فلسين للكيلوجرام في الشهر. لتكن $S(t)$ هي تكلفة التخزين الإجمالية لمدة t شهر. اكتب معادلة تفاضلية لإيجاد S لكل $0 \leq t \leq 6$. حل مسألة القيمة الابتدائية لإيجاد $S(t)$. ما هي الفاتورة الإجمالية للتخزين لمدة 6 أشهر؟

53. للمعادلة اللوجستية $y'(t) = ky(M - y)$ ، أثبت أن التمثيل البياني لـ $\frac{1}{y}$ كدالة لـ y ينتج عنه تمثيل بياني خطي. إذا أعطينا الميل m والتقاطع b لهذا المستقيم، إشرح كيفية حساب النماذج الوسيطة k و M . استخدم البيانات التالية لتقدير k و M لمجتمع الأسماك. توقع التعداد النهائي للأسماك.

t	2	3	4	5
y	1197	1291	1380	1462

54. إنها حقيقة مثيرة للاهتمام أن نقطة الانعطاف في حل المعادلة اللوجستية (انظر الشكل) تحدث عند $y = \frac{1}{2}M$. لإثبات صحة ذلك، لست مضطراً أن تحسب اثنين من مشتقات المعادلة (7.6) وأن تحل $y'' = 0$. فهذا سيبدو سخيفاً جداً وسيعطيك الحل بدلالة t . بدلاً من y . بدلاً من ذلك، فإن اتباع نهج أكثر بساطة سيفي بالغرض. ابدأ بالمعادلة التفاضلية $y' = ky(M - y)$ وخذ مشتقاتها من كلا الطرفين.



(إرشاد: استخدم قاعدة الضرب وقاعدة لسلسلة على الجانب الأيمن). يجب عليك إيجاد أن $y'' = ky'(M - y)$. ثم، $y'' = 0$ إذا وفقط إذا كان $y' = 0$ أو $y = \frac{1}{2}M$. قم باستبعاد $y' = 0$ بوصف سلوك الحل عند قيم التوازن.

55. يتم تمثيل السرعة المتجهة عند الهبوط لجسم ما بالمعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.002v^2$. إذا كان $v(0) = 0$ m/s، ستزداد السرعة المتجهة إلى السرعة المتجهة النهائية. إن السرعة المتجهة النهائية هي حل توازن حيث يلغى سحب الهواء المساعد بالضبط قوة الجاذبية إلى الأسفل. جـد السرعة المتجهة النهائية.

56. على فرض أن f دالة بحيث $f(x) \geq 0$ و $f'(x) < 0$ لـ $x > 0$. وضح أن مساحة المثلث أضلاعه $x = 0$ ، $y = 0$ ، والمماس لـ $y = f(x)$ عند $x = a > 0$ هو $A(a) = -\frac{1}{2}\{a^2f'(a) - 2af(a) + [f(a)]^2/f'(a)\}$. لإيجاد منحنى بحيث تكون هذه المساحة هي نفسها لأي خيار $a > 0$ ، حل المعادلة $\frac{dA}{da} = 0$.

تمارين إستكشافية

1. كائن مسافر عبر الهواء متأثر بالجاذبية (تؤثر رأسياً)، ومقاومة الهواء (تعمل في الاتجاه المعاكس للسرعة) والقوى الأخرى (مثل قوة المحرك). إن معادلة للحركة الأفقية لطائرة نفاثة هي $v' = c - f(v)/m$ حيث c هي الاتجاه العام للمحرك و $f(v)$ هي قوة مقاومة الهواء. لبعض نطاقات السرعة المتجهة، تتساقط بالفعل مقاومة الهواء إلى حد كبير لسرعات أعلى عندما يصبح الهواء حول الكائن مضطرباً هائجاً. فعلى سبيل المثال، على فرض أن $v' = 10,000 - f(v)$ حيث $f(v) = \begin{cases} 0.8v^2 & 0 \leq v \leq 100 \\ 0.2v^2 & 100 < v \end{cases}$ لحل مسألة القيمة

الابتدائية $v(0) = 0, v' = 10,000 - f(v)$ ابدأ بمسألة القيمة الابتدائية $v(0) = 0, v' = 10,000 - 0.8v^2$ حل هذه وحدد الزمن t بحيث $v(t) = 100$ بدءاً من هذا الزمن، تصبح المعادلة $v' = 10,000 - 0.2v^2, v(0) = 100$ وضع هذا الحل مع الحل السابق ليكونا معاً حلاً واحداً صالحاً لأي زمن.

2. حل مسائل القيمة الابتدائية $\frac{dy}{dt} = 2(1-y)(2-y)(3-y)$ حيث $y(0) = 4$ (d) و $y(0) = 2.5$ (c) و $y(0) = 1.5$ (b) و $y(0) = 0$ (a) اذكر بصورة وافية قدر المستطاع كيفية اعتماد النهاية $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ على $y(0)$.

أسئلة المراجعة

تمارين كتابية

تتضمن القائمة التالية المصطلحات التي تم تعريفها والنظريات التي تم توضيحها في هذه الوحدة. لكل مصطلح أو نظرية، (1) قدم تعريفاً أو عبارة دقيقة و(2) اذكر ما تعنيه بمصطلحات عامة و(3) صف أنواع المسائل التي تقترب بذلك.

التكامل بالتجزئ	صيغة الاختزال
تفكيك الكسور الجزئية	CAS
التكامل المعتل	تكامل متقارب
تكامل متباعد	اختبار مقارنة

صواب أم خطأ

1. اذكر ما إذا كانت كل عبارة صواباً أم خطأ وشرح السبب بإيجاز. إذا كانت العبارة خطأ، حاول "تصحيحها" بتعديل العبارة الموضحة إلى العبارة الجديدة الصحيحة.
2. ينجح التكامل بالأجزاء فقط للتكاملات بالصيغة $\int f(x)g(x) dx$.
3. لتكامل بالصيغة $\int xf(x) dx$ استخدم التكامل بالأجزاء دائماً مع $u = x$.
4. إن التقنيات مع الدوال المثلثية في الدرس 6.3 هي أدوات للتعويض.
5. إذا احتوى مكامل على عامل $\sqrt{1-x^2}$ ، ينبغي أن تقوم بإجراء التعويض $x = \sin \theta$.
6. إذا كانت p و q كثيرتي حدود، يمكن إذا إيجاد قيمة أي تكامل من الصيغة $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$.
7. من جدول تكامل واسع، لا تحتاج إلى معرفة أي تقنية تكامل.
8. إذا كان لدى $f(x)$ مقارب عند $x = a$ ، يتباعد إذا $\int_a^b f(x) dx$ لأي b .
9. $\int_1^\infty f(x) dx \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \neq 0$

في التمارين 1-44، جد قيمة التكامل.

1. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$
3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
4. $\int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx$
5. $\int x^2 e^{-3x} dx$
6. $\int x^2 e^{-x^3} dx$
7. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$
8. $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$
9. $\int \frac{x^3}{4+x^4} dx$
10. $\int \frac{x}{4+x^4} dx$
11. $\int e^{2 \ln x} dx$
12. $\int \cos 4x dx$
13. $\int_0^1 x \sin 3x dx$
14. $\int_0^1 x \sin 4x^2 dx$
15. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$
16. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$
17. $\int_{-1}^1 x \sin \pi x dx$
18. $\int_0^1 x^2 \cos \pi x dx$
19. $\int_1^2 x^3 \ln x dx$
20. $\int_0^{\pi/4} \sin x \cos x dx$
21. $\int \cos x \sin^2 x dx$
22. $\int \cos x \sin^3 x dx$
23. $\int \cos^3 x \sin^3 x dx$
24. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$
25. $\int \tan^2 x \sec^4 x dx$
26. $\int \tan^3 x \sec^2 x dx$

$$\begin{array}{ll}
 27. \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x \, dx & 28. \int \tan^3 x \sec^3 x \, dx \\
 29. \int \frac{2}{8+4x+x^2} \, dx & 30. \int \frac{3}{\sqrt{-2x-x^2}} \, dx \\
 31. \int \frac{2}{x^2\sqrt{4-x^2}} \, dx & 32. \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \, dx \\
 33. \int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} \, dx & 34. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}} \, dx \\
 35. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}} \, dx & 36. \int \frac{4}{\sqrt{x+9}} \, dx \\
 37. \int \frac{x+4}{x^2+3x+2} \, dx & 38. \int \frac{5x+6}{x^2+x-12} \, dx \\
 39. \int \frac{4x^2+6x-12}{x^3-4x} \, dx & 40. \int \frac{5x^2+2}{x^3+x} \, dx
 \end{array}$$

تمارين كتابية

$$\begin{array}{ll}
 41. \int e^x \cos 2x \, dx & 42. \int x^3 \sin x^2 \, dx \\
 43. \int x\sqrt{x^2+1} \, dx & 44. \int \sqrt{1-x^2} \, dx
 \end{array}$$

في التمارين 45-50، جـد تفكيك الكسور الجزئية.

$$\begin{array}{ll}
 45. \frac{4}{x^2-3x-4} & 46. \frac{2x}{x^2+x-6} \\
 47. \frac{-6}{x^3+x^2-2x} & 48. \frac{x^2-2x-2}{x^3+x} \\
 49. \frac{x-2}{x^2+4x+4} & 50. \frac{x^2-2}{(x^2+1)^2}
 \end{array}$$

في التمارين 51-60، استخدم جدول التكاملات لإيجاد التكامل.

$$\begin{array}{ll}
 51. \int e^{3x} \sqrt{4+e^{2x}} \, dx & 52. \int x\sqrt{x^4-4} \, dx \\
 53. \int \sec^4 x \, dx & 54. \int \tan^5 x \, dx \\
 55. \int \frac{4}{x(3-x)^2} \, dx & 56. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x(3+4\sin x)} \, dx \\
 57. \int \frac{\sqrt{9+4x^2}}{x^2} \, dx & 58. \int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}} \, dx \\
 59. \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \, dx & 60. \int \frac{x^2}{(x^6-4)^{3/2}} \, dx
 \end{array}$$

61. يختبر أخصائيو أمراض القلب كفاءة القلب بحقن صبغة

بمعدل ثابت R داخل وريد بالقرب من القلب وقياس تركيز الصبغة في مجرى الدم لمدة T ثوان. إذا تم ضخ كامل كمية الصبغة عبره، يبلغ التركيز $c(t) = R$. أحسب الحجم الإجمالي

للصبغة $\int_0^T c(t) \, dt$. لتركيز عام، يتم تعريف الناتج

القلبي بالصبغة $\frac{RT}{\int_0^T c(t) \, dt}$. فسر هذه الكمية. أحسب الناتج القلبي إذا كان $c(t) = 3te^{2t}$.

62. $\int \ln(x+1) \, dx$. يمكنك استخدام التكامل بالأجزاء مع $u = \ln(x+1)$ و $dv = 1$. قارن إجابتك باستخدام $v = x$ في مقابل استخدام $v = x+1$.
63. أثبت أن القيمة المتوسطة لـ $\ln x$ على الفترة $(0, e^n)$ تساوي $n-1$ لأي عدد صحيح موجب n .

64. تتضمن معظم أسئلة الاحتمال احتمالات مشروطة. على سبيل المثال، إذا علمت أن مصباحاً احترق بالفعل لمدة 30 ساعة، فما احتمال أن يستمر لمدة 5 ساعات أكثر على الأقل؟ يكون هذا "احتمال أن $x > 35$ إذا علمت أن $x > 30$ " وتتم كتابته في صيغة $P(x > 35 | x > 30)$. بشكل عام، للحدثين A و B

$P(A|B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$. يتم إعطاء دالة معدل الإخفاق كنهاية لـ $P(x < t + \Delta t | x > t)$ عندما $\Delta t \rightarrow 0$. لأجل pdf الخاص $f(x)$ بالعمر الافتراضي لمصباح، فإن البسط هو احتمال أن يحترق المصباح ما بين الزمنين t و $t + \Delta t$. استخدم $R(t) = P(x > t)$ لإثبات أنه يمكن كتابة دالة معدل الإخفاق في صيغة $\frac{f(t)}{R(t)}$.

65. أثبت أن دالة معدل الإخفاق (انظر التمرين 72) لـ pdf أسية $f(x) = ce^{-\alpha x}$ ثابت.

66. لتوزيع الجاما $f(x) = xe^{-x}$ ، (a) استخدم CAS لتثبت أن $P(x > s + t | x > s) = e^{-t} + \frac{t}{1+s}e^{-t}$ (b) أثبت أن هذه دالة متناقصة لـ $(t \text{ محدد})$. (c) إذا كانت هذه pdf تبين كميات هطول المطر سنوياً في مدينة معينة، فسر نتيجة الجزء (b).

67. يتم إعداد نتائج اختبارات معدل الذكاء لاتباع التوزيع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{450\pi}} e^{-(x-100)^2/450}$. وفقاً لهذا التوزيع، ما النسبة

المئوية للأشخاص الذين يفترض أن يكون معدل ذكائهم بين 90 و100؟ إذا كان سيتم إعطاء نسبة 1% الأعلى من النتائج اللقب "عبقريّة" فما هي أعلى درجة ينبغي أن تحصل عليها لتحصل على هذا اللقب؟

الملحق A

التمارين 6.2

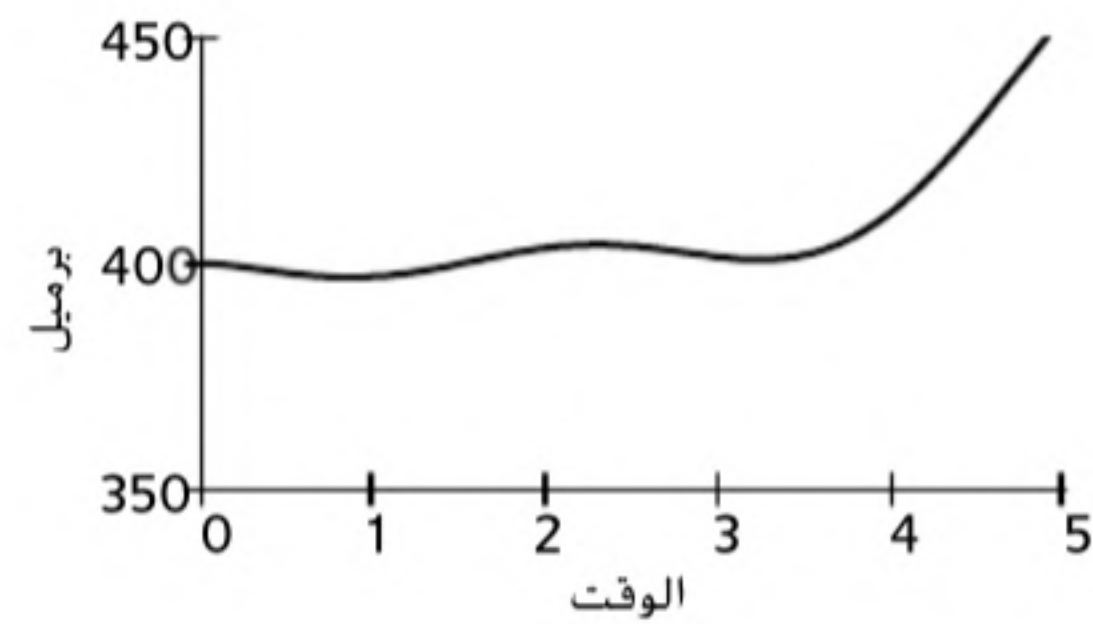
1. 12 3. $\frac{56\pi}{3}$
5. (a) $\int_0^{500} \left(750 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx = 93,750,000 \text{ ft}^3$
(b) $\int_0^{250} \left(750 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx = 82,031,250 \text{ ft}^3$ متسع عند القاع
7. $\int_0^{30} \left(3 - \frac{1}{12}x\right)^2 dx = \frac{215}{2} \text{ ft}^3$
9. $\int_0^{60} \pi [60(60 - y)] dy = 108,000 \pi \text{ ft}^3$
11. $\int_0^{2\pi} \pi \left[4 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx = 33\pi^2 + 32\pi \ln 3$
13. 0.2467 cm^3 15. 2.5 ft^3
17. (a) $\frac{8\pi}{3}$ (b) $\frac{28\pi}{3}$ 19. (a) $\frac{32\pi}{5}$ (b) $\frac{224\pi}{15}$
21. (a) $2\pi e^2 + 2\pi$ (b) $\pi \left(\frac{e^4}{2} + 4e^2 - \frac{9}{2}\right)$
23. (a) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{2} \approx 0.637$ (b) 7.472
25. (a) $\frac{16\pi}{3}$ (b) $\frac{32\pi}{3}$ (c) $\frac{64\pi}{3}$ (d) $\frac{128\pi}{3}$
(e) $\frac{32\pi}{3}$ (f) $\frac{64\pi}{3}$
27. (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{5}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{15}$ (e) $\frac{7\pi}{6}$ (f) $\frac{13\pi}{15}$
29. $\frac{\pi h^2}{2a} = \frac{1}{2} \pi h \left(\sqrt{\frac{h}{a}}\right)^2$ 31. $\int_{-1}^1 \pi(1)^2 dy = 2\pi$
33. $\int_{-1}^1 \pi \left(\frac{1-y}{2}\right)^2 dy = \frac{2\pi}{3}$ 35. $\int_{-r}^r \pi(r^2 - y^2) dy = \frac{4}{3} \pi r^3$
37. الحجم نفسه 39. (a) $\frac{16}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$
41. (a) $\frac{64}{15}$ (b) $\frac{8\pi}{15}$ (c) $\frac{16\sqrt{3}}{15}$

الوحدة 6

التمارين 6.1

1. $\frac{40}{3}$ 3. $5 - e^{-2}$ 5. $\frac{64}{3}$ 7. $\frac{27}{4}$
9. $\frac{3 - \ln 4}{2}$ 11. $5 \ln 5 - 4$ 13. 0.08235
15. 0.135698 17. 4.01449 19. $\int_0^1 (2 - 2y) dy = 1$
21. $\int_0^1 2x dx = 1$ 23. $\int_0^1 (3 - x^2 - 2x) dx = \frac{5}{3}$
25. $\int_1^{\ln 2} (4e^{-x} - e^x) dx$ 27. 35.%08 29. 93.%02
31. 3; $\int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx = \int_{\sqrt{3}}^3 (x^2 - 3) dx = 2\sqrt{3}$
37. $L = \frac{3}{16}$ 39. (a) A_2 (b) $A_1 + A_2$ (c) A_3 (d) A_2
41. النقاط الحرجة عند $t = n\pi/2$. n عدد فردي: لا توجد قيم عظمى؛
نقاط الانعكاس عند $t = n\pi/2$
43. 14.4 مليون برميل 45. 2.45 مليون برميل

47. (ستختلف الإجابات)
- | الوقت | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|
| الكمية | 397 | 403 | 401 | 412 | 455 |



49. $(q^*, p^*) = (80, 8)$: الفائض لدى المستهلك 80

51. بافتراض أن $C(0) = 0$:

- (a) الخسارة من بيع أول 2000 عنصر
- (b) الربح من بيع العناصر من 2001 إلى 5000
- (c) مجموع الجزأين (a) و (b)
- (d) الخسارة من بيع العناصر من 5001 إلى 6000

21. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + (x \sin x)^2} dx \approx 4.6984$

23. $20(e - e^{-1}) \approx 47$ ft

25. 5.43 ft

27. 1.672, 1.720, 1.754 $\rightarrow$ 2

29. $\int_0^1 2\pi x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx 3.8097$

31. $\int_0^2 2\pi(2x - x^2)\sqrt{1 + (2 - 2x)^2} dx \approx 10.9655$

33. $\int_0^1 2\pi e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx \approx 22.9430$

35. $\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx \approx 7.2118$

37. (a) 0.9998 (b) 0.9749

39. (a) 6π (b) 4π (c) $(\sqrt{5} + 1)\pi$

41. (a) $t = 3 + \sqrt{12}$ (b) $t = 3$

43. 60 ياردة؛ 60 ياردة؛ 139.4 ياردة؛ 104.55 ft/s

التمارين 6.5

1. $y(0) = 80, y'(0) = 0$ 3. $y(0) = 60, y'(0) = 10$

5. $-8\sqrt{30}$ ft/s $\approx$ 30 mph 7. $\sqrt{h}$ 9. 78.4 مترًا

11. $-4.9t^2 + 19.6t$; 19.6 m; 4 sec; -19.6 m 13. $8\sqrt{\frac{5}{3}}$ ft/sec

17. $10\sqrt{3} \approx 17$ sec, $490\sqrt{3} \approx 849$ m; متساويين

19. 9.0° الإرسال ليس داخل الملعب؛ 21. 2.59 ft

23. قفزات الكرة ($h \approx -0.62$)

25. $40\sqrt{\frac{5}{\sqrt{3}}} \approx 68$ ft/s; $20\sqrt{10} \approx 63$ ft/s

27. (a) $\frac{25}{16} \sin 4t - \frac{25}{4}t$ (b) $\frac{25}{16} \sin(4t + \pi/2) - \frac{25}{16}$

29. $d = 490t^2$ 31. $\frac{20\pi}{\sqrt{30}} \approx 11.5$ rad/s

35. (a) هدفًا! $x \approx -0.288$ عند $y=90$ (b) نعم $x \approx 1.7$ عند $y=30$

37. 25 ft; 30.25 ft

41. أقصى خطأ مسموح به هو $0.01 \text{ rad} \approx 0.6^\circ$

43. 86.18 ft; 530.34 ft

47. (a) $v = \sqrt{2gH}$ (b) 32 ft/s

(c) 22.63 ft/s (d) 3.94 ft/s; 22.28 ft/s

التمارين 6.6

1. $\frac{15}{8}$ ft-lb 3. $\frac{1250}{3}$ ft-lb 5. 270,000,000 ft-lb

7. 50,000 ft-lb 9. (a) 704,000 ft-lb (b) 16 hp

11. (a) $44,100\pi$ N-m (b) 9800π N-m

13. 7.07 ft 15. $J \approx 2.113$; 133 ft/s

17. أقصى دفع: $\frac{30}{e} \approx 11.036$; الاندفاع: $90 - \frac{270}{e^2} \approx 53.459$

19. $m = 15$ kg, $\bar{x} = \frac{16}{5}$ m

21. 0.0614 oz صلح, 31.5 oz

23. 16.6 in. يختلف بمقدار $3\bar{x}$, الكتلة نفسها

25. 0.0614 oz صلح, 31.4 oz; $\bar{x} = 17.86$ in.

43. (a) $\frac{156}{625}$ (b) $\frac{39\pi}{1250}$ 45. $\frac{5\pi}{12}$

47. باستخدام قاعدة سيمسون, 12.786

49. ستختلف الإجابات؛ احتمالية واحدة موضحة:



التمارين 6.3

1. $r = 2 - x, h = x^2, V = \frac{8\pi}{3}$ 3. $r = x, h = 2x, V = \frac{4\pi}{3}$

5. $r = x, h = \sqrt{x^2 + 1}, V = \frac{2\pi}{3}(17^{3/2} - 1)$

7. $r = 2 - y, h = 2\sqrt{1 - y^2}, V = 4\pi^2$

9. $\frac{32\pi}{3}$ 11. $\frac{128\pi}{3}$ 13. $\frac{128\pi}{15}$ 15. 288π

17. (a) $\frac{80\pi}{3}$ (b) 16π (c) 16π (d) $\frac{16\pi}{3}$

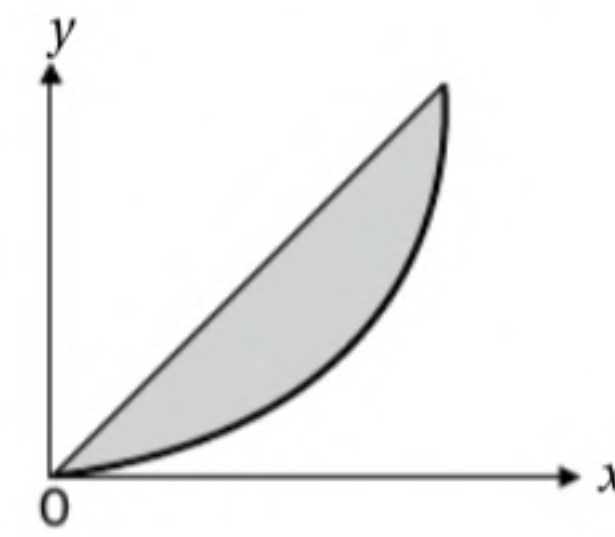
19. (a) $\frac{625\pi}{6}$ (b) $\frac{625\pi}{3}$ (c) $\frac{875\pi}{6}$ (d) $\frac{500\pi}{3}$

21. (a) $\frac{32\pi}{15}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) $\frac{38\pi}{15}$

23. (a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{64\pi}{15}$

25. (a) 16.723 (b) 12.635 (c) 4.088 (d) 1.497

27. $x = \sqrt{y}$ و $x = y$ عند $x = 0$



29. مثل رقم 27

33. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ 35. $\sqrt{1 - \sqrt{0.9}} \approx 0.2265$

التمارين 6.4

1. 1.1; 46044743 3. 3.3; 72427901 5. $2\sqrt{5}$

7. $\frac{73\sqrt{73} - 37\sqrt{37}}{54}$ 9. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ 11. $\frac{33}{16}$

13. $\frac{10}{3}$ 15. $\int_{-1}^1 \sqrt{1 + 9x^4} dx \approx 3.0957$

17. $\int_0^2 \sqrt{1 + (2 - 2x)^2} dx \approx 2.9579$

19. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx \approx 3.8202$

27. $\frac{1}{3} \tan^{-1} x^3 + c$ 29. $\sin^{-1} \frac{x}{2} + c$ 31. $\frac{1}{2} \sin^{-1} x^2 + c$
 33. $\tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$ 35. $-(\ln 2)^2$ 37. $\frac{12}{5}$
 39. $\frac{72}{5}$ 41. $\int \frac{5}{3+x^2} dx = \frac{5}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) + c$
 43. $\int \frac{\ln x}{2x} dx = \frac{1}{4} (\ln x)^2 + c$ 45. $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$
 47. $1 + \frac{1}{2} \ln 2 - \tan^{-1}(2) + \frac{1}{4} \pi$
 49. $\tan^{-1} x + c; \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c; x - \tan^{-1} x + c;$
 $\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$

التمارين 7.2

1. $x \sin x + \cos x + c$ 3. $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$
 5. $\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$ 7. $-\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} + c$
 9. $\frac{1}{17} e^x \sin 4x - \frac{4}{17} e^x \cos 4x + c$
 11. $\frac{2}{3} \sin 2x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x \sin x + c$
 13. $x \tan x + \ln |\cos x| + c$ 15. $\frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + c$
 17. $\sin x \ln(\sin x) - \sin x + c$ 19. $\frac{1}{4} \sin 2 - \frac{1}{2} \cos 2$
 21. $-\frac{2}{\pi^2}$ 23. $10 \ln 20 - \ln 2 - 9$
 25. $\frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a^2} x e^{ax} + \frac{2}{a^3} e^{ax} + c$
 27. $\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + c$
 31. $e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$
 33. $\frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + c$ 35. $9e - 24$ 37. $\frac{8}{15}$
 ; $\frac{(m-1)(m-3) \cdots 1}{m(m-2) \cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}$ فردي: m 39.
 $\frac{(m-1)(m-3) \cdots 2}{m(m-2) \cdots 3}$ زوجي: m
 41. $x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$ 43. $-2 \sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c$
 45. $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c$
 47. $\left(1 - \frac{e^{4x}}{2}\right) \cos(e^{2x}) + e^{2x} \sin(e^{2x}) + c$
 49. $6(e^2 - 1)$ 51. n مرات
 53. (a) التعويض (b) الأجزاء
 51. (c) الأجزاء (d) التعويض
 55. العمود الأول، المشتقات؛ العمود الثاني، المشتقات العكسية
 57. $x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12x^2 \sin x - 24x \cos x + 24 \sin x + c$
 59. $\left(\frac{1}{2} x^4 - x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{4}\right) e^{2x} + c$
 61. $-\frac{1}{3} x^3 e^{-3x} - \frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} + c$
 67. $e^x \ln x + c$

التمارين 7.3

1. $\frac{1}{5} \sin^5 x + c$ 3. $\frac{1}{8}$ 5. $\frac{1}{3}$ 7. $\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2(x+1) + c$
 9. $\frac{1}{3} \sec^3 x + c$ 11. $\frac{1}{6} \sec^3(x^2+1) - \frac{1}{2} \sec(x^2+1) + c$
 13. $-\frac{1}{3} \cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x + c$ 15. $\frac{12}{35}$ 17. $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$
 19. $-\frac{8}{21} + \frac{25\sqrt{2}}{168}$ 21. $-\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + c$
 23. $8 \sin^{-1} \left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2} x \sqrt{16-x^2} + c$ 25. π

27. $2, 4, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, 3, \frac{16}{3}$
 29. $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ 31. $(0, 1.6)$ 33. 8,985,600 lb
 35. 196,035 lb 37. 12,252 lb
 39. 10,667 hp 41. %27.22, 20.54, 24.53 43. $\frac{1}{4} \rho \pi a^3 b$
 45. $\frac{\text{متوسط الحجم}}{\text{خشبي}} \approx 1.35; \frac{\text{كبير الحجم}}{\text{خشبي}} \approx 1.78$

التمارين 6.7

7. 4 9. $\frac{4}{1-e^{-4}}$ 11. $\frac{4}{\pi}$ 13. 0.157
 15. 7.77×10^{-11} 17. $1 - e^{-3/2} \approx 0.77687$
 19. $e^{-6} - e^{-12} \approx 0.00247$ 21. 0.594 23. 0.9999995
 25. (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.7937$ 27. (a) $\frac{2}{\pi} \ln 2$ (b) $\tan \frac{\pi}{8}$
 29. (a) $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ (b) $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ 31. $c = \frac{4}{1-e^{-4b}} \rightarrow 4$
 $\frac{c}{36} [1 - (6b+1)e^{-6b}] \rightarrow \frac{1}{6} = 6$; المتوسط $\leftarrow c = \frac{6}{1-e^{-6b}}$ 33.
 35. (a) 0.0646 (b) 0.9354 (c) 0.0132 (d) 0.4147
 39. $\frac{5}{2}$ 41. $p = \frac{m}{n}$ 43. $m = \frac{1}{b}$
 47. (b) $\frac{16}{15} x^2 - \frac{4}{5} x + 1$ (b) $\frac{1}{2}$

الوحدة 6 تمارين المراجعة

1. $\frac{\pi^3}{3} + 2\pi - 2$ 3. $\frac{1}{12}$ 5. 1.452 7. $\frac{5}{6}$
 9. 10,054 11. $\frac{98\pi}{3}$ 13. 4.373
 15. (a) $\frac{256\pi}{5}$ (b) 8π (c) $\frac{128\pi}{3}$ (d) $\frac{1408\pi}{15}$
 17. (a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) 2π (c) 4π (d) $\frac{22\pi}{3}$
 19. $\int_{-1}^1 \sqrt{1+16x^6} dx \approx 3.2$ 21. $\int_{-2}^2 \sqrt{1+\frac{1}{4}e^x} dx \approx 4.767$
 23. $\int_0^1 2\pi(1-x^2)\sqrt{1+4x^2} dx \approx 5.483$ 25. -64 ft/s
 27. 1.026 sec, 46.3 ft 29. لا. فترات الكرة
 31. $64\sqrt{2} \text{ ft/s}, -64\sqrt{2} \text{ ft/s}$ 33. $\frac{40}{3} \text{ ft-lb}$
 $x = 2$ أثقل إلى يمين $\bar{x} = \frac{16}{7}, m = \frac{112}{3}$ 35.
 37. 22,630,400 lb 39. $J \approx 1.32$; 52 ft/s 43. 2
 45. (a) $1 - e^{-2} \approx 0.865$ (b) $e^{-2} - e^{-4} \approx 0.117$
 47. (a) $\frac{11}{15}$ (b) $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \approx 0.786$

الوحدة 7

التمارين 7.1

1. $\frac{1}{a} e^{ax} + c$ 3. $\sin^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + c$ 5. $-\frac{1}{6} \cos 6t + c$
 7. $\frac{1}{5} x^5 + \frac{8}{3} x^3 + 16x + c$ 9. $\frac{3}{4} \tan^{-1} \left(\frac{x}{4}\right) + c$
 11. $\sin^{-1} \left(\frac{x+1}{2}\right) + c$ 13. $2 \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{2}\right) + c$
 15. $2 \ln |t^2 + 2t + 5| - 2 \tan^{-1} \left(\frac{t+1}{2}\right) + c$
 17. $-\frac{1}{2} e^{3-2x} + c$ 19. $6 \ln(1+x^{2/3}) + c$
 21. $-2 \cos \sqrt{x} + c$ 23. 0 25. $1 - \sqrt{2}$

41. $\ln|x^3| - \ln|x^3 + 1| + c; -\ln|1 + 1/x^3| + c$
 (a) الكسور الجزئية (b) التعويض
 (c) الكسور الجزئية (d) الصيغة الأساسية
45. $\frac{1}{4(1-\sin x)} - \frac{1}{4} \ln(1 - \sin x) - \frac{1}{4(1+\sin x)} + \frac{1}{4} \ln(1 + \sin x) + c$

7.5 التمارين

1. $\frac{1}{8(2+4x)} + \frac{1}{16} \ln|2+4x| + c$
 3. $\frac{2}{15}(3e^x - 2)(1 + e^x)^{3/2} + c$
 5. $\frac{1}{4}x\sqrt{1/4 + x^2} - \frac{1}{16} \ln|x + \sqrt{1/4 + x^2}| + c$
 7. $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{9}$ 9. $\ln(2 + \sqrt[3]{8}) - \ln(1 + \sqrt[3]{5})$
 11. $\frac{-1}{x-3} \sqrt{9 - (x-3)^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right) + c$
 13. $\frac{1}{5} \tan^5 u - \frac{1}{3} \tan^3 u + \tan u - u + c$
 15. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{4 + \sin x} - 2}{4 + \sin x + 2} \right| + c$
 17. $\frac{1}{2} \cos x^2 + \frac{1}{2} x^2 \sin x^2 + c$
 19. $-\frac{4}{3}(\cos x - 2) \sqrt{1 + \cos x} + c$
 21. $\frac{1}{2} \sin t \sqrt{4 + \sin^2 t} - 2 \ln(\sin t + \sqrt{4 + \sin^2 t}) + c$
 23. $\frac{1}{4} e^{-2/x^2} + c$
 25. $-\sqrt{4x - x^2} + 2 \cos^{-1}\left(\frac{2-x}{2}\right) + c$
 27. $e^x \tan^{-1}(e^x) - \ln(1 + e^{2x}) + c$

7.6 التمارين

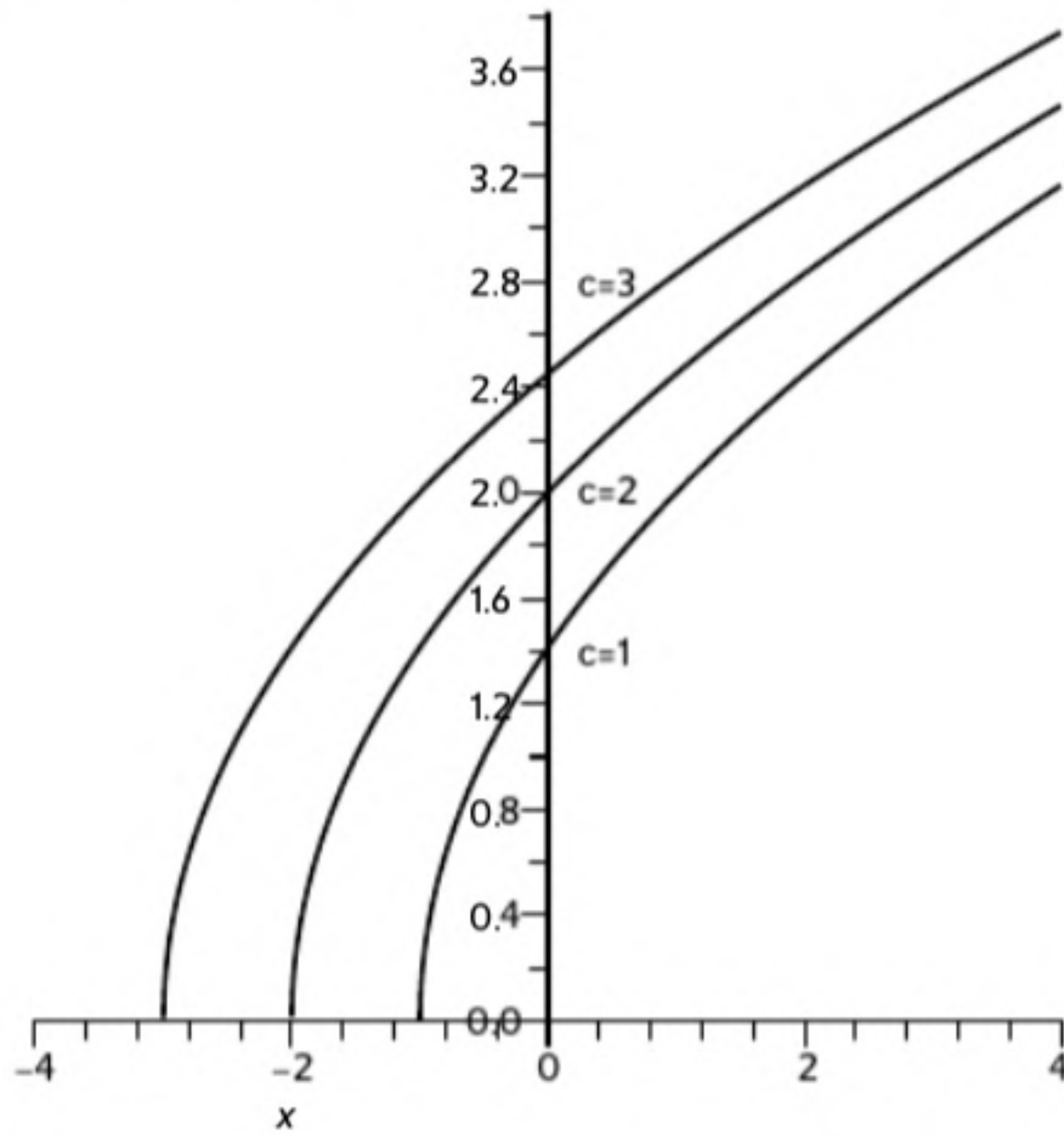
1. $2e^{4t}$ 3. $5e^{-3t}$ 5. $2e^{2(t-1)}$ 7. $50 + 20e^t$
 9. (a) 3200 (b) $400 \cdot 2^t = 400e^{(\ln 2)t}$ (c) 4525
 11. (a) 8 ساعات (b) $100 \cdot 2^{t/4} = 100e^{(\ln 2/4)t}$ (c) 23.6 ساعة
 17. (a) 12.5% (b) 8.4% 13. $66.4 \approx 20 \frac{\ln 10}{\ln 2}$ دقيقة
 19. $0.4e^{-(\ln 2/3)t} \text{ mg}$; 15.97 ساعة (a) 6 ساعات (b) 15.97 ساعة
 21. 13,305 عاما 23. $\frac{\ln(5/13)}{\ln(11/13)} \approx 5.72$ دقائق
 25. (a) $70 - 20e^{(\ln 7/2)t}$ (b) 66.6° (c) 9.02 min
 29. AED 1080, AED 1083, AED 1083.28, AED 1083.29
 27. 9:46 P.M.
 31. (a) A = AED 110,232; B = AED 66,402
 (b) A = AED 22,255; B = AED 29,836 (c) 6.9%
 33. (a) AED 14,715.18 (b) AED 5413.41
 مع تناقص خطي: 10 أعوام، AED 20,000؛ 20 عاما، AED 0.
 37. AED 7300، AED 7860 مقابل AED 7665
 39. $p(x) \approx e^{1.468x + 0.182}$ ؛ ستختلف الإجابات

27. $\frac{3x}{2} \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1} + \frac{9}{2} \ln \left| \frac{x}{3} + \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1} \right| + c$
 29. $2 \ln |\sqrt{x^2 - 4} + x| + c$
 31. $\sqrt{4x^2 - 9} - 3 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{3} \right) + c$
 33. $\frac{3x}{2} \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} - \frac{9}{2} \ln \left| \frac{x}{3} + \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} \right| + c$
 35. $\frac{1}{2} x \sqrt{16 + x^2} + 8 \ln \left| \frac{1}{4} \sqrt{16 + x^2} + \frac{x}{4} \right| + c$
 37. $9 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$ 39. $\frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} - \sqrt{1 + x^2} + c$
 41. $\sqrt{x^2 + 4x} - \cosh^{-1} \left(\frac{x+2}{2} \right) + c$
 43. $\sqrt{x^2 + 2x + 10} - \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left(\frac{x+1}{3} \right) + c$
 45. $\frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + c; \frac{1}{4} \sec^4 x + c$
 47. (b) $\frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} |\sec x + \tan x| + c$
 (c) $\frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{3} \tan x + c$
 (d) $\frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{8} \sec x \tan x + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \tan x| + c$
 49. $-\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x + \cot x| + c$
 53. $\frac{1}{2} R I^2$

7.4 التمارين

1. $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1}; 3 \ln|x+1| - 2 \ln|x-1| + c$
 3. $\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x-2}; 2 \ln|x+1| + 4 \ln|x-2| + c$
 5. $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{5}{x}; 2 \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-2| - \frac{5}{2} \ln|x| + c$
 7. $\frac{3}{2x+1} - \frac{2}{3x-7}; \frac{3}{2} \ln|2x+1| - \frac{2}{3} \ln|3x-7| + c$
 9. $\frac{1}{4} + \frac{3}{(x+2)^2} - \frac{1}{4x}; \frac{1}{4} \ln|x+2| - \frac{3}{2}(x+2)^{-1} - \frac{1}{4} \ln|x| + c$
 11. $\frac{-2x+1}{x^2+1} + \frac{2}{x}; -\ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + 2 \ln|x| + c$
 13. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{5}{3x+2} - \frac{3}{2x-5} \right];$
 $\frac{2}{3}x + \frac{5}{9} \ln|3x+2| - \frac{1}{2} \ln|2x-5| + c$
 15. $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}; 2 \ln|x+1| - (x+1)^{-1} + c$
 17. $1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2+2x+2}; x - 2 \ln|x| + 2 \tan^{-1}(x+1) + c$
 19. $3 + \frac{2}{x-1} + \frac{x-2}{x^2+1};$
 $3x + 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \tan^{-1} x + c$
 21. $11 \ln|x+4| + 2 \ln|x-2| + \frac{1}{2} x^2 - 2x + c$
 23. $\ln|x+2| - 3 \ln|x+1| + 2 \ln|x| + c$ 25. $\ln|x^4 - x| + c$
 27. $\frac{1}{2} \ln|2x+1| - \frac{1}{4} \ln(4x^2+1) + \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x) + c$
 29. $\frac{1}{8} x^2 - \frac{2}{9} x + \frac{5}{27} \ln|x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}| - \frac{2\sqrt{2}}{27} \tan^{-1} \left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}} \right) + c$
 31. $3 \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2 + x + 1| - \frac{7}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c$
 33. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$ 35. $\frac{1}{2} \ln(4 - \sin^2 x) + c$
 37. $\frac{4}{x^2+1} - \frac{2}{(x^2+1)^2}$ 39. $\frac{4}{x^2+x+1} - \frac{4x+1}{(x^2+x+1)^2}$

19. $y = \pm\sqrt{2x+c}$

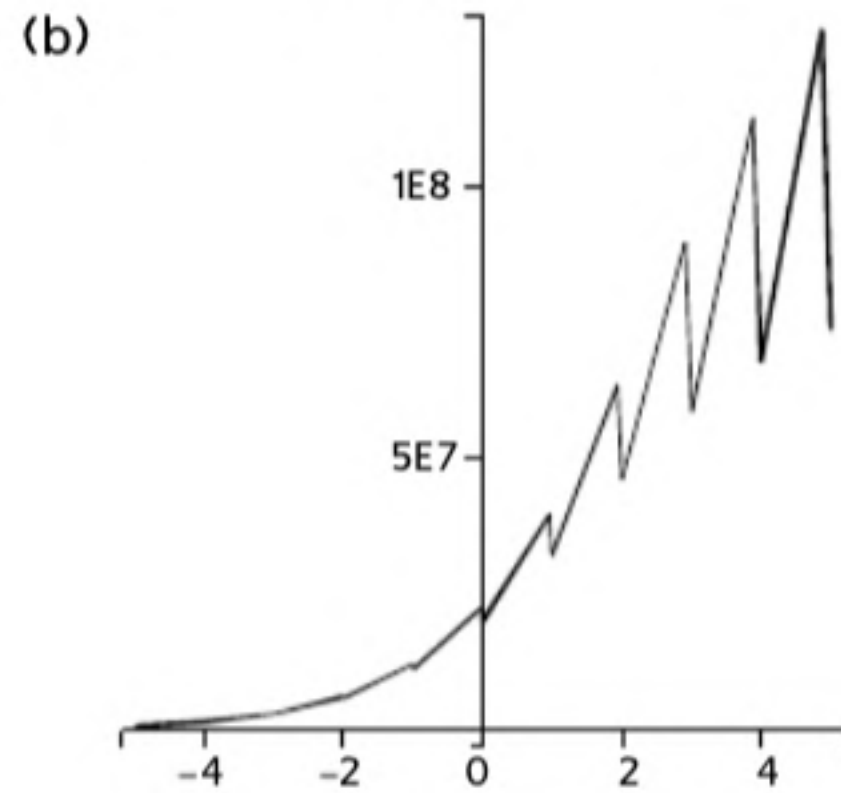


21. $y = e^{-1}e^{(x+1)^3}$ 23. $y = \sqrt{\frac{8}{3}x^3 + 4}$ 25. $y = (x+3)^4$

27. $\sin y = 2x^2$ 29. $y = \frac{2e^t}{1+e^t}$

31. $y = \frac{20e^{10t}}{1+4e^{10t}}$ 33. $y = \frac{3e^t}{1+3e^t}$

35. (a) $y = \frac{(8 \times 10^7) e^{0.71t}}{3 + e^{0.71t}}$



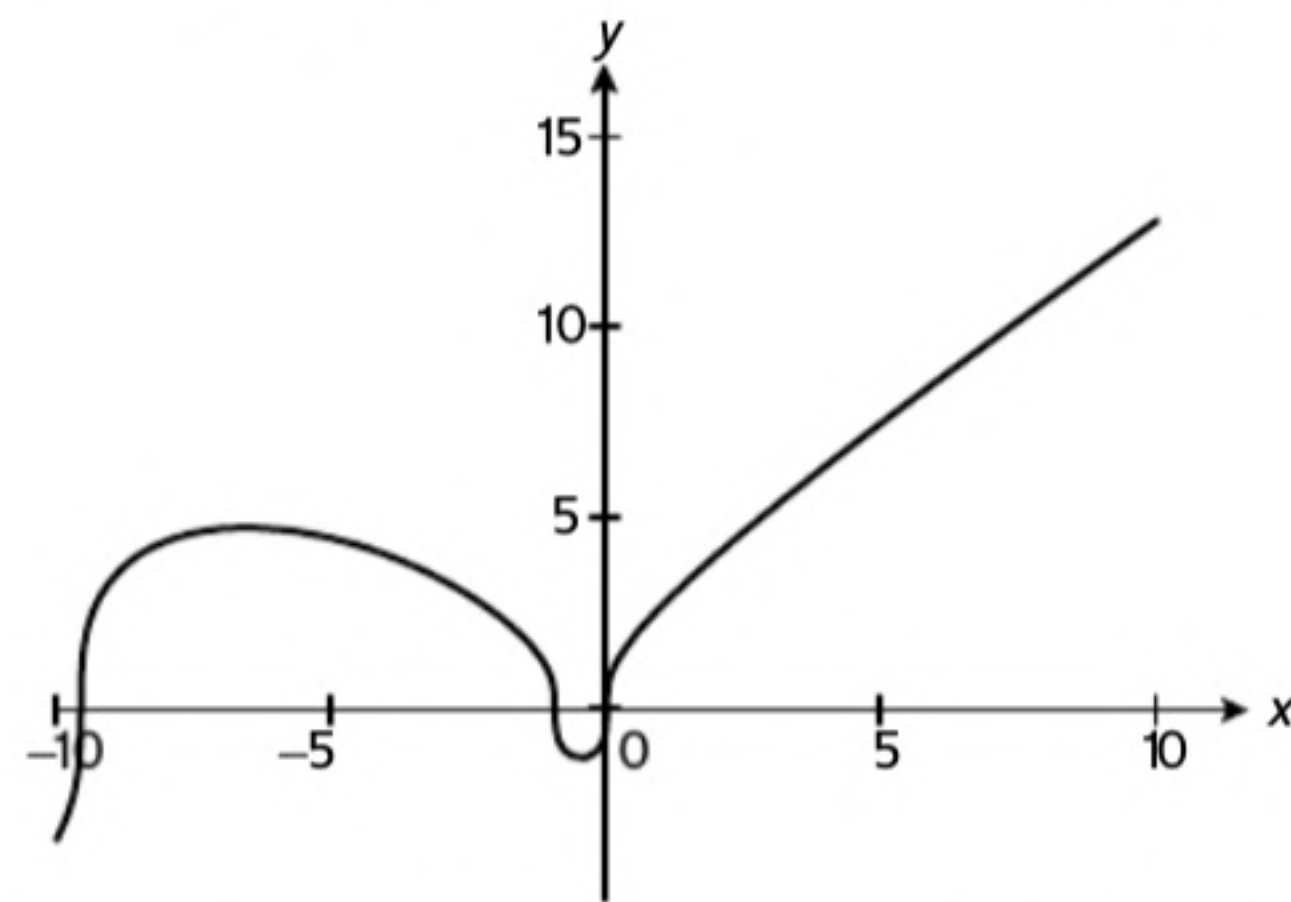
(c) 4.642 أعوام

37. (a) AED 277,901 (b) AED 25,002

39. (a) AED 1,131,949 (b) AED 998,258 (c) 10.5%

41. (a) $y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x}$

(b) مماس رأسي



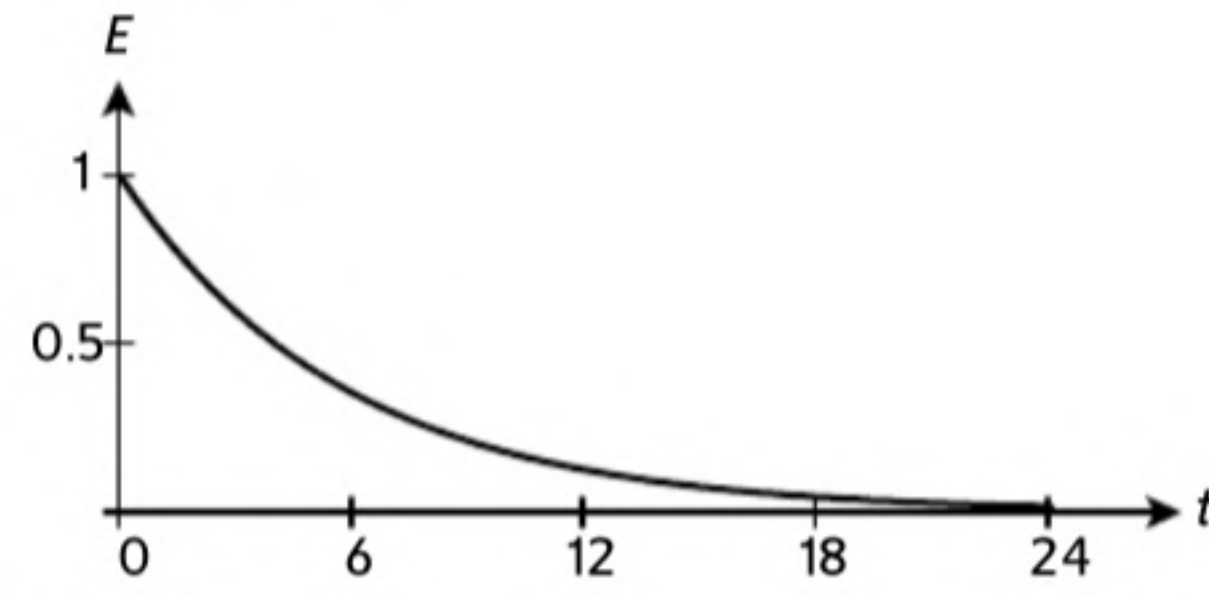
(c) للمعادلة التكعيبية ثلاثة حلول حقيقية حيث

$$\frac{-217 - 37\sqrt{37}}{12} < c < \frac{-217 + 37\sqrt{37}}{12}$$

41. $p(t) \approx e^{-0.055t+2.015}$, حيث t تمثل الأعوام منذ 1960

45. ليكون عمر النصف الحيوي 31 ساعة: 87.71 mg
الحيوي 46 ساعة: 104.48 mg

47. $E(t) = e^{-(\ln 2/4)t}$



49. AED 4493.29

51. A: AED 167,150.43; B: AED 179,373.42; C: AED 180,000

53. (a) المبلغ دفعة واحدة (AED 1,271,249 إلى AED 1,267,853) بعد ثلاثة أعوام
(b) 4 دفعات (AED 1,228,234 إلى AED 1,197,217) بعد ثلاثة أعوام
(c) المبلغ دفعة واحدة (AED 1,349,859 إلى AED 1,309,401) بعد ثلاثة أعوام

التمارين 7.7

1. (a) نعم (b) لا 3. (a) نعم (b) لا

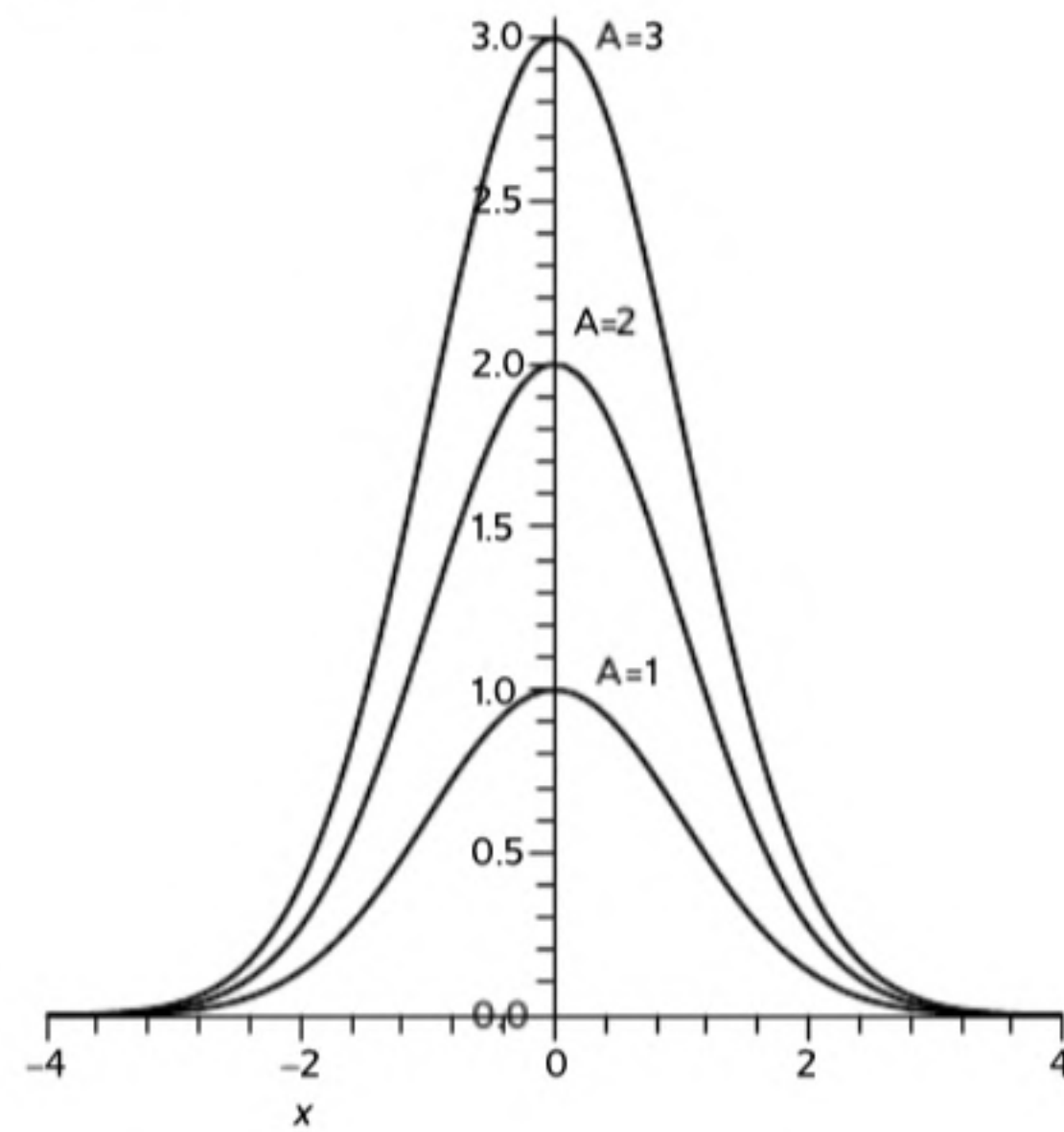
5. $y = ce^{x+x^3/3}$ 7. $y = -\frac{1}{\frac{2}{3}x^3 + c}$

9. $y = \pm\sqrt{4\ln|1+x^3| + c}$

11. $(y+1)e^{-y} = 2(x+1)e^{-x} + c$

13. $\cos y = -\sin x + c$ 15. $y = c\sqrt{1+x^2}$

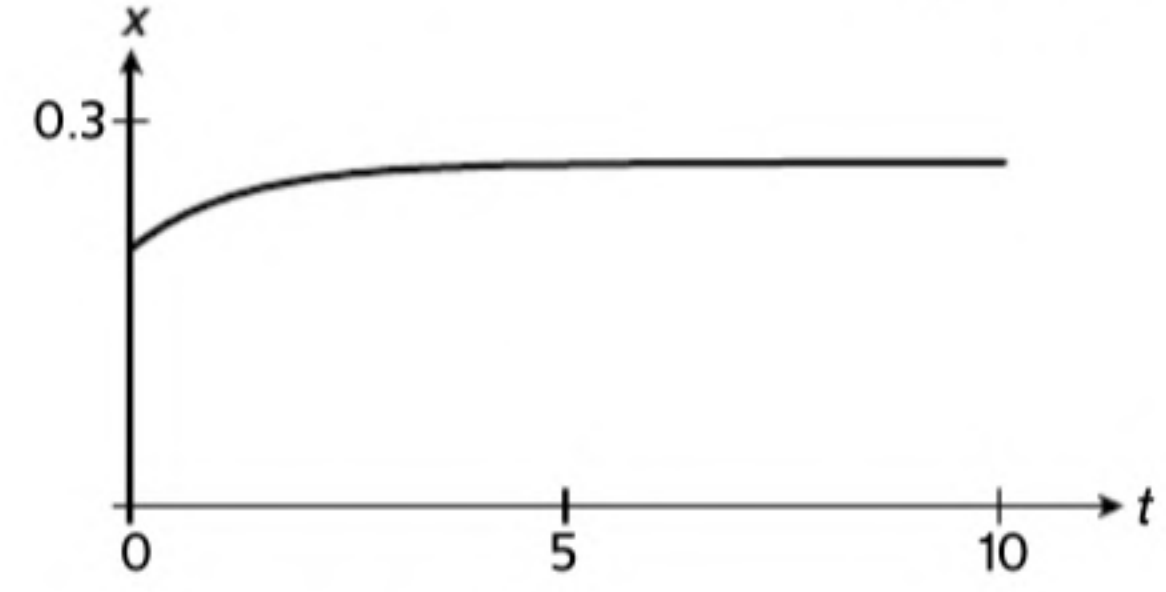
17. $y = ce^{-x^2/2}$



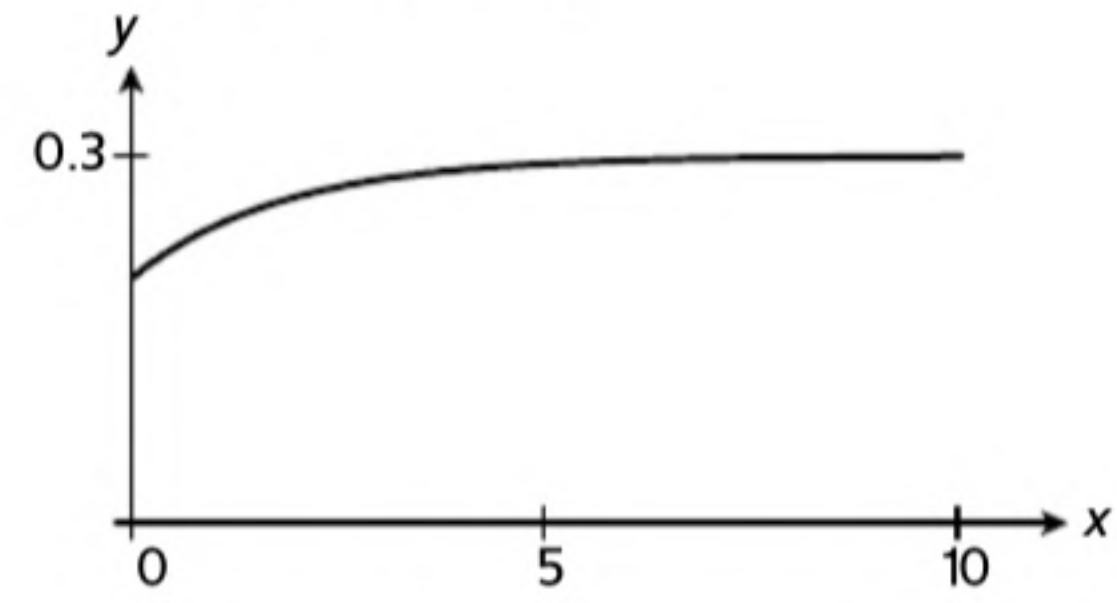
الوحدة 7 تمارين المراجعة

1. $2e^{\sqrt{x}} + c$ 3. $\frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c$
5. $-\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} + c$ 7. $\frac{1}{2} \tan^{-1} x^2 + c$
9. $\frac{1}{4} \ln(4+x^4) + c$ 11. $\frac{1}{3} x^3 + c$
13. $\frac{1}{9} \sin 3 - \frac{1}{3} \cos 3$ 15. $\frac{3\pi}{16}$ 17. $\frac{2}{\pi}$
19. $4 \ln 2 - \frac{15}{16}$ 21. $\frac{1}{3} \sin^3 x + c$
23. $\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + c$ 25. $\frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + c$
27. $\frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} - \frac{2}{7} (\sin x)^{7/2} + c$ 29. $\tan^{-1} \left(\frac{x+2}{2} \right) + c$
31. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x} + c$ 33. $-\frac{x^2}{3} \sqrt{9-x^2} - 6\sqrt{9-x^2} + c$
35. $\frac{x^2}{3} \sqrt{x^2+9} - 6\sqrt{x^2+9} + c$
37. $3 \ln|x+1| - 2 \ln|x+2| + c$
39. $3 \ln|x| + 2 \ln|x-2| - \ln|x+2| + c$
41. $\frac{1}{5} e^x \cos 2x + \frac{2}{5} e^x \sin 2x + c$ 43. $\frac{1}{3} (x^2+1)^{3/2} + c$
45. $\frac{\frac{4}{5}}{x-4} - \frac{\frac{4}{5}}{x+1}$ 47. $\frac{3}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1}$
49. $\frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}$
51. $\frac{1}{8} e^x (4+2e^{2x}) \sqrt{4+e^{2x}} - 2 \ln(e^x + \sqrt{4+e^{2x}}) + c$
53. $\frac{1}{3} \tan x \sec^2 x + \frac{2}{3} \tan x + c$
55. $\frac{4}{3(3-x)} + \frac{4}{9} \ln \left| \frac{x}{3-x} \right| + c$
57. $-\frac{\sqrt{9+4x^2}}{x} + 2 \ln \left(x + \sqrt{\frac{9}{4} + x^2} \right) + c$
59. $\sqrt{4-x^2} - 2 \ln \left| \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} \right| + c$
61. $RT; \frac{4RT^3}{3(2T^2-1)e^{2T^2}+3}$
65. c 67. 24.75%; 135

$$.43 \quad x(t) = \frac{4(11 - 3e^{(4/5)t})}{5(33 - e^{-(4/5)t})} \quad \text{التركيز المحدد } \frac{4}{15}$$



$$45. \quad x(t) = \frac{3(14 - 5e^{-(27/50)t})}{5(28 - e^{-(27/50)t})}$$



47. (a) يقدر عدد السكان على المدى الطويل بحوالي 682,800
(b) ستتموت جميع الأسماك خلال 27 عامًا

$$.49 \quad x(t) = \frac{2-6ce^{0.2t}}{1-ce^{0.2t}} \rightarrow 6 \quad \text{إذا كان } x(0) < 2, \text{ إذا } c > 1$$

ويوجد خط تقارب رأسي

$$.51 \quad r'(t) = k(S-n); r(t) = 1 + 13e^{-k} \quad \text{حيث}$$

$$k = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{7}{13} \right) \approx -0.155$$

$$53. \quad k = -m = 0.0000847, M = \frac{b}{k} = \frac{0.18}{k} = 2125 \quad 55. \quad 70 \text{ m/s}$$

الملحق B

صيغ مفيدة

الجبر

صيغة حسابية

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$$

صيغة محللة إلى عوامل

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

صيغة ثنائية الحد

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

الأسس

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

المستقيمات

ميل 3 لمستقيم عبر النقطتين (x_0, y_0) و (x_1, y_1)

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

عبر النقطة (x_0, y_0) ، الميل m

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

الميل m ، المقطع y - b

$$y = mx + b$$

صيغة تربيعية

إذا كان $ax^2 + bx + c = 0$ فإن

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المسافة

المسافة d بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2)

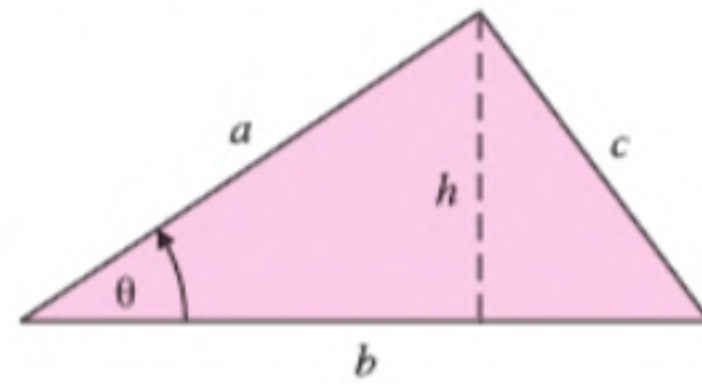
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

الهندسة

مثلث

$$\frac{1}{2}bh = \text{المساحة}$$

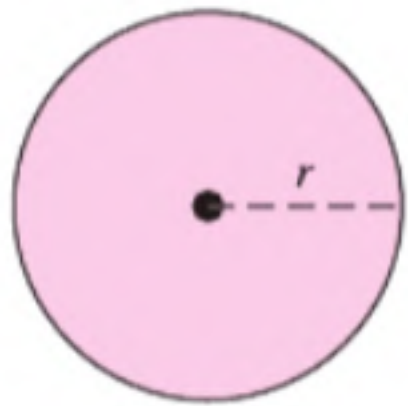
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



دائرة

$$\pi r^2 = \text{المساحة}$$

$$C = 2\pi r$$

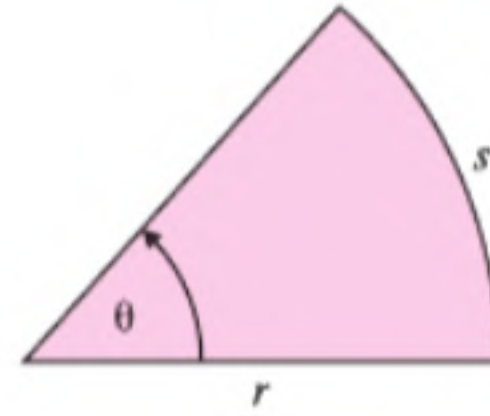


قطاع دائرة

$$\frac{1}{2}r^2\theta = \text{المساحة}$$

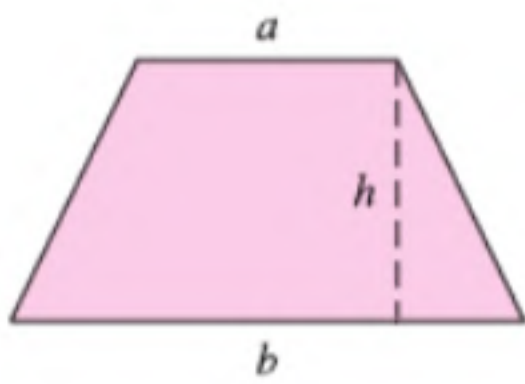
$$s = r\theta$$

(حيث θ بالراديان فقط)



شبه منحرف

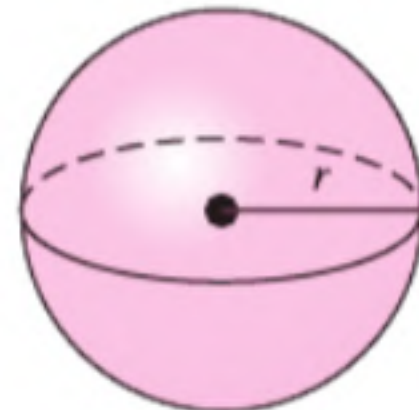
$$\frac{1}{2}(a + b)h = \text{المساحة}$$



كرة

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \text{الحجم}$$

$$4\pi r^2 = \text{مساحة السطح}$$



مخروط

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \text{الحجم}$$

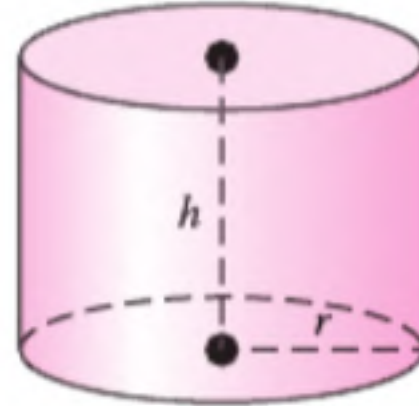
$$\pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \text{مساحة السطح}$$



أسطوانة

$$\pi r^2 h = \text{الحجم}$$

$$2\pi r h = \text{مساحة السطح}$$



حساب المثلثات

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

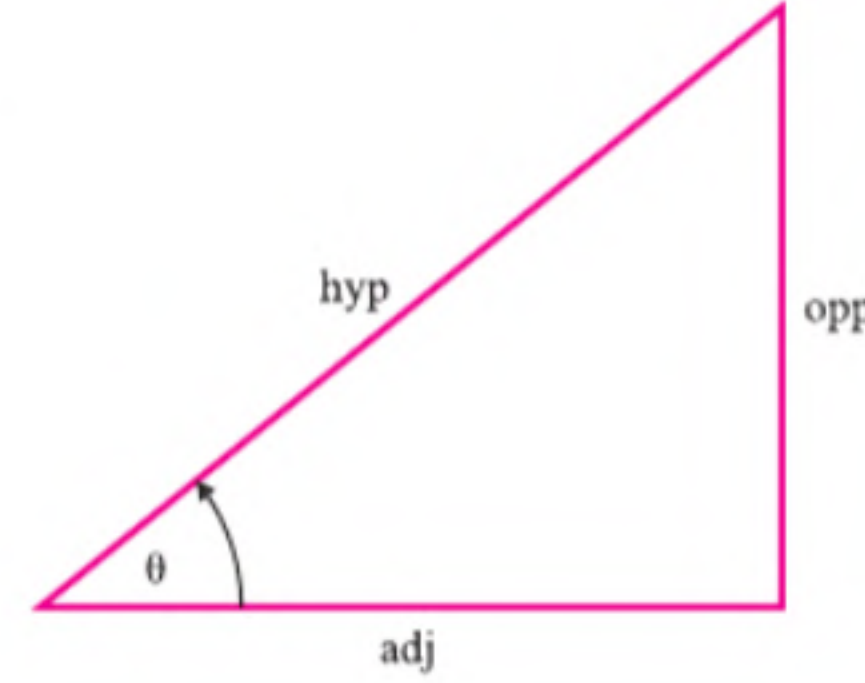
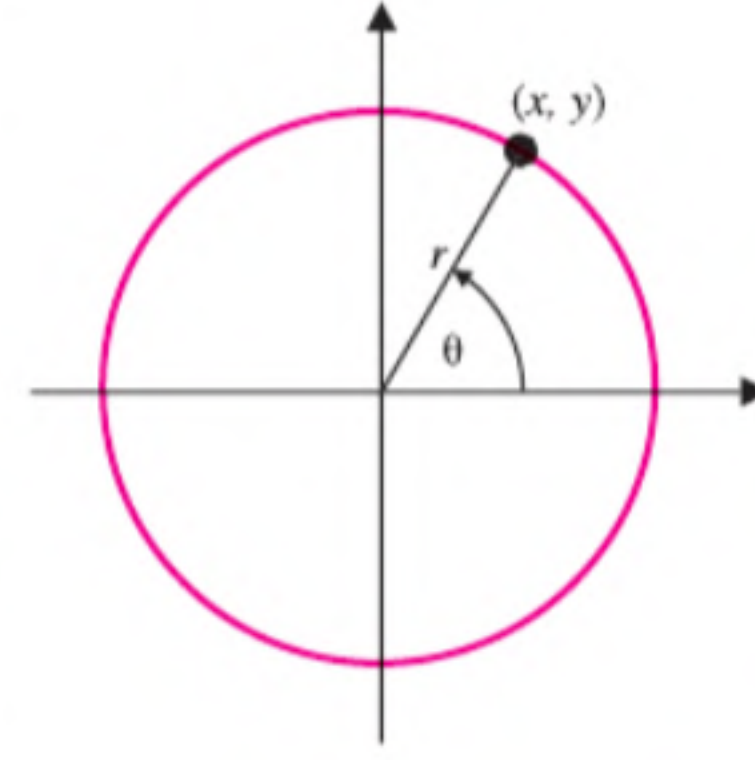
$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$



المعكوسات الضربية

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

التعريفات

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

فيثاغورس

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

صيغة مشاركة

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

صيغة زوجية / فردية

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

زاوية مزدوجة

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

نصف الزاوية

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

الجمع

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

الطرح

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

المجموع

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2}$$

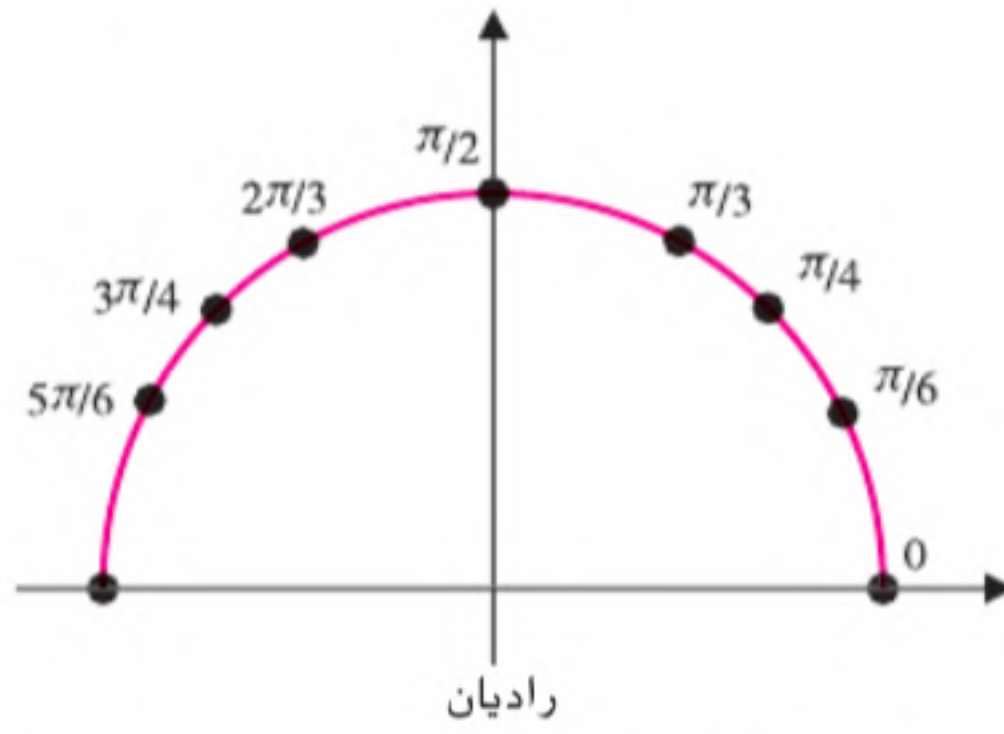
ناج ضرب

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} [\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} [\cos(u - v) + \cos(u + v)]$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2} [\sin(u + v) + \sin(u - v)]$$

$$\cos u \sin v = \frac{1}{2} [\sin(u + v) - \sin(u - v)]$$



$$\sin(0) = 0$$

$$\cos(0) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\pi) = 0$$

$$\cos(\pi) = -1$$

$$\sin(2\pi) = 0$$

$$\cos(2\pi) = 1$$

صيغ المشتقات

قواعد عامة

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

قواعد الأس

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

صيغة أسية

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}[e^{u(x)}] = e^{u(x)}u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[e^{rx}] = r e^{rx}$$

صيغة مثلثية

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

صيغة مثلثية عكسية

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

صيغة قطوع زائدة

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

صيغة قطوع زائدة عكسية

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$

جدول التكاملات

صيغ تتضمن $a + bu$

$$19. \int \frac{u^2}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{2}{15b^3} (3b^2u^2 - 4abu + 8a^2) \sqrt{a+bu} + c$$

$$20. \int \frac{u^n}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{2}{(2n+1)b} u^n \sqrt{a+bu} - \frac{2na}{(2n+1)b} \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}} du$$

صيغ تتضمن $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$

$$21. \int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + c$$

$$22. \int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{1}{8} u (a^2 + 2u^2) \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{1}{8} a^4 \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + c$$

$$23. \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + c$$

$$24. \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2} du = \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| - \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + c$$

$$25. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} du = \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + c$$

$$26. \int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 + u^2}} du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + c$$

$$27. \int \frac{1}{u \sqrt{a^2 + u^2}} du = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + \sqrt{a^2 + u^2}} \right| + c$$

$$28. \int \frac{1}{u^2 \sqrt{a^2 + u^2}} du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + c$$

صيغ تتضمن $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

$$29. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$$

$$30. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{8} u (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{8} a^4 \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$$

$$31. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + c$$

$$32. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$$

$$33. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$$

$$34. \int \frac{1}{u \sqrt{a^2 - u^2}} du = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + c$$

$$35. \int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = -\frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$$

$$36. \int \frac{1}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + c$$

صيغ تتضمن $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

$$37. \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$$

$$38. \int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{1}{8} u (2u^2 - a^2) \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{8} a^4 \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$$

$$1. \int \frac{1}{a+bu} du = \frac{1}{b} \ln |a+bu| + c$$

$$2. \int \frac{u}{a+bu} du = \frac{1}{b^2} (a+bu - a \ln |a+bu|) + c$$

$$3. \int \frac{u^2}{a+bu} du = \frac{1}{2b^3} [(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2 \ln |a+bu|] + c$$

$$4. \int \frac{1}{u(a+bu)} du = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + c$$

$$5. \int \frac{1}{u^2(a+bu)} du = \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| - \frac{1}{au} + c$$

صيغ تتضمن $(a+bu)^2$

$$6. \int \frac{1}{(a+bu)^2} du = \frac{-1}{b(a+bu)} + c$$

$$7. \int \frac{u}{(a+bu)^2} du = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a+bu} + \ln |a+bu| \right) + c$$

$$8. \int \frac{u^2}{(a+bu)^2} du = \frac{1}{b^3} \left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln |a+bu| \right) + c$$

$$9. \int \frac{1}{u(a+bu)^2} du = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + c$$

$$10. \int \frac{1}{u^2(a+bu)^2} du = \frac{2b}{a^3} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| - \frac{a+2bu}{a^2 u(a+bu)} + c$$

صيغ تتضمن $\sqrt{a+bu}$

$$11. \int u \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^2} (3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + c$$

$$12. \int u^2 \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{105b^3} (15b^2u^2 - 12abu + 8a^2)(a+bu)^{3/2} + c$$

$$13. \int u^n \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{b(2n+3)} u^n (a+bu)^{3/2} - \frac{2na}{b(2n+3)} \int u^{n-1} \sqrt{a+bu} du$$

$$14. \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}} du$$

$$15. \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^n} du = \frac{-1}{a(n-1)} \frac{(a+bu)^{3/2}}{u^{n-1}} - \frac{(2n-5)b}{2a(n-1)} \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} du, n \neq 1$$

$$16a. \int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}} du = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + c, a > 0$$

$$16b. \int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}} du = \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + c, a < 0$$

$$17. \int \frac{1}{u^n \sqrt{a+bu}} du = \frac{-1}{a(n-1)} \frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{2a(n-1)} \int \frac{1}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}} du, n \neq 1$$

$$18. \int \frac{u}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a) \sqrt{a+bu} + c$$

$$60. \int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$$

$$61. \int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u + c$$

$$62. \int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + c$$

$$63. \int u^n \sin u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$$

$$64. \int u^n \cos u \, du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du$$

$$65. \int \frac{1}{1 + \sin u} \, du = \tan u - \sec u + c$$

$$66. \int \frac{1}{1 - \sin u} \, du = \tan u + \sec u + c$$

$$67. \int \frac{1}{1 + \cos u} \, du = -\cot u + \csc u + c$$

$$68. \int \frac{1}{1 - \cos u} \, du = -\cot u - \csc u + c$$

$$69. \int \sin(mu) \sin(nu) \, du = \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + c$$

$$70. \int \cos(mu) \cos(nu) \, du = \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + c$$

$$71. \int \sin(mu) \cos(nu) \, du = \frac{\cos(n-m)u}{2(n-m)} - \frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + c$$

$$72. \int \sin^m u \cos^n u \, du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cos^n u \, du$$

صيغ تتضمن دوال مثلثية أخرى

$$73. \int \tan u \, du = -\ln |\cos u| + c = \ln |\sec u| + c$$

$$74. \int \cot u \, du = \ln |\sin u| + c$$

$$75. \int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$76. \int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$77. \int \tan^2 u \, du = \tan u - u + c$$

$$78. \int \cot^2 u \, du = -\cot u - u + c$$

$$79. \int \sec^2 u \, du = \tan u + c$$

$$80. \int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$$

$$81. \int \tan^3 u \, du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln |\cos u| + c$$

$$82. \int \cot^3 u \, du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln |\sin u| + c$$

$$39. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} \, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \sec^{-1} \frac{|u|}{a} + c$$

$$40. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} \, du = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| - \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + c$$

$$41. \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} \, du = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$$

$$42. \int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - a^2}} \, du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$$

$$43. \int \frac{1}{u \sqrt{u^2 - a^2}} \, du = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{|u|}{a} + c$$

$$44. \int \frac{1}{u^2 \sqrt{u^2 - a^2}} \, du = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + c$$

صيغ تتضمن $\sqrt{2au - u^2}$

$$45. \int \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{1}{2} (u - a) \sqrt{2au - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + c$$

$$46. \int u \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{1}{6} (2u^2 - au - 3a^2) \sqrt{2au - u^2} + \frac{1}{2} a^3 \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + c$$

$$47. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u} \, du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + c$$

$$48. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} \, du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + c$$

$$49. \int \frac{1}{\sqrt{2au - u^2}} \, du = \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + c$$

$$50. \int \frac{u}{\sqrt{2au - u^2}} \, du = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + c$$

$$51. \int \frac{u^2}{\sqrt{2au - u^2}} \, du = -\frac{1}{2} (u + 3a) \sqrt{2au - u^2} + \frac{3}{2} a^2 \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + c$$

$$52. \int \frac{1}{u \sqrt{2au - u^2}} \, du = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + c$$

صيغ تتضمن $\sin u$ أو $\cos u$

$$53. \int \sin u \, du = -\cos u + c$$

$$54. \int \cos u \, du = \sin u + c$$

$$55. \int \sin^2 u \, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \sin u \cos u + c$$

$$56. \int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \sin u \cos u + c$$

$$57. \int \sin^3 u \, du = -\frac{2}{3} \cos u - \frac{1}{3} \sin^2 u \cos u + c$$

$$58. \int \cos^3 u \, du = \frac{2}{3} \sin u + \frac{1}{3} \sin u \cos^2 u + c$$

$$59. \int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \, du$$

$$105. \int e^{au} \sin bu \, du = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \sin bu - b \cos bu) e^{au} + c$$

$$106. \int e^{au} \cos bu \, du = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \sin bu) e^{au} + c$$

صيغ تتضمن $\ln u$

$$107. \int \ln u \, du = u \ln u - u + c$$

$$108. \int u \ln u \, du = \frac{1}{2} u^2 \ln u - \frac{1}{4} u^2 + c$$

$$109. \int u^n \ln u \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} \ln u - \frac{1}{(n+1)^2} u^{n+1} + c$$

$$110. \int \frac{1}{u \ln u} \, du = \ln |\ln u| + c$$

$$111. \int (\ln u)^2 \, du = u(\ln u)^2 - 2u \ln u + 2u + c$$

$$112. \int (\ln u)^n \, du = u(\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} \, du$$

صيغ تتضمن دوال القطوع الزائدة

$$113. \int \sinh u \, du = \cosh u + c$$

$$114. \int \cosh u \, du = \sinh u + c$$

$$115. \int \tanh u \, du = \ln (\cosh u) + c$$

$$116. \int \coth u \, du = \ln |\sinh u| + c$$

$$117. \int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1} |\sinh u| + c$$

$$118. \int \operatorname{csch} u \, du = \ln |\tanh \frac{1}{2} u| + c$$

$$119. \int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + c$$

$$120. \int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + c$$

$$121. \int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + c$$

$$122. \int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + c$$

$$123. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \, da = \sinh^{-1} a + c$$

$$124. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \, da = \cosh^{-1} a + c$$

$$125. \int \frac{1}{1 - a^2} \, da = \tanh^{-1} a + c$$

$$126. \int \frac{1}{|a| \sqrt{a^2 + 1}} \, da = -\operatorname{csch}^{-1} a + c$$

$$127. \int \frac{1}{a \sqrt{1 - a^2}} \, da = -\operatorname{sech}^{-1} a + c$$

$$83. \int \sec^3 u \, du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + c$$

$$84. \int \csc^3 u \, du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + c$$

$$85. \int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du, n \neq 1$$

$$86. \int \cot^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u \, du, n \neq 1$$

$$87. \int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du, n \neq 1$$

$$88. \int \csc^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \, du, n \neq 1$$

$$89. \int \frac{1}{1 \pm \tan u} \, du = \frac{1}{2} u \pm \ln |\cos u \pm \sin u| + c$$

$$90. \int \frac{1}{1 \pm \cot u} \, du = \frac{1}{2} u \mp \ln |\sin u \pm \cos u| + c$$

$$91. \int \frac{1}{1 \pm \sec u} \, du = u + \cot u \mp \csc u + c$$

$$92. \int \frac{1}{1 \pm \csc u} \, du = u - \tan u \pm \sec u + c$$

صيغ تتضمن دوال مثلثية عكسية

$$93. \int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + c$$

$$94. \int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1 - u^2} + c$$

$$95. \int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \ln \sqrt{1 + u^2} + c$$

$$96. \int \cot^{-1} u \, du = u \cot^{-1} u + \ln \sqrt{1 + u^2} + c$$

$$97. \int \sec^{-1} u \, du = u \sec^{-1} u - \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| + c$$

$$98. \int \csc^{-1} u \, du = u \csc^{-1} u + \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| + c$$

$$99. \int u \sin^{-1} u \, du = \frac{1}{4} (2u^2 - 1) \sin^{-1} u + \frac{1}{4} u \sqrt{1 - u^2} + c$$

$$100. \int u \cos^{-1} u \, du = \frac{1}{4} (2u^2 - 1) \cos^{-1} u - \frac{1}{4} u \sqrt{1 - u^2} + c$$

صيغ تتضمن e^u

$$101. \int e^{au} \, du = \frac{1}{a} e^{au} + c$$

$$102. \int u e^{au} \, du = \left(\frac{1}{a} u - \frac{1}{a^2} \right) e^{au} + c$$

$$103. \int u^2 e^{au} \, du = \left(\frac{1}{a} u^2 - \frac{2}{a^2} u + \frac{2}{a^3} \right) e^{au} + c$$

$$104. \int u^n e^{au} \, du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} \, du$$

Glossary / القاموس

English

العربية

A

absolute value function A function that contains an absolute value of the independent variable, with parent function $f(x) = |x|$.

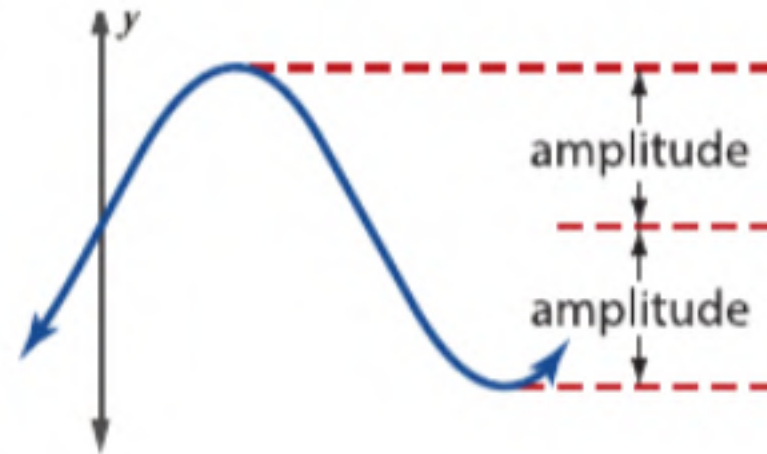
absolute value of a complex number A complex number's distance from zero in the complex plane.

algebraic function A function with values that are obtained by adding, subtracting, multiplying, or dividing constants and the independent variable or raising the independent variable to a rational power.

alternative hypothesis One of two hypotheses that need to be stated to test a claim; states that there is a difference between the sample value and the population parameter. The alternative hypothesis contains a statement of inequality such as $>$, $\neq$, or $<$.

ambiguous case Given the measures of two sides and a nonincluded angle, either no triangle exists, exactly one triangle exists, or two triangles exist.

amplitude Half the distance between the maximum and minimum values of a sinusoidal function. For $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$, amplitude = $|a|$.



anchor step In mathematical induction, showing that something works for the first case, or that P_1 is true.

angle of depression The angle formed by a horizontal line and an observer's line of sight to an object below.

دالة القيمة المطلقة دالة تحتوي على قيمة مطلقة لمتغير مستقل، باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = |x|$.

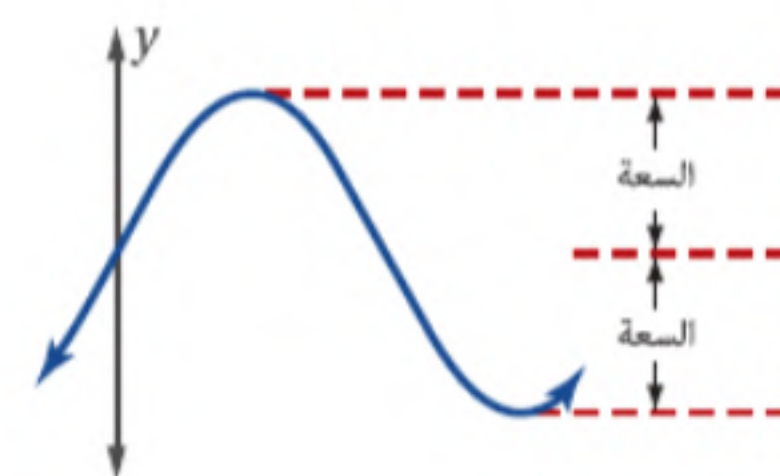
قيمة مطلقة لعدد مركب تمثل بعد العدد المركب عن الصفر في المستوى المركب.

دالة جبرية دالة تحتوي على قيم ناتجة عن عملية جمع الثوابت والمتغير المستقل أو طرحها أو ضربها أو قسمتها أو رفع المتغير المستقل إلى قوة نسبية.

فرضية بديلة فرضية من اثنتين تفيد بضرورة إثبات صحة افتراض ما؛ وتنص على وجود فرق بين قيمة العينة ومعلمة المجتمع الإحصائي. تحتوي الفرضية البديلة على عبارة المساواة مثل أكبر من أو لا يساوي أو أقل من.

حالة مبهمه بالنظر إلى قياسات ضلعين وزاوية غير متضمنة، فقد لا يوجد أي مثلث أو قد يوجد مثلث واحد أو قد يوجد مثلثان.

سعة تمثل نصف المسافة الواصلة بين القيم القصوى والدنيا في دالة التوج الجيبي. بما أن $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$. إذن السعة = $|a|$.



خطوة المرتكز في الاستنتاج الرياضي، تظهر أن شيئاً ما يعمل على حل المسألة الأولى، أو أن P_1 صحيح.

زاوية الانخفاض الزاوية المكونة بواسطة خط أفقي وخط الرؤية الخاص بالملاحظ للوصول إلى موضع أدناه.

angle of elevation The angle formed by a horizontal line and an observer's line of sight to an object above.

angular speed The rate at which the object rotates about a fixed point.

antiderivative $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$ if $F'(x) = f(x)$.

arccosine function The inverse cosine function, written as $y = \cos^{-1} x$ or $y = \arccos x$, that has a domain of $[-1, 1]$ and a range of $[0, \pi]$.

arcsine function The inverse sine function, written as $y = \sin^{-1} x$ or $y = \arcsin x$, that has a domain of $[-1, 1]$ and a range of $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

arctangent function The inverse tangent function, written as $y = \tan^{-1} x$ or $y = \arctan x$, that has a domain of $(-\infty, \infty)$ and a range of $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Argand Plane The complex plane.

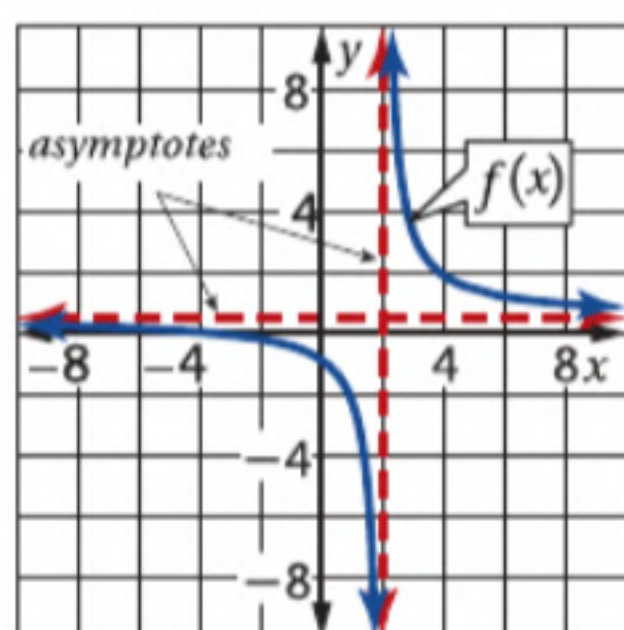
argument The angle θ of a complex number written in the form $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

arithmetic means The terms between two nonconsecutive terms of an arithmetic sequence.

arithmetic series The sum of the terms of an arithmetic sequence.

arithmetic sequence A sequence in which the difference between successive terms is a constant.

asymptote A line or curve that a graph approaches.



augmented matrix A matrix that contains the coefficients and constant terms of a system of linear equations, each written in standard form with the constant terms to the right of the equals sign.

average rate of change The slope of the line through any two points on the graph of a nonlinear function f .

axis of symmetry A line about which a figure is symmetric. In a parabola, the axis of symmetry is perpendicular to the directrix and passes through the focus.

زاوية الارتفاع الزاوية المكونة بواسطة خط أفقي وخط الرؤية الخاص بالملاحظ للوصول إلى موضع أعلاه.

سرعة زاوية تمثل المعدل الذي يدور عنده الجسم حول نقطة ثابتة.

مشتق عكسي $F(x)$ هو المشتق العكسي لـ $f(x)$ إذا كان $F'(x) = f(x)$.

دالة قوس جيب التمام تمثل معكوس دالة جيب التمام. وتكتب بالشكل $y = \cos^{-1} x$ أو $y = \arccos x$. ولها مجال يساوي $[-1, 1]$ ومدى يساوي $[0, \pi]$.

دالة قوس الجيب تمثل معكوس دالة جيب الزاوية. وتكتب بالشكل $y = \sin^{-1} x$ أو $y = \arcsin x$. ولها مجال يساوي $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ومدى يساوي $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

دالة قوس الظل تمثل معكوس دالة الظل. وتكتب بالشكل $y = \tan^{-1} x$ أو $y = \arctan x$. ولها مجال يساوي $(-\infty, \infty)$ ومدى يساوي $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

مستوى أرجاند يقصد به المستوى المركب.

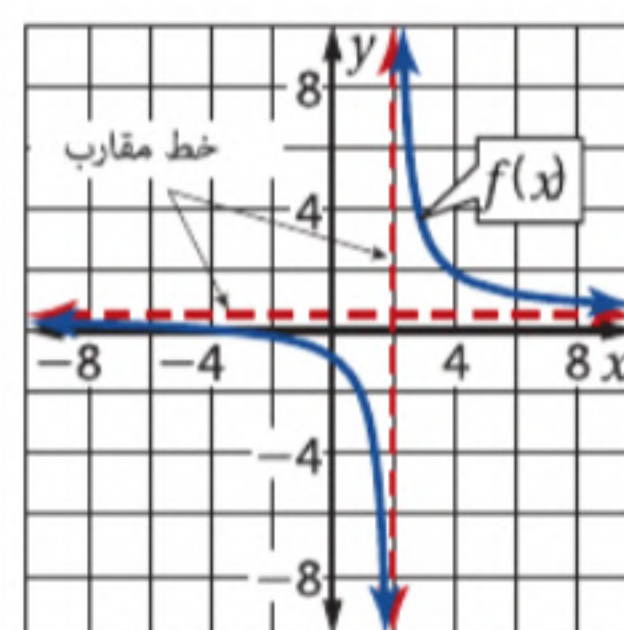
بعد زاوي يقصد به الزاوية θ المحددة لعدد مركب يكتب بالشكل $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

متوسط حسابي الحدود بين حدين غير متتاليين في متتالية حسابية.

متسلسلة حسابي مجموع حدود متتالية حسابية.

متتالية حسابية متتالية تتميز بثبات الاختلاف بين الحدود المتتالية.

خط مقارب خط أو منحنى يقترب منه الرسم البياني.



مصفوفة موسعة مصفوفة تحتوي على المعاملات والحدود الثابتة لنظام معادلات خطية. وتكتب كل منها في الصورة القياسية باستخدام الحدود القياسية الموجودة على الجانب الأيمن لعلامة التساوي.

متوسط معدل التغيير ميل الخط الذي يمر عبر نقطتين على الرسم البياني لدالة غير خطية f .

محور التماثل خط يكون الشكل من حوله متماثلًا. في القطع المكافئ، يكون محور التماثل متعامدًا على الدليل ويمر عبر البؤرة.

B

bimodal distribution A graph of a distribution of data that has two modes.

binomial coefficients The coefficients of the terms of an expanded binomial $(a + b)^n$.

binomial distribution The distribution of the outcomes of a binomial experiment and their corresponding probabilities.

binomial experiment A probability experiment in which there are a fixed number of independent trials, there are exactly two possible outcomes for each trial, and the probability of success is the same for each trial.

binomial probability distribution function A discrete function of the random variable X , represented in the binomial probability formula.

Binomial Theorem For any positive integer n ,
 $(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \dots + C_n a^0 b^n$, where $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

bivariate data Data with two variables.

توزيع ثنائي المنوال رسم بياني يمثل توزيع البيانات ذات المنوالين.

معاملات ثنائية الحد تمثل معاملات حدود المعادلات الممتدة ثنائية الحد $(a + b)^n$.

توزيع ثنائي الحد توزيع نواتج تجربة ثنائية الحد واحتمالاتها المطابقة.

تجربة ثنائية الحد تجربة احتمال يوجد بها عدد ثابت من التجربات المستقلة، ويوجد اثنان من النواتج المحتملة لكل تجريب، واحتمال النجاح هو نفسه لكل تجريب.

دالة توزيع الاحتمال ثنائي الحد دالة منفصلة للمتغير العشوائي X ممثلة بصيغة احتمال ثنائي الحد.

نظرية ثنائية الحد بما أن أي عدد صحيح موجب يساوي n ، فإن
 $(a+b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + b^2$
 $+ \dots + C_n a^0 b^n$ حيث $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

بيانات ذات متغيرين بيانات تحتوي على متغيرين.

C

cardioid The graph of a polar equation of the form $r = a \pm a \cos \theta$ or $r = a \pm a \sin \theta$, where a is positive.

center of an ellipse The midpoint of the major and minor axes of an ellipse.

circular function A trigonometric function defined as a function of the real number system using the unit circle.

class A data value or group of data values.

class width The range of values for each class of data.

clusters Subgroups of data.

coefficient matrix A matrix that contains only the coefficients of a system of linear equations.

column matrix A matrix that has only one column.

combination An arrangement of objects in which order is not important.

common difference The difference between successive terms of an arithmetic sequence.

common logarithm A logarithm with base 10, usually written $\log x$.

common ratio The ratio of successive terms of a geometric sequence.

قلبي الشكل رسم بياني لمعادلة قطبية من الشكل $r = a \pm a \cos \theta$ أو $r = a \pm a \sin \theta$ ، حيث يكون a عددًا موجبًا.

مركز القطع الناقص نقطة المنتصف في المحورين الأكبر والأصغر للقطع الناقص.

دالة دائرية دالة مثلثية تعرف بأنها دالة في نظام الأعداد الحقيقي باستخدام دائرة الوحدة.

صف قيمة بيانات أو مجموعة من قيم البيانات.

عرض الصف مجموعة من القيم المحددة لكل صف من البيانات.

تجمعات مجموعات فرعية من البيانات.

مصفوفة المعاملات مصفوفة تحتوي فقط على معاملات نظام المعادلات الخطية.

مصفوفة عمود مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط.

تركيب تنظيم الأجسام بطريقة لا يكون الترتيب مهما فيها.

فرق مشترك الفرق بين الحدود المتتالية للمتتالية الحسابية.

لوغاريتم مشترك لوغاريتم يستخدم الأساس 10، ويكون اللوغاريتم المكتوب عادة بالشكل $\log x$.

نسبة مشتركة نسبة الحدود المتتالية في المتتالية الهندسية.

complement The complement of an event A consists of all the outcomes in the sample space that are not included as outcomes of event A .

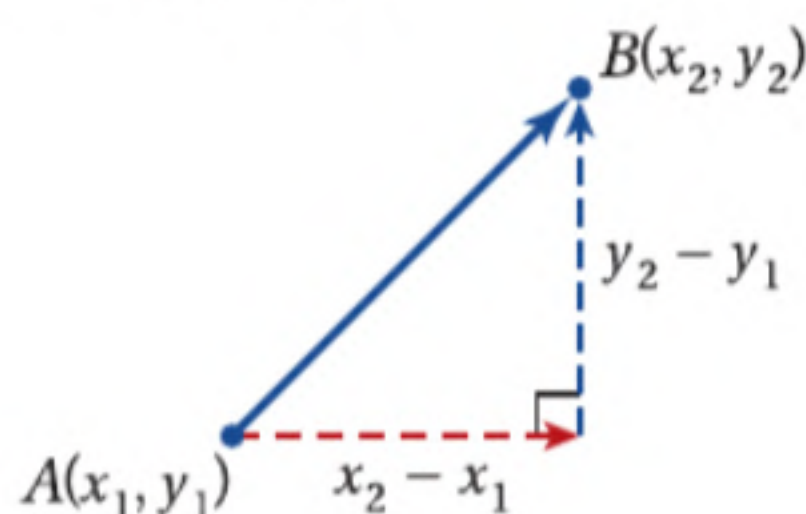
completing the square A process used to make a quadratic expression into a perfect square trinomial.

complex conjugates Two complex numbers of the form $a + bi$ and $a - bi$, where $b \neq 0$.

complex plane A plane used to graph complex numbers. The real component of a complex number is graphed on the horizontal and the imaginary component is graphed on the vertical axis.

complex number Any number that can be written in the form $a + bi$, where a and b are real numbers and i is the imaginary unit.

component form A vector represented by its rectangular components. If the initial point of a vector is $A(x_1, y_1)$ and the terminal point is at $B(x_2, y_2)$, the component form is given by $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.



components Two or more vectors with a sum that is a given vector.

composition The combining of functions by using the result of one function to evaluate a second function. The composition of function f with function g is defined by $[f \circ g](x) = f[g(x)]$.

confidence interval A specific interval estimate of a parameter in an experiment that can be found when the maximum error of estimate is added to and subtracted from the sample mean.

confidence level The probability that the interval estimate will include the actual population parameter.

conic section A figure that is formed when a plane intersects a double-napped right cone, also called a conic.

conjugate axis The segment that is perpendicular to the transverse axis of a hyperbola, passes through the center, and has a length of $2b$ units.

Conjugate Root Theorem When a polynomial equation in one variable has a zero of the form $a + bi$, where $b \neq 0$, then its complex conjugate, $a - bi$, is also a root.

consistent A system of equations that has at least one solution.

متمم يتكون متمم الحدث A من جميع النواتج في فضاء العينة والتي تكون غير متضمنة على أنها من نواتج الحدث A .

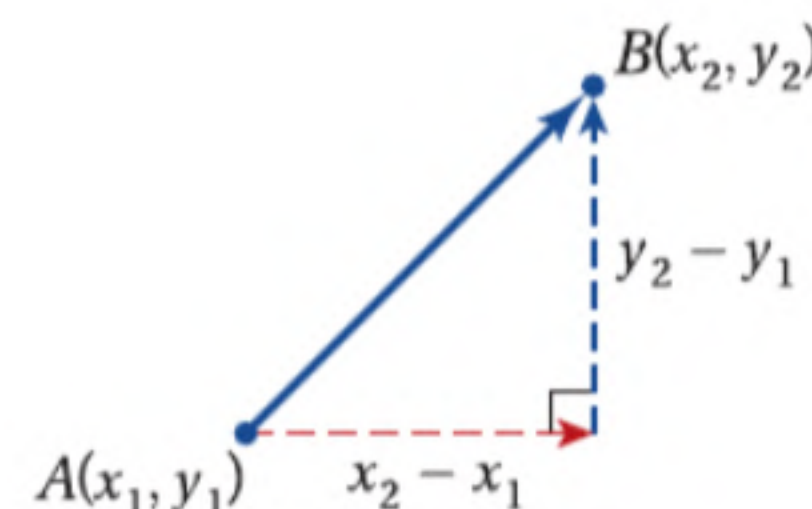
إكمال المربع عملية تستخدم لتحويل التعبير التربيعي إلى مربع كامل ثلاثي الحدود.

متراقتان مركبتان (ص 7ع. 124) عدداً مركبتان يأخذان الصورة $a + bi$ و $a - bi$ ، حيث $b \neq 0$.

مستوى مركب مستوى يستخدم في رسم الأعداد المركبة بيانياً. يرسم المركب الحقيقي لعدد مركب بيانياً على المستوى الأفقي ويرسم المركب التخيلي على المحور الرأسى.

عدد مركب أي عدد يمكن كتابته في الصورة $a + bi$ ، حيث a و b عدداً حقيقيين ويمثل i الوحدة التخيلية.

صورة مركبة متجه تمثله مركباته قائمة الزاوية. بما أن نقطة بداية المتجه هي $A(x_1, y_1)$ والنقطة الطرفية عند $B(x_2, y_2)$ ، إذن يتم الوصول إلى صورة المركب باستخدام $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.



مركبات متجهان أو أكثر مجموعها عبارة عن المتجه المعطى.

مجموعة مركبة تجميع الدوال باستخدام ناتج دالة واحدة لتقدير دالة أخرى. تحدد مجموعة الدوال المركبة f مع الدالة g باستخدام $[f \circ g](x) = f[g(x)]$.

فترة الثقة تقدير محدد للفترة في معلمة تجربة ما يمكن إيجادها عند إضافة أقصى خطأ للتقدير إلى المتوسط الحسابي للعينة وطرحه منه.

مستوى الثقة احتمال يفيد بأن تقدير الفترة سيتضمن معلمة فعلية للمجتمع الإحصائي.

قطع مخروطي شكل يتكون عندما يقطع المستوى مخروطاً قائماً مضاعفاً، ويسمى أيضاً مخروطياً.

محور مرافق القطعة المستقيمة المتعامدة على المحور القاطع في القطع المكافئ، ويمر عبر المنتصف، ويبلغ طوله $2b$ من الوحدات.

نظرية الجذر المرافق عندما تتضمن معادلة كثيرة الحدود في متغير واحد صفراً في الصورة $a + bi$ ، حيث $b \neq 0$ ، فإن المرافق المركب لها، $a - bi$ ، يكون جذراً كذلك.

متوافق نظام معادلات له حل واحد على الأقل.

constant Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a zero change in $f(x)$.

constant function A function of the form $f(x) = c$, where c is any real number.

constraints Conditions given to variables in a two-dimensional linear programming problem, often expressed as a system of linear inequalities.

continuity correction factor A correction for continuity that must be used when approximating a binomial distribution.

continuous compound interest Interest that is reinvested continuously so that there is no waiting period between interest payments.

continuous function A function that can be graphed with no breaks, holes, or gaps.

continuous random variable A random variable that can take on an infinite number of possible values within a specified interval in a probability experiment.

converge If a sequence has a limit such that the terms approach a unique number, it is said to converge.

correlation An area of inferential statistics that involves determining whether a relationship exists between two variables.

correlation coefficient A measure that determines the type and strength of the linear relationship between the variables in bivariate data.

cosecant In a right triangle with acute angle θ , the ratio comparing the length of the hypotenuse to the side opposite of θ . It is the reciprocal of the sine ratio, or $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$.

cosine In a right triangle with acute angle θ , the ratio comparing the length of the side adjacent to θ and the hypotenuse.

cotangent In a right triangle with acute angle θ , the ratio comparing the length of the side adjacent to θ and the side opposite θ . It is the reciprocal of the tangent ratio, or $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.

coterminal angles Angles in standard position that have the same initial and terminal sides, but different measures.

co-vertices The endpoints of the minor axis of an ellipse.

Cramer's Rule A method that uses determinants to solve square systems of linear equations.

ثابت يوضح الدالة f أو فترة في دالة يؤدي فيها التغيير الموجب في x لأي نقطتين إلى تغيير موجب في $f(x)$.

دالة ثابتة دالة تأخذ الصورة $f(x) = c$ حيث يمثل c أي عدد حقيقي.

قيود الشروط المفروضة على المتغيرات في مسألة برمجة خطية ثنائية الأبعاد، والتي غالباً ما يتم التعبير عنها باسم المتباينات الخطية.

معامل تصحيح الاستمرارية تصحيح للاستمرارية واجب الاستخدام عند تقريب التوزيع ثنائي الحد.

فائدة مركبة متصلة فائدة يعاد توظيفها باستمرار لكيلا يكون هناك أي فترة انتظار بين دفعات الفائدة.

دالة متصلة دالة يمكن رسمها بيانياً بدون فواصل أو فجوات أو فراغات.

متغير عشوائي متصل متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عدداً لا نهائياً من القيم المحتملة ضمن فترة محددة في تجربة الاحتمال.

متقاربة إذا كان للمتتالية مدى ينتج عنه اقتراب الحدود من رقم فريد، فإنه يطلق عليه تقارب.

ارتباط نطاق من الإحصاء الاستقرائي يتضمن تحديد العلاقة الموجودة بين متغيرين.

معامل الارتباط قياس يحدد نوع العلاقة الخطية وقوتها بين المتغيرات في البيانات ذات المتغيرين.

قاطع التمام في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ . يمثل نسبة المقارنة بين طول الوتر والضلع المقابل للزاوية θ . ويكون معكوساً لنسبة جيب الزاوية، أو $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$.

جيب التمام في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ . يمثل نسبة المقارنة بين طول الضلع المجاور للزاوية θ والوتر.

ظل التمام في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ . يمثل نسبة المقارنة بين طول الضلع المجاور للزاوية θ والضلع المقابل للزاوية θ . ويكون معكوساً لنسبة ظل تمام الزاوية، أو $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.

زاويا مشتركة في ضلع الانتهاء زاويا في الوضع القياسي لها أضلاع البداية والأضلاع الطرفية نفسها، لكنها ذات قياسات مختلفة.

رؤوس مرافقة نقاط النهاية للمحور الأصغر لقطع ناقص.

قاعدة كرامر طريقة تستخدم المحددات لحل نظام المعادلات الخطية.

critical values The z -values that correspond to a particular confidence level.

قيم حرجية تمثل القيم z التي تتطابق مع مستوى الثقة المعين.

cross product If $a = a_1i + a_2j + a_3k$ and $b = b_1i + b_2j + b_3k$, the cross product of a and b is the vector $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$.

الضرب المتقاطعي بما أن $a = a_1i + a_2j + a_3k$ و $b = b_1i + b_2j + b_3k$ ، إذن يمثل الضرب الاتجاهي لـ a و b المتجه $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$.

cubic function A function of the form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, where $a \neq 0$, with parent function $f(x) = x^3$.

دالة تكعيبية دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a \neq 0$. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = x^3$.

cumulative frequency The sum of a frequency and all frequencies of previous classes.

تكرار تراكمي مجموع التكرار وكل تكرارات الصفوف السابقة.

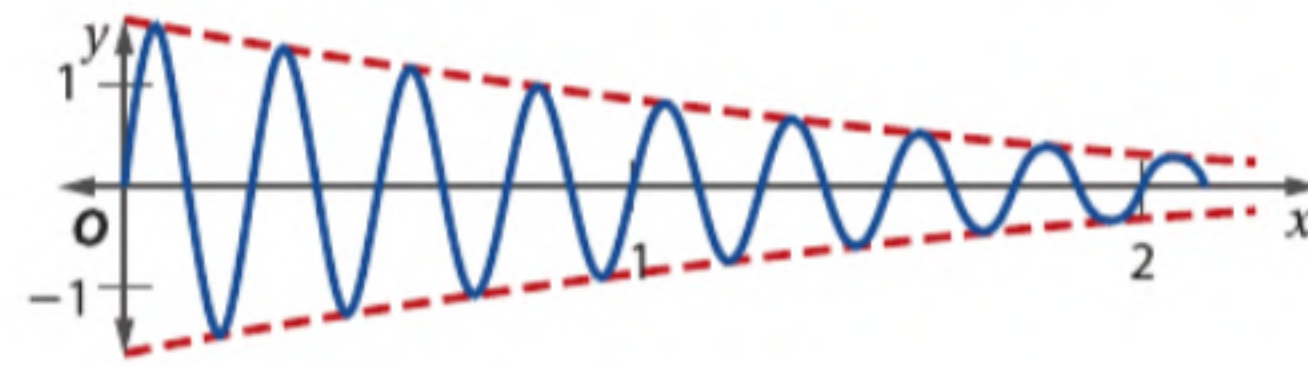
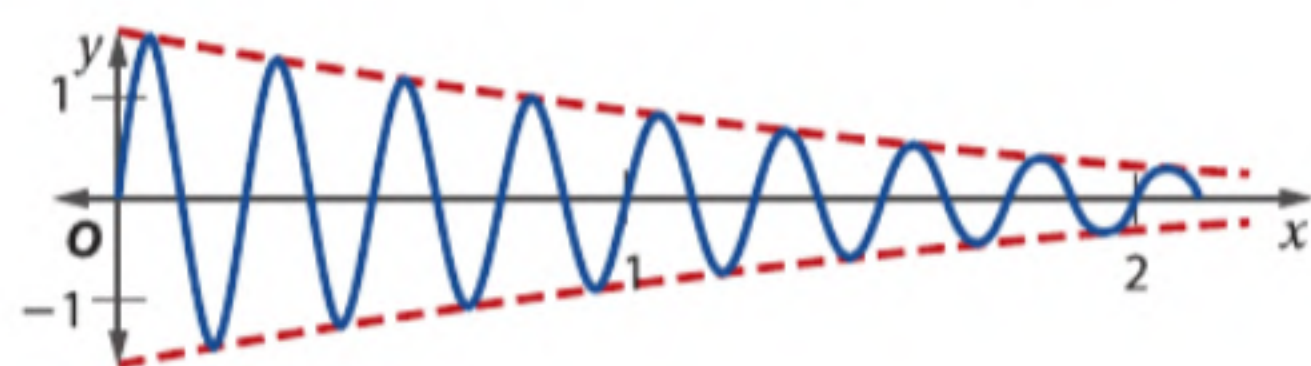
cumulative relative frequency The ratio of the cumulative frequency of the class to all the data

تكرار نسبي تراكمي نسبة التكرار التراكمي للصف إلى جميع البيانات

D

damped harmonic motion The motion of an object whose amplitude decreases with time due to friction.

الحركة التوافقية المتضائلة حركة جسم ما تنخفض سعته مع مرور الوقت بسبب الاحتكاك.



damped oscillation The reduction in amplitude of a sinusoidal wave of a damped trigonometric function.

تذبذب متضائل انخفاض في سعة الموجة الجيبية لدالة مثلثية متضائلة.

damped trigonometric function The function formed when a sinusoidal function $y = \sin bx$ or $y = \cos bx$ is multiplied by another function $y = f(x)$. A function of the form $y = f(x) \sin bx$ or $y = f(x) \cos bx$.

دالة مثلثية متضائلة دالة تنتج من ضرب دالة التمرج الجيبية $y = \sin bx$ أو $y = \cos bx$ في دالة أخرى $y = f(x)$. دالة تأخذ الصورة $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$.

damped wave A wave whose amplitude decreases, such as the graph of a damped trigonometric function.

موجة متضائلة موجة تنخفض سعتها، مثل الرسم البياني للدالة المثلثية المتضائلة.

damping factor In a damped trigonometric function of the form $y = f(x) \sin bx$ or $y = f(x) \cos bx$, $f(x)$ is the damping factor.

عامل التضاؤل في الدالة المثلثية المتضائلة التي تأخذ الصورة $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$ ، يمثل $f(x)$ عامل التضاؤل.

decreasing Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a negative change in $f(x)$.

تناقص يوضح الدالة f أو فترة في دالة ما يؤدي فيها تغيير موجب في x لأي نقطتين إلى تغيير سالب في $f(x)$.

definite integral An integral that has lower and upper bounds, given by $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$.

تكامل محدود تكامل له حدود دنيا وعليا معطاة بواسطة $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$.

degenerate conic A point, a line, or two intersecting lines that are formed when a plane intersects the vertex of a double-napped right cone.

مخروط منحسر نقطة أو خط أو خطان متقاطعان تم تشكيل أي منها عند قطع المستوى لمخروط قائم مضاعف.

degrees of freedom (d.f.) Represent the number of values that are free to vary after a sample statistic is determined, and are equal to $n - 1$ in a sample of n values.

dependent When a system of linear equations has an infinite number of solutions.

dependent events Two or more events in which the outcome of one event affects the outcome of the other events.

dependent variable In a function, the variable, usually y , that represents any value in the range.

depressed polynomial The quotient when a polynomial is divided by one of its binomial factors $x - c$.

derivative The derivative of the function $f'(x)$ is the function $f'(x)$ given by $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Descartes' Rule of Signs A rule that gives information about the number of positive and negative real zeros of a polynomial function by looking at a polynomial's variations in sign.

determinant If $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, the determinant of A , written

$\det(A)$ or $|A|$, is the difference of the product of the two diagonals of the matrix, or $ad - cb$. If $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$,

then $|B| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

difference quotient Given a secant line through the points $(x, f(x))$ and $(x+h, f(x+h))$, the difference quotient is the slope of the line, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

differential equation The result when finding the derivative of a function.

differential operator An operator such as $\frac{d}{dx}$ which specifies the action of taking the derivative of a function.

differentiation The process of finding the derivative of a function.

dilation A transformation in which the graph of a function is compressed or expanded vertically or horizontally.

dimensions A description of the number of rows and columns of a matrix.

direction The directed angle between the vector and the horizontal line that could be used to represent the positive x -axis.

directrix A specific line from which all points on a parabola are equidistant.

درجات الحرية (d.f.) تمثل عدد القيم التي يمكن تغييرها بعد تحديد إحصاء العينة، وتكون مساوية لـ $n - 1$ في عينة القيم n .

غير مستقل عندما يحتوي نظام المعادلات الخطية على عدد لا نهائي من الحلول.

أحداث غير مستقلة حدثان أو أكثر تؤثر نتيجة أحدهما في نتيجة الأحداث الأخرى.

متغير غير مستقل في الدالة، يكون المتغير، عادة y ، الذي يمثل أي قيمة في المجال.

كثير حدود منخفض حاصل القسمة عندما يتم قسمة كثير الحدود على أحد عوامله ثنائية الحد $x - c$.

مشتقة المشتقة من الدالة $f(x)$ هي الدالة $f'(x)$ المعطاة بواسطة $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

قاعدة "ديكارت" للإشارات قاعدة توفر معلومات عن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة في دالة كثيرة الحدود عن طريق فحص إشارة التنوعات كثيرة الحدود.

محدد إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، فإن محدد A ، يكتب $\det(A)$

أو $|A|$ ، هو فرق حاصل ضرب قطري المصفوفة، أو $ad - cb$. إذا كان

$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ، و $|B| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

حاصل قسمة الفرق بإعطاء الخط القاطع من خلال النقاط، $(x, f(x))$ و $(x+h, f(x+h))$ فإن حاصل قسمة الفرق هو ميل الخط، $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

حاصل قسمة الفرق النتيجة عند حساب مشتق إحدى الدالات.

مشغل الفرق مشغل مثل $\frac{d}{dx}$ ، والذي يحدد إجراء اتخاذ مشتق لإحدى الدالات.

تفاضل عملية العثور على مشتقة إحدى الدالات.

تغيير الأبعاد بمقياس عملية تحويل ينضغط فيها الرسم البياني لدالة ما أو يتمدد رأسياً أو أفقياً.

أبعاد وصف عدد الصفوف والأعمدة الموجودة في مصفوفة.

اتجاه الزاوية الموجهة بين المتجه والخط الأفقي والتي يمكن استخدامها لتمثيل المحور الأفقي x الموجب.

خط الدليل خط محدد تبعد جميع النقاط على القطع المكافئ بعداً متساوياً عنه.

direct substitution A method of evaluating the limit of a polynomial or rational function $f(x)$ as x approaches c by finding $f(c)$.

discontinuous function A function that is not continuous.

discrete random variable A random variable that can take on a finite number of possible values in a probability experiment

diverge If a sequence does not have a limit, it is said to diverge.

dot product The dot product of vectors $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ and $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ is defined as $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$.

بدل مباشر أسلوب لتقييم نطاق كثير الحدود أو الدالة التناسبية $f(x)$ بينما تقترب x من c عبر إيجاد $f(c)$.

دالة غير مستمرة دالة غير متصلة.

متغير ثابت منفصل متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عددًا نهائيًا من القيم المحتملة في تجربة الاحتمال.

متباعد إذا لم تحتو المتتالية على حد، يطلق عليها اسم "متباعد".

حاصل الضرب العددي هو حاصل الضرب العددي للمتجهات $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ ويحدد $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ على أنه $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$.

E

eccentricity A measure that determines how "circular" or "stretched" an ellipse will be. For any ellipse, $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ or $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, where $c^2 = a^2 - b^2$, the eccentricity $e = \frac{c}{a}$.

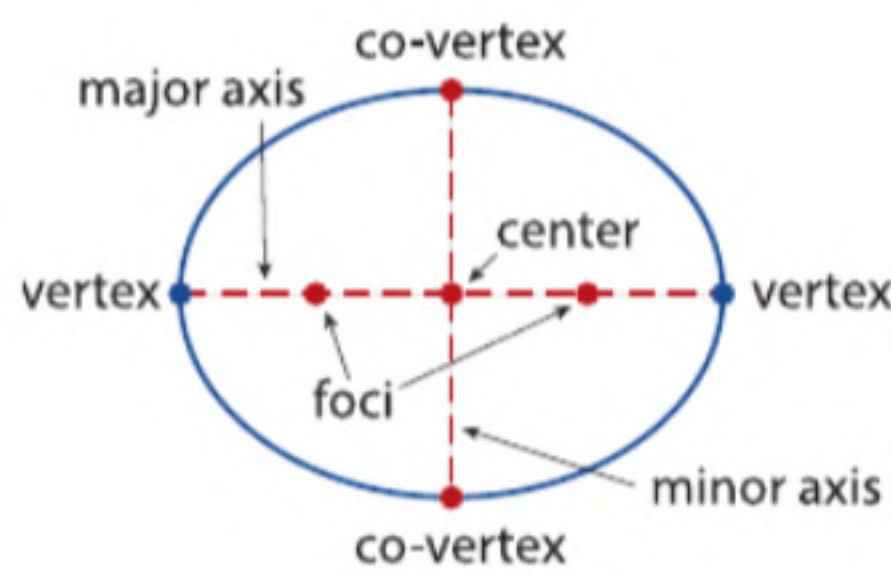
element 1. Each object or number in a set. 2. Each entry in a matrix.

elementary row operations The operations shown below are used to transform an augmented matrix into an equivalent matrix.

- Interchange any two rows.
- Multiply one row by a nonzero real number.
- Add a multiple of one row to another row.

elimination method Eliminate one of the variables in a system of equations by adding or subtracting the equations.

ellipse The locus of points in a plane such that the sum of the distances from two fixed points, called foci, is constant.



empirical rule Describes areas under the normal curve over intervals that are one, two, and three standard deviations from either side of the mean. About 68% of the values are within one standard deviation of the mean, 95% are within two standard deviations from the mean, and 99.7% are within three standard deviations of the mean

انحراف مركزي هو مقياس يحدد كيف سيكون القطع الناقص "الدائري" أو "الممتد". بالنسبة إلى أي قطع ناقص، $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ حيث $c^2 = a^2 - b^2$ $e = \frac{c}{a}$ أنحراف المركزي

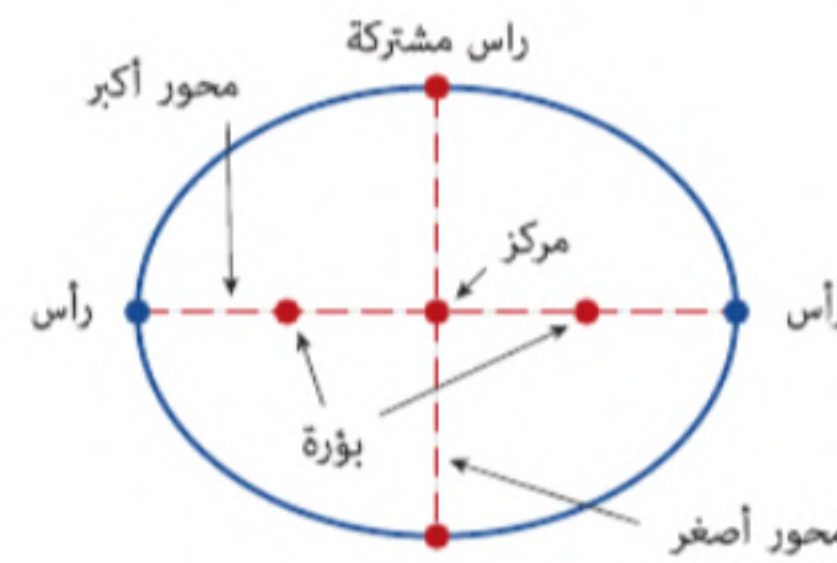
العنصر 1. يمثل كل كائن أو عدد في مجموعة. 2. كل إدخال في مصفوفة.

عمليات الصفوف الأولية تستخدم العمليات التي تظهر أدناه في تحويل مصفوفة موسعة إلى مصفوفة مكافئة.

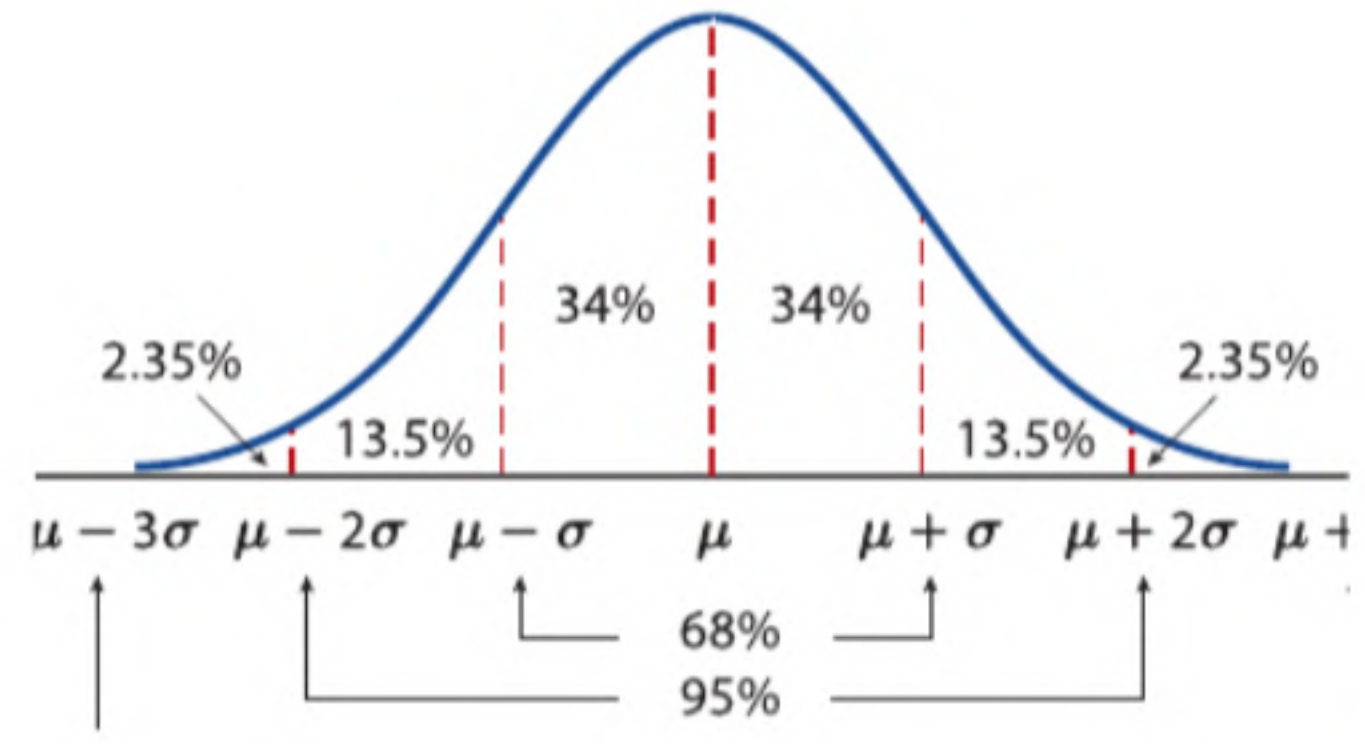
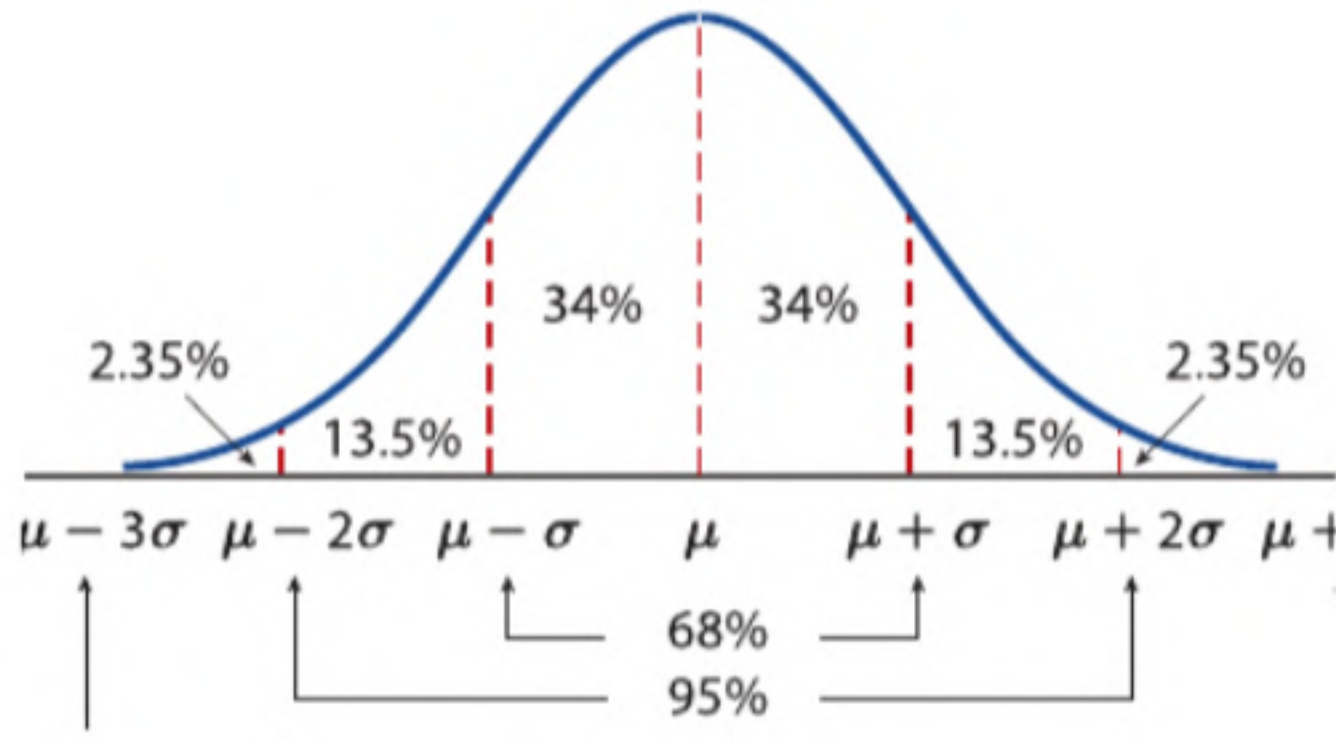
- مبادلة أي صفين.
- ضرب صف واحد في عدد حقيقي غير صفري.
- جمع مضاعف صف واحد على صف آخر.

طريقة الحذف هي طريقة يتم فيها حذف واحد من المتغيرات في نظام المعادلات عن طريق جميع المعادلات أو طرحها.

قطع ناقص عبارة عن محل هندسي للنقاط في سطح مستوي بحيث يكون مجموع أبعادها عن نقطتين ثابتتين في هذا المستوى، يطلق عليهما البؤرتان، ثابتاً.



قاعدة تجريبية توضح المناطق أسفل المنحنى الطبيعي على فترات تمثل انحرافاً قياسياً واحداً أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات من جانب المتوسط الحسابي. تكون نسبة 68% من القيم ضمن حدود انحراف قياسي واحد للمتوسط الحسابي، بينما تكون نسبة 95% ضمن حدود انحرافين قياسييين من المتوسط الحسابي، ونسبة 99.7% ضمن حدود ثلاثة انحرافات قياسية للمتوسط الحسابي.



empty set A set with no elements, symbolized by $\{\}$ or $\emptyset$.

مجموعة خالية هي مجموعة لا تحتوي على عناصر، ويرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{\}$.

end behavior Describes what happens to the value of $f(x)$ as x increases or decreases without bound.

سلوك نهائي يوضح ما الذي يحدث للقيمة $f(x)$ عندما يزيد x أو ينخفض بدون حد.

equal matrices Two matrices that have the same dimensions and each element of one matrix is equal to the corresponding element of the other matrix.

مصفوفات متساوية عبارة عن مصفوفتين لهما الأبعاد نفسها وكل عنصر في إحدى المصفوفتين يساوي العنصر المطابق في المصفوفة الأخرى.

equivalent vectors Vectors that have the same magnitude and direction.

متجهات متكافئة هي متجهات لها نفس المقدار والاتجاه.

Euler's Formula For any real number θ ,
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

صيغة أويلر بالنسبة إلى أي عدد حقيقي θ .
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

even function A function that is symmetric with respect to the y -axis.

دالة زوجية دالة متماثلة من حيث محور الصادات.

expected value The mean of the random variable in a probability distribution.

قيمة متوقعة عبارة عن المتوسط الحسابي لمتغير عشوائي في توزيع الاحتمال.

experiment A situation involving chance or probability that leads to specific outcomes.

تجربة عبارة عن موقف ما يتضمن فرصة أو احتمالية تؤدي إلى نتائج محددة.

explanatory variable The independent variable x in bivariate data.

المتغير التفسيري هو المتغير المستقل x في البيانات ذات المتغيرين.

exponential function A function of the form $f(x) = ab^x$, where x is any real number and a and b are real number constants such that $a \neq 0$, b is positive, and $b \neq 1$.

دالة أسية هي دالة تأخذ الصورة $f(x) = ab^x$ ، حيث x أي رقم حقيقي و a و b ثابتان للعدد الحقيقي بحيث $a \neq 0$ ، b موجب، و $b \neq 1$.

exponential series The power series that approximates e^x as $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

متسلسلة أسية عبارة عن متسلسلة الأس التي تقترب من e^x حيث e^x as $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

extended principle of mathematical induction Instead of verifying that P_n is true for $n = 1$, as in the principle of mathematical induction, instead verify that P_n is true for the first possible case.

المبدأ الممتد للاستنتاج الرياضي بدلاً من التحقق من أن P_n صحيح لـ $n = 1$ ، كما في مبدأ الاستنتاج الرياضي، تحقق من أن P_n صحيح للحالة الأولى المحتملة.

extraneous solution A solution that does not satisfy the original equation.

حل دخيل حل لا يحقق المعادلة الأصلية.

extrapolation To use the equation of the least-squares regression line to make predictions far outside the range of the x -values that were used to obtain the regression line.

استكمال خارجي استخدام معادلة مستقيم الانحدار ذات المربعات الأقل لجعل التنبؤات بعيدة عن مدى القيم x -المستخدمة في الحصول على مستقيم الانحدار.

extrema The maximum and minimum values of a function.

قيم قصوى القيم العظمى والصغرى لدالة معينة.

factorial If n is a positive integer, then
 $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

feasible solutions The set of possible solutions of a system of inequalities in a linear programming problem, which are points of the form (x, y) .

Fibonacci sequence A sequence in which the first two terms are 1 and each of the additional terms is the sum of the two previous terms.

finite sequence A sequence that has a finite number of terms.

finite series The sum of the first n terms of a finite or infinite sequence.

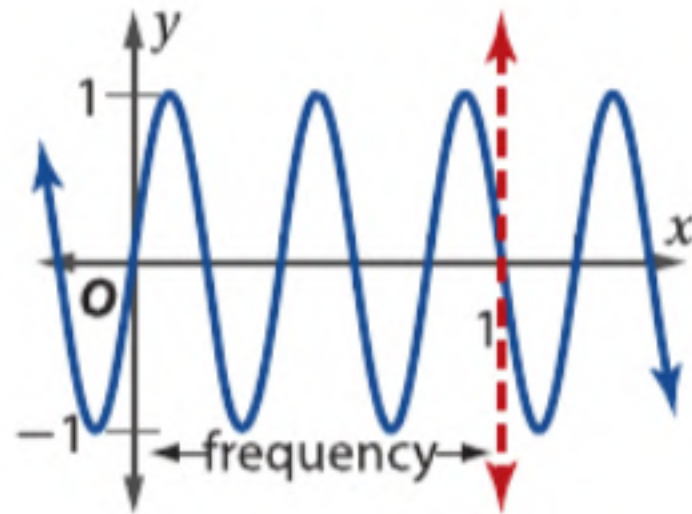
first differences Values obtained by subtracting each term in a sequence from its successive term.

five-number summary A statistic that includes the minimum value, lower quartile, median, upper quartile, and the maximum value of a data set.

foci Two fixed points used to define an ellipse or hyperbola. See **ellipse and hyperbola**.

focus See **parabola, ellipse, hyperbola**.

frequency For a sinusoidal function, the number of cycles the function completes in a one unit interval. The frequency is the reciprocal of the period. For $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$, frequency $= \frac{1}{\text{period}}$ or $\frac{|b|}{2\pi}$.



frequency distribution A table used to organize data by groups, classes or intervals.

function A relation that assigns to each element in the domain exactly one element in the range.

function notation An equation of y in terms of x can be rewritten so that $y = f(x)$. For example, $y = 4x$ can be written as $f(x) = 4x$.

Fundamental Theorem of Algebra A polynomial function of degree n , where $n > 0$, has at least one zero (real or imaginary) in the complex number system.

مضروب إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن
 $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

حلول ممكنة مجموعة من الحلول الممكنة لنظام التباين في مسألة برمجية خطية، والتي هي نقاط من الصيغة (x, y) .

متتالية فيبوناتشي متتالية يكون أول حدين فيها 1 ويكون كل حد من الحدود التالية مساويا لمجموع الحدين السابقين.

متتالية نهائية متتالية لها عدد متناهي من الحدود.

متسلسلة نهائي مجموع أول n من الحدود المتتالية النهائية أو اللانهائية.

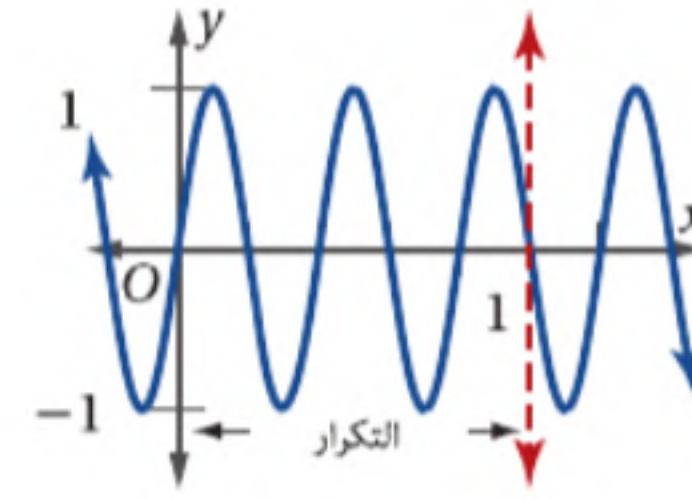
فروق أولى القيم المتحصلة بواسطة طرح كل حد في متتالية من الحد التالي له.

ملخص من خمسة أعداد إحصاء يتضمن القيمة الدنيا والربع الأدنى والوسيط والربع الأعلى والقيمة القصوى لمجموعة بيانات.

البؤرتان عبارة عن نقاط ثابتة تستخدم في تحديد قطع ناقص أو قطع زائد. راجع **القطع الناقص والقطع الزائد**.

بؤرة راجع **القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد**.

تكرار بالنسبة إلى الدالة الجيبية، يمثل عدد الدورات التي تكملها الدالة في فترة الوحدة الواحدة. التكرار هو معكوس الفترة. بالنسبة إلى $y = a \cos (bx + c) + d$ و $y = a \sin (bx + c) + d$ التكرار $= \frac{1}{\text{الدورة}}$ أو $\frac{|b|}{2\pi}$.



توزيع التكرار هو جدول يستخدم في تنظيم البيانات حسب المجموعات أو الدرجات أو الفترات.

دالة علاقة قائمة على تعيين عنصر واحد في المدى لكل عنصر في المجال.

رمز الدالة معادلة y في صورة x يمكن إعادة كتابتها بحيث $y = f(x)$. على سبيل المثال، يمكن كتابة $y = 4x$ على أنها $f(x) = 4x$.

نظرية الجبر الأساسية عبارة عن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n حيث n أكبر من 0، وتحتوي على صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة.

Fundamental Theorem of Calculus If f is continuous on $[a, b]$ and $F(x)$ is any antiderivative of $f(x)$, then

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل إذا كان f مستمرًا على $[a, b]$ وكان $F(x)$ أي ضد اشتقاق من $f(x)$ ، فإن

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

G

Gaussian elimination Using the operations below to transform a system of linear equations into an equivalent system.

- Interchange any two equations.
- Multiply one of the equations by a nonzero real number.
- Add a multiple of one equation to another equation.

Gauss–Jordan Elimination Solving a system of linear equations by transforming an augmented matrix so that it is in reduced row–echelon form.

geometric means The terms between two nonconsecutive terms of a geometric sequence.

geometric sequence A sequence in which the ratio between successive terms is a constant.

geometric series The sum of the terms of a geometric sequence.

greatest integer function Has the parent function $f(x) = \llbracket x \rrbracket$, which is defined as the greatest integer less than or equal to x .

حذف غاوس يتم باستخدام العمليات المذكورة أدناه لتحويل نظام المعادلات الخطية إلى نظام مكافئ.

- مبادلة أي معادلتين.
- ضرب إحدى المعادلات في عدد حقيقي غير صفري.
- جمع مضاعف معادلة واحدة على معادلة أخرى.

اختزال غاوس جوردان طريقة لحل نظام المعادلات الخطية بتحويلها إلى مصفوفة موسعة بحيث تكون في نموذج الصف المخفض.

وسط هندسي الحدود بين حدين غير متتاليين في متتالية هندسية.

متتالية هندسية متتالية تتميز بثبات النسبة بين الحدود المتتالية.

متسلسلة هندسية مجموع حدود المتتالية الهندسية.

دالة أكبر عدد صحيح تحتوي على الدالة الأصلية $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ ، والتي تحدد على أنها أكبر عدد صحيح أقل من x أو يساويه.

H

Heron's Formula If $\triangle ABC$ has side lengths a , b , and c , then the area of the triangle is $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, where $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

holes Removable discontinuities on the graph of a function that occur when the numerator and denominator of the function have common factors. The holes occur at the zeros of the common factors.

horizontal asymptote The line $y = c$ is a horizontal asymptote of the graph of f if $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ or $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$.

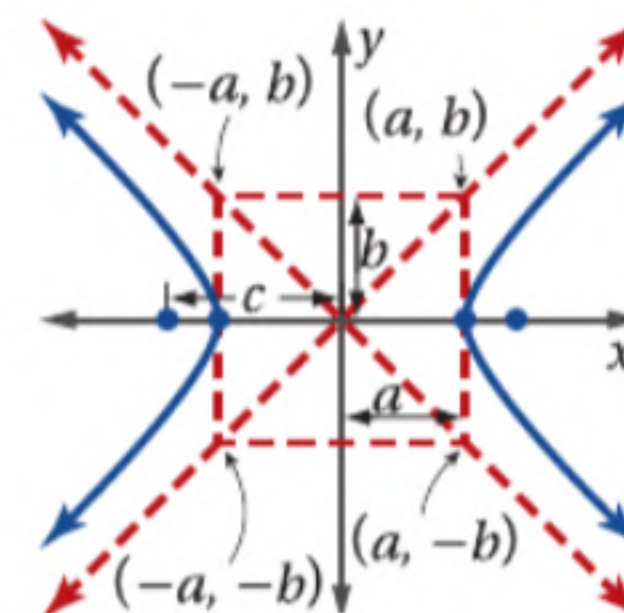
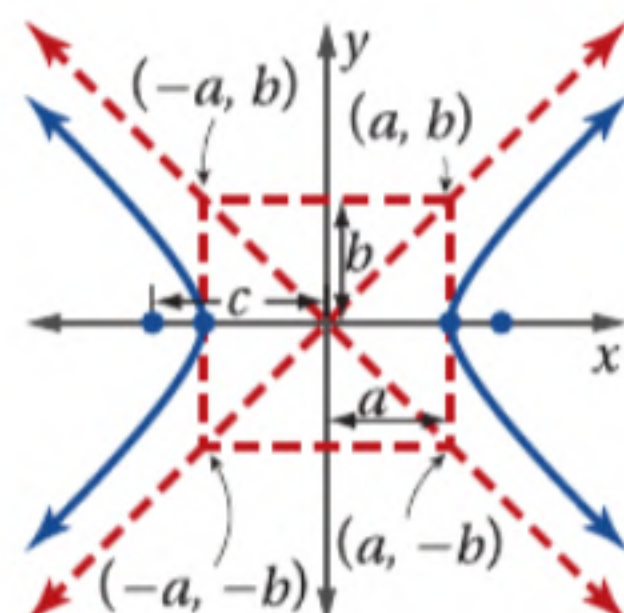
hyperbola The set of all points in a plane such that the absolute value of the differences of the distances from two foci is constant.

قاعدة هيرون إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a , b و c ، فإن مساحة المثلث تساوي $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ، حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

فجوات عبارة عن انقطاعات قابلة للإزالة على الرسم البياني لدالة وتحدث عندما يحتوي بسط الدالة ومقامها على عوامل مشتركة. تحدث الفجوات في أصفار العوامل المشتركة.

خط مقارب أفقي يعد الخط $y = c$ خطًا مقاربًا أفقيًا في الرسم البياني لـ f إذا كان $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$.

قطع زائد مجموعة كل النقاط في المستوى بحيث تكون القيمة المطلقة للفرق بين المسافتين الواصلتين من بؤرتين ثابتة.



hypothesis test Assesses evidence provided by data about a claim concerning a population parameter.

اختبار الفرضية يعمل على تقييم الأدلة المقدمة من البيانات حول افتراض متعلق بمعلمة المجتمع الإحصائي.

I

identity An equation in which the left side is equal to the right side for all values of the variable for which both sides are defined.

تطابق معادلة يكون فيها الطرف الأيسر مساوياً للطرف الأيمن فيما يخص جميع قيم المتغير الذي يتم تحديد كل من الطرفين عن طريقه.

identity function The function $f(x) = x$, which passes through all points with coordinates (a, a) .

دالة التطابق الدالة $f(x) = x$ التي تمر عبر كل النقاط باستخدام الإحداثيات (a, a) .

identity matrix The identity matrix of order n , I_n , is an $n \times n$ matrix consisting of all 1s on its main diagonal, from upper left to lower right, and 0s for all other elements. If A is an $n \times n$ matrix, then $AI_n = I_n A = A$.

مصفوفة متطابقة مصفوفة متطابقة تحيل الرتبة n . وهي مصفوفة $n \times n$ تتألف من جميع وحدات 1s على قطرها الرئيسي، بداية من الجانب العلوي الأيسر وصولاً إلى الجانب السفلي الأيمن. وقيم 0s لجميع العناصر الأخرى. إذا كان A عبارة عن مصفوفة $n \times n$ فإن $AI_n = I_n A = A$.

imaginary axis The vertical axis of a complex plane on which the imaginary component of a complex number is graphed.

محور تخيلي هو المحور الرأسي لمستوى مركب يرسم عليه المركب التخيلي لعدد مركب بيانياً.

imaginary number Another name for a complex number of the form $a + bi$, when $b \neq 0$.

عدد تخيلي اسم آخر مخصص للعدد المركب يظهر بالشكل $a + bi$ عندما تكون $b \neq 0$.

imaginary part In an imaginary number $a + bi$, b is the imaginary part.

جزء تخيلي في العدد التخيلي $a + bi$ ، يمثل a الجزء التخيلي.

imaginary unit i , or the principal square root of -1 .

وحدة تخيلية i ، أو الجذر التربيعي الأساسي لـ -1 .

implied domain In a function with an unspecified domain, the set of all real numbers for which the expression used to define the function is real.

مجال مضمن في إحدى الدوال ذات المجال غير المحدد، تكون مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يستخدم التعبير لها من أجل تحديد الدالة حقيقية.

inconsistent A system of equations that has no solutions.

معادلة غير متوافقة نظام معادلات ليس له حلول.

increasing Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a positive change in $f(x)$.

تزايد يوضح الدالة f أو فترة في دالة ما يؤدي فيها التغيير الموجب في x لأي نقطتين إلى تغيير موجب في $f(x)$.

indefinite integral The indefinite integral of $f(x)$ is defined by $\int f(x) dx = F(x) + C$, where $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$ and C is any constant.

تكامل غير محدود هو تكامل غير محدد من $f(x)$ محدد بواسطة $\int f(x) dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ هو المشتق العكسي لـ $f(x)$ و C هو أي ثابت.

independent When a system of linear equations has exactly one solution.

مستقل عندما يحتوي نظام المعادلات الخطية على حل واحد فقط.

independent events Events that do not affect each other.

أحداث مستقلة أحداث ليس لها تأثير على بعضها.

independent variable In a function, the variable, usually x , that represents any value in the domain.

متغير مستقل في الدالة، هو المتغير x الذي يمثل أي قيمة في المجال.

indeterminate form An expression obtained when evaluating a limit that does not give enough information to determine the original limit.

نموذج مُبهم تعبير يظهر عند تقييم حد لا يعطي معلومات كافية لتحديد الحد الأصلي.

inductive hypothesis In mathematical induction, assuming that something works for any particular case, or that assuming that P_k is true.

فرضية الاستنتاج في الاستنتاج الرياضي، هي الافتراض بأن شيئاً ما يعمل على حل أي مسألة معينة، أو الافتراض بأن P_k صحيح.

inductive step In mathematical induction, showing that something works for the case after P_k , or showing that P_{k+1} is true.

خطوة استقرائية في الاستقراء الرياضي، تظهر أن شيئاً ما يعمل على حل المسألة بعد P_k ، أو تظهر أن P_{k+1} صحيح.

inferential statistics A sample of data is analyzed and conclusions are made about the entire population.

infinite discontinuity A characteristic of a function in which the absolute value of the function increases or decreases indefinitely as x -values approach c from the left and right.

infinite sequence A sequence that has infinitely many terms.

infinite series The sum of the terms of an infinite sequence.

influential An individual data point that substantially changes a regression line.

initial point The starting point of a vector that is represented by a directed line segment. Also known as the tail of the vector.

initial side The starting position of a ray when forming an angle.

instantaneous rate of change For the graph of $f(x)$, the slope m of the line tangent at the point $(x, f(x))$ given by $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, provided the limit exists.

instantaneous velocity The velocity achieved at a specific point in time.

integration The process of evaluating an integral.

interpolation To use the equation of the least-squares regression line to make predictions over the range of the data.

interquartile range The range of the middle half of a set of data. It is the difference between the upper quartile and the lower quartile.

intersection The intersection of sets A and B is all elements found in both A and B , written as $A \cap B$.

interval A data value or group of data values.

interval estimate A range of values used to estimate an unknown population parameter.

interval notation An expression that uses inequalities to describe subsets of real numbers.

inverse Let A be an $n \times n$ matrix. If there exists a matrix B such that $AB = BA = I_n$, then B is called the inverse of A and is written as A^{-1} .

inverse cosine If θ is an acute angle and $\cos \theta = x$, then the inverse cosine of x , or $\cos^{-1} x$, is the measure of angle θ .

inverse function Two functions f and f^{-1} are inverse functions if and only if $f[f^{-1}(x)] = x$ for every x in the domain of $f^{-1}(x)$, and $f^{-1}[f(x)] = x$ for every x in the domain of $f(x)$.

إحصاء استقرائي عبارة عن عينة من البيانات يجري تحليلها واستخلاص الاستنتاجات حول المجتمع الإحصائي بأكمله.

انفصال لا نهائي ميزة تتسم بها دالة ما تزداد فيها القيمة المطلقة للدالة أو تنخفض إلى ما لا نهاية حتى تقترب قيم x من c من اليسار واليمين.

متتالية لا نهائية متتالية بها عدد لا نهائي من الحدود.

متسلسلة لا نهائية مجموع الحدود لمتتالية لا نهائية.

فعال نقطة بيانات فردية تغير من خط الانحدار تغييرًا جوهريًا.

نقطة البداية هي نقطة البداية لمتجه يتم تمثيلها بواسطة قطعة مستقيمة موجهة. تسمى أيضًا باسم ذيل المتجه.

ضلع الابتداء موقع بدء الشعاع عند تكوين زاوية ما.

معدل التغير اللحظي للرسم البياني $f(x)$ هو الميل m لخط المماس عند النقطة $(x, f(x))$ معطى بواسطة $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، يوفر الحد الموجود.

سرعة لحظية هي السرعة المتجهة المحققة عند نقطة زمنية محددة.

ايجاد قيمة عملية تقييم تكامل ما.

استكمال داخلي يقصد به استخدام معادلة مستقيم الانحدار ذات المربعات الأقل لوضع التوقعات على مدى البيانات.

مدى رُبعي يمثل مدى النصف الأوسط من مجموعة بيانات. وهو الفرق بين الربع الأعلى والربع الأدنى.

تقاطع تقاطع المجموعتين A و B ويشمل كل العناصر الموجودة في كل من A و B ، ويكتب بالشكل $A \cap B$.

فترة قيمة البيانات أو مجموعة من قيمة البيانات.

تقدير الفترة عبارة عن مجموعة من القيم المستخدمة في تقدير معلمة المجتمع الإحصائي المجهولة.

رمز الفترة تعبير يستخدم المتباينات لتوضيح المجموعات الفرعية للأعداد الحقيقية.

معكوس بفرض أن A يمثل المصفوفة $n \times n$. إذا كانت هناك مصفوفة B بحيث $AB = BA = I_n$ ، فعندئذٍ يسمى B معكوساً لـ A ويكتب بالشكل A^{-1} .

معكوس جيب التمام إذا كانت θ زاوية حادة و $\cos \theta = x$ ، فعندئذٍ يكون معكوس جيب التمام x ، أو $\cos^{-1} x$ ، هو قياس الزاوية θ .

دالة عكسية عبارة عن دالتين f و f^{-1} يمثلان دالتين عكسيتين فقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x$ لكل x في مجال $f^{-1}(x)$ و $f^{-1}[f(x)] = x$ لكل x في مجال $f(x)$.

inverse matrix The multiplicative inverse of a square matrix. The product of a matrix A and its inverse A^{-1} must equal the identity matrix I_n .

inverse relation Two relations are inverse relations if and only if one relation contains the element (b, a) whenever the other relation contains the element (a, b) .

inverse sine If θ is an acute angle and $\sin \theta = x$, then the inverse sine of x , or $\sin^{-1} x$, is the measure of angle θ .

inverse tangent If θ is an acute angle and $\tan \theta = x$, then the inverse tangent of x , or $\tan^{-1} x$, is the measure of angle θ .

inverse trigonometric function The inverse sine of x or $\sin^{-1} x$, the inverse cosine of x or $\cos^{-1} x$, and the inverse tangent of x or $\tan^{-1} x$.

invertible matrix A matrix that has an inverse.

irreducible over the reals A quadratic expression that has real coefficients but no real zeros associated with it.

jump discontinuity A characteristic of a function in which the function has two distinct limit values as x -values approach c from the left and right.

مصفوفة عكسية هي المصفوفة الضربي لمصفوفة تربيعية. يجب أن يكون حاصل ضرب المصفوفة A ومعكوسها A^{-1} مساوياً للمصفوفة المتطابقة I_n .

علاقة عكسية تكون العلاقتان عكسيتين فقط إذا كانت إحداها تحتوي على العنصر (b, a) والأخرى تحتوي على العنصر (a, b) .

معكوس الجيب إذا كانت θ زاوية حادة وكان $\sin \theta = x$. فعندئذ يكون معكوس الجيب لـ x ، أو $\sin^{-1} x$ ، هو قياس الزاوية θ .

معكوس ظل الزاوية إذا كانت θ زاوية حادة و $\tan \theta = x$. فعندئذ يكون معكوس ظل الزاوية لـ x ، أو $\tan^{-1} x$ ، هو قياس الزاوية θ .

دالة مثلثية عكسية معكوس الجيب لـ x أو $\sin^{-1} x$. بينما معكوس جيب التمام لـ x أو $\cos^{-1} x$ ، ومعكوس ظل الزاوية لـ x أو $\tan^{-1} x$.

مصفوفة قابلة للعكس هي مصفوفة لها معكوس.

جذور حقيقية غير قابلة للتبسيط تعبير تربيعي يحتوي على معاملات حقيقية لكن بدون أصفار حقيقية مقترنة به.

عدم الاتصال القفزي ميزة تنسم بها الدالة وتحتوي فيها على قيمتي حدود متميزتين عندما تقترب قيم x من c من اليسار واليمين.

latus rectum The line segment that passes through the focus of a parabola, is perpendicular to the axis of symmetry, and has endpoints on the parabola.

Law of Cosines If $\triangle ABC$ has side lengths a , b , and c representing the lengths of the sides opposite the angles with measures A , B , and C , respectively. Then the following are true.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Law of Sines If $\triangle ABC$ has side lengths a , b , and c representing the lengths of the sides opposite the angles with measures A , B , and C , respectively, then $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

leading coefficient In a polynomial function, the coefficient of the variable with the greatest exponent.

leading term test Uses the power and coefficient of the leading term of a polynomial to determine the end behavior of a polynomial function.

least-squares regression line The line for which the sum of the squares of the residuals is at a minimum.

left-tailed test The hypothesis test if $H_a: \mu < k$.

level of significance The maximum allowable probability of committing a Type I error, denoted α .

lemniscates The graph of a polar equation of the form $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ or $r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

limaçon The graph of a polar equation of the form $r = a \pm b \cos \theta$ or $r = a \pm b \sin \theta$, where a and b are both positive.

limit The unique value that a function approaches as x -values of the function approach c from the left and right sides.

linear combination The sum of two vectors, each multiplied by a scalar, that is used to represent a vector with a given initial point and terminal point.

Linear Factorization Theorem If $f(x)$ is a polynomial function of degree $n > 0$, then f has exactly n linear factors and $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$, where a_n is some nonzero real number and $c_1, c_2, \dots, c_n$ are the complex zeros (including repeated zeros) of f .

linearize Transform data so that they appear to cluster about a line by applying a function to one or both of the variables in the data set.

وتر بؤري عمودي هو الوتر المار ببؤرة القطع المكافئ والمتعامد على محور التناظر، وله نقاط نهاية على القطع المكافئ.

قانون جيب التمام إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a و b و c تمثل أطوال الأضلاع المقابلة للزوايا ذات القياسات A و B و C ، على التوالي، إذن فإن ما يلي صحيح.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

قانون الجيب إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a و b و c مع تمثيل أطوال الأضلاع مواجهة للزاوية ذات القياس A و B و C ، على التوالي، فإن $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

معامل رئيسي في الدالة كثيرة الحدود، يكون هو معامل المتغير ذو الأس الأكبر.

اختبار حد رئيسي يستخدم قدرة ومعامل الحد الرئيسي لكثيرة الحدود لتحديد السلوك النهائي لدالة كثيرة الحدود.

خط انحدار ذو مربعات أقل الخط الذي يكون مجموع مربعات القيم المتبقية له عند الحد الأدنى.

اختبار الذيل المتجه إلى اليسار يقصد به اختبار الفرضية إذا كان $H_a: \mu < k$.

مستوى الدلالة الحد الأقصى المسموح به لاحتمالية ارتكاب خطأ من النوع الأول، ويرمز له بـ α .

منحنى ذو عروتين الرسم البياني للمعادلة القطبية في الصورة $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

منحنى قلبي الشكل الرسم البياني للمعادلة القطبية في الصورة $r = a \pm b \cos \theta$ أو $r = a \pm b \sin \theta$ ، حيث يكون a و b عددين موجبين.

النهاية القيمة الفريدة التي تقترب منها دالة حيث تقترب قيم x للدالة من c من الجانب الأيسر والجانب الأيمن.

تركيب خطي مجموع متجهين يتم ضرب كل منهما في كمية عددية تستخدم لتمثيل متجه ما بنقطتي بداية ونهاية محددتين.

نظرية تحليل العوامل الخطية إذا كانت $f(x)$ هي دالة درجة كثيرة الحدود $n > 0$ ، إذن f لديها العوامل الخطية n بالضبط و $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$ حيث a_n هي عدد حقيقي غير صفري و $c_1, c_2, \dots, c_n$ هي الأصفار المركبة (بما في ذلك الأصفار المتكررة) لـ f .

ظهور الشيء في صورة خطية تحويل البيانات بحيث تشير إلى تجمع يتعلق بخط معين عن طريق تطبيق دالة على أحد المتغيرين في مجموعة البيانات أو كليهما.

linear programming The process of finding a minimum or maximum value of a linear function for a region defined by linear inequalities.

linear speed The rate at which an object moves along a circular path.

line of best fit A line drawn through a set of data points that describes how the response variable y changes as the explanatory variable x changes. Also called a **regression line**.

line symmetry Describes graphs that can be folded along a line so that the two halves match exactly.

locus A set of all points that fulfill a geometric property.

logarithm In the function $x = by$, y is called the logarithm, base b , of x . Usually written as $y = \log_b x$ and is read **log base b of x** .

logarithmic function with base b A function of the form $y = \log_b x$, where $b > 0$, $b \neq 1$, and $x > 0$, which is the inverse of the exponential function of the form $b^y = x$.

logistic growth function A function that models exponential growth with limiting factors. Logistic growth functions are bounded by horizontal asymptotes $y = 0$ and $y = c$, where c is the limit to growth.

lower bound A real number a that is less than or equal to the least real zero of a polynomial function.

lower limit The lower bound of a definite integral.

magnitude The length of the directed line segment that represents the vector.

major axis The segment that contains the foci of an ellipse and has endpoints on the ellipse.

matrix Any rectangular array of variables or constants in horizontal rows and vertical columns.

maximum For a function f , the greatest value of $f(x)$. A critical point on the graph of a function where the curve changes from increasing to decreasing.

maximum error of estimate The maximum difference between the point estimate and the actual value of the parameter in an experiment.

mean The sum of numbers in a set of data divided by the number of items in the data set.

measure of central tendency A number that represents the center or middle of a set of data.

برمجة خطية عملية إيجاد القيم القصوى أو الدنيا للدالة الخطية لمنطقة محددة على المتباينات الخطية.

سرعة خطية المعدل الذي يتحرك عنده جسم ما على امتداد مسار دائري.

مستقيم أفضل تمثيلاً مستقيم مرسوم من خلال مجموعة من نقاط البيانات التي توضح كيف يتغير متغير الاستجابة y كلما تغير المتغير التفسيري x . ويطلق عليه أيضاً **خط الانحدار**.

تناظر محوري يوضح التمثيلات البيانية التي يمكن رسمها بشكل منحني على مستقيم معين بحيث يتطابق نصف التمثيل تماماً.

محل هندسي مجموعة من كل النقاط التي تحقق خاصية هندسية.

لوغاريتم في الدالة $x = by$, تسمى y اللوغاريتم، و b هي الأساس. لـ x . وعادة ما يُكتب $y = \log_b x$ ويُقرأ **أساس اللوغاريتم b لـ x** .

دالة لوغاريتمية ذات الأساس b دالة للصيغة $y = \log_b x$, حيث $b > 0$ و $b \neq 1$ و $x > 0$, الذي يكون معكوس الدالة الأسية للصيغة $b^y = x$.

دالة النمو اللوجستي دالة تمثل النمو الأسّي بعوامل محدّدة. وتتقيد دوال النمو اللوجستية بخطوط مقاربة أفقية $y = 0$ و $y = c$, حيث c هي حد النمو.

حد أدنى عدد حقيقي a أقل من أو يساوي أقل صفر حقيقي لدالة كثيرة الحدود.

حد أدنى الحد الأدنى لتكامل محدد.

M

مقدار طول القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل المتجه.

محور أكبر القطعة التي تتضمن بؤرتي القطع الناقص ولديها نقاط نهاية عليه.

مصفوفة أي مصفوفة مستطيلة للمتغيرات أو الثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية.

القيمة العظمى بالنسبة إلى الدالة f , القيمة الكبرى لـ $f(x)$. والنقطة الحرجة الممثلة على الرسم البياني لدالة ما يتغير فيها المنحنى ويتجه من التزايد إلى التناقص.

أقصى خطأاً للتقدير أقصى قيمة للفرق بين تقدير النقطة والقيمة الفعلية للمعلمة في تجربة ما.

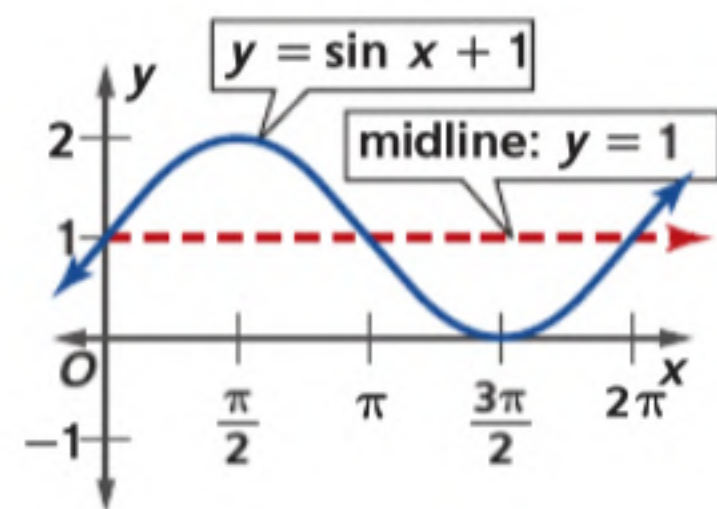
متوسط حسابي مجموع الأعداد في مجموعة البيانات المقسومة على عدد عناصر المجموعة.

مقاييس النزعة المركزية العدد الذي يمثل مركز مجموعة البيانات أو منتصفها.

measures of spread (or variation) A representation of how spread out or scattered a set of data is.

median The middle number in a set of data when the data are arranged in numerical order. If the data set has an even number, the median is the mean of the two middle numbers.

midline A horizontal axis that is the reference line about which the graph of a sinusoidal function oscillates.



minimum For a function f , the least value of $f(x)$. A critical point on the graph of a function where the curve changes from decreasing to increasing.

minor axis The segment through the center of an ellipse that is perpendicular to the major axis and has endpoints on the ellipse.

mode The number(s) that appear most often in a set of data.

modulus The absolute value of a complex number, the number r when a complex number is written in the form $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

monomial function A function that can be written as $f(x) = a$ or $f(x) = ax^n$, where a and n are nonzero constant real numbers.

multiple optimal solutions Solutions that occur when the graph of the equation related to the objective function f to be optimized is coincident with one side of the region of feasible solutions.

multiplicity If $(x - c)^m$ is the highest power of $(x - c)$ that is a factor of polynomial function f , then c is a zero of multiplicity m of f , where m is a natural number.

multivariable linear system A system of linear equations in two or more variables, also called a **multivariate** linear system.

natural base The irrational number e , which is approximately equal to 2.718281828....

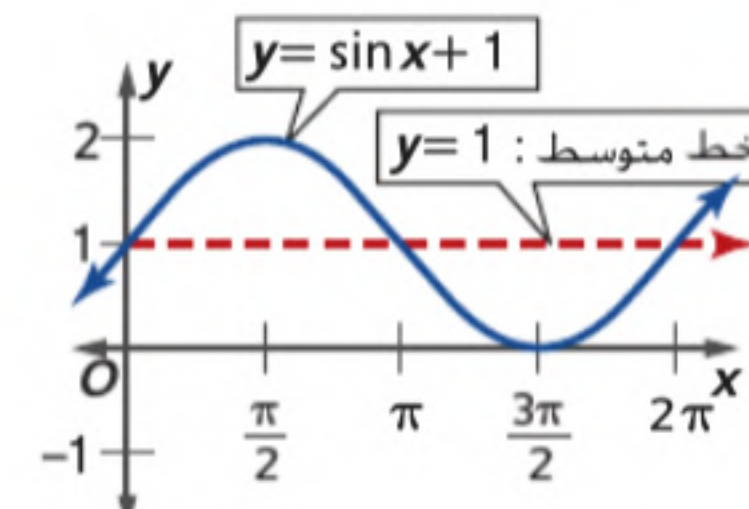
natural logarithm A logarithm with base e , written $\ln x$.

negatively skewed distribution In a data distribution, the mean is less than the median, the majority of the data are on the right, and the tail extends to the left.

مقاييس الانتشار (أو التنوع) تمثيل لمدي انتشار مجموعة البيانات أو تبعثها.

وسيط العدد الأوسط في مجموعة البيانات عند ترتيب البيانات ترتيباً عددياً. وإذا كانت البيانات ذات عدد فردي، فالوسيط هو متوسط العددين الأوسطين.

خط متوسط محور أفقي يمثل خطاً مرجعياً يتذبذب حوله الرسم البياني للدالة الجيبية.



القيمة الصغرى بالنسبة إلى دالة f : تبلغ القيمة الصغرى لـ $f(x)$ نقطة حرجة ممثلة على الرسم البياني لدالة ما يتغير فيها المنحني من التناقص إلى التزايد.

محور أصغر القطعة المستقيمة الواصلة من منتصف القطع الناقص والتي تتقاطع مع المحور الأكبر ولديها نقطة نهاية على القطع الناقص.

منوال العدد (الأعداد) الأكثر تكراراً في مجموعة من البيانات.

معامل القيمة المطلقة لعدد مركب، يساوي العدد r عند كتابة عدد مركب في الصورة $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

دالة أحادية الحد الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة $f(x) = ax^n$ أو $f(x) = a$ حيث a و n عددان حقيقيان ثابتان غير صفريين.

حلول مثلي متعددة الحلول التي تحدث عندما يكون التمثيل البياني للدالة المرتبط بدالة الهدف f التي سيتم تحسينها متطابقاً مع جانب واحد من منطقة الحلول الممكنة.

تعدد إذا كان $(x - c)^m$ يمثل أعلى قدرة لـ $(x - c)$ الذي هو عامل لدالة f كثيرة الحدود، فإن c تساوي صفر التعدد m لـ f حيث m عدد طبيعي.

نظام خطي متعدد المتغيرات نظام يمثل المعادلات الخطية في متغيرين أو أكثر، ويطلق عليه أيضاً النظام الخطي متعدد البدائل.

أساس طبيعي عدد غير نسبي يرمز له بالرمز e ، وتساوي قيمته حوالي 2.718281828....

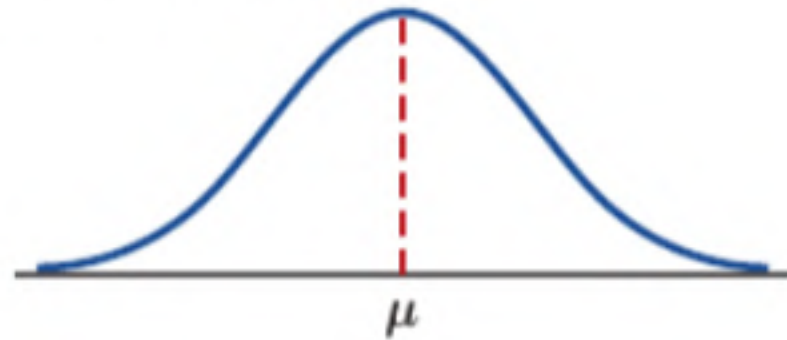
لوغاريتم طبيعي لوغاريتم يحتوي على الأساس e ، ويتم كتابته بالشكل $\ln x$.

توزيع ملتوٍ سلبي في توزيع البيانات، يكون المتوسط الحسابي أقل من الوسيط، وتكون غالبية البيانات على الجانب الأيمن، ويمتد الذيل إلى الجانب الأيسر.

nonremovable discontinuity Describes infinite and jump discontinuities because they cannot be eliminated by redefining the function at that point.

nonsingular matrix A matrix that has an inverse.

normal distribution A continuous probability distribution in which the graph of the curve is bell-shaped and symmetric with respect to the mean; the mean, median, and mode are equal and located at the center. The curve is continuous and approaches, but never touches, the x -axis; the total area under the curve is equal to 1 or 100%.



n th partial sum The sum of the first n terms of a finite or infinite series.

n th root For any real numbers a and b , and any positive integer n , if $a^n = b$, then a is an n th root of b .

null hypothesis One of two hypotheses that need to be stated to test a claim; states that there is not a significant difference between the sample value and the population parameter. The null hypothesis contains a statement of equality such as $\geq$, $=$, or $\leq$.

objective function A linear function of the form $f(x, y) = ax + by + c$ to be optimized in a two-dimensional linear programming problem.

oblique asymptote An asymptote that is neither horizontal nor vertical that occurs when the degree of the numerator of a rational function is exactly one more than the degree of the denominator. Also called a **slant asymptote**.

oblique triangle A triangle that is not a right triangle.

octants Eight regions into which the three axes of a three-dimensional coordinate system divide space.

odd function A function that is symmetric with respect to the origin.

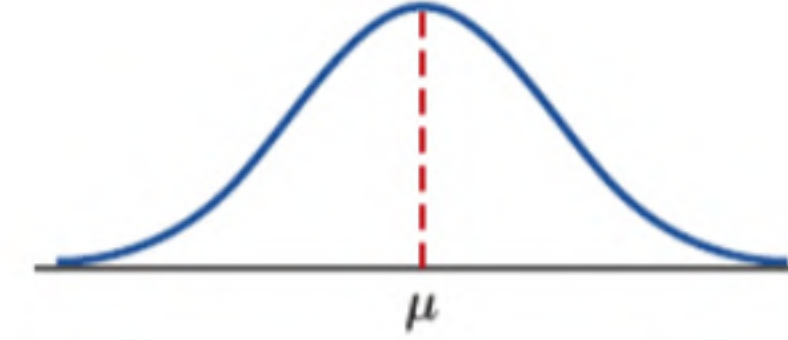
one-sided limit The limit L_1 of $f(x)$ as x approaches c from the left or the limit L_2 of $f(x)$ as x approaches c from the right.

one-to-one 1. A function in which no x -value is matched with more than one y -value and no y -value is matched with more than one x -value. 2. A function whose inverse is a function.

انفصال غير قابل للإزالة يوضح الانقطاعات اللانهائية وانقطاعات القفز نظراً لتعذر تجاهلها عن طريق إعادة تحديد الدالة عند تلك النقطة.

مصفوفة منفردة مصفوفة لديها معكوس.

توزيع طبيعي توزيع احتمال متواصل يأخذ فيه الرسم البياني للمنحنى شكل جرس ويكون متماثلاً من حيث المتوسط الحسابي والمتوسط الحسابي والوسيط والمنوال كلها متساوية وتقع في المنتصف. المنحنى مستمر ويقترب من محور السينات ولكنه لا يمسّه؛ بينما تساوي المساحة الكلية أسفل المنحنى 1 أو 100%.



مجموع جزئي للعدد n مجموع الفترات الأولى للعدد n في متسلسلة نهائية أو لانهائية.

جذر نوني (n th) بالنسبة إلى العددين الحقيقيين a و b ، وأي عدد صحيح موجب n . إذا كان العدد $a^n = b$ ، فعندئذٍ a يساوي الجذر النوني (n th) للعدد b .

فرضية العدم فرضية من اثنتين تضيد بضرورة إثبات صحة افتراض ما؛ وتنص على عدم وجود فرق ملحوظ بين قيمة العينة ومعلمة المجتمع الإحصائي. تتضمن فرضية العدم عبارة مساواة مثل أكبر من أو يساوي أو يساوي أو أقل من أو يساوي.

دالة الهدف دالة خطية للصيغة $f(x, y) = ax + by + c$ تحسينها في مسألة برمجة خطية ثنائية الأبعاد.

خط مقارب مائل خط مقارب ليس أفقياً أو رأسياً ينتج عندما تكون درجة البسط في دالة نسبية أكبر من درجة المقام بمقدار الضعف تماماً. يطلق عليه أيضاً الخط المقارب الجانبي.

مثلث مائل مثلث غير قائم الزاوية.

ثمان مكون من ثمانية قطاعات بداخلها ثلاثة محاور في مساحة مقسمة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

دالة فردية دالة متماثلة من حيث الأصل.

حد أحادي الجانب الحد L_1 لـ $f(x)$ حيث يقترب x من c من الشمال أو الحد L_2 لـ $f(x)$ حيث يقترب x من c من اليمين.

واحد إلى واحد 1. عبارة عن دالة لا تتطابق فيها قيمة محور السينات مع أكثر من قيمة على محور الصادات ولا تتطابق فيها قيمة محور الصادات مع أكثر من قيمة على محور السينات. 2. دالة يكون معكوسها بمثابة دالة.

opposite vectors Vectors that have the same magnitude but opposite direction.

optimization The process of finding a minimum or maximum value for a specific quantity, usually to minimize costs in order to maximize profits in business.

ordered triple Coordinates of the location of a point in space given by real numbers (x, y, z) .

orientation Plotting points of parametric equations in the order of increasing values of t traces the curve in a specific direction of the curve.

orthogonal Two vectors with a dot product of 0.

outliers Data that are more than 1.5 times the interquartile range beyond the upper and lower quartiles.

متجهات معاكسة متجهات لها المقدار نفسه لكنها متضادة الاتجاه.

بحث عن الحل الأمثل عملية إيجاد القيمة القصوى أو الدنيا لكمية معينة، وغالبًا ما يكون ذلك لتقليل التكاليف إلى أدنى حد بهدف زيادة الأرباح إلى أقصى حد في الشركة.

ثلاثي مُرتب عبارة عن إحداثيات لموقع نقطة ما في المساحة المحددة بواسطة الأعداد الحقيقية (x, y, z) .

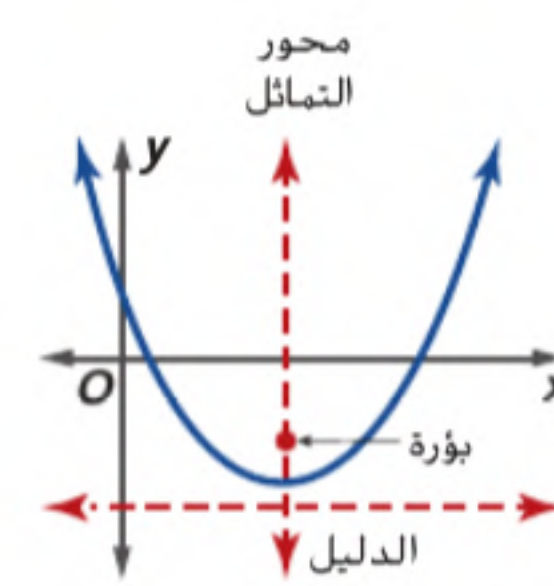
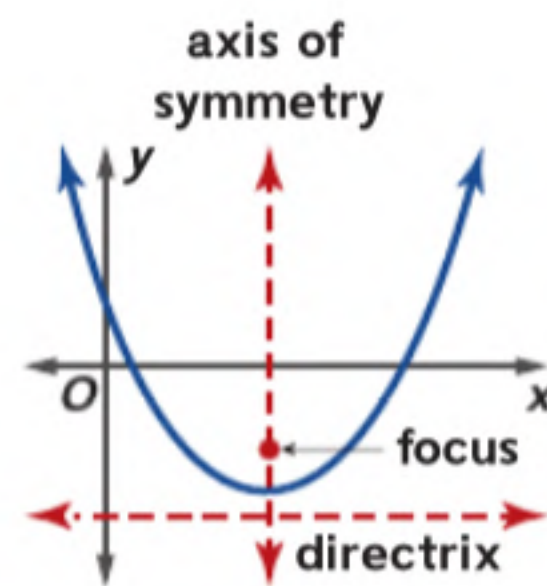
توجيه رسم نقاط المعادلات الوسيطة في ترتيب قيم t المتزايدة يتبع المنحنى في اتجاه معين من المنحنى.

متعامد عبارة عن متجهين يكون حاصل الضرب العددي لهما 0.

قيم متطرفة بيانات تكون أكبر بمقدار مرة ونصف من المدى بين الربعين فوق الأرباع العليا والدنيا.

P

parabola The locus of points in a plane that are equidistant from a fixed point, called the focus, and a specific line, called the directrix.



قطع مكافئ محل هندسي للنقاط في سطح مستوي متساوي البعد من نقطة ثابتة، يطلق عليها البؤرة، ومستقيم معين، يطلق عليه الدليل.

parallelepiped A polyhedron with faces that are all parallelograms.

parallelogram method A method of finding the resultant vector by translating one vector so that its tail touches the tail of another. A parallelogram is drawn and the diagonal is the resultant vector.

parallel vectors Vectors that have the same or opposite direction, but not necessarily the same magnitude.

parameter 1. Arbitrary values, usually time or angle measurement, used in parametric equations. 2. A measure that describes a characteristic of a population.

parametric curve If f and g are continuous functions, then the set of ordered pairs $(f(t), g(t))$ is a plane curve with $x = f(t)$ and $y = g(t)$ as the parametric equations and t as the parameter.

parametric equation An equation that can express the position of an object as a function of time.

parent function The simplest function in a family of functions. A function that is transformed to create other members in a family of functions.

متوازي السطوح مجسم متعدد الوجوه تأخذ كل وجوهه شكل متوازي الأضلاع.

طريقة متوازي الأضلاع طريقة لاكتشاف المتجه الناتج عن طريق نقل متجه واحد بحيث يلامس ذيله ذيل المتجه الآخر. يتم رسم متوازي الأضلاع وبعد القطر فيه متجهها ثابتا.

متجهات موازية متجهات لها الاتجاه نفسه أو اتجاه معاكس، لكن ليس بالضرورة المقدار نفسه.

معلمة 1. القيم المطلقة عبارة عن قياس زمني أو قياس بالزاوية عادة وتستخدم في المعادلات الوسيطة. **2.** نظام قياس يصف سمة المجتمع الإحصائي.

منحنى وسيطي إذا كانت f و g دالتين متصلتين، فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$ تكون منحنى مستوي يكون فيه $x = f(t)$ و $y = g(t)$ كمعادلات وسيطة و t كمعلمة.

معادلة وسيطة معادلة تستطيع أن تعبر عن موقع جسم ما على أنه دالة زمنية.

دالة أصلية الدالة الأبسط في مجموعة الدوال. دالة تتحول لإنشاء أعضاء آخرين في مجموعة الدوال.

partial fraction When a rational function is written as the sum of two fractions with denominators that are linear factors of the original denominator, each fraction in the sum is a partial fraction.

partial fraction decomposition A rational expression rewritten as the sum of two simpler rational expressions.

Pascal's triangle A triangular array of numbers such that the first and last numbers in each row are 1 and every other number is formed by adding the two numbers immediately above that number in the previous row. The $(n + 1)$ th row contains the coefficients of the terms of the expansion $(a + b)^n$ for $n = 0, 1, 2, \dots$.

percentile graph Uses the same values as a cumulative relative frequency graph, except that the proportions are instead expressed as percents.

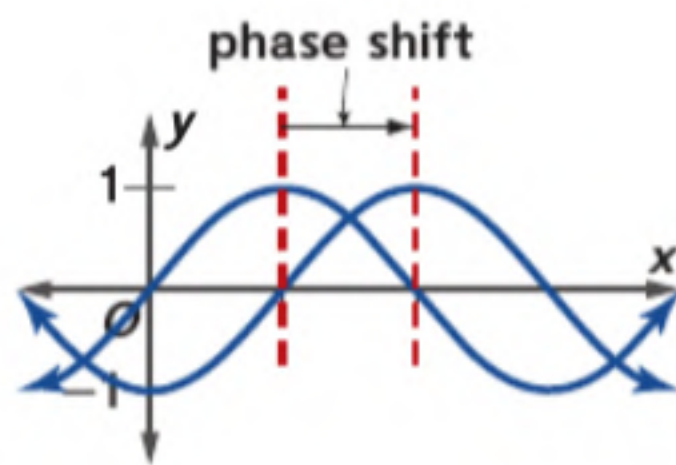
percentiles Divide a distribution into 100 equal groups and are symbolized by $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{99}$. The n th percentile or P_n is the value such that $n\%$ of the data are lower than P_n .

period For a function $y = f(t)$, the smallest positive number c for which $f(t + c) = f(t)$.

periodic function A function with values that repeat at regular intervals. There exists a positive real number c such that $f(t + c) = f(t)$ for all values of t in the domain of f .

permutation An arrangement of objects in which order is important.

phase shift For a sinusoidal function, the difference between the horizontal position of a function and that of an otherwise similar sinusoidal function. For $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$, phase shift $= -\frac{c}{|b|}$.



piecewise-defined function A function that is defined using two or more expressions for different intervals of the domain.

point estimate A single value estimate of an unknown population parameter.

point symmetry Describes graphs that can be rotated 180° with respect to a point and appear unchanged.

polar axis An initial ray from the pole in the polar coordinate system, usually horizontal and directed toward the right.

polar coordinates Describes the location of a point $P(r, \theta)$ in the polar coordinate system, where r is the directed distance from the pole O to the point and θ is the directed angle from the polar axis to $\overrightarrow{OP}$.

كسر جزئي عند كتابة دالة نسبية في صورة مجموع كسرين مقامهما عوامل خطية للمقام الأصلي، يكون كل كسر في المجموع كسراً جزئياً.

تفكيك كسري جزئي تعبير نسبي تعاد كتابته في صورة مجموع تعبيرين نسبيين في صورة أبسط.

مثلث باسكال مصفوفة ثلاثية الزوايا تتألف من أعداد بحيث تكون الأعداد الأولى والأخيرة في كل صف تساوي 1 ويتم تكوين كل عدد آخر عن طريق جمع عددين فوق ذلك العدد مباشرة في الصف السابق. يحتوي صف العدد $(n + 1)$ على معاملات فترات التمدد $(a + b)^n$ لـ $n = 0, 1, 2, \dots$.

رسم بياني مئوي تستخدم فيه القيم نفسها على أنها رسم بياني ذو تكرار نسبي تراكمي، إلا أن النسب يتم التعبير عنها بدلاً من ذلك بالنسب المئوية.

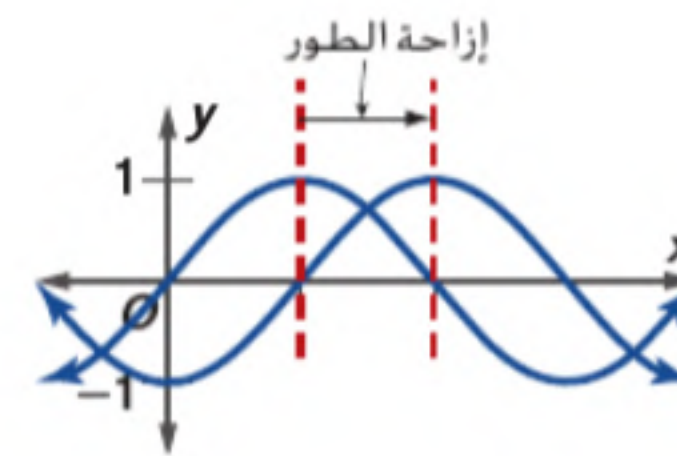
نسب مئوية ينقسم التوزيع إلى 100 مجموعة متساوية ويرمز لها بالرمز $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{99}$. نسبة مئوية للعدد n أو P_n هي القيمة بحيث يكون $n\%$ من البيانات أقل من P_n .

دورة بالنسبة إلى الدالة $y = f(t)$ أصغر عدد صحيح موجب هو c تكون فيه $f(t + c) = f(t)$.

دالة دورية دالة ذات قيم تتكرر على فترات زمنية منتظمة. يوجد بها عدد حقيقي موجب c بحيث تكون $f(t + c) = f(t)$ لجميع قيم t الموجودة في مجال f .

التباديل ترتيب الأشياء التي يكون الترتيب فيها مهماً.

إزاحة الطور بالنسبة إلى الدالة الجيبية، الفرق بين الموقع الأفقي لدالة ما وموقع دالة جيبية مشابهة بصورة مختلفة. بالنسبة إلى $y = a \cos (bx + c) + d$ و $y = a \sin (bx + c) + d$ ، إزاحة الطور $= -\frac{c}{|b|}$.



دالة محددة القطع دالة تحدد باستخدام تعبيرين أو أكثر لفترات مختلفة في المجال.

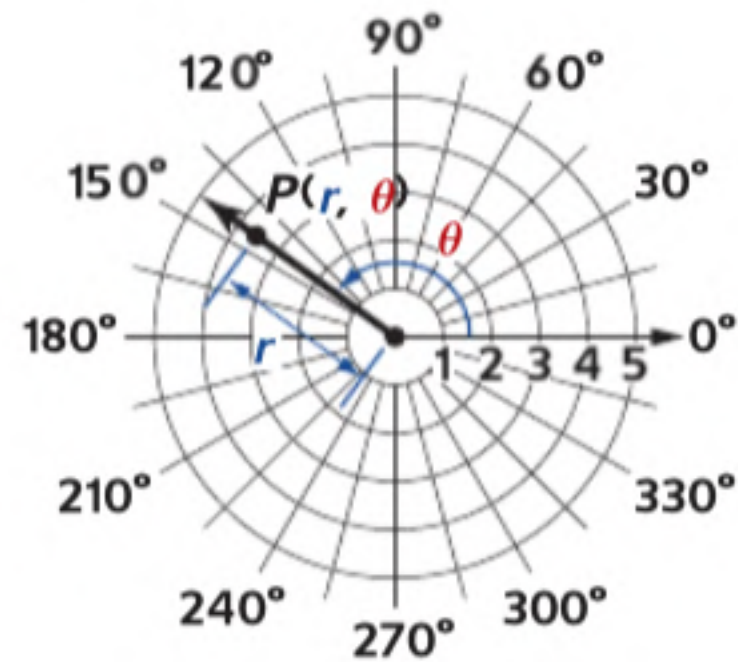
تقدير النقطة تقدير قيمة فردية لمعلمة مجتمع إحصائي مجهولة.

تناظر نقطي يوضح الرسوم البيانية التي يمكن تدويرها 180° درجة حول محورها بالنسبة إلى نقطة تبدو غير معدلة.

محور قطبي شعاع أولي ينطلق من القطب في النظام الإحداثي القطبي، ويكون عادة أفقياً ومتجهاً نحو اليمين.

إحداثيات القطب تصف موقع النقطة $P(r, \theta)$ في النظام الإحداثي القطبي، حيث يمثل r المسافة الموجهة من القطب O إلى النقطة وتمثل θ الزاوية الموجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

polar coordinate system A coordinate system in which the location of a point is identified by polar coordinates of the form (r, θ) , where r is the distance from the center, or the pole, to the given point and θ is the measure of the angle formed by the polar axis and a line from the pole through the point.



polar equation An equation expressed in terms of polar coordinates.

polar form The complex number $z = a + bi$ written as $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, where $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$, and $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ for $a > 0$, $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ for $a < 0$.

polar graph The set of all points with coordinates (r, θ) that satisfy a given polar equation.

pole The origin of the polar coordinate system, O .

polynomial function A function of the form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, where $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ are real numbers.

polynomial function of degree n $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, where n is a nonnegative integer and $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ are real numbers with $a_n \neq 0$.

polynomial inequality An inequality of the form $f(x) \leq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \neq 0$, $f(x) > 0$, or $f(x) \geq 0$, where $f(x)$ is a polynomial function.

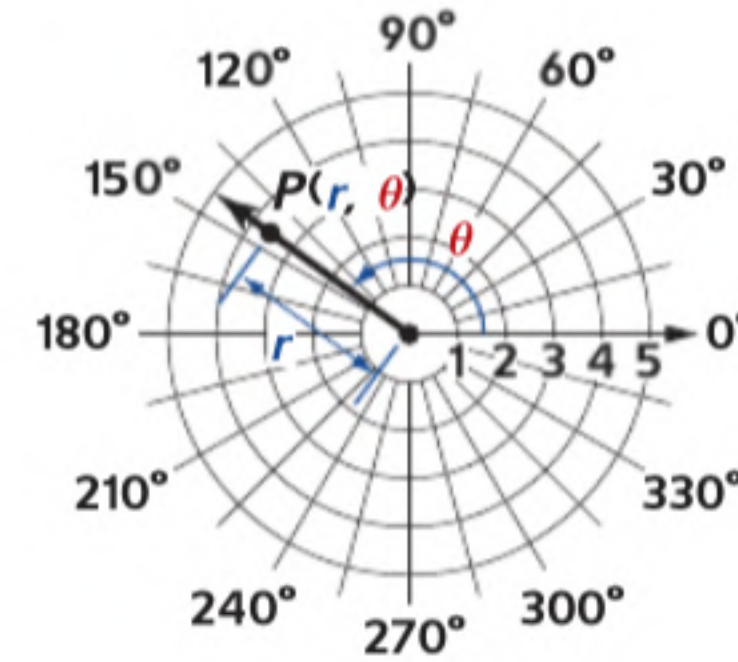
population An entire group of living things or objects.

positively skewed distribution In a data distribution, the mean is greater than the median, the majority of the data are on the left, and the tail extends to the right.

power function A function of the form $f(x) = ax^n$, where a and n are nonzero real numbers.

power series An infinite series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$, where x and a_n can take on any values for $n = 0, 1, 2, \dots$.

نظام إحداثي قطبي نظام إحداثي يتم فيه تحديد موقع نقطة ما بواسطة إحداثيات القطب للصورة (r, θ) ، حيث يمثل r المسافة الواصلة من المنتصف، أو القطب، إلى النقطة المعينة وتمثل θ قياس الزاوية المكونة بواسطة المحور القطبي والمستقيم المار من القطب عبر النقطة.



معادلة قطبية معادلة يعبر عنها باستخدام الإحداثيات القطبية.

صورة قطبية العدد المركب $z = a + bi$ وتكتب كما يلي $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a = r \cos \theta$ و $b = r \sin \theta$ $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ لـ $a > 0$ و $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ لـ $a < 0$.

رسم بياني قطبي مجموعة مكونة من كل النقاط ذات الإحداثيات (r, θ) التي تستوفي معادلة قطبية معينة.

قطب أصل النظام الإحداثي القطبي، O .

دالة كثيرة الحدود دالة تأخذ صورة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ حيث $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية.

دالة كثيرة الحدود من الدرجة n $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ حيث n عدد صحيح غير سالب $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ هي أعداد حقيقية و $a_n \neq 0$.

متباينة كثيرة الحدود متباينة تأخذ الصورة $f(x) \leq 0$ أو $f(x) < 0$ أو $f(x) \neq 0$ أو $f(x) > 0$ أو $f(x) \geq 0$ حيث $f(x)$ دالة كثيرة الحدود.

مجتمع إحصائي عبارة عن مجموعة كاملة من الأشياء أو الكائنات الحية.

توزيع ملتو إيجابي في توزيع البيانات، هو أن يكون المتوسط الحسابي أكبر من الوسيط، وتكون غالبية البيانات على الجانب الأيسر، ويمتد الذيل إلى الجانب الأيمن.

دالة أسية تأخذ الصورة $f(x) = ax^n$ حيث a و n أعداد حقيقية غير الصفر.

متسلسلة أسية متسلسلة لانهاية تأخذ الصورة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ حيث يمكن أن تأخذ x و a_n أي قيم لـ $n = 0, 1, 2, \dots$.

principal n th root The nonnegative n th root.

principle of mathematical induction Let P_n be a statement about a positive integer n . Then P_n is true for all positive integers n if and only if

- P_1 is true, and
- for every positive integer k , if P_k is true, then P_{k+1} is true.

probability distribution A table, equation, or graph that links each possible value for a random variable with its probability of occurring.

p th roots of unity Finding the p th roots of 1.

p -value The lowest level of significance at which H_0 can be rejected for a given set of data.

pure imaginary number An imaginary number $(a + bi)$, where $a = 0$.

جذر العدد n الرئيسي جذر العدد n غير السالب.

مبدأ الاستقراء الرياضي بافتراض أن P_n عدد صحيح موجب n . إذن، P_n حقيقي لجميع الأعداد الموجبة n في الحالات التالية فقط

- P_1 حقيقي
- لكل عدد صحيح موجب k ، إذا كان P_k صواباً، إذن P_{k+1} صواب.

توزيع الاحتمال جدول أو معادلة أو رسم بياني يربط كل قيمة موجبة لمتغير عشوائي باحتمالية حدوثه.

جذور p للوحدة إيجاد الجذور p للعدد 1.

قيمة p مستوى الدلالة الأدنى الذي يمكن عنده رفض H_0 لمجموعة معينة من البيانات.

عدد وهمي صرف عدد وهمي $(a + bi)$ ، حيث $a = 0$.

Q

quadrant bearing A directional measurement of a vector between 0° and 90° east or west of the north-south line.

quadrantal angle An angle in standard position that has a terminal side that lies on one of the coordinate axes.

quadratic equation A polynomial equation of degree two, in the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$.

quadratic form A polynomial expression that is written in the form $au^2 + bu + c$ for any numbers a , b , and c , where $a \neq 0$ and u is some expression in x .

Quadratic Formula The solutions of a quadratic equation of the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$, are given by the Quadratic Formula, which is

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

quadratic function A function of the form $f(x) = ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$, with parent function $f(x) = x^2$.

quartic function A function that contains a fourth-degree polynomial.

quartiles The values that divide a set of data into four equal parts.

اتجاه ربعي هو قياس اتجاهي لمتجه ما بين 0° و 90° درجة شرق المستقيم المنطلق من الشمال إلى الجنوب أو غربه.

زاوية ربعية هي زاوية في موقع قياسي لديها جانب طرفي يقع على أحد محاور الإحداثيات.

معادلة تربيعية معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية، في الصورة $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$.

صورة تربيعية تعبير كثير الحدود يكتب في صورة $au^2 + bu + c$ لأي أعداد a ، b ، و c ، حيث $a \neq 0$ و u تمثل بعض التعبيرات في x .

صيغة تربيعية الحلول المحددة لمعادلة تربيعية في الصورة $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ ، معطاة بواسطة الصيغة التربيعية، وهي

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

دالة تربيعية دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ ، باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = x^2$.

دالة رباعية الدالة التي تحتوي على حدود من الدرجة الرابعة.

ربيعيات قيم تقسم مجموعة من البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.

R

radians A unit of angular measurement equal to $\frac{180^\circ}{\pi}$ or about 57.296° .

قياس دائري (راديان) وحدة قياس زاوية تساوي $\frac{180^\circ}{\pi}$ أو حوالي 57.296° درجة.

radical function A function that can be written as $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$, where n and p are positive integers greater than 1 that have no common factors.

random variable Represents a numerical value assigned to an outcome of a probability experiment.

range The difference between the greatest and least values in a set of data.

rational function A function of the form $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$, where $a(x)$ and $b(x)$ are polynomial functions, and $b(x) \neq 0$.

rational inequality An inequality that contains one or more rational expressions.

Rational Zero Theorem Describes how the leading coefficient and constant term of a polynomial function with integer coefficients can be used to determine a list of all possible rational zeros.

real axis The horizontal axis of a complex plane on which the real component of a complex number is graphed.

real part In an imaginary number $a + bi$, a is the real part.

reciprocal function 1. A function of the form $f(x) = \frac{1}{a(x)}$, where $a(x)$ is a linear function and $a(x) \neq 0$, with parent function $f(x) = \frac{1}{x}$. 2. Trigonometric functions that are reciprocals of each other.

rectangular components Horizontal and vertical components of a vector.

recursive formula A formula used to determine the n th term of a sequence using one or more of the preceding terms.

reduced row-echelon form An augmented matrix in which the first nonzero element of each row of the coefficient portion of the matrix is 1 and the rest of the elements in the same column as this element are 0.

reduction identity An identity that results when a sum or difference identity is used to rewrite a trigonometric expression in which one of the angles is a multiple of 90° or $\pi/2$ radians.

reference angle The acute angle formed by the terminal side of an angle in standard position and the x -axis.

reflection A transformation in which a mirror image of the graph of a function is produced with respect to a specific line.

regression line A line drawn through a set of data points that describes how the response variable y changes as the explanatory variable x changes. Also called a **line of best fit**.

دالة جذرية الدالة التي يمكن كتابتها في صورة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$ ، حيث n و p أعداد صحيحة موجبة أكبر من العدد 1 الذي ليس له أي عوامل مشتركة.

متغير عشوائي يمثل قيمة عددية معينة إلى نتيجة من نتائج تجربة الاحتمال.

مدى الفرق بين القيم الأكبر والأصغر في مجموعة من البيانات.

دالة نسبية دالة تأخذ الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ و $b(x)$ دوال كثيرة الحدود، و $b(x) \neq 0$.

متباينة نسبية هي متباينة تحتوي على واحد أو أكثر من التعبيرات النسبية.

نظرية الصفر النسبي توضح كيف يمكن استخدام المعامل الأساسي والحد الثابت لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

محور حقيقي المحور الأفقي لمستوى مركب يتم رسم المركب الحقيقي لعدد مركب عليه بيانياً.

جزء حقيقي في العدد التخيلي $a + bi$ يمثل a الجزء الحقيقي.

دالة عكسية 1. دالة تأخذ الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث يمثل $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$. باستخدام الدالة الأصلية

2. $f(x) = 1 - x$. الدوال المثلثية التي تتبادل مع بعضها البعض.

مركبات متعامدة هي مركبات المتجه الأفقية والرأسية.

صيغة تكرارية هي الصيغة المستخدمة لتحديد الحد n للمتتالية باستخدام حد أو أكثر من الحدود السابقة.

صورة مستوى صف منخفض عبارة عن مصفوفة زائدة يساوي فيها العنصر الأول غير الصفري لكل صف من جزء معامل المصفوفة العدد 1 وتساوي باقي العناصر في العمود نفسه الموجود فيه هذا العنصر العدد 0.

متطابقة انخفاض هي متطابقة تنتج عند استخدام متطابقة المجموع أو الفرق لإعادة كتابة التعبير المثلثي الذي تساوي فيه إحدى الزوايا حاصل الضرب في 90° أو $\pi/2$ راديان.

زاوية إسناد هي الزاوية الحادة المكونة بواسطة الجانب الطرقي لزاوية ما في موقع قياسي وعلى المحور الأفقي x .

انعكاس عملية تحول يتم فيها إنشاء صورة طبق الأصل من الرسم البياني لدالة ما بالنسبة إلى مستقيم معين.

خط انحدار هو خط مرسوم من خلال مجموعة من نقاط البيانات التي توضح كيف يتغير متغير الاستجابة y كلما يتغير المتغير التفسيري x . يطلق عليه أيضاً المستقيم الأفضل تمثيلاً.

regular partition In the area under the graph of a function, an interval that is subdivided into equal subintervals.

relative frequency In a frequency table, the frequency of occurrence for each data value.

relevant domain In a function, the part of the domain that is relevant to a model.

removable discontinuity A characteristic of a function in which the function is continuous everywhere except for a hole at $x = c$.

repeated zero The related zero c of a function when a factor $(x - c)$ occurs more than once in the completely factored form of $f(x)$.

residual The difference between an observed y -value of a data point and its predicted y -value on a regression line.

residual plot A scatter plot of the residuals in which the horizontal line at zero corresponds to the regression line.

resistant statistic A statistic that is not highly affected by the presence of outlying data values.

response variable The dependent variable y in bivariate data.

resultant A single vector that results when two or more vectors are added.

right Riemann sum A method for approximating the area under a curve by using the values at the right endpoints.

right-tailed test The hypothesis test if $H_a: \mu > k$.

root For a function $f(x)$, a solution of the equation $f(x) = 0$.

rose The graph of a polar equation of the form $r = a \cos n\theta$ or $r = a \sin n\theta$, where $n \geq 2$ is an integer.

row-echelon form A matrix is in row-echelon form if the following conditions are met.

- Rows of all zeros (if any) appear at the bottom of the matrix.
- The first nonzero entry in any row is 1.
- For two successive rows with nonzero entries, the leading 1 in the higher row is farther to the left than the leading 1 in the lower row.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

تجزئة منتظمة في المساحة الموجودة أدنى الرسم البياني للدالة، هي المسافة المقسومة إلى جزأين متساويين.

تكرار نسبي في جدول التكرار، يمثل عدد مرات تكرار كل قيمة من قيم البيانات.

مجال نسبي في دالة ما، يمثل الجزء من المجال المتعلق بالنموذج.

انفصال قابل للإزالة ميزة في دالة ما تكون فيها الدالة متواصلة أيًا كانت باستثناء فجوة في $x = c$.

صفر متكرر الصفر c الذي له صلة بالدالة حيث يتكرر العامل $(x - c)$ أكثر من مرة في النموذج المحلل تحليلًا كاملاً $f(x)$.

قيمة متبقية الفرق بين قيمة y الملاحظة في نقطة البيانات وقيمة y المتوقعة على خط الانحدار.

رسم بياني لقيمة متبقية الرسم البياني المتفرق للقيم المتبقية يتطابق فيه المستقيم الأفقي عند الصفر مع خط الانحدار.

قيمة إحصائية مقاومة هي قيمة إحصائية لا تتأثر كثيرًا بوجود قيم البيانات البعيدة عن المركز.

متغير الاستجابة المتغير التابع y في البيانات ذات المتغيرين.

محصلة المتجه الفردي الناتج عن إضافة متجهين أو أكثر.

مجموع ريمان يميني طريقة لتقريب المساحة التي تقع أدنى المنحنى باستخدام القيم الموجودة في نقاط النهاية اليمنى.

اختبار الذيل الأيمن اختبار الفرضية إذا كان $H_a: \mu > k$.

جذر بالنسبة إلى الدالة $f(x)$ ، يمثل حل المعادلة $f(x) = 0$.

منحنى وردي الرسم البياني للمعادلة القطبية التي تأخذ الصورة $r = a \cos n\theta$ أو $r = a \sin n\theta$ ، حيث $n \geq 2$ عدد صحيح.

نموذج مستوى الصف مصفوفة في نموذج مستوى الصف في حال استيفاء الشروط التالية.

- ظهور الصفوف التي تحتوي على جميع الأصفار (إن وجدت) أسفل المصفوفة.
- أن يكون أول مدخل غير صفري في أي صف من الصفوف هو العدد 1.
- بالنسبة إلى الصفين المتتاليين ذوي الإدخالات غير الصفرية، يكون العدد 1 الأساسي في الصف الأعلى أبعد من العدد 1 الأساسي في الصف الأدنى ناحية اليسار.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

row matrix A matrix that has only one row.

مصفوفة الصف المصفوفة التي تحتوي على صف واحد فقط.

sample A part of a population.

عينة جزء من مجتمع إحصائي.

sample correlation coefficient A measure that determines the type and strength of the linear relationship between the variables in bivariate data that represent a sample of the population.

معامل ارتباط العينة مقياس يحدد نوع العلاقة الخطية وقوتها بين المتغيرات في البيانات ذات المتغيرين التي تمثل عينة المجتمع الإحصائي.

sampling distribution A distribution of the means of random samples of a certain size that are taken from a population.

توزيع أخذ العينات توزيع متوسطات حسابية للعينات العشوائية محددة الحجم المأخوذة من المجتمع الإحصائي.

sampling error Occurs when a sample is not a complete representation of the population and causes differences between sample means and the population mean.

خطأ أخذ العينات يحدث هذا الخطأ إذا لم تمثل العينة المجتمع الإحصائي تمثيلاً كاملاً مما ينتج عنها تباينات بين متوسطات العينة ومتوسط المجتمع الإحصائي.

sample space The set of all possible outcomes of an experiment.

الفضاء العيني مجموعة النتائج المحتملة للتجربة.

scalar A constant.

كمية عددية الكمية الثابتة.

secant In a right triangle with acute angle θ , the ratio comparing the length of the hypotenuse to the side adjacent to θ . It is the reciprocal of the cosine ratio, or $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$.

قاطع في المثلث قائم الزاوية التي تكون إحدى زواياه زاوية حادة θ . هو النسبة بين طول الوتر والضلع المجاور للزاوية θ . هو المعكوس الضربي لنسبة جيب التمام. أو $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$.

secant line The line through two points on a curve.

مستقيم قاطع الخط المار بين نقطتين في المنحنى.

second differences Differences that are found by subtracting consecutive first differences from one another.

فروق ثانية الفروق الناتجة من طرح الفروق الأولى المتتالية من بعضها بعضاً.

sector In a circle, the region bounded by a central angle and its intercepted arc.

قطاع في الدائرة، هو المنطقة المحصورة بين الزاوية المركزية وقوسها المحصور.

sequence An ordered list of numbers.

متتالية قائمة متسلسلة من الأرقام.

series The sum of all the terms of a finite or infinite sequence.

متسلسلة مجموع حدود المتتالية النهائية أو اللانهائية.

set A collection of objects or numbers, often shown using braces { } and usually named by a capital letter.

مجموعة مجموعة من الأشياء أو الأرقام التي تظهر غالباً بين قوسين { } وعادة ما يكتب اسمها بحروف كبيرة.

set-builder notation An expression that describes a set of numbers by using the properties of numbers in the set to define the set, for example $\{x \mid x \geq 8, x \in \mathbb{W}\}$.

ترميز بناء مجموعة الحل تعبير يصف مجموعة الأعداد من خلال استخدام خصائص الأعداد في المجموعة لتحديدها. على سبيل المثال، $\{x \mid x \geq 8, x \in \mathbb{W}\}$.

sigma notation For any sequence $a_1, a_2, a_3, \dots$, the sum of the first k terms is denoted $\sum_{n=1}^k a_n$ which is read **the summation from $n = 1$ to k of a_n** .

Thus $\sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$ where k is an integer value.

الرمز سيجمما بالنسبة لأي متتالية $a_1, a_2, a_3, \dots$ ، يرمز إلى مجموع حدود k الأولى بـ $\sum_{n=1}^k a_n$ ، ويقرأ صيغة الجمع $n = 1$ إلى k من a_n . وبالتالي $a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$ حيث k قيمة عدد صحيح.

sign chart Used to determine on which intervals a polynomial function is positive or negative.

مخطط العلامات يستخدم ليحدد على أي الفترات تكون الدالة كثيرة الحدود موجبة أم سالبة.

sine In a right triangle with acute angle θ , the ratio comparing the length of the side opposite θ and the hypotenuse.

singular matrix A matrix that does not have an inverse.

sinusoid Any transformation of a sine function. The general forms of sinusoidal functions are $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$ where a , b , c , and d are constants and neither a nor b is 0.

solve a right triangle To find the measures of all of the sides and angles of a right triangle.

spiral of Archimedes The graph of a polar equation of the form $r = a\theta + b$.

square matrix A matrix with the same number of rows and columns.

square root function A function that contains a square root of the independent variable, with parent function $f(x) = \sqrt{x}$.

square system A system of linear equations that has the same number of equations as variables.

standard deviation The average amount by which individual items deviate from the mean of all the data found by taking the square root of the variance and represented by σ .

standard error of the mean The standard deviation of the sample means, given by $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

standard form A complex number written in the form of $a + bi$.

standard normal distribution A normal distribution of z -values with a mean of 0 and a standard deviation of 1.

standard position 1. In the coordinate plane, an angle positioned so that its vertex is at the origin and its initial side is along the positive x -axis. 2. A vector that has its initial point at the origin.

statistics The science of collecting, analyzing, interpreting and presenting data.

step function A piecewise-defined function in which the graph is a series of line segments that resemble a set of stairs.

subset If every element of set B is contained in set A , then B is a subset of A .

substitution method A method of solving a system of equations in which one equation is solved for one variable in terms of the other.

جيب الزاوية في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ . يمثل نسبة المقارنة طول الضلع المقابل للزاوية θ والوتر.

مصفوفة منفردة المصفوفة التي ليس لها معكوس.

منحنى الجيب أي تحويل في دالة جيب الزاوية. إن الصيغ العامة لدوال منحنى الجيب هي $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$ حيث a و b و c و d أعداد ثابتة ولا يساوي a أو b 0.

حل مثلث قائم الزاوية لإيجاد مقاييس كل أضلاع المثلث قائم الزاوية وزواياه.

حلزون أرشميدس التمثيل البياني لمعادلة قطبية للصيغة $r = a\theta + b$.

مصفوفة مربعة مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

دالة الجذر التربيعي الدالة التي تحتوي على الجذر التربيعي للمتغير المستقل. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = \sqrt{x}$.

نظام تربيعي نظام معادلات خطية يحتوي على معادلات بنفس عدد المتغيرات.

انحراف معياري متوسط المقدار الذي من خلاله تنحرف العناصر الفردية من المتوسط الحسابي لجميع البيانات التي يتم إيجادها عن طريق أخذ الجذر التربيعي للتباين ويعبر عنه بالرمز σ .

خطأ معياري للمتوسط الحسابي الانحراف المعياري لمتوسطات العينة. ويتم الحصول عليه عن طريق $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

صيغة قياسية عدد مركب يكتب بالصيغة $a + bi$.

توزيع طبيعي قياسي توزيع طبيعي لقيم z باستخدام متوسط حسابي 0 وانحراف معياري 1.

موقع قياسي 1. في المستوى الإحداثي، يتم تحديد موقع الزاوية بحيث يكون رأسها عند نقطة الأصل وضلعها الابتدائي على امتداد المحور السيني الموجب. 2. المتجه الذي تكون نقطته الابتدائية عند نقطة الأصل.

إحصاء العلم الذي يهتم بجمع البيانات وتحليلها وتفسيرها وتمثيلها.

دالة درجية دالة متعددة التعريف يكون فيها التمثيل البياني عبارة عن تسلسل من القطع المستقيمة التي تشبه مجموعة من الدرجات.

مجموعة فرعية بما أن كل عنصر في المجموعة B يوجد داخل المجموعة A ، فإن B تعد مجموعة فرعية من المجموعة A .

طريقة التعويض طريقة لحل نظام المعادلات الذي يتم فيه حل معادلة واحدة لمتغير واحد بدلالة الآخر.

symmetrical distribution In a data distribution, the data are evenly distributed on both sides of the mean.

synthetic division A shortcut for dividing a polynomial by a linear factor of the form $x - c$.

synthetic substitution The use of synthetic division to evaluate a function.

system of equations A set of equations with the same variables.

system of inequalities A set of inequalities with the same variables.

توزيع متماثل في توزيع البيانات، تكون البيانات موزعة بالتساوي على كلا جانبي المتوسط الحسابي.

قسمة تركيبية طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي للصيغة $x - c$.

تعويض تركيبى استخدام القسمة التركيبية لتقييم دالة معينة.

نظام المعادلات مجموعة المعادلات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

نظام المتباينات مجموعة المتباينات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

T

tangent 1. A line that intersects a circle at exactly one point.
2. In a right triangle with acute angle θ , the ratio comparing the length of the side opposite θ and the side adjacent to θ .

tangent line The tangent line to $f(x)$ at x is the line passing through the point $(x, f(x))$ with slope m , where $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

t-distribution A family of curves that are dependent on a parameter known as the **degrees of freedom**.

term 1. The monomials that make up a polynomial. 2. Each number in a sequence or series.

terminal point The ending point of a vector that is represented by a directed line segment. Also known as the **head** or **tip** of the vector.

terminal side The final position of a ray after rotation when forming an angle.

three-dimensional coordinate system A coordinate system formed by three perpendicular number lines, the x -, y -, and z -axes, that intersect at the origin O . Each point is represented by an ordered triple of real numbers (x, y, z) .

torque A vector quantity that measures how effectively a force applied to a lever causes rotation along the axis of rotation.

transcendental function A function that cannot be expressed in terms of algebraic operations, such as an exponential or logarithmic function.

transformation A change in the position or shape of the graph of a parent function.

translation A rigid transformation that has the effect of shifting the graph of a function

transverse axis The segment that has a length of $2a$ units and connects the vertices of a hyperbola.

triangle method A method of finding the resultant vector by translating one vector so that its tail touches the tip of another. The resultant vector is drawn to form a triangle.

مماس 1. خط يتقاطع مع دائرة عند نقطة واحدة بالضبط. 2. في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ ، فإنه يمثل النسبة التي تقارن بين طول الضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور للزاوية θ .

خط المماس الخط الملامس لـ $f(x)$ عند x هو الخط المار عبر النقطة $(x, f(x))$ مع الميل، حيث

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

توزيع مجموعة من المنحنيات التي تعتمد على معلمة تعرف بـ **درجات الحرية**.

حد 1. أحادييات الحد التي تشكل دالة كثيرة الحدود. 2. كل عدد في متسلسلة.

نقطة طرفية هي نقطة النهاية لمتجه يتم تمثيلها بواسطة قطعة مستقيمة موجهة. تعرف أيضا باسم رأس أو قمة المتجه.

ضلع الانتهاء موقع نهاية الشعاع بعد الدوران عند تكوين زاوية ما.

نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد نظام إحداثي يتكون من ثلاثة خطوط أعداد متعامدة، هي المحاور x و y و z ، والتي تتقاطع عند الأصل O . ويمثل كل نقطة مجموعة أعداد مرتبة ثلاثية العناصر وهي (x, y, z) .

عزم الدوران كمية متجهة تقيس مدى تأثير القوة المبذولة على العتلة للدوران حول محور الدوران.

دالة متسامية دالة لا يمكن التعبير عنها في صورة عمليات جبرية، مثل الدالة الأسية أو اللوغاريتمية.

تحويل تغير في موقع أو شكل التمثيل البياني للدالة الأصلية.

انسحاب تحويل غير مرّن يؤثر على إزاحة التمثيل البياني للدالة

محور قاطع قطعة طولها $2a$ تصل رؤوس القطع الزائد.

طريقة المثلث طريقة لإيجاد متجه محصل عن طريق سحب متجه واحد بحيث يلامس ذيله قمة المتجه الآخر. ويرسم المتجه المحصل بحيث يكون شكل مثلث.

trigonometric form See *polar form*.

trigonometric function Let θ be an acute angle in a right triangle and opp, adj, and hyp are the lengths of the side opposite θ , the side adjacent to θ , and the hypotenuse, respectively. Then the trigonometric functions of θ are defined below.

$$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$



trigonometric identity An equation that involves trigonometric functions that is true for all values of the variable.

trigonometric ratios Ratios that are formed using the side measures of a right triangle and a reference angle θ .

triple scalar product If $t = t_1i + t_2j + t_3k$, $u = u_1i + u_2j + u_3k$, and $v = v_1i + v_2j + v_3k$, the triple scalar product

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

A triple scalar product of vectors represents the volume of a parallelepiped.

true bearing A directional measurement of a vector where the angle is measured clockwise from north.

turning point A point on the graph of a function that indicates where the graph changes from increasing to decreasing, or vice versa. The location of a relative maximum or minimum.

two-sided limit The limit of $f(x)$ as x approaches c from the left and from the right, which exists only when both one-sided limits exist and are equal.

two-tailed test The hypothesis test if $H_a: \mu \neq k$.

صيغة مثلثية انظر صيغة قطبية.

دالة مثلثية لنفرض أن θ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية وأن opp وadj هي أطوال الضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور للزاوية θ والوتر، على التوالي. فعندئذٍ تعرّف الدوال المثلثية للزاوية θ كما يلي.

$$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$$



متطابقة مثلثية معادلة تحتوي على دوال مثلثية حقيقية لجميع قيم المتغير.

نسب مثلثية النسب التي تتكوّن باستخدام قياسات الأضلاع لمثلث قائم الزاوية وزاوية استناد θ .

حاصل ضرب قياسي لثلاثة متجهات بما أن $t = t_1i + t_2j + t_3k$, $u = u_1i + u_2j + u_3k$ و $v = v_1i + v_2j + v_3k$ إذن يتم الحصول على حاصل الضرب

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

القياسي لثلاثة متجهات عن طريق يمثل حاصل الضرب القياسي لثلاثة متجهات حجم متوازي السطوح.

اتجاه حقيقي قياس اتجاهي لمتجه بحيث يتم قياس الزاوية باتجاه عقارب الساعة من الشمال.

نقطة الدوران نقطة على التمثيل البياني لدالة وهي تشير إلى مكان تغير التمثيل البياني من التزايد إلى التناقص أو العكس. موقع الحد الأقصى أو الأدنى النسبي.

حد ثنائي هو حد $f(x)$ حيث x يقترب من c من ناحية اليسار واليمين، وينتج فقط عن وجود حدين أحاديين متساويين.

اختبار ثنائي الذيل اختبار الفرضية إذا كان $H_a: \mu \neq k$.

U

unbounded A region formed by a system of linear inequalities in a linear programming problem that is not a polygon.

union The union of sets A and B is all elements in both A and B , written as $A \cup B$.

غير محدود منطقة تنتج عن نظام من المتباينات الخطية في مسألة برمجة خطية ولا تكون مضلعاً.

ربط اتحاد المجموعتين A و B بحيث يشمل كل العناصر الموجودة في كل من A و B ، ويكتب بالصيغة $A \cup B$.

unit circle A circle of radius 1 centered at the origin of a coordinate system.

دائرة الوحدة دائرة نصف قطرها يساوي 1 ويكون مركزها عند نقطة أصل النظام الإحداثي.

unit vector A vector that has a magnitude of 1 unit.

متجه الوحدة متجه طوله وحدة طولية واحدة .

univariate data Data with one variable.

بيانات أحادية المتغير بيانات تتكون من متغير واحد.

universal set The set of all possible elements for a situation.

مجموعة شاملة المجموعة التي تشمل كل العناصر المحتملة لحالة ما.

upper bound A real number b that is greater than or equal to the greatest real zero of a polynomial function.

حد أعلى عدد حقيقي b أكبر من أو يساوي أكبر صفر حقيقي لدالة كثيرة الحدود.

upper limit The upper bound of a definite integral.

الحد الأعلى الحد الأعلى لتكامل محدد.

V

variance The mean of the squares of the deviations from the arithmetic mean.

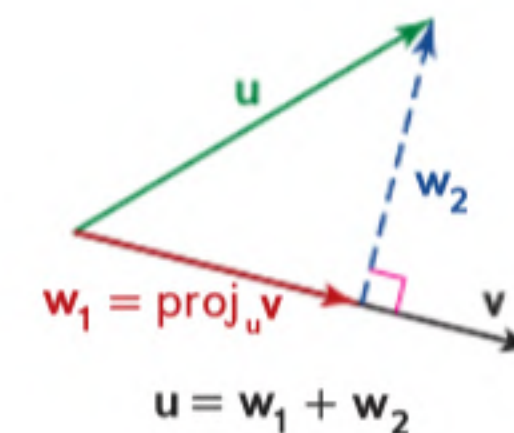
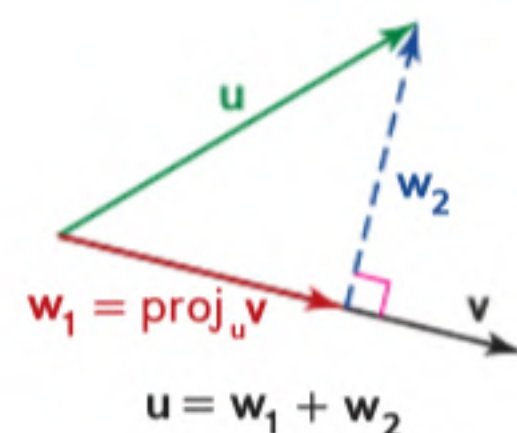
تباين متوسط مربعات الانحرافات من المتوسط الحسابي.

vector A quantity that has both magnitude and direction.

متجه كمية لها مقدار واتجاه.

vector projection Let u and v be nonzero vectors, and let w_1 and w_2 be vector components of u such that w_1 is parallel to v . Then vector w_1 is called the vector projection of u onto v , denoted $\text{proj}_v u$, and $\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) v$.

مسطح المتجه لنفرض أن u و v متجهان غير صفريين، وأن w_1 و w_2 مكونا المتجه u بحيث يكون w_1 موازيًا لـ v . عندئذ يسمى المتجه w_1 مسطح المتجه u على v . ويشار إلى ذلك بـ $\text{proj}_v u$ و $\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) v$.



verify an identity To prove that both sides of the equation are equal for all values of the variable for which both sides are defined.

إثبات صحة المعادلة إثبات أن كلا طرفي المعادلة متساويان في جميع قيم المتغيرات المحدد لها كلا الطرفين.

vertex 1. The common endpoint of two or more noncollinear rays. 2. A point at which a parabola intersects its axis of symmetry. 3. The two endpoints of the major axis of an ellipse.

رأس نقطة النهاية المشتركة لشعاعين أو أكثر ليسا على نفس الخط. 2. نقطة يتقاطع عندها القطع المكافئ مع محور تماثله. 3. نقطتا نهاية المحور الأكبر لقطع ناقص.

vertical asymptote The line $x = c$ is a vertical asymptote of the graph of f if $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ or $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$.

خط مقارب رأسي يكون المستقيم $x = c$ خطًا مقاربًا رأسيًا للتمثيل البياني لـ f إذا كان $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$.

vertical shift For a sinusoidal function, a vertical translation that is the average of the maximum and minimum values of the function.

إزاحة رأسية بالنسبة إلى الدالة الجيبية، تكون الإزاحة هي الانسحاب الرأسية الذي يمثل متوسط القيم القصوى والدنيا للدالة.

vertices The endpoints of the major axis of an ellipse.

رؤوس نقاط نهاية المحور الأكبر لقطع ناقص.

W

work If a constant force F acts on an object to move it from point A to point B , then the work done equals the dot product of the constant force F and the directed distance $\vec{AB}$, or $F \cdot \vec{AB}$.

شغل إذا كانت القوة الثابتة F مبدولة على جسم ما لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B . فإن الشغل المبذول يساوي حاصل الضرب النقطي للقوة الثابتة F والمسافة الموجهة $\vec{AB}$ أو $\vec{AB} \cdot F$.

Z

zeros The x -intercepts of the graph of a function.

أصفار التقاطع مع المحور الأفقي x على التمثيل البياني للدالة.

zero function The function sometimes known as the zero function is the constant function with constant $c = 0$. In other words, $f(x) = 0$.

دالة صفرية تعد الدالة التي تعرف أحيانًا بالدالة الصفرية دالة ثابتة $c = 0$. بمعنى أن $f(x) = 0$.

zero matrix A matrix in which every element is zero.

مصفوفة صفرية المصفوفة التي يساوي كل عنصر فيها صفرًا.

zero vector The resultant when two opposite vectors are added, has a magnitude of 0 and no specific direction. Also called the *null* vector, denoted by $\vec{0}$ or 0 .

متجه صفر هو المتجه المحصلة الذي ينتج عن جمع متجهين متقابلين، وتكون وحدته الطولية 0 ولا يكون له اتجاه معين. ويعرف أيضا بالمتجه المنعدم ويشار إليه بالرمز 0 أو $\vec{0}$.

z-axis a third axis in a three-dimensional coordinate system that passes through the origin and is perpendicular to both the x - and y -axes.

محور z المحور الثالث في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد ويمر عبر نقطة الأصل ويكون متعامدًا على كل من المحور السيني والمحور الصادي.

z-value Represents the number of standard deviations that a given data value is from the mean. Also known as the *z-score* and *z test statistic*.

قيمة z تمثل عدد الانحرافات المعيارية التي تحصل عليها قيمة بيانات محددة من المتوسط الحسابي. وتُعرف أيضًا باسم درجة z وإحصاء اختبار z .

نسخة الطلاب

شكر وتقدير

vi (tl)McGraw-Hill Education,
 (tr)McGraw-Hill Education, (bl)
 McGraw-Hill Education, (br)Mc-
 Graw-Hill Education; vii (tl)Mc-
 Graw-Hill Education, (tr)McGraw-Hill
 Education, (bl)McGraw-Hill Educa-
 tion, (br)McGraw-Hill Education;
 viii bezergheanu mircea/Alamy; ix
 Maciej Bledowski/Alamy; x Gregg
 Vignal/Alamy; xi Ton Kinsbergen/
 Science Source; xii David Schaffer/
 Age Fotostock; xiii Ingram Pub-
 lishing; xiv sydeen/[Shutterstock.](https://www.shutterstock.com)
[com](https://www.shutterstock.com); 406 Ingram Publishing; 413
 zimmytws/[Shutterstock.com](https://www.shutterstock.com); 418 (l)
 Henryk Sadura/[Shutterstock.com](https://www.shutterstock.com),
 (r) Ritu Manoj Jethani/[Shutterstock.](https://www.shutterstock.com)
[com](https://www.shutterstock.com); 419 (l) ©Photographs in the
 Carol M. Highsmith Archive, Library
 of Congress, Prints and Photographs
 Division, (r) Kiev.Victor/[Shutterstock.](https://www.shutterstock.com)
[com](https://www.shutterstock.com); 429 Ablestock/Alamy; 458
 Drpixel/Shutterstock; 466 o10/[Shut-](https://www.shutterstock.com)
[terstock.com](https://www.shutterstock.com); 484 sydeen/[Shutter-](https://www.shutterstock.com)
[stock.com](https://www.shutterstock.com);

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم
اقتراح - استفسار - شكوى



80051115



04-2176855



ccc.moe@moe.gov.ae



www.moe.gov.ae

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم. لايسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو جزء منه أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات، أو نقله بأي شكل من الأشكال، من دون إذن مسبق من الناشر.