الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

2018 - 2019

10

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة

Mc Graw Hill Education

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة

Mc Graw Hill Education

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 10 Advanced Math Vol.3
FM. , from Integrated Math 1
10. Rational Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter 8 © 2014
11. Trigonometric Functions, from Algebra 2 Chapter 12 © 2014
12. Trigonometric Identities and Equations, from Algebra 2 Chapter 13 © 2014
13. Sequences and Series, from Algebra 2 Chapter 10 © 2014
EM. , from Integrated Math 1

صورة الغلاف: hunthomas/Shutterstock.com

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2019 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-52-688228-8 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-688228-0 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-688230-1 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-688230-2 (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-52-688232-5 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-688232-9 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-688234-9 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-688234-5 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

"يجب التزوُّد بالعلوم الحديثة والمعارفِ الواسعة، والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال
الألفيّة الثّالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة."

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

ملخص المحتويات

الوحدة 1 الأنظمة الخطية والمصفوفات

الوحدة 2 الدوال والعلاقات التربيعية

الوحدة 3 كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

الوحدة 4 الدوال والمعادلات العكسية والجذرية

الوحدة 5 الدوائر

الوحدة 6 التحويلات الهندسية والتناظر

الوحدة 7 الاحتمالات والقياس

الوحدة 8 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

الوحدة 9 الدوال والعلاقات النسبية

الوحدة 10 الدوال المثلثية

الوحدة 11 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 12 المتتاليات والمتسلسلات

كتيب الطالب

Chapter Sourced From Integrated Math 1 McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

المؤلفون

يضمن مؤلفونا الرئيسون أن تكون برامج McGraw-Hill للرياضيات مخططة بشكل رأسي بطريقة متوافقة من خلال البدء مع الاخذ في الاعتبار الغاية النهائية – ألا وهي تحقيق النجاح واجتياز المرحلة الثانوية ومايليها من مراحل. ونظرًا لعملية "التخطيط العكسي" لمحتوى برامج المدارس الثانوية، فإن جميع برامج الرياضيات لدينا واضحة المعالم من حيث نطاقها وتسلسلها.

المؤلفون الرئيسون

ج. أ. كارتر، حاصل على درجة الدكتوراه

مدير
مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية
لينكولنشاير، إلينوي

جوانب الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية اليدوية لتصور المفاهيم. تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية

جلبرت ج. كوفاس، حاصل على درجة الدكتوراه

أستاذ في تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس – سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

جوانب الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية
ثرية. عمليات التمثيل الرياضية. استخدام التكنولوجيا في تنمية التفكير الهندسي

روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه وشهادة المجلس الوطني

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاون شيب الثانوية
بونتياك، إلينوي
جوانب الخبرة: فهم الإحصاء والاحتمالات وتطبيقهما. تعليم معلمي الرياضيات

كارول مالوي، حاصلة على درجة الدكتوراه

أستاذ مساعد فخري
جامعة ولاية كارولينا الشمالية في تشابيل هيل
تشابيل هيل، كارولينا الشمالية

جوانب الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي. رعاية نجاح الطلاب في الجبر 1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مؤلفو البرنامج

د. بيرتشي هوليداي، حاصلة على درجة الدكتوراه في التعليم
مستشارة قومية للرياضيات
سيلفر سبرينج، ميريلاند

جوانب الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة بيانات الحياة اليومية وفهمها. تأثير الرسومات على الفهم الرياضي

روث كاسي
مستشار رياضيات
مساعدة معلم محلية
جامعة كنتاكي
ليكسينجتون، كنتاكي

جوانب الخبرة: تقنية التمثيل البياني والرياضيات

المؤلفون المشاركون

دينا زايك المطبوعات
مستشارة تعليمية
مؤسسة Dinah-Might Activities, Inc.
سان أنطونيو، تكساس

جاي ماك تاي
مؤلف ومستشار تعليمي
كولومبيا، ميريلاند

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستشاريون والمراجعون

كان لهؤلاء الخبراء أبلغ الأثر في تقديم مدخلات واقتراحات قيمة لتحسين مدى فعالية تعليم الرياضيات.

الاستشاريون الرئيسون

فايكن هوفيسبيان
أستاذ رياضيات
كلية ريو هوندو
ويتير، كاليفورنيا

الاستشاريون

محتوى الرياضيات

جرانت أ. فريزر، حاصل على درجة الدكتوراه
أستاذ رياضيات
جامعة ولاية كاليفورنيا، لوس أنجلوس
لوس أنجلوس، كاليفورنيا

آرثر ك. وايمان، حاصل على درجة الدكتوراه
أستاذ رياضيات فخري
جامعة ولاية كاليفورنيا، لونج بيتش
لونج بيتش، كاليفورنيا

الموهوبون والنابغون

شيلبي كي كول
باحث مساعد
جامعة كونيتيكت
ستورز، كونيتيكت

الاستعداد للكلية

روبرت لي كيمبل، الثالث
رئيس قسم الرياضيات والفيزياء
كلية وَاك تكنيكال المجتمعية
رالي، كارولاينا الشمالية

التمايز لمتعلمي اللغة الإنجليزية

سوزانا دافيدينكو
جامعة نيويورك الحكومية
كورتلاند، نيويورك

ألفريدو غوميز
معلم رياضيات/اللغة الإنجليزية كلغة ثانية
مدرسة جورج دبليو فاولر الثانوية
سيراكيوز، نيويورك

حاسبة التمثيل البياني

جيري كومينز
المدير السابق
للمجلس الوطني لمشرفي الرياضيات
ويسترن سبرينجز، إلينوي

الطلاقة الرياضية

روبرت م. كابرارو
أستاذ مساعد
جامعة تكساس ايه آند إم
كوليج ستيشن، تكساس

ما قبل المستوى المتقدم

ديكسي روز
كبير معلمي مستوى الرياضيات المتقدم
مدرسة بفلوجرفيل الثانوية
بفلوجرفيل، تكساس

القراءة والكتابة

ريليه كوسيت لينت
مؤلفة ومستشارة تعليمية
مورجانتون، جورجيا

لين ت. هافنز
مديرة مشروع كريس
كاليسبيل، مونتانا

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المراجعون

كوري أندرياسن
معلم رياضيات
مدرسة نورث الثانوية
شيبويجان، ويسكونسن

مارك ب. بيتز
معلم رياضيات منسق
مدارس سالم سيتي
سالم، فيرجينيا

كاثرين بالين
مشرفة رياضيات
مدارس نيوآرك الحكومية
نيوآرك، نيو جيرسي

كيفن س. بارهورست
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة إندبندنس الثانوية
كولومبوس، أوهايو

بريندا س. بيرج
معلمة رياضيات
مدرسة كاربوندال كوميونتي الثانوية
كاربوندال، إلينوي

دون براون
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة كينمور ويست الثانوية
بافلو، نيويورك

شيريل بيرنل كلايتون
معلمة رياضيات
مدرسة هيوم فوج ماجنت
ناشفيل، تينيسي

بوب كولمان
معلم رياضيات
مدرسة كوب الإعدادية
تالاهاسي، فلوريدا

جاين إي. كوتس
معلمة رياضيات
مدرسة أوفالون تاون شيب الثانوية
أوفالون، إلينوي

مايكل د. كودي
موجه رياضيات
مدرسة زيفر هيلز الثانوية
زيفر هيلز، فلوريدا

ميليسا م. دالتون، حاصلة على شهادة المجلس الوطني
موجهة رياضيات
مدرسة رورال ريتريت الثانوية
رورال ريتريت، فيرجينيا

تينا س. دوم
معلمة رياضيات
مدرسة نابرفيل سنترال الثانوية
نابرفيل، إلينوي

لوري ل. إي. فيراري
معلمة رياضيات
مدرسة لانس كروز الثانوية–نورث
ماكومب، ميشيجان

ستيف فريش آور
معلم رياضيات
مدرسة باركرسبورج سوث الثانوية
باركرسبورج، فيرجينيا الغربية

شيرلي د. جلوفر
معلمة رياضيات
مدرسة تي سي روبرسون الثانوية
آشفيل، كارولينا الشمالية

كارولاينا و. جرينوف
معلمة رياضيات
أكاديمية كيب فير
ويلمنجتون، كارولينا الشمالية

سوزان هاك، حاصلة على شهادة المجلس الوطني
معلمة رياضيات
مدرسة أولدهام كونتي الثانوية
باكنر، كنتاكي

ميشيل هانيمان
معلمة رياضيات
مدرسة مور الثانوية
مور، أوكلاهوما

تيريزا لين هاينز
معلمة رياضيات
مدرسة جلينبارد ايست الثانوية
لومبارد، إلينوي

ساندرا هيستر
معلمة رياضيات/ اختصاصية الموهوبين أكاديميًا أو فكريًا
مدرسة نورث هيندرسون الثانوية
هيندرسونفيل، كارولاينا الشمالية

ج. ك. هولوّاي
معلم رياضيات
مدرسة كابيتول هايتس العليا الوسطى
مونتجومري، ألاباما

روبرت هوب
معلم رياضيات
مدرسة هاريسون الثانوية
هاريسون، ميشيجان

إليّن هاوانتس
معلمة رياضيات/ رئيس قسم الرياضيات
مدرسة فالي فيو الثانوية
آرتشبولد، بنسلفانيا

تشارلز ر. هاورد، حاصل على شهادة المجلس الوطني
معلم رياضيات
مدرسة توسكولا الثانوية
وينزفيل، كارولينا الشمالية

سو فزداس
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة ويلنج بارك الثانوية
ويلنج، فيرجينيا الغربية

إلين كيلر
معلمة رياضيات
مديرة مناهج الرياضيات لرياض الأطفال حتى الصف 12
مدارس نورثويست المحلية
كانال فولتون، أوهايو

شيلا أ. كوتر
معلمة رياضيات
مدرسة ريفر ريدج الثانوية
نيو بورت ريتشي، فلوريدا

فرانك لير
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة كليفلاند الثانوية
كليفلاند، تينيسي

جينيفر لويس
معلمة رياضيات
مدرسة تراید الثانوية
تروي، إلينوي

كاثرين مكارثي
معلمة رياضيات
مدرسة جلين ريدج الثانوية
جلين ريدج، نيو جيرسي

جاكلين بالمكويست
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة وبانزي فالي الثانوية
أورورا، إلينوي

توم شاكر
معلم رياضيات
مدرسة أوتسيجو الثانوية
أوتسيجو، ميشيجان

لوري شابي
معلمة/منسقة رياضيات
مدرسة لارسون الإعدادية
تروي، ميشيجان

جينيفر ج. سذرس
معلمة رياضيات
مدرسة هيلكريست الثانوية
سيمبسونفيل، كارولاينا الجنوبية

سو ستاينبك
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة باركرسبورج الثانوية
باركرسبورج، فيرجينيا الغربية

كاثلين د. فان سايز
معلمة رياضيات
مدرسة ماندرين الثانوية
جاكسونفيل، فلوريدا

كارين ويدمان
معلمة رياضيات
مدرسة تلورفيل الثانوية
تلورفيل، إلينوي

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 الأنظمة الخطية والمصفوفات

الاستعداد للوحدة 1 3

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني تقاطعات التمثيلات البيانية 5

1-1 حل أنظمة المعادلات 6

1-2 حل أنظمة المتباينات بالتمثيل البياني 16

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني أنظمة المتباينات الخطية 23

1-3 إيجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية 24

1-4 أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات 31

■ اختبار منتصف الوحدة 38

1-5 المصفوفات 40

1-6 العمليات على المصفوفات 47

1-7 ضرب المصفوفات 55

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني العمليات على المصفوفات 63

1-8 حل أنظمة المعادلات باستخدام قاعدة كرامر 65

1-9 حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات العكسية 74

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المصفوفات الموسعة 81

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 82

■ تدريب على الاختبار 87

■ التحضير للاختبارات المعيارية 88

■ تدريب على الاختبارات المعيارية، الوحدة 1 90

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الدوال والعلاقات التربيعية

الاستعداد للوحدة 2 93

2-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانياً 95

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني نمذجة بيانات من الحياة اليومية 104

2-2 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني 105

التوسع: مختبر تقنية التمثي البياني حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني 113

2-3 حل المعادلات التربيعية بالتحليل الى العوامل 114

2-4 الاعداد المركبة 122

التوسع: مختبر الجبر المستوى المركب 129

■ اختبار منتصف الوحدة 131

2-5 إكمال المربع 132

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات التربيعية 139

2-6 القانون العام والمميز 140

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني مجموعات القطوع المكافئة 149

2-7 تحويل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية 151

التوسع: مختبر الجبر الدوال التربيعية ومعدل التغير 157

2-8 المتباينات التربيعية 158

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني نمذجة الحركة 165

التقييم

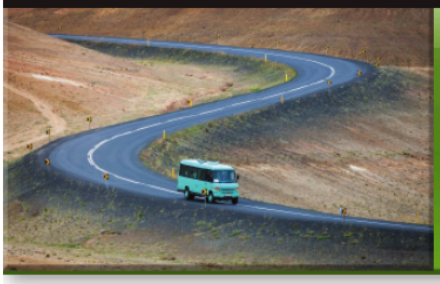
■ دليل الدراسة والمراجعة 166

■ تدريب على الاختبار 171

■ التحضير للاختبارات المعيارية 172

■ تدريب على الاختبارات المعيارية 174

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



3 كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

الاستعداد للوحدة 3 177

3-1 العمليات على كثيرات الحدود 179

التوسع: مختبر الجبر التحليل البعدي 186

3-2 قسمة كثيرات الحدود 187

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني قسمة كثيرات الحدود 194

3-3 الدوال كثيرة الحدود 196

3-4 تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود 204

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني نمذجة البيانات باستخدام الدوال كثيرة الحدود 212

■ اختبار منتصف الوحدة 214

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات كثيرة الحدود بالتمثيل البياني 215

3-5 حل المعادلات كثيرة الحدود 216

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني متطابقات كثيرة الحدود 224

3-6 نظريتا الباقي والعامل 226

3-7 الجذور والأصفار 232

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تحليل الدوال كثيرة الحدود 240

3-8 نظرية الصفر النسبي 241

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 247

■ التحضير على الاختبار 251

■ تدريب على الاختبارات المعيارية 252

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 الدوال والعلاقات العكسية والجذرية

الاستعداد للوحدة 4 254

4-1 العمليات على الدوال 257

4-2 العلاقات والدوال العكسية 265

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني العلاقات والدوال العكسية 271

4-3 دوال الجذر التربيعي والمتباينات 272

4-4 الجذور النونية 279

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البيانى لدوال الجذور النونية 285

■ اختبار منتصف الوحدة 286

4-5 العمليات الحسابية على التعابير الجذرية 287

4-6 الأسس النسبية 294

4-7 حل المعادلات الجذرية والمتباينات 301

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات الجذرية والمتباينات 308

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 310

■ التحضير على الاختبار 315

■ الاعداد للاختبارات المعيارية 317

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5 الدوائر

الاستعداد للوحدة 5 319

5-1 الدوائر والمحيط 321

5-2 قياس الزوايا والأقواس 330

5-3 الأقواس والأوتار 339

5-4 الزوايا المحيطية 347

■ اختبار منتصف الوحدة 355

5-5 المماسات 356

التوسع: مختبر الهندسة: الدوائر المحيطة والمحاطة 364

5-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا 365

5-7 القطع الخاصة في الدائرة 374

5-8 معادلة الدائرة 381

التوسع: مختبر الهندسة االقطوع المكافئة 388

5-9 مساحة الدائرة والقطاع الدائري 390

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 397

■ تدريب على الاختبار 403

■ التحضير للاختبارات المعيارية 404

■ تدريب على الاختبارات المعيارية، الوحدات من 1 إلى 5 406

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6 التحويلات الهندسية والتناظر

الاستعداد للوحدة 6 409

6-1 **الإنعكاس** 411

6-2 **الإزاحة** 420

الاستكشاف: مختبر الهندسة عمليات التدوير 427

6-3 **لدوران** 428

التوسع: مختبر الهندسة المجسمات الناتجة عن التدوير 435

■ **اختبار منتصف الوحدة** 437

الاستكشاف: مختبر برنامج الهندسة تركيب التحويلات 438

6-4 **تركيب التحويلات** 439

التوسع: مختبر الهندسة الفسيفساء 448

6-5 **التناظر** 451

التوسع: مختبر الهندسة استكشاف الإنشاءات بواسطة جهاز عاكس 458

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني عمليات تغيير الأبعاد (التمدّد) 460

6-6 **عمليات تغيير الأبعاد (التمدد)** 462

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 470

■ **تدريب على الاختبار** 475

■ **التحضير للإختبارات المعيارية** 476

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7 الاحتمالات والقياس

الاستعداد للوحدة 7 478

7-1 تمثيل الفضاءات العينية 481

7-2 استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات 488

7-3 الاحتمالات الهندسية 497

■ اختبار منتصف الوحدة 504

7-4 المحاكاة 505

7-5 احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة 513

التوسع: مختبر الهندسة جداول التكرار بمدخلين 520

7-6 احتمالات الأحداث المنفصلة 522

التوسع: مختبر الهندسة نظرية التمثيل البياني 530

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 532

■ تدريب على الاختبار 535

■ التحضير للاختبارات المعيارية 536

■ تدريب على الاختبارات المعيارية 538

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

الاستعداد للوحدة 8 540

8-1 التمثيل البياني للدوال الأسيّة 543

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات الأسية 551

8-2 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة 553

8-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغارتمية 560

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني اختيار أفضل نموذج 568

8-4 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية 570

■ اختبار منتصف الوحدة 576

8-5 خصائص اللوغاريتمات 577

8-6 اللوغاريتمات العادية 584

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية 591

8-7 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية 593

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني المرابحة المركبة 600

8-8 استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية 601

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التبريد 608

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 609

■ تدريب على الاختبار 613

■ التحضير للاختبارات المعيارية 614

■ تدريب على الاختبارات المعيارية 616

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 الدوال والعلاقات النسبية

الاستعداد للوحدة 9 618

9-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها 621

9-2 جمع التعابير النسبية وطرحها 630

9-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً 637

■ اختبار منتصف الوحدة 644

9-4 التمثيل البياني للدوال النسبية 645

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني للدوال النسبية 653

9-5 دوال التغير 654

9-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية 662

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات النسبية 671

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 673

■ تدريب على الاختبار 677

■ التحضير للاختبارات المعيارية 678

■ تدريب على الاختبارات المعيارية 680

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 الدوال المثلثية

الاستعداد للوحدة 10 682

الاستكشاف: مختبر ورقة البيانات استكشاف المثلثات القائمة الخاصة 685

10-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة 686

10-2 الزوايا وقياس الزاوية 695

التوسع: مختبر الهندسة مساحة متوازي الأضلاع 702

10-3 النسب المثلثية للزوايا العامة 703

10-4 قانون الـ Sine 710

التوسّع: مختبر الهندسة المضلعات المنتظمة 718

10-5 قانون الـ Cosine 719

■ اختبار منتصف الوحدة 725

10-6 الدوال الدائرية والدورية 726

10-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا 733

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيلات البيانية المثلثية 740

10-8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية 741

10-9 الدوال المثلثية العكسية 749

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 755

■ تدريب على الاختبار 761

■ التحضير للاختبارات المعيارية 762

■ تدريب على الاختبارات المعيارية 764

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الاستعداد للوحدة 11 766

11-1 المتطابقات المثلثية 769

11-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية 776

11-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما 782

■ اختبار منتصف الوحدة 788

11-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها 789

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات المثلثية 796

11-5 حل المعادلات المثلثية 797

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 804

■ تدريب على الاختبار 807

■ التحضير للاختبارات المعيارية 808

■ تدريب على الاختبارات المعيارية 810

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 12 المتتاليات والمتسلسلات

الاستعداد للوحدة 12 812

12-1 المتتاليات كدوال 815

12-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية 822

■ اختبار منتصف الوحدة 830

12-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية 832

الاستكشاف: مختبر الجبر المساحة تحت المنحنى 839

12-4 المتسلسلة الهندسية اللانهائية 841

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني الحدود 848

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 850

■ تدريب على الاختبار 854

■ التحضير للاختبارات المعيارية 856

■ تدريب على الاختبارات المعيارية، تراكمي، الوحدات من 9 إلي 12 858

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

قاموس المصطلحات متوفر في النسخة الإلكترونية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 9

الدوال والعلاقات النسبية

السابق

- استخدام التحليل إلى العوامل لحل المعادلات التربيعية وتمثيل المعادلات التربيعية بيانيًا.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة.
  - تمثيل الدوال النسبية بيانيًا.
  - حل مسائل التغير الطردي والمشترك والعكسي.
  - حل المعادلات والمتباينات النسبية.

لماذا؟

- **السفر** سواءً إذا كنت تسافر بمركب أو سيارة أو دراجة أو طائرة، يمكن استخدام الدوال النسبية لإيجاد المسافة المقطوعة والوقت المستغرق في السفر والسرعة. إذا كنت ترغب في الوصول إلى وجهة ما في الوقت المحدد، فبإمكان العلاقات النسبية إخبارك بالسرعة التي تحتاجها في السفر للوصول إلى هدفك. وعند تمثيل الدوال النسبية بيانيًا فإنك ترى بوضوح السرعة التي تسافر بها وتأثيرها على الزمن المستغرق للوصول.

Chapter Sourced From Algebra 2 Chapter 8 © 2014 McGraw-Hill Education مؤسسة McGraw-Hill للتعليم © محفوظة لصالح الطبع والتأليف

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill للتعليم

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

تدريب سريع

حُلّ كل من المعادلات التالية. اكتب في أبسط صورة.

1. $\frac{5}{14} = \frac{1}{3}x$
2. $\frac{1}{8}m = \frac{7}{3}$
3. $\frac{8}{5} = \frac{1}{4}k$
4. $\frac{10}{9}p = 7$

5. **شاحنات** استهلك مازن $\frac{1}{3}$ خزان الوقود في شاحنته للذهاب إلى المعمل. بدأ مازن طريقه بخزان وقود ممتلئ. فإذا كان قد تبقى لديه 8 L من البنزين، فكم عدد لترات التي يسعها الخزان؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6. $\frac{3}{4} - \frac{7}{8}$
7. $\frac{8}{9} - \frac{7}{6} + \frac{1}{3}$
8. $\frac{9}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{3}$
9. $\frac{10}{3} + \frac{5}{6} + 3$

10. **الخبز** قامت علياء بخبز كعك لبيع المخبوزات. لقد استخدمت $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لإحدى الوصفتين و $4\frac{1}{2}$ أكواب من الدقيق للوصفة الأخرى. فكم عدد الأكواب التي استخدمتها إجمالاً؟

حُلّ كلاً من التناسبات التالية.

11. $\frac{9}{12} = \frac{p}{36}$
12. $\frac{9}{18} = \frac{6}{m}$
13. $\frac{2}{7} = \frac{5}{k}$

14. **ضريبة المبيعات** تدفع سهيلة AED 4.40 ضريبة على الملابس بقيمة AED 55 . فما مقدار الضرائب التي ستدفعها على الملابس بقيمة AED 35؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حُلّ التناسب: $\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$. اكتب في أبسط صورة.

$\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$

$\frac{72}{11} = 7r$ بضرب كل طرف في 8.

$\frac{72}{77} = r$ بقسمة كل طرف على 7.

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 72 و 77 هو 1 ، فإن الحل في أبسط صورة.

مثال 2

حوّل لأبسط صورة $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$.

$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right) - \frac{5}{6}\left(\frac{2}{2}\right)$ العامل المشترك الأكبر للأعداد 3، و 4، و 6 هو 12.

$= \frac{4}{12} + \frac{9}{12} - \frac{10}{12}$ بسّط.

$= \frac{3}{12}$ بالجمع والطرح.

$= \frac{3 \div 3}{12 \div 3}$ أو $\frac{1}{4}$ بسط صورة.

مثال 3

حُلّ التناسب: $\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$.

$\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$ كتابة المعادلة.

$5(11) = 8u$ إيجاد الضرب التقاطعي.

$55 = 8u$ بالتحويل لأبسط صورة.

$\frac{55}{8} = u$ بقسمة كل جانب على 8.

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 55 و 8 هو 1 ، فإن الحل في أبسط صورة.

$u = \frac{55}{8}$ أو $6\frac{7}{8}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المخبدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك للوحدة 9.

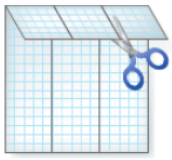
للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

قد ترغب بالرجوع إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

مطويات منظّم الدراسة

الدوال والعلاقات النسبية اصنع هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك عن الوحدة 9 عن الدوال والعلاقات النسبية. ابدأ بورقة رسم بياني مقاس $11'' \times 8\frac{1}{2}''$.

1 **اطوِها** إلى ثلاثة بالطول.



2 **اطوِ** الطرف العلوي للأسفل بحيث تصنع تبويبًا بالأعلى طوله 2". قص التبويبات بالطول.

3 **سمِّ** التبويبات الخارجية بالمصطلحات *التعابير*، *والدوال*، و *المعادلات*. استخدم التبويبات الداخلية لكتابة التعاريف والملاحظات.

4 **اكتب** مثالاً عن كل موضوع في المساحة أسفل كل تبويب.

المفردات الجديدة

تعبير نسبي rational expression

كسر مركب complex fraction

دالة المقلوب reciprocal function

قطع زائد hyperbola

دالة نسبية rational function

خط تقارب رأسي vertical asymptote

خط تقارب أفقي horizontal asymptote

خط تقارب مائل oblique asymptote

نقطة الانفصال point discontinuity

تغير طردي direct variation

ثابت التغير constant of variation

التغير المشترك joint variation

التغير العكسي inverse variation

التغير المتوافق combined variation

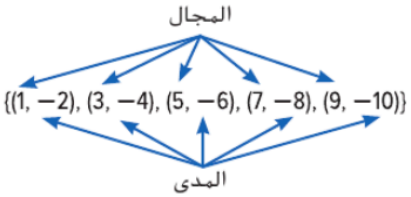
معادلة نسبية rational equation

المتوسط الحسابي المرجح weighted average

متباينة نسبية rational inequality

مراجعة المصطلحات

الدالة علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط في المدى



المضاعف المشترك الأصغر هو أصغر عدد مضاعف مشترك لعددين أو أكثر

العدد النسبي هو عدد يتم التعبير عنه بالصورة $\frac{a}{b}$، حيث a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 9-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

السابق:
- التحليل إلى عوامل كثيرات الحدود.

الحالي:
1. تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة.
2. تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

لماذا؟
- إذا نزل غواص إلى أعماق أكبر من 10 مترات، فإن الدالة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d - 10}$ تمثل أقصى مدة يستطيع الغواص خلالها البقاء في هذه الأعماق والصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف. تمثل $T(d)$ مدة الغطس بالدقائق، وتمثل d العمق بالمتر.

مفردات جديدة

التعبير النسبي
rational expression

الكسر المركب
complex fraction

ممارسات في الرياضيات
8 البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة

يطلق على النسبة بين تعبيرين كثيري الحدود مثل $\frac{1700}{d - 10}$ اسم **تعبير نسبي**.

ونظرًا لأن المتغيرات في الجبر غالبًا ما تمثل أعدادًا حقيقية، فإن العمليات على الأعداد النسبية والتعابير النسبية متشابهة. ومثلما هو الأمر مع اختزال الكسور، فإنك تقوم بقسمة البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر لتحويل التعبير النسبي لأبسط صورة.

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot \cancel{4}^{1}}{3 \cdot \cancel{4}^{1}} = \frac{2}{3}$$

العامل المشترك الأكبر = 4

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x - 3)(\cancel{x - 1}^{1})}{(x - 5)(\cancel{x - 1}^{1})} = \frac{(x - 3)}{(x - 5)}$$

العامل المشترك الأكبر = $(x - 1)$

مثال 1 تحويل التعبير النسبي لأبسط صورة

a. حوّل لأبسط صورة $\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x - 6)(x^2 - 9)}$.

$$\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x - 6)(x^2 - 9)} = \frac{5x(x + 3)(x + 1)}{(x - 6)(x + 3)(x - 3)}$$ التحليل إلى عوامل البسط والمقام.

$$= \frac{5x(x + 1)}{(x - 6)(x - 3)} \cdot \frac{(x + 3)}{(x + 3)}$$ حذف العوامل المشتركة.

$$= \frac{5x(x + 1)}{(x - 6)(x - 3)}$$ بسّط.

b. تحت أي ظروف يكون هذا التعبير غير معرف؟

المقام الأصلي الذي تم التحليل إلى عوامله هو $(x - 6)(x + 3)(x - 3)$.
حدد القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر.
هذه القيم هي 6 أو −3 أو 3. إذًا يكون التعبير غير معرف عندما تكون $x = 6$ أو $x = -3$ أو $x = 3$.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. تحت أي ظروف يكون التعبير غير مُعرَّف؟

1A. $\frac{4y(y - 3)(y + 4)}{y(y^2 - y - 6)}$

1B. $\frac{2z(z + 5)(z^2 + 2z - 8)}{(z - 1)(z + 5)(z - 2)}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 على الاختبار المعياري اسـ تبعاد القيم التي تجعل المقدار غير معرّف

لأي قيم تكون $\frac{x^2(x^2 - 5x - 14)}{4x(x^2 + 6x + 8)}$ غير معرَّفة؟

A $-2, -4$

B $-2, 7$

C $0, -2, -4$

D $0, -2, -4, 7$

قراءة فقرة الاختبار

أنت تريد تحديد قيم x التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

حل فقرة الاختبار

بوجود $4x$ في المقام، لا يمكن أن تساوي x صفرًا. إذًا، يمكن استبعاد الخيارين A و B. بعد ذلك، حلل عوامل المقام.

$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$. إذًا يكون المقام $4x(x + 2)(x + 4)$.

نظرًا لأن المقام يساوي 0 عندما تكون $x = 0, -2, -4$، فإن الإجابة هي C.

نصيحة عند حل الاختبار

استبعاد الخيارات

في بعض الأحيان، يمكنك توفير الوقت بالنظر إلى الإجابات الممكنة واستبعاد الخيارات.

تمرين موجّه

2. لأي قيم x تكون $\frac{x(x^2 + 8x + 12)}{-6(x^2 - 3x - 10)}$ غير معرفة؟

F $0, 5, -2$ G $5, -2$ H $0, -2, -6$ J $5, -2, -6$

يمكنك في بعض الأحيان استبعاد -1 في البسط أو المقام للمساعدة في تحويل التعبير النسبي لأبسط صورة.

مثال 3 التحويل لأبسط صورة باستخدام -1

حوّل لأبسط صورة $\frac{(4w^2 - 3wy)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)}$.

$\frac{(4w^2 - 3wy)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)} = \frac{w(4w - 3y)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)}$ عامل.

$= \frac{w(-1)(3y - 4w)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)}$ $4w - 3y = -1(3y - 4w)$

$= \frac{(-w)(w + y)}{5w + y}$ بسّط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3A. $\frac{(xz - 4z)}{z^2(4 - x)}$

3B. $\frac{ab^2 - 5ab}{(5 + b)(5 - b)}$

تصلح الطريقة المستخدمة في ضرب الكسور وقسمتها مع التعابير النسبية أيضًا. تذكّر أنك لضرب كسرين تقوم بضرب البسطين معًا والمقامين معًا. لقسمة كسرين، فإنك تضرب في المعكوس الضربي أو مقلوب العدد للمقسوم عليه.

القسمة

$\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{7}{2}$

الضرب

$\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يلخص الجدول التالي قواعد ضرب التعابير النسبية وقسمتها.

المفهوم الأساسي

ضرب التعابير النسبية

الشرح لضرب التعابير النسبية، اضرب البسوط معًا واضرب المقامات معًا.

الرموز لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$، فإن $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

قسمة التعابير النسبية

الشرح لقسمة التعابير النسبية، اضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.

الرموز لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0, c \neq 0$، و $d \neq 0$، فإن

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

نصيحة دراسية

حذف العوامل المشتركة تأكد من حذف العوامل المشتركة من البسط والمقام.

مثال 4 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

$$\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$ عامل.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{d}} \cdot d}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{d}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$ حذف العوامل المشتركة.

$$= \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$$ بسّط.

$$= \frac{9c^2d}{4a}$$ بسّط.

b. $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

$$\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$$ الضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b}{7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y}$$ عامل.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{y}} \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot \overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot \underset{1}{\cancel{a}} \cdot \underset{1}{\cancel{a}} \cdot \underset{1}{\cancel{b}} \cdot b \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}} \cdot x \cdot \underset{1}{\cancel{y}}}$$ حذف العوامل المشتركة.

$$= \frac{3 \cdot 5 \cdot y \cdot y}{2 \cdot b \cdot x}$$ بسّط.

$$= \frac{15y^2}{2bx}$$ بسّط.

تمرين موجّه

4A. $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$

4B. $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$

4C. $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$

4D. $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في بعض الأحيان، يتوجب عليك تحليل البسط و/أو المقام إلى العوامل أولاً قبل أن تتمكن من تحويل ناتج ضرب أو ناتج قسمة تعبير نسبي إلى أبسط صورة.

نصيحة دراسية

الانتظام عند تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة، فإن العوامل الموجودة إحدى كثيرات الحدود غالبًا ما تظهر في كثيرات الحدود الأخرى. ففي المثال 5a، يظهر العامل $x - 8$ أربع مرات. استخدم هذه النصيحة كدليل عند تحليل عوامل كثيرات الحدود الصعبة.

مثال 5 كثيرات الحدود في البسط والمقام

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\dfrac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \dfrac{x - 8}{x^2 + 5x + 6}$

$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x - 8)(x + 2)}{(x - 8)(x - 8)} \cdot \frac{x - 8}{(x + 3)(x + 2)}$$ عامل.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x - 8)}}\overset{1}{\cancel{(x + 2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x - 8)}}\underset{1}{\cancel{(x - 8)}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{x - 8}}}{\underset{1}{\cancel{(x + 3)(x + 2)}}}$$ حذف العوامل المشتركة.

$$= \frac{1}{x + 3}$$ بسّط.

b. $\dfrac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \dfrac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18}$

$$\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18} = \frac{x^2 - 16}{12y + 36} \cdot \frac{y^2 - 3y - 18}{x^2 - 12x + 32}$$ الضرب في المعكوس الضربي.

$$= \frac{(x + 4)(x - 4)}{12(y + 3)} \cdot \frac{(y - 6)(y + 3)}{(x - 4)(x - 8)}$$ عامل.

$$= \frac{(x + 4)\overset{1}{\cancel{(x - 4)}}}{12\underset{1}{\cancel{(y + 3)}}} \cdot \frac{(y - 6)\overset{1}{\cancel{(y + 3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x - 4)}}(x - 8)}$$ حذف العوامل المشتركة.

$$= \frac{(x + 4)(y - 6)}{12(x - 8)}$$ بسّط.

تمرين موجّه

5A. $\dfrac{8x - 20}{x^2 + 2x - 35} \cdot \dfrac{x^2 - 7x + 10}{4x^2 - 16}$

5B. $\dfrac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + 10x + 21} \div \dfrac{x^2 - x - 12}{6x + 42}$

2 تحويل الكسور المركبة إلى أبسط صورة

الكسر المركب هو تعبير نسبي له بسط و/أو مقام عبارة عن تعبير نسبي أيضًا. التعابير التالية عبارة عن كسور مركبة.

$$\frac{\frac{c}{6}}{5d} \qquad \frac{\frac{8}{x}}{x - 2} \qquad \frac{\frac{x - 3}{8}}{\frac{x - 2}{x + 4}} \qquad \frac{\frac{4}{a} + 6}{\frac{12}{a} - 3}$$

لتحويل كسر مركب إلى أبسط صورة، أعد كتابته أولاً على هيئة تعبير قسمة.

مثال 6 تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\dfrac{\frac{a + b}{4}}{\frac{a^2 + b^2}{4}}$

$$\frac{\frac{a + b}{4}}{\frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{a + b}{4} \div \frac{a^2 + b^2}{4}$$ كتابة التعبير على هيئة تعبير قسمة.

$$= \frac{a + b}{4} \cdot \frac{4}{a^2 + b^2}$$ الضرب في المعكوس الضربي.

$$= \frac{a + b}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{a^2 + b^2} \text{ or } \frac{a + b}{a^2 + b^2}$$ بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b. $\dfrac{\dfrac{x^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{4x}{y-x}}$

$$\frac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} = \frac{x^2}{x^2-y^2} \div \frac{4x}{y-x}$$ كتابة التعبير على هيئة تعبير قسمة.

$$= \frac{x^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{y-x}{4x}$$ الضرب في المعكوس الضربي.

$$= \frac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(-1)(x-y)}{4x}$$ عامل.

$$= \frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{x}}}{(x+y)\underset{1}{\cancel{(x-y)}}} \cdot \frac{(-1)\overset{1}{\cancel{(x-y)}}}{\underset{1}{\cancel{4x}}}$$ حذف العوامل المشتركة.

$$= \frac{-x}{4(x+y)}$$ بسّط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6A. $\dfrac{\dfrac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\dfrac{x^2-4}{4x-10}}$

6B. $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\dfrac{y-x}{y+7}}$

التحقق من فهمك

مثال 1 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

1. $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-64}$

2. $\dfrac{c+d}{3c^2-3d^2}$

مثال 2 **3. الاختيار من متعدد** حدد جميع قيم x التي يكون عندها $\dfrac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرفة.

A $-7, 4$ B $7, 4$ C $4, -7, 7$ D $-4, 7$

الأمثلة 3-6 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

4. $\dfrac{y^2+3y-40}{25-y^2}$

5. $\dfrac{a^2x-b^2x}{by-ay}$

6. $\dfrac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \dfrac{8z}{9xy^3}$

7. $\dfrac{12x^3y}{13ab^2} \div \dfrac{36xy^3}{26b}$

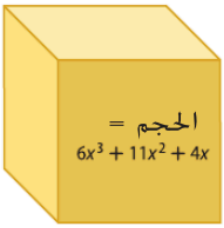
8. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \dfrac{x-4}{x^2-2x-35}$

9. $\dfrac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \dfrac{4a+4b}{a^2-1}$

10. $\dfrac{\dfrac{a^3b^3}{xy^4}}{\dfrac{a^2b}{x^2y}}$

11. $\dfrac{\dfrac{4x}{x+6}}{\dfrac{x^2-3x}{x^2+3x-18}}$

12. التبرير المنطقي يمكن تمثيل حجم حاويات الشحن ذات شكل متوازي مستطيلات بكثيرة الحدود $6x^3 + 11x^2 + 4x$، حيث يكون الارتفاع x.



a. أوجد طول الحاوية وعرضها.

b. أوجد النسبة بين الأبعاد الثلاثة للحاوية عندما تكون $x = 2$.

c. هل ستكون النسبة بين الأبعاد الثلاثة واحدة لجميع قيم x؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

13. $\frac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12}$

14. $\frac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)}$

15. $\frac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)}$

16. $\frac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)}$

17. $\frac{x^2(x+2)(x-4)}{6x(x^2+x-20)}$

18. $\frac{3y(y-8)(y^2+2y-24)}{15y^2(y^2-12y+32)}$

مثال 2

19. **اختيار من متعدد** حدد جميع قيم x التي تكون عندها $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرفة.

F $3, -6$ G $4, 6$ H $-6, 6$ J $-6, 3, 4, 6$

مثال 3 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

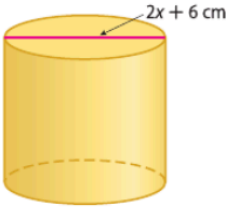
20. $\frac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2}$

21. $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

22. $\frac{(x-4)(x^2+2x-48)}{(36-x^2)(x^2+4x-32)}$

23. $\frac{16-c^2}{c^2+c-20}$

24. **الهندسة** يبلغ حجم الأسطوانة الموضحة على اليسار $\pi(x^2-3x-18)(x+3)$ سنتيمتر مكعب. أوجد ارتفاع الأسطوانة.



الأمثلة 4-6 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

25. $\frac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \times \frac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$

26. $\frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z}$

27. $\frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$

28. $\frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^4y^2}{50xy^4z^2}$

29. $\frac{15a^2b^2}{21ac} \times \frac{14a^4c^2}{6ab^3}$

30. $\frac{14c^2f^5}{9a^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3}$

31. $\frac{y^2+8y+15}{y-6} \times \frac{y^2-9y+18}{y^2-9}$

32. $\frac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \frac{c^2-8c}{c+d}$

33. $\frac{x^2+9x+20}{8x+16} \times \frac{4x^2+16x+16}{x^2-25}$

34. $\frac{3a^2+6a+3}{a^2-3a-10} \div \frac{12a^2-12}{a^2-4}$

35. $\frac{\frac{x^2-9}{6x-12}}{\frac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}}$

36. $\frac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}}$

37. $\frac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}}$

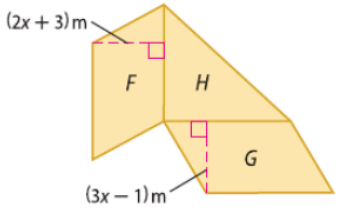
38. $\frac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}}$

39. **التبرير** في نهاية مسيرته من لعبة كرة قدم بالمدرسة الثانوية، أحرز مجيد 33 هدفًا من 121 محاولة.

a. اكتب نسبة تعبر عن النسبة بين عدد الأهداف المحرزة إلى محاولات التسديد لمجيد في نهاية مسيرته كلاعب بالمدرسة الثانوية.

b. افترض أن مجيد حاول إحراز عدد a من الأهداف ونجح في تسديد m أهداف خلال عامه الأول بالمدرسة. اكتب تعبيرًا نسبيًا يمثل النسبة بين عدد الأهداف المحرزة في مسيرته إلى عدد الأهداف التي حاول تسديدها في نهاية عامه الأول بالمدرسة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



40. **الهندسة** مساحة متوازي الأضلاع F تبلغ $8x^2 + 10x - 3$ متر مربع وارتفاع $2x + 3$ متر.
أما متوازي الأضلاع G فتبلغ مساحته $6x^2 + 13x - 5$ متر مربع وارتفاع $3x - 1$ متر. أوجد مساحة المثلث الأيمن H.

41. **التلوث** تمثل الدالة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُمك تسرب نفطي من أنبوب مكسور بأحد الحفارات؛ حيث T هي سُمك البقعة النفطية بالأمتار، و x هي البُعد عن مكان الكسر بالأمتار.

a. حوّل الدالة لأبسط صورة.

b. كم يبلغ سُمك البقعة التي على بُعد 100 m من مكان الكسر؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

42. $\frac{x^2 - 16}{3x^3 + 18x^2 + 24x} \times \frac{x^3 - 4x}{2x^2 - 7x - 4}$

43. $\frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

44. $\frac{9 - x^2}{x^2 - 4x - 21} \times \left(\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 15x + 7}\right)^{-1}$

45. $\left(\frac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 + 4x - 5}\right)^{-1} \cdot \frac{2x^3 - 8x}{x^2 - 2x - 35}$

46. $\left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2}\right)^3 \times \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3}$

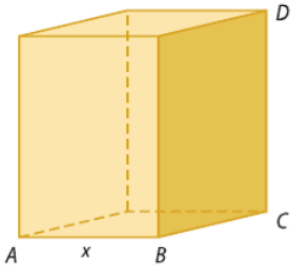
47. $\frac{20x^2y^6z^{-2}}{3a^3c^2} \times \left(\frac{16x^3y^3}{9acz}\right)^{-1}$

48. $\left(\frac{2xy^3}{3abc}\right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$

49. $\frac{\frac{8x^2 - 10x - 3}{10x^2 + 35x - 20}}{\frac{2x^2 + x - 6}{4x^2 + 18x + 8}}$

50. $\frac{\frac{2x^2 + 7x - 30}{-6x^2 + 13x + 5}}{\frac{4x^2 + 12x - 72}{3x^2 - 11x - 4}}$

51. $\frac{\frac{4x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 - 24x}}{\frac{12x^2 + 12x - 9}{-2x^2 + 5x + 12}}$



52. **الهندسة** تبلغ مساحة قاعدة متوازي المستطيلات الموجود على اليسار 20 سنتيمترًا مربعًا.

a. أوجد طول $\overline{BC}$ بدلالة x.

b. إذا كان DC = 3BC؛ فحدد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x.

c. حدد حجم المتوازي بدلالة x.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

53. $\left(\frac{x^2 + 4x - 32}{2x^2 + 9x - 5}\right)^x \frac{3x^2 - 75}{3x^2 - 11x - 4} \div \frac{6x^2 - 18x - 60}{x^3 - 4x}$

54. $\frac{8x^2 + 10x - 3}{3x^2 - 12x - 36} \div \left(\frac{2x^2 - 5x - 12}{3x^2 - 17x - 6}\right)^x \frac{4x^2 + 3x - 1}{4x^2 - 40x + 24}$

55. $\frac{4x^2 - 9x - 9}{3x^2 + 6x - 18} \div \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 4x - 32} \div \frac{8x^2 + 10x + 3}{6x^2 - 6x - 12}$

56. **المثابرة** استخدم الصيغة d = rt والمعلومات التالية.
تسافر طائرة بمعدل r من 500 كيلومتر في الساعة لمدة t من $(x + 6)$ ساعات.
وتسافر طائرة أخرى بمعدل r من $(90x + 540)$ كيلومتر في الساعة لمدة t من 6 ساعات.

a. كتب تعبيرًا نسبيًا يمثل النسبة بين المسافة المقطوعة d للطائرة الأولى والمسافة المقطوعة d للطائرة الثانية.

b. حوّل التعبير النسبي لأبسط صورة. ما الذي يخبرك به هذا التعبير عن المسافتين المقطوعتين لكلتا الطائرتين؟

c. تحت أي ظرف يكون التعبير النسبي غير معرف؟ صف ما يخبرك به هذا الظرف عن الطائرتين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

57. **القطارات** في محاولة للوصول إلى ساحة القطارات بإحدى الأمسيات، كانت جميع القطارات متوقفة في صف لمسافة 2 mi على طول نظام الخطوط. افترض أن كل عربة تشغل مساحة متوسطها 75 ft من الخط وأن ساحة القطارات تضم 5 خطوط.

a. اكتب تعبيرًا يمكن استخدامه لتحديد عدد عربات القطار الموجودة في صف التخزين.

b. كم عدد عربات القطار الموجودة في صف التخزين؟

c. افترض أن هناك 8 مراقبين يقومون على إجراء فحوصات السلامة لكل عربة وأن فحص كل عربة يستغرق متوسط s 45. فكم عدد الساعات بالتقريب التي سيستغرقها فحص جميع العربات في الصف حتى يتم إخراجها؟

58. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف تمثيل الدالة النسبية بيانيًا.

a. **جبريًا** حوّل لأبسط صورة $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$

b. **جدوليًا** افرض أن $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$. استخدم التعبير الذي كتبته في الجزء a لكتابة الدالة ذات الصلة $g(x)$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لعمل جدول لكلتا الدالتين عندما يكون $0 \le x \le 10$.

c. **تحليليًا** ما $f(4)$ و $g(4)$؟ اشرح أهمية هذه القيم.

d. **بيانيًا** مثّل بيانيًا الدالتين على حاسبة التمثيل البياني. استخدم وظيفة TRACE لاستكشاف كل تمثيل بياني مستخدمًا المفتاحين ▲ و ▼ للتنقل بين التمثيلات البيانية. قارن بين التمثيلات البيانية وبيّن الفرق بينها.

e. **لفظيًا** ما الذي يمكنك استنتاجه عن التعابير والدوال؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

59. **التبرير** قارن بين $\frac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$ ووضح الفرق بينهما.

60. **التفكير النقدي** يقوم حميد وحماد بتحويل $\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x}$ لأبسط صورة. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حميد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x}$$
$$= \frac{-4}{x+y}$$

حماد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4}$$
$$= -\frac{x+y}{4}$$

61. **التحدي** أوجد التعبير الذي يجعل العبارة التالية حقيقية.

$$\frac{x-6}{x+3} \frac{x \text{ ?}}{x-6} = x - 2$$

62. **أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة؟** حدد التعبير الذي لا ينتمي إلى التعابير الثلاثة الأخرى. اشرح استنتاجك.

$\frac{x^2+1}{3}$ $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$ $\frac{x^2+3x+2}{x-5}$ $\frac{1}{x-1}$

63. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً أحيانًا أم صحيحةً دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

تكون الدالة النسبية التي تحتوي على متغير في المقام مُعرفة لجميع قيم x الحقيقية.

64. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا نسبيًا ليصبح $\frac{x-1}{x+4}$ بعد تحويله لأبسط صورة.

65. **الكتابة في الرياضيات** تم تحويل التعبير النسبي $\frac{x^2+3x}{4x}$ لأبسط صورة فأصبح $\frac{x+3}{4}$. اشرح لماذا يكون التعبير الجديد غير معرَّف لجميع قيم x.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

66. SAT/ACT ترغب عائلة فهد في قطع مسافة متوسطها 250 km في اليوم أثناء إجازتهم.

في أول خمسة أيام، قطعوا 220 km، و 300 km، و 210 km، و 275 كيلومتر، و 240 km. فكم عدد الكيلومترات التي يجب عليهم قطعها في اليوم السادس لتحقيق هدفهم؟

A 235 km
B 251 km
C 255 km
D 275 km
E 315 km

67. أي من المعادلات التالية يعبر عن العلاقة بين N و T في الجدول؟

N	1	2	3	4	5	6
T	1	4	7	10	13	16

F $T = 2 - N$
G $T = 4 - 3N$
H $T = 3N + 1$
J $T = 3N - 2$

68. تبلغ تكلفة خطة الهاتف المحمول الشهرية AED 39.99 مقابل 300 دقيقة و 20 فلسًا لكل دقيقة بعد ذلك. أي مما يلي يمثل إجمالي الفاتورة الشهرية (بالدرهم) عند التحدث لمدة x دقيقة إذا كانت x أكبر من 300؟

A $39.99 + 0.20(300 - x)$
B $39.99 + 0.20(x - 300)$
C $39.99 + 0.20x$
D $39.99 + 20x$

69. إجابة مختصرة بكم متر مربع تتجاوز مساحة دائرة يبلغ قطرها 6 أمتار المساحة المجتمعة لدائرة قطرها 4 أمتار ودائرة قطرها 2 متر معًا؟

مراجعة شاملة

70. أنثروبولوجيا وجد أحد علماء الأنثروبولوجيا الدارسين لعظام الإنسان الأول أن هناك كمية ضئيلة جدًا من (الكربون- 14) متبقية في العظام بحيث لا تستطيع الأدوات قياسها. وهذا يعني أن هناك أقل من 5.0% من كمية (الكربون- 14) التي احتوت عليها العظام عندما كان الإنسان على قيد الحياة. إذا كان عمر النصف (للكربون- 14) هو 5760 عامًا. فمنذ متى توفي ذلك الإنسان؟

حُـلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

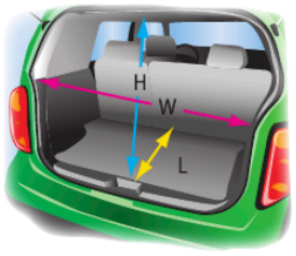
71. $3e^x + 1 = 5$
72. $2e^x - 1 = 0$
73. $-3e^{4x} + 11 = 2$
74. $8 + 3e^{3x} = 26$

75. قانون الضوضاء تم اقتراح قانون للمدينة يجرم إصدار صوت في منطقة سكنية بشدة تتجاوز 72 ديسيبل خلال النهار و 55 خلال الليل. بكم ضعف تزيد شدة مستوى الضوضاء المسموح به خلال النهار عن الليل؟

حوّل لأبسط صورة.

76. $\sqrt{50x^4}$
77. $\sqrt[3]{16y^3}$
78. $\sqrt{18x^2y^3}$
79. $\sqrt{40a^3b^4}$

80. السيارات طول مساحة الشحن في سيارة رياضية متعددة الأغراض أكبر من ارتفاع تلك المساحة بـ 10.2 cm. ويقل عرض المساحة عن مِثلي الارتفاع بـ 40.6 cm. إذا كان الحجم الإجمالي لمساحة الشحن 906,139.1 cm^3



a. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل حجم مساحة الشحن.

b. هل ستتسع مساحة الشحن لوضع صندوق طوله 86.4 cm وعرضه 111.8 cm وارتفاعه 86.4 cm؟ اشرح.

مراجعة المهارات

حوّل لأبسط صورة.

81. $(2a + 3b) + (8a - 5b)$
82. $(x^2 - 4x + 3) - (4x^2 + 3x - 5)$
83. $(5y + 3y^2) + (-8y - 6y^2)$
84. $2x(3y + 9)$
85. $(x + 6)(x + 3)$
86. $(x + 1)(x^2 - 2x + 3)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

السابق
- جمع وطرح التعابير كثيرة الحدود.

الحالي
1. تحديد المضاعف المشترك الأصغر للدوال كثيرة الحدود.
2. جمع التعابير النسبية وطرحها.

لماذا؟
- بينما تتحرك سيارة إطفاء تجاه شخص، فإن حدة صوت الصافرة تكون أعلى إلى ذلك الشخص عما تكون عليه عندما تكون السيارة ساكنة. وهذا يرجع إلى أن الموجات الصوتية تتضاغط مقتربة من بعضها البعض، وهو ما يُشار إليه باسم *تأثير دوبلر*. يمكن تمثيل تأثير دوبلر بالتعبير النسبي $P_0\left(\frac{s_0}{s_0 - v}\right)$، حيث P_0 هو حدة الصوت الفعلية للصافرة، و v هو سرعة سيارة الإطفاء، و s_0 هو سرعة الصوت في الهواء.

ممارسات في الرياضيات
3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود

مثلما هو الحال مع الأعداد النسبية التي لها شكل كسري، يجب إيجاد المقام المشترك الأصغر لجمع أو طرح تعبيرين نسبيين لهما مقامان مختلفان. والمقام المشترك الأصغر هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات.

عند إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين أو أكثر أو لكثيرات الحدود، فحللها إلى عواملها. يحتوي المضاعف المشترك الأصغر على كل عامل بأكبر عدد مرات يمكن أن تظهر فيها كعامل.

أعداد	كثيرات الحدود
$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$	$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$
المضاعف المشترك الأصغر لـ 6 و 9	**المضاعف المشترك الأصغر لـ $2x^2 - 2$ و $x^2 - 3x + 2$**
$6 = 2 \times 3$	$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$
$9 = 3 \times 3$	$2x^2 - 2 = 2 \times (x - 1)(x + 1)$
المضاعف المشترك الأصغر $= 2 \times 3 \times 3 = 18$	المضاعف المشترك الأصغر $= 2(x - 1)(x - 2)(x + 1)$

مثال 1 المضاعف المشترك الأصغر لأحاديات الحدود وكثيرات الحدود

أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

a. $6xy$، و $15x^2$، و $9xy^4$

$6xy = 2 \times 3 \times x \times y$ — التحليل إلى عوامل أحادية الحدود الأولى.
$15x^2 = 3 \times 5 \times x^2$ — التحليل إلى عوامل أحادية الحدود الثانية.
$9xy^4 = 3 \times 3 \times x \times y^4$ — التحليل إلى عوامل أحادية الحدود الثالثة.
المضاعف المشترك الأصغر $= 2 \times x^2 \times y^4 \times 5 \times 3 \times 3$ — استخدم كل عامل بأكبر عدد مرات تظهر به.
$= 90x^2y^4$ — ثم بسّط.

b. $y^4 + 8y^3 + 15y^2$، و $y^2 - 3y - 40$

$y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$ — التحليل إلى عوامل كثيرة الحدود الأولى.
$y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$ — التحليل إلى عوامل كثيرة الحدود الثانية.
المضاعف المشترك الأصغر $= y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8)$ — استخدم كل عامل أكبر عدد مرات يظهر به.

تمرين موجّه

1A. $12a^2b$، $15abc$، $8b^3c^4$

1B. $4a^2 - 12a - 16$ و $a^3 - 9a^2 + 20a$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 جمع التعابير النسبية وطرحها

مثلما هو الحال مع الكسور، يجب أن يكون للتعابير النسبية مقامات مشتركة لكي يمكن جمعها أو طرحها.

المفهوم الأساسي

جمع التعابير النسبية	
الشرح	لجمع التعابير النسبية، أوجد المقام المشترك الأصغر. أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم أجرِ عملية الجمع.
الرموز	لجميع $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$
طرح التعابير النسبية	
الشرح	لطرح التعابير النسبية، أوجد المقام المشترك الأصغر. أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم أجرِ عملية الطرح.
الرموز	لجميع $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$، حيث $d \neq 0$ و $b \neq 0$. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$

مثال 2 المقامات أحادية الحدود

حوّل لأبسط صورة $\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2}$

$$\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2} = \frac{3y}{2x^3} \times \frac{4y^2}{4y^2} + \frac{5z}{8xy^2} \times \frac{x^2}{x^2}$$ المقام المشترك الأصغر $8x^3y^2$.

$$= \frac{12y^3}{8x^3y^2} + \frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$ ضرب الكسور.

$$= \frac{12y^3 + 5x^2z}{8x^3y^2}$$ جمع البسوط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

2A. $\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$

2B. $\frac{3a^2}{16b^2} - \frac{8x}{5a^3b}$

ويستخدم أيضًا المقام المشترك الأصغر لدمج تعابير نسبية ذات مقامات كثيرة الحدود.

مثال 3 المقامات كثيرة الحدود

حوّل لأبسط صورة $\frac{5}{6x - 18} - \frac{x - 1}{4x^2 - 14x + 6}$

$$\frac{5}{6x - 18} - \frac{x - 1}{4x^2 - 14x + 6} = \frac{5}{6(x - 3)} - \frac{x - 1}{2(2x - 1)(x - 3)}$$ التحليل إلى عوامل المقامين.

$$= \frac{5(2x - 1)}{6(x - 3)(2x - 1)} - \frac{(x - 1)(3)}{2(2x - 1)(x - 3)(3)}$$ الضرب في العوامل المفقودة.

$$= \frac{10x - 5 - 3x + 3}{6(x - 3)(2x - 1)}$$ طرح البسوط.

$$= \frac{7x - 2}{6(x - 3)(2x - 1)}$$ بسّط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3A. $\frac{x - 1}{x^2 - x - 6} - \frac{4}{5x + 10}$

3B. $\frac{x - 8}{4x^2 + 21x + 5} + \frac{6}{12x + 3}$

نصيحة دراسية

تبسيط التعابير النسبية بعد جمع أو طرح تعابير نسبية، قد يكون تبسيط التعبير الناتج أمرًا ممكنًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إحدى طرق تحويل الكسر المركب إلى أبسط صورة هي تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط التعابير الناتجة.

نصيحة دراسية

حدود غير معرّفة تذكر أن هناك قيودًا على المتغيرات الموجودة في المقام.

مثال 4 الكسور المركبة: مقامات مشتركة صغرى مختلفة

حوّل لأبسط صورة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{y}{y}-\frac{x}{y}}$$ المقام المشترك الأصغر للبسط هو x. المقام المشترك الأصغر للمقام هو y.

$$= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$$ تحويل البسط والمقام لأبسط صورة.

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y}$$ الكتابة على هيئة تعبير قسمة.

$$= \frac{x+1}{x} \times \frac{y}{y-x}$$ الضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$ بسّط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

4A. $\dfrac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

4B. $\dfrac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$

طريقة أخرى لتحويل الكسر المركب إلى أبسط صورة هي إيجاد المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات. وبعد ذلك، يتم اختزال جميع المقامات بضربها في المقام المشترك الأصغر.

مثال 5 الكسور المركبة: مقامات مشتركة صغرى متماثلة

حوّل لأبسط صورة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{xy}{xy}$$ المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات هو xy. بالضرب في $\frac{xy}{xy}$.

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$ توزيع xy.

لاحظ أن المسألة ذاتها قد حُلَّت في المثالين 4 و 5 باستخدام طرق مختلفة، وكلتاهما نتجت عنه الإجابة نفسها. وبالتالي، فإن طريقة حل المسائل المشابهة لتلك متروكة لاختيارك.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

5A. $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$

5B. $\dfrac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}$

5C. $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$

5D. $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

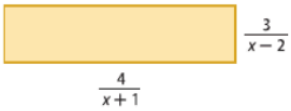
مثال 1 **أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.**

1. $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$
2. $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$
3. $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$
4. $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$

المثالان 2–3 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

5. $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$
6. $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$
7. $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$
8. $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$
9. $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x + 6}$
10. $\frac{8}{y - 3} + \frac{2y - 5}{y^2 - 12y + 27}$
11. $\frac{4}{3x + 6} - \frac{x + 1}{x^2 - 4}$
12. $\frac{3a + 2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a + 24}$

13. **هندسة** أوجد محيط المستطيل.



المثالان 4–5 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

14. $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$
15. $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$
16. $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$
17. $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$

تمرين وحل المسائل

مثال 1 **أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.**

18. $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$
19. $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$
20. $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$
21. $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$

المثالان 2–3 المثابرة **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

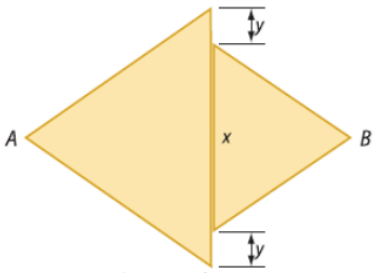
22. $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$
23. $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$
24. $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$
25. $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy}$
26. $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2}$
27. $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$
28. $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$
29. $\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20}$
30. $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$
31. $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$
32. $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$
33. $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$

34. **علم الأحياء** بعدما يتناول الشخص شيئًا ما، فإن الرقم الهيدروجيني أو مستوى الحامض A في الفم يمكن تحديده بالصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2 + 36} + 6.5$، حيث t هو عدد الدقائق المنصرمة منذ أن تناول الطعام.

a. حوّل المعادلة لأبسط صورة.

b. ماذا سيكون مستوى الحامض بعد 30 دقيقة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



35. **الهندسة** كلا المثلثين في الشكل الموجود باليسار متساوي الأضلاع. إذا كانت مساحة المثلث الأصغر $200\ cm^2$ وكانت مساحة المثلث الأكبر $300\ cm^2$. فأوجد أدنى مسافة من A إلى B بدلالة x و y وحوّل لأبسط صورة.

المثالان 4-5 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

36. $\dfrac{\frac{2}{x-3}+\frac{3x}{x^2-9}}{\frac{3}{x+3}-\frac{4x}{x^2-9}}$

37. $\dfrac{\frac{4}{x+5}+\frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6}-\frac{8}{x+5}}$

38. $\dfrac{\frac{5}{x+6}-\frac{2x}{2x-1}}{\frac{x}{2x-1}+\frac{4}{x+6}}$

39. $\dfrac{\frac{8}{x-9}-\frac{x}{3x+2}}{\frac{3}{3x+2}+\frac{4x}{x-9}}$

40. **إنتاج النفط** قدَّر مديرو إحدى شركات النفط بأنه سيتم ضخ النفط من بئر معينة بمعدل يستند إلى الدالة $R(x)=\dfrac{20}{x}+\dfrac{200x}{3x^2+20}$، حيث $R(x)$ هو معدل الإنتاج بآلاف البراميل في العام بعد مرور x أعوام من بدء الضخ.

a. حوّل $R(x)$ لأبسط صورة.

b. ما معدل ضخ النفط من البئر بعد 50 عامًا؟

أوجد المضاعف المشترك الأكبر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

41. $12xy^4, 14x^4y^2, 5xyz^3, 15x^5y^3$

42. $-6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$

43. $x^2-3x-28, 2x^2+9x+4, x^2-16$

44. $x^2-5x-24, x^2-9, 3x^2+8x-3$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

45. $\dfrac{1}{12a}+6-\dfrac{3}{5a^2}$

46. $\dfrac{5}{16y^2}-4-\dfrac{8}{3x^2y}$

47. $\dfrac{5}{6x^2+46x-16}+\dfrac{2}{6x^2+57x+72}$

48. $\dfrac{1}{8x^2-20x-12}+\dfrac{4}{6x^2+27x+12}$

49. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{y}{x+y}-\dfrac{x}{x-y}$

50. $\dfrac{x^2+x}{x^2-9x+8}+\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{x-8}$

51. $\dfrac{\frac{2}{a-1}+\frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2-5a+4}}$

52. $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(x+y)}$

53. **الهندسة** التعبير الذي يمثل طول أحد المستطيلات هو $\dfrac{x^2-9}{x-2}$. ويُعبَّر عن طول مستطيل مشابه بالتعبير $\dfrac{x+3}{x^2-4}$. فما عامل قياس طولي المستطيلين؟ اكتبه في أبسط صورة.

54. **التمثيل بالنماذج** ذهب سعيد في رحلة تجديف مسافتها 20 km. قطع نصف المسافة بمعدل ما. وقطع المسافة المتبقية بمعدل أبطأ بمقدار 2 km/h.

a. إذا كانت x تمثل الوتيرة الأسرع بالكيلومتر في الساعة، فاكتب تعبيرًا يمثل الزمن المنقضي بهذه الوتيرة.

b. اكتب تعبيرًا يمثل مقدار الوقت المنقضي بالسرعة الأبطأ.

c. اكتب تعبيرًا يمثل مقدار الزمن الذي يحتاجه سعيد لإكمال رحلته.

أوجد كيلومتر الخط المار بكل زوج من النقاط.

55. $A\left(\frac{2}{p}, \frac{1}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{p}\right)$

56. $C\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{q}\right)$ و $D\left(\frac{5}{q}, \frac{1}{5}\right)$

57. $E\left(\frac{7}{w}, \frac{1}{7}\right)$ و $F\left(\frac{1}{7}, \frac{7}{w}\right)$

58. $G\left(\frac{6}{n}, \frac{1}{6}\right)$ و $H\left(\frac{1}{6}, \frac{6}{n}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

59. **التصوير الفوتوغرافي** يحدد الطول البؤري للعدسة مجال رؤية الكاميرا. فكلما قصر الطول البؤري، كان مجال الرؤية أكبر. فالتركيز بكاميرا لها طول بؤري ثابت 70 mm على جسم يبعد x mm من العدسة، يجب وضع الفيلم على مسافة y من العدسة. ويُمثَّل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70}$.

a. عبّر عن y كدالة لـ x.

b. ماذا يحدث لمسافة التركيز عندما يكون الجسم على بُعد 70 mm؟

60. **الصيدلة** يتناول أحد المرضى عقارين. يعبر عن تركيزات كل عقار في مجرى الدم بالدالتين $f(t) = \frac{2t}{3t^2 + 9t + 6}$ و $g(t) = \frac{3t}{2t^2 + 6t + 4}$ حيث أن t تمثل الوقت المنقضي بالساعات بعد تناول العقارين.

a. اجمع الدالتين معًا لتحديد دالة تعبر عن التركيز الكلي للعقارين في مجرى الدم للمريض.

b. ما تركيز العقارين بعد مرور 8 ساعات؟

61. **تأثير دوبلر** راجع التطبيق في بداية الدرس. يقف أحمد على مسافة متساوية من سيارتي إطفاء تتحركان في اتجاهه من اتجاهين معاكسين.

a. لنفرض أن x هي سرعة سيارة الإطفاء الأسرع، و y هي سرعة سيارة الإطفاء الأبطأ. اكتب تعبيرًا نسبيًا يمثل اختلاف حدة الصوت بين صافرتي السيارتين بالنسبة لأحمد وحوّله لأبسط صورة.

b. إذا كانت إحدى السيارتين تسير بسرعة 45 مترًا في الثانية، والأخرى تسير بسرعة 70 m/s، فما الاختلاف بين حدة الصوتين بالنسبة لأحمد؟ علمًا بأن سرعة الصوت في الهواء 332 m/s، وكلتا السيارتين لها صافرة بحدة 500 Hz.

62. **بحث** أجرى طالب يدرس سلوكيات التعلم تجربة أرسل خلالها فأرًا إلى متاهة عدة مرات. تم تحديد الوقت الذي استغرقه الفأر لإكمال المتاهة بالدالة النسبية $T(x) = 4 + \frac{10}{x}$، حيث x تمثل عدد مرات المحاولة.

a. ما مجال الدالة؟

b. مثل الدالة بيانيًا حيث $0 \le x \le 10$.

c. اصنع جدولاً للدالة حيث $x = 20$ و 50 و 100 و 200 و 400.

d. لو كان إجراء عدد لا نهائي من المحاولات أمرًا ممكنًا، ففي رأيك ماذا سيكون الوقت الأمثل للفأر؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. **التحدي** حوّل لأبسط صورة $\frac{5x^{-2} - \frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3 - x^{-1}} + 6x^{-1}}$.

64. **فرضيات** مجموع أي عددين نسبيين يساوي دائمًا عددًا نسبيًا. لذا، يقال إن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة في الجمع. حدد ما إذا كانت مجموعة التعابير النسبية مغلقة في عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على تعبير نسبي غير صفري. علل استنتاجك.

65. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ثلاث أحاديات الحدود بمضاعف مشترك أصغر $180a^4b^6c$.

66. **الكتابة في الرياضيات** اكتب دليلاً يشرح طريقة جمع التعابير النسبية ذات المقامات المختلفة. وكيف نقارن ذلك بجميع الأعداد النسبية؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

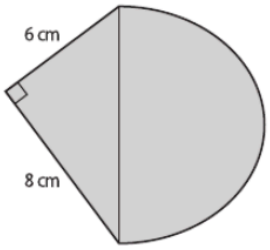
تدريب على الاختبارات المعيارية

67. **الاحتمال** سيتم إقامة سحب لاختيار الفائز بدراجة جديدة. يوجد 100 من طلاب الصف الثالث الثانوي و 150 من طلاب الصف الأول الثانوي و 200 من طلاب الصف الثاني الثانوي لديهم إدخالات صحيحة. سيحتوي السحب على 3 تذاكر لكل اسم من طلاب الصف الثالث، وتذكرتين لكل طالب بالصف الأول، وتذكرة لكل طالب بالصف الثاني. فما احتمالية اختيار تذكرة طالب من طلاب الصف الثالث؟

A $\frac{1}{8}$ C $\frac{2}{7}$

B $\frac{2}{9}$ D $\frac{3}{8}$

68. **إجابة مختصرة** أوجد مساحة الشكل.



69. **SAT/ACT** إذا حصل ناصر على عدد b من الكتب بالإضافة إلى عدد الكتب التي لديه بالفعل، فسيكون لديه t أضعاف العدد الذي لديه في الأساس. بدلالة b و t، كم عدد الكتب التي كانت مع ناصر في البداية؟

F $\frac{b}{t-1}$ J $\frac{b}{t}$

G $\frac{b}{t+1}$ K $\frac{t}{b}$

H $\frac{t+1}{b}$

70. إذا كان $\frac{2a}{a} + \frac{1}{a} = 4$، فإن $a =$ ____.

A 2 C $\frac{1}{8}$

B $\frac{1}{2}$ D $-\frac{1}{8}$

مراجعة شاملة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 1-9)

71. $\frac{-4ab}{21c} \cdot \frac{14c^2}{22a^2}$

72. $\frac{x^2 - y^2}{6y} \div \frac{x + y}{36y^2}$

73. $\frac{n^2 - n - 12}{n + 2} \div \frac{n - 4}{n^2 - 4n - 12}$

74. **علم الأحياء** تتكاثر الجراثيم عادة بعملية تعرف باسم الانقسام الثنائي. في هذا النوع من التكاثر، تنقسم الجرثومة الواحدة مكوّنة جرثومتين. في ظل الظروف المثالية، تتكاثر بعض الجراثيم كل 20 دقيقة.

a. أوجد الثابت k لهذا النوع من الجراثيم في ظل الظروف المثالية.

b. اكتب معادلة تمثل نموذجًا للنمو الأسي لهذه الجراثيم.

مثّل كل دالة بيانيًا. حدد المجال والمدى لكل دالة.

75. $y = -\sqrt{2x + 1}$

76. $y = \sqrt{5x - 3}$

77. $y = \sqrt{x + 6} - 3$

78. $y = 5 - \sqrt{x + 4}$

79. $y = \sqrt{3x - 6} + 4$

80. $y = 2\sqrt{3 - 4x} + 3$

حُلّ كل من المعادلات التالية. اذكر عدد الجذور ونوعها

81. $3x + 8 = 0$

82. $2x^2 - 5x + 12 = 0$

83. $x^3 + 9x = 0$

84. $x^4 - 81 = 0$

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة بيانيًا.

85. $y = 4(x + 3)^2 + 1$

86. $y = -(x - 5)^2 - 3$

87. $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$

88. $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 5$

89. $y = x^2 + 6x + 2$

90. $y = x^2 - 8x + 18$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

السابق
- قمتَ بتمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.

الحالي
1. تحديد خصائص دوال المقلوب.
2. تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانيًا.

لماذا
- يود فريق إنشاد مدرسة الخالدية الثانوية جمع AED 5000 لتمويل رحلة إلى المسابقة الوطنية في دبي. وقد قرروا بيع قطع الحلوى. سيحقق الفريق أرباحًا بمقدار AED 1 لكل قطعة حلوى يبيعونها. ولذا سيحتاجون إلى بيع 5000 قطعة حلوى.

فإذا كانت c تمثل عدد قطع الحلوى التي ينبغي على الطلاب بيعها و n تمثل عدد الطلاب، فإن $c = \frac{5000}{n}$

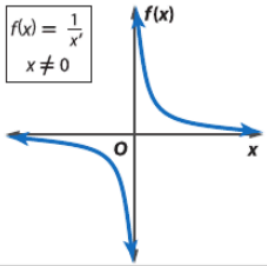
مفردات جديدة
دالة المقلوب reciprocal function
قطع زائد hyperbola

ممارسات في الرياضيات
2 التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 خطوط التقارب الرأسية والأفقية

تعتبر الدالة $c = \frac{5000}{n}$ دالة مقلوب. وتضم **دالة المقلوب** معادلة لها الصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسية لدوال المقلوب



الدالة الرئيسية:	$f(x) = \frac{1}{x}$
نوع التمثيل البياني:	قطع زائد
المجال والمدى:	جميع الأعداد الحقيقية غير الصفرية
خطوط التقارب:	$x = 0$ و $f(x) = 0$
نقاط التقاطع:	لا يوجد
غير معرَّفة:	$x = 0$

يتقيد مجال دالة المقلوب بالقيم التي تكون الدالة عندها معرَّفة.

الدوال:	$h(x) = \frac{3}{x}$	$g(x) = \frac{4}{x-5}$	$f(x) = \frac{-3}{x+2}$
غير معرَّفة عند:	$x = 0$	$x = 5$	$x = -2$

مثال 1 القيود على المجال

حدد قيمة x التي تكون عندها $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ غير معرَّفة.

أوجد القيمة التي تجعل مقام التعبير يساوي 0.

$$\frac{3}{2x+5} \rightarrow 2x + 5 = 0$$

الدالة غير معرَّفة عندما تكون $x = -\frac{5}{2}$. $x = -\frac{5}{2}$

تمرين موجّه

حدد قيمة x التي تجعل كل دالة غير معرَّفة.

1A. $f(x) = \frac{2}{x-1}$

1B. $f(x) = \frac{7}{3x+2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قد يحتوي التمثيل البياني لدالة المقلوب على انقطاعات في الاستمرارية للقيم المستثناة. وقد يحتوي البعض على خط تقارب، وهو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

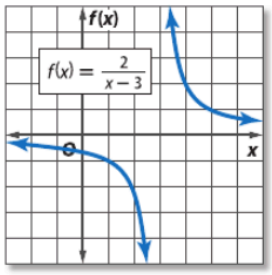
نصيحة دراسية

البنية توضح خطوط التقارب الرأسية متى تكون الدالة غير معرَّفة، بينما توضح خطوط التقارب السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

مثال 2 تحديد خصائص دوال المقلوب

حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.

a.



حدد قيم x التي تكون فيها $f(x)$ غير معرّفة.

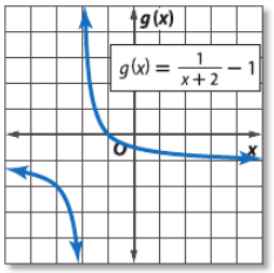
$x - 3 = 0$
$x = 3$

تكون الدالة $f(x)$ غير معرفة إذا كانت $x = 3$. إذًا، يوجد خط تقارب عند $x = 3$.

من $x = 3$، مع تناقص قيم x، تقترب قيم $f(x)$ من 0، ومع تزايد قيم x، تقترب قيم $f(x)$ من 0. إذًا، يوجد خط تقارب عند $f(x) = 0$.

المجال هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 3 والمدى هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 0.

b.



حدد قيم x التي تكون فيها $g(x)$ غير معرَّفة.

$x + 2 = 0$
$x = -2$

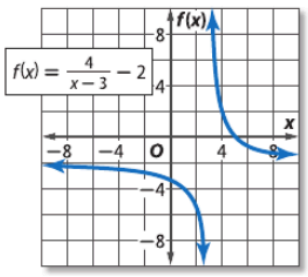
تكون الدالة $g(x)$ غير معرفة إذا كانت $x = -2$. إذًا، يوجد خط تقارب عند $x = -2$.

من $x = -2$، بينما تتناقص قيم x، تقترب قيم $g(x)$ من -1، وبينما تتزايد قيم x، تقترب قيم $g(x)$ من -1. إذًا، يوجد خط تقارب عند $g(x) = -1$.

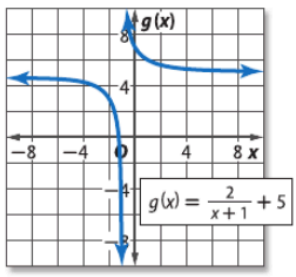
المجال هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد -2 والمدى هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد -1.

تمرين موجّه

2A.



2B.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 تحويلات دوال المقلوب

يُمكن تطبيق الأساليب ذاتها المستخدمة في تحويل التمثيل البياني للدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية لدوال المقلوب. في المثال 2، لاحظ أن الخط التقارب تم تحريكه مع التمثيل البياني للدوال.

المفهوم الأساسي تحويلات دوال المقلوب

$$f(x) = \frac{a}{x - h} + k$$

h – الإزاحة الأفقية	k – الإزاحة الرأسية
h وحدات جهة اليمين إذا كانت h موجبة	k وحدات لأعلى إذا كانت k موجبة
$\lvert h \rvert$ وحدات جهة اليسار إذا كانت h سالبة	$\lvert k \rvert$ وحدات لأسفل إذا كانت k سالبة
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = h$.	يوجد خط تقارب أفقي عند $f(x) = k$.

(a) الاتجاه والشكل

إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x.

إذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يمتد رأسيًا.
إذا كانت $0 < |a| < 1$، فإن التمثيل البياني ينضغط رأسيًا.

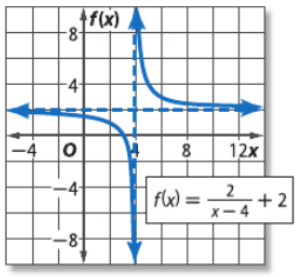
نصيحة دراسية

خطوط التقارب تتحرك خطوط التقارب لدالة المقلوب مع التمثيل البياني للدالة وتتقاطع عند النقطة (h, k).

مثال 3 التمثيل البياني للتحويلات

مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

a. $f(x) = \frac{2}{x - 4} + 2$



يمثل هذا تحويلاً للتمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{x}$.

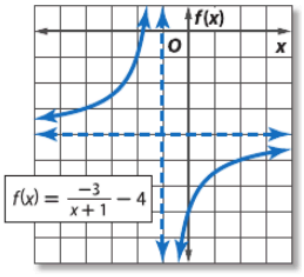
$a = 2$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا.

$h = 4$: تمت إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لليمين.
يوجد خط تقارب عند $x = 4$.

$k = 2$: تمت إزاحة التمثيل البياني وحدتين لأعلى.
يوجد خط تقارب عند $f(x) = 2$.

المجال: $\{x | x \neq 4\}$ المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 2\}$

b. $f(x) = \frac{-3}{x + 1} - 4$



يمثل هذا تحويلاً للتمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{x}$.

$a = -3$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا وينعكس على المحور x.

$h = -1$: تمت إزاحة التمثيل البياني وحدة واحدة لليسار.
يوجد خط تقارب عند $x = -1$.

$k = -4$: تمت إزاحة الرسم البياني 4 وحدات لأسفل.
يوجد خط تقارب عند $f(x) = -4$.

المجال: $\{x | x \neq -1\}$ المدى: $\{f(x) | f(x) \neq -4\}$

تمرين موجّه

3A. $f(x) = \frac{-2}{x + 4} + 1$

3B. $g(x) = \frac{1}{3(x - 1)} - 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مهنة من الحياة اليومية

وكيل الرحلات يقيّم وكلاء الرحلات احتياجات الشركات والأفراد ليساعدوهم على تنظيم أفضل ترتيبات سفر ممكنة. وقد تتنوع تخصصاتهم بحسب نوع السفر مثل السفر بغرض الترفيه أو العمل أو بحسب الوجهة مثل أوروبا وإفريقيا. يتطلب العمل شهادة مدرسة ثانوية، ويفضل الحصول على تدريب مهني.

مثال 4 من الحياة اليومية كتابة المعادلات

السفر لدى أحد خطوط الطيران رحلة يومية دون توقف بين وكاليفورنيا وأستراليا. وتبلغ مسافة رحلة الذهاب فقط نحو 7500 km.

a. اكتب معادلة لتمثل وقت السفر كدالة لسرعة الرحلة الجوية. ثم مثل المعادلة بيانيًا.

أوجد حل $rt = d$ لإيجاد قيمة t.

المعادلة الأصلية

$rt = d$

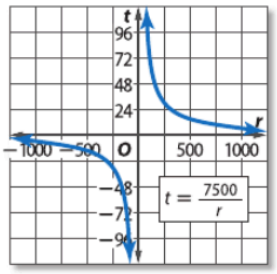
اقسم كل طرف على r.

$t = \frac{d}{r}$

$d = 7500$

$t = \frac{7500}{r}$

مثّل $t = \frac{7500}{r}$ بيانيًا.



b. اشرح أي حدود على المجال أو المدى في هذا الموقف.

في هذا الموقف، يكون المجال والمدى محددين بكافة الأعداد الحقيقية التي تزيد عن صفر لأن القيم السالبة ليس لها معنى. سيكون هناك المزيد من القيود على المجال لأن الطائرة لها حد أقصى وحد أدنى للسرعات التي يمكنها السفر بها.

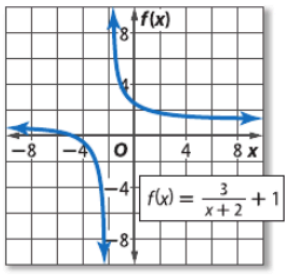
تمرين موجّه

4. **التخرج** يمول مسؤولو الصفين الأول والثالث الثانوي حفل تخرج. وتبلغ التكلفة الإجمالية للمرافق والطعام AED 45 للشخص بالإضافة إلى AED 2500 كمبلغ تأميني. اكتب معادلة تمثل متوسط التكلفة للشخص الواحد ومثلها بيانيًا. ثم اشرح أي حدود على المجال والمدى.

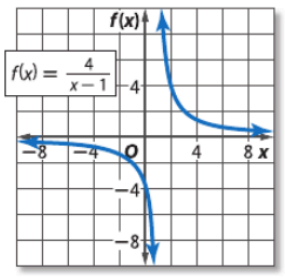
التحقق من فهمك

المثالان 1-2 حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.

1.



2.



مثال 3 مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

3. $f(x) = \frac{5}{x}$

4. $f(x) = \frac{2}{x+3}$

5. $f(x) = \frac{-1}{x-2} + 4$

مثال 4 6. **التبرير المنطقي** تخطط مجموعة من الأصدقاء لتقديم قسيمة هدية لقائد المجموعة الشبابية لقضاء يوم في منتجع صحي. تبلغ تكلفة القسيمة AED 150.

a. إذا كانت c تمثل التكلفة على كل صديق وكانت f تمثل عدد الأصدقاء، فاكتب معادلة لتمثيل التكلفة على كل صديق كدالة لعدد الأصدقاء الذين قدموا المال.

b. مثل الدالة بيانيًا.

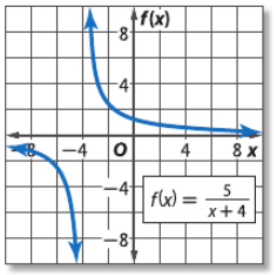
C. وضح أي قيود على المجال أو المدى في هذا الموقف.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

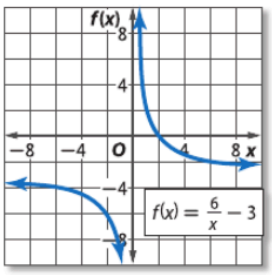
تمرين وحل المسائل

المثالان 1-2 حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.

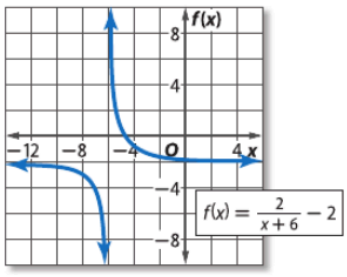
7.



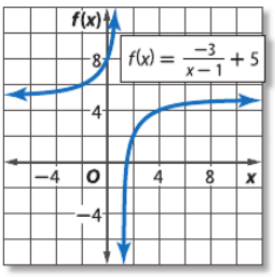
8.



9.



10.



مثال 3 مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

11. $f(x) = \frac{3}{x}$

12. $f(x) = \frac{-4}{x+2}$

13. $f(x) = \frac{2}{x-6}$

14. $f(x) = \frac{6}{x} - 5$

15. $f(x) = \frac{2}{x} + 3$

16. $f(x) = \frac{8}{x}$

17. $f(x) = \frac{-2}{x-5}$

18. $f(x) = \frac{3}{x-7} - 8$

19. $f(x) = \frac{9}{x+3} + 6$

20. $f(x) = \frac{8}{x+3}$

21. $f(x) = \frac{-6}{x+4} - 2$

22. $f(x) = \frac{-5}{x-2} + 2$

مثال 4

23. **قيادة الدراجات** اتخذ منير قرارًا بالعام الجديد أن يقود دراجته 5000 km.

a. إذا كانت m تمثل عدد الكيلومترات التي يقودها منير يوميًا وتمثل d عدد الأيام، فاكتب معادلة تمثل عدد الكيلو مترات يوميًا كدالة لعدد الأيام التي يقود فيها.

b. مثل الدالة بيانيًا.

c. إذا قاد منير دراجته في كل يوم من العام، فكم عدد الكيلومترات التي ينبغي عليه أن يقطعه كل يوم لتحقق هدفه.

24. **التمثيل بالنماذج** لدى عمر 200 g من سائل مجهول. ستساعده معرفة الكثافة على اكتشاف ماهية السائل.

a. يتم إيجاد كثافة أي سائل عن طريق قسمة الكتلة على الحجم. اكتب معادلة تمثل كثافة هذا السائل المجهول كدالة للحجم

b. مثل الدالة بيانيًا.

c. من التمثيل البياني، حدد خطوط التقارب ومجال ومدى الدالة.

مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

25. $f(x) = \frac{3}{2x-4}$

26. $f(x) = \frac{5}{3x}$

27. $f(x) = \frac{2}{4x+1}$

28. $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29. **البيسبول** تبلغ المسافة بين مكان الرامي والقاعدة الرئيسية 18.4 m.

a. إذا كانت r تمثل سرعة الرمي وكانت t تمثل الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى القاعدة، فاكتب معادلة لتمثيل السرعة كدالة للزمن.

b. مثل الدالة بيانيًا.

c. إذا وصلت كرة بيسبول مضروبة بطريقة الإصبعين في 0.48 s، فماذا كانت سرعتها؟

مثِّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى وحدد خطوط التقارب.

30. $f(x) = \frac{-3}{x+7} - 1$

31. $f(x) = \frac{-4}{x+2} - 5$

32. $f(x) = \frac{6}{x-1} + 2$

33. $f(x) = \frac{2}{x-4} + 3$

34. $f(x) = \frac{-7}{x-8} - 9$

35. $f(x) = \frac{-6}{x-7} - 8$

36. **المعرفة المالية** انطلقت سيارة لميس 708 km مستهلكة خزانًا واحدًا من الوقود.

a. إذا كانت g تمثل عدد الكيلومترات بالنسبة إلى اللتر الذي استهلكته السيارة وكانت t تمثل حجم خزان الوقود، فاكتب معادلة لتمثيل النسبة بين الكيلومترات واللترات كدالة لحجم الخزان.

b. مثل الدالة بيانيًا. a

c. كم عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة لكل لتر إذا كان بها خزان وقود بسعة 56 L؟

37. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة ستستكشف أوجه التشابه والاختلاف بين الدوال الأسية ذات الأسس السالبة والموجبة.

a. الجدولة ضع جدولاً بالقيم لـ $a(x) = x^2$ و $b(x) = x^{-2}$ و $c(x) = x^3$ و $d(x) = x^{-3}$.

b. التمثيل البياني مثّل $a(x)$ و $b(x)$ بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.

c. الصيغ اللفظية قارن بين المجال والمدى والسلوك الطرفي والسلوك عندما تكون $x = 0$ لكل من $a(x)$ و $b(x)$.

d. التمثيل البياني مثّل $c(x)$ و $d(x)$ بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.

e. الصيغ اللفظية قارن بين المجال والمدى والسلوك الطرفي والسلوك عندما تكون $x = 0$ لكل من $c(x)$ و $d(x)$.

f. التحليلات ما الاستنتاجات التي توصلت إليها بشأن أوجه التشابه والاختلاف بين الدوال الأسية ذات الأسس السالبة والموجبة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

38. **مسألة غير محددة** الإجابة اكتب دالة مقلوب يحتوي فيها التمثيل البياني على خط تقارب رأسي عند $x = -4$ وخط التقارب الأفقي عند $f(x) = 6$.

39. **التبرير** قارن وبين الفرق بين التمثيل البياني لكل زوجين من المعادلات.

a. $y = \frac{1}{x}$ و $y - 7 = \frac{1}{x}$

b. $y = \frac{1}{x}$ و $y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$

c. $y = \frac{1}{x}$ و $y = \frac{1}{x+5}$

d. بدون وضع جدول بالقيم، استخدم ما لاحظته في الأجزاء a-c لرسم تمثيل بياني لـ $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$.

40. **الفرضيات** أوجد الدالة التي لا تنتمي للمجموعة. اشرح.

$f(x) = \frac{3}{x+1}$ | $g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ | $h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$ | $j(x) = \frac{20}{x-7}$

41. **التحدي** اكتب دالتي مقلوب مختلفتين بحيث يحتوي تمثيلهما البياني على نفس خطوط التقارب الرأسية والأفقية. ثم مثّل الدالتين بيانيًا.

42. **الكتابة في الرياضيات** راجع بداية الدرس. اشرح كيفية استخدام الدوال النسبية في جمع الأموال. اشرح السبب وراء كون جزء واحد من التمثيل البياني ذا معنى في سياق المسألة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

43. إجابة مختصرة ما قيمة $(x + y)(x + y)$ إذا كانت $xy = -3$ و $x^2 + y^2 = 10$؟

44. إجابة شبكية إذا كانت $x = 2y$ و $y = 4z$ و $2z = w$ و $w \neq 0$، فإن $\frac{x}{w} =$ ____.

45. إذا كانت $c = 1 + \frac{1}{d}$ و $d > 1$، فإن c قد تساوي ____.

A $\frac{5}{7}$ **C** $\frac{15}{7}$

B $\frac{9}{7}$ **D** $\frac{19}{7}$

46. *SAT/ACT* تتحرك سيارة مسافة m كيلومتر بمعدل t كيلومتر في الساعة. فكم عدد الساعات التي تستغرقها الرحلة؟

F $\frac{m}{t}$ **J** $\frac{t}{m}$

G $m - t$ **K** $t - m$

H mt

47. إذا كانت $-1 < a < b < 0$. فأي مما يلي له القيمة الأكبر؟

A $a - b$ **C** $a + b$

B $b - a$ **D** $2b - a$

مراجعة شاملة

48. الأعمال التجارية قررت شركة صغيرة تقسيم 8% من أرباحها على مديريها الستة. يوجد في الشركة مديرا مبيعات وأربعة مديرين آخرين. سيتم تقسيم خمسين بالمائة بالتساوي على المديرين الستة. بينما سيتم تقسيم الـ 50% الأخرى على المديرين الأربعة الذين لا يعملون في المبيعات. افترض أن P تمثل الأرباح. (الدرس 2-9)

a. اكتب تعبيرًا لتمثيل حصة الأرباح التي سيتلقاها كل مدير لا يعمل في المبيعات.

b. حوّل التعبير لأبسط صورة.

c. اكتب تعبيرًا في أبسط صورة لتمثيل حصة الأرباح التي سيتلقاها كل مدير مبيعات.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 1-9)

49. $\dfrac{\frac{p^3}{2n}}{-\frac{p^2}{4n}}$ **50.** $\dfrac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}}$ **51.** $\dfrac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

52. $y = 2(3)^x$ **53.** $y = 5(2)^x$ **54.** $y = 0.5(4)^x$ **55.** $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

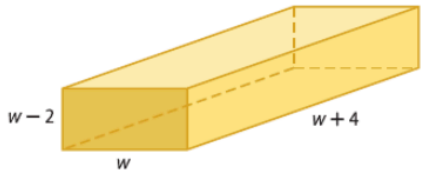
أوجد قيمة $(f + g)(x)$، و $(f - g)(x)$، و $(f \times g)(x)$، و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$ و $g(x)$.

56. $f(x) = x + 9$
$g(x) = x - 9$

57. $f(x) = 2x - 3$
$g(x) = 4x + 9$

58. $f(x) = 2x^2$
$g(x) = 8 - x$

59. الهندسة يبلغ عرض متوازي المستطيلات w cm. ويقل ارتفاعه عن عرضه بـ 2 cm. ويزيد طوله عن عرضه بـ 4 cm. إذا كان حجم المتوازي يساوي 8 أمثال قياس طوله، فأوجد أبعاد المتوازي.



مراجعة المهارات

مثل بيانيًا كل دالة كثيرة الحدود. قدّر إحداثيات المحور الأفقي x التي تحدث عندها القيمتان النسبيتان العظمى والصغرى. حدد المجال والمدى لكل من الدوال التالية.

60 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

61. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 9-1 إلى 9-3

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 9-1)

1. $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y}$

2. $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c}$

3. $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18}$

4. $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$

5. $\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$

6. $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$

7. **الاختيار من متعدد** لجميع قيم $r \neq \pm 2$، $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4} =$ ___. (الدرس 9-1)

A $\frac{r-2}{r+4}$

C $\frac{r+2}{r-4}$

B $\frac{r+4}{r-2}$

D $\frac{r+4}{r+2}$

8. **الاختيار من متعدد** حدد جميع قيم x التي تكون عندها $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرفة. (الدرس 9-1)

F $-3, -1$

H $-3, -1, 9$

G $3, 1, -9$

J -1

9. ما المضاعف المشترك الأصغر لكل من $3x - 3$ و $x^2 - x$؟ (الدرس 9-2)

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 9-2)

10. $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3}$

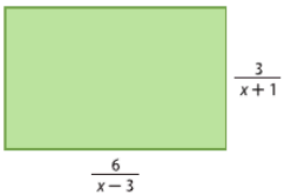
11. $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n}$

12. $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6}$

13. $\frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y}$

14. $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8}$

15. حدد محيط المستطيل. (الدرس 9-2)



16. **السفر** تذهب وفاء إلى شاطئ يبعد 100 km. قطعت نصف المسافة بمعدل مـ ا. وقطعت المسافة المتبقية بمعدل أبطأ بمقدار 15 km/h. (الدرس 9-2)

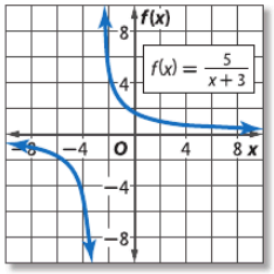
a. إذا كانت x تمثل الوتيرة الأسرع بالكيلومتر في الساعة، فاكتب تعبيرًا ا يمثل الزمن المنقضي بهذه الوتيرة.

b. اكتب تعبيرًا ا يمثل مقدار الزمن المنقضي بالسرعة الأبطأ.

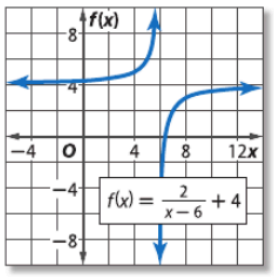
c. اكتب تعبيرًا ا يمثل مقدار الزمن الذي تحتاجه وفاء لإكمال رحلتها.

حدّد خطوطالتقارب والمجال والمدى لكل دالة. (الدرس 9-3)

17.



18.



مثل بيانيًا كل دالة مقلوب. واذكر ا لمجال والمدى. (الدرس 9-3)

19. $f(x) = \frac{4}{x}$

20. $f(x) = \frac{1}{3x}$

21. $f(x) = \frac{6}{x-1}$

22. $f(x) = \frac{-2}{x} + 4$

23. $f(x) = \frac{3}{x+2} - 5$

24. $f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2$

25. **الشطائر** تصنع مجموعة 45 شطيرة لتتناولها في نزهة. يعتمد عدد الشطائر التي يستطيع كل فرد تناولها على عدد الأشخاص المشاركين في الرحلة. (الدرس 9-3)

a. اكتب دالة لتمثيل هذه الحالة.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 9-4

التمثيل البياني للدوال النسبية

السابق
- قمتَ بتمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

الحالي
1. تمثيل الدوال النسبية ذات خطوط تقارب الأفقية والرأسية بيانيًا.
2. تمثيل الدوال النسبية ذات خط التقارب المائل ونقطة الانفصال بيانيًا.

لماذا؟
- اشترت رنا آلة تصوير ذات عدسة أحادية عاكسة وطابعة صور مقابل 350 AED. ويزعم المصنّع أن الحبر وورقة الصورة تكلف 0.47 AED للصورة الواحدة. ويمكن استخدام الدالة النسبية $C(p) = \frac{0.47p + 350}{p}$ لتحديد متوسط التكلفة $C(p)$ لطباعة p صورة.

مفردات جديدة

دالة نسبية rational function
خط تقارب رأسي vertical asymptote
خط تقارب أفقي horizontal asymptote
خط تقارب مائل oblique asymptote
نقطة الانفصال (عدم الاتصال) point discontinuity

ممارسات في الرياضيات

7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها

1 خطوط التقارب الأفقية والرأسية

لإحدى **الدوال النسبية** معادلة في الصيغ $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$. حيث إن $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$.

ولتمثيل دالة نسبية بيانيًا، فمن المفيد تحديد موقع الأصفار وخطوط التقارب.

يقع صفر الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ عند أي قيمة لـ x يكون فيها $a(x) = 0$.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب الأفقية والرأسية

الشرح

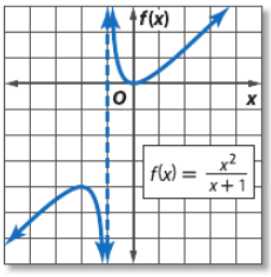
إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، وكان $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود ليس بينهما أي عوامل مشتركة سوى 1، وكان $b(x) \neq 0$، فإن:

- $f(x)$ لها **خط تقارب رأسي** عندما تكون $b(x) = 0$.
- $f(x)$ لها **خط تقارب أفقي** واحد على الأكثر.
  - إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$، فلا يوجد خط تقارب أفقي.
  - إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$، فسيكون خط التقارب الأفقي هو الخط $y = 0$.
  - إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$، فسيكون خط التقارب

$$\text{الخط الأفقي هو } y = \frac{\text{المعامل الرئيسي لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيسي لـ } b(x)}$$

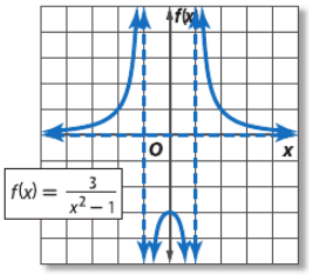
أمثلة

لا يوجد خط تقارب أفقي

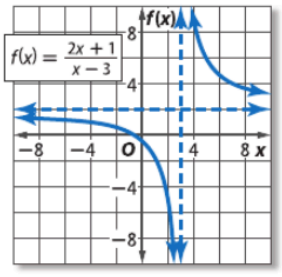


خط التقارب الرأسي:
$x = -1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد



خطوط التقارب الرأسية:
$x = -1, x = 1$
خط التقارب الأفقي:
$f(x) = 0$



خط التقارب الرأسي:
$x = 3$
خط التقارب الأفقي:
$f(x) = 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن استخدام خط التقارب للدالة النسبية لرسم التمثيل البياني للدالة. إضافة إلى ذلك، يمكن استخدام خطوط التقارب لقسمة التمثيل البياني إلى مناطق لإيجاد الأزواج المرتبة على التمثيل البياني.

انتبه!
الأصفار مقابل خطوط ال تقارب الرأسية تقع أصفار الدالة النسبية عند القيم التي تجعل البسط مساويًا للصفر. وتقع الخطوط المقابلة الرأسية عند القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر.

مثال 1 التمثيل البياني بدون خط تقارب أفقي

مثّل $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ بيانيًا.

الخطوة 1 أوجد الأصفار.

$x^3 = 0$ اجعل $n(x) = 0$.

$x = 0$ بأخذ الجذر التكعيبي لكل طرف.

يوجد صفر عند $x = 0$.

الخطوة 2 ارسم خط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

$x - 1 = 0$ افترض أن $b(x) = 0$.

$x = 1$ اجمع 1 إلى كل طرف.

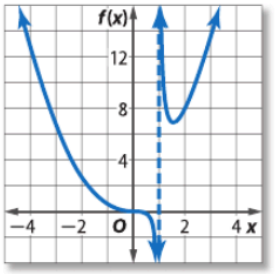
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 1$.

حيث إن درجة البسط أكبر من درجة المقام، إذًا، لا يوجد خط تقارب أفقي.

الخطوة 3 ارسم التمثيل البياني.

استخدم الجدول لإيجاد الأزواج المرتبة على التمثيل البياني. ثم صل النقاط ببعضها البعض.

x	$f(x)$
−3	6.75
−2	2.67
−1	0.5
0	0
0.5	−0.25
1.5	6.75
2	8
3	13.5



نصيحة دراسية
حاسبة التمثيل البياني يمكن استخدام خاصية TABLE في حاسبة التمثيل البياني لحساب قيم الكسور العشرية لكل من x و y.

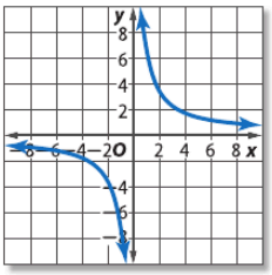
تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًا.

1A. $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$

1B. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x+2)^2}$

وفي الحياة اليومية، في بعض الأحيان تكون القيم الموجودة على التمثيل البياني لدالة نسبية غير ذات معنى. في التمثيل البياني الموجود على اليسار، لا يمكن أن تكون قيم x مثل الوقت والمسافة وعدد الأشخاص سالبة في سياق المسألة. لذا لن تحتاج إلى اعتبار هذا الجزء من التمثيل البياني.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مهنة من الحياة اليومية

رفيق رئيس بحارة حرس السواحل الأمريكي تعتبر أكثر أعضاء فريق عمليات حرس السواحل الأمريكي تنوعًا في المهام. ويستطيع رفقاء رؤساء بحارة حرس السواحل الأمريكي القيام بأي مهمة مطلوبة. ويتم التدرب لمهنة رفيق رئيس بحارة حرس السواحل الأمريكي من خلال 12 أسبوعًا من التدريب المكثف.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام التمثيل البياني للدوال النسبية

متوسط السرعة تحرك قارب عكس التيار على سرعة r_1 كيلومتر في الساعة. أثناء رحلة العودة إلى نقطة البدء الأصلية، تحرك القارب بسرعة r_2 كيلومتر في الساعة. وتقدم متوسط السرعة للرحلة كاملة R من خلال القانون $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

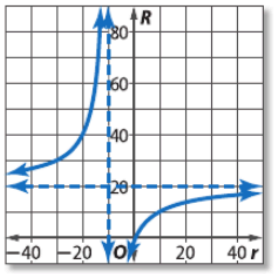
a. افترض أن r_1 هو المتغير المستقل وافترض أن R هو المتغير التابع. ارسم التمثيل البياني إذا كان $r_2 = 10$ أميال في الساعة.

تكون الدالة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + (10)}$ أو $R = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$.

ويكون خط التقارب الرأسي $r_1 = -10$.

مثل خط التقارب الرأسي والدالة بيانيًا.

لاحظ أن خط التقارب الأفقي $R = 20$.



b. ما تقاطع R للتمثيل البياني؟

التقاطع مع R هو 0.

c. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، قيم السرعات غير سالبة. وبالتالي تكون جميع قيم r_1 الأكبر من أو تساوي 0 وقيم R التي تقع بين العددين 0 و 20 ذات معنى.

تمرين موجّه

2. **الرواتب** تستخدم إحدى الشركات القانون $S(x) = \frac{45x + 25}{x + 1}$ لتحديد الراتب السنوي بآلاف الدراهم للموظف أثناء عامه الـ x. مثّل $S(x)$ بيانيًا. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟ وما معنى خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني؟

2 خطوط التقارب المائلة ونقطة عدم الاتصال

يعتبر **خط التقارب المائل**، والذي يطلق عليه في بعض الأحيان خط *التقارب* المنحدر خطًا ليس بأفقي ولا رأسي.

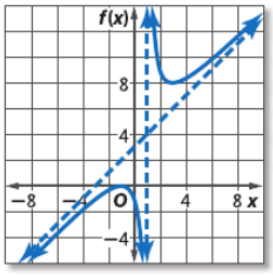
المفهوم الأساسي خط التقارب المائل

الشرح إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، وكان $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود ليس بينهما أي عوامل مشتركة سوى 1 وكانت $b(x) \neq 0$، فإن $f(x)$ لها خط تقارب مائل إذا كانت درجة $a(x)$ مطروحًا منها درجة $b(x)$ تساوي 1. وتكون معادلة خط التقارب هي $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ بدون باقٍ.

مثال $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3}{x^3 - 1}$

خط التقارب الرأسي: $x = 1$

خط التقارب المائل: $f(x) = x + 3$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

خط التقارب المائل يقع خط التقارب المائل في الدوال النسبية التي تشتمل على بسط كثير الحدود أعلى درجة واحدة من مقام كثير الحدود.

مثال 3 حدد خط التقارب المائل

مثّل $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{2x - 1}$ بيانيًا.

الخطوة 1 أوجد الأصفار.

$x^2 + 4x + 4 = 0$ اجعل $a(x) = 0$.

$(x + 2)^2 = 0$ عامل.

$x + 2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

$x = -2$ اطرح 2 من كل طرف.

يوجد صفر عند $x = -2$.

الخطوة 2 أوجد خط التقارب.

$2x - 1 = 0$ اجعل $b(x) = 0$.

$2x = 1$ اجمع 1 إلى كل طرف.

$x = \frac{1}{2}$ اقسم كل طرف على 2.

يوجد خط تقارب رأسي عند $x = \frac{1}{2}$.

حيث إن درجة البسط أكبر من درجة المقام، إذًا يوجد خط تقارب أفقي.

حيث إن الفارق بين درجة البسط ودرجة المقام يساوي 1.
إذًا يوجد خط تقارب مائل.

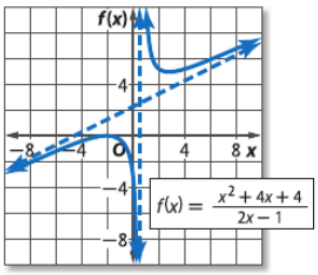
اقسم البسط على المقام لتحدد معادلة خط التقارب المائل.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + \frac{9}{4} \\ 2x - 1 \overline{)\, x^2 + 4x + 4} \\ (-)x^2 - \frac{1}{2}x \\ \hline \frac{9}{2}x + 4 \\ (-)\frac{9}{2}x - \frac{9}{4} \\ \hline \frac{25}{4} \end{array}$$

إن معادلة خط التقارب هي ناتج القسمة باستثناء أي باق.

وبالتالي، فإن خط التقارب المائل هو الخط $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$

الخطوة 3 ارسم خط التقارب، ثم استخدم قيم الجدول لتمثيل الدالة بيانيًا.



تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًا.

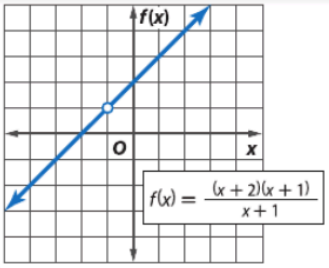
3A. $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

3B. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$

وفي بعض الحالات، قد يحتوي التمثيل البياني للدوال النسبية على **نقطة انفصال**، والتي تشبه الفجوة في التمثيل البياني. ويرجع ذلك إلى أن الدالة تكون غير محددة في هذه النقطة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي نقطة الانفصال



الشرح إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$. $b(x) \neq 0$ عوامل $x - c$ لكل من $a(x)$ و $b(x)$. فسيوجد نقطة الانفصال عند $x = c$.

مثال

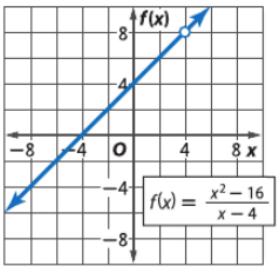
$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$
$$= x + 2; x \neq -1$$

انتبه!

الفجوات تذكر أن العامل المشترك بين البسط والمقام يمكن أن يشير لوجود فجوة.

مثال 4 مثّل بيانيًا مع نقطة الانفصال

مثّل $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ بيانيًا.



لاحظ أن $\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x + 4$

وبالتالي، فإن التمثيل البياني $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ هو التمثيل البياني $f(x) = x + 4$ مع فجوة عند $x = 4$.

تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًا.

4A. $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$

4B. $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 9}$

التحقق من فهمك

مثال 1 **مثّل كل دالة بيانيًا.**

1. $f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^2 - 1}$

2. $f(x) = \frac{x^3}{x + 2}$

مثال 2

3. التبرير يتخذ حسن موقع المهاجم بفريق كرة القدم لمدرسته الثانوية. وفي هذا الموسم، حقق حتى الآن 7 من 11 هدفًا. ويود تحسين نسبة الأهداف الخاصة به. فإذا كان بإمكانه تحقيق x هدفًا متتابعًا، فيمكن تحديد نسبه أهدافه باستخدام الدالة $P(x) = \frac{7 + x}{11 + x}$.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذي معنى في سياق المسألة؟

c. اذكر معنى تقاطع المحور الرأسي.

d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناها فيما يتعلق بنسبة أهداف حسن.

الأمثلة 3–4 **مثّل كل دالة بيانيًا.**

4. $f(x) = \frac{6x^2 - 3x + 2}{x}$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 2}$

6. $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$

7. $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين وحل المسائل

مثال 1 **مثّل كل دالة بيانيًا.**

8. $f(x) = \dfrac{x^4}{6x + 12}$

9. $f(x) = \dfrac{x^3}{8x - 4}$

10. $f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 1}$

11. $f(x) = \dfrac{x^3 + 64}{16x - 24}$

مثال 2

12. **الروح المدرسية** بصفتها رئيسة لمجلس الطلاب، أمرت بدرية بصنع قمصان لتجمع طلاب تشجيعي. ويكلف كل قميص 9.50 AED، كما يوجد رسوم إدارية بمبلغ 75 AED. ويخطط مجلس الطلاب لبيع القمصان، ولكن سيحصل كل من أعضاء مجلس الطلاب البالغ عددهم 15 طالبًا على قميص مجانًا.

a. اكتب دالة لمتوسط تكلفة القميص الذي سيباع. مثّل الدالة بيانيًا.

b. ما متوسط التكلفة إذا تم طلب 200 قميص؟ وإذا تم طلب 500 قميص؟

c. كم عدد القمصان التي يجب طلبها ليصبح متوسط التكلفة أقل من 9.75 AED؟

الأمثلة 2-3 **مثّل كل دالة بيانيًا.**

13. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

14. $f(x) = \dfrac{5}{(x - 1)(x + 4)}$

15. $f(x) = \dfrac{4}{(x - 2)^2}$

16. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{(x + 4)^2}$

18. $f(x) = \dfrac{2x}{(x + 2)(x - 5)}$

19. $f(x) = \dfrac{(x - 4)^2}{x + 2}$

20. $f(x) = \dfrac{(x + 3)^2}{x - 5}$

21. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$

22. $f(x) = \dfrac{4x^3}{2x^2 + x - 1}$

23. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 8}{2x - 1}$

24. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5}{3x + 4}$

25. $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 + 2}$

26. $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 - 12}{x^3 - 6}$

27. **المثابرة** يوضح التيار بالأمبير في دائرة كهربائية بها ثلاثة أجهزة مقاومة موصولين على التوالي من خلال المعادلة $I = \dfrac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$، حيث إن V هو الجهد بالفولت في الدائرة وكل من R_1 و R_2 و R_3 هي مقاومات أجهزة المقاومة الثلاثة بالأوم.

a. افترض أن R_1 هو المتغير المستقل وافترض أن I هو المتغير التابع. مثّل الدالة بيانيًا إذا كان فولت $V = 120$ و أوم $R_2 = 25$ و أوم $R_3 = 75$.

b. اذكر معادلة خط التقارب الرأسي ونقاط تقاطع R_1 و I للتمثيل البياني.

c. أوجد قيمة I عندما تكون قيمة R_1 140 أوم.

d. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟

مثال 4 **مثّل كل دالة بيانيًا.**

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

31. $f(x) = \dfrac{x^2 - 64}{x - 8}$

32. $f(x) = \dfrac{(x - 4)(x^2 - 4)}{x^2 - 6x + 8}$

33. $f(x) = \dfrac{(x + 5)(x^2 + 2x - 3)}{x^2 + 8x + 15}$

34. $f(x) = \dfrac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1}$

35. $f(x) = \dfrac{2x^4 + 10x^3 + 12x^2}{x^2 + 5x + 6}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

36. **الأعمال التجارية** اشترى علي كاسحة ثلوج مقابل AED 4500 ويعمل على إزالة الثلوج من مواقف السيارات للشركات المحلية. وفي كل مرة يزيل الثلوج من موقف سيارات، يتكبد تكلفة قدرها AED 50 للبنزين والصيانة.

a. اكتب الدالة النسبية التي مثّلها متوسط التكلفة لكل عميل كدالة لعدد مواقف السيارات ثم مثلها بيانيًا.

b. ما خط التقارب للتمثيل البياني؟

c. لماذا يعتبر الربع الأول من التمثيل البياني هو الربع الوحيد ذا الصلة؟

d. كم عدد إجمالي مواقف السيارات التي يحتاج علي إلى إزالة الثلج منها ليصبح متوسط تكلفة موقف السيارات أقل من AED 80.

37. **المعرفة المالية** اشترت هنا هاتفًا خلويًا جديدًا يتوفر فيه الوصول إلى الإنترنت. وقد كانت تكلفة الهاتف AED 150. وقد كانت تكلفة الاستخدام الشهرية AED 30 بالإضافة إلى AED 10 تكلفة الوصول إلى الإنترنت.

a. اكتب الدالة النسبية التي تمثل متوسط التكلفة الشهرية كدالة لعدد الشهور التي استخدمت فيها هنا الهاتف ثم مثّلها بيانيًا.

b. ما خط التقارب للتمثيل البياني؟

c. لماذا يعتبر الربع الأول من التمثيل البياني هو الربع الوحيد ذا الصلة؟

d. كم عدد الشهور التي سيصبح بعدها متوسط التكلفة الشهرية AED 45؟

38. **التبرير المنطقي** تلعب سالي رياضة الكرة اللينة لمدرسة البرشاء الثانوية. وأثناء هذا الموسم حققت حتى الآن 4 ضربات من 12 من موقع الضارب. وهي عازمة على تحسين متوسط ضرباتها. فإذا كان بإمكانها الحصول على x ضربة متتالية، يمكن تحديد متوسط ضرباتها باستخدام $B(x) = \frac{4 + x}{12 + x}$

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذا معنى في سياق المسألة؟

c. اذكر معنى تقاطع المحور الرأسي.

d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناها فيما يتعلق بنسبة ضربات سالي.

مثِّل كل دالة بيانيًا.

39. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$

40. $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$

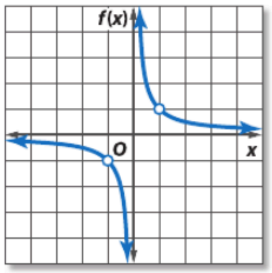
41. $f(x) = \frac{6x^2 + 4x + 2}{x + 2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا

42. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم التمثيل البياني للدالة النسبية بخط تقارب أفقي $y = 1$ وخط تقارب رأسي $x = -2$.

43. **التحدي** قارن وبين الفرق بين $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 2)}$ و $f(x)$ الموضحة إلى اليسار.



44. **التبرير** ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالة $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3}$؟

45. **الإثبات** دالة نسبية تعطى بالصيغة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث إن $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$. برهن أن $f(x) = \frac{x}{a - b} + c$ دالة نسبية.

46. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكن استخدام التحليل إلى العوامل لتحديد خط التقارب الرأسي أو نقطة الانفصال للدالة النسبية؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

47. **الاحتمالات** من بين الدورات الست التي يقدمها قسم الموسيقى في مدرسة خولة، يجب أن تختار خولة اثنتين بالضبط منهما. فكم عدد التوافيق المحتملة للدورتين التي ستختارهما خولة إذا لم يكن هناك قيود على الدورات التي يمكنها اختيارها؟

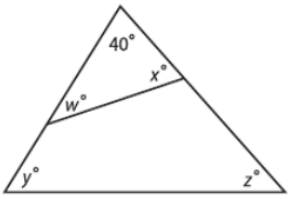
A 48
B 18
C 15
D 12

48. يتم تقديم المبيعات المتوقعة للعبة من خلال المعادلة $S(p) = \frac{3000}{2p + a}$، حيث إن $S(p)$ هو عدد اللعب المبيعة بالآلاف، و p هو سعر اللعبة بالدراهم و a هو ثابت. إذا تم بيع **100,000** لعبة مقابل **AED 10** للعبة، فكم عدد اللعب التي سيتم بيعها بمقابل **AED 20** للعبة؟

F 20,000
G 50,000
H 60,000
J 150,000

49. **إجابة شبكية** تقع خمس نقاط مختلفة في مستوى بحيث كان 3 من النقاط على المستقيم ℓ و 3 من النقاط على مستقيم آخر m. ما إجمالي عدد المستقيمات التي يمكن رسمها بحيث يمر كل مستقيم بنقطتين من النقاط الـ 5؟

50. **الهندسة** في الشكل أدناه، ما قيمة $w + x + y + z$؟



A 140
B 280
C 320
D 360

مراجعة شاملة

مثِّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى. (الدرس 3-9)

51. $f(x) = \frac{-5}{x + 2}$

52. $f(x) = \frac{4}{x - 1} - 3$

53. $f(x) = \frac{1}{x + 6} + 1$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-9)

54. $\frac{m}{m^2 - 4} + \frac{2}{3m + 6}$

55. $\frac{y}{y + 3} - \frac{6y}{y^2 - 9}$

56. $\frac{5}{x^2 - 3x - 28} + \frac{7}{2x - 14}$

57. $\frac{d - 4}{d^2 + 2d - 8} - \frac{d + 2}{d^2 - 16}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

58. $y^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{7}{3}}$

59. $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{9}{4}}$

60. $\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$

61. $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{6}}$

مراجعة المهارات

62. **الانتقال** يأخذ كل من السيد فهد وحرمه ابنتهم إلى الكلية. يوضح الجدول مسافتهم من المنزل بعد أزمنة مختلفة.

الزمن (h)	المسافة (km)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225

a. أوجد متوسط معدل التغيير في مسافتهم من المنزل بين ساعة واحدة إلى 3 ساعات بعد مغادرة المنزل.

b. أوجد متوسط معدل التغيير في مسافتهم من المنزل بين 0 ساعة واحدة إلى 5 ساعات بعد مغادرة المنزل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

مختبر تقنية التمثيل البياني

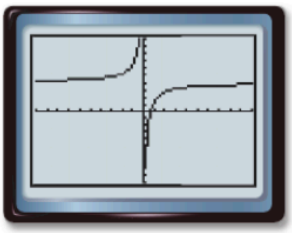
يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف التمثيل البياني للدوال النسبية.
تحتوي هذه التمثيلات البيانية على بعض الخواص التي لا تظهر مطلقًا على التمثيل البياني للدوال كثيرات الحدود.

نشاط 1 مثّل بيانيًا مع خطوط التقارب

مثل $y = \frac{8x - 5}{2x}$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية. أوجد معادلات أي خطوط تقارب. اذكر المجال والمدى للدالة.

الخطوة 1 أدخل المعادلة في القائمة Y= ثم مثّل بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= (8 X,T,θ,n − 5) ÷ (2 X,T,θ,n) ZOOM 6



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 2 تفحّص التمثيل البياني.

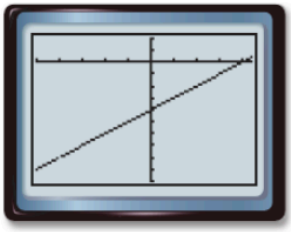
بالنظر إلى المعادلة، يمكننا تحديد ما إذا كان $x = 0$، فإن الدالة غير محددة. تكون معادلة خط التقارب الرأسي هي $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y بينما تزيد x وبينما تقل x. تقترب قيمة y من 4. إذًا، فمعادلة خط التقارب الأفقي $y = 4$. يساوي المجال $\{x \mid x \neq 0\}$، ويساوي المدى جميع الأعداد الحقيقية.

النشاط 2 مثّل بيانيًا مع نقطة الإنفصال

مثّل $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ بيانيًا في النافذة [−5, 4.4] في [−10, 2] بعوامل قياس 1.

الخطوة 1 حيث إن الدالة غير متصلة، ضع الحاسبة على النمط DOT.

خطوات العملية على الحاسبة: ENTER ▶ ▼ ▼ ▼ ▼ MODE



[−5, 4.4] scl: 1 by [−20, 2] scl: 1

الخطوة 2 تفحّص التمثيل البياني.

يبدو هذا التمثيل البياني كمستقيم بدون فجوة في الاتصال $x = -4$. ويحدث ذلك لأن المقام يكون 0 عندما يكون $x = -4$. وبالتالي، تكون الدالة غير محددة عندما يكون $x = -4$.

إذا **تتبعت** التمثيل البياني، عندما تصل إلى $x = -4$، فستجد أنه لا يوجد قيمة مطابقة لـ y.

تمارين

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل كل دالة بيانيًا. اكتب الإحداثي x لأي نقاط انفصال و/أو معادلات لأي خط تقارب. اذكر المجال والمدى.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x) = \frac{x}{x + 2}$
3. $f(x) = \frac{2}{x - 4}$
4. $f(x) = \frac{2x}{3x - 6}$
5. $f(x) = \frac{4x + 2}{x - 1}$
6. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 9-5

دوال التغير

السابق
- كتبت ومثّلت المعادلات الخطية بيانيًا.

الحالي
1. التعرف على مسائل التغير الطردي والمشترك وحلها.
2. التعرف على مسائل التغير العكسي والمركب وحلها.

لماذا؟
- عند بناء منحدرات التزلج، حدد مازن أن أفضل المنحدرات كانت التي زاد فيها طول أعلى المنحدر عن ارتفاع المنحدر بـ 1.5 ضعف.

وكما هو موضح في الجدول، فإن طول أعلى المنحدر يعتمد على ارتفاع المنحدر. ويزيد الطول كلما زاد الارتفاع، ولكن تظل النسبة كما هي أي تكون *ثابتة*.

ويمكن كتابة المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ في الصورة $\ell = 1.5h$.

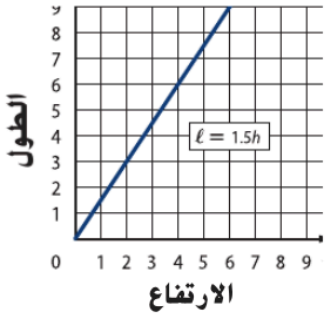
وبالتالي فإن الطول يتغير *طرديًا* مع ارتفاع المنحدر.

النسبة $\frac{\ell}{h}$	الارتفاع (h)	الطول (ℓ)
1.5	2	3
1.5	4	6
1.5	6	9
1.5	8	12

1 التغير الطردي والمشترك

تعتبر العلاقة الممثلة بـ $\ell = 1.5h$ مثالاً على التغير الطردي. يمكن التعبير عن **التغير الطردي** في الصورة $y = kx$.

وفي هذه المعادلة، يطلق على k **ثابت التغير**.



لاحظ أن التمثيل البياني لـ $\ell = 1.5h$ هو خط مستقيم يمر بنقطة الأصل. يعتبر التغير الطردي حالة خاصة لمعادلة مكتوبة في صيغة الميل والمقطع $y = mx + b$. عندما يكون $m = k$ و $b = 0$، فإن $y = mx + b$ تصبح $y = kx$. إذًا، فإن ميل معادلة التغير الطردي هو ثابت التغير الخاص بها.

وللتعبير عن التغير الطردي، نقول إن y تتغير طرديًا مع x. بعبارة أخرى، عندما تزيد x، تزيد y أو تنقص بمعدل ثابت.

المفهوم الأساسي التغير الطردي

الشرح y تتغير طرديًا مع x إذا كان هناك ثابتًا غير صفري k بحيث يكون $y = kx$. وk يطلق عليها *ثابت التغير*.

مثال إذا كان $y = 3x$ و $x = 7$، فإن $y = 3(7)$ أو 21.

إذا عرفت أن y تتغير طرديًا مع x ومجموعة واحدة من القيم، يمكنك استخدام التناسب لإيجاد المجموعة الأخرى من القيم المقابلة.

$y_2 = kx_2$ و $y_1 = kx_1$

$\frac{y_2}{x_2} = k$ $\frac{y_1}{x_1} = k$ بالتالي $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

باستخدام خواص المساواة، يمكنك إيجاد العديد من علاقات التناسب الأخرى التي تربط بين نفس قيم x و y.

مفردات جديدة

التغير الطردي direct variation
ثابت التغير constant of variation
التغير المشترك joint variation
التغير العكسي inverse variation
التغير المركب combined variation

ممارسات في الرياضيات

1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
4 استخدام النماذج الرياضية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 التغير الطردي

إذا تغيرت y طرديًا مع x و $y = 15$ عندما يكون $x = -5$، أوجد y عندما يكون $x = 7$.

استخدم التناسب الذي يربط هذه القيم ببعضها البعض.

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ التغير الطردي

$\frac{15}{-5} = \frac{y_2}{7}$ $y_1 = 15,\ x_1 = -5,\ x_2 = 7$

$15(7) = -5(y_2)$ اضرب ضربًا تقاطعيًا.

$105 = -5y_2$ بسّط.

$-21 = y_2$ اقسم كل طرف على (-5).

تمرين موجّه

1. إذا كان r تتغير طرديًا مع t و $r = -20$ عندما يكون $t = 4$. فأوجد r عندما يكون $t = -6$.

من أنواع التغير الأخرى التغير المشترك. يحدث **التغير المشترك** عندما تتغير كمية واحدة طرديًا مع ناتج ضربٍ لاثنتين أو أكثر من الكميات الأخرى.

نصيحة دراسية

التغير المشترك يعتبر بعض علماء الرياضيات التغير المشترك نوعًا خاصًا من التغير المركب.

المفهوم الأساسي التغير المشترك

الشرح y تتغير بشكل مشترك مع x و z إذا كان هناك ثابت غير صفري k بحيث يكون $y = kxz$.

مثال إذا كان $y = 5xz$ و $x = 6$ و $z = -2$، إذًا $y = 5(6)(-2)$ أو -60.

إذا عرفت أن y تتغير بشكل مشترك مع x و z ومجموعة واحدة من القيم، يمكنك استخدام التناسب لإيجاد المجموعة الأخرى من القيم المقابلة.

$y_1 = kx_1z_1$ و $y_2 = kx_2z_2$

$\frac{y_1}{x_1z_1} = k$ وبالتالي، $\frac{y_2}{x_2z_2} = k$ $\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$

مثال 2 التغير المشترك

افترض أن y يتغير بشكل مشترك مع x و z. أوجد y عندما تكون $x = 9$ و $z = 2$ إذا كانت $y = 20$ عندما تكون $z = 3$ و $x = 5$

استخدم التناسب الذي يربط هذه القيم ببعضها البعض.

$\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$ التغير المشترك

$\frac{20}{5(3)} = \frac{y_2}{9(2)}$ $y_1 = 20, x_1 = 5, z_1 = 3, x_2 = 9,\ z_2 = 2$

$20(9)(2) = 5(3)(y_2)$ اضرب ضربًا تقاطعيًا.

$360 = 15y_2$ بسّط.

$24 = y_2$ اقسم كل طرف على 15.

تمرين موجّه

2. افترض أن r تتغير بشكل مشترك مع v و t. أوجد r عندما يكون $v = 2$ و $t = 8$. إذا كان $r = 70$ عندما يكون $v = 10$ و $t = 4$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 التغير العكسي والمركب

نوعان آخران من أنواع التغير. إذا كانت الكميتان x و y بينهما **علاقة تغير عكسي**، فإن ناتج ضربهما يساوي الثابت k.

وتوصف علاقة التغير العكسي في أغلب الأحيان بأنها زيادة إحدى الكميات مع تناقص الكمية الأخرى. فعلى سبيل المثال، يتغير كل من السرعة والزمن لمسافة ثابتة عكسيًا مع بعضهما البعض؛ وكلما زادت سرعتك، قل الزمن الذي تستغرقه للوصول.

المفهوم الأساسي التغير العكسي

الشرح

y تتغير عكسيًا مع x إذا كان هناك ثابتًا غير صفري k بحيث يكون $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث يكون $x \neq 0$ و $y \neq 0$.

مثال

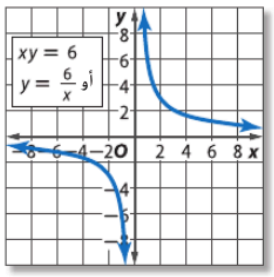
إذا كان $xy = 2$ و $x = 6$، فإن $y = \frac{2}{6}$ أو $\frac{1}{3}$.

نصيحة دراسية

التغ يرالطردي والعكسي

يمكنك تحديد نوع التغير بالاطلاع على جدول قيم كل من x و y. إذا كان ناتج قسمة $\frac{y}{x}$ يساوي قيمة ثابتة، فإن y تتغير طرديًا مع x. إذا كان ناتج ضرب xy يساوي قيمة ثابتة، فإن y تتغير عكسيًا مع x.

افترض أن y تتغير عكسيًا مع x بحيث يكون $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$.



ويوضح التمثيل البياني لهذه المعادلة على اليسار. حيث إن k قيمة موجبة، ومع تزايد قيمة x، تتناقص قيمة y.

لاحظ أن التمثيل البياني للتغير العكسي يكون دالة عكسية

ويمكن استخدام التناسب مع التغير العكسي لحل المسائل التي تكون فيها الكميات معروفة. وتعتبر علاقة التناسب التالية واحدة من علاقات التناسب العديدة التي يمكن تشكيلها.

$x_1y_1 = k$ و $x_2y_2 = k$

$x_1y_1 = x_2y_2$ خاصية التعويض في المعادلة

$\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ اقسم كل طرف على y_1 y_2.

مثال 3 التغير العكسي

إذا كانت a تتغير عكسيًا مع b و $a = 28$ عندما يكون $b = -2$، فأوجد a عندما يكون $b = -10$.

استخدم التناسب الذي يربط هذه القيم ببعضها البعض.

$\frac{a_1}{b_2} = \frac{a_2}{b_1}$ تغير عكسي

$\frac{28}{-10} = \frac{a_2}{-2}$ $a_1 = 28, b_1 = -2, b_2 = -10$

$28(-2) = -10(a_2)$ اضرب ضربًا تقاطعيًا.

$-56 = -10(a_2)$ بسّط.

$5\frac{3}{5} = a_2$ اقسم كل طرف على (-10).

تمرين موجّه

3. إذا كانت x تتغير عكسيًا مع y وكانت $x = 24$ عندما كانت $y = 4$، فأوجد x عندما تكون $y = 12$.

يستخدم التغير العكسي في أغلب الأحيان في مواقف من الحياة اليومية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 من الحياة اليومية اكتب علاقة التغير العكسي وحلها

الموسيقى **يتغير طول أوتار الكمان عكسيًا مع تردد اهتزازاته. ويهتز وتر كمان طوله 25.4 بوصات بتردد 512 دورة في الثانية. أوجد تردد وتر كمان طوله 20.3 بوصات.**

افترض أن $v_1 = 25.4$ و $f_1 = 512$ و $v_2 = 20.3$. أوجد الحل لإيجاد قيمة f_2.

$v_1 f_1 = v_2 f_2$	المعادلة الأصلية
$25.4 \cdot 512 = 20.3 \cdot f_2$	$v_1 = 10,\ f_1 = 512,\ v_2 = 8$
$\frac{13004.8}{20.3} = f_2$	اقسم كل طرف على 8.
$640.6 = f_2$	بسّط.

يهتز وتر الكمان الذي يبلغ طوله 20.3 سنتيمترات بتردد 640 دورة في الثانية.

تمرين موجّه

4. يتناسب الطول الظاهر لأحد الأجسام عكسيًا مع المسافة التي يبعدها الشخص عن الجسم. ويبعد كوكب الأرض بنحو 150 مليون كيلومتر عن الشمس. ويبعد المشتري 778.3 مليون كيلومتر عن الشمس. أوجد كم سيبدو محيط الشمس أكبر من على الأرض مما هو عليه من المشتري.

الربط بالحياة اليومية

عندما تنقر وتر الآلة الموسيقية، يبدأ في الاهتزاز ذهابًا وإيابًا. ويتسبب ذلك في انتقال الطاقة الميكانيكية عبر الهواء في صورة موجات. ويطلق على عدد المرات التي تصطدم بها الموجات بطبلة الأذن في الثانية لدينا *التردد*. وكلما زاد عدد الموجات في الثانية، كلما زادت حدة الصوت.

من أنواع التغير الأخرى التغير المركب. يحدث **التغير المركب** عندما تختلف كمية واحدة طرديًا و/ أو عكسيًا مع اثنتين أو أكثر من الكميات الأخرى.

إذا عرفت أن y تتغير طرديًا مع x وتتغير y عكسيًا مع z ومجموعة واحدة من القيم، يمكنك استخدام التناسب لإيجاد المجموعة الأخرى من القيم المقابلة.

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1} \quad \text{و} \quad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$

$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = k \quad \text{وبالتالي،} \quad \frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2} \quad \frac{y_2 z_2}{x_2} = k$$

مثال 5 التغير المركّب

افترض أن f تتغير طرديًا مع g وأن f تتغير عكسيًا مع h. أوجد g عندما يكون $f = 18$ و $h = -3$، إذا كان $g = 24$ عندما يكون $h = 2$ و $f = 6$.

أولاً احسب التناسب الصحيح للمعطيات المقدمة.

$f_1 = \frac{kg_1}{h_1}$ و $f_2 = \frac{kg_2}{h_2}$	g تتغير طرديًا مع f، إذًا تأتي g في البسط. h تتغير عكسيًا مع f، إذًا تأتي h في المقام.
$k = \frac{f_1 h_1}{g_1}$ و $k = \frac{f_2 h_2}{g_2}$	أوجد الحل لإيجاد k.
$\frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2}$	اجعل علاقتي التناسب مساويتين.
$\frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2}$	$f_1 = 6,\ g_1 = 24,\ h_1 = 2,\ f_2 = 18,\ h_2 = -3$
$24(18)(-3) = 6(2)(g_2)$	اضرب ضربًا تقاطعيًا.
$-1296 = 12g_2$	بسّط.
$-108 = g_2$	اقسم كل طرف على 12.

عندما تكون $f = 18$ و $h = -3$، ستكون قيمة g تساوي -108.

تمرين موجّه

5. افترض أن p تتغير طرديًا مع r وأن p تتغير عكسيًا مع t. أوجد t عندما تكون $r = 10$ و $p = -5$. إذا كانت $t = 20$ عندما تكون $p = 4$ و $r = 2$.

نصيحة دراسية

التغير المركب

تظهر الكميات التي تتغير طرديًا في البسط.

وتظهر الكميات التي تتغير عكسيًا في المقام.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3

1. إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$. فأوجد y حيث $x = 14$.

2. افترض أن y يتغير بشكل مشترك مع x و z. أوجد y عندما تكون $x = 9$ و $z = -3$. إذا كانت $y = -50$ عندما تكون z تساوي 5 و x تساوي -10.

3. إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$. فأوجد x عندما تكون $y = 9$.

مثال 4

4. السفر رُسمت خريطة لولاية إلينوي بمقياس رسم بحيث تمثل كل سنتيمترين 15 km . فكم تبعد شيكاغو وروكفورد إذا كانت المسافة بينهما على الخريطة 12 cm؟

مثال 5

5. افترض أن a تتغير طرديًا مع b وأن a تتغير عكسيًا مع c. أوجد b عندما تكون $a = 8$ وتكون $c = -3$. إذا كانت b = 16 عندما تكون c = 2 وتكون a = 4.

6. افترض أن d تتغير طرديًا مع f وأن d تتغير عكسيًا مع g. أوجد g عندما تكون $d = 6$ وتكون $f = -7$. إذا كانت $g = 12$ عندما تكون $d = 9$ وتكون $f = 3$.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

إذا كانت x تتغير طرديًا مع y، فأوجد x عندما تكون $y = 8$.

7. $x = 6$ عندما تكون $y = 32$

8. $x = 11$ عندما تكون $y = -3$

9 $x = 14$ عندما تكون $y = -2$

10. $x = -4$ عندما تكون $y = 10$

11. القمر كان وزن رائد الفضاء نيل آرمسترونغ، أول من مشى على سطح القمر، على الأرض 163.3 kg وهو يحمل جميع معداته، بينما كان وزنه على القمر 27.2 kg. اكتب معادلة تربط بين الوزن على القمر m والوزن على الأرض w.

مثال 2

إذا كانت a تتغير بشكل مشترك مع b ومع c، فأوجد a عندما تكون $b = 4$ وتكون $c = -3$.

12. $a = -96$ عندما تكون $b = 3$ وتكون $c = -8$

13. $a = -60$ عندما تكون $b = -5$ وتكون $c = 4$

14. $a = -108$ عندما تكون $b = 2$ وتكون $c = 9$

15. $a = 24$ عندما تكون $b = 8$ وتكون $c = 12$

16. التمثيل بالنماذج وفقًا لشركة نيلسن فإن متوسط مشاهدة المواطن الأمريكي للتلفاز هي 4 ساعات يوميًا.

a. اكتب معادلة لتمثيل متوسط عدد الساعات الذي يُقضى في مشاهدة التلفاز من قبل عدد m من أفراد الأسرة أثناء فترة من d أيام.

b. افترض أن أفراد أسرتك يشاهدون التلفاز كل يوم بنفس مقدار متوسط مشاهدة المواطن الأمريكي. فكم عدد الساعات التي سيقضيها أفراد أسرتك في مشاهدة التلفاز أسبوعيًا.

مثال 3

إذا كانت f تتغير عكسيًا مع g، فأوجد f عندما تكون $g = -6$.

17. $f = 15$ عندما تكون $g = 9$

18. $f = 4$ عندما تكون $g = 28$

19. $f = -12$ عندما تكون $g = 19$

20. $f = 0.6$ عندما تكون $g = -21$

21. الخدمة المجتمعية يجمع طلاب مدرسة القاسمية الثانوية كل عام المنتجات المعلبة لحجرة مؤن الطعام المحلية. ويخططون لتوزيع المنشورات الدعائية على المنازل بالحي طالبين من السكان التبرع. وفي العام الماضي، تمكن 12 طالبًا من توزيع 1000 منشور دعائي في أربع ساعات.

a. اكتب معادلة تربط بين عدد الطلاب s ومقدار الزمن t المستغرق لتوزيع 1000 منشور دعائي.

b. كم سيبلغ الزمن المستغرق في توزيع 15 طالبًا لنفس العدد من المنشورات هذا العام؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4

22. الطيور عندما تهاجر مجموعة من أوز الثلج، تتغير المسافة التي تطيرها طرديًا مع مقدار الزمن الذي تقضيه في الطيران.

a. هاجرت مجموعة من أوز الثلج مسافة 375 km في 7.5 h. اكتب معادلة تغير طردي تمثل هذه الحالة.

b. في كل عام، يهاجر الأوز 3000 km من موطنهم في الشتاء بجنوب غرب الولايات المتحدة الأمريكية إلى موطنهم في الصيف بالقطب الشمالي الكندي. قدّر عدد ساعات الطيران المستغرقة في هجرة الأوز.

مثال 5

23. افترض أن a تتغير طرديًا مع b وأن a تتغير عكسيًا مع c. أوجد b عندما تكون $a = 5$ وتكون $c = -4$. إذا كانت $b = 12$ عندما تكون $c = 3$ وتكون $a = 8$.

24. افترض أن x تتغير طرديًا مع y وأن x تتغير عكسيًا مع z. أوجد z عندما تكون $x = 10$ وتكون $y = -7$. إذا كانت $z = 20$ عندما تكون $x = 6$ وتكون $y = 14$.

حدد إن كانت كل علاقة توضح تغيرًا *طرديًا* أم *عكسيًا* أم لا توضح *أيًا منها*.

25.

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

26.

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

27.

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

28. إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 6$ حيث $x = 519$ فأوجد y حيث $x = 2$.

29. إذا كانت x تتغير عكسيًا مع y وكانت $x = 16$ عندما كانت $y = 5$. فأوجد x عندما تكون $y = 20$.

30. افترض أن a تتغير طرديًا مع b وأن a تتغير عكسيًا مع c. أوجد b عندما تكون $a = 7$ وتكون $c = -8$. إذا كانت $b = 15$ عندما تكون $c = 2$ وتكون $a = 4$.

31. افترض أن x تتغير طرديًا مع y وأن x تتغير عكسيًا مع z. أوجد z عندما تكون $x = 8$ وتكون $y = -6$ إذا كانت $z = 26$ عندما تكون $x = 8$ وتكون $y = 13$

اذكر إذا كانت كل معادلة تمثل تغيرًا *طرديًا* أم *مشتركًا* أم *عكسيًا* أم *مركبًا*. ثم عيّن ثابت التغير.

32. $\frac{x}{y} = 2.75$

33. $fg = -2$

34. $a = 3bc$

35. $10 = \frac{xy^2}{z}$

36. $y = -11x$

37. $\frac{n}{p} = 4$

38. $9n = pr$

39. $-2y = z$

40. $a = 27b$

41. $c = \frac{7}{d}$

42. $-10 = gh$

43. $m = 20cd$

44. الدقة يتغير حجم الغاز v عكسيًا مع ضغطه p وطرديًا مع درجة حرارته t.

a. اكتب معادلة تمثل حجم الغاز بدلالة ضغطه ودرجة حرارته. هل هذه المعادلة تمثل تغيرًا *طرديًا* أم *مشتركًا* أم *عكسيًا* أم *مركبًا*.

b. يبلغ حجم أحد الغازات 8 L وتبلغ درجة حرارته 275 كلفن ويبلغ ضغطه 1.25 بمقياس الغلاف الجوي. فإذا تم ضغط الغاز إلى 6 L وتسخينه إلى درجة حرارة 300 كلفن، فكم سيكون ضغطه؟

c. إذا ظل الحجم بنفس مقداره، بينما انخفض الضغط إلى النصف، فما الذي قد حدث في درجة الحرارة؟

45. العطلات يتغير الزمن الذي يستغرقه سالم وأخوه في الوصول إلى خور دبي عكسيًا مع متوسط معدل سرعتهم.

a. إذا كانا على بعد 800 mi، فاكتب معادلة تربط بين زمن السفر ومتوسط معدل سرعتهم ثم مثّلها بيانيًا.

b. ما أدنى قيمة لمتوسط السرعة تسمح لهم بالوصول خلال 18 h؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

46. **الموسيقى** يعتمد العدد الأقصى للأغاني التي يمكن لمشغل صوت رقمي الاحتفاظ بها على طول وجودة الأغاني المسجلة. فستشغل الأغنية مساحة أكبر على المشغل إذا تم تسجيلها بجودة عالية، من قرص مضغوط على سبيل المثال، بدلاً من الجودة المنخفضة الموجودة على الإنترنت.

a. إذا كان مشغل يحتوي على مساحة تخزين 5400 ميجا بايت، فاكتب دالة تمثل عدد الأغاني التي يمكن للمشغل الاحتفاظ بها كدالة لمتوسط حجم الأغنية.

b. هل هذه الدالة تمثل تغيرًا *طرديًا* أم *مشتركًا* أم *عكسيًا* أم *مركبًا*.

c. افترض أن متوسط حجم الملف المرتفع الجودة هو 8 ميجا بايت ومتوسط حجم الملف المنخفض الجودة هو 5 ميجا بايت. حدد كم عدد الأغاني التي يمكن إضافتها للمشغل ويستطيع الاحتفاظ بها إذا كانت الأغاني منخفضة الجودة أكثر من المرتفعة الجودة.

47. **الجاذبية الأرضية** وفقًا لقانون الجاذبية الأرضية، فإن القوة الجاذبة F بالنيوتن بين أي جسمين في الكرة الأرضية تتناسب طرديًا مع ناتج ضرب كتلتيهما m_1 و m_2 بالكيلوجرام وتتناسب عكسيًا مع مربع المسافة d بينهما بالأمتار. بمعنى، $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$. G هو ثابت الجاذبية الأرضية. وتبلغ قيمته $6.67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

a. تبلغ المسافة بين الأرض والقمر نحو $3.84 \times 10^8\ \text{m}$. وتبلغ كتلة القمر $7.36 \times 10^{22}\ \text{kg}$. وتبلغ كتلة الأرض $5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}$. فما قوة الجاذبية التي يبذلها كل من الأرض والقمر على بعضهما البعض؟

b. تبلغ المسافة بين الشمس والأرض نحو $1.5 \times 10^{11}\ \text{m}$. وتبلغ كتلة الشمس نحو $1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}$. فما قوة الجاذبية التي تبذلها كل من الأرض والشمس على بعضهما البعض؟

c. أوجد قوة الجاذبية التي يبذلها كل من كرتي حديد كتلتيهما 1000 kg على الأخرى إذا كانت المسافة بينهما 0.01 m.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العُليا

48. **التفكير الناقد** يحدد كل من يوسف وسعيد علاقة تناسب ليبدآ حل التغير المركب الذي تتغير فيه z طرديًا مع x وتتغير فيه z عكسيًا مع y. أي منهما حدد علاقة التناسب الصحيحة؟ اشرح استنتاجك.

سعيد

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$
$$k = \frac{z_1y_1}{x_1} \quad \text{و} \quad k = \frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1} = \frac{z_2y_2}{x_2}$$

يوسف

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$
$$k = \frac{z_1y_1}{x_1} \quad \text{و} \quad k = \frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1} = \frac{z_2y_2}{x_2}$$

49. **التحدي** إذا كانت a تتغير عكسيًا مع b و c تتغير بشكل مشترك مع b و f و f تتغير طرديًا مع g، فما العلاقة بين a و g؟

50. **التبرير** اشرح السبب في أن بعض علماء الرياضيات يعتبرون أن كل علاقة تغير بشكل مشترك هي علاقة تغير مركب، بينما لا تعبر كل علاقة تغير مركبة علاقة تغير بشكل مشترك.

51. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر ثلاث كميات من الحياة اليومية بينهم علاقة تغير بشكل مشترك.

52. **الكتابة في الرياضيات** حدد نوع (أنواع) علاقة (علاقات) التغير التي لا يمكن أن يكون فيها 0 إحدى القيم. اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

53. SAT/ACT غادر عيسى من منزل الطلاب وقاد في اتجاه أحد الأكواخ بمتوسط سرعة 40 km/h. وغادر عدنان في وقت متأخر عنه في نفس الاتجاه بمتوسط سرعة 48 km/h. بعد القيادة لمدة خمس ساعات، لحق عدنان بعيسى. فكم المدة التي قادها عيسى قبل أن يلحق به عدنان؟

A ساعة
B ساعتان
C 4 ساعات
D 6 ساعات
E 8 ساعات

54. إذا كان 75% من 88 = 60% من عدد، فما ذلك العدد؟

F 100
G 105
H 108
J 110

55. إجابة موسعة يبلغ طول شعر طفل أماني 7 cm ويتوقع أن ينمو بمتوسط معدل 3 cm في العام.

a. ضع جدولاً يوضح الطول المتوقع لشعر أماني بعد كل من السنوات الأربع الأولى.

b. اكتب دالة يمكن استخدامها لتحديد طول شعرها بعد كل عام.

c. إذا لم تقص أماني شعرها على الإطلاق، فحدد طول شعرها بعد 9 سنوات.

56. أي مما يلي يساوي مجموع عددين صحيحين زوجيين متتاليين؟

A 144
B 146
C 147
D 148

مراجعة شاملة

حدد خطوط التقارب الرأسية والفجوات في التمثيل البياني لكل دالة.
(الدرس 4-9)

57. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$

58. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 3x - 4}$

59. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$

60. التصوير الفوتوغرافي يمكن استخدام القانون $\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$ في تحديد المسافة التي ينبغي أن تفصل بين الفيلم وعدسة الكاميرا لتقديم أفضل صورة فوتوغرافية. ويمثل المتغير q المسافة من العدسة إلى الفيلم، وتمثل f الطول البؤري للعدسة، وتمثل p المسافة من الجسم إلى العدسة. (الدرس 3-9)

a. أوجد حل القانون لإيجاد $\frac{1}{p}$.

b. اكتب التعبير الذي يحتوي على f و q في صورة تعبير نسبي واحد.

c. إذا كان الطول البؤري للكاميرا يبلغ 8 cm وتبلغ المسافة بين الفيلم والعدسة 10 cm. فكم ينبغي أن تكون المسافة بين الجسم والعدسة بحيث تكون الصورة في مركز العدسة؟

أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلولك.

61. $\log_3 42 - \log_3 n = \log_3 7$

62. $\log_2(3x) + \log_2 5 = \log_2 30$

63. $2 \log_5 x = \log_5 9$

64. $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$

باستخدام كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد باقي العوامل. قد لا تكون بعض العوامل ذوات حدين.

65. $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15; x - 5$

66. $3x^3 + 10x^2 - x - 12; x + 3$

مراجعة المهارات

أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

67. $a, 2a, a + 1$

68. $x, 4y, x - y$

69. $8, 24x, 12$

70. $x^4, 3x^2, 2xy$

71. $12a, 15, 4b^2$

72. $x + 2, x - 3, x^2 - x - 6$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

6-9 حل المعادلات والمتباينات النسبية

السابق
- حوّلت التعابير النسبية إلى أبسط صورة.

الحالي
1. حل المعادلات النسبية.
2. حل المتباينات النسبية.

لماذا؟
- تبلغ تكلفة العضوية لأحد النوادي الرياضية AED 20 في الشهر. وينبغي على الأعضاء كذلك دفع AED 5 في كل مرة يزورون فيها النادي. فإذا زار أحد الأعضاء النادي x مرات في شهر واحد، فستكون تكلفة هذا الشهر $5x + 20$. وستكون التكلفة الفعلية لكل زيارة $\frac{20 + 5x}{x}$ لتحديد عدد الزيارات التي ينبغي القيام بها لتصبح تكلفة الزيارة AED 6. فستحتاج إلى حل المعادلة $\frac{20 + 5x}{x} = 6$.

مفردات جديدة

معادلة نسبية rational equation

المتوسط الحسابي المرجح weighted average

متباينة نسبية rational inequality

ممارسات في الرياضيات

6 مراعاة الدقة.

1 حل المعادلات النسبية

تُعرف المعادلات التي تحتوي على تعبير نسبي واحدٍ أو أكثر باسم **المعادلات النسبية**. وتكون هذه المعادلات في أغلب الأحيان أسهل في الحل ما أن يتمّ التخلص من الكسور. ويمكن التخلص من الكسور بضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$. ثم تحقق من صحة الحل.

يساوي المقام المشترك الأصغر $18(x + 3)$.

$\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$	المعادلة الأصلية
$18(x+3)\left(\frac{4}{x+3}\right) + 18(x+3)\left(\frac{5}{6}\right) = 18(x+3)\frac{23}{18}$	اضرب في المقام المشترك الأصغر.
$18(x+3)\left(\frac{4}{x+3}\right) + 18(x+3)\left(\frac{5}{6}\right) = 18(x+3)\left(\frac{23}{18}\right)$	اختصر العوامل المشتركة.
$72 + 15x + 45 = 23x + 69$	اضرب.
$15x + 117 = 23x + 69$	بسّط.
$48 = 8x$	اطرح $15x$ و 69.
$6 = x$	اقسم.

التحقق

$\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$	المعادلة الأصلية
$\frac{4}{6+3} + \frac{5}{6} \stackrel{?}{=} \frac{23}{18}$	$x = 6$
$\frac{4}{9} + \frac{5}{6} \stackrel{?}{=} \frac{23}{18}$	بسّط.
$\frac{8}{18} + \frac{15}{18} \stackrel{?}{=} \frac{23}{18}$	بسّط.
$\frac{23}{18} = \frac{23}{18}$ ✓	اجمع.

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية. ثم تحقق من صحة الحل.

1A. $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{10}$

1B. $\frac{7}{12} + \frac{9}{x-4} = \frac{55}{48}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قد يؤدي ضرب كل طرف من المعادلة في المقام المشترك الأصغر للتعابير النسبية إلى نتائج لا تعتبر حلولًا للمعادلة الأصلية. وتسمى هذه بالحلول الدخيلة.

مثال 2 حل معادلة نسبية

حُلّ $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$. ثم تحقق من صحة الحل.

المقام المشترك الأصغر للحدود هو $(x+5)(x+3)$.

المعادلة الأصلية
$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$

اضرب في المقام المشترك الأصغر.
$$\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$$

اقسم العوامل المشتركة.
$$\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+5)(x+3)3}{x+3}$$

بسّط.
$$(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$$

وزع.
$$2x^2+6x-x^2+x+10 = 3x+15$$

بسّط.
$$x^2+7x+10 = 3x+15$$

اطرح $3x + 15$
$$x^2+4x-5 = 0$$

عامل.
$$(x+5)(x-1) = 0$$

خاصية ناتج الضرب الصفري
$$x+5=0 \quad \text{أو} \quad x-1=0$$
$$x=-5 \qquad x=1$$

التحقق جرب $x = -5$.
$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$
$$\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2-(-5)-10}{(-5)^2+8(-5)+15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$$
$$\frac{-10}{0} - \frac{25+5-10}{25-40+15} \neq -\frac{3}{2} \quad ✗$$

جرب $x = 1$.
$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$
$$\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2-1-10}{1^2+8(1)+15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$$
$$\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$
$$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad ✓$$

عند حل المعادلة النسبية، فإن أي حل محتمل يؤدي إلى صفر في المقام يجب استثنائه من قائمة الحلول.

حيث إن $x = -5$ تؤدي إلى صفر في المقام، فهي حل دخيل. استبعد -5 من قائمة الحلول. الحل يساوي 1.

تمرين موجّه

2A. $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$

2B. $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$

2C. $\frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$

2D. $\frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{^2+2\quad 8} + \frac{2}{p+4}$

الربط بتاريخ الرياضيات

بروك تايلور (1685–1731)
عالِم الرياضيات الذي وضع نظرية استخدمت في التفاضل والتكامل وتعرف بنظرية تايلور وتعتمد على الباقي بعد العمليات الحسابية على التعابير النسبية.

مراجعة المصطلحات

حل دخيل (extraneous solution) هو حل لا يحقق المعادلة الأصلية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المتوسط الحسابي المرجح هو طريقة لإيجاد المتوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد يكون لبعض العناصر فيها أهمية أكبر أو ترجيح عن الأخرى. تتضمن العديد من مسائل الحياة اليومية المزج والعمل والمسافات والفائدة والتي يمكن حلها باستخدام المعادلات النسبية.

مثال 3 من الحياة اليومية مسائل المزج

الكيمياء **تضيف مها محلول حمضي بنسبة 70% إلى 12 mL نسبة المحلول الحمضي فيه 15%. كم ينبغي إضافته من المحلول الحمضي بنسبة 70% لعمل محلول حمضي بنسبة 60%؟**

الفهم تحتاج مها إلى أن تعرف المقدار اللازم إضافته من المحلول للمحلول الأصلي لصنع محلول جديد.

التخطيط يحتوي كل محلول على نسبة معينة من الحمض. يجب أن تكون نسبة الحمض في المحلول الأخير مساويةً لمقدار الحمض مقسومًا على إجمالي المحلول.

	الأصلي	المضاف	الجديد
كمية الحمض	0.15(12)	0.7(x)	0.15(12) + 0.7x
إجمالي المحلول	12	x	12 + x

$$\text{نسبة الحمض في المحلول} = \frac{\text{نسبة الحمض}}{\text{إجمالي المحلول}}$$

الحل

$$\frac{\text{النسبة}}{100} = \frac{\text{مقدار الحمض}}{\text{إجمالي المحلول}}$$ اكتب علاقة تناسب.

$$\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x}$$ عوّض.

$$\frac{60}{100} = \frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$$ بسّط.

$$100(12 + x)\frac{60}{100} = 100(12 + x)\frac{1.8 + 0.7x}{12 +}$$ يساوي المقام المشترك الأصغر $100(12 + x)$ اضرب في المقام المشترك الأصغر.

$$\frac{100}{1}(12 + x)\frac{60}{100} = 100(12 + x)\frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$$ اقسم العوامل المشتركة.

$$(12 + x)60 = 100(1.8 + 0.7x)$$ بسّط.

$$720 + 60x = 180 + 70x$$ وزّع

$$540 = 10x$$ اطرح $60x$ و 180.

$$54 = x$$ اقسم على 10.

التحقق

$$\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{60}{100} \stackrel{?}{=} \frac{0.15(12) + 0.7(54)}{12 + 54}$$ $x = 54$

$$\frac{60}{100} \stackrel{?}{=} \frac{37.8}{66}$$ بسّط.

$0.6 = 0.6$ ✓ بسّط.

تحتاج مها إلى إضافة 54 mL من المحلول الحمضي بنسبة 70%.

تمرين موجّه

3. يضيف منصور محلول عصير فاكهة بتركيز 65% إلى 15 mL من شراب عصير فاكهة بتركيز 10%. فكم ينبغي إضافته من محلول عصير الفاكهة تركيز 65% لصنع عصير فاكهة بتركيز 35%؟

نصيحة دراسية

التمثيل بالنماذج تكون الجداول مثل المذكور في المثال 3 مفيدة في ترتيب وحل مسائل المزيج والعمل والمتوسط الحسابي المرجح والمسافة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن استخدام القانون الذي يربط بين المسافة والسرعة والزمن لحل المعادلات النسبية. ويعتبر الاستخدام الأكثر شيوعًا هو $d = rt$. ومع ذلك يمكن تمثيلها عن طريق $r = \frac{d}{t}$ و $t = \frac{d}{r}$.

مثال 4 من الحياة اليومية مسائل المسافة

التجديف **يجدّف ناصر على زورق في خور دبي. ويبلغ معدل سرعته في الماء الراكد 6 mi/h. ويستغرق ناصر 3 ساعات ليقوم برحلة ذهاب وإياب بمسافة 10 mi بافتراض أن ناصر قام بالتجديف بمعدل ثابت للسرعة، فحدد معدل التيار.**

الفهم الآن لدينا سرعة ناصر في الماء الراكد والزمن الذي يستغرقه للتحرك مع التيار وضده. ونحتاج إلى تحديد سرعة التيار.

التخطيط تحرك ناصر 5 mi في اتجار التيار و 5 mi عكسه. ويعتبر القانون الذي يربط بين المسافة والسرعة والزمن هو $d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$.

إجمالي الزمن	الزمن المستغرق عكس التيار	الزمن المستغرق في اتجاه التيار
3 ساعات	$\frac{5}{6-r}$	$\frac{5}{6+r}$

الحل اكتب المعادلة.

$$\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$$

المقام المشترك الأصغر $= (6+r)(6-r)$

$$(6+r)(6-r)\frac{5}{6+r} + (6+r)(6-r)\frac{5}{6-r} = (6+r)(6-r)3$$

اضرب في المقام المشترك الأصغر.

$$(6+r)(6-r)\frac{5}{6+r} + (6+r)(6-r)\frac{5}{6-r} = (6+r)(6-r)3$$

اقسم العوامل المشتركة.

$$(6-r)5 + (6+r)5 = (36-r^2)3$$

بسّط.

$$30 - 5r + 30 + 5r = 108 - 3r^2$$

بسّط.

$$60 = 108 - 3r^2$$

بسّط.

$$0 = -3r^2 + 48$$

اطرح $10r$.

$$0 = -3(r+4)(r-4)$$

عامل.

$$0 = (r+4)(r-4)$$

اقسم كل طرف على -3.

$$r = 4 \text{ أو } -4$$

خاصية ناتج الضرب الصفري

التحقق المعادلة الأصلية

$$\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$$

$r = 4$

$$\frac{5}{6+4} + \frac{5}{6-4} \stackrel{?}{=} 3$$

بسّط.

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{2} \stackrel{?}{=} 3$$

بسّط.

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} \checkmark$$

حيث إنه لا يمكن أن تكون السرعة سالبة، تكون سرعة التيار 4 mi/h

نصيحة دراسية

مسائل المسافة عندما تتضمن المسافة رحلة ذهاب وعودة، تساوي المسافة في إحدى الاتجاهين المسافة في الاتجاه المقابل.

تمرين موجّه

4. **الطيران** تبلغ سرعة الرياح 20 mi/h. فإذا استغرقت طائرة 7 h لتقطع رحلة ذهاب وعودة بمسافة 2368 mi. فحدد سرعة الطائرة في الهواء الساكن.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن حل المسائل من الحياة اليومية التي تتضمن العمل باستخدام المعادلات النسبية.

مثال 5 من الحياة اليومية مسائل العمل

الخدمة المجتمعية **في كل عام، يبني طلاب الصفين الثاني والثالث الثانوي في مدرسة المنذر الثانوية منزلاً للحي. فإذا احتاج طلاب الصف الثالث الثانوي 24 يومًا لإكمال منزل و 18 يومًا إذا قاموا بالعمل مع طلاب الصف الثاني الثانوي، فكم سيستغرق الصف الثاني الثانوي لإكمال منزل إذا قاموا بالعمل وحدهم؟**

الفهم تتلخص المعطيات التي لدينا في المدة المستغرقة عندما يعمل طلاب الصف الثالث الثانوي وحدهم والوقت المستغرق عندما يعمل الصفين معًا. ونحتاج لتحديد المدة المستغرقة عند عمل طلاب الصف الثاني وحدهم.

التخطيط يستطيع طلاب الصف الثالث الثانوي إكمال منزل واحد في 24 يومًا، وبالتالي يكون معدل إنجازهم $\frac{1}{24}$ منزل في اليوم.

ويبلغ معدل إنجاز الصف الثاني الثانوي $\frac{1}{j}$.

ويبلغ المعدل المركب لكلا الصفين $\frac{1}{18}$.

المعدل المركب	معدل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل طلاب الصف الثالث الثانوي
$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{24}$

حُلّ

$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$ اكتب المعادلة.

$72j\frac{1}{24} + 72j\frac{1}{j} = 72j\frac{1}{18}$ المقام المشترك الأصغر $= 27j$. اضرب في المقام المشترك الأصغر.

$\overset{3}{\cancel{72}}j\frac{1}{\underset{1}{\cancel{24}}} + \overset{1}{\cancel{72}}j\frac{1}{\underset{1}{\cancel{j}}} = \overset{4}{\cancel{72}}j\frac{1}{\underset{1}{\cancel{18}}}$ اقسم العوامل المشتركة.

$3j + 72 = 4j$ وزّع

$72 = j$ اطرح $3j$.

التحقق يوجد طريقتان محتملتان.

الطريقة 1 التعويض عن القيم.

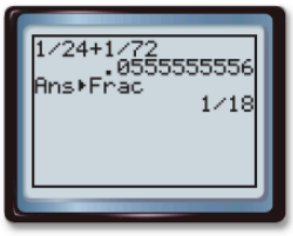
$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$ المعادلة الأصلية

$\frac{1}{24} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{1}{18}$ $j = 72$

$\frac{3}{72} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{4}{72}$ المقام المشترك الأصغر $= 72$

$\frac{4}{72} = \frac{4}{72}$ ✓ بسّط.

الطريقة 2 استخدام الحاسبة.



سيستغرق طلاب الصف الثاني الثاني 72 يومًا لإكمال المنزل وحدهم.

تمرين موجّه

5A. استغرق عدنان وطارق 6 ساعات لجرف الأوراق معًا في العام الماضي. وفي العام الماضي استغرق طارق 10 ساعات ليقوم بذلك وحده. فكم سيستغرق عدنان من الزمن ليقوم بذلك وحده هذا العام؟

5B. يقوم عمر وعلي بطلاء المنازل معًا. إذا تمكن عمر من طلاء أحد المنازل في 6 أيام وتمكن علي من طلاء نفس المنزل في 5 أيام، فكم سيستغرق طلاء المنزل إذا قاما بالطلاء معًا؟

الربط بالحياة اليومية

منذ 1997، يقضي طلاب مدرسة روك بوينت في برلنغتون بفيرمونت أسبوع في خدمة المجتمعات في جميع أنحاء العالم. وأثناء العمل مع مؤسسة هابيتات فور هيومانيتي، يقضي الطلاب الزمن في ريف تينيسي، حيث يبدؤون ويكملون سقف منزل من منازل هابيتات في أسبوع واحد.

المصدر: معهد المجتمع المحلي بولاية فيرمونت لشؤون العمل

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حل المتباينات النسبية

حل المتباينات النسبية لحل **المتباينات النسبية**. وهي المتباينات التي تحتوي على تعبير نسبي أو أكثر، فاتبع هذه الخطوات.

المفهوم الأساسي حل المتباينات النسبية

الخطوة 1 اذكر القيم المستثناة. وهي القيم التي تجعل المقام يساوي 0.

الخطوة 2 حل المعادلة ذات الصلة.

الخطوة 3 استخدم القيم المحددة بواسطة الخطوات السابقة لقسمة خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4 اختبر إحدى القيم في كل فترة لتحديد أي الفترات تحتوي على قيم تحقق المتباينة.

مثال 6 حل متباينة نسبية

حُلّ $\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$.

الخطوة 1 القيمة المستثناة لهذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2 حل المعادلة ذات الصلة.

$\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{4}$	المعادلة ذات الصلة
$12(x-2)\frac{x}{3} - 12(x-2)\frac{1}{x-2} = 12(x-2)\frac{x+1}{4}$	يساوي المقام المشترك الأصغر 12 $(x-2)$ اضرب في المقام المشترك الأصغر.
$4x^2 - 8x - 12 = 3x^2 - 3x - 6$	وزع.
$x^2 - 5x - 6 = 0$	اطرح $3x^2 - 3x - 6$.
$(x-6)(x+1) = 0$	عامل.
$x = 6 \text{ or } -1$	خاصية حاصل الضرب الصفري

الخطوة 3 ارسم مستقيمات رأسية عند القيم المستثناة وعند الحلول لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4 والآن اختبر إحدى القيم في كل فترة لتحدد ما إذا كانت القيم في الفترة تحقق المتباينة أم لا.

اختبر $x = 8$	اختبر $x = 4$	اختبر $x = 0$	اختبر $x = -3$
$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \stackrel{?}{<} \frac{8+1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \stackrel{?}{<} \frac{4+1}{4}$	$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \stackrel{?}{<} \frac{0+1}{4}$	$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \stackrel{?}{<} \frac{-3+1}{4}$
$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \stackrel{?}{<} \frac{27}{12}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{5}{4}$	$0 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{1}{4}$	$-1 + \frac{1}{5} \stackrel{?}{<} -\frac{2}{4}$
$\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$	$\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$ ✓	$\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$ ✓

تكون العبارة صحيحة لكل من $x = -3$ و $x = 4$. وبالتالي، فالحل هو $-1 < x < 2$ أو $2 > x > 6$.

تمرين موجّه **حل كل متباينة مما يلي.**

6A. $\frac{5}{x} + \frac{6}{5} > \frac{2}{3}$

6B. $\frac{4}{3} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$

نصيحة دراسية

المتباينات النسبية من المحتمل أن تؤدي جميع الفترات إلى عبارة صحيحة كما قد لا تؤدي منها إلى عبارة صحيحة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 2-1 **حُـلّ كل من المعادلات التالية. وتحقق من صحة الحل.**

1. $\frac{4}{7}+\frac{3}{x-3}=\frac{53}{56}$
2. $\frac{7}{3}-\frac{3}{x-5}=\frac{19}{12}$
3. $\frac{10}{2x+1}+\frac{4}{3}=2$
4. $\frac{11}{4}-\frac{5}{y+3}=\frac{23}{12}$
5. $\frac{8}{x-5}-\frac{9}{x-4}=\frac{5}{x^2-9x+20}$
6. $\frac{14}{x+3}+\frac{10}{x-2}=\frac{122}{x^2+x-6}$
7. $\frac{14}{x-8}-\frac{5}{x-6}=\frac{82}{x^2-14x+48}$
8. $\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{12}{x^2-4}$

مثال 3:

9. **البنية** لدى نورا 10 كيلوجرامات من الفاكهة المجففة وتبيع كل كيلوجرام منها مقابل AED 6.25. وتود أن تعرف كم تحتاج من كيلوجرامات مزيج المكسرات المباعة مقابل AED 4.50 للكيلوجرام لتصنع مزيجًا من المكسرات والفاكهة المجففة يباع مقابل AED 5 للكيلوجرام.

a. افترض أن m = عدد كيلوجرامات مزيج المكسرات. أكمل الجدول التالي.

	الكيلوجرامات	السعر لكل كيلوجرام	السعر الإجمالي
الفاكهة المجففة	4.5	51	51 (4.5)
مزيج المكسرات			
مزيج المكسرات والفاكهة			

b. اكتب معادلة نسبية مستخدمًا العمود الأخير من الجدول.

c. حُـلّ المعادلة لتحدد عدد كيلوجرامات مزيج المكسرات اللازم.

مثال 4

10. **المسافة** يبلغ متوسط سرعة قيادة موزة لدراجتها 11.5 كيلومتراً في الساعة. وتقوم برحلة ذهاب وعودة بمسافة 40 كيلومتراً. وتستغرق ساعة و 20 دقيقة في نفس اتجاه الرياح وساعتين و 30 دقيقة عكس اتجاه الرياح.

a. اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي قضته موزة في اتجاه الريح.

b. اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي قضته موزة عكس اتجاه الريح.

c. كم يستغرق إكمال الرحلة؟

d. اكتب معادلة نسبية لتحديد سرعة الرياح وأوجد حلها.

مثال 5

11. **العمل** يعمل أيوب وفارس في تلميع السيارات. ويستطيع أيوب تلميع إحدى السيارات في 60 دقيقة بينما يستطيع فارس تلميع نفس السيارة في 80 دقيقة. ويخطط الاثنان إلى تلميع نفس السيارة معًا ويودان معرفة كم من الزمن سيستغرق ذلك.

a. ما المقدار الذي سيكمله أيوب في دقيقة؟

b. ما المقدار الذي سيكمله أيوب في x دقيقة؟

c. ما المقدار الذي سيكمله فارس في دقيقة؟

d. ما المقدار الذي سيكمله فارس في x دقيقة؟

e. اكتب معادلة نسبية تمثل عمل أيوب وفارس معًا على السيارة.

f. حُـلّ المعادلة لتحدد الزمن المستغرق لإكمال تلميع السيارة.

مثال 6 **حُـلّ كل من المتباينات التالية. وتحقق من حلولك.**

12. $\frac{3}{5x}+\frac{1}{6x}>\frac{2}{3}$
13. $\frac{1}{4c}+\frac{1}{9c}<\frac{1}{2}$
14. $\frac{4}{3y}+\frac{2}{5y}<\frac{3}{2}$
15. $\frac{1}{3b}+\frac{1}{4b}<\frac{1}{5}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

المثالان 1-2 **حُـلّ كل من المعادلات التالية. وتحقق من حلولك.**

16. $\frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2-13x+42}$

17. $\frac{13}{y+3} - \frac{12}{y+4} = \frac{18}{y^2+7y+12}$

18. $\frac{14}{x-2} - \frac{18}{x+1} = \frac{22}{x^2-x-2}$

19. $\frac{11}{a+2} - \frac{10}{a+5} = \frac{36}{a^2+7a+10}$

20. $\frac{x}{2x-1} + \frac{3}{x+4} = \frac{21}{2x^2+7x \quad 4}$

21. $\frac{2}{y-5} + \frac{y-1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2 \quad 9y \quad 5}$

الأمثلة 3-5 22. **الكيمياء** كم عدد ميلليترات محلول حمضي بتركيز 20% التي يجب إضافتها إلى 30 mL من محلول حمضي بتركيز 75% للحصول على محلول حمضي بتركيز 30%؟

23. **البقالة** اشترت سالي 1.4 kg من الموز مقابل AED 7.35 للكيلوجرام. فكم عدد كيلوجرام التفاح المباع بمبلغ AED 10.20 للكيلوجرام التي يجب أن تشتريها بحيث تكون تكلفة كيلوجرام الفاكهة AED 8.15؟

24. **المباني** تستطيع مجموعة بدر التطوعية بناء مرأب في 12 ساعة. وتستطيع مجموعة شيماء بناء مرأب في 16 ساعة. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟

مثال 6 **حُـلّ كل من المتباينات التالية. وتحقق من حلولك.**

25. $3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x}$

26. $\frac{5}{3a} - \frac{3}{4a} > \frac{5}{6}$

27. $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2}$

28. $\frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4}$

29. $\frac{x}{5} + \frac{2}{3} < \frac{3}{x-4}$

30. $\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-1} < \frac{3}{2}$

31. **السفر** جوًا تستغرق إحدى الطائرات 20 ساعة لتطير إلى وجهتها عكس اتجاه الرياح. تستغرق رحلة العودة 16 ساعة. إذا كان متوسط سرعة الطائرة في الهواء الساكن 500 كيلومتر في الساعة، فما متوسط سرعة الرياح أثناء الرحلة؟

32. **المعرفة المالية** ترغب هدى في استثمار AED 10,000 في حسابين مختلفين. ويمكن للحساب المحفوف بالمخاطر أن يجني فائدة 9%، بينما يجني الحساب الأخر فائدة 5%. وتود أن تجني فائدة AED 750 هذا العام. من بين الجداول أو التمثيل البياني أو المعادلات، اختر أفضل طريقة تمثيل تلزمها لتحديد المقدار المفترض استثماره في كل حساب.

33. **التمثيلات المتعددة** فكّر في $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x-3}$

a. **الصيغ الجبرية** حُـلّ المعادلة لإيجاد x. هل كانت أي من قيم x دخيلة؟

b. **التمثيل البياني** مثل $y_1 = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x}$ و $y_2 = \frac{x-1}{x-3}$ بيانيًا على نفس التمثيل البياني لـ $0 < x < 5$.

c. **التحليلات** بأي قيم x تتقاطع؟ هل تتقاطع القيم عندما تكون x دخيلة بالنسبة لحل المعادلة الأصلية؟

d. **الصيغ اللفظية** استخدم المعرفة لذكر كيفية استخدام تمثيل بياني لتحديد إن كانت الحلل المحتملة لمعادلة نسبية دخيلة أم لا.

حُـلّ كل من المعادلات التالية. وتحقق من حلولك.

34. $\frac{2}{y+3} - \frac{3}{4-y} = \frac{2y-2}{y^2-y-12}$

35. $\frac{2}{y+2} - \frac{y}{2-y} = \frac{y^2+4}{y^2-4}$

مسائل مهارات التفكير العليا

36. **مسألة غير محددة** الإجابة قدّم مثالاً على معادلة نسبية يمكن حلها بضرب كل طرف من طرفي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$.

37. **التحدي** حُـلّ $\frac{1 + \frac{9}{x} + \frac{20}{x^2}}{1 - \frac{25}{x^2}} = \frac{x+4}{x-5}$.

38. **الأدوات** عند استخدام خاصية Table على حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف $f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$، ستظهر القيم 2− و 3 على الحاسبة "ERROR". وضح دلالتها.

39. **الكتابة في الرياضيات** لماذا ينبغي عليك التحقق من حلولك للمعادلات والمتباينات النسبية؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

40. يحتوي 9 kg من مزيج المكسرات على 55% من الفول السوداني ممزوجًا بـ 6 kg من نوع آخر من مزيج المكسرات يحتوي على 40% من الفول السوداني. فكم نسبة الفول السوداني في المزيج الجديد؟

A 58% B 51% C 49% D 47%

41. بالعمل وحده، يستطيع سالم حفر حفرة 3 m في 3 m في خمس ساعات. ويستطيع حسن حفر نفس الحفرة في ست ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟

F 1.5 h H 25.2 h
G 2.34 h J 37.2 h

42. انطلقت حاملة طائرات في رحلة إلى مدينة ما ثم عادت. وقد استغرقت رحلة الذهاب ثلاث ساعات ورحلة العودة أربع ساعات. وقد كان متوسط السرعة في رحلة العودة 6 km/h. أوجد متوسط سرعة للرحلة إلى غوام.

A 6 km/h C 10 km/h
B 8 km/h D 12 km/h

43. إجابة قصيرة إذا كان المستقيم ℓ متعامدًا على قطعة مستقيمة CD في نقطة F و $CF = FD$. فكم عدد النقاط على المستقيم ℓ التي تكون مسافتها من النقطة C بنفس مسافتها من النقطة D؟ جميع النقاط

مراجعة شاملة

حدد إن كانت كل علاقة توضح تغيرًا *طرديًا* أم *عكسيًا* أم لا توضح *أيًا منها*. (الدرس 5-9)

44.

x	y
12	18
24	36
36	18
72	9

45.

x	y
0.2	24
0.6	72
1.8	216
5.4	648

46.

x	y
14	3
28	1.5
56	0.75
112	0.375

مثّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 4-9)

47. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2+7x+12}$ **48.** $f(x) = \dfrac{x^2-5x-14}{x-7}$ **49.** $f(x) = \dfrac{x^2+3x-6}{x-2}$

50. المناخ يعبر عن الضغط الجوي P، بالبار، لارتفاع معين عن الأرض من خلال القانون $P = a \cdot e^{-\frac{k}{H}}$. في القانون، a تمثل الضغط على سطح الأرض، والذي يبلغ نحو 1 بار، ويمثل k الارتفاع الذي تود إيجاد الضغط عنده بالكيلومترات بينما تبلغ H 7 km دائمًا.

a. أوجد الضغط عند ارتفاع 2 km و 4 km و 7 km.

b. ما الذي تلاحظه حول الضغط مع تزايد الارتفاع؟

51. أجهزة الكمبيوتر منذ أن تم اختراع أجهزة الكمبيوتر، تضاعفت السرعة الحاسوبية بعامل من 4 كل ثلاث سنوات.

a. إذا كان جهاز الحاسب يعمل بسرعة حاسوبية s اليوم، فاكتب تعبيرًا للسرعة التي تتوقع أن يعمل بها جهاز حاسب مكافئ بعد x فترات من ثلاث سنوات.

b. افترض أن جهاز الحاسوب يعمل بسرعة معالجة 2.8 جيجا هرتز وترغب في جهاز حاسوب يمكنه العمل بسرعة 5.6 جيجا هرتز. إذ وجد جهاز حاسب بهذه السرعة ولكنه غير متاح حاليًا للاستخدام المنزلي، كم تتوقع الانتظار حتى تستطيع شراء جهاز حاسب كهذا؟

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كان التالي أطوال محتملة لأضلاع مثلث قائم.

52. 5, 12, 13 **53.** 60, 80, 100 **54.** 7, 24, 25

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-6 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات النسبية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية Table. مثِّل كلا طرفي المعادلة بيانيًا، وحدد موضع نقطة (نقاط) التقاطع.

نشاط 1 معادلة نسبية

حُـلّ المعادلة: $\frac{4}{x+1} = \frac{3}{2}$.

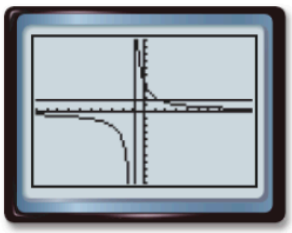
الخطوة 1 مثِّل كل طرفٍ من أطراف المعادلة بيانيًا.

مثِّل كل طرفٍ من أطراف المعادلة بيانيًا كما لو كان دالة منفصلة. أدخل $\frac{4}{x+1}$ بالشكل **Y1** و $\frac{3}{2}$ بالشكل **Y2**. ثم مثِّل المعادلتين بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= 4 ÷ (X,T,θ,n + 1)

ENTER 3 ÷ 2 ZOOM 6



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

وحيث إن الحاسبة في وضع الاتصال، فقد يظهر خط عمودي يربط بين فرعي القطع الزائد. هذا الخط ليس جزءًا من التمثيل البياني.

الخطوة 2 استخدم خاصية **intersect (التقاطع)**.

تتيح لك خاصية **intersect (التقاطع)** من قائمة **CALC (احسب)** تقريب الزوج المرتب للنقطة التي تتداخل عندها التمثيلات البيانية.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [CALC] 5

اختر تمثيلاً بيانيًا واضغط ENTER. اختر التمثيل البياني الآخر، واضغط ENTER ثم اضغط ENTER مجددًا.

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الإجابة $1\frac{2}{3}$.

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE (الجدول)**.

تحقق من الحل باستخدام خاصية **TABLE (الجدول)**. رتب الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي $1\frac{2}{3}$.

X	Y1	Y2
0	4	1.5
.33333	3	1.5
.66667	2.4	1.5
1	2	1.5
1.3333	1.7143	1.5
1.6667	1.5	1.5
2	1.3333	1.5

X=0

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [TABLE] 2nd [TBLSET] 0 ENTER 1 ÷ 3 ENTER

يعرض الجدول قيم x وقيم y المقابلة لها في كل تمثيل بياني. عند $x = 1\frac{2}{3}$، يكون لكلتا الدالتين قيمة y تساوي 1.5. لذلك، يكون حل المعادلة $1\frac{2}{3}$.

(يتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات النسبية تابع

يمكنك استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات النسبية باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

النشاط 2 المتباينة النسبية

حُـلّ المتباينة: $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}>9$.

الخطوة 1 أدخل المتباينات.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y>\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$ أو $y<\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$. بما أن هذه المتباينة تحوي رمز أصغر من.

فظلِّل تحت المنحنى. أدخل الحد أولاً ثم استخدم الأزرار والأسهم

ENTER لاختيار أيقونة "التظليل تحت".

المتباينة الثانية هي $y>9$. ظلِّل تحت المنحنى بما أن هذه المتباينة تحوي رمز أكبر من.

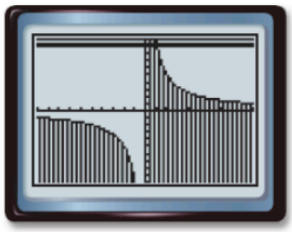
خطوات العملية على الحاسبة:

Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 3 ÷ X,T,θ,n + 7 ÷ X,T,θ,n

ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ 9

الخطوة 1 تمثيل النظام بيانيًّا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

مجموعة الحل للمتباينة الأصلية هي مجموعة قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة. باستخدام خاصية intersect **(التقاطع)** في الحاسبة، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\left\{x\middle|0<x<1\frac{1}{9}\right\}$.

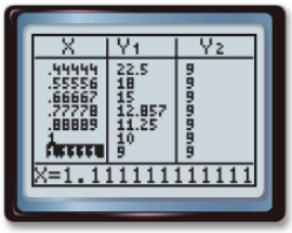
الخطوة 2 استخدم خاصية TABLE **(الجدول)**.

تحقق باستخدام خاصية TABLE **(الجدول)**. رتب الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي $\frac{1}{9}$.

خطوات العملية على الحاسبة:

2nd [TBLSET] 0 ENTER 1 ÷ 9 ENTER

2nd [TABLE]



X	Y1	Y2
.44444	22.5	9
.55556	18	9
.66667	15	9
.77778	12.857	9
.88889	11.25	9
1	10	9
1.1111	9	9

X=1.111111111111

مرر عبر الجدول. لاحظ أنه في حالة قيم x الأكبر من 0 والأصغر من $1\frac{1}{9}$، Y1 > Y2. هذا يؤكد بأن حل المتباينة هو $\left\{x\middle|0<x<1\frac{1}{9}\right\}$.

تمارين

حُـلّ كل معادلة أو متباينة.

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{2}{x}$
2. $\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x-2}$
3. $\frac{4}{x}=\frac{6}{x^2}$
4. $\frac{1}{1-x}=1-\frac{x}{x-1}$
5. $\frac{1}{x+4}=\frac{2}{x^2+3x-4}-\frac{1}{1-x}$
6. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}>5$
7. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}<0$
8. $1+\frac{5}{x-1}\le 0$
9. $2+\frac{1}{x-1}\ge 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

التعابير النسبية (الدرسان 1-9 و 2-9)

- ضرب التعابير النسبية وقسمتها عمليتان مشابهتان لضرب الكسور وقسمتها.
- لتحويل الكسور المركبة إلى أبسط صورة، يمكن تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط التعبير الناتج.

الدوال النسبية ودوال المقلوب (الدروس 3-9 و 4-9)

- تأخذ دالة المقلوب الصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.
- تأخذ الدالة النسبية الصيغة $\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و$b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$.

التغير الطردي والمشترك والعكسي (الدرس 5-9)

- التغير الطردي: يكون هناك عدد غير صفري k بحيث تكون $y = kx$.
- التغير المشترك: يكون هناك عدد غير صفري k بحيث تكون $y = kxz$.
- التغير العكسي: يكون هناك عدد غير صفري k بحيث يكون $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$. حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$.

المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 6-9)

- تخلص من الكسور في المعادلات النسبية عبر ضرب كل طرفٍ من طرفي المعادلة بالمقام المشترك الأصغر.
- يجب ألا تشمل الحلول الممكنة للمعادلة النسبية القيم التي ينتج عنها صفرٌ في المقام.

مطويات منظِّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

التغير المركب combined variation	نقطة الانفصال point discontinuity
كسر مركَّب complex fraction	معادلة نسبية rational equation
ثابت التغير constant of variation	التعبير النسبي rational expression
التغير الطردي direct variation	دالة نسبية rational function
خط تقارب أفقي horizontal asymptote	متباينة نسبية rational inequality
قطع زائد hyperbola	دالة المقلوب reciprocal function
تغير عكسي inverse variation	خط تقارب رأسي vertical asymptote
تغير مشترك joint variation	المتوسط المرجح weighted average
خط تقارب مائل oblique asymptote	

مراجعة المفردات

اختر من القائمة أعلاه المصطلح الذي يكمل كل جملة أو عبارة بأفضل شكل.

1. _____ هو تعبيرٌ نسبي يحتوي بسطه و/ أو مقامه على تعبير نسبي.
2. إذا أظهرت كميتان _____، فإن ناتج ضربهما يساوي ثابتًا k.
3. خط التقارب _____ هو خط تقارب خطي ليس أفقيًا ولا رأسيًا.
4. يمكن التعبير عن _____ بالصيغة $y = kx$.
5. تُعرف المعادلات التي تحتوي على تعبيرٍ نسبيٍ واحدٍ أو أكثر باسم _____.
6. يحتوي التمثيل البياني لـ $y = \frac{x}{x+2}$ على _____ عند $x = -2$.
7. يحدث _____ عندما تختلف كمية واحدة بشكل مباشر بوصفها ناتج ضربٍ لاثنتين أو أكثر من الكميات الأخرى.
8. تدعى نسبة تعبيرين كثيري الحدود باسم _____
9. تبدو _____ مثل فجوة في التمثيل البياني لأن التمثيل البياني غير معرَّفٍ عند تلك النقطة.
10. يحدث _____ عندما تختلف كمية واحدة بشكل مباشر و/ أو عكسي مثل اثنتين أو أكثر من الكميات الأخرى.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

9-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

11. $\frac{-16xy}{27z} \times \frac{15z^3}{8x^2}$

12. $\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \times \frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

13. $\frac{x^2-1}{x^2-4} \times \frac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

14. $\frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2-y^2}{3x^2}$

15. $\frac{\frac{x^2+3x-18}{x+4}}{\frac{x^2+7x+6}{x+4}}$

16. **الهندسة** تبلغ مساحة مثلث $3x^2 + 9x - 54$ سنتيمترًا مربعًا. إذا كان ارتفاع المثلث $x + 6$ سنتيمترات، أوجد طول القاعدة.

مثال 1

حوّل $\frac{4a}{3b} \times \frac{9b^4}{2a^2}$ لأبسط صورة.

$$\frac{4a}{3b} \times \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{2 \times 2 \times a \times 3 \times 3 \times b \times b \times b \times b}{3 \times b \times 2 \times a \times a}$$

$$= \frac{6b^3}{a}$$

مثال 2

حوّل $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12}$ لأبسط صورة.

$$\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12} = \frac{r^2+5r}{2r} \times \frac{6r-12}{r^2-25}$$

$$= \frac{r(r+5)}{2r} \times \frac{6(r-2)}{(r+5)(r-5)}$$

$$= \frac{3(r-2)}{r-5}$$

9-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

17. $\frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$

18. $\frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$

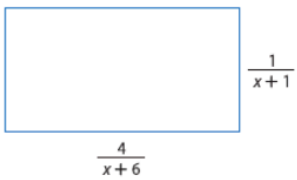
19. $\frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$

20. $\frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$

21. $\frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$

22. $\frac{\frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}}$

23. **الهندسة** ما محيط المستطيل؟



مثال 3

حوّل $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$ لأبسط صورة.

$$\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$$

$$= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

$$= \frac{3a-2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$ اطرح البسوط.

$$= \frac{3a-2a-4}{(a-2)(a+2)}$$ خاصية التوزيع.

$$= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$$ بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

مثِّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

24. $f(x) = \frac{10}{x}$

25. $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$

26. $f(x) = \frac{3}{x+5}$

27. $f(x) = \frac{6}{x-9}$

28. $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$

29. $f(x) = \frac{4}{x+4} - 8$

30. **الحفظ** يزرع مجلس الطلاب 28 شجرة لمشروع خدمي. ويعتمد عدد الأشجار التي سيزرعها كل شخص على عدد أعضاء مجلس الطلاب.

a. اكتب دالة لتمثيل هذه الحالة.

b. ارسم الدالة بيانيًا.

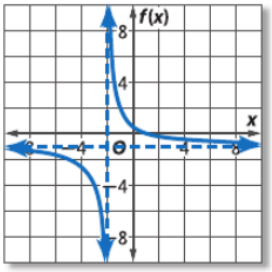
مثال 4

مثِّل $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

$a = 3$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا.

$h = -2$: أزِح الرسم البياني وحدتين لأسفل. يوجد خط تقارب عند $x = -2$.

$k = -1$: أزِح الرسم البياني وحدة واحدة لأسفل. يوجد خط تقارب عند $f(x) = -1$.



المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$،
المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

9-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

حدد معادلاتخطوط التقارب الرأسية وقيم x لأيفجوات في التمثيل البياني لكل دالة نسبية.

31. $f(x) = \frac{3}{x^2+4x}$

32. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+6x+8}$

33. $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-5x-24}$

مثل كل دالة نسبية بيانيًا.

34. $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$

35. $f(x) = \frac{x}{x+1}$

36. $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$

37. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6}$

38. **المبيعات** تبيع أمل اشتراكاتٍ لإحدى المجلات، من أول 15 منزلاً، باعت اشتراكات في 10 منها. لنفترض أن أمل ذهبت إلى مجموعة أخرى من المنازل يبلغ عددها x وباعت اشتراكات فيها جميعًا. يمكن تحديد نسبة المنازل التي باعت فيها من إجمالي المنازل باستخدام $P(x) = \frac{10+x}{15+x}$.

a. ارسم الدالة بيانيًا.

b. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟

مثال 5

حدد معادلاتخطوط التقارب الرأسية وقيم x لأيفجوات في التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

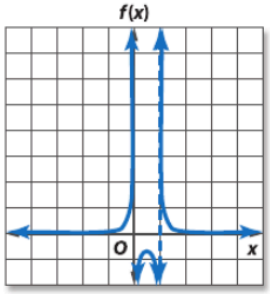
$\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$

الدالة غير معرَّفة عندما $x = 1$ و $x = -3$.

بما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}, x = -3$ خطّ تقارب رأسي، و $x = 1$ تمثل فجوة في التمثيل البياني.

مثال 6

مثِّل $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًا.



الدالة غير معرفة عندما $x = 0$ و $x = 1$. لأن $\frac{1}{6x(x-1)}$ في أبسط صيغة. $x = 0$ و $x = 1$ خطان تقاربيان رأسيان. ارسم خطي التقارب وارسم التمثيل البياني.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-5 دوال التغير

39. إذا كانت a تتغير طرديًا مع b وكانت $b = 18$ عندما $a = 27$، فأوجد a عندما $b = 10$.

40. إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$، فأوجد y عندما $x = -5$.

41. إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$، فأوجد y عندما $x = 81$.

42. إذا كانت y تتغير بشكلٍ مشترك مع x و z، وكانت $x = 8$ و $z = 3$ عندما $y = 72$، فأوجد y عندما $x = -2$ و $z = -5$.

43. إذا كانت y تتغير بشكل مشترك مع x و z وكانت $y = 18$ عندما $x = 6$ و $z = 15$، فأوجد y عندما $x = 12$ و $z = 4$.

44. **أعمال** يتغير دخل ليلى طرديًا مع عدد ساعات رعايتها للأطفال. إذا كانت تكسب 68 AED لكل 8 ساعاتٍ من رعاية الأطفال، فأوجد مقدار ما كسبته بعد 5 ساعات من رعاية الأطفال.

مثال 7

إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$، فأوجد x عندما $y = 15$.

$\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ تغير عكسي

$\frac{24}{15} = \frac{x_2}{-8}$ $x_1 = 24, y_1 = -8, y_2 = 15$

$24(-8) = 15(x_2)$ اضرب ضربًا تبادليًا.

$-192 = 15x_2$ بسّط.

$-12\frac{4}{5} = x_2$ اقسم كل طرف على 15.

عندما تكون $y = 15$ فإن قيمة x تكون $-12\frac{4}{5}$.

9-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية

حُلّ كل معادلة أو متباينة. تحقق من حلولك.

45. $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$

46. $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$

47. $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$

48. $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$

49. $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$

50. $\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$

51. $\frac{1}{2x} - \frac{4}{5x} > \frac{1}{3}$

52. **أعمال الحديقة** تستطيع ياسمين أن تزرع حديقة خلال 3 ساعات. وتستطيع هالة زراعة الحديقة نفسها خلال 4 ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟

مثال 8

حُلّ المعادلة: $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$.

المقام المشترك الأصغر هو $x(x+2)$.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$

$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$

$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$3(x) + 1(x+2) = 0$$

$$3x + x + 2 = 0$$

$$4x + 2 = 0$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 تدريب على الاختبار

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $\frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2}$

2. $\frac{m^2-4}{3m^2} \times \frac{6m}{2-m}$

3. $\frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3}$

4. $\frac{\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15}}{\frac{x^2-1}{x^2-x-20}}$

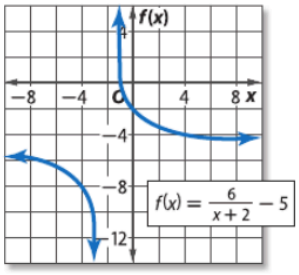
5. $\frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1}$

6. $\frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$

7. $\frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2}$

8. $\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$

9. اذكر خطوط التقارب للدالة الممثلة بيانيًا ومجالها ومداها.



10. **اختيار من متعدّد** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$؟

A $x = -2$

B $x = -1$

C $x = 1$

D $x = 2$

مثّل كل دالة بيانيًا.

11. $f(x) = -\frac{8}{x} - 9$

12. $f(x) = \frac{2}{x+4}$

13. $f(x) = \frac{3}{x-1} + 8$

14. $f(x) = \frac{5x}{x+1}$

15. $f(x) = \frac{x}{x-5}$

16. $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1}$

17. حدد معادلات أي خطوط التقارب الرأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-35}$.

18. حدد معادلات أي خطوط التقارب المائلة في التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2+x-5}{x+3}$.

حُـلّ كل معادلة أو متباينة.

19. $\frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4}$

20. $\frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21}$

21. $7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x}$

22. $r + \frac{6}{r} - 5 = 0$

23. $\frac{6}{7} - \frac{3m}{2m-1} = \frac{11}{7}$

24. $\frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3}$

25. إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $y = 18$ عندما $x = -\frac{1}{2}$، فأوجد x عندما $y = -10$.

26. إذا كانت m تتغير طرديًا مع n وكانت $m = 24$ عندما $n = -3$، فأوجد n عندما $m = 30$.

27. افترض أن r تتغير بشكل مشترك مع s و z. إذا كانت $s = 20$ عندما $r = 140$ و $t = -5$، فأوجد s عندما $r = 7$ و $t = 2.5$.

28. **ركوب الدراجات** عندما تركب سها دراجتها، تتغير المسافة التي تقطعها طرديًا مع مقدار وقت ركوبها للدراجة. لنفترض أنها تقطع بالدراجة مسافة 50 km خلال 2.5 ساعة. وفق هذا المعدل، كم ساعة سيستغرقها قطع مسافة 80km بالدراجة؟

29. **الطلاء** يستطيع عمر طلاء منزلٍ خلال 10 ساعات، ويستطيع عامر طلاء المنزل نفسه خلال 9 ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟

30. **الاختيار من متعدد** كم عدد لترات محلول حمضي بتركيز 25% التي يجب إضافتها إلى 30 L من محلول حمضي بتركيز 80% للحصول على محلول حمضي بتركيز 50%؟

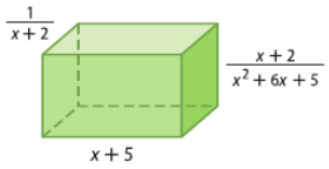
F 18

G 30

H 36

J 66

31. ما حجم متوازي المستطيلات؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 التحضير للاختبارات المعيارية

التخمين والتحقق

من المهم جدًاأن تتابع سرعتك وتتابع معها مقدار الوقت الذي يكون متاحًا لك عند إجراء اختبارمعياري. إذا كان الوقت ينفد، أو إذا كنت غير متأكد من كيفية حل إحدى المسائل، فإن إستراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على تحديد الإجابة الصحيحة بسرعة.

إستراتيجيات للتخمين والتحقق

الخطوة 1

أمعن النظر في كل اختيار إجابة ممكنة، وقوّمه لمعرفة مدى صحته. ألغ الإجابات الخاطئة.

اسأل نفسك:

- هل هنالأي خيارات إجابة غير صحيحة بشكل واضح؟
- هلأي منخيارات الإجابة ليست بالشكل الصحيح؟
- هل توجدأيخيارات إجابة لا تحتويالوحدات المناسبة للإجابة الصحيحة؟

الخطوة 2

خيارات الإجابة المتبقية، استخدام أسلوب التخمين والتحقق.

- **المعادلات:** إذا كنت تحل معادلة، فاستبدل خيار الإجابة بالمتغير وانظر ما إذا كانهذا يؤدي إلى جملة عددية صحيحة.
- **نظام المعادلات:** في نظام المعادلات، استبدل خيار الإجابة بجميع المتغيرات وتأكد أن جميع المعادلات تؤدي إلى جملة عددية صحيحة.

الخطوة 3

اختر خيار إجابة وانظر ما إذا كان يفي بقيود بيان المسألة. حدّد الإجابة الصحيحة.

- إذا كان خيار الإجابة الذي تختبره لا يحل المسألة، فانتقل إلى التخمين المعقول التالي، وتحقق منه.
- عندما تصل إلى خيار الإجابة الصحيح، توقف.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

أوجد حل: $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$.

A -1

B 1

C 5

D 7

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حل المعادلة النسبية سيكون عددًا حقيقيًا. وبما أن جميع خيارات الإجابة الأربعة أعداد حقيقية، فهي جميعًا إجابات صحيحة ممكنة ويجب التحقق منها. ابدأ بخيار الإجابة الأول وتحقق منه في المعادلة النسبية. تابع حتى تجد خيار الإجابة الذي ينتج عنه جملة عددية صحيحة.

التخمين: -1	التحقّق:
	$\frac{2}{(-1)-3} - \frac{4}{(-1)+3} = \frac{8}{(-1)^2-9}$ $-\frac{5}{2} \neq -1$ ✗

التخمين: 1	التحقّق:
	$\frac{2}{1-3} - \frac{4}{1+3} = \frac{8}{(1)^2-9}$ $-2 \neq -1$ ✗

التخمين: 5	التحقّق:
	$\frac{2}{5-3} - \frac{4}{5+3} = \frac{8}{(5)^2-9}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

إذا كانت $x = 5$، فالنتيجة جملة عددية صحيحة. فإن، الإجابة الصحيحة هي C.

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

1. أوجد حل: $\frac{2}{5x} - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$.

A $\frac{1}{10}$

B $\frac{1}{5}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{1}{2}$

2. مجموع أعمار خالد وأسماء ونورا يساوي 40. أسماء أكبر بعامٍ واحد من مِثلي نورا. خالد أكبر من أسماء بـ 3 أعوام. كم عُمر أسماء؟

F 7

G 14

H 15

J 18

3. حدد النقطة (أو النقاط) التي تتقاطع عندها الدالة النسبية التالية مع المحور x.

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{x+4}{3}$$

A -5

B 4

C 3 أو 2

D -5 or 2

4. تبيع شركة المسرح التي يملكها عيسى التذاكر بقيمة AED 10. وبهذا السعر يبيعون 400 تذكرة. يقدّر عيسى بأن المبيعات ستنخفض بمقدار 40 تذكرة مع كل زيادة في السعر تبلغ AED 2. ما السعر الذي سينتج عنه أكبر مقدارٍ من الإيرادات؟

F 10

G 13

H 15

J 20

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 تدريب على الاختبارات المعيارية

اختيار من متعدّد

اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. يستطيع والد صالح جز العشب على آلة جز العشب المعدّة للركوب في 45 دقيقة. ويستغرق الأمر من صالح ساعة و45 دقيقة باستخدام آلة جز العشب المدفوعة باليد. فأي المعادلات النسبية التالية يمكن حلها لاحتساب عدد الدقائق t اللازمة لجز العشب إذا تعاون الاثنان معًا؟

A $\frac{t}{45} + \frac{t}{1.45} = 1$

B $\frac{t}{150} = 1$

C $\frac{t}{45} + \frac{t}{105} = 1$

D $\frac{t + 45}{t + 105} = 1$

2. تختلف التكلفة الإجمالية لحجز موقع تخييم بشكل مباشر حسب عدد ليالي استئجار الموقع. كما هو موضح بالجدول.

الأيام	التكلفة الإجمالية
1	AED 24
2	AED 48
	AED 72
4	AED 96

أي معادلة تمثل الاختلاف المباشر؟

F $y = x + 24$

G $y = 24x$

H $y = \frac{24}{x}$

J $y = 96x$

3. في أي اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$ لينتج التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟

A الأعلى

B الأسفل

C اليمين

D اليسار

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 تحقق من الإجابة من خلال التعويض عن x بالأعداد 1 و 2 و 3 و 4 والتأكد من الحصول على القيم الموجودة بالجدول.

4. أي مما يلي **ليس** خطًا تقاربيًا للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$؟

F $f(x) = 0$

G $x = -7$

H $x = 7$

J $f(x) = 1$

5. حوّل الكسر المجمع لأبسط صورة.

$$\frac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$$

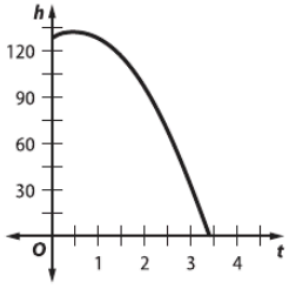
A $\frac{x+3}{x+4}$

B $\frac{1}{x-4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

6. تم قذف كرة لأعلى بسرعة ابتدائية 16 ft/s من أعلى بناية ارتفاعها 128 ft. ارتفاعها h بالقدم فوق سطح الأرض بعد t ثانية سيكون $h = 128 + 16t - 16t^2$.



فما الاستنتاج الأمثل عن حركة الكرة؟

F ظلت الكرة فوق ارتفاع 128 ft لأكثر من 3 s.

G عادت الكرة إلى سطح الأرض في أقل من 4 s.

H تحركت الكرة لأعلى مسافة أكبر من تحركها لأسفل.

J تحركت الكرة أقل من 128 ft في 3.4 s.

7. أي هذه المعادلات يصف علاقة يناظر فيها كل عدد حقيقي سالب x عددًا حقيقيًا غير سالب y؟

A $y = -x$

B $y = x$

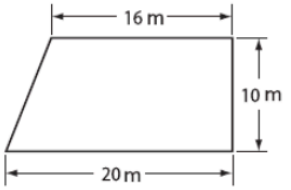
C $y = \sqrt{x}$

D $y = x^3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.



8. تحيط سعاد الحديقةالموضحة في الصورة بمرحجري.كم عدد مترات الحجارةاللازمة تقريبًا؟

9. إجابة شبكية ادخرت هدى بعض المال لعطلة مدتها أسبوع. أنفقت في اليوم الأول من العطلة AED 125 على الطعام والفندق. وفي اليوم الثاني، أعطتها أختها AED 80 كنفقات. وحينها تبقى لدى فاطمة AED 635 لباقي العطلة. فكم درهمًا كان لديها في بداية العطلة؟

10. يريد سالم طباعة 800 منشور من صفحة واحدة لعمله في المناظر الطبيعية. ولديه طابعة يمكنها طباعة 8 صفحات في الدقيقة. ولدى شريكه في العمل طابعة أخرى يمكنها طباعة 10 صفحات في الدقيقة.

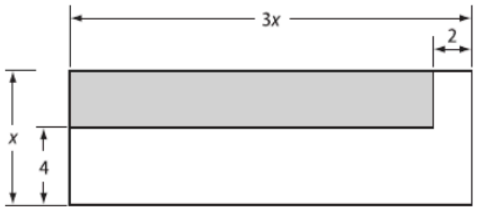
a. كم تستغرق طابعة سالم لطباعة جميع المنشورات؟ كم تستغرق طابعة شريكه؟

b. ضع معادلة نسبية يمكن استخدامها لإيجاد عدد الدقائق tاللازمة لطباعة جميع المنشورات وعددها 800 في حالة استخدام الطابعتين في الوقت ذاته.

c. حل المعادلة التي كتبتَ في الجزء b. كم تستغرق طباعة جميع المنشورات في حالة استخدام الطابعتين في الوقت ذاته؟ قرّب إلى أقرب دقيقة.

11 **إجابة شبكية** يمكن تمثيل عدد سكان دولة بالمعادلة $P(t) = 40e^{0.02t}$. حيث يمثل P عدد السكان بالمليون ويمثل t عدد الأعوام منذ 2005. متى سيكون عدد السكان 400 مليون؟

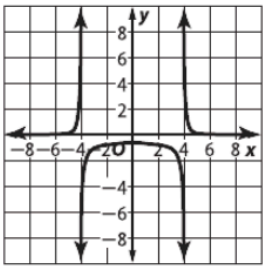
12. ما مساحة المنطقة المظللة من المستطيل المعبر عنها ككثيرة حدود في أبسط صورة؟



13. إجابة شبكية افترض أن y تتناسب عكسيًا حيث x و$y = 4$ عندما $x = 12$. ما قيمة y عندما xتساوي 5؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.



14. استخدم التمثيل البياني للدالة النسبية الموضحة لحل كل معادلة.

a. صف خطي التقارب الرأسي والأفقي للتمثيل البياني.

b. اكتب معادلة الدالة النسبية. اشرح كيف توصلت لإجابتك.

15. فكّر في الدالة كثيرة الحدود

$$f(x) = 3x^4 + 19x^3 + 7x^2 - 11x - 2.$$

a. ما درجة الدالة؟

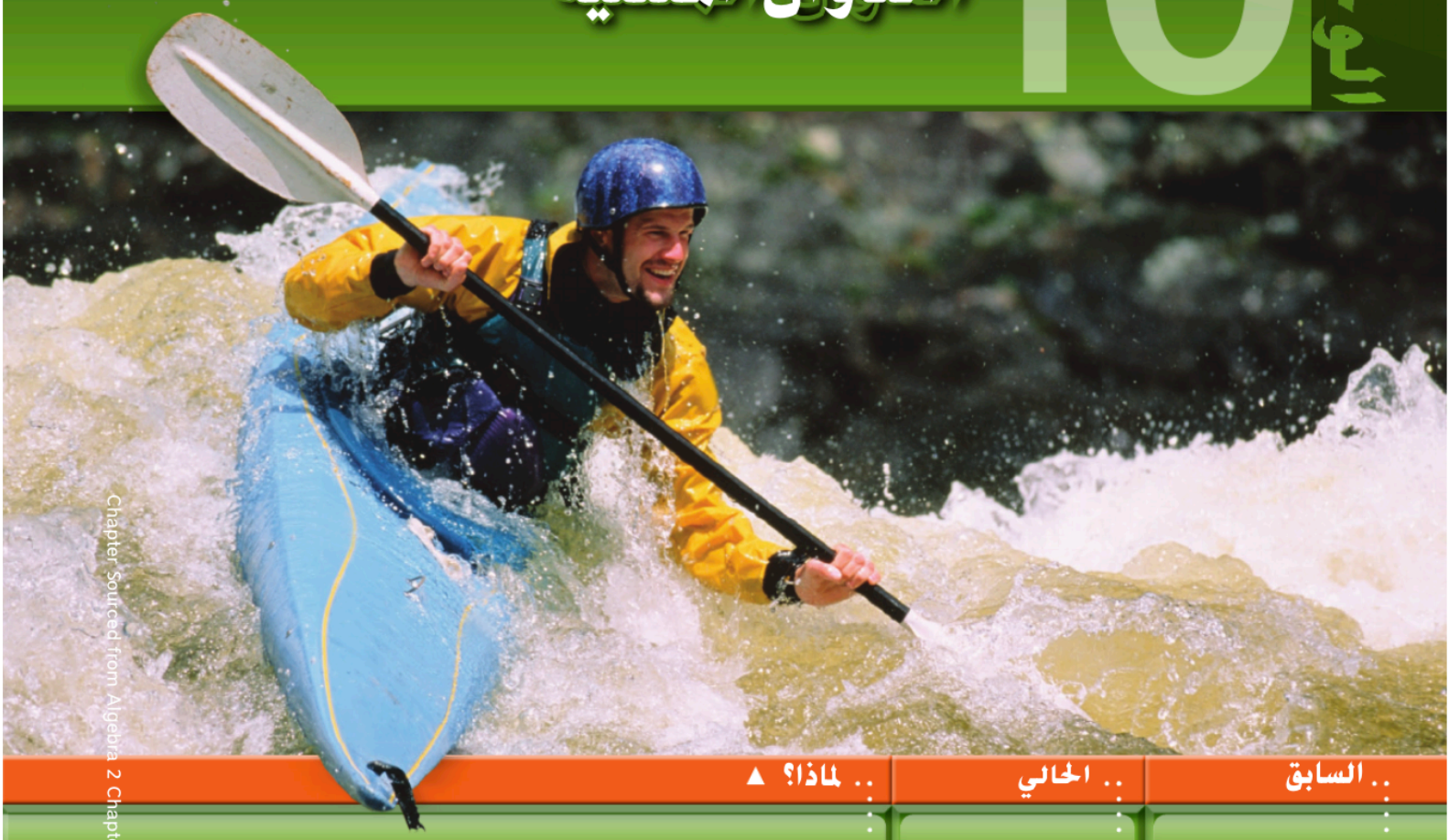
b. ما المعامل الرئيسي للدالة؟

c. أوجد قيمة $f(1), f(-2)$، و$f(2a)$. اكتب الحل هنا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 10

الدوال المثلثية



السابق

- مثّلت الدوال بيانيًا وحللتها.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - إيجاد قيم الدوال المثلثية.
  - حل المسائل باستخدام حساب مثلثات المثلث القائم.
  - حل المثلثات باستخدام قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine.
  - تمثيل الدوال المثلّثية بيانيًا.

لماذا؟ ▲

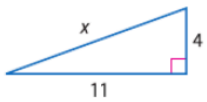
- **الرياضات المائية** معرفة أنّ الدوال المثلثية لها تطبيقات عملية في الرياضات المائية. يمكنك مثلاً استخدام حساب مثلثات المثلث القائم لإيجاد المسافة التي قطعها قارب الكاياك عبر النهر. وإذا كانت لديك معرفة مسبقة بالزوايا وقياسها، فستفهم بشكل أفضل مدى روعة أن تتمكن من عمل دورة 540° على لوح التزلج على الماء.

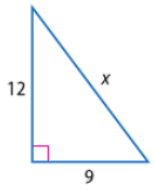
Chapter Sourced from Algebra 2 Chapter 12 © 2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

أوجد قيمة x مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة.

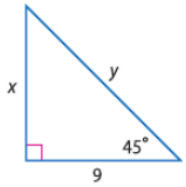
1. 

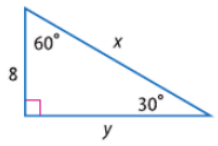
2. 

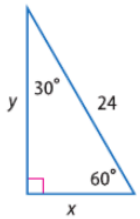
3.

4. لدى سهيلة حديقة مستطيلة الشكل في فنائها الخلفي، ويبلغ قياسها 12 m في 15 m. وهي تريد أن تضع ممشىً صخريًا على امتداد قطر المستطيل. فكم سيكون طول هذا الممشى؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

أوجد القياس المجهول، واكتب جميع الجذور في أبسط صورة.

5. 

6. 

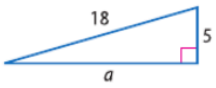
7. 

8. يميل السلم على الحائط بزاوية 45°. إذا كان طول السلم 12 m. فما الارتفاع الذي سيصل إليه السلم على الحائط؟

مراجعة سريعة

مثال 1

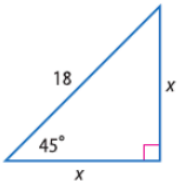
أوجد القياس المجهول في المثلث القائم.



$c^2 = a^2 + b^2$	نظرية فيثاغورس
$18^2 = a^2 + 5^2$	عوّض عن c بـ 18 وعن b بـ 5.
$324 = a^2 + 25$	بسّط.
$299 = a^2$	اطرح 25 من كل طرف.
$17.3 \approx a$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

مثال 2

أوجد القياس المجهول، واكتب جميع الجذور في أبسط صورة.



$x^2 + x^2 = 18^2$	نظرية فيثاغورس
$2x^2 = 18^2$	اجمع الحدود المتشابهة.
$2x^2 = 324$	بسّط.
$x^2 = 162$	اقسم كل طرف على 2.
$x = \sqrt{162}$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.
$x = 9\sqrt{2}$	بسّط.

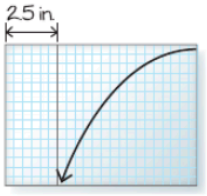
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المخبدء في هذه الوحدة

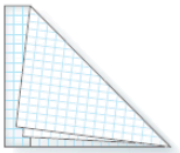
ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدة أثناء دراستك للوحدة 10. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

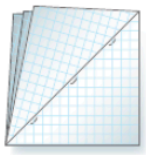
الدوال المثلثية اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للوحدة 10 عنالدوال المثلثية. ابدأ بأربع ورقات من ورق التمثيل البياني.



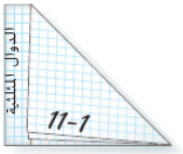
1 **دبّس** الأوراق معًا وقِس 2.5 بوصة من الأسفل.



2 **اطوِ الأوراق** على القطر.



3 **دبّس الأوراق** على امتداد القطر لعمل الكتاب.



4 **اكتب** على الحافة الدوال المثلثية.

المفردات الجديدة

trigonometry	حساب المثلثات
sine	جيب الزاوية
cosine	جيب التمام
tangent	ظل الزاوية
cosecant	قاطع التمام
secant	القاطع
cotangent	ظل التمام
angle of elevation	زاوية الارتفاع
angle of depression	زاوية الانخفاض
standard position	الوضع القياسي
radian	راديان
Law of Sines	قانون الـ Sine
ambiguous case	حالة مبهمة
Law of Cosines	قانون الـ Cosine
unit circle	دائرة الوحدة
circular function	دالة دائرية
periodic function	دالة دورية
cycle	دورة
period	فترة
amplitude	السعة
frequency	التردد

مراجعة المصطلحات

الدالة علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط في المدى

الدالة العكسية تكون الدالتان f و g متعاكستين إذا وفقط إذا كان تركيبهما عبارة عن الدالة المحايدة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

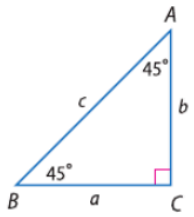
10-1 مختبر ورقة البيانات
استكشاف المثلثات القائمة الخاصة

يمكنك استخدام ورقة بيانات لاستكشاف قياس أضلاع المثلثات القائمة الخاصة.

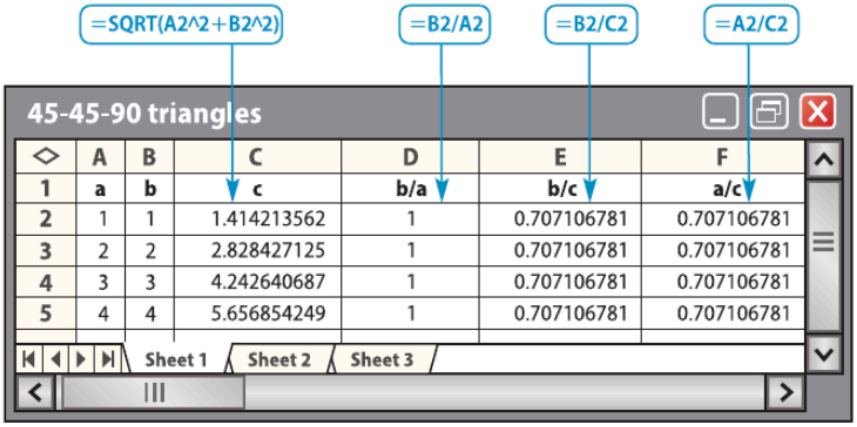
ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

النشاط المثلث ذو القياس 90°–45°–45°

قياس الساقين a و b في المثلث ذي القياس 90°–45°–45°، متساويان. ما الأنماط التي تلاحظها في نسب قياس الأضلاع في تلك المثلثات؟



الخطوة 1 أدخل الصيغ الموضحة في ورقة البيانات. تستخدم الصيغة نظرية فيثاغورس في الصورة $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

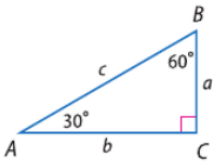


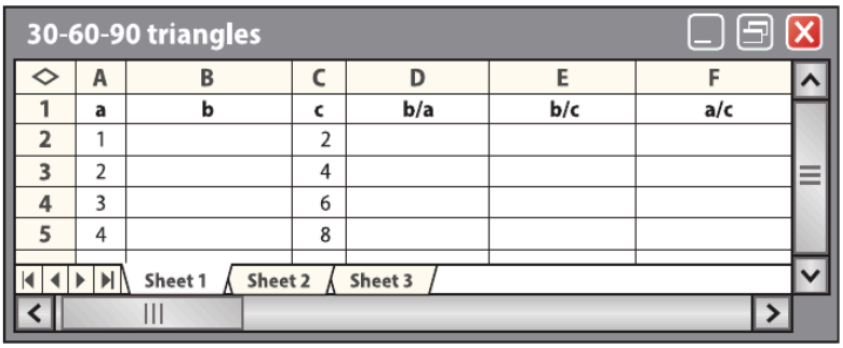
	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

الخطوة 2 افحص النتائج. لأن المثلثات ذات القياس 90°–45°–45° تشترك في قياس الزوايا نفسها، فهي جميعًا تكون متشابهة. وتكون جميع نسب الأضلاع بهذه المثلثات متشابهة. نسب الضلع b إلى الضلع a تكون 1. نسب الضلع b إلى الضلع c والضلع a إلى الضلع c تكون 0.71 تقريبًا.

تمثيل النماذج والتحليل

استخدم ورقة البيانات أدناه للمثلثات ذات القياس 90°–60°–30°.





	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

1. انسخ ورقة البيانات أعلاه وأكملها.
2. صِف العلاقة بين المثلثات ذات القياس 90°–60°–30° مستخدمًا الأبعاد الموضحة.
3. ما الأنماط التي تلاحظها في نسب قياس الأضلاع في تلك المثلثات؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة

السابق
- استخدمتَ نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال الأضلاع في المثلثات القائمة.

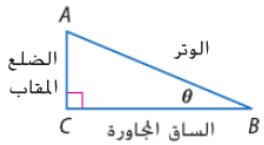
الحالي
1. إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة.
2. استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع المثلثات القائمة وقياس زواياها.

لماذا؟
- ارتفاع الشخص الذي يمارس التزلج المائي بالمظلة يعتمد على حبل السحب ℓ والزاوية التي يصنعها الحبل مع محور x° الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، فإنه يمكنك استخدام نسبة لإيجاد ارتفاع الشخص الذي يمارس هذا النشاط.

1 النسب المثلثية للزوايا الحادة

حساب المثلثات هو دراسة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث القائم. وتقارن **النسبة المثلثية** بين أطوال الأضلاع في المثلث القائم. وتكون **للنسبة المثلثية** قاعدة تعطيها نسبة مثلثية.

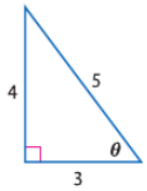
يُستخدم الحرف الإغريقي ثيتا θ (theta) في أغلب الأحيان لتمثيل قياس زاوية حادة في مثلث قائم. ويُستخدم كلٌّ من الوتر، والضلع المقابل لـ θ، والضلع المجاور لـ θ لتعريف النسب المثلثية الست.



المفهوم الأساسي النسب المثلثية في المثلثات القائمة

الشرح إذا كانت θ قياس زاوية حادة في مثلث قائم، فإذًا تكون النسب المثلثية التالية المشتملة على الضلع المقابل *opp*، والضلع المجاور *adj*، والوتر *hyp*، صحيحة.

الرموز



$$\sin\ (\text{جيب الزاوية})\ \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \csc\ (\text{قاطع التمام})\ \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

$$\cos\ (\text{جيب التمام})\ \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \sec\ (\text{القاطع})\ \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\tan\ (\text{ظل الزاوية})\ \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \cot\ (\text{ظل التمام})\ \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$$

أمثلة

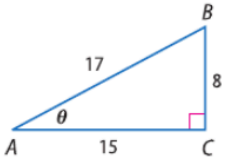
$$\sin\theta = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

مثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية

أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

الساق المقابلة لـ θ: $BC = 8$ الساق المجاورة لـ θ: $AC = 15$ الوتر: $AB = 17$



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{8}{17} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{15}{17} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{8}{15}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{17}{8} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{17}{15} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{15}{8}$$

تمرين موجّه

1. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية B.

المفردات الجديدة

- حساب المثلثات trigonometry
- النسبة المثلثية trigonometric ratio
- دالة مثلثية trigonometric function
- جيب الزاوية sine
- جيب التمام cosine
- ظل الزاوية tangent
- قاطع التمام cosecant
- القاطع secant
- ظل التمام cotangent
- النسب المثلثية reciprocal
- العكسية trigonometric ratios
- معكوس sine inverse sine
- معكوس cosine inverse cosine
- معكوس ظل الزاوية inverse tangent
- زاوية الارتفاع angle of elevation
- زاوية الانخفاض angle of depression

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لاحظ أن نسب قاطع التمام والقاطع وظل التمام معكوسات لنسب جيب الزاوية وجيب التمام وظل الزاوية على التوالي. ويُطلق عليها اسم **النسب المثلثية العكسية**.

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مجال أي نسبة مثلثية يكون مجموعة كل الزوايا الحادة θ في المثلث القائم. إذًا، تعتمد النسب المثلثية في المثلث القائم على قياس الزوايا الحادة فقط، وليس أطوال الأضلاع.

نصيحة دراسية

احفظ النسب المثلثية تعد SOH-CAH-TOA وسيلة تذكير لتذكر الحرف الأول من كل كلمة في النسب الخاصة بجيب الزاوية وجيب التمام وظل الزاوية.

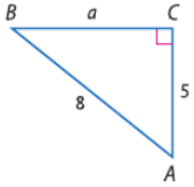
$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

مثال 2 إيجاد النسب المثلثية

إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$ ، فأوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية للزاوية B.



الخطوة 1 ارسم مثلثًا قائمًا مع تسمية زاوية حادة واحدة B. قم بتسمية الضلع المقابل 5 والوتر 8.

الخطوة 2 استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد a.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$a^2 + 5^2 = 8^2$	$c = 8$ و $b = 5$
$a^2 + 25 = 64$	بسّط.
$a^2 = 39$	اطرح 25 من كل طرف.
$a = \pm\sqrt{39}$	خُذ الجذر التربيعي لكل طرف.
$a = \sqrt{39}$	الطول لا يمكن أن يكون سالبًا.

الخطوة 3 أوجد القيم الأخرى.

بما أن $\sin B = \frac{5}{8}$، فإن $\csc B = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$ أو $\frac{8}{5}$.

$$\cos B = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \qquad \sec B = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{8}{\sqrt{39}} \text{ أو } \frac{8\sqrt{39}}{39}$$

$$\tan B = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{5}{\sqrt{\quad}} \text{ أو } \frac{5\sqrt{39}}{39} \qquad \cot B = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\sqrt{39}}{5}$$

تمرين موجّه

2. إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$، فأوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية المتبقية لـ B

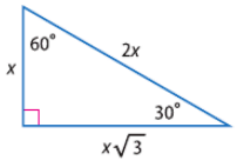
قراءة في الرياضيات

تسمية المثلثات

في جميع أنحاء هذه الوحدة، سيُستخدم حرف كبير لتمثيل كلٍ من رأس المثلث وقياس الزاوية عند هذا الرأس. ويُستخدم نفس الحرف ولكن بالصورة الصغيرة له لتمثيل كلٍ من الضلع المقابل لهذه الزاوية وطول الضلع.

الزوايا التي تكون قياسها 30° و45° و60°، تحدث كثيرًا في حساب المثلثات.

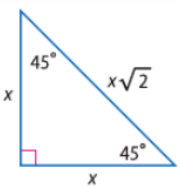
المفهوم الأساسي قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة



30°-60°-90°

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \sqrt{3}$$



45°-45°-90°

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = 1$$

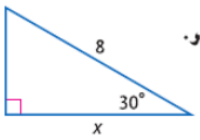
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 استخدام النسب المثلثية

يمكنك استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع وقياس الزوايا المفقودة في المثلثات القائمة.

مثال 3 إيجاد طول ضلع مفقود

استخدم نسبة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



طول الوتر هو 8. القياس المفقود هو الضلع المجاور للزاوية 30°.
استخدم نسبة جيب التمام لإيجاد x.

$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ نسبة جيب التمام

$\cos 30° = \frac{x}{8}$ عوّض عن θ بـ 30°، وعن adj بـ x، وعن hyp بـ 8.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$ اضرب كل طرف في 8.

$6.9 \approx x$ استخدم آلة حاسبة.

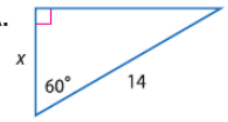
نصيحة دراسية

اختر نسبة

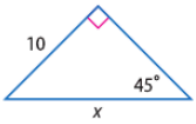
إذا كان طول الوتر مجهولاً، فينبغي إذًا استخدام إما نسبة sine أو cosine لإيجاد القياس المفقود.

تمرين موجّه

3A.



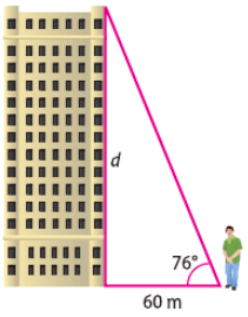
3B.



يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع المفقودة في المثلثات التي ليس لها زوايا بقياس 30° أو 45° أو 60°.

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد طول الضلع المفقود

المباني لحساب ارتفاع مبنى، سار مازن مسافة 60 m من قاعدة المبنى واستخدم أداة الميال لقياس الزاوية من عينيه إلى قمة المبنى. إذا كان مستوى عينيه يساوي مترين، فكم يبلغ ارتفاع المبنى؟



الزاوية المقيسة هي 76°. الضلع المجاور للزاوية يبلغ 60 m.
القياس المفقود هو الضلع المقابل للزاوية. استخدم نسبة ظل الزاوية لإيجاد d.

$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ نسبة ظل الزاوية

$\tan 76° = \frac{d}{60}$ عوّض عن θ بـ 76°، وعن opp بـ d، وعن adj بـ 60.

$60 \tan 76° = d$ اضرب كل طرف في 60.

$240 \approx d$ استخدم آلة حاسبة للتبسيط: 60 TAN 76 ENTER.

لأن قياس الميال بلغ مترين أعلى مستوى الأرض، فارتفاع المبنى هو 242 مترًا تقريبًا.

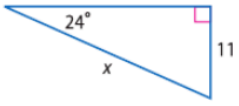
الربط بالحياة اليومية

تقيس أدوات الميال زاوية المجال المغناطيسي للأرض وكذلك الانحدار والتمايل للمركبات والمراكب الشراعية والطائرات. وهي تُستخدم أيضًا في رصد البراكين وحفر الآبار.

المصدر: مجلة العلوم

تمرين موجّه

4. استخدم نسبة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند حل معادلات مثل $3x = -27$، أنت تستخدم معكوس الضرب لإيجاد x.
يمكنك أيضًا إيجاد قياس الزوايا باستخدام معكوس جيب الزاوية أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

المفهوم الأساسي معكوس النسب المثلثية

الشرح إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب زاوية A هو x، فإن **معكوس جيب** x هو قياس $\angle A$.

الرموز إذا كان $\sin A = x$، فإن $\sin^{-1} x = m\angle A$.

مثال $\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$

الشرح إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب التمام لـ A هو x، فإن **معكوس جيب التمام** لـ x هو قياس $\angle A$.

الرموز إذا كان $\cos A = x$، فإن $\cos^{-1} x = m\angle A$.

مثال $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$

الشرح إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وظل الزاوية A هو x، فإن **معكوس ظل الزاوية** لـ x هو قياس $\angle A$.

الرموز إذا كان $\tan A = x$، فإن $\tan^{-1} x = m\angle A$.

مثال $\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

قراءة في الرياضيات

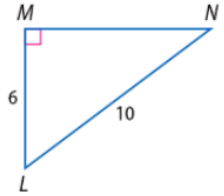
الدقة التعبير $\sin^{-1} x$ يُقرأ معكوس جيب x ويُفسر على أنه الزاوية التي جيب الزاوية لها هو x. انتبه ولا تخلط بين هذا الرمز والرمز الخاص بالأسس السالبة: $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$، بدلاً من ذلك، هذا الرمز يُشبه الرمز الخاص بمعكوس الدالة، $f^{-1}(x)$.

إذا كنت تعرف جيب الزاوية أو جيب التمام أو ظل الزاوية الخاص بزاوية حادة، فإنه يمكنك استخدام آلة حاسبة لإيجاد قياس الزاوية، وهذا يُمثل معكوس النسبة المثلثية.

مثال 5 إيجاد قياس زاوية مفقودة

أوجد قياس كل زاوية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

a. $\angle N$



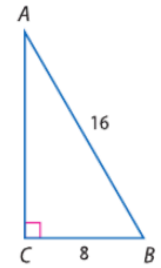
أنت تعلم قياس الضلع المقابل لـ $\angle N$ وقياس الوتر. استخدم نسبة جيب الزاوية.

$\sin N = \frac{6}{10}$ $\quad \sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\sin^{-1} \frac{6}{10} = m\angle N$ معكوس الجيب

$36.9° \approx m\angle N$ استخدم آلة حاسبة.

b. $\angle B$



استخدم نسبة جيب التمام.

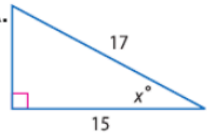
$\cos B = \frac{8}{16}$ $\quad \cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\cos^{-1} \frac{8}{16} = m\angle B$ معكوس جيب التمام

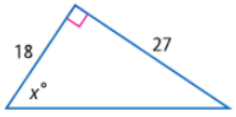
$60° = m\angle B$ استخدم آلة حاسبة.

تمرين موجّه **أوجد قيمة x. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

5A.



5B.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

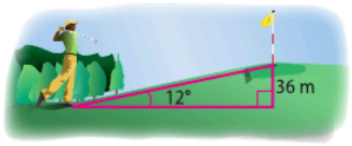
نصيحة دراسية

زوايا الارتفاع والانخفاض زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض متطابقتان بما أنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لمستقيمين متوازيين.

في الشكل المبين على اليسار، الزاوية التي يصنعها مستقيم رؤية السباح ومستقيم موازٍ للأفق تُسمى **زاوية الارتفاع**. الزاوية التي يصنعها مستقيم رؤية حارس الإنقاذ ومستقيم موازٍ للأفق تُسمى **زاوية الانخفاض**.

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض

a. الجولف لاعب جولف يقف عند قاعدة الكرة وينظر لأعلى إلى عشب يكسو تلاً. إذا كانت القاعدة أدنى من العشب 36 m وزاوية الارتفاع من القاعدة إلى الحفرة تساوي 12° ، فأوجد المسافة من القاعدة إلى الحفرة.



اكتب معادلة باستخدام نسبة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 12°) والمسافة من قاعدة الكرة إلى الحفرة (الوتر).

$$\sin 12^\circ = \frac{36}{x} \qquad \sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

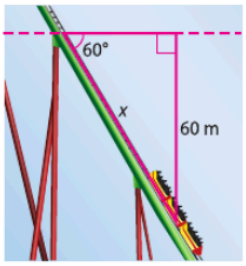
$$x \sin 12^\circ = 36 \qquad \text{اضرب كل طرف في } x.$$

$$x = \frac{36}{\sin 12^\circ} \qquad \text{اقسم كل طرف على } \sin 12^\circ.$$

$$x \approx 173.2 \qquad \text{استخدم آلة حاسبة.}$$

إذًا، المسافة من قاعدة الكرة إلى الحفرة هي حوالي 173.2 m.

b. قطار الملاهي تل قطار الملاهي له *زاوية هبوط*، أو زاوية انخفاض، تساوي 60°. وهبوط رأسي يبلغ 60 m. قدّر طول التل.



اكتب معادلة باستخدام نسبة مثلثية تتضمن نسبة الهبوط الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 60°) وطول التل (الوتر).

$$\sin 60^\circ = \frac{60}{x} \qquad \sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$x \sin 60^\circ = 60 \qquad \text{اضرب كل طرف في } x.$$

$$x = \frac{60}{\sin 60^\circ} \qquad \text{اقسم كل طرف على } \sin 60^\circ.$$

$$x \approx 70 \qquad \text{استخدم آلة حاسبة.}$$

إذًا، طول التل هو حوالي 70 m.

الربط بالحياة اليومية

أكثر قطارات الملاهي انحدارًا في العالم لها زوايا هبوط تقترب من 90°.

المصدر: ألتيمت رولر كوستر

تمرين موجّه

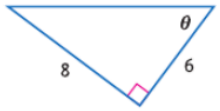
6A. النقل منحدر مُستخدَم لتفريغ شاحنة منقولات له زاوية ارتفاع 32°. إذا كانت قمة المنحدر ترتفع عن الأرض 1.2 m، فقدّر طول المنحدر.

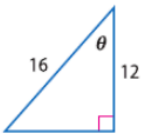
6B. السلالم إذا وُضع سلم طوله 14 m على جدار منزل بزاوية ارتفاع 72°. فما ارتفاع قمة السلم عن الأرض؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

1. 

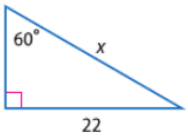
2. 

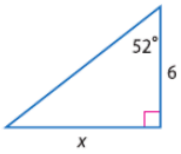
مثال 2 في مثلث قائم، تكون $\angle A$ حادة. أوجد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.

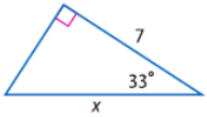
3. $\cos A = \frac{4}{7}$

4. $\tan A = \frac{20}{21}$

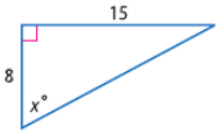
المثالان 3 و 4 استخدم نسبة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

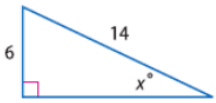
5. 

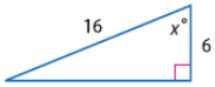
6. 

7. 

مثال 5 أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

8. 

9. 

10. 

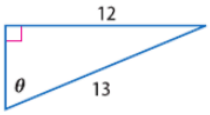
مثال 6

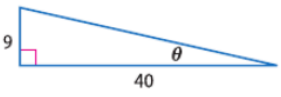
11. **التبرير المنطقي** وجد عمر شجرتين أمام بعضهما مباشرة على كل جانب من الوادي. عندما تحرك مسافة 100 m من الشجرة على جانبه (بشكل موازٍ مع حافة الوادي)، تشكلت زاوية قياسها 70° بالشجرة على جانبه والشجرة على الجانب الآخر. أوجد المسافة عبر الوادي.

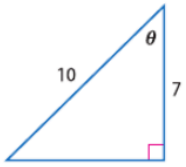
12. **السلالم** زاوية الارتفاع الموصى بها للسلم المستخدم في مكافحة الحريق هي 75°. ما الارتفاع الذي يصل إليه سلم طوله 21 m على مبنى إذا تم استخدام زاوية الارتفاع الموصى بها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

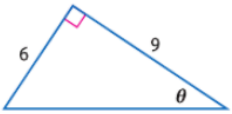
التدريب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

13. 

14. 

15. 

16. 

مثال 2 في مثلث قائم، تكون $\angle A$ و $\angle B$ حادتين. أوجد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.

17. $\tan A = \frac{8}{15}$

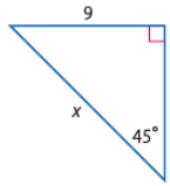
18. $\cos A = \frac{3}{10}$

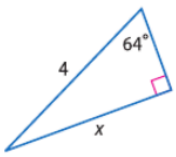
19. $\tan B = 3$

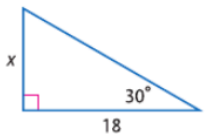
20. $\sin B = \frac{4}{9}$

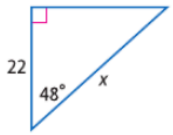
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

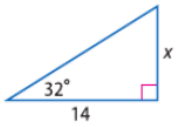
المثالان 3 و 4 استخدم نسبة مثلثية لإيجاد كل قيمة لـ x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

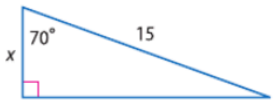
21. 

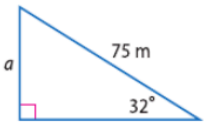
22. 

23. 

24. 

25. 

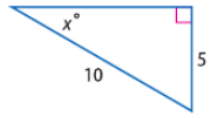
26. 

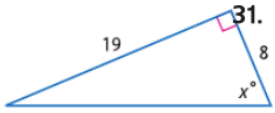


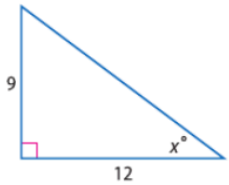
27. **التزلج المائي بالمظلة** راجع بداية الدرس والشكل الموضح على اليسار. أوجد a ، ارتفاع الشخص المتزلج، إذا كان حبل السحب طوله 75 m والزاوية الناشئة قياسها 32°. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

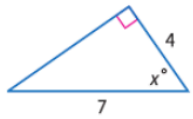
28. **التصميم** يرغب علي في بناء جسر من حبال بين منزل الشجرة الخاص به ومنزل الشجرة الخاص بخالد. افترض أن منزل الشجرة الخاص بعلي يقع خلف نظيره الخاص بخالد مباشرة. وعلى مسافة 20 m على اليسار من منزل الشجرة الخاص بعلي، توجد زاوية قياسها 52° بين المنزلين. أوجد طول الحبال.

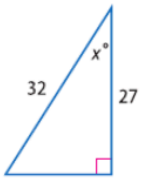
مثال 5 أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

29. 

30. 

31. 

32. 

33. 

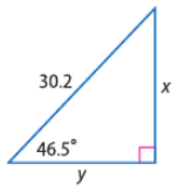
34.

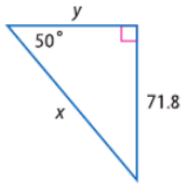
مثال 6

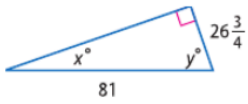
35. **السناجب** تستطيع السناجب الطائرة البالغة أن تصنع قفزة منزلقة من ارتفاع 50 m. إذا طار سنجاب منزلقًا من مسافة رأسية تبلغ 50 m وزاوية هبوط 9°، فأوجد التغير في ارتفاع السنجاب.

36. **الطيران الشراعي** قفزت طائرة شراعية بزاوية ارتفاع 20°. أوجد التغير في ارتفاع هذه الطائرة إذا طارت عبر مسافة أفقية تبلغ 18 m.

استخدم النسب المثلثية لإيجاد قيمتي x و y. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

37. 

38. 

39. 

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

40. $\cos A = \frac{3}{19}$

41. $\sin N = \frac{9}{11}$

42. $\tan X = 15$

43. $\sin T = 0.35$

44. $\tan G = 0.125$

45. $\cos Z = 0.98$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

46. المعالم مَعْلَم يلقي بظل طوله 24 m. وزاوية الارتفاع من نهاية الظل إلى قمة المَعْلَم قياسها 50°.

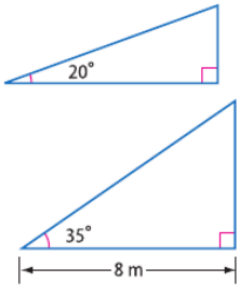
a. ارسم مثلثًا قائمًا مع تسميته لتمثيل هذه الحالة.

b. اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد ارتفاع المَعْلَم.

c. أوجد قيمة النسبة لتحديد ارتفاع المَعْلَم مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة.

47. عشش الطيور ترتفع عينا أماني 1.5 m عن الأرض وهي تنظر إلى عش طائر على شجرة. إذا كانت زاوية الارتفاع هي 74.5° وهي تقف على بعد 4 m من قاعدة الشجرة، فما ارتفاع عش الطائر؟ قرّب إلى أقرب متر.

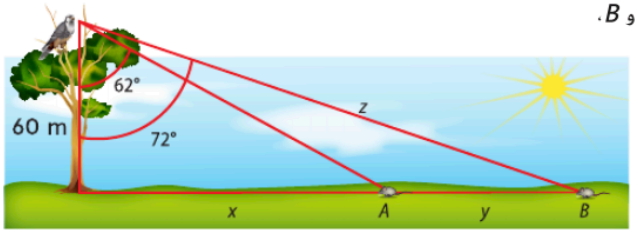
48. المنحدرات منحدران للدراجات يغطي كل منهما مسافة أفقية من 8 m. وتبلغ زاوية الارتفاع لأحدهما 20°، والآخر 35°. كما هو موضح على اليسار.



a. بكم يزيد ارتفاع المنحدر الثاني عن الأول؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

b. بكم يزيد طول المنحدر الثاني عن الأول؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

49. الصقور صقر على ارتفاع 60 m يرى فأرين A و B، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.



a. ما المسافة التقريبية z بين الصقر والفأر B؟

b. ما المسافة الفاصلة بين الفأرين؟

في المثلث ABC، تكون $\angle C$ زاوية قائمة. استخدم القياسات المعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع وقياس الزوايا المفقودة للمثلث ABC. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

50. $m\angle A = 36°,\ a = 12$

51. $m\angle B = 31°,\ b = 19$

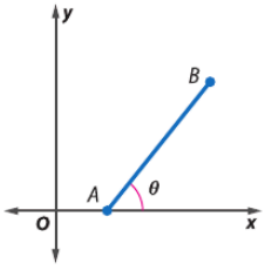
52. $a = 8,\ c = 17$

53. $\tan A = \frac{4}{5},\ a = 6$

مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا

54. تحدٍ قطعة مستقيمة لها نقطتا النهاية $A(2, 0)$ و $B(6, 5)$، كما هو موضح في الشكل على اليسار. ما قياس الزاوية الحادة θ التي تصنعها القطعة المستقيمة والمحور x؟ اشرح كيف وجدت القياس.



55. فرضيات حدد ما إذا كان العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

بالنسبة لأي زاوية حادة، نسبة جيب الزاوية لا تكون لها قيمة سالبة أبدًا.

56. مسألة غير محددة الإجابة في المثلث القائم ABC، $\sin A = \sin C$. ما الذي يمكنك استنتاجه بشأن $\triangle ABC$؟ برر استنتاجك.

57. الكتابة في الرياضيات سطح له ميل $\frac{2}{3}$. صِف العلاقة بين الميل وزاوية الارتفاع θ التي يصنعها السطح مع المحور الأفقي. ثم استخدم نسبة مثلثية عكسية لإيجاد θ.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

58. **الإجابة الموسعة** تحتاج مدرستك إلى 5 حافظات للكتب السنوية. تعرض شركة الأمل للكتب السنوية حافظة الكتاب السنوي بسعر AED 153.85 مع تخفيض 10% على طلب 5 حافظات. وتعرض شركة التفوق للكتب السنوية حافظة الكتاب السنوي بسعر AED 157.36 مع تخفيض 15% على طلب 5 حافظات.

a. أي شركة ستختارها؟

b. ما أقل مبلغ يمكنك إنفاقه على الكتب السنوية؟

59. **الإجابة القصيرة** من أجل جمع التبرعات، باعت فرقة العزف قمصانًا وقبعات. وبلغ إجمالي ما باعوه 105 سلع وحققوا AED 1170. إذا كانت تكلفة القبعة AED 10 وتكلفة القميص AED 15، فكم عدد القمصان التي بيعت؟

60. كشك شطائر يقدم الشطيرة بسعر x والمشروب بسعر y. وتبلغ تكلفة شطيرتين ومشروب واحد AED 4.50، وثلاث شطائر ومشروبين AED 7.25 أي مصفوفة يمكن ضربها في

$$\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$$

لإيجاد قيمتي x و y؟

A $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

61. **SAT/ACT** طول مستطيل وعرضه تمثلهما النسبة 5:12. إذا كانت مساحة المستطيل 240 cm^2، فما طول قطره، بالسنتيمتر؟

F 24 G 26 H 28 J 30 K 32

مراجعة شاملة

62. **حمام السباحة** عدد الزيارات التي يقوم بها 425 عضوًا إلى حمام سباحة عام في العام موزع طبيعيًا باستخدام المتوسط 90 والانحراف المعياري 15.

a. ما النسبة المئوية التقريبية للأعضاء الذين ذهبوا إلى حمام السباحة 45 مرة على الأقل؟

b. ما احتمال اختيار عضو عشوائيًا يكون ذهب إلى حمام السباحة أكثر من 120 مرة؟

c. ما النسبة المئوية للأعضاء الذين ذهبوا إلى حمام السباحة ما بين 75 مرة و 105 مرات؟

63. **الاستطلاعات** شركة استطلاعات ترغب في تقدير عدد الأشخاص المؤيدين لقانون بيئي جديد. تجري الشركة استطلاعها على 20 شخصًا. ما احتمال أن يكون الشخص المؤيد للقانون هو 0.5.

a. ما احتمال وجود 12 شخصًا بتحدٍ د مؤيدين للقانون الجديد؟

b. ما العدد المتوقع للأشخاص المؤيدين للقانون؟

مراجعة المهارات

أوجد كل ناتج ضرب. وأدرج الوحدات المناسبة ضمن إجابتك.

64. $4.3 \text{ km} \left(\frac{5280 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right)$

65. $8 \text{ L} \left(\frac{8 \text{ mm}}{1 \text{ L}}\right)$

66. $21 \text{ m} \left(\frac{\text{AED } 5}{3 \text{ m}}\right)$

67. $24 \text{ s} \left(\frac{18 \text{ cm}^3}{5 \text{ s}}\right)$

68. $65^\circ \left(\frac{10 \text{ cm}}{3^\circ}\right)$

69. $10 \text{ min} \left(\frac{7 \text{ L}}{30 \text{ min}}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-2

الزوايا وقياس الزاوية

السابق
- استخدمت الزوايا بمقياس الدرجات.

الحالي
1. رسم الزوايا في وضع قياسي وإيجادها.
2. التحويل بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان.

لماذا؟
- الساعة الشمسية هي أداة تشير إلى الوقت من اليوم عن طريق الظل الذي تلقيه على سطح موسوم لإظهار الساعات أو أجزاء من الساعات. ويتحرك الظل حول القرص بزاوية 15° كل ساعة.

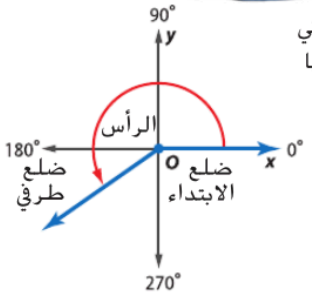
المفردات الجديدة

الوضع القياسي
standard position
ضلع الابتداء initial side
ضلع الانتهاء
terminal side
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء
coterminal angles
راديان radian
الزاوية المركزية
central angle
طول القوس arc length

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 الزوايا في الوضع القياسي

الزاوية التي توجد على المستوى الإحداثي تكون في **وضع قياسي** إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل وكان أحد شعاعيها منطبقًا على محور x الموجب.

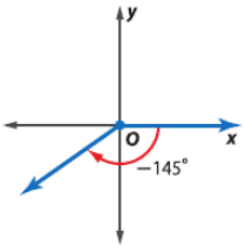


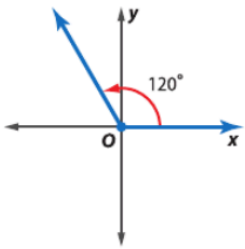
- الشعاع الموجود على محور x يُسمى **ضلع الابتداء** للزاوية.
- الشعاع الذي يدور حول المركز يُسمى **ضلع الانتهاء**.

المفهوم الأساسي قياس الزوايا

إذا كان قياس الزاوية موجبًا، فضلع الانتهاء دار باتجاه عكس عقارب الساعة.

إذا كان قياس الزاوية سالبًا، فضلع الانتهاء دار باتجاه عقارب الساعة.



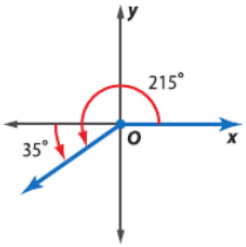


مثال 1 رسم الزوايا في وضع قياسي

ارسم زاوية في وضع قياسي علمًا بقياسها.

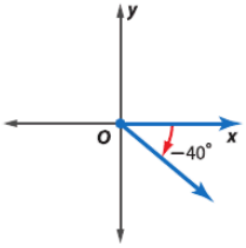
a. 215° $215° = 180° + 35°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 35° باتجاه عكس عقارب الساعة من بعد محور xالسالب.



b. −40°

الزاوية سالبة. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 40° باتجاه عقارب الساعة من محور x الموجب.



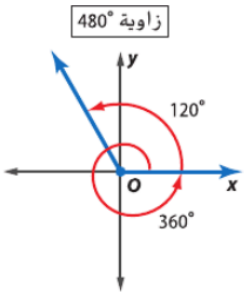
تمرين موجّه

1A. 80°

1B. −105°

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يستطيع ضلع الانتهاء لأي زاوية إتمام أكثر من دورة كاملة واحدة. على سبيل المثال، الدوران الكامل بزاوية 360°زائد دوران بزاوية 120° يشكلان زاوية قياسها 120° + 360° أو 480°.



الربط بالحياة اليومية

يعد التزلج المائي بالألواح من أسرع الرياضيات المائية انتشارًا في الولايات المتحدة. حيث ازدادت المشاركة فيها بأكثر من 100% في الأعوام الأخيرة.

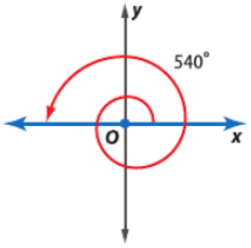
المصدر: اتحاد King of Wake

مثال 2 من الحياة اليومية رسم الزوايا في وضع قياسي

التزلج المائي بالألواح ***التزلج على الماء بالألواح*** **يجمع بين ركوب الأمواج والتزلج على الألواح والتزلج على الجليد بالألواح والتزلج على الماء. وتتمثل إحدى مناورات التزلج في الدوران بزاوية 540 درجة في الهواء. ارسم زاوية في وضع قياسي قياسها 540°.**

$540° = 360° + 180°$

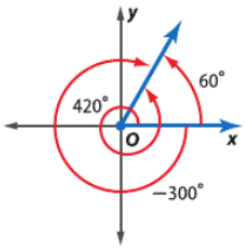
ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 180° من بعد محور x الموجب.



تمرين موجّه

2. ارسم زاوية في وضع قياسي قياسها 600°.

إذا وجدت زاويتان أو أكثر في وضع قياسي وتشترك في ضلع الانتهاء، فإنها تُسمى **زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء**. على سبيل المثال، الزوايا التي يكون قياسها 60° و 420° و −300°. تكون زوايا مشتركة فضلع الانتهاء، كما هو موضح في الشكل على اليسار.



يمكن إيجاد الزاوية التي تكون مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، عن طريق الجمع إلى مضاعف 360° أو الطرح منه.

- $60° + 360° = 420°$
- $60° - 360° = -300°$

قراءة في الرياضيات

زاوية الدوران

في حساب المثلثات، يُشار إلى الزاوية في بعض الأحيان *بزاوية الدوران*.

مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية فيما يلي:.

a. 130°

اجمع إلى 360°. زاوية موجبة: $130° + 360° = 490°$

اطرح 360°. زاوية سالبة: $130° - 360° = -230°$

b. −200°

اجمع إلى 360°. زاوية موجبة: $-200° + 360° = -160°$

اطرح 360°. زاوية سالبة: $-200° - 360° = -560°$

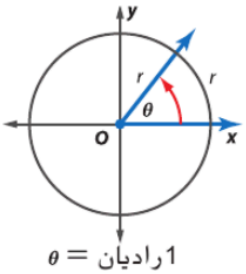
تمرين موجّه

3A. 15° **3B.** −45°

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 التحويل بين الدرجات والراديان

يمكن قياس الزوايا أيضًا بالوحدات المستندة إلى طول القوس. **الراديان** الواحد هو قياس زاوية θ في وضع قياسي يقطع ضلع الانتهاء لها قوسًا له نفس طول نصف قطر الدائرة.



$\theta =$ 1 راديان

محيط الدائرة هو $2\pi r$ لذا، الدوران الكامل حول الدائرة يساوي 2π راديان. بما أن 2π راديان $= 360°$، فإن القياس بالدرجة والقياس بالراديان ترتبط بينهما علاقة توضحها المعادلات التالية.

$360° = 2\pi$ راديان $180° = \pi$ راديان

نصيحة دراسية

البنية كما هو الحال مع الدرجات، يقيس الراديان كمية الدوران من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.

- قياس الزاوية بالراديان يكون موجبًا إذا كان دورانه باتجاه عكس عقارب الساعة.
- ويكون القياس سالبًا إذا كان الدوران باتجاه عقارب الساعة.

مفهوم أساسي التحويل بين الدرجات والراديان

درجات إلى راديان	راديان إلى درجات
للتحويل من درجات إلى راديان، اضرب عدد الدرجات في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$	للتحويل من راديان إلى درجات، اضرب عدد الراديان في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

مثال 4 التحويل بين الدرجات والراديان

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

a. $-30°$

$$-30° = -30° \cdot \frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$$
$$= \frac{-30\pi}{180} \text{ أو } -\frac{\pi}{6}$$

b. $\frac{5\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \text{ راديان} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$$
$$= \frac{900°}{2} \text{ أو } 450°$$

تمرين موجّه

4A. $120°$

4B. $-\frac{3\pi}{8}$

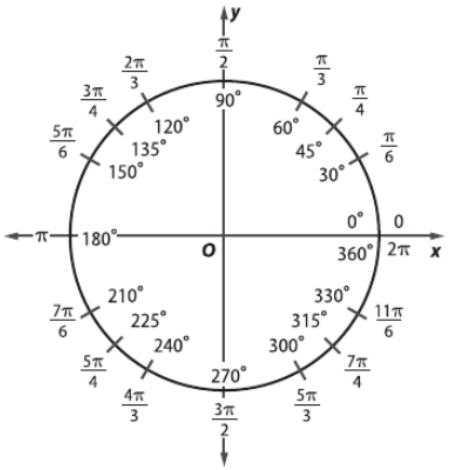
قراءة في الرياضيات

القياس بالراديان

تُحذف كلمة *راديان* عادةً عندما يتم التعبير عن الزوايا بقياس الراديان. لذلك، في حالة ذُكرت الزاوية دون وحدات قياس، يكون القياس بالراديان ضمنيًا.

ملخص المفهوم الدرجات والراديان

يوضح الرسم التخطيطي قياسات متكافئة بالدرجات والراديان لزوايا خاصة.



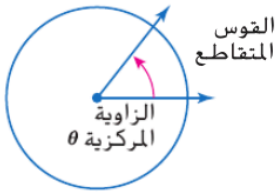
قد تستفيد من حفظ ما يلي من القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان. ولا تكون الزوايا الخاصة الأخرى سوى مضاعفات لهذه الزوايا.

$30° = \frac{\pi}{6}$ $45° = \frac{\pi}{4}$

$60° = \frac{\pi}{3}$ $90° = \frac{\pi}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الزاوية المركزية للدائرة هي زاوية يقع رأسها عند مركز الدائرة. إذا كنت تعلم قياس الزاوية المركزية ونصف قطر الدائرة، فإنه يمكنك إيجاد طول القوس الذي تقطعه هذه الزاوية.

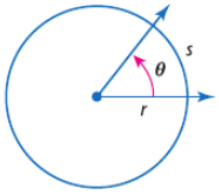


المفهوم الأساسي طول القوس

الشرح بالنسبة لدائرة نصف قطرها r وزاويتها المركزية θ (بالراديان)، **طول القوس** s يساوي ناتج ضرب r و θ.

الرموز $s = r\theta$

النموذج



ستبرر هذه الصيغة في التدريب 52

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد طول القوس

الشاحنات **إذا كان نصف قطر إطارالشاحنة الكبيرة يساوي 82 cm فما المسافة التي تقطعها شاحنة كبيرة بالمتر بعد ثلاثة أرباع الدورة فقط من دوران الإطار؟**

الخطوة 1 أوجد الزاوية المركزية بالراديان.

الزاوية هي $\frac{3}{4}$ دوران كامل. $\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi$ أو $\frac{3\pi}{2}$

الخطوة 2 استخدم نصف القطر والزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

اكتب صيغة لطول القوس. $s = r\theta$

عوّض عن r بـ 82 وعن θ بـ $\frac{3\pi}{2}$. $= 82 \cdot \frac{3\pi}{2}$

استخدم آلة حاسبة للتبسيط. $\approx 388.8 \text{ cm}$

اقسم على 100 للتحويل إلى أمتار. $\approx 3.9 \text{ m}$

إذًا، تقطع الشاحنة حوالي 3.9 m بعد ثلاثة أرباع من دوران الإطار.

انتبه!
طول القوس تذكر عندما تجد طول القوس أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجة. كذلك، تذكر أن عدد الراديان في دوران كامل هو 2π.

تمرين موجّه

5. دائرة قطرها 9 cm. أوجد طول القوس إذا كانت الزاوية المركزية تساوي 60°. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المعطى.**

1. 140°
2. −60°
3. 390°

مثال 3 **أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية فيما يلي:**

4. 25°
5. 175°
6. −100°

مثال 4 **أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.**

7. $\frac{\pi}{4}$
8. 225°
9. −40°

مثال 5

10. التبرير صنع لاعب تنس دورة بيده تحركت على امتداد مسار قوس. إذا كان نصف قطر دائرة القوس هو 1.2 m وزاوية الدوران هي 100°. فما طول القوس؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المعطى.**

11. $75°$ **12.** $160°$ **13.** $-90°$

14. $-120°$ **15.** $295°$ **16.** $510°$

17. الجمباز لاعب جمباز على المتوازي المختلف الارتفاع يتأرجح ليصنع زاويةدوران $240°$.

18. الطعام تم تدوير غطاء برطمان صلصة المعكرونة بمقدار $420°$ قبلأن يزال.

مثال 3 **أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية فيما يلي:.**

19. $50°$ **20.** $95°$ **21.** $205°$

22. $350°$ **23.** $-80°$ **24.** $-195°$

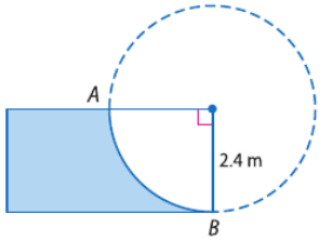
مثال 4 **أعد كتابة كل قياس مكتوب بالدرجة بالراديان وكل قياس مكتوب بالراديان بالدرجة.**

25. $330°$ **26.** $\frac{5\pi}{6}$ **27.** $-\frac{\pi}{3}$

28. $-50°$ **29.** $190°$ **30.** $-\frac{7\pi}{3}$

مثال 5

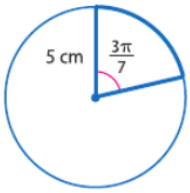
31. التزلج على الألواح منحدر التزلج على الألواح المبين على اليسار يُسمى أنبوب ربعي (*quarter pipe*). والسطح المنحني يحدده نصف قطر الدائرة. أوجد طول الجزء المنحني من المنحدر.



32. القوارب النهرية ناعورالقارب النهري له قطر 7.2 m. أوجد طول القوس للدائرة التي يصنعها الناعور عندما يدور $300°$.

أوجد طول كل قوس. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

33.



34.

35. الساعات كم يستغرق عقرب الدقائق في الساعة للمرور عبر 2.5π راديان؟

36. المثابرة راجع بداية الدرس. ظل يتحرك حول ساعة شمسية بزاوية $15°$ كل ساعة.

a. بعد كم ساعة ستكون زاوية دوران الظل $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟

b. ما زاوية الدوران بالراديان بعد 5 ساعات؟

c. ساعة شمسية نصف قطرها 20 cm. ما القوس الذي يشكله ظل بعد 14 h؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.

37. $620°$ **38.** $-400°$ **39.** $-\frac{3\pi}{4}$ **40.** $\frac{19\pi}{6}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

41. أرجوحات أرجوحة لها زاوية دوران قياسها 165°.

a. ارسم الزاوية في وضع قياسي.

b. اكتب قياس الزاوية بالراديان.

c. إذا كانت سلاسل الأرجوحة طولها مترين، فما طول القوس الذي تصنعه الأرجوحة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

d. صِف كيف سيتغير طول القوس إذا تمت مضاعفة أطوال سلاسل الأرجوحة.

42. التمثيلات المتعددة تأمل $A(-4, 0)$ و $B(-4, 6)$ و $C(6, 0)$ و $D(6, 8)$.

a. هندسيًا ارسم $\triangle EAB$ و $\triangle ECD$ مع جعل E عند نقطة الأصل.

b. جبريًا أوجد قيمة كل من ظل الزاوية $\angle BEA$ وظل الزاوية $\angle DEC$.

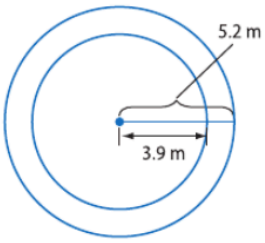
c. جبريًا أوجد ميل $\overline{BE}$ و $\overline{ED}$.

d. لفظيًا ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الميل وزاوية الميل؟

أعد كتابة كل قياس مكتوب بالدرجة بالراديان وكل قياس مكتوب بالراديان بالدرجة.

43. $\frac{21\pi}{8}$ **44.** 124° **45.** −200° **46.** 5

47. لعبة الدوّامات تصنع لعبة الدوّارة 5 دورات في الدقيقة. الدائرة التي تشكلها مقاعد الركاب في الصف الخارجي لها نصف قطر يساوي 5.2 m. والدائرة التي تشكلها مقاعد الركاب في الصف الداخلي لها نصف قطر يساوي 3.9 m.

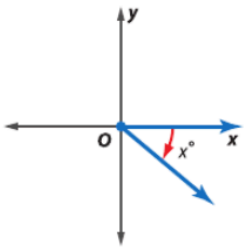


a. أوجد الزاوية θ بالراديان التي تدورها الدوّارة في ثانية واحدة.

b. في ثانية واحدة، ما الفرق بين طول القوسين لمقاعد الركاب في الصف الخارجي ومقاعد الركاب في الصف الداخلي؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. النقد يكتب سعيد وأيوب تعبيرًا لقياس زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الموضحة على اليسار. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



سعيد	أيوب
قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء هو $(x - 360)°$.	قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء هو $(360 - x)°$.

49. تحدٍ مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع محور x الموجب عند النقطة (0, 2). أوجد معادلة لهذا المستقيم.

50. التبرير عبّر عن $\frac{1}{8}$ الدورة بالدرجات والراديان. اشرح استنتاجك.

51. مسألة غير محددة الإجابة ارسم زاوية حادة في وضع قياسي مع تسميتها. أوجد زاويتين، إحداهما موجبة والأخرى سالبة، تشتركان في ضلع الانتهاء مع الزاوية.

52. التبرير برر صيغة طول القوس.

53. الكتابة في الرياضيات استخدم دائرة نصف قطرها r لوصف ما تمثله درجة واحدة وراديان واحد. ثم اشرح كيفية التحويل بين القياسين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

54. الإجابة القصيرة إذا كان $(x + 6)(x + 8) - (x - 7)(x - 5) = 0$، فأوجد قيمة x.

55. أي مما يلي يمثل تغيرًا عكسيًا؟

A

x	2	5	10	20	25	50
y	50	20	10	5	4	2

B

x	2	4	6	8	10	12
y	−4	−8	−12	−16	−20	−24

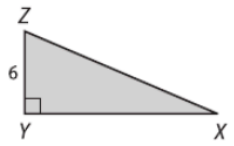
C

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30

D

x	10	9	8	7	6	5
y	5	6	7	8	9	10

56. الهندسة إذا كانت مساحة الشكل هي 60 وحدة مربعة، فما طول الضلع $\overline{XZ}$؟



F $2\sqrt{34}$ **H** $4\sqrt{34}$

G $2\sqrt{109}$ **J** $4\sqrt{109}$

57. SAT/ACT الحد الأول من المتتالية هو 6−، وكل حد يأتي بعد الأول يكون أكبر بمقدار 8 من الحد السابق له مباشرة. ما قيمة الحد رقم 101؟

A 788 **D** 806

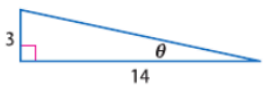
B 794 **E** 814

C 802

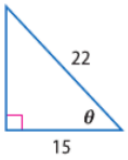
مراجعة شاملة

أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 1-10)

58.



59.



60.

61. التصنيع أحجام الأسطوانات المضغوطة التي تصنعها شركة يتم توزيعها طبقًا لانحراف معياري مليمتر واحد. من المفترض أن يبلغ قطر الأسطوانات المضغوطة 120 mm، وهي تُصنّع لمحركات أسطوانات عرضها 122 mm.

a. ما النسبة المئوية للأسطوانات المضغوطة التي تتوقع أن تكون أكبر من 120 mm؟

b. إذا كانت تصنع الشركة 1000 أسطوانة مضغوطة في الساعة، فكم عدد الأسطوانات التي تتوقع أن يكون قطرها 119 mm و 122 mm سنتيمترًا ضمن الأسطوانات التي تُصنع في ساعة واحدة؟

c. حوالي كم أسطوانة مضغوطة في الساعة ستكون أكبر من أن تكون ملائمة لمحركات الأسطوانات؟

62. المعرفة المالية إذا كان معدل التضخم هو 2% ، ويمكن إيجاد تكلفة سلعة ما في السنوات المستقبلية عن طريق تكرار المعادلة $c(x) = 1.02x$. فأوجد تكلفة مشغل صوت رقمي سعره 70 AED بعد أربعة أعوام إذا ظل معدل التضخم ثابتًا.

مراجعة المهارات

استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر لكل مثلث قائم علمًا بأطوال الأضلاع المعطاة.

63. $a = 12,\ b = 15$ **64.** $a = 8,\ b = 17$ **65.** $a = 14,\ b = 11$

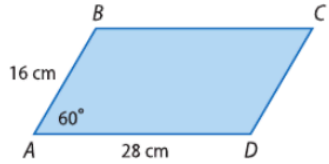
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-2 مختبر الهندسة
مساحة متوازي الأضلاع

يمكن إيجاد مساحةأي مثلث باستخدام نسب جيب الزاوية في المثلث. ويمكن استخدام عملية مشابهة لإيجاد مساحةمتوازي الأضلاع.

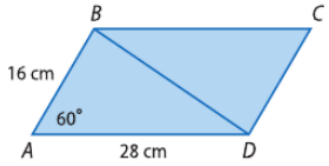
النشاط

أوجد مساحة متوازي الأضلاع *ABCD*.



الخطوة 1 ارسم القطر $\overline{BD}$.

$\overline{BD}$ يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين، $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$.



الخطوة 2 أوجد مساحة $\triangle ABD$.

استخدم نسبة جيب الزاوية لتحديد الارتفاع h من B إلى $\overline{AD}$.

$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$	تعريف جيب الزاوية
$\sin\theta = \frac{h}{AB}$	$h = \text{opp}, AB = \text{hyp}$
$AB \sin\theta = h$	حل لإيجاد h.

إذًا، $h = AB \sin\theta$.

$\text{Area} = \frac{1}{2}bh$	مساحة المثلث
$= \frac{1}{2}(AD)(AB)\sin A$	$b = AD, h = AB \sin A$
$= \frac{1}{2}(28)(16)\sin 60^\circ$	$AD = 28, AB = 16, A = 60^\circ$
$= 224\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$	اضرب وأوجد قيمة $\sin 60^\circ$.
$= 112\sqrt{3}$	بسّط.

الخطوة 3 أوجد مساحة $\square ABCD$.

مساحة$\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتي $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$.
بما أن $\triangle CDB \cong \triangle ABD$، فإن مساحتي $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$ متساويتان. إذًا،
مساحة$\square ABCD$ تساوي ضعف مساحة $\triangle ABD$.

$2 \cdot 112\sqrt{3} = 224\sqrt{3}$ أو حوالي 387.98 سنتيمترًا مربعًا.

التمارين

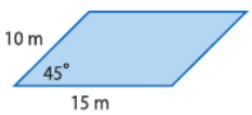
لكل شكل مما يلي،

a.أوجد مساحة كل متوازي أضلاع.

b. أوجد مساحة كل متوازي أضلاع إذا كان قياس الزاوية المحصورة هو نصف القياس المُعطى.

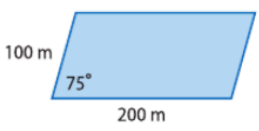
c. أوجد مساحة كل متوازي أضلاع إذا كان قياس الزاوية المحصورة هو ضعف القياس المُعطى.

1.



2.

3.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

السابق
- أوجدت قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة.

الحالي
1. إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا العامة.
2. إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام زوايا المرجع.

لماذا؟
- في لعبة الملاهي المبينة على اليسار، تدور السيارات ذهابًا وإيابًا حول نقطة مركزية. ويمكن وصف مواضع الأذرع الداعمة للسيارات باستخدام زوايا مثلثية تكون في الوضع القياسي مع جعل النقطة المركزية للعبة عند نقطة الأصل بالمستوى الإحداثي.

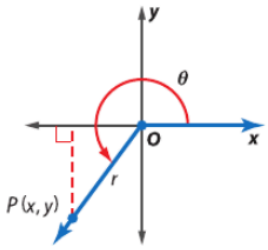
المفردات الجديدة
- **زاوية ربعية** quadrantal angle
- **زاوية مرجع** reference angle

ممارسات في الرياضيات
- مراعاة الدقة.

1 النسب المثلثية للزوايا العامة
يمكنك إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الأكبر من 90° أو الأقل من 0°.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية للزوايا العامة

افترض أن الزاوية θ في وضع قياسي وأن $P(x, y)$ هي نقطة على ضلع الانتهاء لها. باستخدام نظرية فيثاغورس، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. النسب المثلثية الست للزاوية θ مُعرَّفة أدناه.

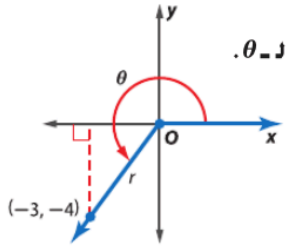


$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

مثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية عند معرفة نقطة

ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(-3, -4)$. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.



الخطوة 1 ارسم الزاوية، وأوجد قيمة r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{25} \text{ أو } 5$$

الخطوة 2 استخدم $x = -3$ و $y = -4$ و $r = 5$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} \text{ أو } -\frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} \text{ أو } -\frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} \text{ أو } \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-4} \text{ أو } -\frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} \text{ أو } -\frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} \text{ أو } \frac{3}{4}$$

تمرين موجّه

1. ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(6, -2)$. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

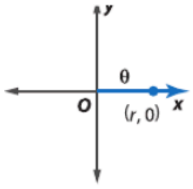
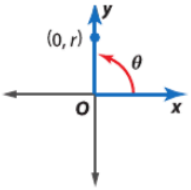
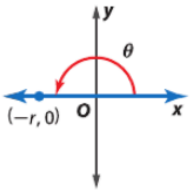
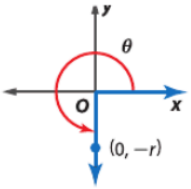
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يقع على المحور x أو المحور y، فتُسمى الزاوية **زاوية ربعية**.

نصيحة دراسية

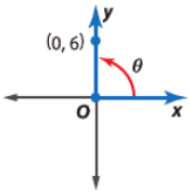
الزوايا الربعية قياس الزاوية الربعية هو مضاعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

المفهوم الأساسي الزوايا الربعية

$\theta = 0°$ أو 0 راديان	$\theta = 90°$ أو $\frac{\pi}{2}$ راديان	$\theta = 180°$ أو π راديان	$\theta = 270°$ أو $\frac{3\pi}{2}$ راديان
			

مثال 2 الزوايا الربعية

ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند (0, 6). أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.



النقطة عند (0, 6) تقع عند محور y الموجب، إذًا، الزاوية الربعية θ هي $90°$. استخدم $x = 0$ و $y = 6$ و $r = 6$ لكتابة النسب المثلثية.

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6}$ أو 1 $\quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6}$ أو 0 $\quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{0}$ غير مُعرَّف

$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6}$ أو 1 $\quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{6}{0}$ غير مُعرَّف $\quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6}$ أو 0

تمرين موجّه

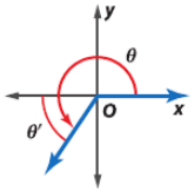
2. ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(-2, 0)$. أوجد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

2 النسب المثلثية بزوايا المرجع

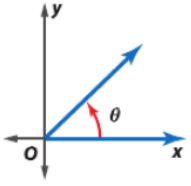
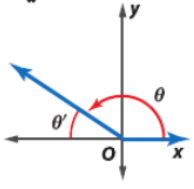
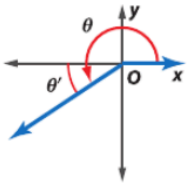
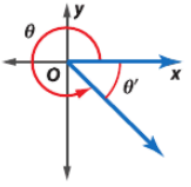
إذا كانت θ زاوية غير ربعية في وضع قياسي، فإن **زاوية المرجع** θ' لها تكون الزاوية الحادة التي يصنعها ضلع الانتهاء لـ θ مع المحور x. فيما يلي قواعد إيجاد قياس زوايا المرجع حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.

قراءة في الرياضيات

زاوية ثيتا الأولية θ' تُقرأ ثيتا الأولية.



المفهوم الأساسي زوايا المرجع

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

إذا كان قياس θ أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$. فاستخدم إذًا زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء يكون قياسها موجبًا بين $0°$ و $360°$ لإيجاد زاوية المرجع.

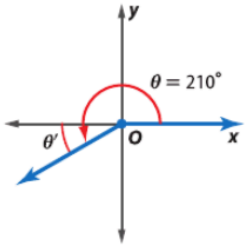
نصيحة دراسية

تمثيل الزوايا بيانيًا يمكنك الرجوع إلى الرسم التخطيطي في ملخص المفهوم.الدرس 10-2. ليساعدك على رسم الزوايا.

مثال 3 إيجاد زوايا المرجع

ارسم كل زاوية مما يلي، ثم أوجد زاوية المرجع لها.

a. $210°$



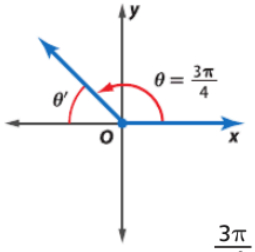
ضلع الانتهاء لـ $210°$ يقع في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180°$

$= 210° - 180°$ أو $30°$

b. $-\frac{5\pi}{4}$

زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$



ضلع الانتهاء لـ $\frac{3\pi}{4}$ يقع في الربع الثالث.

$\theta' = \pi - \theta$

$= \pi - \frac{3\pi}{4}$ أو $\frac{\pi}{4}$

تمرين موجّه

3A. $-110°$

3B. $\frac{2\pi}{3}$

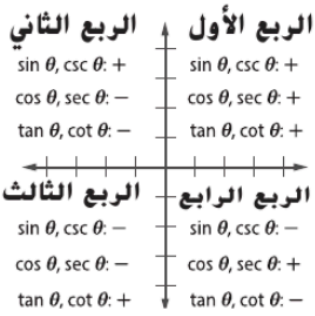
يمكنك استخدام زوايا المرجع لإيجاد قيم النسب المثلثية لأي زاوية θ. وما يحدد رمز النسبة هو الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. استخدم الخطوات التالية لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي إيجاد قيم النسب المثلثية

الخطوة 1 أوجد قياس زاوية المرجع θ'.

الخطوة 2 أوجد قيمة النسبة المثلثية لـ θ'.

الخطوة 3 حدد رمز قيمة النسبة المثلثية. استخدم رمز الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لـ θ.



يمكنك استخدام القيم المثلثية للزوايا التي قياسها $30°$ و $45°$ و $60°$ التي تعلمتها في الدرس 10-1.

قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة

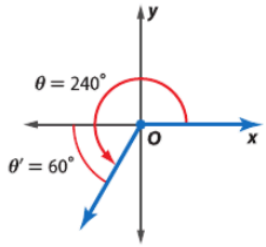
Cot	Sec	Csc	tan	Cosine	Sine
$\cot 30° = \sqrt{3}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\csc 30° = 2$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$
$\cot 45° = 1$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\tan 45° = 1$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 استخدام زاوية المرجع لإيجاد قيمة نسبة مثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

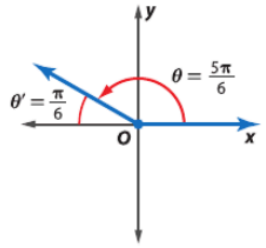
a. cos 240°



ضلع الانتهاء لـ $240°$ يقع في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180°$ $= 240° - 180°$ أو $60°$	أوجد قياس زاوية المرجع. $\theta = 240°$
$\cos 240° = -\cos 60°$ $-\frac{1}{2}$	نسبة جيب التمام سالبة في الربع الثالث.

b. csc $\frac{5\pi}{6}$



ضلع الانتهاء لـ $\frac{5\pi}{6}$ يقع في الربع الثاني.

$\theta' = \pi - \theta$ $= \pi - \frac{5\pi}{6}$ أو $\frac{\pi}{6}$	أوجد قياس زاوية المرجع. $\theta = \frac{5\pi}{6}$
$\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$	نسبة قاطع التمام موجبة في الربع الثاني.
$= \csc 30°$	$30° = \frac{\pi}{6}$ راديان
$= 2$	$\csc 30° = \frac{1}{\sin 30}$

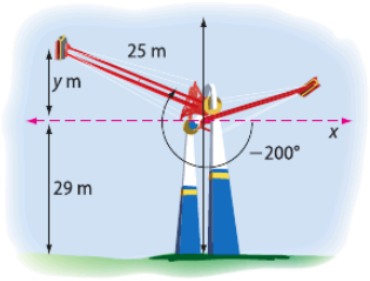
تمرين موجّه

4A. cos 135°

4B. tan $\frac{5\pi}{6}$

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام النسب المثلثية

ألعاب الملاهي الأذرع الدوارة للعبة الملاهي الموضحة على اليسار طولها 25 m و يبلغ ارتفاع المحور الذي تتأرجح منه الذراع 29 مترًا طولاً . فما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟



الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء: $-200° + 360° = 160°$

زاوية المرجع: $180° - 160° = 20°$

$\sin \theta = \frac{y}{r}$	نسبة الـ Sine
$\sin 20° = \frac{y}{25}$	$\theta = 20°$ و $r = 25$
$25 \sin 20° = y$	اضرب كل طرف في 25.
$8.6 \approx y$	استخدم آلة حاسبة للحل لإيجاد y.

بما أن y يساوي 8.6 m تقريبًا، فإن الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة لها هو $29 + 8.6$ أو حوالي 37.6 m.

تمرين موجّه

5. ألعاب الملاهي لعبة ملاهي مماثلة لها أذرع دوّارة أصغر طولها 22 m. ارتفاع المحور الذي تتأرجح الذراع منه يساوي 26 m. وزاوية الدوران من الوضع القياسي هي $-195°$. ما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟

الربط بالحياة اليومية

على لعبة ملاهٍ دوّارة، اختبر الركاب انعدام الوزن كما في الهبوط الجانبي لقطار الملاهي تمامًا. دامت اللعبة لدقيقة وبلغت السرعة 96 كيلومترًا في الساعة في كلا الاتجاهين.

المصدر: سيدار بوينت

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.**

1. (1, 2)
2. (−8, −15)
3. (0, −4)

مثال 3 **ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية المرجع لها.**

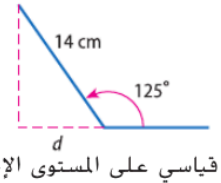
4. 300°
5. 115°
6. $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 **أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.**

7. $\sin \frac{3\pi}{4}$
8. $\tan \frac{5\pi}{3}$
9. $\sec 120°$
10. $\sin 300°$

مثال 5

11. **الترفيه** فتحت ميساء مشغل DVD المحمول الخاص بها بحيث يصنع زاوية 125°.



ويبلغ طول الشاشة 14 cm.

a. أعد تصميم الرسم التخطيطي بحيث تكون الزاوية في وضع قياسي على المستوى الإحداثي.

b. أوجد زاوية المرجع، ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة إلى الجدار d التي يمكن لميساء وضع مشغل DVD عندها.

c. استخدم النسبة لإيجاد المسافة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.**

12. (5, 12)
13. (−6, 8)
14. (3, 0)
15. (0, −7)
16. (4, −2)
17. (−9, −3)

مثال 3 **ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية المرجع لها.**

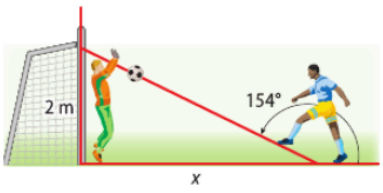
18. 195°
19. 285°
20. −250°
21. $\frac{7\pi}{4}$
22. $-\frac{\pi}{4}$
23. 400°

مثال 4 **أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.**

24. $\sin 210°$
25. $\tan 315°$
26. $\cos 150°$
27. $\csc 225°$
28. $\sin \frac{4\pi}{3}$
29. $\cos \frac{5\pi}{3}$
30. $\cot \frac{5\pi}{4}$
31. $\sec \frac{11\pi}{6}$

مثال 5

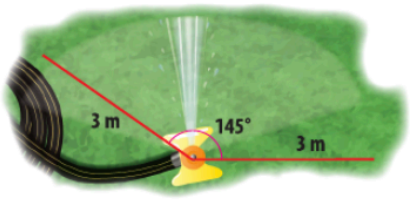
32. **التبرير** لاعب كرة قدم يقف على بعد x أمتار من حارس المرمى. ركل الكرة صوب المرمى، كما هو موضح في الشكل. قفز حارس المرمى وأمسك بالكرة على ارتفاع 2 m في الهواء.



a. أوجد زاوية المرجع، ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة التي كان يبعدها حارس المرمى عن اللاعب عندما ركل الكرة.

b. كم المسافة تقريبًا التي كان يبعدها حارس المرمى عن لاعب كرة القدم؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



33. آلة الرش آلة رش تدور ذهابًا وإيابًا ترش المياه على مسافة 3 m. من وضع أفقي، تدور الآلة 145° قبل أن تعكس اتجاهها. عند الزاوية 145° ، ما المسافة التقريبية التي تبلغها المياه على يسار آلة الرش؟

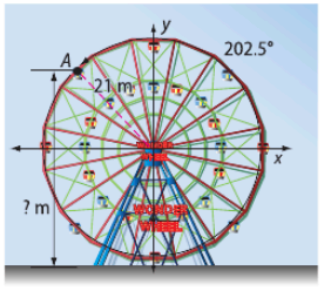
34. كرة السلة الصيغة $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$ تعطي مسافة ضربة كرة السلة بسرعة متجهة أولية قدرها v_0 أمتار في الثانية بزاوية θ مع الأرض.

a. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية قدرها 7 m/s بزاوية 75° ، فما المسافة التي ستقطعها كرة السلة؟

b. إذا ضُربت كرة السلة بزاوية 65° وقطعت 3 m، فماذا كانت السرعة المتجهة الأولية لها؟

c. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية قدرها 9 m/s وقطعت 4 m ، فبأي زاوية تم ضربها؟

35. الفيزياء رُميت صخرة من حافة واد بمقلاع بزاوية 65° وسرعة متجهة أولية قدرها 6 m/s. المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية للصخرة x هي $x = v_0 (\cos \theta)t$ حيث v_0 هي السرعة المتجهة الأولية، و θ هي الزاوية التي ضُربت بها، و t هو الزمن بالثواني. ما المسافة التي ستقطعها الصخرة تقريبًا بعد 4 ثوانٍ؟



36. عجلة فيريس عجلة ملاهي لها نصف قطر حوالي 21 m وترتفع 4. 5 m عن الأرض. بعد أن يركب الشخص في العربة السفلية، تدور العجلة 202.5° باتجاه عكس عقارب الساعة قبل أن تتوقف. ماذا كان ارتفاع هذه العربة فوق الأرض عندما توقفت العجلة؟

افترض أن θ زاوية في وضع القياسي ضلع الانتهاء لها في الربع المعطى، أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية للزاوية θ.

37. $\sin \theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

38. $\tan \theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

39. $\cos \theta = -\frac{8}{17}$، الربع الثالث

40. $\cot \theta = -\frac{12}{5}$، الربع الرابع

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

41. cot 270°

42. csc 180°

43. sin 570°

44. $\tan \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

45. $\cos \left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

46. $\cot \frac{9\pi}{4}$

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

47. تحدٍ بالنسبة لزاوية θ في وضع قياسي، $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan \theta = -1$. هل يمكن أن تكون قيمة θ هي 225°؟ برر استنتاجك.

48. فرضيات حدد إذا ما كانت العبارة $3 \sin 60° = \sin 180°$ صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

49. التبرير استخدم دالتي الجيب وجيب التمام واشرح لماذا يكون $\cot 180°$ غير مُعرَّف.

50. مسألة غير محددة الإجابة اذكر مثالاً لزاوية سالبة θ يكون فيها $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$.

51. الكتابة في الرياضيات صِف خطوات إيجاد قيمة نسبة مثلثية لأي زاوية θ تكون أكبر من 90° . أدرج وصفًا لزاوية المرجع.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبارات المعيارية

52. الإجابة الشبكية إذا كان مجموع عددين هو 21 والفرق بينهما هو 3، فما هو حاصل ضربهما؟

53. الهندسة D هي نقطة منتصف $\overline{BC}$ و A و E هما نقطتا منتصف $\overline{BD}$ و $\overline{DC}$ على التوالي. إذا كان طول $\overline{AE}$ هو 12، فما طول $\overline{BC}$؟

A 6
B 12
C 24
D 48

54. التعبير $(-6 + i)^2$ مكافئ لأي من التعابير التالية؟

F $-12i$
G $36 - i$
H $36 - 12i$
J $35 - 12i$

55. SAT/ACT أي مما يلي، هو الأقل؟

A $1 + \frac{1}{4}$
B $1 - \frac{1}{4}$
C $1 \div \frac{1}{4}$
D $1 \times \frac{1}{4}$
E $\frac{1}{4} - 1$

مراجعة شاملة

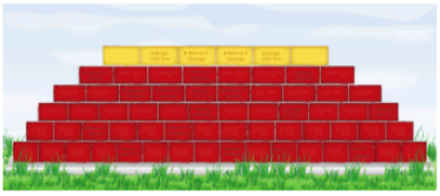
أعد كتابة كل قياس بالراديان بالدرجة. (الدرس 2-10)

56. $\frac{4}{3}\pi$
57. $\frac{11}{6}\pi$
58. $-\frac{17}{4}\pi$

حُلّ كلاً من المعادلات الآتية. (الدرس 1-10)

59. $\cos a = \frac{13}{17}$
60. $\sin 30 = \frac{b}{6}$
61. $\tan c = \frac{9}{4}$

62. العمارة الهندسية يتم إنشاء نصب تذكاري في حديقة بالمدينة. سيكون عبارة عن حائط طوبي يتكون فيه الصف العلوي من ست طوبات مطلية بالذهب محفور عليها أسماء ستة أشخاص محليين مشهورين. ويزيد كل صف بطوبتين عن الصف الذي يعلوه. أثبت أن عدد الطوب في أعلى n صفوف هو $n^2 + 5n$.



63. أساطير تشير إحدى الأساطير إلى أن هناك ملكًا أراد مكافأة فتى على فعلٍ حسن. وأعطى الملك للفتى اختيارًا: إما أن يحصل على AED 1,000,000 مرة واحدة، أو يُكافئ يوميًا على مدى شهر مكون من 30 يومًا، بفلس واحد في اليوم الأول وفلسين في اليوم الثاني، وهكذا، بحيث يحصل كل يوم على ضعف عدد فلسات اليوم السابق. فما قيمة المبلغ في الخيار الثاني؟

اكتب معادلة لكل دائرة بمعلومية نقطتي نهاية القطر.

64. (2, −4), (10, 2)
65. (−1, −10), (−7, 6)
66. (9, 0), (4, −7)

بسّط كل تعبير فيما يلي.

67. $\frac{5}{x^2 + 6x + 8} + \frac{x}{x^2 - 3x - 28}$
68. $\frac{3x}{x^2 + 8x - 20} - \frac{6}{x^2 + 7x - 18}$
69. $\frac{4}{3x^2 + 12x} + \frac{2x}{x^2 - 2x - 24}$

حُلّ كل معادلة أو متباينة. وقرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

70. $8^x = 30$
71. $5^x = 64$
72. $3^{x+2} = 41$

أوجد قيمة كل تعبير فيما يلي.

73. $16^{-\frac{1}{4}}$
74. $27^{\frac{4}{3}}$
75. $25^{-\frac{5}{2}}$

مراجعة المهارات

حُلّ لإيجاد قيمة x.

76. $\frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$
77. $\frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$
78. $\frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$

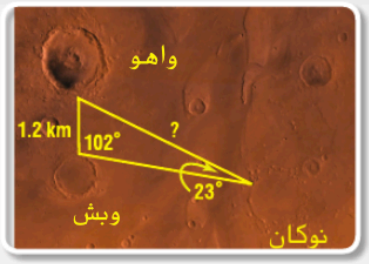
McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

10-4 قانون الـ Sine

السابق:
- أوجدت أطوال الأضلاع وقياس الزوايا للمثلثات القائمة.

الحالي:
1. إيجاد مساحة المثلث باستخدام ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.
2. استخدام قانون الـ Sine لحل المثلثات.

لماذا؟
- يوجد في كوكب المريخ مئات الآلاف من الفوهات التي سميت بأسماء أشهر العلماء ومؤلفي قصص الخيال العلمي وأسماء المدن على كوكب الأرض. يوضح الشكل الفوهات "Wahoo" (واهو) و"Wabash" (وبش) و"Naukan" (نوكان). يمكنك استخدام حساب المثلثات لإيجاد المسافة بين "Wahoo" (واهو) و"Naukan" (نوكان).

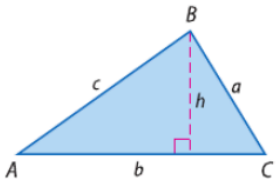


المفردات الجديدة
- قانون الـ Sine — Law of Sines
- حل مثلث — solving a triangle
- حالة مبهمة — ambiguous case

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 إيجاد مساحة المثلث

في المثلث المبين على اليسار، $\sin A = \frac{h}{c}$، أو $h = c \sin A$.



صيغة مساحة المثلث: المساحة $= \frac{1}{2} bh$

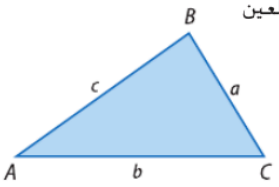
عوّض عن h بـ $c \sin A$: المساحة $= \frac{1}{2} b(c \sin A)$

بسّط: المساحة $= \frac{1}{2} bc \sin A$

يمكنك استخدام هذه الصيغة وصيغتين أخريين لإيجاد مساحة المثلث إذا علمت طولي ضلعين به وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

المفهوم الأساسي مساحة المثلث

الشرح مساحة المثلث هي نصف ناتج ضرب طولي الضلعين وجيب الزاوية المحصورة بينهما.

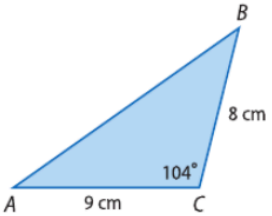


الرموز المساحة $= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$

مثال 1 إيجاد مساحة المثلث

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة.

في $\triangle ABC$، $a = 8$ و $b = 9$ و $C = 104°$.



بحسب القياسات المعلومة، استخدم صيغة المساحة الثالثة.
المساحة $= \frac{1}{2} ab \sin C$

التعويض $= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104°$

بسّط. $\approx 34.9 \text{ cm}^2$

التحقق الذهني قرّب جيب الزاوية 104° إلى جيب الزاوية 90° لأن جيب الزاوية 90° يساوي 1.

$\frac{1}{2}(8)(9)\sin 90° = \frac{1}{2}(8)(9)(1) = 36$

وهذا قريب من الإجابة 34.9 سنتيمترًا مربعًا.

تمرين موجّه

1. أوجد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة إذا كانت $A = 31°$ و $b = 18$ m و $c = 22$ m.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 استخدام قانون الـ Sine لحل المثلثات

يمكنك استخدام صيغ المساحة لاشتقاق **قانون الـ Sine**، الذي يبين العلاقات بين أطوال الأضلاع في المثلث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ — ضع صيغ المساحة مساوية لبعضها.

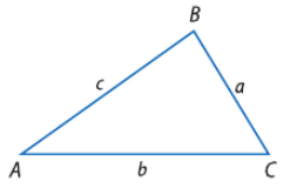
$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$ — اضرب كل تعبير في 2.

$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$ — اقسم كل تعبير على abc.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ — بسّط.

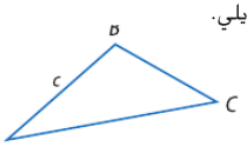
المفهوم الأساسي قانون الـ Sine

في $\triangle ABC$، إذا كانت الأضلاع التي أطوالها a و b و c مقابلة لزوايا قياسها A و B و C، على التوالي، فإن ما يلي صحيح.

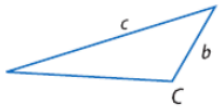


$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

يمكنك استخدام قانون الـ Sine لحل مثلث إذا كنت تعرف أيًا مما يلي.



- قياس زاويتين وأي ضلع (الحالتان زاوية–زاوية–ضلع AAS أو زاوية–ضلع–زاوية ASA)

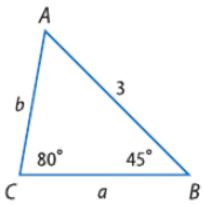


- قياس ضلعين والزاوية المقابلة لأي منهما (الحالة ضلع–ضلع–زاوية SSA)

يُسمى استخدام القياسات المعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع وقياس الزوايا المجهولة في المثلث، **حل المثلث**.

مثال 2 حل المثلث عند معرفة زاويتين وضلع

حُلّ $\triangle ABC$. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



الخطوة 1 أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$m\angle A = 180 - (80 + 45)$ أو $55°$

الخطوة 2 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد طول الضلعين a و b.

اكتب معادلة لإيجاد كل متغير.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ — قانون الـ Sine
$\frac{\sin 45°}{b} = \frac{\sin 80°}{3}$	$\frac{\sin 55°}{a} = \frac{\sin 80°}{3}$ — التعويض
$b = \frac{3 \sin 45°}{\sin 80°}$	$a = \frac{3 \sin 55°}{\sin 80°}$ — حل لإيجاد كل متغير.
$b \approx 2.2$	$a \approx 2.5$ — استخدم آلة حاسبة.

إذًا، $A = 55°$ و $a \approx 2.5$ و $b \approx 2.2$.

تمرين موجّه

2. حُلّ $\triangle NPQ$ إذا كانت $P = 42°$ و $Q = 65°$ و $n = 5$.

الربط بتاريخ الرياضيات

بولين سبيري (1967–1885) وضعت بولين سبيري كتابين مدرسيين خلال العقد الثاني من القرن العشرين، وهما Short Course in Spherical Trigonometry (*دورة قصيرة في حساب المثلثات الكروية*) و Plane Trigonometry (*حساب المثلثات المستوية*). وفي عام 1923، أصبحت أول امرأة تُرقى لمنصب أستاذ مساعد في قسم الرياضيات في جامعة كاليفورنيا، بيركلي.

نصيحة دراسية

التبرير يمكن أيضًا كتابة قانون الـ Sine بالشكل $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

إذًا، يمكن أيضًا استخدام التعابير الموضحة أدناه لحل المثلث في المثال 2.

- $\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$
- $\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا علمت قياس زاويتين وضلع، فيمكن أن يوجد مثلث واحد تحديدًا. ولكن، إذا علمت قياس ضلعين وزاوية مقابلة لأحدهما، فيمكن ألا يوجد أي مثلث أو يوجد مثلث واحد أو مثلثان. وتُعرف هذه الحالة باسم **الحالة المبهمة**. لذلك، عند حل مثلث باستخدام الحالة SSA (ضلع–ضلع–زاوية)، فإنه من الممكن ألا يوجد أي حل أو يوجد حل واحد أو حلان.

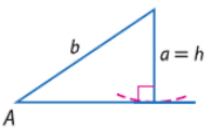
نصيحة دراسية

حلان يُطلق على الحالة عندما يوجد حلان للمثلث اسم *الحالة المبهمة*.

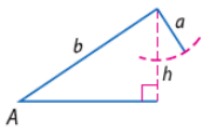
المفهوم الأساسي المثلثات المحتملة في الحالة SSA

تأمل مثلث فيه قياس a و b و $m\angle A$ معطاة.

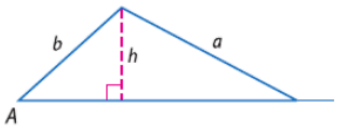
$\angle A$ تكون حادة.



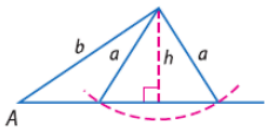
$a = h$
حل واحد



$a < h$
لا يوجد حل

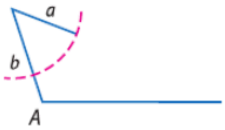


$a \geq b$
حل واحد

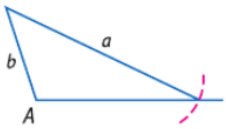


$h < a < b$
حلان

$\angle A$ إما أنها قائمة أو منفرجة.



$a \leq b$
لا يوجد حل



$a > b$
حل واحد

نصيحة دراسية

A هي زاوية حادة في الأشكال على اليسار، يقارن الارتفاع h بـ a حيث h هي أدنى مسافة من C إلى $\overline{AB}$. عندما تكون الزاوية A حادة.

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\sin A = \frac{h}{b}$$

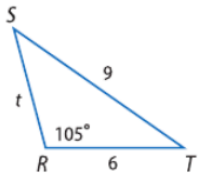
بما أن $\sin A = \frac{h}{b}$، يمكنك استخدام $h = b \sin A$ لإيجاد h في المثلثات الحادة.

مثال 3 حل المثلث عند معرفة ضلعين وزاوية

حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أم له حل *واحد*، أم له *حلان*. ثم أوجد حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

a. في $\triangle RST$، $R = 105°$ و $r = 9$ و $s = 6$.

بما أن $\angle R$ منفرجة، و $6 < 9$. فأنت تعلم أنه يوجد حل واحد للمثلث.



الخطوة 1 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد $m\angle S$.

$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الـ Sine

$\sin S = \frac{6 \sin 105°}{9}$ اضرب كل طرف في 6.

$\sin S \approx 0.6440$ استخدم آلة حاسبة.

$S \approx 40°$ استخدم الدالة $\sin^{-1}$.

الخطوة 2 أوجد قيمة $m\angle T$.

$m\angle T \approx 180 - (105 + 40)$ أو $35°$

الخطوة 3 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد t.

$\frac{\sin 35°}{t} \approx \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الـ Sine

$t \approx \frac{9 \sin 35°}{\sin 105°}$ حل لإيجاد t.

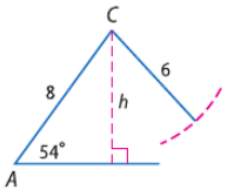
$t \approx 5.3$ استخدم آلة حاسبة.

إذًا، $S \approx 40°$ و $T \approx 35°$ و $t \approx 5.3$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b. في $\triangle ABC$، $A = 54°$ و $a = 6$ و $b = 8$.

بما أن $\angle A$ حادة و $8 > 6$. أوجد h وقارنها بـ a.



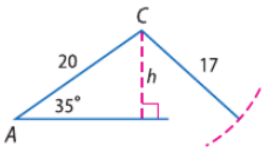
$b \sin A = 8 \sin 54°$ $A = 54°$ و $b = 8$

≈ 6.5 استخدم آلة حاسبة.

بما أن $6 \leq 6.5$ أو $a \leq h$ ، فلا يوجد أي حل.

c. في $\triangle ABC$، $A = 35°$ و $a = 17$ و $b = 20$.

بما أن $\angle A$ حادة، و $17 < 20$. فأوجد h وقارنها بـ a.

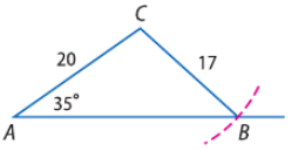


$b \sin A = 20 \sin 35°$ $A = 35°$ و $b = 20$

≈ 11.5 استخدم آلة حاسبة.

بما أن $17 < 20$ أو $h < a < b$ ، فيوجد حلان. إذًا يوجد مثلثان يمكن حلهما

الحالة 1 $\angle B$ **حادة.**



الخطوة 1 أوجد قيمة $m\angle B$.

$\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35°}{17}$ قانون الـ Sine

$\sin B = \frac{20 \sin 35°}{17}$ حل لإيجاد $\sin B$.

$\sin B \approx 0.6748$ استخدم آلة حاسبة.

$B \approx 42°$ أوجد $\sin^{-1} 0.6748$.

الخطوة 2 أوجد قيمة $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 42)$ أو $103°$

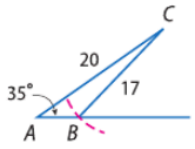
الخطوة 3 أوجد قيمة c.

$\frac{\sin 103°}{c} = \frac{\sin 35°}{17}$ قانون الـ Sine

$c = \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$ حل لإيجاد c.

$c \approx 28.9$ بسّط.

الحالة 2 $\angle B$ **منفرجة.**



الخطوة 1 أوجد قيمة $m\angle B$.

دالة الجيب لها أيضًا قيمة موجبة في الربع الثاني. إذًا، أوجد زاوية منفرجة B لها $\sin B \approx 0.6748$.

$m\angle B \approx 180° - 42°$ أو $138°$

الخطوة 2 أوجد قيمة $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 138)$ أو $7°$

الخطوة 3 أوجد قيمة c.

$\frac{\sin 7°}{c} \approx \frac{\sin 35°}{17}$ قانون الـ Sine

$c \approx \frac{17 \sin 7°}{\sin 35°}$ حل لإيجاد c.

$c \approx 3.6$ بسّط.

إذًا، أحد الحلين هو $B \approx 42°$ و $C \approx 103°$ و $c \approx 28.9$. والحل الثاني هو $B \approx 138°$ و $C \approx 7°$ و $c \approx 3.6$.

نصيحة دراسية

زاوية المرجع في المثلث المبين في الحالة 2. أنت تستخدم زاوية المرجعيات القياس $42°$ لإيجاد القيمة الأخرى لـ B.

تمرين موجّه

حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أم له حل *واحد*، أم له حلان. ثم أوجد حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

3A. في $\triangle RST$، $R = 95°$ و $r = 10$ و $s = 12$.

3B. في $\triangle MNP$، $N = 32°$ و $n = 7$ و $p = 4$.

3C. في $\triangle ABC$، $A = 47°$ و $a = 15$ و $b = 18$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

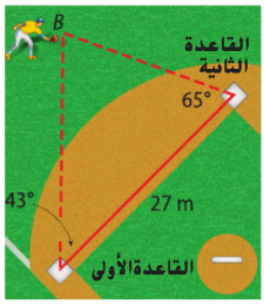
مثال 4 من الحياة اليومية استخدام قانون الـ Sine لحل المسائل

الربط بالحياة اليومية

تشترك ملاعب البيسبول في المدرسة الثانوية والكلية في أبعاد الملعب الداخلي مثل ملاعب البيسبول للمحترفين. بينما تختلف أبعاد الملعب الخارجي اختلافًا كبيرًا.

المصدر: *مجلة أخبار البيسبول*

لعبة البيسبول ضُربت كرة بيسبول بين القاعدتين الثانية والثالثة والتُقطت عند النقطة B، كما هو موضح في الشكل. كم تبعد نقطة التقاط الكرة عن القاعدة الثانية؟



$$\frac{\sin 72^\circ}{27} = \frac{\sin 43^\circ}{x}$$ قانون الـ Sine

$$x \sin 72^\circ = 27 \sin 43^\circ$$ الضرب التبادلي

$$x = \frac{27 \sin 43^\circ}{\sin 72^\circ}$$ حل لإيجاد x.

$$x \approx 19.4$$ استخدم آلة حاسبة.

إذًا، تبعد المسافة 19.4 m تقريبًا.

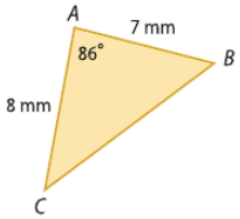
تمرين موجّه

4. كم تبعد نقطة التقاط الكرة عن القاعدة الثالثة؟

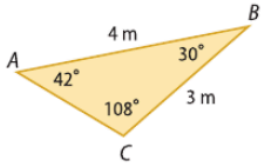
التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

1.



2.

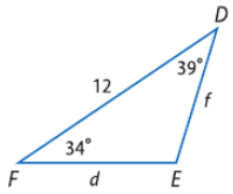


3. $A = 40^\circ, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

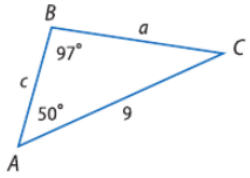
4. $B = 103^\circ, a = 20 \text{ cm}, c = 18 \text{ cm}$

مثال 2 حُلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

5.

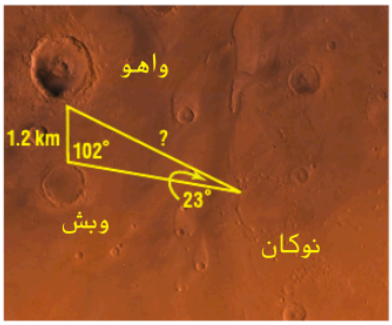


6.



7. حُلّ $\triangle FGH$ إذا كانت $G = 80^\circ$ و $H = 40^\circ$ و $g = 14$.

مثال 3 **المثابرة** حدد هل كل مثلث $\triangle ABC$ بلا حل، أم له حل *واحد*، أم له *حلان*. ثم أوجد حل المثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.



8. $A = 95^\circ, a = 19, b = 12$

9. $A = 60^\circ, a = 15, b = 24$

10. $A = 34^\circ, a = 8, b = 13$

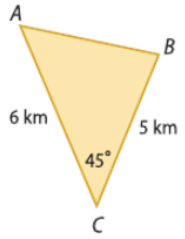
11. $A = 30^\circ, a = 3, b = 6$

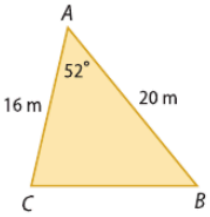
مثال 4 **12.** **الفضاء** راجع بداية الدرس. أوجد المسافة بين فوهة Wahoo (واهو) وفوهة Naukan (نوكان) على كوكب المريخ.

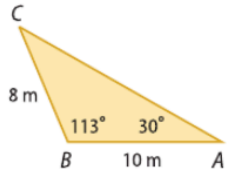
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

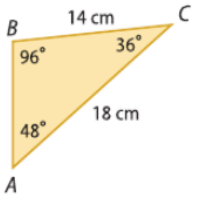
التدريب وحل المسائل

مثال 1 أوجد مساحة $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة.

13. 

14. 

15. 

16. 

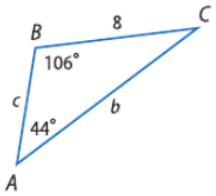
17. $C = 25°$, $a = 4$ m, $b = 7$ m

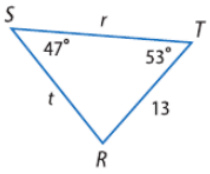
18. $A = 138°$, $b = 10$ cm., $c = 20$ cm.

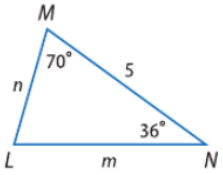
19. $B = 92°$, $a = 14.5$ m, $c = 9$ m

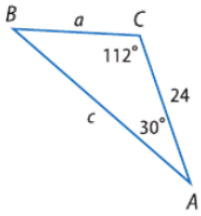
20. $C = 116°$, $a = 2.7$ cm, $b = 4.6$ cm

مثال 2 **التبرير** حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

21. 

22. 

23. 

24. 

25. حُـلّ $\triangle HJK$ إذا كانت $H = 53°$ و $J = 20°$ و $h = 13$.

26. حُـلّ $\triangle NPQ$ إذا كانت $P = 109°$ و $Q = 57°$ و $n = 22$.

27. حُـلّ $\triangle ABC$ إذا كانت $A = 50°$ و $a = 2.5$ و $C = 67°$.

28. حُـلّ $\triangle ABC$ إذا كانت $B = 18°$ و $C = 142°$ و $b = 20$.

مثال 3 **حدد ما إذا كان كل مثلث $\triangle ABC$ بلا حل، أم له واحد، أم له حلان. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.**

29. $A = 100°$, $a = 7$, $b = 3$

30. $A = 75°$, $a = 14$, $b = 11$

31. $A = 38°$, $a = 21$, $b = 18$

32. $A = 52°$, $a = 9$, $b = 20$

33. $A = 42°$, $a = 5$, $b = 6$

34. $A = 44°$, $a = 14$, $b = 19$

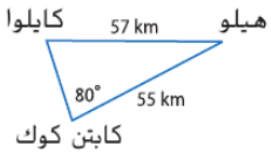
35. $A = 131°$, $a = 15$, $b = 32$

36. $A = 30°$, $a = 17$, $b = 34$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4

الجغرافيا في هاواي، تقدر المسافة من "هيلو" إلى "كايلوا" بـ 57 km، والمسافة من "هيلو" إلى "كابتن كوك" بـ 55 km.



37. ما قياس الزاوية المتشكلة عند "هيلو"؟

38. ما المسافة بين "كايلوا" و"كابتن كوك"؟

39. **الأعاصير** تُكوّن صافرات إنذار الأعاصير A و B و C منطقة مثلثية الشكل في إحدى المناطق بالمدينة. تبعد صافرتا الإنذار A و B عن بعضهما 8 mi. وقياس الزاوية المتشكلة عند صافرة الإنذار A تساوي 112°. والزاوية المتشكلة عند صافرة الإنذار B تساوي 40°. ما المسافة التي تفرق بين الصافرتين B و C؟

40. **الألغاز** مثلث برمودا هو منطقة في المحيط الأطلنطي بين برمودا، وميامي، وفلوريدا، وسان‌خوان، وبورتو ريكو. ولقد أشيع عنه أن السفن والطائرات تختفي فيه في ظروف غامضة.

a. ما المسافة بين ميامي وبرمودا؟

b. ما مساحة مثلث برمودا تقريبًا؟

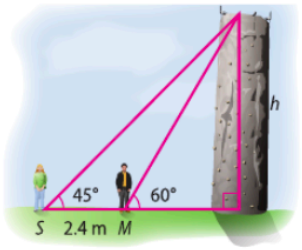
41. **ركوب الدراجات** طول أحد الأضلاع في مسار ركوب دراجات مثلثي الشكل يساوي 4 كيلومترات. والزاوية المقابلة لهذا الضلع تساوي 64°. وتشكلت زاوية أخرى في المسار المثلثي قياسها 66°.

a. صمم رسمًا لهذه الحالة مع تسمية الضلعين المجهولين a و b.

b. اكتب معادلات يمكن استخدامها لإيجاد طولي الضلعين المجهولين.

c. ما محيط المسار؟

42. **تسلق الصخور** يقف سعيد S وماجد M وبينهما مسافة 2.4 m أمام حائط تسلق الصخور، كما هو موضح على اليسار. ما ارتفاع الجدار؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا

43. **النقد** في $\triangle RST$، $R = 56°$ و $r = 24$ و $t = 12$.
تستخدم ميسون ومها قانون الـ Sine لإيجاد T.
هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

ميسون

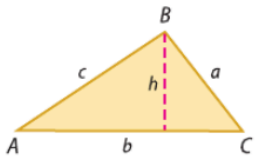
$$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$$
$$\sin T \approx 0.4145$$
$$T \approx 24.5°$$

مها

بما أن $r > t$، فلا يوجد أي حل.

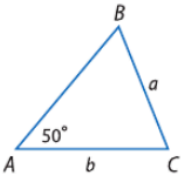
44. **مسألة غير محددة الإجابة** ابتكر مسألة تطبيقية تتضمن مثلثات قائمة الزاوية وقانون الـ Sine. ثم حل المسألة، وصمم رسمًا تخطيطيًا إذا لزم الأمر.

45. **تحدٍ** استعن بالشكل على اليسار لاشتقاق صيغة المساحة $\frac{1}{2}bc \sin A$.



46. **التبرير** أوجد أطوال أضلاع المثلثين المختلفين ABC اللذين يمكن أن يتكوّنا إذا كانت $A = 55°$ و $C = 20°$.

47. **الكتابة في الرياضيات** استخدم قانون الـ Sine لشرح لماذا a و b ليس لهما قيمة فريدة في الشكل الموضح.

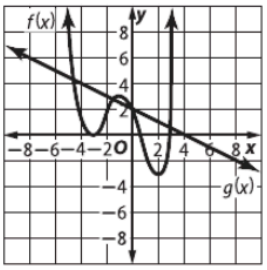


48. **مسألة غير محددة الإجابة** إذا علمت أن $E = 62°$ و $d = 38$، فأوجد قيمة لـ e يتعذر على إثرها وجود المثلث DEF. اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

49. الإجابة القصيرة بالنظر إلى التمثيلين البيانيين لـ $f(x)$ و$g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$؟



50. الإحصاء إذا كان متوسط سبعة أعداد صحيحة فردية n. فما وسيط هذه الأعداد الصحيحة السبعة؟

A 0
B 7
C n
D $n - 2$

51. أحد أصفار الدالة $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ هو 4 . ما الصيغة المحللة إلى العوامل للتعبير $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$؟

F $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
G $(x - 6)(x + 3)(x - 4)$
H $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$
J $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$

52. SAT/ACT يقسم ثلاثة أشخاص AED48,000 باستخدام النسبة 3 : 4 : 5. ما قيمة مبلغ النصيب الأكبر؟ **C**

A AE D12,000
B AED 16,000
C AED 20,000
D AED 24,000
E AED 30,000

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية. (الدرس 3-10)

53. $\sin 210°$ **54.** $\cos \frac{3}{4}\pi$ **55.** $\cot 60°$

أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية. (الدرس 2-10)

56. $125°$ **57.** $-32°$ **58.** $\frac{2}{3}\pi$

59. الساعات كُسرت الساعة الخاصة بجد بثينة. عندما حركتبندول الساعة عن طريق إمساكه والضغط عليه مقابل أحد جانبي الساعة وتحريره. ودارالبندول 24 سنتيمترًا إلى الجانب الآخر، ثم عاد مسافة 18 سنتيمترًا، ثم تحرك 13.5 سنتيمترًا واستمر على هذا المنوال. فما المسافة الإجمالية التي دارهاالبندول قبلأن يتوقف؟

أوجد مجموع كل متسلسلة لا نهائية، إن وُجد.

60. $64 + 48 + 36 + \ldots$ **61.** $27 + 36 + 48 + \ldots$ **62.** $\sum_{n=1}^{\infty} 0.5(1.1)^n$

63. علم الفلك تبتعدالأرض عن مركز الشمس مسافة 146.9 مليون كيلومتر عند أقرب نقطة لها. وتبتعدالأرض عن مركز الشمس مسافة 151.8 مليون كيلومتر عند أبعد نقطة لها. اكتب معادلة تصف مدارالأرضبافتراض أن مركز المدار هو نقطة الأصلوأن الشمس تقع على المحور x.

بسّط.

64. $\sqrt{(x-4)^2}$ **65.** $\sqrt{(y+2)^4}$ **66.** $\sqrt[3]{(a-b)^6}$

مراجعة المهارات

أوجد قيمة كل تعبير إذا كان $w = 6$ و $x = -4$ و $y = 1.5$ و $z = \frac{3}{4}$.

67. $w^2 + y^2 - 6xz$ **68.** $x^2 + z^2 + 5wy$ **69.** $wy + xz + w^2 - x^2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التوسع

10-4 مختبر الهندسة
المضلعات المنتظمة

يمكنك استخدام الزوايا المركزية للدوائر لاستكشاف خواص المضلعات المنتظمة المحوطة بدائرة. تذكر أن المضلع المنتظم يكون محاطًا بدائرة إذا كان كل رأس من رؤوسه يقع على الدائرة.

النشاط جمع البيانات

الخطوة 1 استخدم فرجارًا لرسم دائرةٍ نصف قطرها سنتيمتر واحد.

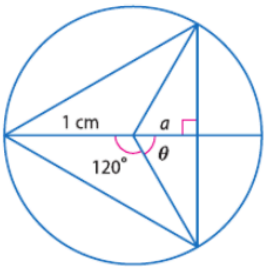
الخطوة 2 أحط مثلثًا متساوي الأضلاع بدائرة. للقيام بذلك، استخدم منقلة لقياس الزوايا الثلاث لـ 120° عند مركز الدائرة، بما أن $\frac{360°}{3} = 120°$.

ثم صِل النقاط حيث تتقاطع أضلاع الزوايا مع الدائرة باستخدام مسطرة.

الخطوة 3 **عامد** المضلع المنتظم هو قطعة مستقيمة مرسومة من مركز المضلع وتكون عمودية على أحد أضلاعه. استخدم جيب تمام الزاوية θ لإيجاد طول العامد، المسمى a في الرسم التخطيطي.

تمثيل النماذج والتحليل

1. أعد جدولا مُثل ذلك المبين أدناه ودونّ طول عامد المثلث المتساوي الأضلاع. وأدخل كل مضلع منتظم مذكور في الجدول، في دائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد. أكمل الجدول.



عدد الأضلاع، n	θ	a	عدد الأضلاع، n	θ	a
3	60		7		
4	45		8		
5			9		
6			10		

2. ما الذي تلاحظه بشأن قياس θ مع تزايد عدد أضلاع المضلع المحوط بدائرة؟
3. ما الذي تلاحظه بشأن قيمة a؟
4. **التخمين** افترض أنك أحطت مضلعًا منتظمًا من 30 ضلعًا بدائرة. أوجد قياس الزاوية θ.
5. اكتب صيغة تعطي قياس الزاوية θ لمضلع عدد أضلاعه هو n.
6. اكتب صيغة تعطي طول العامد لمضلع منتظم محوط بدائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد.
7. كيف ستتغير الصيغة التي كتبتها في التدريب 6 إذا لم يكن نصف قطر الدائرة سنتيمترًا واحدًا؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill

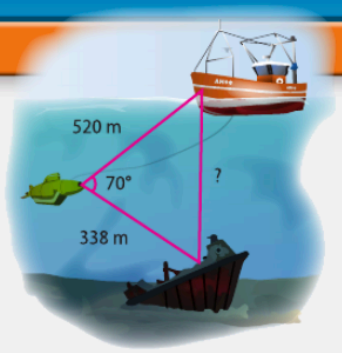
الدرس 10-5

قانون الـ Cosine

السابق
- أوجدت حل المثلثات باستخدام قانون الـ Sine.

الحالي
1. استخدام قانون الـ Cosine لحل المثلثات.
2. الاختيار بين طرق حل المثلثات.

لماذا؟
- *الغواصة* هي مركبة مائية تُستخدم في استكشاف أعماق المحيط. يمكنك استخدام حساب المثلثات لإيجاد المسافة من السفينة المستخدمة لإنزال الغواصة في المحيط وحطام السفينة الذي عثرت الغواصة عليه في قعر المحيط.

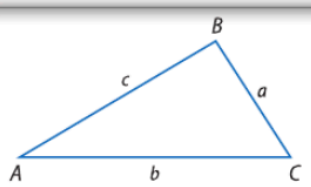


1 استخدام قانون الـ Cosine لحل المثلثات

لا يمكنك استخدام قانون الـ Sine لحل مثلث مثل ذلك المبين أعلاه. ولكن يمكنك استخدام **قانون الـ Cosine** في حالة:

- معرفة قياس ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (حالة ضلع–زاوية–ضلع).
- معرفة قياس الأضلاع الثلاثة (حالة ضلع–ضلع–ضلع).

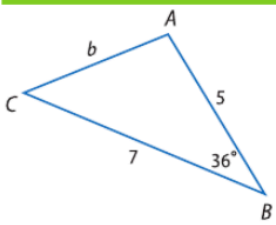
المفهوم الأساسي قانون الـ Cosine



في $\triangle ABC$، إذا كانت الأضلاع التي طولها a و b و c مقابلة لزوايا قياسها A و B و C، على التوالي، فينطبق إذًا ما يلي.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

مثال 1 حـ ل المثلث عند معرفة ضلعين وزاوية محصورة بينهما



حُـلّ $\triangle ABC$.

الخطوة 1 استخدم قانون الـ Cosine لإيجاد طول الضلع المجهول.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	قانون الـ Cosine
$b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36°$	$a = 7,\ c = 5,\ B = 36°$
$b^2 \approx 17.4$	استخدم آلة حاسبة للتبسيط.
$b \approx 4.2$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

الخطوة 2 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد قياس الزاوية المجهولة. إيجاد الزاوية الأصغر أولاً يمكن أن يساعد على تجنب الوقوع في خطأ إذا كانت الزاوية الأكبر محتمل أن تكون منفرجة.

$\frac{\sin C}{5} \approx \frac{\sin 36°}{4.2}$	$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$
$\sin C \approx \frac{5 \sin 36°}{4.2}$	اضرب كل طرف في 5.
$C \approx 44°$	استخدم الآلة الحاسبة.

الخطوة 3 أوجد قياس الزاوية الأخرى. $m\angle A \approx 180° - (36° + 44°)$ أو $100°$

إذًا، $b \approx 4.2$ و $A \approx 100°$ و $C \approx 44°$.

تمرين موجّه

1. حـ لّ $\triangle FGH$ إذا كانت $G = 82°$ و $f = 6$ و $h = 4$.

المفردات الجديدة

قانون الـ Cosine
Law of Cosines

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

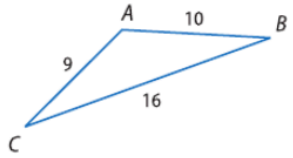
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عندما تعلم فقط أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث، يمكنك حل المثلث باستخدام قانون الـ Cosine. تتمثل الخطوة الأولى في إيجاد قياس الزاوية الأكبر. ويتم ذلك لضمان أن الزاويتين الأخريين حادتان عند استخدام قانون الـ Sine.

مثال 2 حـ ل المثلث عند معرفة الأضلاع الثلاثة

حُـلّ $\triangle ABC$.



الخطوة 1 استخدم قانون الـ Cosine لإيجاد قياس الزاوية الأكبر، $\angle A$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون الـ Cosine
$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10) \cos A$	$a = 16, b = 9, c = 10$ و
$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10) \cos A$	اطرح 9^2 و 10^2 من كل طرف.
$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$	اقسم كل طرف على $-2(9)(10)$.
$-0.4167 \approx \cos A$	استخدم آلة حاسبة للتبسيط.
$115° \approx A$	استخدم النسبة $\cos^{-1}$.

الخطوة 2 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد قياس $\angle B$.

$\frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115°}{16}$	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$
$\sin B \approx \frac{9 \sin 115°}{16}$	اضرب كل طرف في 9.
$\sin B \approx 0.5098$	استخدم آلة حاسبة.
$B \approx 31°$	استخدم النسبة $\sin^{-1}$.

الخطوة 3 أوجد قياس $\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (115° + 31°)$ أو حوالي $34°$

إذًا، $A \approx 115°$ و $B \approx 31°$ و $C \approx 34°$.

نصيحة دراسية
طريقة بديلة بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استخدام قانون الـ Cosine مرة أخرى لإيجاد قياس الزاوية الثانية.

تمرين موجّه

2. حُـلّ $\triangle ABC$ إذا كان $a = 5$ و $b = 11$ و $c = 8$.

مراجعة المصطلحات
مائل (oblique) مثلث لا يتضمن زاوية قائمة

2 اختيار طريقة لحل المثلثات

يمكنك استخدام قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine لحل مسائل تشتمل على مثلثات مائلة. وتحتاج إلى معرفة قياس ضلع واحد على الأقل وأي جزأين آخرين. إذا كان المثلث له حل، فيجب أن تحدد ما إذا كنت ستستخدم قانون الـ Sine أم قانون الـ Cosine لحل المثلث.

ملخص المفهوم حل المثلثات المائلة

المعطيات	ابدأ باستخدام
زاويتان وأي أضلاع	قانون الـ Sine
ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما	قانون الـ Sine
ضلعان وزاوية محصورة بينهما	قانون الـ Cosine
ثلاثة أضلاع	قانون الـ Cosine

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الربط بالحياة اليومية

أعمق غطس في مياه البحار مسجل بلغ 313 مترًا. وقام به غطاس في البحر الأحمر.

المصدر: موسوعة غينيس للأرقام القياسية العالمية

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام قانون الـ Cosine

الغطس نظر الغطاس لأعلى بزاوية 20° ورأى سلحفاة على بعد 2.7 m منه. ثم نظر لأسفل بزاوية 40° ورأى سمكة ببغائية زرقاء على بعد 3.6 m منه. ما المسافة الفارقة بين السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء؟

الفهم أنت تعلم الزاويتين اللتين تشكلتا عندما نظر الغواص لأعلى ولأسفل. وتعلم أيضًا كم تبعد السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء عن الغواص.

التخطيط استخدم المعلومات لتصميم رسم تخطيطي وتسميته. بما أنه معلوم ضلعين وزاوية محصورة بينهما في المثلث، يمكنك استخدام قانون جيب التمام لحل المسألة.

الحل

قانون الـ Cosine

$A = 60$ و $c = 2.7$ و $b = 3.6$

استخدم آلة حاسبة.

أوجد القيمة الموجبة لـ a.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$a^2 = 3.6^2 + 2.7^2 - 2(3.6)(2.7) \cos 60$$
$$a^2 = 10.53$$
$$a \approx 3.2$$

إذًا، السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء تفصل بينهما مسافة حوالي 3.2 أمتار.

التحقق باستخدام قانون الـ Sine، يمكنك إيجاد أن $B \approx 74°$ و $C \approx 46°$.
بما أن $C < A < B$ و $c < a < b$. فالحل منطقي.

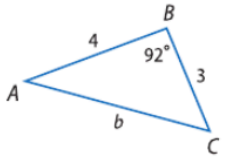
تمرين موجّه

3. **سباقات الماراثون** ركضت نهلة 6 km في نفس الاتجاه. ثم انعطفت بزاوية 79° وركضت 7 km في نهاية السباق. ما المسافة التي تبعدها نهلة عن نقطة البداية لها؟

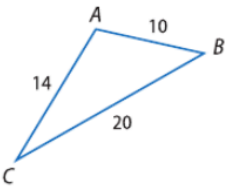
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

1.



2.

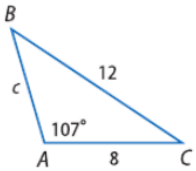


3. $a = 5,\ b = 8,\ c = 12$

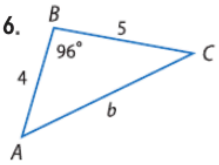
4. $B = 110°,\ a = 6,\ c = 3$

مثال 3 **الدقة** حدد ما إذا كان كل مثلث ينبغي حله بدءًا بقانون الـ Sine أم قانون الـ Cosine. ثم حُلّ المثلث.

5.



6.



7. في $\triangle RST$، $R = 35°$ و $s = 16$ و $t = 9$.

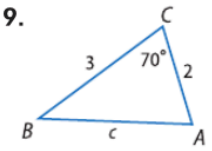
8. **كرة القدم** في مباراة كرة قدم، يبعد حارس المرمى عن المدافع A بمسافة 20 m. ودار بزاوية 40° لرؤية المدافع B الذي يبعد عنه بمسافة 16 m. ما المسافة التي تفرق بين هذين المدافعين؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

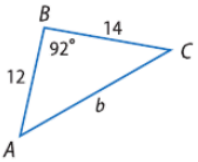
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

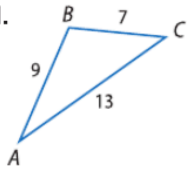
9.



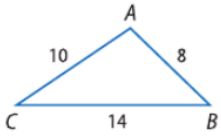
10.



11.



12.



13. $A = 116°, b = 5, c = 3$

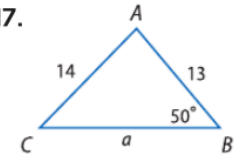
14. $C = 80°, a = 9, b = 2$

15. $f = 10, g = 11, h = 4$

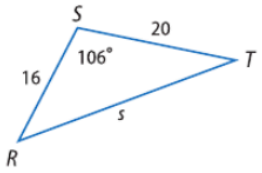
16. $w = 20, x = 13, y = 12$

مثال 3 حدد ما إذا كان كل مثلث ينبغي حله بدءًا بقانون الـ *Sine* أم قانون الـ *Cosine*. ثم حُـلّ المثلث.

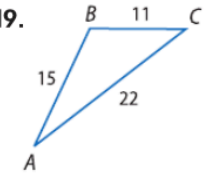
17.



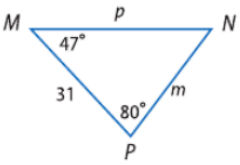
18.



19.



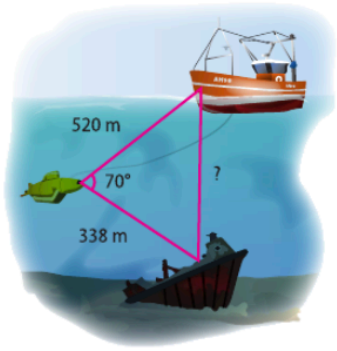
20.



21. في $\triangle ABC$، $C = 84°$ و $c = 7$ و $a = 2$.

22. في $\triangle HJK$، $h = 18$ و $j = 10$ و $k = 23$.

23. **الاستكشاف** أوجد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الموضحين في الرسم التخطيطي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



24. **الهندسة** متوازي أضلاع به ضلعان طولهما 8 cm و 12 cm. وتوجد زاوية محصورة بينهما قياسها 42°. ما طول القطر الأقصر مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟

25. **السباق** مسار سباق ريفي على شكل مثلث أطوال أضلاعه هي 1.8 km و 2 km و 1.2 km. ما الزوايا التي يشكلها كل زوج من الأضلاع؟

26. **تمثيل النماذج** مزرعة على قطعة أرض مثلثية الشكل قياسها 0.9 km في 0.5 km في 1.25 km.

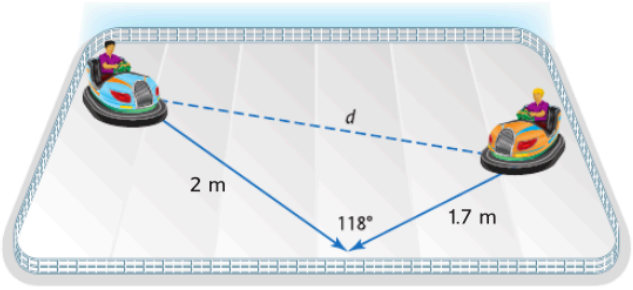
a. إذا كانت قطعة الأرض محاطة بسياج، فماذا سيكون قياس الزوايا التي تتلاقى أسياج الأضلاع الثلاثة عندها؟ قرّب إلى أقرب درجة.

b. ما مساحة قطعة الأرض؟

27. **الأرض** قطعة أرض على شكل مثلث. المسافات بين كل رأس في المثلث هي 140 m و 210 m و 300 m على التوالي. استخدم قانون الـ Cosine لإيجاد مساحة الأرض مع التقريب إلى أقرب متر مربع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

28. الملاهي سيارتان متصادمتان في لعبة ملاهي اصطدمتا على النحو أدناه.



a. ما المسافة التي كانت تبعدها d السيارتان قبل التصادم؟

b. قبل التصادم، كانت توجد سيارة ثالثة على بعد 3 m من السيارة الزرقاء، و 4 m من السيارة البرتقالية. صِف الزوايا التي شكلتها السيارات الثلاث قبل التصادم.

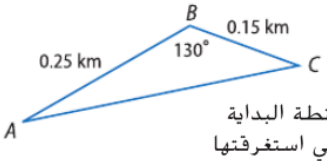
29. المنتزهات منتزه على شكل مثلث أطوال أضلاعه 11 m في 14 m في 10 m.

a. ارسم مساحة المنتزه لتمثيلها مع تسميتها.

b. صِف كيف يمكنك إيجاد مساحة المنتزه.

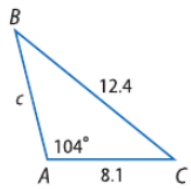
c. كم تبلغ المساحة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

30. الفيات المائية امرأة على زورق شخصي قامت برحلة من النقطة A إلى النقطة B إلى النقطة C وهي تقطع 28 km/h. ثم عادت من النقطة C إلى نقطة البداية لها وهي تقطع 35 km/h . فكم عدد الدقائق التي استغرقتها الرحلة بالكامل؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

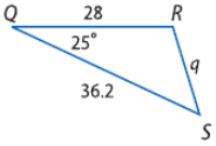


حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

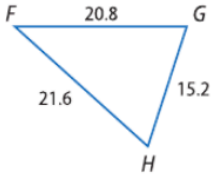
31.



32.

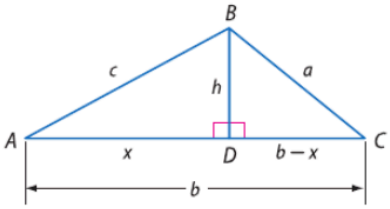


33.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

34. تحدٍ استعن بالشكل ونظرية فيثاغورس لاشتقاق قانون جيب التمام. استفد من الإرشادات أدناه.



- استخدم نظرية فيثاغورس أولًا لحل $\triangle DBC$.
- في $\triangle ADB$، $c^2 = x^2 + h^2$.
- $\cos A = \frac{x}{c}$

35. الفرضيات مثلث أطوال أضلاعه هي 10.6 cm و 8 cm و 14.5 cm. اشرح كيفية إيجاد قياس الزاوية الأكبر. ثم أوجد قياس هذه الزاوية مع التقريب إلى أقرب درجة.

36. مسألة غير محددة الإجابة ابتكر مسألة تطبيقية تتضمن مثلثات قائمة وقانون الـ Cosine. ثم حل مسألتك وصمّم رسوم تخطيطية إذا لزم الأمر.

37. الكتابة في الرياضيات كيف تحدد أي طريقة ينبغي استخدامها عند حل مثلث؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

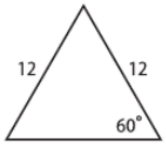
38. SAT/ACT إذا كان c و d عددين صحيحين موجبين و $4c + d = 26$، فما مجموع كل القيم الممكنة لـ c؟

A 6
B 10
C 15
D 21
E 28

39. إذا كان $6^y = 21$، فما قيمة y؟

F $\log 12 - \log 6$
G $\frac{\log 21}{\log 6}$
H $\frac{\log 6}{\log 21}$
J $\log \left(\frac{6}{21}\right)$

40. الهندسة أوجد محيط الشكل.



A 24 B 30 C 36 D 48

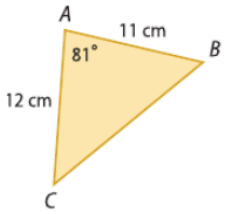
41. الإجابة القصيرة حل المعادلة أدناه لإيجاد قيمة x.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$$

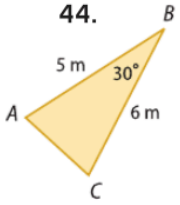
مراجعة شاملة

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 4-10)

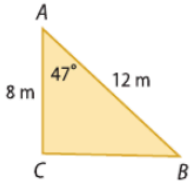
42.



43.



44.



ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 3-10)

45. (8, 5) **46.** (−4, −2) **47.** (6, −9)

48. الأحذية الرياضية أسعار عينة عشوائية من الأحذية الرياضية موضحة أدناه.

السعر (بالدرهم)				
70	300	400	250	250
150	120	250	100	70
150	160	200	170	300

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإنشاء مخطط رسم صندوقي، ثم صِف شكل التوزيع.

b. صِف مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

49. الأعمال خلال شهر يونيو، حققت شركة "الوسائط الدولية" عائدًا قدره AED 2700 من مبيعات مجموعة كاملة معينة من أسطوانات DVD. وخلال موسم تخفيضات شهر يوليو، كانت المجموعة معروضة بتخفيض AED10. وبلغ العائد من بيع هذه المجموعة AED 3750 في يوليو مع بيع 30 مجموعة إضافية عما تم بيعه في يونيو. أوجد سعر مجموعة أسطوانات DVD لشهري يونيو ويوليو.

حدد دون كتابة المعادلة بالصيغة القياسية، إذا ما كان التمثيل البياني لكل معادلة هو *قطع مكافئ* أم *دائرة* أم *قطع ناقص* أم *قطع زائد*.

50. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$ **51.** $3x^2 - 2y^2 + 32y - 134 = 0$ **52.** $y^2 + 18y - 2x = -84$

مراجعة المهارات

ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية المرجع لها.

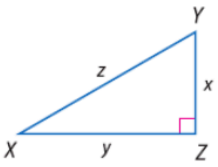
53. 245° **54.** −15° **55.** $\frac{5}{4\pi}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

اختبار منتصف الوحدة

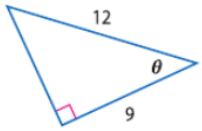
الدروس من 10-1 إلى 10-5

حُـلّ $\triangle XYZ$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياس الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 10-1)



1. $Y = 65°, x = 16$
2. $X = 25°, x = 8$

3. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 10-1)

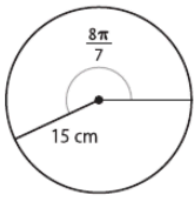


4. ارسم زاوية قياسها $-80°$ في وضع قياسي. (الدرس 10-2)

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة. (الدرس 10-2)

5. $215°$
6. $-350°$
7. $\frac{8\pi}{5}$
8. $\frac{9\pi}{2}$

9. **الاختيار من متعدد** ما طول القوس أدناه مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟ (الدرس 10-2)



A 4.2 cm
B 17.1 cm
C 53.9 cm
D 2638.9 cm

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. (الدرس 10-3)

10. $\tan \pi$
11. $\cos \frac{3\pi}{4}$

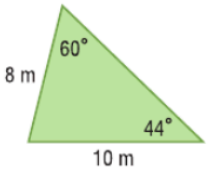
ضلع الانتهاء للزاوية θ الوضع القياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 10-3)

12. $(0, -5)$
13. $(6, 8)$

14. **الاختيار من متعدد** افترض أن θ زاوية في وضع قياسي حيث $\cos \theta > 0$ في أي ربع/ أرباع يقع ضلع الانتهاء لـ θ ؟ (الدرس 10-3)

F الأول
G الثاني
H الثالث
J الأول والرابع

15. **الحديقة** لدى هالة حديقة على شكل مثلث كما هو موضح في الصورة أدناه. وهي تريد تغطية الحديقة بتربة سطحية. فما مساحة المثلث؟ (الدرس 10-4)

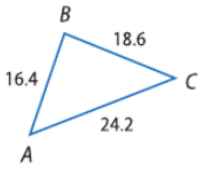


حدد ما إذا كان كل مثلث *بلا حل* أو له حل *واحد* أو *حلان*. ثم أوجد حل المثلث. قرّبأطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 10-4)

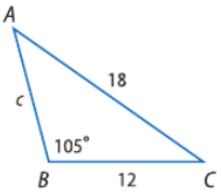
16. $A = 38°, a = 18, c = 25$
17. $A = 65°, a = 5, b = 7$
18. $A = 115°, a = 12, b = 8$

حُـلّ كل مثلث، وقرّبأطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 10-5)

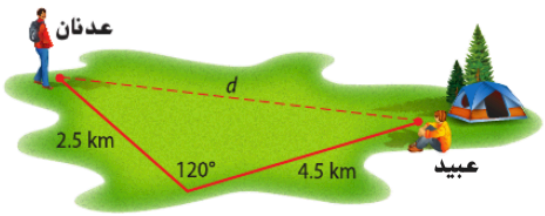
19.



20.



21. يخيم كل من عدنان وعبيد. ترك عدنان عبيد عند موقع التخييم وسار 4.5 km. ثم انعطف بزاوية 120° وسار 2.5 km. إذا سار عدنان مباشرة عائدًا إلى عبيد، فما المسافة التي سيقطعها مشيًا؟ (الدرس 10-5)

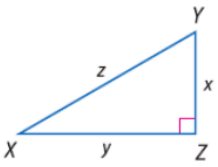


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار منتصف الوحدة

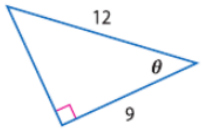
الدروس من 10-1 إلى 10-5

حُـلّ $\triangle XYZ$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياس الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 10-1)



1. $Y = 65°, x = 16$
2. $X = 25°, x = 8$

3. أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 10-1)

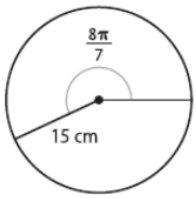


4. ارسم زاوية قياسها $-80°$ في وضع قياسي. (الدرس 10-2)

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة. (الدرس 10-2)

5. $215°$
6. $-350°$
7. $\frac{8\pi}{5}$
8. $\frac{9\pi}{2}$

9. **الاختيار من متعدد** ما طول القوس أدناه مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟ (الدرس 10-2)



A 4.2 cm
B 17.1 cm
C 53.9 cm
D 2638.9 cm

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. (الدرس 10-3)

10. $\tan \pi$
11. $\cos \frac{3\pi}{4}$

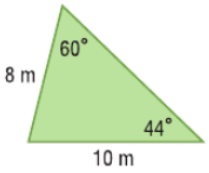
ضلع الانتهاء للزاوية θ الوضع القياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 10-3)

12. $(0, -5)$
13. $(6, 8)$

14. **الاختيار من متعدد** افترض أن θ زاوية في وضع قياسي حيث $\cos \theta > 0$ في أي ربع/ أرباع يقع ضلع الانتهاء لـ θ ؟ (الدرس 10-3)

F الأول
G الثاني
H الثالث
J الأول والرابع

15. **الحديقة** لدى هالة حديقة على شكل مثلث كما هو موضح في الصورة أدناه. وهي تريد تغطية الحديقة بتربة سطحية. فما مساحة المثلث؟ (الدرس 10-4)

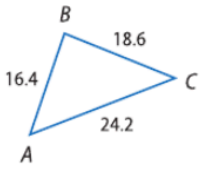


حدد ما إذا كان كل مثلث *بلا حل* أو له حل *واحد* أو *حلان*. ثم أوجد حل المثلث. قرّبأطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 10-4)

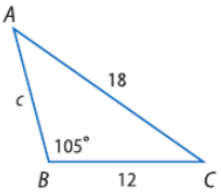
16. $A = 38°, a = 18, c = 25$
17. $A = 65°, a = 5, b = 7$
18. $A = 115°, a = 12, b = 8$

حُـلّ كل مثلث، وقرّبأطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 10-5)

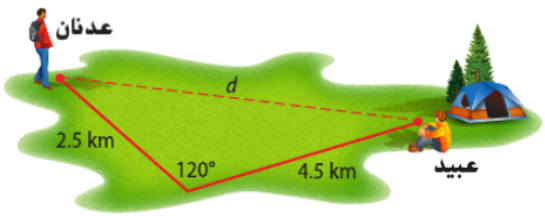
19.



20.



21. يخيم كل من عدنان وعبيد. ترك عدنان عبيد عند موقع التخييم وسار 4.5 km. ثم انعطف بزاوية 120° وسار 2.5 km. إذا سار عدنان مباشرة عائدًا إلى عبيد، فما المسافة التي سيقطعها مشيًا؟ (الدرس 10-5)



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

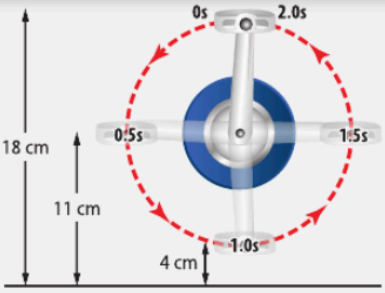
10-6 الدوال الدائرية والدورية

السابق
- قمت بإيجاد قيمة الدوال المثلثية باستخدام زوايا المرجع.

الحالي
1. إيجاد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.
2. استخدام خصائص الدوال الدورية لإيجاد قيمة الدوال المثلثية.

لماذا؟
- تدور دواسات الدراجة أثناء قيادتها. ويكون ارتفاع الدواسة دالة زمن، كما هو موضح بالشكل على اليسار.

لاحظ أن الدواسة تصنع دورة كاملة كل ثانيتين.

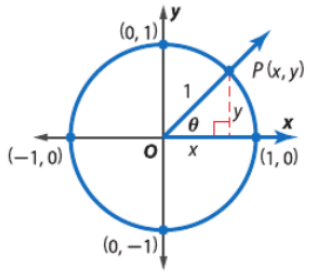


المفردات الجديدة
- دائرة الوحدة unit circle
- دالة دائرية circular function
- دالة دورية periodic function
- دورة cycle
- فترة period

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 الدوال الدائرية

دائرة الوحدة هي دائرة يبلغ نصف قطرها وحدة واحدة ومركزها نقطة الأصل على المستوى الإحداثي. يمكنك استخدام النقطة P على دائرة الوحدة لتعميم دوال الجيب وتمام جيب الزاوية.



$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} \text{ أو } x \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} \text{ أو } y$$

إذًا، قيمة $\sin\theta$ وقيمة $\cos\theta$ هما الإحداثي y والإحداثي x، على التوالي، للنقطة التي يتقاطع فيها ضلع الانتهاء لـ θ مع دائرة الوحدة.

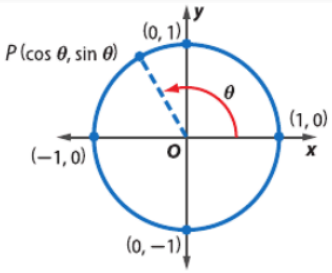
المفهوم الرئيسي الدوال على دائرة وحدة

الشرح إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية θ يتقاطع في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$.

الرموز $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال إذا كانت $\theta = 120°$، فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$.

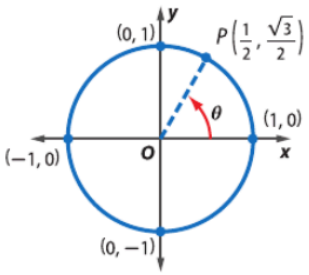
نموذج



كل من $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$ دالة لـ θ. ولأنه تم تحديدهما باستخدام دائرة وحدة، فإنه يُطلق عليهما **دوال دائرية**.

مثال 1 إيجاد جيب الزاوية وجيب التمام بدلالة نقطة على دائرة الوحدة

يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.



$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرين موجّه

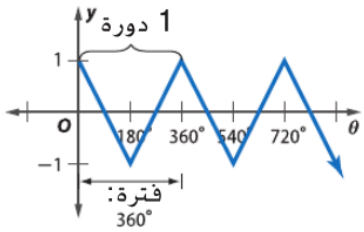
1. يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الدوال الدورية

تحتوي **الدالة الدورية** على قيم y تكرر على فترات منتظمة. ويُسمى النمط الواحد المكتمل **دورة**، ويُسمى الطول الأفقي للدورة الواحدة **فترة**.

θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1



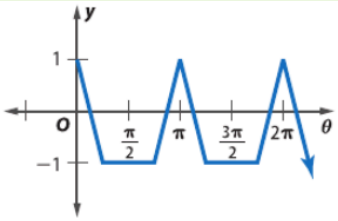
تتكرر الدورة كل 360°.

نصيحة دراسية

الدورات يمكن أن تبدأ الدورة من أي نقطة على التمثيل البياني للدالة الدورية. ففي المثال 2، إذا كانت بداية الدورة عند $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط يتكرر عند $\frac{3\pi}{2}$. الفترة هي π أو $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$.

مثال 2 تحديد الفترة

حدد فترة الدالة.



يتكرر النمط عند 2π، π، وهكذا.
إذًا، الفترة هي π.

تمرين موجّه

2. ارسم تمثيلاً بيانيًا لدالة لها فترة من 4.

يعد دوران العجلات والدواسات ودوامات الخيل بمدن الملاهي والأجسام في الفضاء دورانًا دوريًا.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام الدوال المثلثية

قيادة الدراجات **راجع بداية الدرس. يختلف ارتفاع دواسة الدراجة دوريًا كدالة زمن، مثلما هو موضح في الشكل.**

الزمن (s)	الطول (cm)
0	18
0.5	11
1.0	4
1.5	11
2.0	18
2.5	11
3.0	4

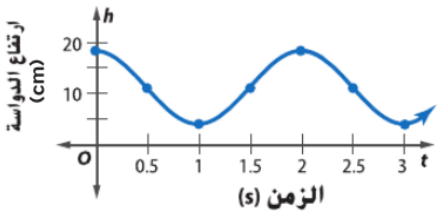
a. ارسم جدولاً يبين ارتفاع دواسة الدراجة بعد 0، 0.5، 1.0، 1.5، 2.0، 2.5، 3.0 ثوانٍ.

بعد 0 ثانية، يكون ارتفاع الدواسة 18 سنتيمترًا. وبعد 0.5 ثانية، يكون ارتفاع الدواسة 11 سنتيمترًا. وبعد 1.0 ثانية، يكون الارتفاع 4 سنتيمترات وهكذا.

b. حدد فترة الدالة.

الفترة هي الوقت المستغرق لعمل لفّة واحدة كاملة. إذًا، الفترة هي ثانيتان.

c. مثّل الدالة بيانيًا. وافترض أن المحور الأفقي يمثل الوقت t والمحور الرأسي يمثل ارتفاع h الدواسة عن الأرض بالسنتيمترات.



أقصى ارتفاع للدواسة هو 18 سنتيمترًا. وأدنى ارتفاع هو 4 سنتيمترات. ولأن فترة الدالة ثانيتان، يتكرر نمط التمثيل البياني على فترات من ثانيتين.

تمرين موجّه

3. قيادة الدراجات يقود سائق آخر الدراجة ذاتها بمعدل لفّة واحدة كل ثانية.

A. ارسم جدولاً يبين ارتفاع دواسة الدراجة بعد 0، 0.5، 1.0، 1.5، 2.0، 2.5، 3.0 ثوانٍ.

B. حدد الفترة ومثل الدالة بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

يقود معظم سائقي الدراجات المتنافسين دراجاتهم بمعدلات أكبر من 200 لفّة في الدقيقة. ويقود معظم الأشخاص الآخرين دراجاتهم بمعدل يتراوح بين 90 و 120 لفّة في الدقيقة.

المصدر: SpringerLink

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

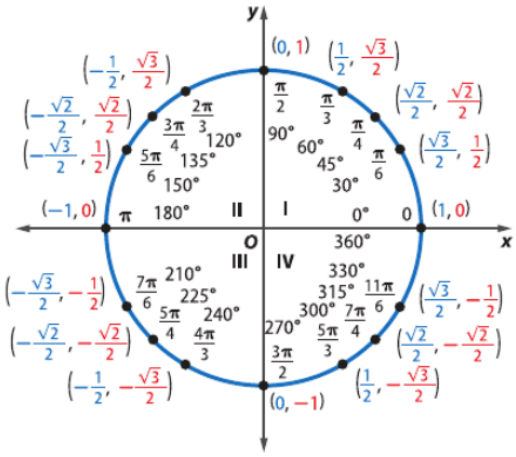
نصيحة دراسية

جيب الزاوية وجيب تمام

الزاوية لمساعدتك على تذكر أنه بالنسبة إلى نقطة (x, y) على دائرة وحدة، فإن $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$.

لاحظ أن الحرف x يسبق الحرف y أبجديًا وكذلك جيب *تمام الزاوية* يسبق جيب *الزاوية*.

موضح على دائرة الوحدة المبينة على اليسار القيم الدقيقة لكل من $\cos\theta$ و $\sin\theta$ للزوايا الخاصة. وقيم جيب التمام هي الإحداثي x للنقاط الواقعة على دائرة الوحدة، أما قيم جيب الزاوية فهي الإحداثي y.



يمكنك استخدام هذه المعلومات لمثيل دوال جيب الزاوية وجيب التمام بيانيًا. وذلك بفرض أن المحور الأفقي يمثل قيم θ والمحور الرأسي يمثل قيم $\sin\theta$ أو $\cos\theta$.

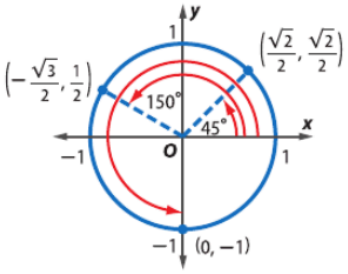
تتكرر دورة دوال جيب الزاوية وجيب التمام كل 360°. ولذا، فهي دوال دورية. وفترة كل دالة هي 360° أو 2π.

تأمل النقاط الواردة على دائرة الوحدة عندما تكون $\theta = 45°$، و $\theta = 150°$، و $\theta = 270°$.

$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

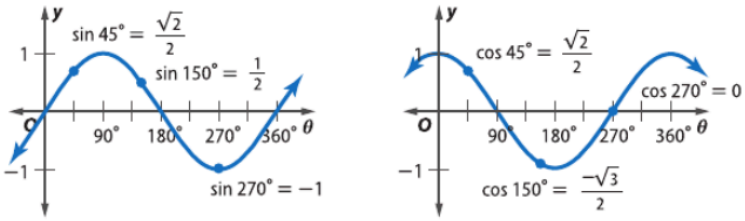
$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$



نصيحة دراسية

الراديان يمكن تمثيل دوال جيب الزاوية وجيب التمام بيانيًا باستخدام الراديان باعتبارها الوحدات المستخدمة على المحور θ.

يمكن توضيح هذه النقاط أيضًا على تمثيلات بيانية لدوال جيب الزاوية وجيب التمام.



حيث إن فترة دوال جيب الزاوية وجيب التمام هي 360°. فإن القيم تتكرر كل 360°.
إذًا $\sin(x + 360°) = \sin x$ و $\cos(x + 360°) = \cos x$.

مثال 4 إيجاد قيم التعابير المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\cos 480°$

$$\cos 480° = \cos(120° + 360°)$$
$$= \cos 120°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

b. $\sin\frac{11\pi}{4}$

$$\sin\frac{11\pi}{4} = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرين موجّه

4A. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

4B. $\sin 420°$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

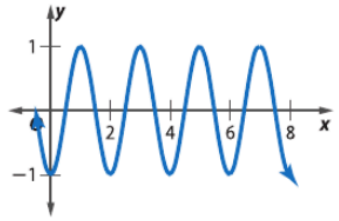
مثال 1 **البنية** يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند كل نقطة P. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

1. $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

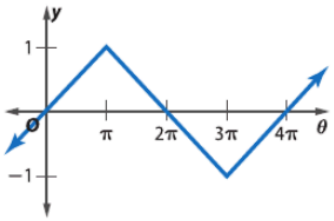
2. $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 حدد الفترة لكل دالة فيما يلي.

3.



4.



مثال 3

5. **الأرجوحات** يتغير ارتفاع الأرجوحة دوريًا كدالة الزمن. فالأرجوحة تتحرك للأمام وتصل إلى نقطة بارتفاع 6 m. ثم تعود للوراء وتصل إلى ارتفاع 6 m مرة أخرى. وتبلغ أدنى نقطة لها 2 m. والزمن المستغرق للتأرجح من أعلى نقطة إلى أدنى نقطة هو ثانية واحدة.

   a. ما المدة التي تستغرقها الأرجوحة في الحركة إلى الأمام والخلف مرة واحدة؟

   b. مثّل ارتفاع الأرجوحة h بيانيًا كدالة زمن t.

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

6. $\sin\frac{13\pi}{6}$

7. $\sin(-60^\circ)$

8. $\cos 540^\circ$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند كل نقطة P. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

9. $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

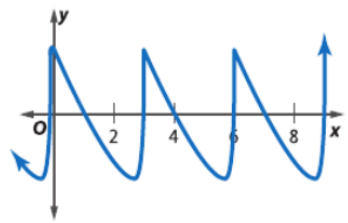
10. $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

11. $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

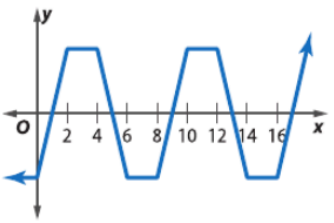
12. $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 حدد الفترة لكل دالة فيما يلي.

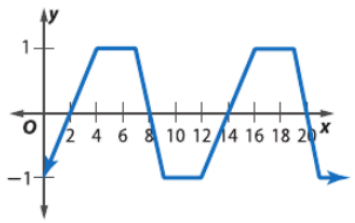
13.



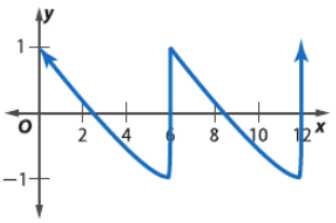
14.



15.



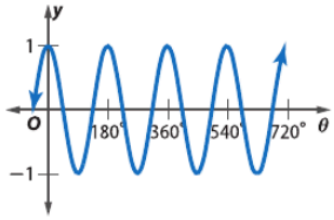
16.



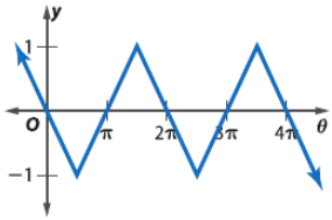
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حدد الفترة لكل دالة فيما يلي.

17.



18.



مثال 3

19. **الطقس** موضح بالجدول متوسط درجة الحرارة العظمى في كل شهر لإحدى المدن.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة يمثل هذه الحالة.

b. صف فترة الدالة.

متوسط درجة الحرارة العظمى			
الشهر	درجة الحرارة (°C)	الشهر	درجة الحرارة (°C)
يناير	2	يوليو	29
فبراير	5	أغسطس	28
مارس	11	سبتمبر	26
أبريل	18	أكتوبر	19
مايو	23	نوفمبر	11
يونيو	28	ديسمبر	5

المصدر: قناة الطقس

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

20. $\sin \frac{7\pi}{3}$

21. $\cos(-60^\circ)$

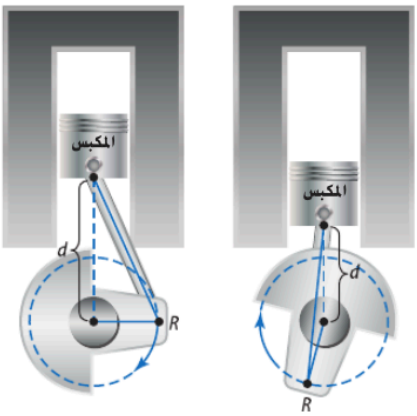
22. $\cos 450^\circ$

23. $\sin \frac{11\pi}{4}$

24. $\sin(-45^\circ)$

25. $\cos 570^\circ$

26. التبرير المنطقي في صورة المحرك الموضحة على اليسار، تُسمى المسافة d الواقعة بين المكبس ومركز الدائرة *العمود المرفقي*، وهي عبارة عن دالة السرعة لعصا المكبس. وتدور النقطة R الواقعة على عصا المكبس 150 لفة في الثانية.



a. حدد فترة الدالة على هيئة جزء من الثانية.

b. إذا كانت أقصى مسافة d هي 0.5 cm، وأطول مسافة هي 3.5 cm. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة مع فرض أن الم حور الأفقي يمثل الزمن t، والمحور الرأسي يمثل المسافة d.

27. الأعاصير تصنع صافرة إنذار الأعاصير 2.5 لفّة في الدقيقة ويصل نصف قطر شعاع الصوت 1 km. يقع منزل السيدة هدى على بُعد 1 km من الصافرة. ويختلف بُعد الشعاع الصوتي عن منزلها دوريًا على هيئة دالة زمن.

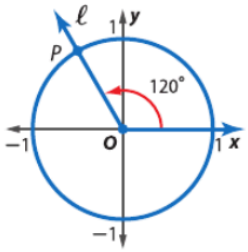
a. حدد فترة الدالة بالثواني.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة مع فرض أن المحور الأفقي يمثل الزمن t من 0 s حتى 60 s، وفرض أن المحور الرأسي يمثل المسافة d بين الشعاع الصوتي ومنزل السيدة هدى في زمن t.

28. عجلة فيريس يصل قطر عجلة فيريس في الصين إلى 155 m تقريبًا. وبعد ارتفاع المقصورة h دالة للزمن t. ويستغرق عمل لفّة واحدة كاملة حوالي 30 s. افترض أن الارتفاع عند مركز العجلة يمثل الارتفاع عند الزمن 0. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29. التمثيلات المتعددة يتقاطع ضلع الانتهاء لزاوية ما في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة P، كما هو موضح في الشكل.



a. هندسيًا انسخ الشكل. وارسم مستقيمات تمثل الزوايا 30°, 60°, 150°, 210°, 315°.

b. جدوليًا استخدم جدول قيم لتوضيح ميل كل مستقيم مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

c. تحليليًا ما الاستنتاجات التي يمكنك الخلوص إليها عن العلاقة بين ضلع الانتهاء للزاوية والميل؟ اشرح استنتاجك.

30. عكازالبهلوان يقفز شخص لأعلى وأسفل على عكاز بهلوان بمعدل ثابت، والفرق بين أعلى وأدنى نقطتين له هي 60 سنتيمترًا. يقفز هذا الشخص 50 مرة في الدقيقة.

a. صف المتغير المستقل والمتغير التابع للدالة الدورية التي تمثل هذه الحالة. ثم اذكر فترة الدالة بالثواني.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يعبر عن تغير ارتفاع الشخص الواثب بالنسبة إلى نقطة البداية لديه. افترض أن نقطة البداية في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة له. وافترض أيضًا أن المحور الأفقي يمثل الزمن t بالثواني وأن المحور الرأسي يمثل الارتفاع h.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

31. $\cos 45^\circ - \cos 30^\circ$

32. $6(\sin 30^\circ)(\sin 60^\circ)$

33. $2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$

34. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$

35. $(\sin 45^\circ)^2 + (\cos 45^\circ)^2$

36. $\frac{(\cos 30^\circ)(\cos 150^\circ)}{\sin 315^\circ}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدامهارات التفكير العليا

37. التفكير النقدي تعمل هداية ونجلاء على إيجاد القيمة الدقيقة للتعبير $\cos \frac{-\pi}{3}$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

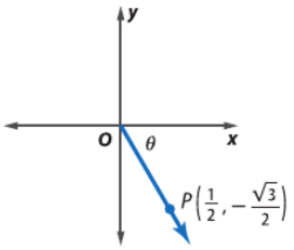
هداية

$$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$
$$= -0.5$$

نجلاء

$$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$
$$= \cos \frac{5\pi}{3}$$
$$= 0.5$$

38. تحدٍ شعاع له نقطة طرفية عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، وتقع النقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على الشعاع. أوجد الزاوية θ التي كوّنها المحور x مع الشعاع.



39. التبرير هل تكون فترة منحنى جيب الزاوية من مضاعفات π *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم لا تكون *أبدًا*؟ برر استنتاجك.

40. مسألة غير محددة الإجابة ارسم التمثيل البياني لدالة دورية قيمتها العظمى 10 وقيمتها الصغرى -10. صف فترة الدالة.

41. الكتابة في الرياضيات اشرح طريقة تحديد فترة دالة دورية من تمثيلها البياني مع تضمين وصف للدورة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

42. الإجابة المختصرة صف إزاحة التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ إلى التمثيل البياني للدالة.

43. يتم تمثيل التناقص في المعدل السكاني لمدينة هامبتون كوف بما يلي $P(t) = 24{,}000e^{-0.0064t}$، حيث t هو الزمن بالأعوام و 24,000 هو عدد السكان الحالي. بعد كم عام سيكون تعداد السكان 10,000؟

A 14 B 104 C 137 D 375

44. SAT/ACT إذا كان $d^2 + 8 = 21$، فإن $d^2 - 8 =$

F 0 H 13 K 161

G 5 J 31

45. إحصائيات إذا كان متوسط ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة هو 65، فما أكبر قيمة محتملة لواحد من هذه الأعداد الصحيحة؟

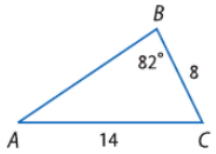
A 192 B 193 C 194 D 195

46. الإجابة الشبكية إذا كان $8xy + 3 = 3$، فما قيمة xy؟

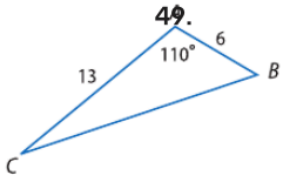
مراجعة شاملة

حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-10)

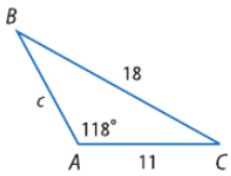
47.



48.



49.



حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أو له حل *واحد*، أو *حلّان*. حُـلّ المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 4-10)

50. $A = 72°, a = 6, b = 11$ **51.** $A = 46°, a = 10, b = 8$ **52.** $A = 110°, a = 9, b = 5$

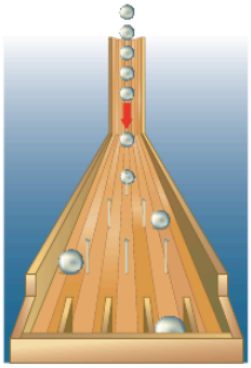
تصل نسبة نجاح التوزيع ذي حدين إلى 70%. وهناك 10 محاولات.

53. ما احتمال فشل 3 محاولات؟

54. ما احتمال نجاح 7 محاولات على الأقل؟

55. ما العدد المتوقع للمحاولات الناجحة؟

56. الألعاب يوضح الرسم التخطيطي لوحة إحدى الألعاب التي يتم فيها إسقاط كرات من ممر مائل. وحسب نمط من المسامير والحواجز، تتجه الكرات في مسارات مختلفة إلى الأقسام السفلية. بالنسبة إلى كل قسم، كم عدد المسارات الموجودة باللوحة التي تؤدي إلى ذلك القسم؟



57. الرواتب يصل الراتب الحالي لفهد AED 40,000 في العام. ودائمًا ما تكون الزيادة السنوية في راتبه نسبة من الراتب في ذلك الوقت. فماذا سيكون راتبه إلى حصل على أربع زيادات متتالية نسبتها 4%؟

حُـلّ كل نظام من المعادلات.

58. $y = x + 2$, $y = x^2$

59. $4x + y^2 = 20$, $4x^2 + y^2 = 100$

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

60. $\frac{240}{\left|1 - \frac{5}{4}\right|}$ **61.** $\frac{180}{\left|2 - \frac{1}{3}\right|}$ **62.** $\frac{90}{\left|2 - \frac{11}{4}\right|}$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

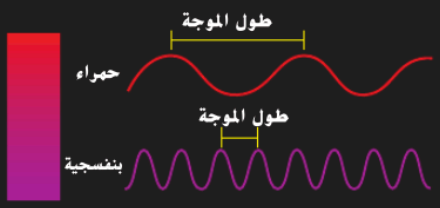
الدرس 10-7

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا

السابق
- لقد استكشفت الدوال الدورية.

الحالي
1. وصف دوال جيب الزاوية وجيب التمام وظل الزاوية وتمثيلها بيانيًا.
2. وصف الدوال المثلثية الأخرى وتمثيلها بيانيًا.

لماذا؟
- موجات الضوء المرئي لها أطوال موجية أو فترات مختلفة. فالأحمر له أطول طول موجي والبنفسجي له أقصر طول موجي.



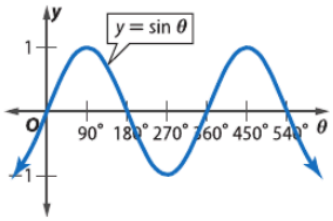
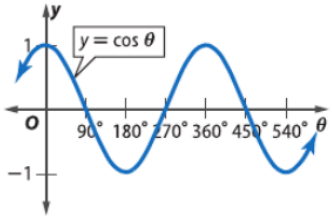
المفردات الجديدة
- السعة amplitude
- التردد frequency

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 دوال الـ sin والـ cosine والـ tan

من الممكن أيضًا تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا على المستوى الإحداثي. تذكر أن التمثيلات البيانية للدوال الدورية لها أنماط متكررة، أو *دورات*. يُسمى الطول الأفقي لكل دورة *الفترة*. وتساوي **السعة** في التمثيل البياني لدالة جيب الزاوية أو جيب التمام نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

المفهوم الأساسي دوال جيب الزاوية وجيب التمام

الدالة الأصلية	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	{جميع الأعداد الحقيقية}	{جميع الأعداد الحقيقية}
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
الفترة	360°	360°

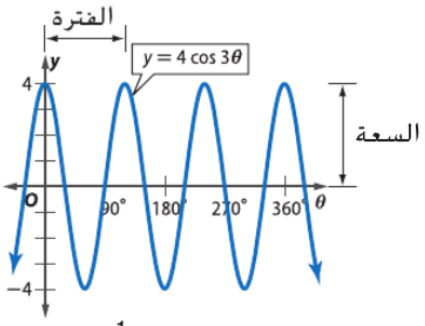
ومثلما هو الحال مع الدوال الأخرى، فإن الدوال المثلثية قابلة للتحويل. بالنسبة للتمثيلات البيانية لكل من $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$، فإن السعة $= |a|$ والفترة $= \frac{360°}{|b|}$.

مثال 1 إيجاد السعة والفترة

أوجد السعة والفترة للتعبير $y = 4 \cos 3\theta$.

السعة: $|a| = |4|$ أو 4

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|3|}$ أو 120°



تمرين موجّه

أوجد سعة كل دالة وفترتها.

1A. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

1B. $y = 3 \sin 5\theta$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

الفترات في $y = a \sin b\theta$ و a ، $y = b$ ، $\cos b\theta$ تمثل عدد الدورات في $360°$. في المثال 1، يشير العدد 3 في $y = 4 \cos 3\theta$ إلى وجود ثلاث دورات في $360°$. وبالتالي، يوجد دورة واحدة في $120°$.

استخدم التمثيلات البيانية للدوال الأصلية لتمثيل $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ بيانيًا. ثم استخدم السعة والفترة لرسم المنحنيات الصحيحة لجيب الزاوية وجيب التمام. يمكنك أيضًا استخدام نقاط تقاطع θ لمساعدتك على تمثيل الدوال بيانيًا.

نقاط تقاطع θ في $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ في دورة واحدة هي كالآتي.

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$

مثال 2 التمثيل البياني لدوال جيب الزاوية وجيب التمام

مثِّل كل دالة بيانيًا.

نصيحة دراسية

السعة التمثيلات البيانية لكل من $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ والتي سعتها $|a|$ لها قيمة عظمى عند $y = a$ وقيمة صغرى عند $y = -a$.

a. $y = 2 \sin \theta$

أوجد السعة والفترة ونقاط التقاطع مع x: $a = 2$ و $b = 1$.

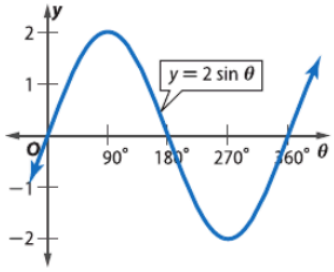
السعة: $|a| = |2|$ أو 2 ← التمثيل البياني يمدد رأسيًا. ولذا القيمة العظمى هي 2 والقيمة الصغرى هي -2.

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|1|}$ أو $360°$ ← الدورة الواحدة لها طول $360°$.

نقاط التقاطع مع x هي: $(0, 0)$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (180°, 0)$$

$$\left(\frac{360°}{b}, 0\right) = (360°, 0)$$



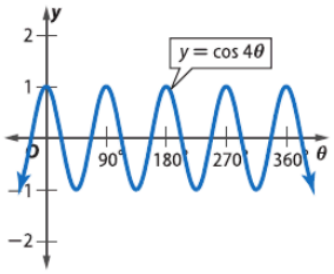
b. $y = \cos 4\theta$

السعة $|a| = |1|$؛ أو 1

الفترة $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|}$؛ أو $90°$

نقاط التقاطع مع x هي $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (22.5°, 0)$

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (67.5°, 0)$$



تمرين موجّه

2A. $y = 3 \cos \theta$

2B. $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوال المثلثية في تمثيل الحركة الدورية **بالحياة اليومية** . مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو الموجات الصوتية. وغالبًا ما توصف هذه الموجات باستخدام *التردد* . و**التردد** هو عدد الدورات في وحدة زمنية محددة.

وتردد التمثيل البياني للدالة هو المعكوس الضربي لفترة هذه الدالة.

وبالتالي، إذا كانت فترة الدالة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن التردد 100 دورة في الثانية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 من الحياة اليومية تمثيل الحالات الدورية بالنماذج

الصوت يُعرف الصوت الذي يقل تردده عن نطاق أذن الإنسان باسم *الصوت دون السمعي*. تستطيع الأفيال سماع أصوات في النطاق دون السمعي بترددات منخفضة تصل إلى 5 هرتز (Hz)، أو 5 دورات في الثانية.

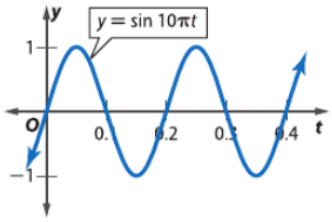
a. أوجد فترة الدالة التي تمثل الموجات الصوتية.

توجد 5 دورات في الثانية، والفترة هي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة.

إذًا، الفترة هي $\frac{1}{5}$ أو 0.2 ثانية.

b. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة جيب الزاوية لتمثيل الموجات الصوتية y على هيئة دالة للزمن t. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

$\text{الفترة} = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	و بكتابة العلاقة بين الفترة b.
$0.2 = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	بالتعويض
$0.2\lvert b \rvert = 2\pi$	بضرب كل جانب في $\lvert b \rvert$.
$b = 10\pi$	بضرب كل طرف في 5؛ تكون b موجبة
$y = a \sin b\theta$	بكتابة المعادلة العامة لدالة جيب الزاوية.
$y = 1 \sin 10\pi t$	$\theta = t$ و $b = 10\pi$ و $a = 1$
$y = \sin 10\pi t$	بسّط.



الربط بالحياة اليومية

تستطيع الأفيال سماع الصوت القادم من مسافة تبعد 8 كيلو مترات. ويستطيع الإنسان سماع أصوات ينحصر ترددها بين 20 Hz و 20,000 Hz.

المصدر: مدرسة الأبطال

تمرين موجّه

3. الصوت تستطيع الإنسان سماع أصوات بترددات منخفضة تصل إلى 20 هرتز.

A. أوجد فترة الدالة.

B. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة جيب التمام لتمثيل الموجات الصوتية. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

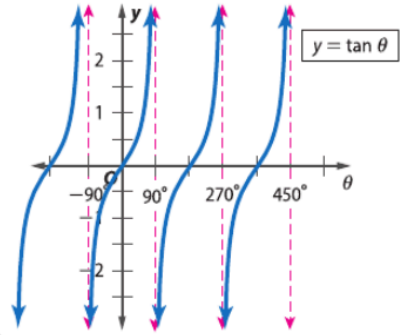
نصيحة دراسية

السعة والفترة لاحظ أن السعة تؤثر على المحور الرأسي بالتمثيل البياني، والفترة تؤثر على المحور الأفقي.

دالة ظل الزاوية هي دالة مثلثية يحتوي تمثيلها البياني على خطوط تقارب.

المفهوم الأساسي دوال ظل الزاوية

الدالة الأصلية	$y = \tan \theta$	التمثيل البياني
المجال	$\{\theta \lvert \theta \neq 90 + 180n,$ n عدد صحيح$\}$	
المدى	{جميع الأعداد الحقيقية}	
السعة	غير معرّفة	
الفترة	180°	
نقاط تقاطع θ في دورة واحدة	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$	

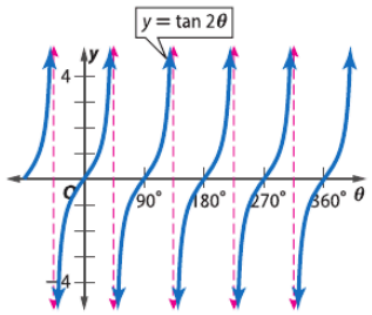


بالنسبة إلى التمثيل البياني لـ $y = a \tan b\theta$، الفترة $= \frac{180°}{\lvert b \rvert}$ ولا توجد سعة وخطوط التقارب هي مضاعفات فردية لـ $\frac{180°}{2\lvert b \rvert}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 تمثيل دوال ظل الزاوية بيانيًا

أوجد فترة $y = \tan 2\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.



الفترة: $\frac{180^\circ}{|b|} = \frac{180^\circ}{|2|}$ أو 90°

خطوط التقارب: $\frac{180^\circ}{2|b|} = \frac{180^\circ}{2|2|}$ أو 45°

ارسم خطوط التقارب عند $45^\circ \cdot 1-$ أو -45°، $45^\circ \cdot 1$ أو 45°، $45^\circ \cdot 3$ أو 135°، وهكذا.

استخدم $y = \tan \theta$. ولكن ارسم دورة واحدة كل 90°.

تمرين موجّه

4. أوجد فترة $y = \frac{1}{2}\tan \theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

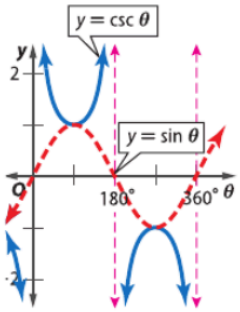
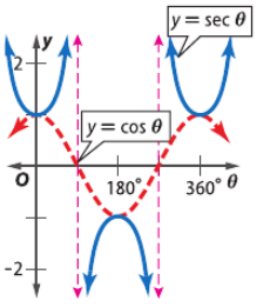
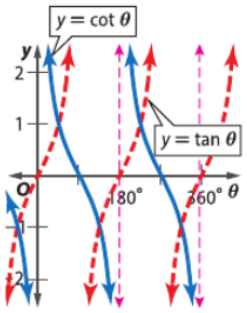
نصيحة دراسية

ظل الزاوية ليس لدالة ظل الزاوية سعة لأن ليس لها قيم عظمى أو صغرى.

2 التمثيلات البيانية للدوال المثلثية الأخرى

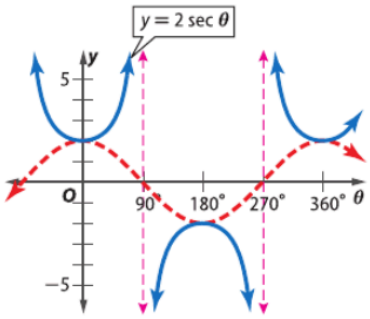
ترتبط التمثيلات البيانية لدوال قاطع التمام والقاطع وظل التمام بالتمثيلات البيانية لدوال جيب الزاوية وجيب التمام وظل الزاوية.

المفهوم الأساسي دوال الـ cosecant و الـ secant و الـ cotangent

الدالة الأصلية	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,$ n عدد صحيح $\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n,$ n عدد صحيح $\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,$ n عدد صحيح $\}$
المدى	$\{y > 1$ أو $y < -1 \mid y\}$	$\{y > 1$ أو $y < -1 \mid y\}$	{جميع الأعداد الحقيقية}
السعة	غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة
الفترة	360°	360°	180°

مثال 5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

أوجد فترة $y = 2 \sec \theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.



حيث إن $2 \sec \theta$ معكوس ضربي لـ $2 \cos \theta$. فالتمثيلات البيانية لها الفترة نفسها: 360° وتحدث خطوط التقارب الرأسية عند النقاط التي يكون فيها $2 \cos \theta = 0$. إذًا، توجد خطوط التقارب عندما تكون $\theta = 90^\circ$ و $\theta = 270^\circ$.

ارسم التعبير $y = 2 \cos \theta$ واستخدمه لتمثيل $y = 2 \sec \theta$ بيانيًا.

تمرين موجّه

5. أوجد فترة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

نصيحة دراسية

الدوال العكسية

يمكنك استخدام التمثيلات البيانية لـ $y = \sin \theta$، و $y = \cos \theta$، و $y = \tan \theta$ لتمثيل الدوال العكسية بيانيًا. إلا أن هذه التمثيلات البيانية لا تكون جزءًا من التمثيلات البيانية لدوال قاطع التمام والقاطع وظل التمام.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

1. $y = 4 \sin \theta$
2. $y = \sin 3\theta$
3. $y = \cos 2\theta$
4. $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3

5. **العناكب** عندما تعلق حشرة في شبكة العنكبوت، تهتز الشبكة بتردد 14 هرتز.
   a. أوجد فترة الدالة.
   b. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة جيب الزاوية لتمثيل اهتزاز الشبكة y كدالة للزمن t. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

المثالان 4–5 **أوجد فترة كل دالة ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

6. $y = 3 \tan \theta$
7. $y = 2 \csc \theta$
8. $y = \cot 2\theta$

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

9. $y = 2 \cos \theta$
10. $y = 3 \sin \theta$
11. $y = \sin 2\theta$
12. $y = \cos 3\theta$
13. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$
14. $y = \sin 4\theta$
15. $y = \frac{3}{4} \cos \theta$
16. $y = \frac{3}{2} \sin \theta$
17. $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$
18. $y = 4 \cos 2\theta$
19. $y = 3 \cos 2\theta$
20. $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$

مثال 3

21. **التبريد** يهتز قارب على سطح البحيرة لأعلى وأسفل مع الأمواج. الفارق بين أعلى وأدنى نقطة للقارب 8 cm. ويكون القارب في *حالة التوازن* عندما يكون في المنتصف بين أعلى وأدنى نقطة. وتستمر كل دورة للحركة الدورية لمدة 3 s.
   a. اكتب معادلة لحركة القارب. وافترض أن h تمثل الارتفاع بالسنتيمترات وأن t تمثل الزمن بالثواني. افترض أن القارب في حالة التوازن عندما يكون $t = 0$ s.
   b. ارسم تمثيلاً بيانيًا لارتفاع القارب كدالة زمن.

22. **الكهرباء** الجهد الذي يوفره مأخذ تيار كهربي عبارة عن دالة دورية متذبذبة، أو تعلو وتنخفض بين 165− فولت و 165 فولت بتردد 50 دورة في الثانية.
   a. اكتب معادلة للجهد V كدالة للزمن t. وافترض أنه عندما يكون $t = 0$ s، يكون جهد التيار 165 فولت.
   b. مثّل الدالة بيانيًا.

المثالان 4–5 **أوجد فترة كل دالة ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

23. $y = \tan \frac{1}{2}\theta$
24. $y = 3 \sec \theta$
25. $y = 2 \cot \theta$
26. $y = \csc \frac{1}{2}\theta$
27. $y = 2 \tan \theta$
28. $y = \sec \frac{1}{3}\theta$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29. **الزلازل** رصدت محطة زلازل موجة زلزالية ترددها 0.5 هرتز وسعتها متر واحد.

a. اكتب معادلة تتضمن جيب الزاوية لتمثيل ارتفاع الموجة h كدالة للزمن t. افترض أن نقطة توازن الموجة، أي $h = 0$ ، في المنتصف بين أعلى وأدنى نقطة.

b. مثّل الدالة بيانيًا ثم حدد ارتفاع الموجة بعد 20.5 s.

30. **المثابرة** جسم متصل بنابض كما هو موضح على اليسار. يتذبذب الجسم وفق المعادلة $y = 20 \cos \pi t$، حيث y هي المسافة من وضع التوازن بالسنتيمترات في زمن t.

a. صف حركة الجسم بإيجاد الأتي: السعة بالسنتيمترات، والتردد بعدد الاهتزازات في الثانية، والفترة بالثواني.

b. أوجد بُعد الجسم عن موضع توازنه عندما يكون $t = \frac{1}{4}$ ثانية.

c. المعادلة $v = (-20 \text{ cm})(\pi \text{ rad/s}) \cdot \sin(\pi \text{ rad/s} \cdot t)$ تمثل السرعة المتجهة v لجسم في زمن t . أوجد السرعة المتجهة عندما يكون $t = \frac{1}{4}$ s .

31. **البيانو** تهتز أوتار البيانو بتردد 130 هرتز.

a. اكتب التمثيل البياني للمعادلة باستخدام جيب التمام لتمثيل اهتزاز الوتر y دالة للزمن t. وافترض أن السعة تساوي وحدة واحدة.

b. افترض أن تردد الاهتزاز يتضاعف. هل تتزايد السعة والفترة، أم تتناقص أم تبقى كما هي؟ اشرح.

أوجد السعة، إن وجدت، والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

32. $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta$

33. $y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4}\theta$

34. $y = 2 \tan \frac{1}{2}\theta$

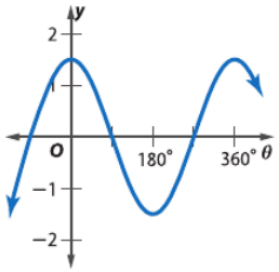
35. $y = 2 \sec \frac{4}{5}\theta$

36. $y = 5 \csc 3\theta$

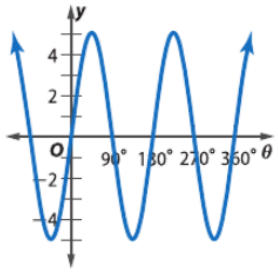
37. $y = 2 \cot 6\theta$

حدد فترة التمثيل البياني واكتب معادلة كل دالة.

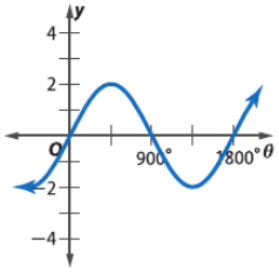
38.



39.



40.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

41. **تحدٍ** صف مجال ومدى $y = a \cos \theta$ و $y = a \sec \theta$، حيث a هي أي عدد حقيقي موجب.

42. **التبرير** وضح أوجه الشبه والاختلاف بين التمثيلين البيانيين $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ و $y = \sin \frac{1}{2} \theta$.

43. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة مثلثية سعتها 3 وفترتها 180°. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

44. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك استخدام خواص الدالة المثلثية لرسم تمثيلها البياني؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

45. الإجابة المختصرة أوجد الحد رقم 100,001 من المتتالية.

13, 20, 27, 34, 41, ...

46. الإحصاء أحرزت خمسة أشواط في البولينغ بالنقاط الآتية: 143, 171, 167, 133, 156. فما متوسط نقاطك؟

A 147 B 153 C 154 D 156

47. بلغ التعداد السكاني في مدينتك 312,430 منذ عشرة أعوام. فإذا كان التعداد الحالي هو 418,270. فما نسبة النمو على مدار 10 أعوام ماضية؟

F 25% G 34% H 66% J 75%

48. SAT/ACT إذا كان $h + 4 = b - 3$، فإن $(h - 2)^2 =$

A $h^2 + 4$ D $b^2 - 14b + 49$

B $b^2 - 6b + 3$ E $b^2 - 10b + 25$

C $b^2 - 18b + 81$

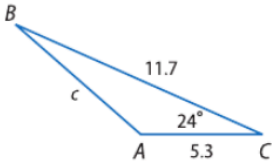
مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 6-10)

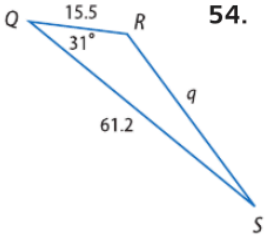
49. $\cos 120^\circ - \sin 30^\circ$ **50.** $3(\sin 45^\circ)(\sin 60^\circ)$ **51.** $4 \sin \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6}$

حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-10)

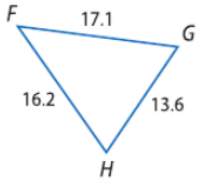
52.



53.



54.



تصل نسبة نجاح التوزيع ذي حدين إلى 40%. وهناك 12 محاولة.

55. ما احتمال فشل 5 محاولات بالضبط؟

56. ما احتمال نجاح 8 محاولات على الأقل؟

57. ما العدد المتوقع للمحاولات الناجحة؟

58. خدمات مصرفية أودعت نورا 1000 AED في حساب مصرفي. وبنهاية كل عام يصدر المصرف مرابحة إلى حسابها بمقدار 3% من الرصيد، ثم يخصم رسومًا سنوية قيمتها 10 AED.

a. افترض أن $b0$ هو المبلغ الذي أودعته نورا. اكتب معادلة تكرارية للرصيد b_n الذي في سيكون في حسابها بنهاية عدد n من الأعوام.

b. أوجد الرصيد الذي سيوجد في الحساب بعد أربعة أعوام.

اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.

59. يقع المركز عند (3, 6)، وتقع البؤرة عند (3, 2)، ويقع الرأس المرافق عند (1, 6)

60. يقع البعدان البؤريان عند (1, 2) و(13, 2)، ويقع الرأس المرافق عند (7, 5)

مراجعة المهارات

مـثّـل كل دالة بيانيًا.

61. $y = 2(x - 3)^2 - 4$ **62.** $y = \frac{1}{3}(x + 5)^2 + 2$ **63.** $y = -3(x + 6)^2 + 7$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
التمثيلات البيانية المثلثية

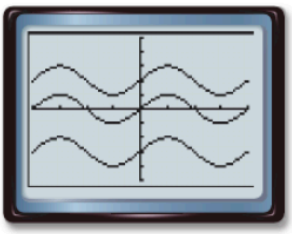
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus لاستكشاف تحويلات التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 k in $y = \sin\theta + k$

مثّل بيانيًا $y = \sin\theta$، و $y = \sin\theta + 2$، و $y = \sin\theta - 3$ على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

اضبط نافذة العرض لتطابق النافذة الموضحة على اليسار. وافترض أن $Y1 = \sin\theta$، و $Y2 = \sin\theta + 2$، و $Y3 = \sin\theta - 3$.


[−360, 360] scl: 90 by [−5, 5] scl: 1

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= SIN X,T,θ,n) ENTER

SIN X,T,θ,n) + 2 ENTER

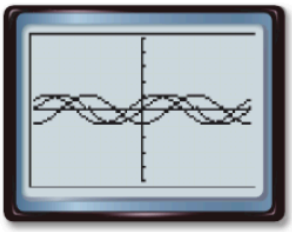
SIN X,T,θ,n) − 3 GRAPH

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه ولكن بمواضع رأسية مختلفة.

النشاط 2 h in $y = \sin(\theta - h)$

مثّل بيانيًا $y = \sin(\theta + 45°)$، و $y = \sin\theta$، و $y = \sin(\theta - 90°)$ على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

افترض أن $Y1 = \sin\theta$، و $Y2 = \sin(\theta + 45)$، و $Y3 = \sin(\theta - 90)$.
تأكد من مسح الإدخالات التي وضعتها من النشاط 1.


[−360, 360] scl: 90 by [−5, 5] scl: 1

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= SIN X,T,θ,n) ENTER

SIN X,T,θ,n + 45) ENTER

SIN X,T,θ,n − 90) GRAPH

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه ولكن بمواضع أفقية مختلفة.

التمثيل بالنماذج والتحليل

كرر الأنشطة مع كل دالة لجيب التمام وظل الزاوية.

1. ما مجال الدوال الواردة في النشاطين 1 و 2 ومداها؟
2. ما تأثير جمع ثابت إلى دالة مثلثية؟
3. ما تأثير جمع ثابت إلى θ في الدالة المثلثية؟

كرر الأنشطة مع كل مما يلي. صف العلاقة بين كل زوج من التمثيلات البيانية.

4. $y = \sin\theta + 4$
   $y = \sin(2\theta) + 4$
5. $y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$
   $y = \cos\frac{1}{2}(\theta + 45°)$
6. $y = 2\sin\theta$
   $y = 2\sin\theta - 1$
7. $y = \cos\theta - 3$
   $y = \cos(\theta - 90°) - 3$
8. اكتب معادلة عامة لدوال جيب الزاوية وجيب التمام وظل الزاوية بعد التغيرات في السعة a، والفترة b، والوضع الأفقي h، والوضع الرأسي k.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-8

إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

السابق

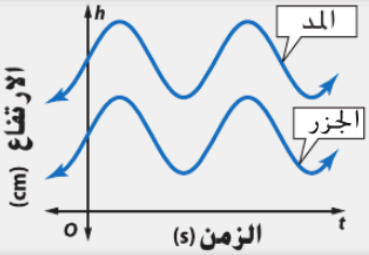
- لقد قمت بإزاحة الدوال الأسيّة.

الحالي

1. تمثيل الإزاحات الأفقية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية وإيجاد إزاحات الطور.
2. تمثيل الإزاحات الرأسية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

لماذا؟

- تعبر التمثيلات البيانية الموضحة على اليسار عن الأمواج في أحد الخلجان أثناء تيارات المد والجزر. لاحظ أن شكل الأمواج لا يتغير.



المفردات الجديدة

إزاحة الطور phase shift
إزاحة رأسية vertical shift
خط متوسط midline

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.

1 الإزاحات الأفقية

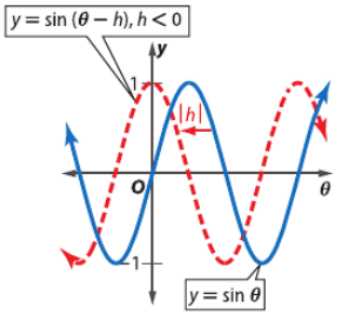
تذكر أن *الإزاحة* تحدث عندما يتحرك الشكل من مكان إلى آخر على المستوى الإحداثي دون تغير اتجاهه. وتُسمى الإزاحة الأفقية للدالة الدورية باسم **إزاحة الطور**.

المفهوم الأساسي إزاحة الطور

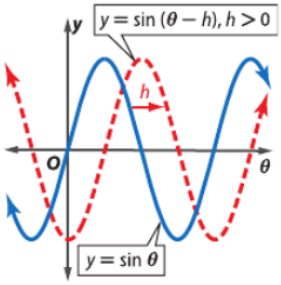
الشرح

إزاحة الطور للدوال $y = a \sin b(\theta - h)$ و $y = a \cos b(\theta - h)$ و $y = a \tan (b\theta - h)$ هي h، حيث $b > 0$.

النماذج



إذا كان $h < 0$، فإن الإزاحة تكون $|h|$ وحدات إلى اليسار.



إذا كان $h > 0$، فإن الإزاحة تكون h وحدات إلى اليمين.

أمثلة

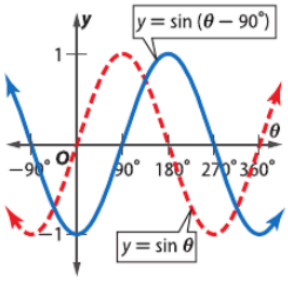
$y = \cos(\theta - 90°)$ إزاحة الطور 90° إلى اليمين.

$y = \tan(\theta + 30°)$ إزاحة الطور 30° إلى اليسار.

يمكن تمثيل القاطع وقاطع التمام وظل التمام بيانيًا باستخدام القواعد نفسها.

مثال 1 التمثيل البياني لإزاحة الطور

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = \sin(\theta - 90°)$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.



السعة: $a = 1$

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{1}$ أو 360°

إزاحة الطور: $h = 90°$

مثّل $y = \sin \theta$ بيانيًا بعد إزاحتها 90° إلى اليمين.

تمرين موجّه

1. اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = 2 \cos(\theta + 45°)$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

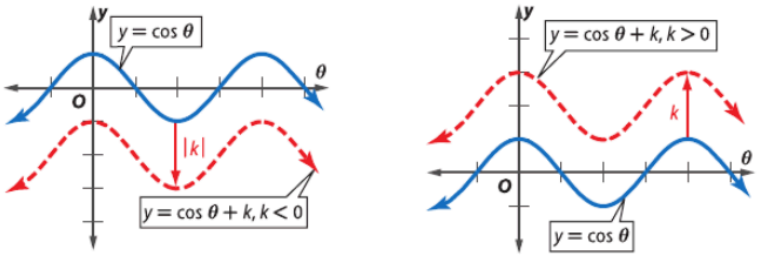
2 الإزاحات الرأسية

تذكر أن التمثيل البياني للدالة $y = x^2 + 5$ هو التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = x^2$ مزاحًا 5 وحدات لأعلى. وبالمثل، يمكن إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية رأسيًا باستخدام **الإزاحة الرأسية**.

المفهوم الأساسي الإزاحة الرأسية

الشرح الإزاحة الرأسية للدوال $y = a \sin b\theta + k$ و $y = a \cos b\theta + k$ و $y = a \tan b\theta + k$ هي k.

النماذج



إذا كانت $k > 0$، فإن الإزاحة تكون عدد k من الوحدات لأعلى.

إذا كانت $k < 0$، فإن الإزاحة تكون عدد $|k|$ من الوحدات لأسفل.

أمثلة

الإزاحة الرأسية تكون 4 وحدات لأعلى. $y = \sin \theta + 4$

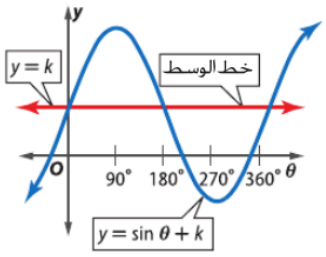
الإزاحة الرأسية تكون 3 وحدات لأسفل. $y = \tan \theta - 3$

يمكن تمثيل القاطع وقاطع التمام وظل التمام بيانيًا باستخدام القواعد نفسها.

نصيحة دراسية

الرمز لاحظ أن $\sin \theta + x \neq \sin (\theta + x)$. يشير التعبير الأول إلى إزاحة الطور. أما التعبير الثاني فيشير إلى الإزاحة الرأسية.

عند إزاحة دالة مثلثية رأسيًا عدد k من الوحدات، يكون المستقيم $y = k$ المحور الأفقي الجديد الذي يتحرك التمثيل البياني حوله. ويسمى هذا المستقيم **خط الوسط**. ويمكن استخدامه للمساعدة على رسم الإزاحات الرأسية.

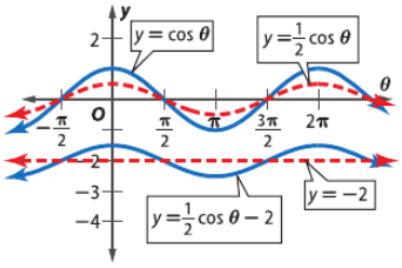


نصيحة دراسية

استخدام الألوان قد يساعدك تمثيل الدالة الأصلية بيانيًا بلون محدد أولاً. ثم تطبيق الإزاحة الرأسية والتمثيل البياني للدالة بلون آخر. وبعد ذلك تطبيق التغير في السعة والتمثيل البياني للدالة بلون أخير.

مثال 2 التمثيل البياني للإزاحات الرأسية

اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة خط الوسط للدالة $y = \frac{1}{2} \cos \theta - 2$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.



السعة: $|a| = \frac{1}{2}$

الفترة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|}$ أو 2π

الإزاحة الرأسية: $k = -2$

خط الوسط: $y = -2$

لتمثيل $y = \frac{1}{2} \cos \theta - 2$ بيانيًا، ارسم أولاً خط الوسط ثم استخدمه لتمثيل $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ بيانيًا بعد إزاحة وحدتين لأسفل.

تمرين موجّه

2. اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة خط الوسط للدالة $y = \tan \theta + 3$. ثم مثّل الدالة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام الخطوات التالية لتمثيل الدوال المثلثية بيانيًا بما فيها إزاحات الطور والإزاحات الرأسية.

ملخص المفهوم التمثيل البياني للدوال المثلثية

السعة ↓ الفترة ↓

$$y = a \sin b\theta - h + k$$

↑ إزاحة الطور ↑ الإزاحة الرأسية

الخطوة 1 تحديد الإزاحة الرأسية وتمثيل خط الوسط بيانيًا.

الخطوة 2 تحديد السعة إن وجدت. واستخدام المستقيمات المتقطعة للإشارة إلى القيمتين العظمى والصغرى للدالة.

الخطوة 3 تحديد فترة الدالة وتمثيل الدالة الصحيحة بيانيًا.

الخطوة 4 تحديد إزاحة الطور وإزاحة التمثيل البياني وفقًا لها.

مثال 3 التمثيل البياني للتحويلات

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية للدالة $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta - (\pi + 4)$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

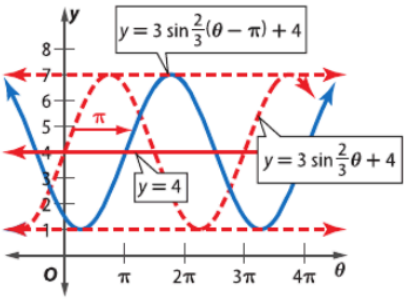
السعة: $|a| = 3$

الفترة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|}$ أو 3π — تشير الفترة إلى أن التمثيل البياني سوف يتمدد.

إزاحة الطور: $h = \pi$ — سوف تتم إزاحة التمثيل البياني π إلى اليمين.

الإزاحة الرأسية: $k = 4$ — سوف تتم إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لأعلى.

خط الوسط: $y = 4$ — سوف يتحرك التمثيل البياني حول المستقيم $y = 4$.



الخطوة 1 تمثيل خط الوسط بيانيًا.

الخطوة 2 بما أن السعة تساوي 3، فارسم مستقيمات متقطعة أعلى خط الوسط وأسفله بمقدار 3 وحدات.

الخطوة 3 التمثيل البياني للدالة $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta + 4$ باستخدام خط الوسط باعتباره مرجعًا.

الخطوة 4 إزاحة التمثيل البياني عدد π وحدات إلى اليمين.

التحقق يمكنك التحقق من دقة تحويلاتك بإيجاد قيمة الدالة مع القيم المختلفة لـ θ وتأكيد أماكنها على التمثيل البياني.

تمرين موجّه

3. اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية للدالة $y = 2 \cos \frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{2}) - 2$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

نصيحة دراسية

التحقق من صحة التمثيل البياني بعد رسم تمثيل بياني لدالة مثلثية، حدد قيم θ وأوجد قيمتها في المعادلة للتحقق من صحة تمثيلك البياني.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحدث الموجة الجيبية غالبًا في الفيزياء ومعالجة الإشارات والموسيقى والهندسة الكهربية والعديد من المجالات الأخرى.

الربط بالحياة اليومية

في بعض مسابح الأمواج الاصطناعية، يستطيع المتزحلقون على المياه ركوب أمواج يصل ارتفاعها إلى 70 مترًا.

المصدر: بركة أورلاندو للسباحة

مثال 4 من الحياة اليومية تمثيل الدوال الدورية

مسبح أمواج اصطناعية يتردد ارتفاع الماء في مسبح أمواج اصطناعية بين 13 m كحد أقصى، و 5 m كحد أدنى. تضخ ماكينة توليد الأمواج 6 موجات في الدقيقة. اكتب دالة جيبية تمثل ارتفاع الماء في زمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

الخطوة 1 اكتب معادلة خط الوسط وحدد الإزاحة الرأسية.

$y = \frac{13 + 5}{2}$ أو 9 — يقع خط الوسط في المنتصف بين القيمتين العظمى والصغرى.

بما أن خط الوسط $y = 9$، فإن الإزاحة الرأسية $k = 9$.

الخطوة 2 أوجد السعة.

$|a| = |13 - 9|$ أو 4 — إيجاد الفارق بين قيمة خط الوسط والقيمة العظمى.

إذًا، $a = 4$.

الخطوة 3 أوجد الفترة.

بما أنه يتم توليد 6 موجات في الدقيقة، فهناك موجة واحدة كل 10ثوانٍ.
إذًا، الفترة هي 10ثوانٍ.

$10 = \frac{2\pi}{|b|}$ — الفترة $= \frac{2\pi}{|b|}$

$|b| = \frac{2\pi}{10}$ — إيجاد قيمة $|b|$

$b = \pm\frac{\pi}{5}$ — بسّط.

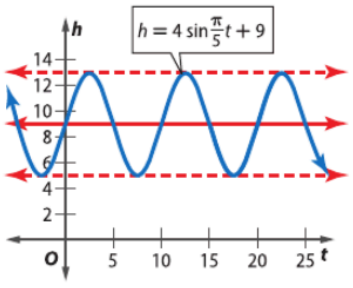
الخطوة 4 اكتب معادلة للدالة.

$h = a \sin b(t - h) + k$ — كتابة معادلة لجيب الزاوية تكون مرتبطة بالارتفاع h والزمن t.

$= 4 \sin \frac{\pi}{5}(t - 0) + 9$ — بالتعويض: $a = 4,\ b = \frac{\pi}{5},\ h = 0,\ k = 9$

$= 4 \sin \frac{\pi}{5}t + 9$ — بسّط.

ثم مثّل الدالة بيانيًا.



انتبه!

الدوال الأصلية غالبًا ما يمكن التعبير عن التمثيل البياني للدالة المثلثية بأكثر من معادلة. على سبيل المثال، التمثيلان البيانيان للدالتين $y = \cos\theta$ و $y = \sin(\theta + 90°)$ متطابقان.

تمرين موجّه

4. **مسبح أمواج اصطناعية** يتردد ارتفاع الماء في مسبح أمواج اصطناعية بين 14 m كحد أقصى و 6 m كحد أدنى. تضخ ماكينة توليد الأمواج 5 موجات في الدقيقة. اكتب دالة جيب التمام التي تمثل ارتفاع الماء في زمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

1. $y = \sin(\theta - 180^\circ)$
2. $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
3. $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
4. $y = \frac{1}{2}\cos(\theta + 90^\circ)$

مثال 2 اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة خط الوسط لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

5. $y = \cos\theta + 4$
6. $y = \sin\theta - 2$
7. $y = \frac{1}{2}\tan\theta + 1$
8. $y = \sec\theta - 5$

مثال 3 **الانتظام** اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

9. $y = 2\sin(\theta + 45^\circ) + 1$
10. $y = \cos 3(\theta - \pi) - 4$
11. $y = \frac{1}{4}\tan 2(\theta + 30^\circ) + 3$
12. $y = 4\sin\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 5$

مثال 4

13. **تدريبات رياضية** أثناء القيام ببعض الأنشطة البدنية المعتدلة، يتراوح ضغط دم الإنسان ما بين 130 كحد أقصى و 90 كحد أدنى. ويصل معدل ضربات القلب الإنسان إلى 90 ضربة في الدقيقة. اكتب دالة جيبية تمثل ضغط دم الشخص P في زمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

14. $y = \cos(\theta + 180^\circ)$
15. $y = \tan(\theta - 90^\circ)$
16. $y = \sin(\theta + \pi)$
17. $y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
18. $y = \tan\frac{1}{2}(\theta + 30^\circ)$
19. $y = 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

مثال 2 اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة خط الوسط لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

20. $y = \cos\theta + 3$
21. $y = \tan\theta - 1$
22. $y = \tan\theta + \frac{1}{2}$
23. $y = 2\cos\theta - 5$
24. $y = 2\sin\theta - 4$
25. $y = \frac{1}{3}\sin\theta + 7$

مثال 3 اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

26. $y = 4\sin(\theta - 60^\circ) - 1$
27. $y = \cos\frac{1}{2}(\theta - 90^\circ) + 2$
28. $y = \tan(\theta + 30^\circ) - 2$
29. $y = 2\tan 2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 5$
30. $y = \frac{1}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 4$
31. $y = \cos 3(\theta - 45^\circ) + \frac{1}{2}$
32. $y = 3 + 5\sin 2(\theta - \pi)$
33. $y = -2 + 3\sin\frac{1}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

مثال 4

34. **التيارات** يرتفع الماء في أحد الموانئ إلى 15 m كحد أقصى في الساعة 6:00 م ثم ينخفض إلى 3 m كحد أدنى في الساعة 3:00 ص. يمكن تمثيل مستوى الماء بالدالة الجيبية. اكتب معادلة تمثل ارتفاع الماء h بعد t ساعة من الظهيرة في اليوم الأول.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

35. **بحيرات** تتحرك عوامة تحديد منطقة السباحة بإحدى البحيرات في كل مرة يمر بجوارها قارب مسرع. ويتم التعبير عن بعد العوامة d بالأمتار عن قاع البحيرة بالآتي $d = 1.8 \sin \frac{3\pi}{4} t + 12$، حيث t هو الزمن بالثواني. مثّل الدالة بيانيًا. وصف أقصى بعد وأدنى بعد للعوامة عن قاع البحيرة عندما يتحرك قارب بجانبها.

36. **عجلة فيريس** افترض أن عجلة فيريس لها قطر يقارب 520 m، وتصنع دورة واحدة كاملة في 30 min. وافترض أن أدنى مقصورة بالعجلة تبعد 5 m عن الأرض. وافترض أن الارتفاع عند قمة العجلة يمثل الارتفاع في زمن 0. اكتب معادلة لارتفاع المقصورة h كدالة للزمن t دقيقة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

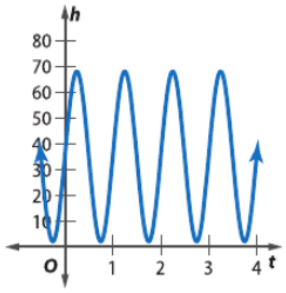
اكتب معادلة لكل إزاحة.

37. $y = \sin x$، 4 وحدات لليمين و 3 وحدات للأعلى

38. $y = \cos x$، 5 وحدات لليسار ووحدتان لأسفل

39. $y = \tan x$، π وحدة إلى اليمين و 2.5 وحدة لأعلى

40. **حبل القفز** يقارب التمثيل البياني على اليسار ارتفاع حبل قفز h بالسنتيمترات كدالة زمن t بالثواني. أعلى نقطة على التمثيل البياني هي $(1.25, 68)$، وأدنى نقطة هي $(2.75, 2)$.



a. صف ما تعنيه أعلى نقطة وأدنى نقطة في سياق الموقف.

b. ما معادلة خط الوسط، وسعة الدالة وفترتها؟

c. اكتب معادلة للدالة.

41. **دوامات الخيل** يرتفع حصان بإحدى دوامات الخيل ويهبط 3 مرات بينما تصنع الدوامة دورة كاملة واحدة. أقصى ارتفاع للحصان هو 55 cm، وأدنى ارتفاع هو 37 cm. تدور الدوامة مرة كل 21 ثانية. افترض أن الحصان يبدأ ويتوقف عند الارتفاع الوسيط.

a. اكتب معادلة تمثل ارتفاع الحصان h كدالة لزمن t ثانية.

b. مثّل الدالّة بيانيًا.

c. استخدم تمثيلك البياني لتقدير ارتفاع الحصان بعد 8 s. ثم استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الارتفاع مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

42. **التبرير** خلال شهر واحد، تراوحت درجة الحرارة الهواء الخراجي بين 40°C و 50°C. يقارب منحنى جيب التمام التغير في درجة الحرارة، مع ارتفاع يصل إلى 50°C كل أربعة أيام.

a. صف السعة والفترة وخط الوسط للدالة التي تقارب درجة الحرارة y في يوم d.

b. اكتب دالة جيب التمام لتقدير درجة الحرارة y في اليوم d.

c. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة.

d. قدّر درجة الحرارة في اليوم السابع من الشهر.

أوجد الإحداثي الذي يمثل قيمة عظمى لكل تمثيل بياني.

43. $y = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

44. $y = 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

45. $y = 3 \tan \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

46. $y = -3 \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قارن بين كل زوج من التمثلات البيانية.

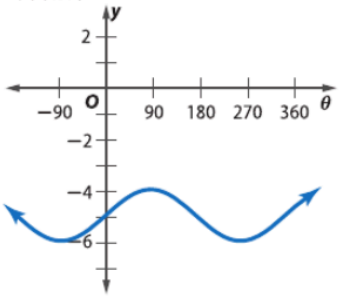
47. $y = -\cos 3\theta$ و $y = \sin 3(\theta - 90°)$

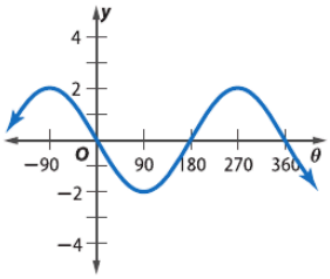
48. $y = 2 + 0.5 \tan \theta$ و $y = 2 + 0.5 \tan(\theta + \pi)$

49. $y = 2 \sin(\theta - \frac{\pi}{6})$ و $y = -2 \sin(\theta + \frac{5\pi}{6})$

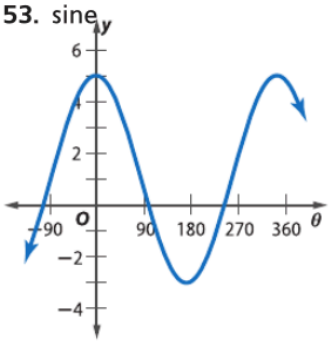
حدد فترة كل دالة. ثم اكتب معادلة للتمثيل البياني باستخدام الدالة المثلثية المحددة.

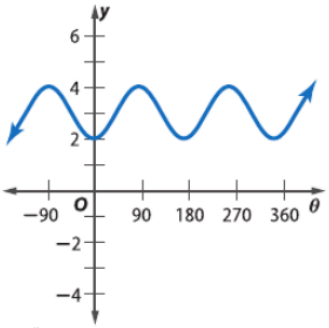
50. sine **51.** cosine





52. cosine **53.** sine





اذكر الفترة، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية ثم مثّل الدالة بيانيًا.

54. $y = \csc(\theta + \pi)$

55. $y = \cot \theta + 6$

56. $y = \cot\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

57. $y = \frac{1}{2} \csc 3(\theta - 45°) + 1$

58. $y = 2 \sec \frac{1}{2}(\theta - 90°)$

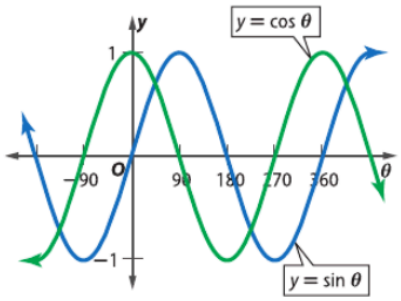
59. $y = 4 \sec 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - 3$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدامهارات التفكير العليا

60. فرضيات إذا أعطيت السعة والفترة لدالة جيب التمام، فهل من الممكن *أحيانًا*، أم *دائمًا* ، أم غير ممكن *أبدًا* إيجاد القيمة العظمى والصغرى للدالة. اشرح استنتاجك.

61. التبرير صف وجه الاختلاف بين التمثيل البياني للدالة $y = 3 \sin 2\theta + 1$ عن تمثيل الدالة $y = \sin \theta$.

62. الكتابة في الرياضيات صف إزاحتي طور مختلفتين من شأنهما إزاحة منحنى جيب الزاوية على منحنى جيب التمام الموضح على اليسار. ثم اكتب معادلة لجيب الزاوية الجديد باستخدام كل إزاحة طور.



63. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالة دورية سعتها 2 وخط وسطها عند $y = -3$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

64. التبرير كم عدد التمثيلات البيانية المختلفة لجيب الزاوية التي تمر عبر نقطة الأصل $(0, n\pi)$؟ اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

65. الإجابة الشبكية بكم يزداد التعبير $\frac{3x-1}{4}+\frac{x+6}{4}$ عن x؟

66. فكك $a-b^4$.

A a^4-b^4

B $a^4-4ab+b^4$

C $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

D $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

67. أوجد حل $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=5$.

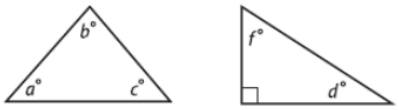
F 7

H 7, 13

G 0, 7

J ليس لها حل

68. الهندسة باستخدام الشكلين أدناه، ما متوسط a و b و c و d و f؟



A 21 **B** 45 **C** 50 **D** 54

مراجعة شاملة

أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا. (الدرس 7-10)

69. $y=2\cos\theta$ **70.** $y=3\sin\theta$ **71.** $y=\sin 2\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 6-10)

72. $\sin\frac{4\pi}{3}$ **73.** $\sin(-30^\circ)$ **74.** $\cos 405^\circ$

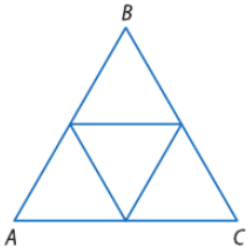
حدد ما إذا كان كل موقف يصف *استطلاع رأي* أو *تجربة* أو *دراسة رصدية*. ثم حدد العينة، واقترح مجتمعًا إحصائيًا يمكن الاختيار منه.

75. تم تقسيم مجموعة من 220 شخصًا بالغًا بشكل عشوائي إلى مجموعتين. تمارس مجموعة منهما التمارين الرياضية لمدة ساعة في اليوم، والمجموعة الأخرى لا تمارس. وبعد ذلك تمت مقارنة مؤشرات كتلة الجسم.

76. مدرب كرة قدم يختار عشوائيًا بعض لاعبيه ويعطيهم استبيانًا حول عادات النوم اليومية الخاصة بهم.

77. معلم يختار عشوائيًا 100 طالب لديهم وظائف بدوام جزئي ويقارن درجاتهم.

78. الهندسة مثلث متساوي الأضلاع ABC محيطه 39 cm. فإذا كانت نقاط المنتصف بالأضلاع متصلة معًا، ينشأ مثلث متساوي الأضلاع أصغر. افترض أن عملية توصيل نقاط المنتصف للأضلاع ورسم مثلثات جديدة مستمرة إلى ما لا نهاية.



a. اكتب متسلسلة هندسية لا نهائية لتمثيل مجموع محيطات جميع المثلثات.

b. أوجد مجموع محيطات جميع المثلثات.

79. التشييد شركة تشييد ستتحمل غرامة عن كل يوم تأخير في إكمال بناء جسر. ستبلغ الغرامة اليومية AED 4000 عن اليوم الأول وسوف تزداد بمعدل AED 1000 كل يوم. وبناءً على الميزانية، تستطيع الشركة تحمل AED 60,000 فقط إجمالي الغرامات. فما الحد الأقصى لعدد الأيام التي يمكن أن تتأخرها الشركة؟

مراجعة المهارات

أوجد كل قيمة لـ θ. وقرّب إلى أقرب درجة.

80. $\sin\theta=\frac{7}{8}$ **81.** $\tan\theta=\frac{9}{10}$ **82.** $\cos\theta=\frac{1}{4}$

83. $\cos\theta=\frac{4}{5}$ **84.** $\sin\theta=\frac{5}{6}$ **85.** $\tan\theta=\frac{2}{7}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-9 الدوال المثلثية العكسية

السابق:
- قمتَ بتمثيل الدوال المثلثية بيانيًا.

الحالي:
1. إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية.
2. إيجاد حل المعادلات باستخدام الدوال المثلثية العكسية.

لماذا؟
- يبلغ طول رف الكتب المائل الموجود إلى اليسار 40 cm من الجدار ويصل إلى ارتفاع 200 cm. في الدرس 10-1، تعلمت كيفية استخدام معكوس الدالة المثلثية لإيجاد قياس الزاوية الحادة θ.

$\tan \theta = \frac{40}{200}$ أو 0.2 استخدم دالة tan.

أوجد زاوية يساوي ظلها 0.2.

2nd [TAN^{-1}] .2 ENTER 11.30993247

إذًا فقياس θ يساوي حوالي 11°.

للمفردات الجديدة

قيم أساسية
principal values

دالة قوس الجيب
Arcsine function

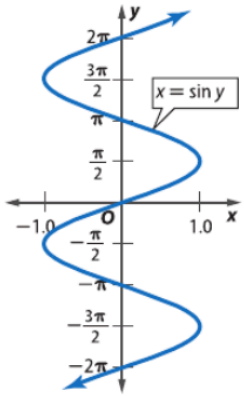
دالة قوس جيب التمام
Arccosine function

دالة قوس الظل
Arctangent function

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 الدوال المثلثية العكسية

إذا عرفت قيمة دالة مثلثية لزاوية يمكنك استخدام معكوسها لإيجاد الزاوية. تذكر أن معكوس الدالة هو العلاقة التي يكون فيها جميع قيم x و y معكوسة. يتم تمثيل معكوس $y = \sin x$، $x = \sin y$، بيانيًا إلى اليسار.



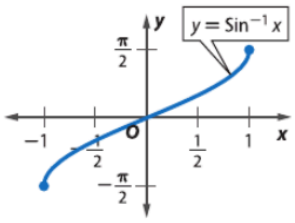
لاحظ أن المعكوس ليس بدالة، حيث يوجد العديد من قيم y لكل قيمة من قيم x. وإذا قيّدت مجال دالة جيب الزاوية بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ يصبح المعكوس دالة.

يطلق على قيم المجال المقيد **القيم الأساسية**. توضح الدوال المثلثية ذات المجالات المقيدة بحروف كبيرة.

- $y = \text{Sin } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ و $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
- $y = \text{Cos } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ و $0 \le x \le \pi$.
- $y = \text{Tan } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ و $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

يمكنك استخدام الدوال ذات المجالات المقيدة لتحديد الدوال الثلثية العكسية. ويعتبر معكوس دوال جيب الزاوية وتمام الجيب والظل هي دالة **Arcsine** و **Arccosine** و **Arctan** على التوالي.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية العكسية

دالة عكسية	الرموز	المجال	المدى	النماذج
قوس جيب الزاوية Arcsine	$y = \text{Arcsin } x$ $y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$	
قوس جيب تمام الزاوية Arccosine	$y = \text{Arccos } x$ $y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$	
قوس ظل الزاوية Arctangent	$y = \text{Arctan } x$ $y = \text{Tan}^{-1} x$	جميع الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في العلاقة $y = \cos^{-1} x$، إذا كان $x = \frac{1}{2}$، $y = 60°$، $300°$، وجميع الزوايا التي تشترك في ضلع الانتهاء مع هذه الزوايا. في الدالة $y = \text{Cos}^{-1} x$، إذا كان $x = \frac{1}{2}$، $y = 60°$ فقط.

مراجعة المصطلحات

الدوال العكسية إذا كان f و f^{-1} دالتين عكسيتين، فإن $f(a) = b$ فقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

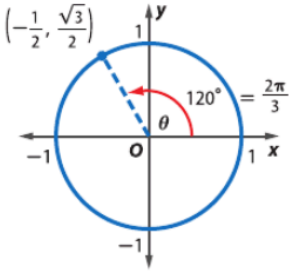
مثال 1 إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية

أوجد كل قيمة مما يلي. اكتب قياس الزاوية بالدرجات والراديان.

a. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

أوجد الزاوية θ لـ $0° \le \theta \le 180°$ التي تساوي قيمة جيب تمامها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 1 استخدام دائرة الوحدة.



أوجد نقطة على دائرة الوحدة تكون قيمة إحداثي x لها هو $-\frac{1}{2}$.

عندما يكون $\theta = 120°$، فإن $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

إذًا، $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

الطريقة 2 استخدام الحاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: 120 [2nd] [COS^{-1}] [(−)] 1 [÷] 2 [)] [ENTER]

إذًا، $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

نصيحة دراسية

قياس الزاوية تذكر أنه عند إيجاد قيمة دالة مثلثية عكسية، ستكون النتيجة قياس زاوية.

b. Arctan 1

أوجد الزاوية θ لـ $-90° \le \theta \le 90°$ التي تساوي قيمة ظلها 1.

خطوات العملية على الحاسبة: 45 [2nd] [TAN^{-1}] 1 [ENTER]

إذًا، $\text{Arctan } 1 = 45°$ أو $\frac{\pi}{4}$.

تمرين موجّه

1A. $\text{Cos}^{-1} 0$

1B. $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

عند إيجاد قيم مع وجود عدة دوال مثلثية، استخدم ترتيب العمليات للحل.

مثال 2 إيجاد القيمة المثلثية

أوجد قيمة $\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$. قرب إلى أقرب جزء من مئة.

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: 1.732050808 [TAN] [2nd] [COS^{-1}] 1 [÷] 2 [)] [)] [ENTER]

إذًا، $\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 1.73$.

التحقق $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60°$ و $\tan 60° \approx 1.73$. إذًا، الإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

أوجد كل قيمة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من مئة.

2A. $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$

2B. $\cos\left(\text{Arccos} -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حل المعادلة باستخدام المعكوس

يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية بالحل بإيجاد قياس الزاوية.

مثال 3 على الاختبار المعياري إيجاد قياس الزاوية

إذا كان $\text{Sin}\ \theta = -0.35$، فأوجد θ.

A $-20.5°$ **B** $-0.6°$ **C** $0.6°$ **D** $20.5°$

قراءة فقرة الاختبار

جيب الزاوية θ هو -0.35. يمكن كتابة ذلك في صورة قوس جيب الزاوية هو $\theta = (-0.35)$.

حَل فقرة الاختبار

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: -20.48731511 2nd [SIN^{-1}] (−) .35 ENTER

إذًا، $\theta \approx -20.5°$. الإجابة هي A.

تمرين موجّه

3. إذا كان $\text{Tan}\ \theta = 1.8$، فأوجد θ.

F $0.03°$ **G** $29.1°$ **H** $60.9°$ **J** لا يوجد حلول

نصيحة عند حل الاختبار

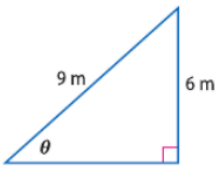
تقدير الاحتمالات

تقيد دالة الجيب قياس الزوايا المحتملة إلى الربع الأول أو الثالث. حيث إن -0.35 سالبة، فابحث عة قياس الزاوية في الربع الثالث.

يمكن استخدام الدوال المثلثية العكسية لتحديد قياس زاويا الميل والانخفاض والارتفاع.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام الدوال المثلثية العكسية

التزلج على المياه **يبلغ ارتفاع منحدر تزلج على المياه 6 m وطوله 9 m كما هو مبين على اليسار. أوجد الدالة المثلثية العكسية التي يمكن استخدامها لإيجاد θ، الزاوية التي يشكلها المنحدر مع المياه. ثم أوجد قياس الزاوية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.**



نظرًا لأن قياس الأضلاع المقابلة والوتر معروفة، يمكن استخدام دالة جيب الزاوية

$\sin \theta = \frac{6}{9}$ دالة sin

$\theta = \text{Sin}^{-1}\frac{6}{9}$ دالة Arcsin

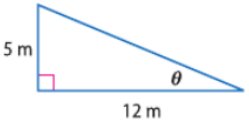
$\theta \approx 41.8°$ استخدم حاسبة.

إذًا، فإن زاوية المنحدر تساوي حوالي $41.8°$.

التحقق باستخدام حاسبتك، $\frac{6}{9} \approx 0.66653 \approx \sin 41.8$.
إذًا، الإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

4. التزلج يوضح مسار تزلج على اليسار. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ الزاوية التي يشكلها المسار مع أرض الوادي. ثم أوجد الزاوية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



مهنة من الحياة اليومية

مسؤول علوم التربية الرياضية يقدم مسؤول علوم التربية الرياضية معلومات التربية الرياضية إلى اللاعبين والمدربين وأولياء الأمور. وينفذ برامج بالاختبار والتدريب والعلاج للرياضيين. ويحبذ لهذه الوظيفة الحصول على درجة الماجستير في علم التربية الرياضية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد كل قيمة مما يلي. اكتب قياس الزاوية بالدرجات والراديان.**

1. $\text{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$
2. $\text{Arctan}\,(-\sqrt{3})$
3. $\text{Arccos}\,(-1)$

مثال 2 **أوجد كل قيمة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.**

4. $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{4}{5}\right)$
5. $\tan\,(\text{Cos}^{-1}\,1)$
6. $\sin\left(\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

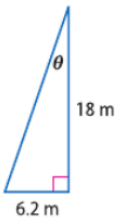
مثال 3 7. **اختيار من متعدد** إذا كان $\text{Sin}\,\theta = 0.422$، فأوجد قيمة θ.

A $25°$ B $42°$ C $48°$ D $65°$

حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

8. $\text{Cos}\,\theta = 0.9$
9. $\text{Sin}\,\theta = -0.46$
10. $\text{Tan}\,\theta = 2.1$

مثال 4 11. **التزحلق على الجليد** يوضح إلى اليسار مقطع عرضي لأنبوب ضخم للتزحلق على الجليد إلى اليسار. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ، الزاوية التي تصف انحدار الأنبوب الضخم. ثم أوجد قياس الزاوية لأقرب درجة.



التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد كل قيمة مما يلي. اكتب قياس الزاوية بالدرجات والراديان.**

12. $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
13. $\text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
14. $\text{Sin}^{-1}\,(-1)$
15. $\text{Tan}^{-1}\,\sqrt{3}$
16. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
17. $\text{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

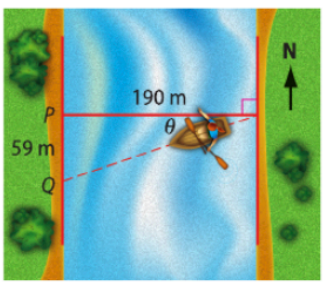
مثال 2 **أوجد كل قيمة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.**

18. $\tan\,(\text{Cos}^{-1}\,1)$
19. $\tan\left[\text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$
20. $\cos\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{5}\right)$
21. $\sin\left(\text{Arctan}\,\sqrt{3}\right)$
22. $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{9}\right)$
23. $\sin\left[\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

مثال 3 **حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.**

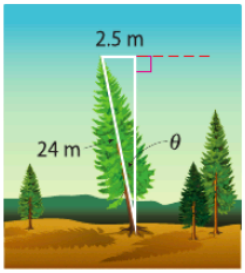
24. $\text{Tan}\,\theta = 3.8$
25. $\text{Sin}\,\theta = 0.9$
26. $\text{Sin}\,\theta = -2.5$
27. $\text{Cos}\,\theta = -0.25$
28. $\text{Cos}\,\theta = 0.56$
29. $\text{Tan}\,\theta = -0.2$

مثال 4 30. **التبرير المنطقي** يتحرك قارب غربًا عبر نهر يبلغ عرضه 190 m. وبسبب التيار، انتهى بالقارب المطاف عند النقطة Q والتي تبعد 59 m عن نقطة وجهته P. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ الزاوية التي انحرف بها القارب جنوب المحور الأفقي. ثم أوجد قياس الزاوية بالتقريب إلى أقرب جزء من عشرة.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

31. **الأشجار** تميل شجرة طولها 24 m بمقدار 2.5 يسار المحور الرأسي كما هو موضح في الشكل. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ الزاوية التي تميل بها الشجرة. ثم أوجد قياس الزاوية مقربًا إلى أقرب درجة .



32. **القيادة** منحنى فرعي على الطريق السريع يبلغ نصف قطره 52 m وصمم لحركة السيارات بأمان بسرعة 45 km/h (أو 12.5 m/s). وتمثل المعادلة أدناه زاوية θ المنحنى.
ما قياس الزاوية مقربًا إلى أقرب درجة؟

$$\tan \theta = \frac{(12.5 \text{ m/s})^2}{(52 \text{ m})(9.8 \text{ m/s}^2)}$$

33. **ألعاب القوى** يقوم رامي الكرى الحديدية برمي كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 15 m/s.
ويمثل التعبير $\frac{15 \text{ m/s } (\sin x)}{9.8 \text{ m/s}^2}$ الزمن بالثانية الذي بلغت فيه الكرة الحديدية أقصى ارتفاع لها. في التعبير، تمثل x الزاوية التي رميت بها الكرة الحديدية. وإذا كانت الكرة قدي بلغت أقصى ارتفاع في 1.0 s.
فما قياس الزاوية التي رميت بها؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

حُـلّ كل معادلة حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.

34. $\csc \theta = 1$
35. $\sec \theta = -1$
36. $\sec \theta = 1$
37. $\csc \theta = \frac{1}{2}$
38. $\cot \theta = 1$
39. $\sec \theta = 2$

40. **التمثيلات المتعددة** افترض أن $y = \text{Cos}^{-1} x$.

a. **التمثيل البياني** ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة. واذكر المجال والمدى.

b. **التمثيل الرمزي** اكتب الدالة باستخدام رموز مختلفة.

c. **التمثيل العددي** اختر قيمة للمتغير x بين -1 و 0. ثم أوجد قيمة دالة معكوس جيب التمام. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

d. **التمثيل التحليلي** قارن التمثيلات البيانية لكل من $y = \cos x$ و $y = \text{Cos}^{-1} x$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

41. **تحد** حدد ما إذا ما كان $x = \cos (Arccos\ x)$ لجميع قيم x صحيحًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا فقدم مثالاً مضادًا.

42. **التفكير النقدي** تحل كل من نجاة ونسرين $\cos \theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$. هل أي منهما على صواب. فسر استنتاجك.

نجاة
$\cos \theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 162.5°$

نسرين
$\cos \theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 72.5°$

43. **التبرير** اشرح العلاقة بين مجال $y = \text{Sin}^{-1} x$ ومدى $y = \text{Sin } x$.

44. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة بدالة قوس الجيب ومعادلة بدالة الجيب تتضمن كلاهما نفس قياس الزاوية.

45. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبين الفرق بين علاقة $y = \tan^{-1} x$ و $y = \text{Tan}^{-1} x$. واذكر معلومات حول المجال والمدى.

46. **التبرير** اشرح كيف يكون $\text{Sin}^{-1} 8$ و $\text{Cos}^{-1} 8$ غير محددين بينما يكون $\text{Tan}^{-1} 8$ محددًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

47. بسّط $\dfrac{\frac{2}{x}+2}{\frac{2}{x}-2}$.

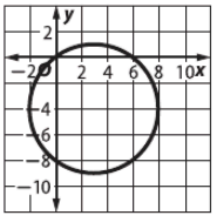
A $\dfrac{1+x}{1-x}$

B $\dfrac{2}{x}$

C $\dfrac{1-x}{1+x}$

D $-x$

48. الإجابة القصيرة ما معادلة التمثيل البياني أدناه؟



49. إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x$ و $g(x) = 4 - 2x$، فما $g[f(x)]$؟

F $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

G $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

H $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

J $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

50. إذا كان g عددًا موجبًا، فأي مما يلي يساوي $12g$؟

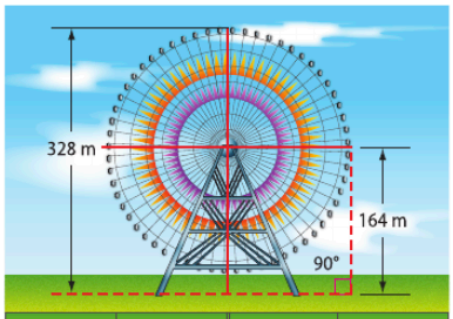
A $\sqrt{144g}$

B $\sqrt{12g^2}$

C $\sqrt{24g^2}$

D $6\sqrt{4g^2}$

مراجعة شاملة



الزاوية	الارتفاع	الزاوية	الارتفاع
0°	0	450°	164
90°	164	540°	328
180°	328	630°	164
270°	164	720°	0
360°	0		

51. ألعاب الملاهي كوزمو كلوك هي عجلة دوارة ضخمة بمديمة ملاهي في اليابان. ويساوي قطرها 328 m. افترض أن راكبًا دخلها عند ارتفاع 0 m. ثم دار بزيادات 90° عكس اتجاه الساعة. ويوضح الجدول قياسات زوايا الدوران وارتفاع الراكب بالأمتار عن مستوى الأرض. (الدرس 8-10)

a. إن الدالة التي تمثل البيانات هي $y = 164 \cdot [\sin(x - 90°)] + 164$. حدد الإزاحة الرأسية والسعة والفترة وإزاحة الطور للتمثيل البياني.

b. اكتب معادلة باستخدام جيب الزاوية تمثل موقع الراكب على عجلة فيينا العملاقة في النمسا، والتي يبلغ قطرها 200 مترًا. تحقق بتعيين النقاط والمعادلة بحاسبة تمثيل بياني.

52. المد والجزر يحدث أقصى ارتفاع مسجل يبلغه المد في حوض ميناس، بنوفا سكوشا في كندا، حيث يبلغ مدى المد والجزر 16.4 m. ويكون المد والجزر في موضع توازنه عندما يكون بمستواه الطبيعي أي بمنتصف أدنى واقصى نقطة له. اكتب معادلة تمثل الارتفاع h للمد والجزر. وافترض أن المد والجزر يكون عند موضع توازنه عند $t = 0$ التي يبدأ عندها المد، وأن المد يكمل دورة كاملة في 12 ساعة. (الدرس 7-10)

حُـلّ كل من المعادلات الآتية.

53. $\log_3 5 + \log_3 x = \log_3 10$

54. $\log_4 a + \log_4 9 = \log_4 27$

55. $\log_{10} 16 - \log_{10} 2t = \log_{10} 2$

56. $\log_7 24 - \log_7 (y + 5) = \log_3 8$

مراجعة المهارات

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يلي.

57. $\cos 3\pi$

58. $\tan 120°$

59. $\sin 300°$

60. $\sec \frac{7\pi}{6}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

حساب مثلثات المثلثات قائمة الزاوية (الدرس 1-10)

- $\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$, $\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$, $\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$,
  $\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$, $\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$, $\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

قياس الزوايا والدوال المثلثية للزوايا العامة (الدرسان 2-10 و 3-10)

- يحدد قياس الزاوية بمقدار الدوران من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.
- يمكنك إيجاد القيمة الدقيقة لست دوال مثلثية لـ θ بافتراض إحداثيات نقطة $P(x, y)$ على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine (الدرسان 4-10 و 5-10)

- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

الدوال المثلثية العكسية والدائرية (الدرسان 6-10 و 9-10)

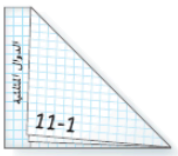
- إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية θ يتقاطع في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$. فإن $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$.
- $y = \text{Sin } x$ إذا كان $y = \sin x$ و $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًّا (الدرس 7-10)

- للدوال المثلثية في الصورة $y = a\sin b\theta$ و $y = a\cos b\theta$ وتكون سعتها $|a|$ وفترتها $\frac{360°}{|b|}$ أو $\frac{2\pi}{b}$.
- إن فترة $y = a\tan b\theta$ تساوي $\frac{180°}{|b|}$ أو $\frac{\pi}{|b|}$.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

ambiguous case حالة مبهمة	period فترة
amplitude سعة	periodic function دالة دورية
angle of depression زاوية الانخفاض	phase shift إزاحة الطور
angle of elevation زاوية الارتفاع	principal values قيم أساسية
Arccosine function دالة قوس جيب التمام	quadrantal angle زاوية ربعية
Arcsine function دالة قوس الجيب	radian راديان
Arctangent function دالة قوس الظل	reference angle زاوية مرجع
central angle الزاوية المركزية	secant القاطع
circular function دالة دائرية	sine جيب الزاوية
cosecant قاطع التمام	solving a triangle حل مثلث
cosine جيب التمام	standard position الوضع القياسي
cotangent ظل التمام	tangent ظل الزاوية
coterminal angles زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء	terminal side ضلع الانتهاء
cycle دورة	trigonometric function دالة مثلثية
frequency التردد	trigonometric ratio النسبة المثلثية
initial side ضلع الابتداء	trigonometry حساب المثلثات
Law of Cosines قانون الـ Cosine	unit circle دائرة الوحدة
Law of Sines قانون الـ Sine	vertical shift إزاحة رأسية
midline خط متوسط	

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي *صواب* أم *خطأ*. وإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خط بحيث تصبح الجملة صحيحة.

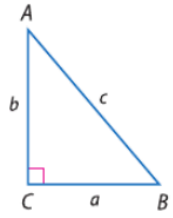
1. يستخدم قانون الـ Cosine لحل المثلثات عند معرفة قيم زاويتين وأي أضلاع.
2. الزاوية التي توجد على المستوى الإحداثي تكون في الوضع القياسي إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل وكان أحد شعاعيها موجودًا على محور x الموجب.
3. الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء هي زوايا في الوضع القياسي ولها نفس ضلع الانتهاء.
4. يطلق على الإزاحة الأفقية لدالة دورية إزاحة الطور.
5. إن معكوس دالة جيب الزاوية هو دالة قاطع التمام.
6. تساوي دورة التمثيل البياني لدالة جيب الزاوية وجيب التمام نصف لفارق بين القيم الكبرى والصغرى للدالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

10-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة

حُلّ $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياس الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

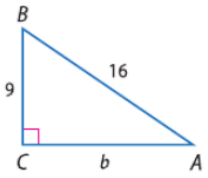


7. $c = 12, b = 5$
8. $a = 10, B = 55°$
9. $B = 75°, b = 15$
10. $B = 45°, c = 16$
11. $A = 35°, c = 22$
12. $\sin A = \frac{2}{3}, a = 6$

13. **شاحنات** يرتفع ظهر شاحنة متحركة مترًا عن الأرض. ما الطول الذي يفترض أن تكون عليه المنحدر الممتد من ظهر الشاحنة لتكون زاوية ارتفاع المنحدر $20°$؟

مثال 1

حُلّ $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياس الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.



أوجد قيمة b.

$a^2 + b^2 = c^2$
$9^2 + b^2 = 16^2$
$b = \sqrt{16^2 - 9^2}$
$b \approx 13.2$

أوجد قيمة A.

$\sin A = \frac{9}{16}$

استخدم حاسبة.
قياس الزاوية إلى أقرب درجة، $A = 34°$.

أوجد قيمة B.

$34° + B \approx 90°$
$B \approx 56°$

إذًا، $b \approx 13.2$ و $A \approx 34°$ و $B \approx 56°$.

10-2 الزوايا وقياس الزاوية

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

14. $215°$
15. $\frac{5\pi}{2}$
16. -3π
17. $-315°$

أوجد زاوية واحدة ذات قياس موجب وزاوية واحدة ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء لكل زاوية.

18. $265°$
19. $-65°$
20. $\frac{7\pi}{2}$

21. **دراجة** يقوم إطار دراجة 8 ورات في الثانية. ويبلغ نصف قطر الإطار 38 سنتيمترًا. أوجد الزاوية θ بالراديان التي يدور من خلالها الإطار في الثانية.

مثال 2

أعد كتابة $160°$ بالراديان.

$160° = 160°\left(\frac{\text{راديان } \pi}{180°}\right)$
$= \frac{160\pi}{180}$ راديان أو $\frac{8\pi}{9}$

مثال 3

أوجد زاوية واحدة ذات قياس موجب وزاوية واحدة ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء لزاوية $150°$.

زاوية موجبة.

$150° + 360° = 510°$ اجمع $360°$.

زاوية سالبة.

$150° - 360° = -210°$ اطرح $360°$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

22. $\cos 135°$

23. $\tan 150°$

24. $\sin 2\pi$

25. $\cos \frac{3\pi}{2}$

يتضمن ضلع انتهاء الزاوية θ في الوضع القياسي كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة لست نسب مثلثية للزاوية θ.

26. $P(-4, 3)$

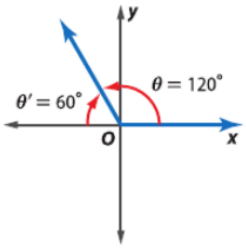
27. $P(5, 12)$

28. $P(16, -12)$

29. الكرة رُميت كرة من أعلى مبنى بزاوية $70°$ وسرعة متجهة أولية قدرها 5 أمتار في الثانية. المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية للكرة x هي $x = v_0 (\cos \theta) t$ حيث v_0 هي السرعة الابتدائية و θ هي الزاوية التي ضُربت بها و t هو الزمن بالثواني. ما المسافة التقريبية التي ستقطعها الصخرة تقريبًا بعد 10 ثوانٍ؟

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 120°$.



حيث إن ضلع انتهاء الزاوية $120°$ يقع في الربع الثاني، فإن زاوية المرجع θ' هي $180° - 120°$ أو $60°$. وتكون نسبة جيب الزاوية موجبة في الربع الثاني.

إذًا $\sin 120° = \sin 60°$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

مثال 5

يتضمن ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي النقطة $(6, 5)$. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ أو $\frac{5\sqrt{61}}{61}$

$\csc \theta = \frac{r}{y}$ أو $\frac{\sqrt{61}}{5}$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$ أو $\frac{6\sqrt{61}}{61}$

$\sec \theta = \frac{r}{x}$ أو $\frac{\sqrt{61}}{6}$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{5}{6}$

$\cot \theta = \frac{x}{y}$ أو $\frac{6}{5}$

10-4 قانون الـ Sine

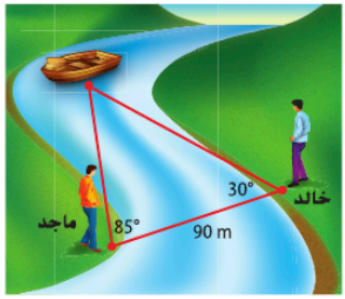
حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أم له حل *واحد*، أم له *حلان*. ثم أوجد حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

30. $C = 118°, c = 10, a = 4$

31. $A = 25°, a = 15, c = 18$

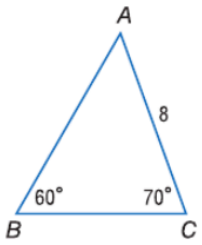
32. $A = 70°, a = 5, c = 16$

33. قارب تقف هدى وبشرى على الضفاف المتقابلة لنهر. كم تبعد هدى عن القارب؟ قرّب إلى أقرب جزء من العشرة إذا لزم الأمر.



مثال 6

أوجد حل $\triangle ABC$.



أولاً، أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$60° + 70° + a = 180°$

$A = 50°$

والآن استخدم قانون الـ Sine وأوجد a و c. اكتب معادلتين، كل منها بمتغير واحد.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 70°}{c}$

$c = \frac{8 \sin 70°}{\sin 60°}$

$c \approx 8.7$

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 50°}{a}$

$a = \frac{8 \sin 50°}{\sin 60°}$

$a \approx 7.1$

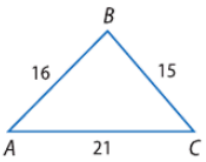
إذًا $A = 50°$ و $c \approx 8.7$ و $a \approx 7.1$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

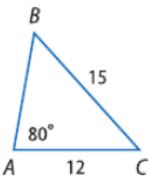
10-5 قانون الـ Cosine

حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ كل مثلث عبر البدء بقانون *الـ Sine* أو قانون *الـ Cosine*. ثمّ حلّ كل مثلث. وقرّب قياس الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

34.



35.



36. $C = 75°,\ a = 5,\ b = 7$

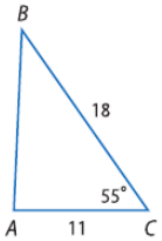
37. $A = 42°,\ a = 9,\ b = 13$

38. $b = 8.2,\ c = 15.4,\ A = 35°$

39. الزراعة يرغب مزارع في إحاطة قطعة من أرضه بسياج. ويبلغ طول ضلعي الحقل 120 مترًا و 325 مترًا ويبلغ قياس الزاوية المحصورة بينهما 70°. ما قدر السياج التي سيحتاجها المزارع؟

مثال 7

حُلّ $\triangle ABC$ حيث $C = 55°$ و $b = 11$ و $a = 18$.



تذكر لك المعطيات قياس ضلعين وزاوية محصورة. ابدأ بتصميم رسم تخطيطي واستخدام قانون الـ Cosine لتحديد c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 182 + 112 - 2(18)(11)\cos 55°$$
$$c^2 \approx 217.9$$
$$c \approx 14.8$$

ثانيًا، يمكنك استخدام قانون الـ Sine لإيجاد قياس الزاوية A.

$$\frac{\sin A}{18} \approx \frac{\sin 55°}{14.8}$$

$\frac{\sin A}{18} \approx \frac{\sin 55°}{14.8}$ أو A تساوي حوالي $85.0°$

يساوي قياس الزاوية B تقريبًا $180 - (85.0 + 55)$ أو $40.0°$.

وبالتالي، $c \approx 14.8$ و $A \approx 85.0°$ و $B \approx 40.0°$.

10-6 الدوال الدائرية والدورية

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة.

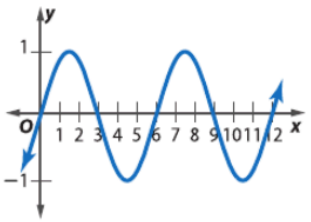
40. $\cos(-210°)$

41. $(\cos 45°)(\cos 210°)$

42. $\sin -\frac{7\pi}{4}$

43. $\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$

44. حدد فترة الدالة.



45. تكمل عجلة قطرها 18 cm أربع دورات في دقيقة. ما فترة الدالة التي تصف ارتفاع بقعة على الحافة الخارجية للعجلة كدالة للزمن؟

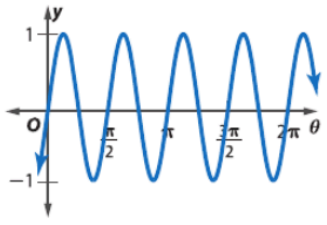
مثال 8

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 510°$.

$$\sin 510° = \sin(360° + 150°)$$
$$= \sin 150°$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال 9

حدد فترة الدالة أدناه.



تكرر النمط نفسه عند $\frac{\pi}{2}$ و π وهكذا. إذًا، الفترة هي $\frac{\pi}{2}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا

أوجد السعة، إن وجدت، والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

46. $y = 4 \sin 2\theta$

47. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

48. $y = 3 \csc \theta$

49. $y = 3 \sec \theta$

50. $y = \tan 2\theta$

51. $y = 2 \csc \frac{1}{2}\theta$

52. عندما تقفز هناء على منصّة قفز ة تهتز المنصة بتردد 10 هرتز. افترضأن السعة تساوي 1.5 m. اكتب معادلة جيب الزاوية لتمثيل تردد منصة القفز y كدالة للزمن t.

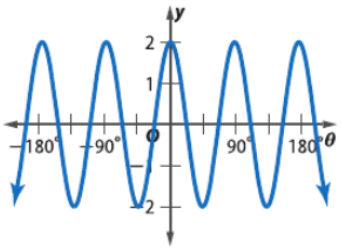
مثال 10

أوجد سعة وفترة $y = 2 \cos 4\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

السعة: $|a| = |2|$ أو 2. التمثيل البياني ممدد رأسيًا، ولذا القيمة العظمى هي 2 والقيمة الصغرى هي -2.

الفترة:

$$\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} \text{ أو } 90°$$



10-8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

اذكر الإزاحة الرأسية والسعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

53. $y = 3 \sin [2(\theta - 90°)] + 1$

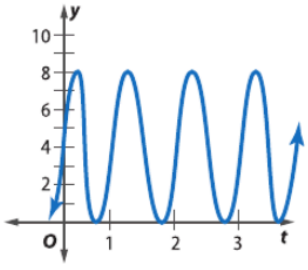
54. $y = \frac{1}{2} \tan [2(\theta - 30°)] - 3$

55. $y = 2 \sec \left[3\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 2$

56. $y = \frac{1}{2} \cos \left[\frac{1}{4}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 1$

57. $y = \frac{1}{3} \sin \left[\frac{1}{3}(\theta - 90°)\right] + 2$

58. يبين التمثيل البياني أدناه تقريب للارتفاع y لحبل يقوم شخصين بتدويره كدالة للزمن t بالثواني. اكتب معادلة للدالة.



مثال 11

اذكر الإزاحة الرأسية السعة والفترة وإزاحة الطور لـ $y = 2 \sin \left[3\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] + 4$. ثم مثل الدالة بيانيًا.

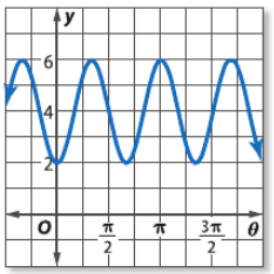
حدد قيم k و a و b و h.

$k = 4$ ، إذْ الإزاحة الرأسية تساوي 4.

$a = 2$ ، إذْ تساوي السعة 2.

$b = 3$ ، إذْ الفترة تساوي $\frac{2\pi}{|3|}$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

$h = -\frac{\pi}{2}$، إذْ تساوي إزاحة الطور $\frac{\pi}{2}$ إلى اليسار.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-9 الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل دالة مثلثية عكسية. اكتب قياس الزوايا بالدرجات والراديان.

59. $\text{Sin}^{-1}(1)$

60. Arctan (0)

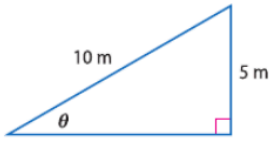
61. $\text{Arcsin}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

62. $\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

63. $\text{Tan}^{-1}1$

64. Arccos 0

65. **المنحدرات** يبلغ ارتفاع منحدر دراجات 5 m ويبلغ طولها 10 m كما هو موضح أدناه. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ وهي الزاوية التي يشكلها المنحدر مع الأرض. ثم أوجد الزاوية.



أوجد قيم كل دالة مثلثية عكسية. قرب إلى أقرب جزء من المئة إذا لزم الأمر.

66. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

67. $\sin\left(\text{Arcsin}\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

68. $\sin\left(\text{Tan}^{-1}0\right)$

حُلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

69. $\text{Tan}\ \theta = -1.43$

70. $\text{Sin}\ \theta = 0.8$

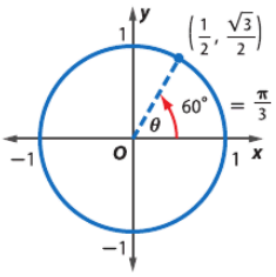
71. $\text{Cos}\ \theta = 0.41$

مثال 12

أوجد قيمة $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$. اكتب قياس الزوايا بالدرجات والراديان.

أوجد لأي اوية θ لـ $0° \le \theta \le 180°$ التي تساوي قيمة جيب تمامها $\frac{1}{2}$.

استخدام دائرة الوحدة.



أوجد نقطة على دائرة الوحدة التي يكون لها الإحداثي x لها يساوي $\frac{1}{2}$. عندما يكون $\text{Cos}\ \theta = \frac{1}{2}$، $\theta = 60°$.

إذًا، $\text{Cos}^{-1} = 60°$ أو $\frac{\pi}{3}$.

مثال 13

أوجد قيمة $\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$. قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: 1 [TAN^{-1}] SIN 2nd ÷ 2)) ENTER 0.4472135955

إذًا $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 0.45$.

مثال 13

إذا كان $\text{Cos}\ \theta = 0.72$، فأوجد θ.

استخدم حاسبة.

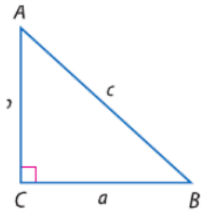
خطوات العملية على الحاسبة: .72 [COS^{-1}] 2nd (ENTER 43.9455195623

إذًا، $\theta \approx 43.9°$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 تدريب على الاختبار

حُـلّ $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياس الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.



1. $A = 36^\circ, c = 9$
2. $a = 12, A = 58^\circ$
3. $B = 85^\circ, b = 8$
4. $a = 9, c = 12$

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

5. 325°
6. -175°
7. $\frac{9\pi}{4}$
8. $-\frac{5\pi}{6}$

9. حدد ما إذا كان $\triangle ABC$ الذي يحتوي على الزوايا $A = 110^\circ$ و $a = 16$ و $b = 21$ لا يوجد له حلول أم حل *واحد* أم *حلين*. ثم أوجد حل المثلث إن أمكن. وقرب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة. اكتب قياس الزوايا بالدرجات.

10. $\cos(-90^\circ)$
11. $\sin 585^\circ$
12. $\cot \frac{4\pi}{3}$
13. $\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$
14. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{4}{5}\right)$
15. $\text{Arccos}\ \frac{1}{2}$

16. يتقاطع ضلع انتهاء الزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. أوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

17. **الاختيار من متعدد** ما الزاوية التي تكون قيمة ظلها وجيبها سالبة؟

A 65°
B 120°
C 265°
D 310°

18. **الملاحة** تقيس الطائرات والسفن المسافة بالأميال البحرية. ويمكن استخدام القانون $6077 - 31\cos 2\theta =$ 1 ميل بحري متر، حيث θ هي خط العرض بالدرجات، لإيجاد الطول التقريبي للميل البحري عند خط عرض محدد. أوجد طول الميل البحري عندما يكون خط العرض يساوي 120°.

أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

19. $y = 2\sin 3\theta$
20. $y = \frac{1}{2}\cos 2\theta$

21. **الاختيار من متعدد** ما فترة الدالة $y = 3\cot\theta$؟

F 120°
G 180°
H 360°
J 1080°

22. حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ $\triangle XYZ$ بالمعطيات $y = 15$ و $z = 9$ و $X = 105^\circ$ عبر البدء بقانون *الـ Sine* أم قانون *الـ Cosine*. ثمّ حلّ المثلث. وقرّب قياس الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

23. $y = \cos(\theta + 180)$
24. $y = \frac{1}{2}\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

25. **العجلات** ساقية مياه قطرها 20 m. وتكمل دورة كاملة في 4 5 s. افترض أن الارتفاع عند أعلى الساقية يمثل الارتفاع عندما يساوي الزمن 0. اكتب معادلة ارتفاع النقطة h في الرسم التخطيطي أدناه كدالة للزمن t. ثم مثل الدالة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام حاسبة علمية

تعتبر الحاسبة العلمية وحاسبة التمثيل البياني من الأدوات القوية لحل المسائل. وكما رأيت، تتضمن بعض مسائل الاختبارات التي تواجهها على خطوات أو عمليات حسابية تتطلب استخدام حاسبة علمية.

إستراتيجيات استخدام حاسبة علمية

الخطوة 1

التعرف على الوظائف المتعددة التي تقوم بها الحاسبة العلمية إلى جانب المواقف التي ينبغي استخدامها فيها:

- **الترميز العلمي**— لحساب الأعداد الكبيرة
- **الدوال الأسية واللوغاريتمية**—مسائل النمو والاضمحلال والمرابحة المركبة
- **الدوال المثلثية**— المسائل المتعلقة بالزوايا والمثلثات ومسائل القياسات غير المباشرة
- **الجذور التربيعية والجذور *النونية*** — المسافة على المستوى الإحداثي ونظرية فيثاغورث

الخطوة 2

استخدام الحاسبة العلمية أو حاسبة التمثيل البياني في حل المسألة.

- تذكر الحل بأكبر قدر ممكن من الفعالية. فيمكن إجراء بعض الخطوات ذهنيًا أو باليد، بينما لا بد من يجب الأخرى باستخدام الحاسبة.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

عندما تقف خديجة على مسافة 18 m من قاعدة شجرة، فإنها تشكل زاوية مقدارها 57° من أعلى الشجرة. فما ارتفاع الشجرة إلى أقرب جزء من عشرة؟

A 27.7 m

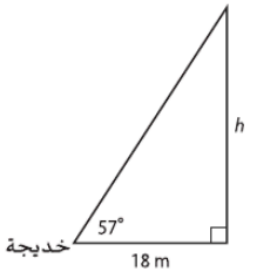
B 28.5 m

C 29.2 m

D 30.1 m

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. وقد تم منحك بعض القياسات وطلب منك إيجاد ارتفاع الشجرة. قد يكون من المساعد أن ترسم أولاً المسألة.



استخدم دالة مثلثية لربط الأطوال وقياس الزاوية في المثلث القائم.

ظل الزاوية $\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ تعريف نسبة ظل الزاوية

$\tan 57° = \frac{h}{18}$ التعويض.

تحتاج إلى إيجاد قيمة $\tan 57°$ لإيجاد الحل بإيجاد قيمة ارتفاع الشجرة h. استخدم حاسبة علمية.

$1.53986 \approx \frac{h}{18}$ استخدم حاسبة.

$27.71748 \approx h$ اضرب كل طرف في 18.

يبلغ ارتفاع الشجرة حوالي 27.7 m. الإجابة الصحيحة هي A.

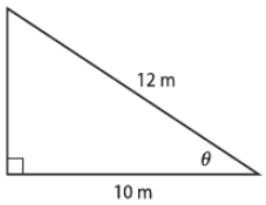
التمارين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. تقلع طائرة وترتفع بسرعة ثابتة. بعد التحرك 800 m أفقيًا، ارتفعت الطائرة 285 m رأسيًا. ما زاوية الارتفاع للطائرة أثناء الإقلاع والارتفاع الابتدائي؟

A 15.6°
B 18.4°
C 19.6°
D 22.3°

2. ما قياس زاوية منحدر الدراجات أدناه؟



F 26.3°
G 28.5°
H 30.4°
J 33.6°

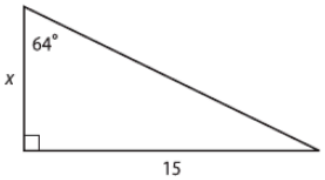
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 تدريب على الاختبارات المعيارية

اختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. ما قيمة x؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



A 6.5

B 6.9

C 7.1

D 7.3

2. يقود حسام دراجته بسرعة 21 km/h ويمكنه قطع حلقة التدريب 10 مرات في الوقت الذي يستغرقه أخوه الصغير لقطع حلقة التدريب 8 مرات. ما التقدير المنطقي لسرعة أخي حسام الصغير؟

F بين 14 km/h و 15 km/h

G بين 15 km/h و 16 km/h

H بين 16 km/h و 17 km/h

J بين 17 km/h و 18 km/h

3. افترض أن محيط عجلة دوارة يبلغ 68 m. وتدور العجلة 12° في كل مرة يتم التقاط راكب جديد بها. فكم تكن المسافة التي تتحركها عندما تدور العجلة 12°؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

A 7.1 m

B 7.5 m

C 7.8 m

D 14.2 m

4. ما ميل المستقيم الموازي لـ $y - 2 = 4(x + 1)$؟

F -4

G $-\frac{1}{4}$

H $\frac{1}{4}$

J 4

5. ما القيمة الدقيقة لـ $\sin 240°$؟

A $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B $-\frac{1}{2}$

C $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. ما حل نظام المعادلات المبين أدناه؟

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -5x + 3y - 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = 11 \end{cases}$$

F (0, 3, 3)

G (2, 5, 3)

H ليس له حل

J عدد لا نهائي من الحلول

7. أوجد m في المثلث MNO إذا كان $n = 12.4$ سنتيمترًا و $M = 35°$ و $N = 74°$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm

B 8.5 cm

C 14.6 cm

D 35.9 cm

8. تُرتب نتائج اقتراع حديث في المصفوفة.

	مع	ضد
المقترح 1	1553	771
المقترح 2	689	1633
المقترح 3	2088	229

بناء على هذه النتائج، أي النتائج تكون غير صالحة؟

F يوجد 771 تصويتًا ضد المقترح 1.

G صوّت المزيد من الأشخاص ضد المقترح 1 عن المقترح 2.

H يتمتع المقترح 2 بفرصة ضئيلة للفوز.

J صوّت المزيد من الأشخاص للمقترح 1 عن المقترح 3.

9. أي من التمثيلات البيانية للمعادلات التالية يكون متماثلاً عبر المحور y؟

A $y = x^2 + 3x - 1$

B $y = -x^2 + x$

C $y = 6x^2 + 9$

D $y = 3x^2 - 3x + 1$

10. ما الباقي عند قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

F -11 **G** -1 **H** 1 **J** 11

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 7 استخدام قانون الـ Sine لحل مسألة المثلث.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

11. يُمكن تمثيل السرعة التي تقطعها أمواج تسونامي، أو موجة المد، بالمعادلة $s = 356\sqrt{d}$، حيث s تمثل السرعةبالكيلومترات في الساعة و d تمثل متوسط عمق المياه بالكيلومتر. وقد توصلنا إلىأن أمواج تسونامي تقطع 145 كيلومترًا في الساعة. ما متوسط عمق المياه؟ قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

12. الإجابة الشبكية افترض أنك أودعت AED500 في حساب يدفع نسبة مرابحة سنوية قدرها 5.4% مركبة بشكل مستمر. أوجد قيمة الحساب بالدرهم بعد 10سنوات.

13. ليظل الخيل بصحة جيدة، يحتاج إلىتناول 5 kg من التبن كل يوم.

a. اكتب معادة لتمثيل مقدار التبن اللازم للحفاظ على صحة x من الخيل لعدد d من الأيام.

b. هل تمثل معادلتك تغيرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًا؟ اشرح سببااختيارك.

c. ما مقدار التبن الذي تحتاجه ثلاثة من الخيول في شهر يوليو؟

14. الإجابة الشبكية ما نصف قطر الدائرة التي تساوي معادلتها $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 28 = 0$؟

15. تتدرب بدرية لتجري سباقkm 10. ويوضح الجدول أدناه الأوقات التي حصلت عليها في العديد من سباقات الكيلومتر. وترد الأوقات بالدقائق. صِف المركز وانشر البيانات باستخدام إما المتوسطوالانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

8.10	7.25
6.75	7.40
7.35	7.20
7.25	7.10
7.45	8.00

16. الإجابة الشبكية يستمر نمط المربعات أدناه إلى ما لا نهاية، مع إضافة مزيد من المربعات في كل خطوة. فكم عدد المربعات في الخطوة العاشرة؟

الخطوة 1 الخطوة 2 الخطوة 3

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

17. توضح ساعات حمدة بوظيفتها الصيفية لأسبوع واحد في الجدول أدناه. وتحصل على AED6 بكل ساعة.

ساعات عمل حمدة	
الأحد	6
الاثنين	6
الثلاثاء	4
الأربعاء	0
الخميس	2
الجمعة	0
السبت	8

a. اكتب تعبيرًا لإجمالي ما تكتسبه حمدة أسبوعيًا.

b. أوجد قيمة التعبير من الجزء a باستخدام خاصية التوزيع.

c. تعمل أمل مع حمدة وتحصل أيضًا على AED6 في الساعة. فإذا كان إجمالي ما اكتسبته أمل هذا الأسبوع AED192، اكتب معادلة وحلها لإيجاد كم عدد الساعات الإضافية التي عملت بها أمل أكثر من حمدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة

11 المتطابقات والمعادلات المثلثية

السابق

- لقد مثّلت الدوال المثلثية بيانيًا وحددت الفترة والسعة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - استخدام المتطابقات المثلثية وإثبات صحتها.
  - استخدام متطابقات مجموع الزوايا والفرق بينها.
  - استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها.
  - حل المعادلات المثلثية.

لماذا؟ ▲

- **الإلكترونيات** يمكن تمثيل الكثير من النواحي الخاصة بالإلكترونيات باستخدام الدوال المثلثية. وتنقل أجهزة المذياع والتلفاز والهاتف الخلوي إضافةً إلى الإنترنت اللاسلكي إشاراتها جميعًا باستخدام أمواج لا سلكية تمثّلهادوال مثلثية. ويمكن إيجاد مقدار الطاقة في أداةٍ إلكترونيةٍ عبر استخدام معادلةٍ مثلثية.

Chapter Sourced From: (Trigonometric Identities and Equations, from Algebra 2 Chapter 13 © 2014) McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح والتأليف © محفوظة لصالح والطبع حقوق

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

حلّل كثيرات الحدود التالية إلى عواملها الأولية. وإذا لم تكن قابلةً للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية* .

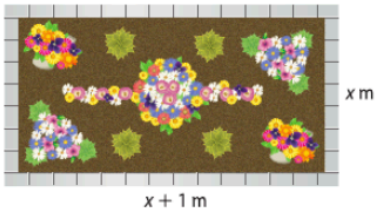
1. $-16a^2 + 4a$
2. $5x^2 - 20$
3. $x^3 + 9$
4. $2y^2 - y - 15$

5. **الهندسة** تساوي مساحة قطعةٍ مستطيلةٍ من الورق المقوى $x^2 + 6x + 8$ سنتيمترات مربعة. فإذا كان طول قطعة الورق المقوى $(x + 4)$ سنتيمترًا، فكم يساوي عرضها؟

حُـلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

6. $x^2 + 6x = 0$
7. $x^2 + 2x - 35 = 0$
8. $x^2 - 9 = 0$
9. $x^2 - 7x + 12 = 0$

10. **تنسيق الحدائق** تبني خديجة حوضًا للأزهار في الفناء الخلفي. وتنوي أن تكون مساحة الحوض 42 مترًا مربعًا. أوجد القيم الممكنة لـ x.



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية مما يلي.

11. $\sin 45°$
12. $\cos 225°$
13. $\tan 150°$
14. $\sin 120°$

15. **ألعاب الملاهي** يمكن إيجاد المسافة من أعلى نقطةٍ في الأرجوحة الدوارة وسطح الأرض عبر ضرب 30 m في $\sin 90°$. فما ارتفاع الأرجوحة الدوارة حين تكون عند منتصف المسافة بين أعلى نقطةٍ والأرض؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حلّل $x^3 + 2x^2 - 24x$ إلى عواملها الأولية.

$x^3 + 2x^2 - 24x = x(x^2 + 2x - 24)$

يجب أن يساوي ناتج ضرب معاملات حدود x القيمة -24. ويجب أن يساوي مجموعها 2. يساوي ناتج ضرب العددين 6 و -4 العدد -24 ويساوي مجموعهما العدد 2.

$x(x^2 + 2x - 24) = x(x + 6)(x - 4)$

مثال 2

حُـلّ العلاقة التالية $x^2 + 6x + 5 = 0$ عن طريق التحليل إلى العوامل.

$x^2 + 6x + 5 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x + 5)(x + 1) = 0$ عامل.

$x + 5 = 0$ أو $x + 1 = 0$

$x = -5$ $x = -1$

مجموعة الحلول هي $\{-5, -1\}$.

مثال 3

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 135°$.

تساوي زاوية الإسناد $180° - 135°$ أو $45°$.

$\cos 45°$ يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$. وبما أن الزاوية $135°$ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك للوحدة 11.
ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

المتطابقات والمعادلات المثلثية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 11 حول المتطابقات والمعادلات المثلثية. وابدأ بورقةٍ قياسها 17″ × 11″ وأربع أوراقٍ شبكية.

1 **اطوِ** الضلعين القصيرين للورقة التي قياسها 17″ × 11″ ليلتقيا في منتصف الورقة.

2 **قُص** كل لسانٍ إلى نصفين كما هو موضح.

3 **قُصّ** أربع أوراقٍ من الورق الشبكي إلى نصفين واطوِ كل نصف ورقة إلى نصفين.

4 **أقحِم** النصفين المطويين تحت كلٍ من الألسنة الأربعة وضع دبابيس على طول الطيّة. سَمِّ كل لسانٍ كما هو موضح.

المفردات الجديدة

trigonometric identity	متطابقة مثلثية
quotient identity	متطابقة ناتج قسمة
reciprocal identity	متطابقة عكسية
Pythagorean identity	متطابقة فيثاغورس
cofunction identity	متطابقة زاويتين متتامتين
negative angle identity	متطابقة الزوايا السالبة
trigonometric equation	معادلة مثلثية

مراجعة المصطلحات

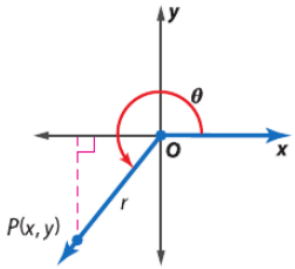
الصيغة جملة رياضيات تعبر عن العلاقة بين كميات بعينها

المتطابقة هي جملة رياضيات صحيحةً لجميع قيم المتغيرات التي تضمها

النسب المثلثية لكل زاوية قياسها θ هناك نقطة $P(x, y)$ على ضلع الانتهاء لها. بحيث يكون $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ والنسب المثلثية للزاوية θ هي كالتالي.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y}$$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-1 المتطابقات المثلثية

السابق:
- لقد أوجدت قيم دوال مثلثية.

الحالي:
1. استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم المثلثية.
2. استخدام المتطابقات الهندسية لتبسيط التعابير.

لماذا؟
- تدعى كمية الضوء التي يقدّمها مصدرٌ لسطحٍ *بالاستضاءة*. وترتبط الاستضاءة E، مقدرةً بوحدة قدم-شمعة على سطحٍ ما، ببعد السطح R بالأقدام عن مصدر الضوء. يمكن استخدام القانون $E = \frac{I}{ER^2}$، θ، والذي فيه I تمثل شدّة مصدر الضوء مقاسة بالشمعة و θ هي الزاوية بين حزمة الضوء ومستقيم عمودي على السطح، في الحالات التي تعدّ فيها الإضاءة هامة، كالتصوير الضوئي.

المفردات الجديدة

متطابقة مثلثية
trigonometric identity

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

محاولة إيجاد البنية واستخدامها

1 إيجاد القيم المثلثية

يمكن كتابة المعادلة أعلاه بالصيغة $E = \frac{I \cos \theta}{R^2}$. وهي مثال عن متطابقة مثلثية. و**المتطابقة المثلثية** هي جملة رياضيات تشتمل على نسب مثلثية، وهي صحيحةٌ لكلّ القيم التي يكون فيها كل تعبيرٍ في الجملة معرّفًا.

إذا كنت تستطيع أن تثبت أن قيمةً محددةً للمتغير في المعادلة تجعل المعادلة خاطئة، إذًا فعليك أن تكتب *مثالاً مضادًا*. ويكفي مثالٌ مضادٌ واحدٌ لإثبات أن معادلةً ما ليست متطابقة.

المفهوم الأساسي المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات ناتج القسمة		
$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$	
المتطابقات العكسية		
$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$, $\csc \theta \neq 0$	
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$, $\sec \theta \neq 0$	
$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$, $\tan \theta \neq 0$	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$, $\cot \theta \neq 0$	
متطابقات فيثاغورس		
$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين		
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$
متطابقات الزوايا السالبة		
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$

يطلق على متطابقات الزوايا السالبة في بعض الأحيان اسم متطابقات *الدوال الزوجية والفردية*.

المتطابقة $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ صحيحة إلا من أجل قياسات زوايا من قبيل 90°، 270°، ... ، 90° + k180°، حيث k عدد صحيح. يساوي جيب التمام لكلٍّ من قياسات هذه الزوايا 0، إذًا $\tan \theta$ ليس معرفًا عند $\cos \theta = 0$. وثمة متطابقةٌ مشابهةٌ لذلك وهي $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم الدقيقة للنسب المثلثية. ويمكنك إيجاد قيمٍ تقريبيةٍ باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مثال 1 استخدام المتطابقات المثلثية

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ و $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ بطرح $\sin^2\theta$ من كل طرف.

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$ بتعويض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$ بتربيع $\frac{1}{4}$.

$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$ بالطرح: $\frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن الزاوية θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ سالب. ولذلك، $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد إجابةٍ تقريبية.

الخطوة 1 أوجد قيمة Arcsin $\frac{1}{4}$.

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ باستخدام حاسبة.

نظرًا إلى أن $90° < \theta < 180°$، فإن $\theta \approx 180° - 14.48°$ أو حوالي $165.52°$.

الخطوة 2 أوجد قيمة $\cos\theta$.

عوّض θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3 قارن مع القيم الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} 0.97$

$-0.968 \approx 0.97$ ✓

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5}$ و $270° < \theta < 360°$.

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ متطابقة فيثاغورس

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$ بتعويض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$.

$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$ بتربيع $-\frac{3}{5}$.

$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$ بالجمع: $\frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$.

$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$ بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن الزاوية θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالب. وهكذا فإن $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

تمرين موجّه

1A. أوجد قيمة $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ و $270° < \theta < 360°$.

1B. أوجد قيمة $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ و $180° < \theta < 270°$.

نصيحة دراسية

الأرباع إليك جدول لمساعدتك في تذكّر أيّ القيم تكون موجبةً وأيّها تكون سالبةً في كل ربع.

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\csc\theta$	1, 2	3, 4
$\sec\theta$	1, 4	2, 3
$\cot\theta$	1, 3	2, 4

2 تبسيط التعابير

يعني تبسيط تعبيرٍ يضمّ دوال مثلثية كتابة ذلك التعبير في صورة قيمةٍ عدديةٍ بدلالة نسبةٍ مثلثيةٍ واحدةٍ في حال كان ذلك ممكنًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 تبسيط التعابير

بسّط التعبير $\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta} \text{ و } \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تمرين موجّه

بسّط كلًا من التعابير التالية.

2A. $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta-1}{\sec^2\theta}$

2B. $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

نصيحة دراسية

التبسيط من الأسهل في أغلب الأحيان كتابة جميع التعابير بدلالة الجيب و/أو جيب التمام.

ويمكن أن يكون تبسيط التعابير المثلثية مفيدًا عند حل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية تبسيط التعابير واستخدامها

الإضاءة راجع بداية الدرس.

a. أوجد حلًا للصيغة بدلالة E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2\sec\theta = I \qquad \text{بضرب كل طرف في } ER^2.$$

$$ER^2\frac{1}{\cos\theta} = I \qquad \frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

$$\frac{E}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \text{بقسمة كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \text{بضرب كل طرف في } \cos\theta.$$

b. هل المعادلة الواردة في الجزء a مكافئة للمعادلة $R^2=\frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$؟ اشرح.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad \text{بضرب كل طرف في } E.$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad \text{بقسمة كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسّط.}$$

لا؛ المعادلتان ليستا متكافئتين. حيث تُبسط المعادلة $R^2=\frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ إلى $E=\frac{I\sin\theta}{R^2}$.

تمرين موجّه

3. أعد كتابة $\cot^2\theta-\tan^2\theta$ بدلالة $\sin\theta$.

الربط بتاريخ الرياضيات

أريابهاتا (476–550 ميلادي)

لعلّ أريابهاتا هو الأشهر من بين علماء الرياضيات الهنود. وقد ارتبط اسمه بصورةٍ وثيقةٍ بموضوع الحساب المثلثي. فقد كان أول من أدخل الدوال المثلثية العكسية وحساب المثلثات الكروية. وحسب أريابهاتا أيضًا القيم التقريبية للعدد باي إضافةً للدوال المثلثية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$.**

1. إذا كان $\cot \theta = 2$، أوجد $\tan \theta$.

2. إذا كان $\sin \theta = \frac{4}{5}$، أوجد $\cos \theta$.

3. إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$، أوجد $\sin \theta$.

4. إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$، أوجد $\csc \theta$.

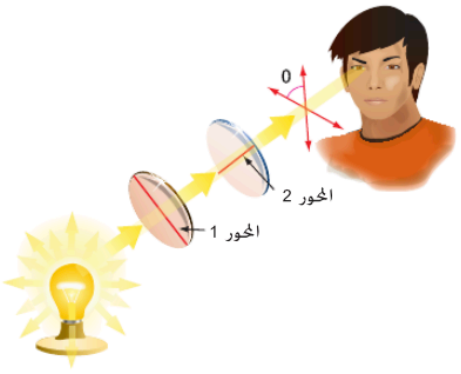
مثال 2 **بسّط كلًّا من التعابير الآتية.**

5. $\tan \theta \cos^2 \theta$

6. $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$

7. $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$

مثال 3 **8.** **المثابرة** عندما يمرّ ضوء غير مستقطب من خلال عدسة نظارةٍ شمسيةٍ مستقطبة، تنخفض شدة الضوء إلى النصف. وإذا مرّ الضوء بعد ذلك من خلال عدسةٍ مستقطبةٍ أخرى يقع محورها عند زاوية θ بالنسبة للعدسة الأولى، فإن شدّة الضوء تنخفض مرةً أخرى. ويمكن إيجاد شدّة الضوء الخارج باستخدام الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$ وفيها I_0 هي شدّة الضوء الوارد إلى العدسة المستقطبة الثانية، و I هي شدّة الضوء الخارج، و θ هي الزاوية بين محوري الاستقطاب.



a. بسّط الصيغة بدلالة $\cos \theta$.

b. استخدم الصيغة المبسّطة لتحديد شدّة الضوء المارّ عبر عدسة استقطابٍ ثانيةٍ يشكّل محورها زاويةً قياسها $30°$ بالنسبة للعدسة الأصلية.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا علمت أن $0° < \theta < 90°$.**

9. إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$، أوجد $\csc \theta$.

10. إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$، أوجد $\tan \theta$.

11. إذا كان $\sin \theta = \frac{3}{5}$، أوجد $\cos \theta$.

12. إذا كان $\tan \theta = 2$، أوجد $\sec \theta$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $180° < \theta < 270°$.

13. إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$، أوجد $\csc \theta$.

14. إذا كان $\sec \theta = -3$، أوجد $\tan \theta$.

15. إذا كان $\cot \theta = \frac{1}{4}$، أوجد $\csc \theta$.

16. إذا كان $\sin \theta = -\frac{1}{2}$، أوجد $\cos \theta$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $270° < \theta < 360°$.

17. إذا كان $\cos \theta = \frac{5}{13}$، أوجد $\sin \theta$.

18. إذا كان $\tan \theta = -1$، أوجد $\sec \theta$.

19. إذا كان $\sec \theta = \frac{5}{3}$، أوجد $\cos \theta$.

20. إذا كان $\csc \theta = -\frac{5}{3}$، أوجد $\cos \theta$.

مثال 2 **بسّط كلًّا من التعابير الآتية.**

21. $\sec \theta \tan^2 \theta + \sec \theta$

22. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cot \theta$

23. $\cot \theta \sec \theta$

24. $\sin \theta (1 + \cot^2 \theta)$

25. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec \theta$

26. $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3

27. الإلكترونيات عندما يمرّ تيارٌ كهربائيّ في سلكٍ موضوعٍ ضمن حقلٍ مغناطيسي، كما في مجفف الشعر، تتولّد قوةٌ تؤثّر في السلك. ويمكن تحديد قوة الحقل المغناطيسي باستخدام القانون $B = \frac{F \csc \theta}{I\ell}$، حيث F هي القوة المؤثرة في السلك، و I هي شدّة التيار المار بالسلك، و ℓ هو طول السلك، و θ هي الزاوية التي يصنعها السلك مع الحقل المغناطيسي. أعد كتابة المعادلة بدلالة θ. (تلميح: حُلّ لإيجاد F.)

بسّط كلًّا من التعابير الآتية.

28. $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

29. $\tan \theta \csc \theta$

30. $\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

31. $2(\csc^2 \theta - \cot^2 \theta)$

32. $(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$

33. $2 - 2 \sin^2 \theta$

34. الشمس تتعلق قدرة جسمٍ على امتصاص الضوء بعاملٍ يدعى انبعاثية الجسم e. ويمكن حساب الانبعاثية باستخدام القانون $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$، حيث W هو معدّل امتصاص بشرة شخصٍ للضوء الصادر عن الشمس، و S هي الطاقة الصادرة عن الشمس مقدرةً بالواط في المتر المربع، و A هي مساحة السطح المعرّض للشمس، و θ هي الزاوية بين الإشعاعات الشمسية وخطٍ عموديٍ على الجسم.

a. حُلّ المعادلة لإيجاد W. واكتب إجابتك فقط باستخدام $\sin \theta$ أو $\cos \theta$.

b. أوجد قيمة W إذا كان $e = 0.80$ و $\theta = 40°$ و $A = 0.75\ \text{m}^2$ و $S = 1000\ \text{W/m}^2$. وقرّب الإجابة إلى أقرب جزءٍ من مئة.

35. تمثيل النماذج تعرض الخريطة بعضًا من المباني في حيّ إيمان، والتي تزورها بصورةٍ دورية. يساوي جيب الزاوية θ المتشكّلة بين الطرق التي تربط بين المكتبة والمدرسة ومنزل إيمان $\frac{4}{9}$.

a. ما جيب التمام للزاوية؟

b. ما ظل الزاوية؟

c. ما جيب الزاوية المتشكلة من الطرقات التي تربط بين منزل معلّم الفنون والمدرسة ومنزل إيمان وما جيب تمامها وظلّها؟

36. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحدد ما إذا كانت معادلةٌ متطابقةً مثلثية. فكّر في المتطابقة الهندسية $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$.

a. جدوليًا انسخ الجدول أدناه وأكمله.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$				
$\tan^2 \theta \sin^2 \theta$				

b. بيانيًا استخدم حاسبةً للتمثيل البياني من أجل تمثيل $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$ في صورة دالتين منفصلتين. وارسم التمثيل البياني.

c. تحليليًا إذا لم يكن التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين، إذًا فالمعادلة ليست متطابقة. هل يتطابق التمثيلان البيانيان؟

d. تحليليًا استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحدد ما إن كانت المعادلة $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ متطابقة. (تحقق من ضبط حاسبتك على نمط الدرجات.)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

37. التزلج يهبط متزلجٌ كتلته m على تلةٍ زاويتها θ درجةً بسرعة ثابتة. وعند تطبيق قوانين نيوتن على هذه الحالة، ينتج نظام المعادلات التالي: $F_n - mg\cos\theta = 0$ و $mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$. حيث g هو التسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية، و F_n هي القوة العمودية المؤثرة في المتزلج، و μ_k هو معامل الاحتكاك. استخدم نظام المعادلات لتحديد μ_k بدلالة θ.

بسّط كل تعبير مما يلي.

38. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta}{1-\csc^2\theta}$

39. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

40. $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

41. $\dfrac{\cot\theta\cos\theta}{\tan(-\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. النقد يتناقش إبراهيم وأحمد بشأن ما إذا كانت إحدى المعادلات الواردة في واجبهم المنزلي متطابقة. حيث يقول إبراهيم إنه ونظرًا لتجريبه عشر قيمٍ محددةٍ وإلى أنّها جميعًا كانت صالحة، فلا بدّ أنها متطابقة. في حين يجادل أحمد أنه لا يمكن استخدام سوى قيمٍ محددةٍ بمثابة أمثلةٍ مضادة لإثبات عدم كون معادلةٍ متطابقة. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

43. تحدٍ أوجد مثالًا مضادًا لتثبت أن $\cos x = 1 - \sin x$ ليست متطابقة.

44. التبرير وضّح كيف يمكن إعادة كتابة قانون الاستضاءة الوارد في بداية هذا الدرس لإثبات أن $\theta = \frac{ER^2}{I}$.

45. الكتابة في الرياضيات تعود شهرة العالم فيثاغورس في جلّها إلى نظرية فيثاغورس. وتعدّ المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ مثالًا عن متطابقات فيثاغورس. فلِمَ تصنّف هذه المتطابقة كذلك برأيك؟

46. البرهان أثبت أنّ $\tan(-a) = -\tan a$ باستخدام متطابقات ناتج القسمة والزاوية السالبة.

47. مسألة غير محددة الإجابة اكتب تعبيرين مكافئين لـ $\tan\theta\sin\theta$.

48. التبرير اشرح كيف تستطيع استخدام القسمة لإعادة كتابة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ بصورة $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

49. تحدٍ أوجد $\cot\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و $90° \le \theta < 180°$.

50. تحليل الخطأ تبسّط إيمان وأسماء العلاقة $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إيمان

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \tan^2\theta + 1$$
$$= \sec^2\theta$$

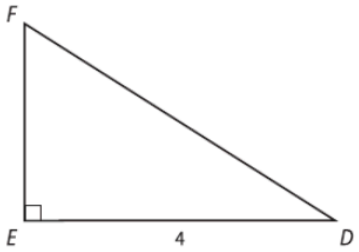
أسماء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$= \sin^2\theta$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

51. ارجع إلى الشكل الموضح أدناه. إذا كان $\cos D = 0.8$. فما طول $\overline{DF}$؟



A 5
B 4
C 3.2
D $\frac{4}{5}$

52. الاحتمالات يحتوي وعاءٌ على 16 كرة رخامٍ خضراء و كرتي رخامٍ حمراوين و 6 كرات رخام صفراء. فكم عدد كرات الرخام الصفراء التي تنبغي إضافتها إلى الوعاء من أجل مضاعفة احتمال اختيار كرة رخامٍ صفراء؟

F 4
G 6
H 8
J 12

53. SAT/ACT تصغر أماني أمل بـ 6 سنوات. وعمر آمنة يساوي ضعف عمر أمل. ويساوي مجموع أعمارهنّ جميعًا 54. فأيّ معادلةٍ مما يلي يمكن استخدامها لإيجاد عمر أمل؟

A $x + (x - 6) + 2(x - 6) = 54$
B $x - 6x + (x + 2) = 54$
C $x - 6 + 2x = 54$
D $x + (x - 6) + 2x = 54$
E $2(x + 6) + (x + 6) + x = 54$

54. أيّ من الدّوال التالية تمثّل نموًا أسيًا؟

F $y = (0.3)^x$
G $y = (1.3)^x$
H $y = x^3$
J $y = x^{\frac{1}{3}}$

مراجعة شاملة

أوجد كل قيمةٍ مما يلي، واكتب قياس الزوايا بالراديان، وقرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

55. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

56. $\text{Sin}^{-1}\frac{\pi}{2}$

57. $\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}$

58. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{6}{7}\right)$

59. $\sin\left(\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

60. $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$

61. الفيزياء يربط ثقلٌ إلى نابضٍ ويعلّق من السقف. وعند التوازن، يتوضّع الثقل على ارتفاع 4 m فوق الأرضية. يُسحب الثقل إلى الأسفل مسافة 1 m ثمّ يُحرّر. اكتب معادلة المسافة d للثقل الموجود فوق سطح الأرضية بدلالة الزمن t s على فرض أن الثّقل يعود إلى وضعيته الدنيا كلّ 4 s.

أوجد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

62. $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{4} \cdot 2^{k-1}$

63. $\sum_{k=1}^{7} 81\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

64. $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{3} \cdot 5^{k-1}$

مراجعة المهارات

حُلّ كل معادلة مما يلي.

65. $a + 1 = \frac{6}{a}$

66. $\frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$

67. $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

السابق

- لقد استخدمت المتطابقات لإيجاد القيم المثلثية وتبسيط التعابير.

الحالي

1. إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل أحد طرفي المتطابقة إلى صيغة الطرف الآخر.
2. إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل كل طرفٍ في المتطابقة إلى الصيغة نفسها.

لماذا؟

- حين كان خالد يركض على مضمارٍ دائري، لاحظ أن جسمه لم يكن عموديًا على الأرض. بل كان يميل بعيدًا عن الوضعية الرأسية. وتدعى الزاوية الحادة غير السالبة θ والتي يصنعها جسم خالد مع الشاقول باسم *زاوية الميل* وتوصف بالمعادلة $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$.

هذه المعادلة ليست المعادلة الوحيدة التي تصف زاوية الميل بدلالة النسب المثلثية. فهناك معادلةٌ أخرى من هذا النوع صيغتها $\sin \theta = \cos \frac{v^2}{gR}\theta$، حيث $0 \le \theta \le 90°$.

هل هاتان المعادلتان مستقلتان تمامًا عن بعضهما أم أنهما نسختان مختلفتان عن علاقةٍ واحدة؟

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 تحويل أحد طرفي المتطابقة

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية إضافةً إلى تعاريف الدوال المثلثية لإثبات صحة المتطابقات. فإذا أردت إثبات متطابقةٍ ما، فيتعين عليك إثبات صحتها من أجل جميع قيم θ.

المفهوم الأساسي إثبات المتطابقات عبر تحويل طرفٍ واحد

الخطوة 1 بسّط طرفًا واحدًا من المتطابقة إلى أن يصبح طرفاها متماثلين. وغالبًا ما تكون هذه الطريقة أسهل لمعالجة الطرف الأكثر تعقيدًا في المتطابقة.

الخطوة 2 حوّل ذلك التعبير إلى صيغة الطرف الأبسط.

مثال 1 تحويل طرف واحد في متطابقة

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta$.

$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$	المتطابقة الأصلية
$\frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$	اضرب البسط والمقام في $1 + \cos \theta$.
$\frac{\sin^2 \theta(1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$	$(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \cos^2 \theta$
$\frac{\sin^2 \theta(1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$	$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$
$1 + \cos \theta = 1 + \cos \theta$ ✓	بقسمة البسط والمقام على $\sin^2 \theta$.

تمرين موجّه

1. أثبت صحة المتطابقة $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

عند اثبات صحة متطابقةٍ مثلثية، فإنك في الحقيقة تحلّ بترتيبٍ عكسي. ففي المثال 1 ، خذ الخطوة الأخيرة $1 + \cos\theta = 1 + \cos\theta$. بما أن تلك الخطوة صحيحةٌ بوضوح، فيمكنك أن تستنتج أن الخطوة التالية إلى الأخيرة صحيحةٌ أيضًا، وهكذا دواليك بالعودة إلى المتطابقة الأصلية.

مثال 2 على الاختبار المعياري تبسيط التعابير

$\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} =$

A $\cot\theta$ **B** $\csc\theta$ **C** $\cot^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

قراءة فقرة الاختبار

أوجد تعبيرًا يساوي على الدوام التعبير المعطى. ولاحظ أن خيارات الإجابات جميعها إما تضمّ $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. ولذلك حلّ باتجاه اختزال الدوال المثلثية الأخرى.

حَل فقرة الاختبار

حوّل التعبير المعطى ليطابق أحد الخيارات.

$\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ و $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ بالضرب.

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ بقلب المقام والضرب

$= \cot\theta \cdot \cot\theta$ $= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \cot^2\theta$ بالضرب.

الإجابة هي C.

انتبه!

المثابرة يشبه إثبات صحة متطابقةٍ التحقق من حل معادلة. وعليك تبسيط أحد الطرفين أو كليهما بصورةٍ منفصلةٍ إلى أن يصبحا متطابقين.

نصيحة عند حل الاختبار

التحقق من الإجابات تحقق من صحة إجابتك عبر اختيار قيمٍ لـ θ. ثم قدّر قيمة التعبير الأصلي وقارنه مع إجابتك المختارة.

تمرين موجّه

2. $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta) =$

F $\cot^2\theta$ **G** $\tan^2\theta$ **H** $\cos^2\theta$ **J** $\sin^2\theta$

2 تحويل طرفي المتطابقة

من الأسهل أحيانًا تحويل كل طرفٍ من طرفي المتطابقة بصورةٍ منفصلة إلى صيغةٍ مشتركة. ومن شأن الاقتراحات التالية أن تساعدك في إثبات المتطابقات المثلثية.

المفهوم الأساسي اقتراحات لإثبات المتطابقات

- عوّض واحدة أو أكثر من المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط التعبير.
- حلّل إلى العوامل أو اضرب حسب الضرورة. وقد يتعيّن عليك ضرب البسط والمقام في التعبير المثلثي نفسه.
- اكتب كلاً من طرفي المتطابقة بدلالة الجيب وجيب التمام فقط. ثمّ بسّط كلاً من الطرفين قدر الإمكان.
- لا تنطبق خواصّ المساواة على المتطابقات بالكيفية التي تنطبق بها على المعادلات. فلا تقم بعملياتٍ على الكميات في كلٍ من طرفي متطابقةٍ ليست مثبتة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 الإثبات بتحويل كلا الطرفين

أثبت صحة المتطابقة $1 - \tan^4 \theta = 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$.

$1 - \tan^4 \theta \stackrel{?}{=} 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$	المتطابقة الأصلية
$(1 - \tan^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) \stackrel{?}{=} \sec^2 \theta (2 - \sec^2 \theta)$	بتحليل كل طرف إلى العوامل.
$[1 - (\sec^2 \theta - 1)] \sec^2 \theta \stackrel{?}{=} (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$(2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta = (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta$ ✓	بسّط.

تمرين موجّه

3. أثبت صحة المتطابقة $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta$.

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **الدقة** **أثبت صحة كل متطابقة مما يلي.**

1. $\cot \theta + \tan \theta = \dfrac{\sec^2 \theta}{\tan \theta}$
2. $\cos^2 \theta = (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$
3. $\sin \theta = \dfrac{\sec \theta}{\tan \theta + \cot \theta}$
4. $\tan^2 \theta = \dfrac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$
5. $\tan^2 \theta \csc^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$
6. $\tan^2 \theta = (\sec \theta + 1)(\sec \theta - 1)$

مثال 2 **7. الاختيار من متعدد** ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتشكيل متطابقةٍ فيها $\dfrac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta}$؟

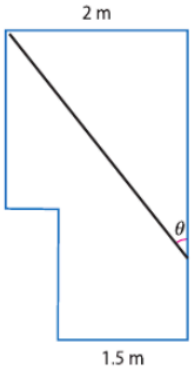
A $\sin^2 \theta$ **B** $\cos^2 \theta$ **C** $\tan^2 \theta$ **D** $\csc^2 \theta$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أثبت صحة كل متطابقة مما يلي.**

8. $\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$
9. $\cot \theta (\cot \theta + \tan \theta) = \csc^2 \theta$
10. $1 + \sec^2 \theta \sin^2 \theta = \sec^2 \theta$
11. $\sin \theta \sec \theta \cot \theta = 1$
12. $\dfrac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = (\csc \theta - \cot \theta)^2$
13. $\dfrac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \tan \theta - \cot \theta$
14. $\tan \theta = \dfrac{\sec \theta}{\csc \theta}$
15. $\cos \theta = \sin \theta \cot \theta$
16. $(\sin \theta - 1)(\tan \theta + \sec \theta) = -\cos \theta$
17. $\cos \theta \cos (-\theta) - \sin \theta \sin (-\theta) = 1$

مثال 2 **18. السلّم** استنتج بعض الطلاب تعبيرًا لحساب طول سلّم. علمًا أنه حين يُحمل بصورةٍ مسطحةٍ فإنه يمكن أن يشغل زاويةً بحيث يمتدّ من رواقٍ عرضه 1.5 m إلى رواقٍ عرضه 2 m كما هو موضح. وقد حدّدوا أن الطول الأقصى ℓ لسلمٍ يشغل هذا الركن يعطى بالعلاقة $\ell(\theta) = \dfrac{2 \sin \theta + 1.5 \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$. وعندما حلّت المعلمة المسألة، استنتجت أن $\ell(\theta) = 2 \sec \theta + 1.5 \csc \theta$. فهل التعبيران متكافئان؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 أثبت صحة كل متطابقة في ما يلي:

19. $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

20. $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

21. $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

22. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

23. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

24. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

25. $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

26. $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

27. $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

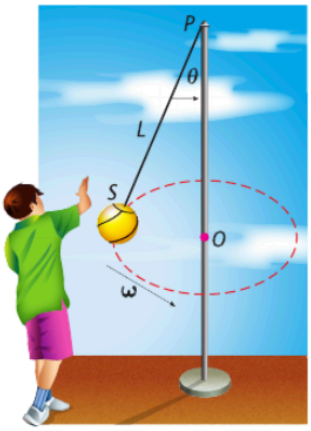
28. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

29. $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

30. $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

31. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

32. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$



33. **التبرير المتطلق** يبين الرسم التخطيطي على الجهة اليسرى لعبة كرة الحبل. حين تدور الكرة حول السارية، تمسح القطعة المستقيمة $\overline{SP}$ سطحًا مخروطيًا. تعطى صيغة تعبر عن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية التي يشكلها الحبل مع السارية θ بالمعادلة $L = \dfrac{g\sec\theta}{\omega^2}$. فهل $L = \dfrac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا معادلة تعبر عن العلاقة بين L و θ؟

34. **الجري** يأخذ جزء من مضمار سباق شكل قوس دائري نصف قطره 16.7 مترًا. وعندما يجري عداء على طول القوس، يوجد أن جيب زاوية ميل جسده θ يساوي $\dfrac{1}{4}$. أوجد سرعة العداء. واستخدم صيغة زاوية الميل الواردة في بداية الدرس، $\tan\theta = \dfrac{v^2}{gR}$. حيث $g = 9.8$ و R هو نصف القطر. (نصيحة: أوجد $\cos\theta$ أولاً.)

عند تبسيط التعبير، فهل يساوي 1 أم 1−؟

35. $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

36. $\sin\theta\csc(-\theta)$

37. $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$

38. $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

39. $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$

40. $\cot(-\theta)\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

بسّط التعبير إلى ثابتٍ أو إلى دالة مثلثية أساسية.

41. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$

42. $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

43. $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$

44. $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

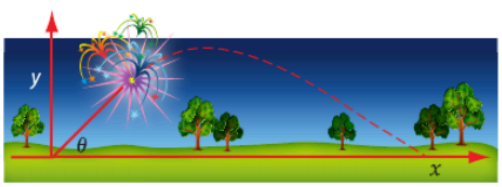
45. $\tan\theta\cos\theta$

46. $\cot\theta\tan\theta$

47. $\sec\theta\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

48. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{\csc^2\theta}$

49. **الفيزياء** عند إطلاق إحدى الألعاب النارية من سطح الأرض، يرتبط ارتفاعها y بإزاحتها الأفقية x من خلال المعادلة $y = \dfrac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \dfrac{x\sin\theta}{\cos\theta}$. وفيها v_0 هي السرعة الاتجاهية البدائية للمقذوف، و θ هي زاوية إطلاق المقذوف، و g هو تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة المعادلة بحيث تكون $\tan\theta$ هي الدالة المثلثية الوحيدة التي تظهر في المعادلة.



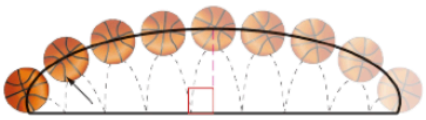
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

50. الإلكترونيات عند مرور تيارٍمتناوبٍ تردده f وذروته I_0 من خلال مقاومة R، فإن القدرة التي تبلغ المقاومة عند الزمن t ثانية تعطى بالعلاقة $P = I_0^2 R \sin^2 2\pi ft$.

a. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$.

b. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$.

51. رمي كرة في هذه المسألة، سوف تستكشف مسار كرةٍ تمثّله المعادلة $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$، حيث θ هي قياس الزاوية بين الأرض ومسار الكرة، و v_0 هي سرعتها المتجهة البدائية بالأمتار في الثانية، و g هو تسارع الجاذبية الأرضية. وقيمة g تساوي $9.8\ m/s^2$.



a. إذا كانت السرعة المتجهة البدائية للكرة تساوي 47 مترًا في الثانية، أوجد ارتفاع الكرة عند الزوايا $30°$ و $45°$ و $60°$ و $90°$. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

b. مثّل المعادلة بيانيًا على حاسبةٍ للتمثيل البياني.

c. أثبت أن الصيغة $h = \frac{v_0^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ مكافئة للصيغة المعطاة أعلاه.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. الفرضيات حدّد المتطابقة التي لا تنتمي إلى المعادلات الثلاث الأخرى. واشرح استنتاجك.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta + 1$
$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

53. تحدٍ حوّل الطرف الأيمن من $\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$ لتثبت أن $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$.

54. الكتابة في الرياضيات اشرح السبب في أنك لا تستطيع تربيع كلٍ من طرفي متطابقةٍ عندما تثبت صحة متطابقةٍ مثلثية.

55. التبرير اشرح السبب في أن $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos \theta}$ ليست كذلك.

56. كتابة سؤال يعاني أحد الزملاء في الصف من صعوبةٍ أثناء محاولة إثبات صحة متطابقةٍ مثلثيةٍ تتضمن العديد من النسب المثلثية لزوايا لها درجات متعددة. اكتب متطابقةً لمساعدته في حلّ المسألة.

57. الكتابة في الرياضيات لماذا تعتقد أن التعابير في المتطابقات المثلثية تعاد كتابتها غالبًا بدلالة الجيب وجيب التمام؟

58. تحدٍ ليكن $x = \frac{1}{2} \tan \theta$، حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. اكتب $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$ بدلالة دالةٍ مثلثيةٍ واحدة لـ θ.

59. التبرير برّر المتطابقات المثلثية الأساسية الثلاثة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

60. SAT/ACT يضطر صاحب إحدى الشركات الصغيرة توظيف عمّال موسميين حينما تقتضي الحاجة ذلك. توضح القائمة التالية عدد العاملين الذين وُظّفوا شهريًا خلال مدة 5 أشهر.

5, 14, 6, 8, 12

إذا كان متوسط هذه البيانات يساوي 9 فما الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي لهذه البيانات؟ (قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرة)

A 3.5
B 3.9
C 5.7
D 8.6
E 12.3

61. أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x - 4)^2 + y^2 - 16 = 0$.

F $C(-4, 0)$; $r = 4$ وحدات
G $C(-4, 0)$; $r = 16$ وحدة
H $C(4, 0)$; $r = 4$ وحدات
J $C(4, 0)$; $r = 16$ وحدة

62. الهندسة يساوي محيط مثلث قائم الزاوية 36 cm. فإذا علمتأن طول الساق الأطول ناقصًا منه ضعف طول الساق الأقصريساوي 6 cm. فماأطوال أضلاع المثلث الثلاثة جميعها؟

A 3 cm, 4 cm, 5 cm
B 6 cm, 8 cm, 10 cm
C 9 cm, 12 cm, 15 cm
D 12 cm, 16 cm, 20 cm

63. بسّط $128^{\frac{1}{4}}$.

F $2\sqrt[4]{2}$
G $2\sqrt[4]{8}$
H 4
J $4\sqrt[4]{2}$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 1-11)

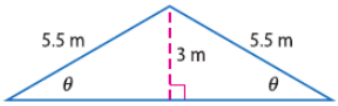
64. $\tan \theta$, إذا كان $\cot \theta = 2$; $0° \le \theta < 90°$

65. $\sin \theta$, إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$; $0° \le \theta < 90°$

66. $\csc \theta$, إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$; $90° < \theta < 180°$

67. $\cos \theta$, إذا كان $\sec \theta = \frac{5}{3}$; $270° < \theta < 360°$

68. الهندسة المعمارية للدعامة الخاصة بسقفٍ شكل مثلثين قائمين كما هو موضح في الشكل على الجهة اليسرى. أوجد θ.



69. يعرض الجدول التوزيع الاحتمالي لوجبات التوفير التي طلبت في أحد المطاعم أيّام الأحد صباحًا. استخدم المعلومات لتحدِ د قيمة التوقع الخاصة بالوجبات المطلوبة.

وجبات التوفير المطلوبة				
الوجبات	AED 3	AED 4	AED 5	AED 6
الاحتمال	0.5	0.2	0.1	0.2

أوجد إحداثيات الرأسين و البؤرتين ومعادلتي خطي التقارب لقطوع زائدةٍ لها المعادلات المعطاة. ثمّ مثّل القطع الزائد بيانيًا.

70. $\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{20} = 1$

71. $\frac{(y + 6)^2}{20} - \frac{(x - 1)^2}{25} = 1$

72. $x^2 - 36y^2 = 36$

مراجعة المهارات

بسّط.

73. $\frac{2 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}}$

74. $\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

75. $\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

76. $\frac{-2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

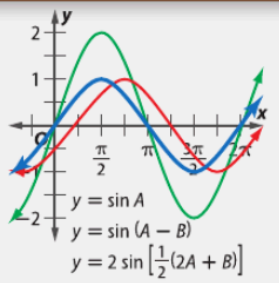
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

السابق
- أوجدتَ قيم الدوال المثلثية للزوايا العامة.

الحالي
1. إيجاد قيمتي الجيب وجيب التمام عبر استخدام متطابقات المجموع والفرق.
2. إثبات المتطابقات المثلثية عبر استخدام متطابقات المجموع والفرق.

لماذا؟
- هل سبق أن استخدمت مزودًا لا سلكيًا لشبكة الإنترنت وفقدت الإشارة مؤقتًا؟ يسبّب مرور أمواجٍ في مكانٍ واحدٍ وفي الوقت نفسه حدوث تداخل. ويحدث التداخل عند تراكب موجتين لإعطاء موجةٍ سعتها أكبر أو أصغر من أيٍّ من الموجتين المركّبتين لها.



ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 متطابقات المجموع والفرق لاحظ أن المتطابقة الثالثة المبيّنة أعلاه تتضمن مجموع A و B. ومن المفيد غالبًا استخدام صيغ القيم المثلثية لمجموع زاويتين أو فرقهما. على سبيل المثال، يمكنك استخدام القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$ عبر إيجاد قيمة $\sin (60° - 45°)$. توجد صيغٌ يمكن استخدامها لإيجاد قيم تعابير مثل $\sin (A - B)$ أو $\cos (A + B)$.

المفهوم الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	• $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
• $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	• $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
• $\tan (A + B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	• $\tan (A - B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

مثال 1 إيجاد القيم النسب المثلثية المجهولة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\sin 105°$

استخدم المتطابقة $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$\sin 105° = \sin (60° + 45°)$ — $A = 60°$ و $B = 45°$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$ — متطابقة المجموع

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — بإيجاد قيمة كل تعبير.

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ — بالضرب.

b. $\cos (-120°)$

استخدم المتطابقة $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

$\cos (-120) = \cos (60° - 180°)$ — $A = 60°$ و $B = 180°$

$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180°$ — متطابقة الفرق

$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0$ — بإيجاد قيمة كل تعبير.

$= -\frac{1}{2}$ — بالضرب.

تمرين موجّه

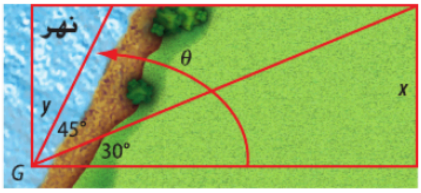
1A. $\sin 15°$ **1B.** $\cos (-15°)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام متطابقات مجموع الزوايا وفرقها لحلّ تطبيقاتٍ من الحياة اليومية.

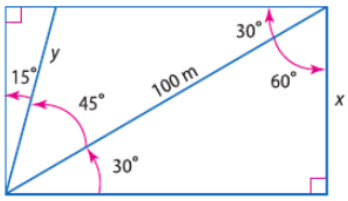
مثال 2 من الحياة اليومية متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

تقيس عالمة جيولوجيا الزاوية بين ضلعفي قطعة أرض مستقيمة وبين المستقيم الممتدّ من موضعها إلى الزاوية المقابلة في قطعة الأرض على أنها 30°. ثمّ تقيس الزاوية بين ذلك المستقيم وبين الخط الفاصل بين المباني وآلنهر عند نقطة مرور نهر على أنها 45° . تقف العالمة على بعد 100 m من الزاوية المقابلة للمبنى. فكم تبعد عن نقطة مرور النهر مع الخط الفاصل عن المباني؟



النهم تطلب المسألة إيجاد المسافة بين عالمة الجيولوجيا ونقطة مرور النهر بالخط الفاصل عن المباني، أي y.

التخطيط ارسم صورةً توضح المعطيات التي تعرفها من خلال المعلومات المعطاة.



الحل حلّ لإيجاد x.

$\sin 30° = \frac{x}{100}$ تعريف الجيب

$x = 100 \sin 30°$

$x = 50$ بما أن قطعة الأرض مستطيلة، فكل ضلعين متقابلين متساويان.

انظر الآن إلى المثلث في أقصى الجهة اليسرى وحلّ لإيجاد y.

$\cos 15° = \frac{50}{y}$ تعريف جيب التمام

$\cos (45° - 30°) = \frac{50}{y}$ $15 = 45 - 30$

$\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{50}{y}$ متطابقة الفرق

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{50}{y}$ أوجد القيمة.

$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{50}{y}$ بسّط.

$(\sqrt{6} + \sqrt{2})y = 200$ بالضرب التبادلي

$y = \frac{200}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$

$y = 50(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$y = 50\sqrt{6} - 50\sqrt{2} = 51.8$ تقريبًا

تبعد عالمة الجيولوجيا حوالي 51.8 مترًا عن نقطة مرور النهر بالخط الفاصل.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد معكوس جيب تمام $\frac{50}{51.8} \approx 15°$. ✓

تمرين موجّه

2. يمكن وصف الحركة التوافقية لجسمٍ ما بالعلاقة $x = 4 \cos \left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$. وفيها x هي البعد عن نقطة التوازن بالسنتيمتر و t هي الزمن بالدقائق. أوجد المسافة الدقيقة عن نقطة التوازن بعد 45 s.

نصيحة في حل المسائل

تشكيل نموذج شكّل نموذجًا لتصوير حالات المسائل. ويمكن أن يكون النموذج رسمًا أو شكلًا معدًّا من أجسام مختلفة، كالقطع الجبرية أو المطويات الورقية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

الاستنتاج المنطقي شكّل قائمةً من القيم المثلثية للزوايا التي يتراوح قياسها بين 0° و 360° والتي يسهل فيها استخدام متطابقات المجموع والفرق. استخدم قائمتك بمثابة مرجع.

2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

يمكنك أيضًا استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات المتطابقات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

أثبت صحة كل متطابقة.

a. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\cos(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin\theta$ — المتطابقة الأصلية

$\cos 90° \cos\theta + \sin 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$ — متطابقة المجموع

$0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$ — بإيجاد قيمة كل تعبير.

$\sin\theta = \sin\theta$ ✓ — بسّط.

b. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} \cos\theta$ — المتطابقة الأصلية

$\sin\theta \cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta \sin\frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} \cos\theta$ — متطابقة المجموع

$\sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1 \stackrel{?}{=} \cos\theta$ — بإيجاد قيمة كل تعبير.

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓ — بسّط.

تمرين موجّه

3A. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B. $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

1. $\cos 165°$ **2.** $\cos 105°$ **3.** $\cos 75°$

4. $\sin(-30°)$ **5.** $\sin 135°$ **6.** $\sin(-210°)$

مثال 2 **7. تمثيل النماذج** عد إلى بداية الدرس. يحدث التداخل البنّاء عندما تتراكب موجتان لتعطيا موجةً سعتها أكبر من سعة أيٍّ من الموجتين المركّبتين لها. ويحدث التداخل الهدّام عندما تتراكب الموجتان لتعطيا موجةً لها سعة أصغر. ويمكن تمثيل الإشارة الأولى بالمعادلة $y = 20\sin(3\theta + 45°)$. بينما يمكن تمثيل الإشارة الثانية بالمعادلة $y = 20\sin(3\theta + 225°)$.

a. أوجد مجموع الدالتين.

b. ما نوع التداخل الذي ينتج عندما تتراكب الإشارتان الممثّلتان بالمعادلتين؟

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة مما يلي.**

8. $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$ **9.** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

10. $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$ **11.** $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.**

12. $\sin 165°$ **13.** $\cos 135°$ **14.** $\cos \frac{7\pi}{12}$

15. $\sin \frac{\pi}{12}$ **16.** $\tan 195°$ **17.** $\cos \left(-\frac{\pi}{12}\right)$

مثال 2

18. الإلكترونيات في دارةٍ يمرّ بها تيارٌ متناوب، يمكن استخدام الصيغة $c = 2 \sin (120t)$ لإيجاد شدة التيار c بالأمبير بعد مرور t ثانية.

a. أعد كتابة الصيغة باستخدام مجموع زاويتين.

b. استخدم صيغة مجموع الزاويتين لإيجاد الشدة الدقيقة للتيار عند $t = 1$ ثانية.

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة مما يلي.**

19. $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$ **20.** $\cos (60° + \theta) = \sin (30° - \theta)$

21. $\cos (180° + \theta) = -\cos \theta$ **22.** $\tan (\theta + 45°) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$

23. التبرير يمكن تمثيل درجات الحرارة العظمى في مدينة العين بإمارة أبو ظبي بالمعادلة $y = 31.65 \sin \left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 52.35$، حيث تمثّل الأشهر x بأعدادٍ متسلسلة على النحو التالي: يناير = 1، فبراير= 2 ، وهكذا. ويمكن تمثيل درجات الحرارة الصغرى في مدينة العين بالمعادلة $y = 30.15 \sin \left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 32.95$.

a. اكتب متباينةً جديدةً عبر جمع التعابير على الجهة اليمنى في كل معادلة وقسمة الناتج على 2.

b. ما معنى الدالة التي كتبتها في الجزء **a**؟

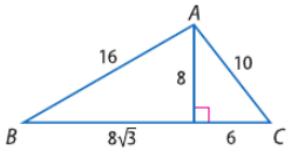
أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

24. $\tan 165°$ **25.** $\sec 1275°$ **26.** $\sin 735°$

27. $\tan \frac{23\pi}{12}$ **28.** $\csc \frac{5\pi}{12}$ **29.** $\cot \frac{113\pi}{12}$

30. القوة في الشكل المبيّن على اليسار، تعطى القوة F اللازمة لتثبيت خزنة في موضعها على منحدرٍ بالعلاقة التالية $F = \frac{W(\sin A + \mu \cos A)}{\cos A - \mu \sin A}$، حيث Wهو وزن الخزنة و $\mu = \tan \theta$ أثبت أن $F = W \tan (A + \theta)$.

31. خياطة اللحاف كجزء من خياطة لحاف، يضع الخيّاط حاملين مثلثي الشكل معًا لتشكيل قطعة مثلثة جديدة. أطوال أضلاع أحد الحاملين هي 6 cm و 8 cm و 10 cm. ويضم الحامل الثاني أضلاعًا أطواله 8 cm و $8\sqrt{3}$ cm و 16 cm . يوضع الحاملان بحيث يتقابل الضلعان اللذان طول كل منهما 8 cm، كما هو موضح في الشكل ليتشكّل المثلث ABC.



a. ما القيمة الدقيقة لجيب الزاوية BAC؟

b. ما القيمة الدقيقة لجيب تمام الزاوية BAC؟

c. ما قياس الزاوية BAC؟

d. هل المثلث المتشكل من المثلثين قائم أيضًا؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

32. البصريات عندما يمرّ الضوء بصورةٍ متماثلةٍ عبر موشور، فإن قرينة انكسار الزجاج n بالنسبة للهواء تساوي $n = \dfrac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\sin\frac{b}{2}}$، حيث a هو قياس زاوية الانحراف و b هو قياس الزاوية الرأسية للموشور.

a. أثبت في الموشور الموضح أن: $n = \sqrt{3}\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}$.

b. أوجد قيمة n في الموشور الموضح.

33. التمثيلات المتعددة عليك أن تنفي في هذه المسألة الفرضية القائلة إن $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

A	B	$\sin A$	$\sin B$	$\sin(A+B)$	$\sin A + \sin B$
30°	90°				
45°	60°				
60°	45°				
90°	30°				

a. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

b. بيانيًا افترض أن B أقل دائمًا بمقدار 15° من A. استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتمثيل $y = \sin(x + x - 15)$ و $y = \sin x + \sin(x - 15)$ على الشاشة نفسها.

c. تحليليًا حدّد ما إذا كانت $\cos(A+B) = \cos A + \cos B$ متطابقة. واشرح استنتاجك.

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة مما يلي.**

34. $\sin(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

35. $\cos(A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

36. $\sec(A-B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

37. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

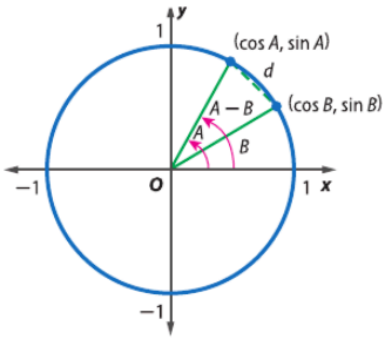
38. التبرير بسّط التعبير التالي دون تفكيك أيّ من المجاميع أو الفروق.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

39. الكتابة في الرياضيات استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس وفي التدريب 7 لشرح كيفية استخدام متطابقات المجموع والفرق لوصف تداخل أمواج الإنترنت اللاسلكية. واشتمل على شرحٍ للفرق بين التداخل البنّاء والهدّام.

40. تحدٍ اشتقّ متطابقةً لـ $\cot(A+B)$ بدلالة $\cot A$ و $\cot B$.

41. الفرضيات يعرض الشكل زاويتين A و B في موضعيهما القياسيين على الدائرة الواحدية. استخدم قانون المسافة لإيجاد d. حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$ و $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$.



42. مسألة غير محددة الإجابة فكّر في النظرية التالية. إذا كانت A و B و C زوايا مثلثٍ مائل، إذًا $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. اختر قيمًا لـ A و B و C. وتحقق من أن الاستنتاج صحيحٌ من أجل قيمك المحدّدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

43. الإجابة الشبكية يساوي متوسط سبعة أعداد 0. ويساوي مجموع ثلاثة من هذه الأعداد -9. فما مجموع بقية الأعداد؟

44. المتغيرات a و b و c و d و f أعداد صحيحة في متتالية فيها $a = 2$ و $b = 12$. لإيجاد الحدّ التالي، ضاعف الحدّ الأخير واجمع ذلك الناتج إلى الحدّ المجاور للحدّ الأخير منقوصًا منه 1. فعلى سبيل المثال، $c = 25$ لأن $2(12) = 24$ و $24 + 1 = 25$ و $25 - 2 = 1$. ما قيمة f؟

A 74

B 144

C 146

D 256

45. SAT/ACT حُلّ $x^2 - 5x < 14$.

F $\{x | -7 < x < 2\}$

G $\{x | x < -7$ أو $x > 2\}$

H $\{x | -2 < x < 7\}$

J $\{x | x < -2$ أو $x > 7\}$

K $\{x | x > -2$ و $x < 7\}$

46. الاحتمالات توزّع معلّمةٌ عشوائيًا 15 قلم رصاص أصفر و 10 أقلام رصاص خضراء. فما احتمال أن يكون القلم الأول الذي توزعه أصفر والقلم الثاني أخضر؟

A $\frac{1}{24}$

B $\frac{1}{4}$

C $\frac{2}{5}$

D $\frac{23}{25}$

مراجعة شاملة

مثال 3

أثبت صحة كل متطابقة مما يلي. (الدرس 2-11)

47. $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} + \frac{\cos \theta}{\cot \theta} = \cos \theta + \sin \theta$

48. $\sec \theta (\sec \theta - \cos \theta) = \tan^2 \theta$

بسّط كلاً مما يلي. (الدرس 1-11)

49. $\sin \theta \csc \theta - \cos^2 \theta$

50. $\cos^2 \theta \sec \theta \csc \theta$

51. $\cos \theta + \sin \theta \tan \theta$

52. الجيتار عند النقر على وتر الجيتار، فإنه يزاح عن نقطةٍ ثابتةٍ في المنتصف ويهتزّ جيئةً وذهابًا ليعطي نغمةً موسيقية. وتعتمد النغمة المحددة على التردد، أو عدد دورات اهتزاز الوتر في الثانية. فلإنتاج النغمة A فإن التردد يساوي 440 دورةً في الثانية، أو 440 هرتز (Hz).

a. أوجد فترة هذه الدالة.

b. مثّل ارتفاع النقطة الثابتة على الوتر عن موضع سكونها بدلالة الزمن. وافترض أن للمسافة القصوى فوق موضع السكون قيمة وحدة واحدة، وافترض أن المسافة الصغرى تحت هذا الموقع تساوي وحدة واحدة.

برهِن صحة كلٍ من العبارات التالية بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة.

53. $4^n - 1$ مقسومةً على 3.

54. $5^n + 3$ مقسومةً على 4.

مراجعة المهارات

حُلّ كل معادلة مما يلي.

55. $7 + \sqrt{4x + 8} = 9$

56. $\sqrt{y + 21} - 1 = \sqrt{y + 12}$

57. $\sqrt{4z + 1} = 3 + \sqrt{4z - 2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار منتصف الوحدة
الدروس 1-11 إلى 3-11

بسّط كلاً من التعابير التالية. (الدرس 1-11)

1. $\cot\theta \sec\theta$
2. $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$
3. $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta$

5. **التاريخ** اعتُمد علم الإمارات العربية المتحدة عام 1971. وفي هذا العلم، $\tan\theta = \frac{31.5}{51}$. أوجد قيمة $\sin\theta$.

أوجد قيمة كل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 1-11)

6. $\sin\theta$, إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $0° < \theta < 90°$
7. $\csc\theta$, إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{2}$; $270° < \theta < 360°$
8. $\tan\theta$, إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$; $0° < \theta < 90°$

9. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يكافئ العلاقة $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$؟ (الدرس 1-11)

A $\cos\theta$

B $\csc\theta$

C $\tan\theta$

D $\sec\theta$

10. **مدن الملاهي** افترض أن طفلاً يجلس على الحصان الخارجي في دوامة الخيول. قطر دوامة الخيول 16 m. وزاوية ميلها تعطى بالمعادلة $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث R هو نصف قطر المسار الدائري وv هي السرعة بالمتر في الثانية و g تساوي $9.8\ m/s^2$. (الدرس 1-11)

a. إذا كان جيب زاوية ميل الطفل يساوي $\frac{1}{5}$، فما هي زاوية الميل التي يصنعها الطفل؟

b. ما سرعة دوامة الخيول؟

c. إذا كانت سرعة دوامة الخيول 3.6 m/s فما قيمة زاوية ميل الراكب؟

أثبت صحةً كل متطابقة مما يلي. (الدرس 2-11)

11. $\cot^2\theta + 1 = \frac{\cot\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$
12. $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} = 1$
13. $\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta} = (1+\cos\theta)\sec\theta$
14. $\tan\theta(1-\sin\theta) = \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$

15. **الحاسوب** تقاس مقدمة شاشة الحاسوب عادةً بطول قطر الشاشة كما هو موضح أدناه. (الدرس 2-11)

a. أوجد قيمة h.

b. أثبت باستخدام الرسم التخطيطي الموضح أن $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

أثبت صحةً كل متطابقة مما يلي. (الدرس 2-11)

16. $\tan^2\theta + 1 = \frac{\tan\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$
17. $\frac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} = (\sec\theta + 1)\cot\theta$
18. $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$
19. $\cot\theta(1-\cos\theta) = \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1+\cos\theta}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 3-11)

20. $\cos 105°$
21. $\sin(-135°)$
22. $\tan 15°$
23. $\cot 75°$

24. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 3-11)

F $\sqrt{2}$

H $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

G $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

J $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

25. أثبت أن $\cos 30°\cos\theta + \sin 30°\sin\theta = \sin 60°\cos\theta + \cos 60°\sin\theta$ متطابقة. (الدرس 3-11)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

السابق:
- أوجدت قيمتي الجيب وجيب التمام عبر استخدام متطابقات المجموع والفرق.

الحالي:
1. إيجاد قيمتي الـ sin و الـ cosin باستخدام متطابقات ضعف الزاوية.
2. إيجاد قيمتي الـ sin و الـ cosin باستخدام متطابقات نصف الزاوية.

لماذا؟
- تضمّ نافورة باكنغهام في شيكاغو أنابيب نفّاثة موضوعة عند زوايا محددة لقذف الماء في الهواء وتشكيل أقواس. عند قذف تيار من الماء في الهواء بسرعة v وبزاوية θ بالنسبة للأفق، يتوقع النموذج أن الماء يقطع مسافةً أفقيةً تساوي $D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$ ويبلغ ارتفاعًا أقصى يساوي $H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$. تساعد نسبة H إلى D في تحديد ارتفاع النافورة وعرضها الكليين. عبّر عن $\frac{H}{D}$ في صورة دالة θ.

1 متطابقات ضعف الزاوية

من المفيد أحيانًا الاعتماد على متطابقاتٍ لإيجاد قيمة دالةٍ لضعف زاويةٍ أو نصفها.

المفهوم الأساسي متطابقات ضعف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

مثال 1 متطابقات ضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و θ بين $0°$ و $90°$.

الخطوة 1 استخدم المتطابقة $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ لإيجاد قيمة $\cos \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ — $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — $\sin \theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$ — بالطرح.

$\cos \theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — أخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن الزاوية θ تقع في الربع الأول، فإن جيب التمام موجب. وهكذا فإن $\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2 أوجد قيمة $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ — متطابقة ضعف الزاوية

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ — $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ — بالضرب.

تمرين موجّه

1. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$.

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 متطابقات ضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين $0°$ و $90°$.

a. $\cos 2\theta$

بما أننا نعلم قيمتي $\cos\theta$ و $\sin\theta$. فإننا نستطيع استخدام أي متطابقات للزوايا المزدوجة لإيجاد جيب التمام. وسوف نستخدم المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \qquad \sin\theta = \frac{2}{3}$$

b. $\tan 2\theta$

الخطوة 1 أوجد قيمة $\tan\theta$ لاستخدام متطابقة الزاوية المضاعفة الخاصة بـ $\tan 2\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{تعريف الـ tan}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \qquad \sin\theta = \frac{2}{3} \text{ و } \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{إنطاق المقام.}$$

الخطوة 2 أوجد قيمة $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \qquad \tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}} \qquad \text{بتربيع المقام.}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} \qquad \text{بسّط.}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

تمرين موجّه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$.

2A. $\cos 2\theta$ **2B.** $\tan 2\theta$

نصيحة دراسية

اشتقاق الصيغ يمكنك استخدام متطابقة $\sin(A+B)$ لإيجاد جيب ضعف زاوية θ و B ومتطابقة $\cos(A+B)$ لإيجاد جيب التمام لضعف زاوية θ و $\cos 2\theta$.

مهنة من الحياة اليومية

الكهربائي يختصّ الكهربائي في توصيل الأجزاء الكهربائية. ويخضع الكهربائيون لتدريبٍ يدوم مدة 3-5 سنوات. وهم بحاجةٍ إلى تعلّم المبادئ النظرية للكهرباء وقواعد البناء. كما أن نيل الشهادة يتطلب خبرةً عمليةً واجتياز اختبارٍ كتابي.

2 متطابقات نصف الزاوية

من المفيد أحيانًا الاعتماد على متطابقاتٍ لإيجاد قيمة دالة نصف زاوية.

المفهوم الأساسي متطابقات نصف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح الطبع والتأليف © محفوظة لصالح حقوق

مثال 3 متطابقات نصف الزاوية

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ و θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — باستخدام إحدى متطابقات فيثاغورس لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ — $\sin\theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$ — بإيجاد قيمة الأس.

$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$ — بالطرح.

$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$ — بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ — متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$ — $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ — بسّط.

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ — بإنطاق المقام.

إذا كانت الزاوية θ تقع بين 180° و 270°، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين 90° و 135°. إذًا، $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos\frac{135°}{2}$ — $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}$ — $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $67.5°$ تقع في الربع الأول؛ إذًا فقيمتها موجبة.

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — بطرح الكسور.

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ — $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ — بالضرب.

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ — $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ — بسّط.

تمرين موجّه

3. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ وإذا كانت θ تقع في الربع الثاني.

نصيحة دراسية

اختيار الإشارة قد تحتاج في الخطوة الأولى من الحل إلى تحديد الربع الذي سيقع فيه الضلع الطرفي لـ $\frac{\theta}{2}$. وبعدها يمكنك استخدام الإشارة الصحيحة بدءًا من ذلك فصاعدًا.

قراءة في الرياضيات

زائد أم ناقص تُقرأ الإشارة الأولى لمتطابقة نصف الزاوية *زائد أو ناقص*. وبعكس متطابقات الزوايا المضاعفة، فيجب عليك تحديد الإشارة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 من الحياة اليومية التبسيط باستخدام متطابقات ضعف الزاوية

نوافير الماء عد إلى بداية الدرس. وأوجد قيمة $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}} \qquad \text{بسّط البسط والمقام.}$$

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g} \cdot \frac{g}{v^2\sin 2\theta} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta} \qquad \text{بسّط.}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta} \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{بسّط.}$$

$$= \frac{1}{4}\tan\theta \qquad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل مما يلي.

4A. $\sin 135°$ **4B.** $\cos\frac{7\pi}{8}$

تذكّر أنه يمكنك استخدام متطابقتي المجموع والفرق لإثبات المتطابقات. ويمكن أيضًا استخدام متطابقات الزوايا المضاعفة وأنصاف الزوايا لإثبات المتطابقات.

مثال 5 إثبات صحة المطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} \qquad \text{المتطابقة الأصلية}$$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \qquad \text{بضرب البسط والمقام في } \sin\theta.$$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \qquad \text{بضرب الطرف الأيمن في 1.}$$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta} \qquad \text{بالضرب.}$$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta} \qquad \text{بسّط.}$$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \checkmark \qquad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta;\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$$

تمرين موجّه

5. أثبت صحة المتطابقة $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

الأمثلة 3–1 الدقة أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.

1. $\sin\theta = \frac{1}{4};\ 0^\circ < \theta < 90^\circ$
2. $\sin\theta = \frac{4}{5};\ 90^\circ < \theta < 180^\circ$
3. $\cos\theta = -\frac{5}{13};\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
4. $\cos\theta = \frac{3}{5};\ 270^\circ < \theta < 360^\circ$
5. $\tan\theta = -\frac{8}{15};\ 90^\circ < \theta < 180^\circ$
6. $\tan\theta = \frac{5}{12};\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

7. $\sin\frac{\pi}{8}$
8. $\cos 15^\circ$

مثال 4

9. **كرة القدم** يركل لاعب كرةً بزاوية قياسها 37° مع الأرض وعند سرعة اتجاهية بدائية قيمتها 16 m/s. تعطى المسافة التي تقطعها الكرة في الهواء d دون أن يعترضها أي عائق بالعلاقة $d = \frac{2v^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$. في هذه الصيغة، g هي تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $10\ m/s^2$. و v هي السرعة الاتجاهية البدائية.

a. بسّط هذه الصيغة باستخدام متطابقة زاوية مضاعفة.

b. باستخدام الصيغة المبسطة، ما المسافة التي ستقطعها هذه الكرة؟

مثال 5 **أثبت صحة كل متطابقة مما يلي.**

10. $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$
11. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

التدريب وحل المسائل

الأمثلة 3–1 أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.

12. $\sin\theta = \frac{2}{3};\ 90^\circ < \theta < 180^\circ$
13. $\sin\theta = -\frac{15}{17};\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
14. $\cos\theta = \frac{3}{5};\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
15. $\cos\theta = \frac{1}{5};\ 270^\circ < \theta < 360^\circ$
16. $\tan\theta = \frac{4}{3};\ 180^\circ < \theta < 270^\circ$
17. $\tan\theta = -2;\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

18. $\sin 75^\circ$
19. $\sin\frac{3\pi}{8}$
20. $\cos\frac{7\pi}{12}$
21. $\tan 165^\circ$
22. $\tan\frac{5\pi}{12}$
23. $\tan 22.5^\circ$

24. **الجغرافيا** إن إسقاط مركاتور للكرة الأرضية هو طريقةٌ للإسقاط تزداد فيها المسافة بين خطوط العرض بزيادة بعدها عن خط الاستواء. ويُحسب موقع نقطةٍ في هذا الإسقاط باستخدام التعبير $\left(45^\circ + \frac{L}{2}\right)$، وفيه L هو خط عرض تلك النقطة.

a. اكتب التعبير التالي بدلالة الدالة المثلثية لـ L.

b. خط عرض مدينة تالاهاسي في فلوريدا بالولايات المتحدة الأمريكية هو 30° شمالًا. أوجد قيمة التعبير إذا كانت $L = 30^\circ$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4

25. الإلكترونيات خذ دارة تيار متناوب تتألف من منبعٍ للقدرة ومقاومة. فإذا كانت شدة التيار I_0 في الدارة عند الزمن t تساوي $I_0 \sin t\theta$، إذًا فإن القدرة التي تصل إلى المقاومة تساوي $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$. حيث R هي قيمة المقاومة. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

مثال 5

أثبت صحة كل متطابقة مما يلي:

26. $\tan 2\theta = \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

27. $1 + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta = \dfrac{\sec\theta + \sin\theta}{\sec\theta}$

28. $\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{2}$

29. $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

30. كرة القدم افترض أن حارس مرمى يركل كرةً بثباتٍ عند سرعةٍ اتجاهيةٍ بدائيةٍ تساوي 30 m/s. أثبت أن المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة في الهواء ستبقى هي نفسها عندما $\theta = 45° + A$ كما هي عندما $\theta = 45° - A$. استخدم الصيغة المعطاة في التدريب 9.

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.

31. $\cos\theta = \dfrac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

32. $\sin\theta = \dfrac{1}{3}; 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

33. $\tan\theta = -3; 90° < \theta < 180°$

34. $\sec\theta = -\dfrac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$

35. $\csc\theta = -\dfrac{5}{2}; \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

36. $\cot\theta = \dfrac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$

مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا

37. التفكير النقدي تحسب بثينة وبدرية القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

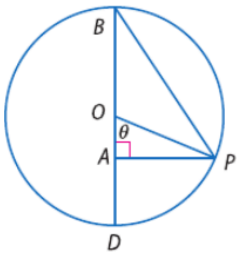
بثينة

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$\sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

بدرية

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$
$$\sin\frac{30}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}$$
$$= 0.5$$

38. تحدٍ الدائرة O دائرة واحدية. استخدم الشكل لإثبات أن $\tan\dfrac{1}{2}\theta = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.



39. الكتابة في الرياضيات اكتب موضوعًا قصيرًا عن الشروط التي يمكنك عندها استخدام كلٍ من متطابقات $\cos 2\theta$.

40. البرهان استخدم صيغة $\sin(A + B)$ لاشتقاق صيغة 2θ. واستخدم صيغة $(A + B)$ لاشتقاق صيغة $\cos 2\theta$.

41. التبرير اشتقّ متطابقات نصف الزاوية من متطابقات ضعف الزاوية.

42. مسألة غير محددة الإجابة افترض أن لاعب جولف يضرب الكرة بثباتٍ بحيث تغادر العصا بسرعة اتجاهية بدائية تساوي 35 m/s وأن $d = \dfrac{2v^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$ اشرح السبب في بلوغ المسافة القصوى عند $\theta = 45°$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

43. الإجابة المختصرة الزاويتان C و D متكاملتان. قياس الزاوية C يساوي سبعة أضعاف قياس الزاوية D. أوجد قياس الزاوية D بالدرجات.

44. SAT/ACT لدى الآنسة منى قائمةٌ بالرواتب السنوية للعاملين في دائرتها. فأي مقياسٍ للبيانات يصف القيمة الوسطى بين قيم الدّخل؟

A المتوسط
B الوسيط
C المنوال
D المدى
E الانحراف المعياري

45. حدّد مجال الدالة التالية ومداها: $f(x) = |4x + 1| - 8$.

F $D = \{x \mid -3 \le x \le 1\}$, $R = \{y \mid y \ge -8\}$
G $D = \{$جميع الأعداد الحقيقية$\}$, $R = \{y \mid y \ge -8\}$
H $D = \{x \mid -3 \le x \le 1\}$, $R = \{$جميع الأعداد الحقيقية$\}$
J $D = \{$جميع الأعداد الحقيقية$\}$, $R = \{$جميع الأعداد الحقيقية$\}$

46. الهندسة يرصِف جمال ممرًا حجريًا حول بركة ماءٍ دائرية. ولديه ما يكفي من الأحجار لتشكيل ممرٍ طوله 144 مترًا. فإذا استهلك جميع الأحجار لإحاطة البركة، فما هو نصف قطر البركة؟

A $\frac{12}{\pi}$ m
B $\frac{72}{\pi}$ m
C 72π m
D 144π m

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 3-11)

47. $\sin 135°$ **48.** $\cos 105°$ **49.** $\sin 285°$

50. $\cos(-30°)$ **51.** $\sin(-240°)$ **52.** $\cos(-120°)$

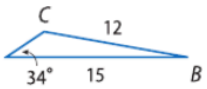
أثبت صحة كل متطابقة مما يلي. (الدرس 2-11)

53. $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

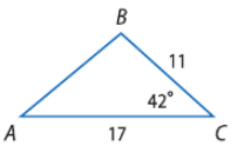
54. $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1 - \cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ كل مثلثٍ عبر الشروع بقانون *الجيوب* أو قانون *جيوب التمام*. ثمّ حلّ كل مثلث. وقرّب قياس الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرة وقياس الزوايا إلى أقرب درجة.

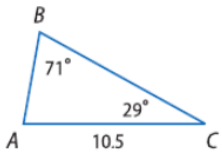
55.



56.



57.



مراجعة المهارات

حُـلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

58. $x^2 + 5x - 24 = 0$ **59.** $x^2 - 3x - 28 = 0$ **60.** $x^2 - 4x = 21$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستكشاف

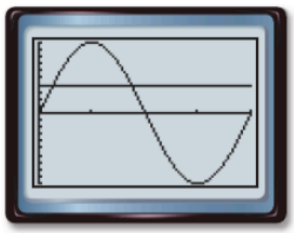
11-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات المثلثية

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

يتركب التمثيل البياني للدالة المثلثية من نقاط تمثل جميع القيم التي تحقق الدالة. ولحل معادلةٍ مثلثية، فإن عليك حساب جميع قيم المتغير التي تحقق المعادلة. ويمكنك استخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني لحل المعادلات المثلثية عبر التمثيل البياني لكل طرفٍ من المعادلة في صورة دالةٍ ومن ثم تحديد نقاط التقاطع.

النشاط 1 الحلول الحقيقية

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحلّ $\sin x = 0.4$ إذا كان $0° \le x < 360°$.


[0, 360] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المتطابقتين ومثلهما بيانيًا. وأعد كتابة المعادلة في صورة معادلتين $\mathbf{Y1} = \sin x$ و $\mathbf{Y2} = 0.4$. ثم مثل المعادلتين بيانيًا. نظرًا إلى أن الفترة بالدرجات، فاضبط حاسبتك على نمط الدرجات.

خطوات العملية على الحاسبة: ENTER ▶ ▼ ▼ MODE

) X,T,θ,n SIN Y=

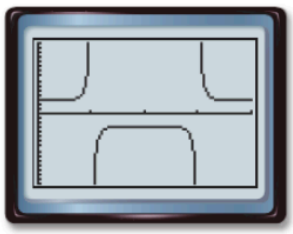
GRAPH ENTER 0.4 ENTER

الخطوة 2 تقريب الحلول. بناءً على التمثيل البياني، يمكنك أن ترى أن هناك نقطتي تقاطعٍ ضمن الفترة $0° \le x < 360°$. استخدم السمة **CALC** لتحديد قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

الحلّان هما $x \approx 23.57°$ و $x \approx 156.4°$.

النشاط 2 لا توجد حلول حقيقية

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحلّ $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ إذا كان $0° \le x < 360°$.


[0, 360] scl: 90 by [−15, 15] scl: 1

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المرتبطتين ومثلهما بيانيًا. المعادلتان المرتبطان التي يتعين تمثيلهما بيانيًا هما $\mathbf{Y1} = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x$ و $\mathbf{Y2} = 0$.

خطوات العملية على الحاسبة: COS x^2) X,T,θ,n TAN Y=

X,T,θ,n COS 3 +) X,T,θ,n

ENTER 0 ENTER)

الخطوة 2 لا تتقاطع هاتان الدالتان.

ولذلك ليس للدالة $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

التمارين

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحل كلٍ من المعادلات التالية عند قيم x المحددة.

1. $\sin x = 0.7; 0° \le x < 360°$
2. $\tan x = \cos x; 0° \le x < 360°$
3. $3 \cos x + 4 = 0.5; 0° \le x < 360°$
4. $0.25 \cos x = 3.4; -720° \le x < 720°$
5. $\sin 2x = \sin x; 0° \le x < 360°$
6. $\sin 2x - 3 \sin x = 0$ if $-360° \le x < 360°$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-5 حل المعادلات المثلثية

السابق
- لقد تحققت من صحة المتطابقات المثلثية.

الحالي
1. حل المعادلات المثلثية.
2. إيجاد الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

لماذا؟
- عندما تركب أرجوحةً دوارةً قطرها 40 مترًا وتدور بسرعة 1.5 دورة في الدقيقة، فيمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق الأرض بالأمتار بعد t ثانية بالمعادلة $h = 21 - 20 \cos 3\pi t$.

بعد تشغيل الأرجوحة، كم يستغرق الأمر قبل أن يصبح مقعدك على ارتفاع 31 مترًا فوق سطح الأرض لأول مرة؟

المفردات الجديدة
المعادلات المثلثية
trigonometric equations

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.
مراعاة الدقة.

1 حل المعادلات المثلثية

لقد درسنا حتى الآن في هذه الوحدة نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية يدعى المتطابقة. والمتطابقات المثلثية هي معادلاتٌ صحيحةٌ من أجل جميع القيم التي يكون عندها الطرفان معرّفين. في هذا الدرس، سوف ندرس **المعادلات المثلثية** الصحيحة فقط من أجل قيمٍ محددةٍ للمتغير. ويشبه حل هذه المعادلات حل المعادلات الجبرية.

مثال 1 حل المعادلات في فترةٍ معطاة

حُلّ $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2}\cos \theta = 0$ إذا كان $0 \le \theta \le 180°$.

$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ — المعادلة الأصلية

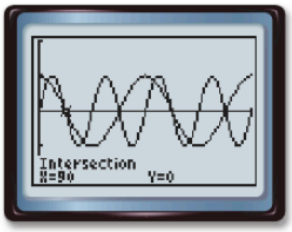
$\cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ — بالتحليل إلى العوامل.

$\cos \theta = 0$ أو $\sin \theta - \frac{1}{2} = 0$ — خاصية ناتج الضرب الصفري

$\theta = 90°$ $\sin \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30° = 150°$

الحلول هي $30°$ و $90°$ و $150°$.



[0, 720] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.5

التحقق يمكنك التحقق من حلك بالتمثيل البياني لـ $y = \sin \theta \cos \theta$ و $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ في المستوى الإحداثي نفسه على حاسبة التمثيل البياني. ثمّ أوجد نقاط تقاطع التمثيلين البيانيين. يمكنك أن ترى أن هناك عددًا غير منتهٍ من هذه النقاط، ولكن اهتمامنا ينصب فقط على النقاط الواقعة بين $0°$ و $180°$.

تمرين موجّه

1. أوجد جميع حلول $\sin 2\theta = \cos \theta$ إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$.

تُحلّ المعادلات المثلثية عادةً عند قيم المتغير الواقعة بين $0°$ و $360°$ أو بين 0 راديان و 2π راديان. وهناك حلولٌ خارج تلك الفترة. وتختلف تلك الحلول الأخرى بفروقٍ تساوي مضاعفاتٍ صحيحةً لفترة الدالة.

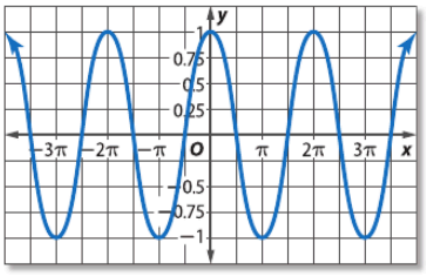
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

مثال 2 عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ $\cos \theta + 1 = 0$ عند كل قيم θ إذا كانت θ مقيسه بالراديان.

$$\cos \theta + 1 = 0$$
$$\cos \theta = -1$$

انظر إلى التمثيل البياني لـ $y = \cos \theta$ لإيجاد حلول $\cos \theta = -1$.



الحلول هي π و 3π و 5π وما إلى ذلك و$-\pi$ و-3π و -5π وما إلى ذلك. الحل الوحيد الذي يقع في الفترة 0 راديان إلى 2π راديان هو π. فترة دالة جيب التمام هي 2π راديان. إذًا فيمكن كتابة الحلول في الصورة $\pi + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

نصيحة دراسية

التعبير عن الحلول في صيغة مضاعفات إن التعبير $\pi + 2k\pi$ يتضمن 3π ومضاعفاته. ولذلك فليس من الضرورة إدراجهما بصورةٍ منفصلة.

تمرين موجّه

2A. حُلّ $\cos 2\theta + \cos \theta + 1 = 0$ لكل قيم θ إذا كانت الزاوية θ مقيسه بالدرجات.

2B. حُلّ $2 \sin \theta = -1$ لكل قيم θ إذا كانت الزاوية θ مقيسة بالراديان.

غالبًا ما تُستخدم المعادلات المثلثية لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية حل المعادلات المثلثية.

مدن الملاهي عد إلى بداية الدرس. كم سيستغرق الوقت بعد تشغيل الأرجوحة الدوارة حتى يبلغ مقعدك ارتفاع 31 m فوق سطح الأرض؟

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20 \cos 3\pi t$	بتعويض h بـ 31.
$10 = -20 \cos 3\pi t$	بطرح 21 من كل طرف.
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	بقسمة كل طرف على -20.
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	بأخذ معكوس جيب التمام.
$\frac{2\pi}{3} = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} = 3\pi t$	معكوس جيب التمام لـ $-\frac{1}{2}$ هو $\frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$.
$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$	k هو أي عددٍ صحيح.
$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ $\quad \frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$	بقسمة كل طرف على 3π.

يُحصَل على القيمة الموجبة الصغرى لـ t عبر جعل $k = 0$ في التعبير الأول.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ من الدقيقة أو 13 ثانية.

تمرين موجّه

3. كم من الزمن الأمر كي يبلغ مقعدك ارتفاع 41 m فوق الأرض بعد تشغيل الأرجوحة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الحلول الدخيلة بعض الدوال المثلثية ليس لها حل. على سبيل المثال، ليس للدالة $\cos \theta = 4$ حل لأن قيم $\cos \theta$ تقع بين -1 و 1 متضمنًا هذين العددين. وهكذا فإن مجموعة حلول $\cos \theta = 4$ هي المجموعة الخالية.

مثال 4 تحديد ما إذا كان هناك حل

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$

$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$	المعادلة الأصلية
$(\sin \theta - 2)(2 \sin \theta + 1) = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$\sin \theta - 2 = 0$ أو $2 \sin \theta + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\sin \theta = 2$	
هذا ليس حلًا بما أن جميع قيم $\sin \theta$ تقع بين -1 و 1، مشتملاً على القيمتين الطرفيتين.	$2 \sin \theta = -1$
	$\sin \theta = -\frac{1}{2}$
	$\theta = \frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$

الحلول هي $\frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$.

التحقق

$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$

$2 \sin^2 \left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3 \sin \left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

$2 \sin \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$

$2 \sin^2 \left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3 \sin \left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

b. $\sin \theta = 1 + \cos \theta$ إذا كانت $0° \le \theta < 360°$

$\sin \theta = 1 + \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$\sin^2 \theta = (1 + \cos \theta)^2$	بتربيع كل طرف.
$1 - \cos^2 \theta = 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$	$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$
$0 = 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta$	بوضع الطرف الأيسر مساويًا لـ 0.
$0 = 2 \cos \theta (1 + \cos \theta)$	بالتحليل إلى العوامل.
$1 + \cos \theta = 0$ أو $2 \cos \theta = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\cos \theta = -1$	$\cos \theta = 0$
$\theta = 180$	$\theta = 90° = 270°$

التحقق

$\sin \theta = 1 + \cos \theta$

$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180°$

$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$

$0 = 0$ ✓

$\sin \theta = 1 + \cos \theta$

$\sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$

$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$

$1 = 1$ ✓

$\sin \theta = 1 + \cos \theta$

$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$

$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$

$-1 \neq 1$ ✗

الحلّان هما $90°$ و $180°$.

تمرين موجّه

4A. $\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = 4$

4B. $\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta$

نصيحة في حل المسائل

الانتظام ابحث عن الأنماط في حلك. وابحث عن أزواج من الحلول التي يساوي الفرق بينها π أو 2π بتحديد واكتب حلولك بأبسط نمطٍ ممكن.

إذا لم تكن المعادلة قابلةً للحل بسهولةٍ باستخدام تحليل العوامل، حاول إعادة كتابة التعبير باستخدام المتطابقات المثلثية. ولكن استخدام المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع، قد يعطي حلولاً دخيلة. إذًا فمن الضروري التحقق من حلك باستخدام المعادلة الأصلية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات

حُـلّ المعادلة: $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لكل قيم θ إذا كانت الزاوية θ مقيسه بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$	المعادلة الأصلية
$2(1 + \tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$	خاصية التوزيع
$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$	بوضع طرفٍ واحدٍ مساويًا للصفر 0.
$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$	بالتحليل إلى العوامل.
$\tan^2\theta - 3 = 0$ أو $\tan^2\theta + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\tan^2\theta = 3$ $\quad$ $\tan^2\theta = -1$	
$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$	لا يعطي هذا الجزء أي حلولٍ نظرًا إلى أن $\tan^2\theta$ ليست سالبةً على الإطلاق.

$\theta = 60° + 180°k$ و $\theta = -60° + 180°k$. حيث k أي عددٍ صحيح. الحلّان هما $60° + 180°k$ و $-60° + 180°k$.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات الآتية.

5A. $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B. $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

نصيحة دراسية

حل المعادلات المثلثية تذكّر أن *حل معادلة مثلثية* يعني الحلّ لإيجاد جميع قيم المتغير.

التحقق من فهمك

مثال 1 الانتظام حـلّ كل معادلة مما يلي إذا كانت $0° \le \theta \le 360°$.

1. $2\sin\theta + 1 = 0$

2. $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$

3. $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

4. $2\cos\theta = 1$

5. $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\sin 2\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\sin 2\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

مثال 2 حـلّ كل معادلة مما يلي لكلّ قيم θ إذا كانت θ مقيسه بالراديان.

9. $4\sin^2\theta - 1 = 0$

10. $2\cos^2\theta = 1$

11. $\cos 2\theta \sin\theta = 1$

12. $\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{2}$

13. $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

14. $\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لكلّ قيم θ إذا كانت θ مقيسه بالدرجات.

15. $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

16. $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

17. $2\sin^2\theta - 1 = 0$

18. $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

19. $\cos 2\theta \sin\theta = 1$

20. $\sin\theta\tan\theta - \tan\theta = 0$

مثال 3 21. الضوء يمكن تقدير عدد ساعات النهار d في هارتفورد، كونيتيكت، باستخدام المعادلة $d = 3\sin\dfrac{2\pi}{365}t + 12$ حيث t هو عدد الأيام بعد 21 مارس.

a. ما الأيام التي يكون عدد ساعات النهار خلالها في هارتفورد $10\frac{1}{2}$ ساعات؟

b. باستخدام النتائج في الجزء a، اذكر ما هي أيام السنة التي فيها على الأقل $10\frac{1}{2}$ ساعات في النهار. واشرح كيف عرفت ذلك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثالان 5–4 حُـلّ كلاً من المعادلات التالية.

22. $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$

23. $\tan^2 \theta + 2 \tan \theta + 1 = 0$

24. $\cos^2 \theta + 3 \cos \theta = -2$

25. $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$

26. $\tan \theta = 1$

27. $\cos 8\theta = 1$

28. $\sin \theta + 1 = \cos 2\theta$

29. $2 \cos^2 \theta = \cos \theta$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 حُـلّ كل معادلة مما يلي في الفترة المعطاة.

30. $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}; 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

31. $2 \sin^2 \theta = 1; 90^\circ < \theta < 270^\circ$

32. $\sin 2\theta - \cos \theta = 0; 0 \le \theta \le 2\pi$

33. $3 \sin^2 \theta = \cos^2 \theta; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

34. $2 \sin \theta + \sqrt{3} = 0; 180^\circ < \theta < 360^\circ$

35. $4 \sin^2 \theta - 1 = 0; 180^\circ < \theta < 360^\circ$

مثال 2 حُـلّ كل معادلة مما يلي لكلّ قيم θ إذا كانت θ مقيسه بالراديان.

36. $\cos 2\theta + 3 \cos \theta = 1$

37. $2 \sin^2 \theta = \cos \theta + 1$

38. $\cos^2 \theta - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cos \theta$

39. $3 \cos \theta - \cos \theta = 2$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لكلّ قيم θ إذا كانت θ مقيسه بالدرجات.

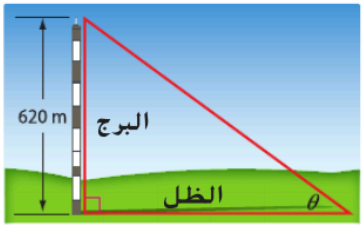
40. $\sin \theta - \cos \theta = 0$

41. $\tan \theta - \sin \theta = 0$

42. $\sin^2 \theta = 2 \sin \theta + 3$

43. $4 \sin^2 \theta = 4 \sin \theta - 1$

مثال 3 **44. الإلكترونيات** من أعلى الأبنية في العالم أحد أبراج النقل التلفزيوني بالقرب من فارغو في داكوتا الشمالية بالولايات المتحدة. وارتفاعه 620 m. فما هو قياس الزاوية θ إذا كان طول ظل البرج 1.6 km؟



المثالان 5–4 حُـلّ كل من المعادلات الآتية.

45. $2 \sin^2 \theta = 3 \sin \theta + 2$

46. $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta = 3$

47. $\sin^2 \theta + \cos 2\theta = \cos \theta$

48. $2 \cos^2 \theta = -\cos \theta$

49. الاستنتاج المنطقي نظرًا إلى المدّ والجزر في المحيط، يتغير عمق نهر التايمز في لندن y بالأمتار كدالة في x تمثل الساعة في اليوم. وفي يومٍ محدد، كانت تلك الدالّة التساوي $y = 3 \sin \left[\frac{\pi}{6}(x - 4)\right] + 8$، حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$ تقابل 12:00 منتصف الليل، 1:00 صباحًا، 2:00 صباحًا، .... 12:00 منتصف ليل الليلة التالية.

a. ما هو العمق الأقصى لنهر التايمز في ذلك اليوم؟

b. في أي وقتٍ يحدث ذلك العمق؟

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كانت الزاوية θ مقيسه بالراديان.

50. $(\cos \theta)(\sin 2\theta) - 2 \sin \theta + 2 = 0$

51. $2 \sin^2 \theta + (\sqrt{2} - 1) \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كانت الزاوية θ مقيسه بالدرجات.

52. $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

53. $1 - \sin^2 \theta - \cos \theta = \frac{3}{4}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

54. $2 \sin \theta = \sin 2\theta$

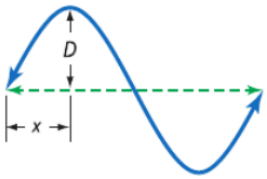
55. $\cos \theta \tan \theta - 2 \cos^2 \theta = -1$

56. الماس حسب قانون سنيل، $n_1 \sin i = n_2 \sin r$، حيث n_1 هي قرينة انكسار الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 هي قرينة انكسار الوسط الذي يدخله الضوء، و i هو قياس زاوية الورود بالدرجات، و r هو قياس زاوية الانكسار بالدرجات.

a. تساوي قرينة انكسار الماس 2.42 وتساوي قرينة انكسار الهواء 1.00. فإذا أصابت حزمة من الضوء قطعة من الماس بزاوية تساوي 35°، فما هي زاوية الانكسار؟

b. اشرح كيف يمكن لخبير الأحجار الكريمة استخدام قانون سنيل لتحديد ما إذا كانت قطعةٌ من الألماس أصلية.

57. المثابرة يمكن تمثيل موجةٍ في وتر جيتار باستخدام المعادلة $D = 0.5 \sin (6.5x) \sin (2500t)$. وفيها D هي الإزاحة بالملّيمتر عند الموضع x ملّيمترًا بالنسبة للطرف الأيسر من الوتر عند الزمن t ثانية. أوجدأول زمنٍ موجب يكون فيه للنقطة الواقعة على بعد 05 m من الطرف الأيسر إزاحةٌ مسافتها 0.01 mm.



58. التمثيلات المتعددة خذ المتباينة المثلثية $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$.

a. جدوليًا شكّل جدولاً للقيم عند $0° \leq \theta \leq 360°$. ما هي القيم التي تساوي θ عندها $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$؟

b. بيانيًا مثّل $y = \sin \theta$ و $y = \frac{1}{2}$ بيانيًا على التمثيل البياني نفسه عند $0° \leq \theta \leq 360°$. ما هي قيم θ التي يقع عندها التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{2}$؟

c. تحليليًا بناءً على إجاباتك عن الجزأين a و b، حُلّ $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ عند جميع قيم θ.

d. جبريًا حُلّ كل متباينة مما يلي إذا كانت $0 \leq \theta \leq 360°$. ثم حُلّ كلاً منها عند كل قيم θ.

i. $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $2 \sin \theta \leq \sqrt{3}$

iii. $-\sin \theta \geq 0$

iv. $\cos \theta - 1 < -\frac{1}{2}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

59. تحدٍّ حُلّ $\sin 2x < \sin x$ من أجل $0 \leq x \leq 2\pi$ بدون استخدام آلةٍ حاسبة.

60. التبرير قارن وبيّن الفرق بين حلّ المعادلات المثلثية بحلّ المعادلات الخطية والتربيعية. ما هي التقنيات المتماثلة؟ وما هي التقنيات المختلفة؟ وكم عدد الحلول التي تتوقعها؟

61. الكتابة في الرياضيات لماذا للمعادلات المثلثية عدد لا نهائي من الحلول؟

62. مسألة غير محددة الإجابة اكتب مثالاً لمعادلةٍ مثلثيةٍ لها بالضبط حلّان إذا كانت $0° \leq \theta \leq 360°$.

63. تحدٍّ كم عدد الحلول التي تتوقعها ضمن الفترة $0° \leq \theta \leq 360°$ لـ $a \sin (b\theta + c) = d$. إذا كان $a \neq 0$ وكان b عدد صحيح موجب؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

64. الإجابة الموسّعة حصل بلال على AED 2500 بمثابة مكافئة لتخرّجه. وقد أودع المبلغ في حسابٍ للتوفير كانت نسبة المرابحة فيه 5.5% في العام.

a. فكم أصبح في حساب التوفير بعد 5 سنواتٍ إذا لم يقم بأيّ إيداعاتٍ أو سحوباتٍ إضافية؟

b. بعد كم عامٍ سيكون المبلغ المودعُ في حسابه قد تضاعف؟

65. الاحتمالات أوجد احتمال الحصول على العدد 33 ثلاث مرات متتالية إذا رُمي مكعب أعداد ثلاثمرات.

A $\frac{1}{216}$ C $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{36}$ D $\frac{1}{4}$

66. استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-2)$ للدالة أدناه.

$$f(x) = x^4 + 10x^2 + x + 8$$

F 62 H 30

G 38 J 8

67. SAT/ACT يستمرّ نمط النقاط المبين أدناه إلى ما لا نهاية، بحيث تضاف نقاطٌ إضافيةٌ في كل خطوة.

ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتحديد عدد النقاط في الخطوة n؟

A $2n$ D $2(n + 2)$

B $n(n + 2)$ E $2(n + 1)$

C $n(n + 1)$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 4-11)

68. $\cos 165^\circ$

69. $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$

70. $\sin \frac{7\pi}{8}$

71. $\cos \frac{7\pi}{12}$

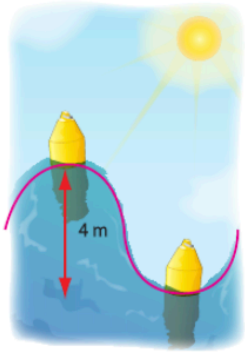
أثبت صحة كل متطابقة في ما يلي: (الدرس 3-11)

72. $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$

73. $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$

74. $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

75. $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$



76. السلامة في الماء ترتفع عوّامةٌ في الميناء وتنخفض مع حركة الأمواج. تساوي المسافة بين النقطة العليا والسفلى 4 أمتار. وتتحرك العوامة من نقطتها العليا إلى نقطتها الدنيا وعودةً إلى نقطتها العليا كل 10 ثوان.

a. اكتب معادلةً لتمثيل حركة العوّامة. وافترض أنها في وضع التوازن عند $t = 0$ وأنها في طريقها إلى الأعلى من مستوى الماء الطبيعي.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح ارتفاع العوّامة بدلالة الزمن.

c. ما هو ارتفاع العوّامة بعد 12 ثانية؟

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلةٍ حسابيةٍ موصوفةٍ مما يلي.

77. $a_1 = 17,\ a_n = 197,\ S_n = 2247$

78. $a_1 = -13,\ a_n = 427,\ S_n = 18{,}423$

79. $n = 31,\ a_n = 78,\ S_n = 1023$

80. $n = 19,\ a_n = 103,\ S_n = 1102$

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة نسبية بيانيًا.

81. $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

82. $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$

83. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 11 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 1-11 و 2-11 و 5-11)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقات بين الدوال المثلثية.
- يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط المعادلات والتعابير المثلثية وإثباتها وحلّها.

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3-11)

- لجميع قيم A و B:

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها (الدرس 4-11)

- متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- متطابقات نصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$
$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$
$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

متطابقة الزاويتين المتتامتين	cofunction identity
متطابقة الزوايا السالبة	negative angle identity
متطابقة فيثاغورس	Pythagorean identity
متطابقة ناتج القسمة	quotient identity
المتطابقة العكسية	reciprocal identity
المعادلة المثلثية	trigonometric equation
المتطابقة المثلثية	trigonometric identity

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.

1. يمكن استخدام _____ لإيجاد جيب الزاوية 75° وجيب تمامها إذا كان جيبا الزاوية 90° وجيبا تمامها 15° معروفة.
2. المتطابقتان $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ مثالان على _____.
3. _____ هي معادلةٌ تضم متطابقاتٍ مثلثية، وهي صحيحةٌ من أجل جميع القيم التي تكون فيها جميع التعابير في المعادلة معرّفة.
4. يمكن استخدام _____ لإيجاد $\sin 60°$ باستخدام 30° بمثابة مرجع.
5. إن _____ صحيحةٌ فقط عند قيم محددة للمتغير.
6. يمكن استخدام متطابقة _____ لإيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.
7. المتطابقتان $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ و $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ مثالان على _____.
8. يمكن استخدام _____ لإيجاد جيب الزاوية 120° وجيب تمامها إذا كان جيبا الزاوية 90° والزاوية 15° وجيبا تمامهما معروفة.
9. $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ مثال على _____.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

11-1 المتطابقات المثلثية

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

10. $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $270° < \theta < 360°$

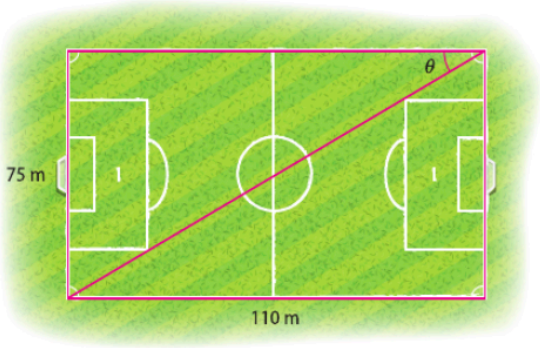
11. $\sec\theta$ إذا كان $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90° < \theta < 180°$

12. $\tan\theta$ إذا كان $\cot\theta = 2$ و $0° < \theta < 90°$

13. $\cos\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ و $180° < \theta < 270°$

14. $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{4}{5}$ و $270° < \theta < 360°$

15. كرة القدم في مباريات كرة القدم الدولية، يساوي البعدان الأعظمان لأرض الملعب 110 m في 75 m. أوجد $\sin\theta$.



بسّط كلاً من التعابير التالية.

16. $1 - \tan\theta \sin\theta \cos\theta$

17. $\tan\theta \csc\theta$

18. $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$

19. $\cos\theta(1 + \tan^2\theta)$

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ و $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقة مثلثية
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$	اطرح $\cos^2\theta$ من كل طرف
$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$	بتعويض $\frac{3}{4}$ بدلاً من $\cos\theta$
$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$	بالتربيع
$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$	بالطرح
$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$	أوجد الجذر التربيعي للطرفين.

نظرًا إلى أن الزاوية θ تقع في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجب. وبالتالي، $\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط $\cos\theta \sec\theta \cot\theta$.

$$\cos\theta \sec\theta \cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \cot\theta$$

11-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

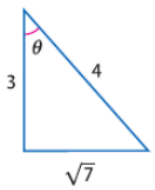
أثبت صحة كل متطابقة مما يلي.

20. $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21. $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22. $\sec^2\theta - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$

23. الهندسة يستخدم المثلث القائم الموضح على اليسار في صناعة نوع خاص من الأحذية. استخدم قياسات أضلاع المثلث لتثبت أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$.

$\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta + \csc\theta$	المعادلة الأصلية
$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta + \csc\theta$	بسّط
$\cot\theta + \csc\theta = \cot\theta + \csc\theta$ ✓	بسّط

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير

24. $\cos(-135°)$ 25. $\cos 15°$

26. $\sin 210°$ 27. $\sin 105°$

28. $\tan 75°$ 29. $\cos 105°$

أثبت صحة كل متطابقة مما يلي.

30. $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$

31. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

32. $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

استخدم $\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

$$\begin{aligned}\sin 75° &= \sin(30° + 45°)\\ &= \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

11-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ لكلٍ مما يلي.

33. $\cos\theta = \frac{4}{5}$; $0° < \theta < 90°$

34. $\sin\theta = -\frac{1}{4}$; $180° < \theta < 270°$

35. $\cos\theta = -\frac{2}{3}$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36. **البيسبول** الملعب الداخلي للعبة البيسبول هو مربع طول ضلعه 27 m.

a. أوجد طول القطر.

b. اكتب النسبة الخاصة بـ $\sin 45°$ باستخدام أطوال ملعب البيسبول الداخلي.

c. استخدم الصيغة $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$ لإثبات صحة النسبة التي كتبتها في الجزء b.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ وكانت الزاوية θ تقع في الربع الثاني.

$$\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} && \text{متطابقة نصف الزاوية}\\ &= \pm\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} && \cos\theta = -\frac{3}{5}\\ &= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} && \text{بالطرح}\\ &= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} && \text{بالقسمة}\\ &= \pm\frac{2\sqrt{5}}{5} && \text{بتبسيط}\end{aligned}$$

بما أن الزاوية θ تقع في الربع الثاني $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

11-5 حل المعادلات المثلثية

أوجد جميع حلول كل معادلة مما يلي عند الفترة المعطاة.

37. $2\cos\theta - 1 = 0;\ 0° \le \theta < 360°$

38. $4\cos^2\theta - 1 = 0;\ 0 \le \theta < 2\pi$

39. $\sin 2\theta + \cos\theta = 0;\ 0° \le \theta < 360°$

40. $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3;\ 0° \le \theta < 360°$

41. $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0;\ 0 \le \theta < 2\pi$

مثال 6

أوجد جميع حلول $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ إذا كان $0 \le \theta < 2\pi$.

$$\begin{aligned}\sin 2\theta - \cos\theta &= 0 && \text{المعادلة الأصلية}\\ 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta &= 0 && \text{متطابقة ضعف الزاوية}\\ \cos\theta(2\sin\theta - 1) &= 0 && \text{بالتحليل إلى العوامل}\end{aligned}$$

$\cos\theta = 0$ أو $2\sin\theta - 1 = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\sin\theta = \frac{1}{2}$; $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

تدريب على الاختبار

1. الاختيار من متعدد ما التعبير الذي يكافئ $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$؟

A $\cot\theta$ C $\sec\theta$

B $\tan\theta$ D $\csc\theta$

2. أثبت أن $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$ متطابقة.

3. أثبت أن $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4. الاختيار من متعدد ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ وكانت $90° < \theta < 180°$؟

F $\frac{5}{3}$

G $\frac{\sqrt{34}}{8}$

H $-\frac{4}{5}$

J $\frac{4}{5}$

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

5. $\cot\theta$ إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$; $270° < \theta < 360°$

6. $\tan\theta$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$; $90° < \theta < 180°$

7. $\sec\theta$ إذا كان $\csc\theta = -2$; $180° < \theta < 270°$

8. $\cot\theta$ إذا كان $\csc\theta = -\frac{5}{3}$; $270° < \theta < 360°$

9. $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$; $0° \le \theta < 90°$

أثبت أن كلاً مما يلي متطابقة.

10. $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

11. $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

12. $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta\sec^2\theta$

13. $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

14. $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \csc\theta + \cot\theta$

15. الاختيار من متعدد ما القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\pi}{8}$؟

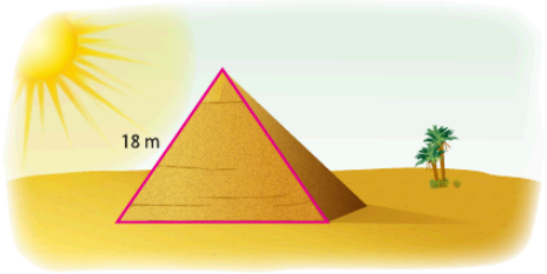
A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

B $\sqrt{2} - 1$

C $1 - \sqrt{2}$

D $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

16. التاريخ يعتقد بعض الباحثين أن بنّائي أهرامات مصر القديمة، كهرم خوفو الأكبر، لربما حاولوا بناء أوجه الأهرامات على هيئة مثلثاتٍ متساوية الأضلاع. ولكنهم اضطروا بعد ذلك إلى تغييرها إلى أشكالٍ أخرى. افترض أنّ هرمًا يشيّد بحيث يكون وجهه مثلثًا متساوي الأضلاع وطول ضلعه 18 مترًا.



a. أوجد ارتفاع المثلث متساوي الأضلاع.

b. استخدم الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ وقياسات المثلث متساوي الأضلاع وارتفاعه لإثبات أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$. أوجد القيم الدقيقة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير

17. $\cos(-225°)$ **18.** $\sin 480°$

19. $\cos 75°$ **20.** $\sin 165°$

21. الصواريخ يُطلق نموذج صاروخٍ بسرعةٍ ابتدائيةٍ تساوي 20 مترًا في الثانية. ويعطى مدى المقذوف بالصيغة $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$. وفيها R هو المدى و v هي السرعة البدائية و g هو التسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية أو 9.8 أمتارٍ في الثانية للتربيع و θ هي زاوية الإطلاق. فما الزاوية المطلوبة لكي يبلغ الصاروخ المدى 25 مترًا؟

حُلّ كل معادلة مما يلي عند كل قيم θ إذا كانت الزاوية θ مقيسه بالراديان.

22. $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

23. $2\sin 3\theta - 1 = 0$

حُلّ كل معادلة مما يلي عند $0° \le \theta \le 360°$ إذا كانت الزاوية θ مقيسه بالدرجات.

24. $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

25. $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 11

التحضير للاختبارات المعيارية

تحويل التعابير لأبسط صورة

تطلب منك بعض الأسئلة الاختيارية استخدام خواصّ الجبر لتبسيط التعابير. اتّبع الخطوات المبينة أدناه لمساعدتك في التحضير لحلّ هذه الأنواع من المعادلات.

إستراتيجيات لتبسيط التعابير

الخطوة 1

ادرس التعابير التي يُطلب منك تبسيطها.

اسأل نفسك:

- هل ثمّة عملياتٍ رياضيةٍ يمكنني تطبيقها للمساعدة في تبسيط التعبير؟
- هل ثمّة قوانين أو متطابقاتٍ يمكنني تطبيقها للمساعدة في تبسيط التعبير؟

الخطوة 2

حل المسألة وتحقق من حلولك.

- استخدم ترتيب العمليات.
- جمّع الحدود وحلّل إلى عوامل حسب الاقتضاء.
- طبّق القوانين والمتطابقات.

الخطوة 3

تحقق من حلّك إذا سمح الوقت.

- راجع الخطوات التي اتّبعتها في حلّك للتحقق من أنك أجبت عن السؤال بصورةٍ تامةٍ ودقيقة.
- يمكنك أحيانًا عند الحاجة استخدام حاسبتك العلمية لمساعدتك في التحقق من حلّك. أوجد قيمة التعبير الأصلي وإجابتك من أجل قيمةٍ ما وتحقق من أنهما متماثلان.

مثال على الاختبار المعياري

حل المسألة أدناه. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات المختصرة الموضحة.

بسّط التعبير المثلثي الموضح أدناه عبر كتابته بدلالة $\sin \theta$. واكتب الحل هنا للحصول على درجةٍ كاملة.

$$\frac{\cos \theta}{\sec \theta + \tan \theta}$$

معايير رصد الدرجات	
المعايير	**النقاط**
درجة كاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
درجة جزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة خاطئة ولكن التفسير صحيح.	1
بدون درجات: إما أن الإجابة غير مكتوبة أو غير منطقية.	0

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ عبارة المسألة بعناية. لديك تعبيرٌ مثلثيٌ وعليك تبسيطه عبر كتابته بدلالة $\sin \theta$. حيث يجب أن تتضمن إجابتك النهائية فقط أعدادًا وحدودًا تضم $\sin \theta$. اكتب الحل هنا للحصول على درجةٍ كاملة.

مثال على إجابة من نقطتين:

استخدم متطابقاتٍ مثلثيةً لتبسيط التعبير.

$$\frac{\cos \theta}{\sec \theta + \tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$ تعريف $\sec \theta$ و $\tan \theta$

$$= \frac{\cos \theta}{\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}}$$ بسّط المقام

$$= \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta}$$ بسّط الكسر العقدي

$$= \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta}$$ متطابقة فيثاغورس

$$= \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{1 + \sin \theta}$$ بالتحليل إلى عوامل

$$= 1 - \sin \theta$$ بسّط

التعبير المبسّط هو $1 - \sin \theta$.

تم بوضوح ذكر الخطوات والحسابات والاستنتاج. وقد وصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

التمارين

حل كل مسألة. اكتب الحل هنا. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات المختصرة الموضحة في بداية الدرس.

1. بسّط التعبير $\frac{\sec \theta}{\cot \theta + \tan \theta}$ عبر كتابته بدلالة $\sin \theta$.

2. ما هو ناتج $\frac{10a^{-3}}{29b^4} \div \frac{5a^{-5}}{16b^{-7}}$؟

3. اكتب $\frac{y+1}{y-1} + \frac{y+2}{y-2} + \frac{y}{y^2 - 3y + 2}$ في أبسط صورة.

4. بسّط $\frac{\cot^2 \theta - \csc^2 \theta}{\tan^2 \theta - \sec^2 \theta}$ عبر كتابته في صورة ثابت.

5. اضرب $(-5 + 2i)(6 - i)(4 + 3i)$.

6. بسّط $(\cot \theta + 1)^2 - 2 \cot \theta$ عبر كتابته بدلالة $\csc \theta$.

7. عبّر عن $\frac{4 - \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}$ في أبسط صورة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 11 تدريب على الاختبارات المعيارية

الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. يمكن تمثيل الربح p الذي يحققه متجر حصّة للقمصان في اليوم الواحد باستخدام المتباينة $10t + 200 < p < 15t + 250$. وفيها t تمثل عدد القمصان المبيعة. فإذا باع المتجر 45 قميصًا يوم الجمعة، فأيٌّ مما يلي يمثل مبلغًا منطقيًا ربحه المتجر؟

A AED 200 **B** AED 625 **C** AED 850 **D** AED 950

2. استخدم متطابقةً لفرق زاويتين لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos 75°$.

F $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ **H** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

G $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ **J** $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

3. استخدم الجدول لتحديد التعبير الذي يمثّل قياس زاوية داخلية لمضلعٍ منتظمٍ فيه n ضلعًا بالدرجات.

المضلع	عدد الأضلاع	قياس الزاوية
مثلث	3	60
رباعي الأضلاع	4	90
خماسي أضلاع	5	108
سداسي أضلاع	6	120
سباعي الأضلاع	7	128.5
ثماني الأضلاع	8	135

A $(180 + n) \div n$

B $\frac{180}{n}$

C $[180(n - 2)] \div n$

D $30(n - 1)$

4. أي مما يلي يصف التمثيلين البيانيين لـ $y = 3x - 5$ و $4y = 12x + 16$؟

F للمستقيمين نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y نفسها.

G للمستقيمين نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x نفسها.

H المستقيمان متعامدان.

J المستقيمان متوازيان.

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 يمكنك التحقق من إجابتك باستخدام حاسبة علمية. أوجد $\cos 75°$ وقارنه بقيمة إجابتك.

5. ما ناتج ضرب $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$؟

A $\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 11 & -1 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & -6 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$

D غير معرّفة

6. ما المعادلة التربيعية التي لها الجذران $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$؟

F $5x^2 - 5x - 2 = 0$

G $5x^2 - 5x + 1 = 0$

H $6x^2 + 5x - 1 = 0$

J $6x^2 - 5x + 1 = 0$

7. كيف يمكنك التعبير عن $\cos \theta \csc \theta \cot \theta$ بدلالة $\sin \theta$؟

A $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

B $\frac{1 + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

C $\frac{\sin^2 \theta}{2}$

D $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta}$

8. تساوي مساحة مستطيلٍ $25a^4 - 16b^2$. فما العاملان اللذان يمكن أن يمثلا الطول مضروبًا بالعرض؟

F $(5a^2 + 4b)(5a^2 + 4b)$

G $(5a^2 + 4b)(5a^2 - 4b)$

H $(5a - 4b)(5a - 4b)$

J $(5a + 4b)(5a - 4b)$

9. ما مجال $f(x) = \sqrt{5x - 3}$؟

A $\left\{x \mid x > \frac{3}{5}\right\}$

B $\left\{x \mid x > -\frac{3}{5}\right\}$

C $\left\{x \mid x \geq \frac{3}{5}\right\}$

D $\left\{x \mid x \geq -\frac{3}{5}\right\}$

10. إذا مثّلت المعادلة $y = 3^x$ بيانيًا، فأي قيمةٍ مما يلي x تعطي النقطة الأقرب إلى المحور الأفقي x؟

F $\frac{3}{4}$

G $\frac{1}{4}$

H 0

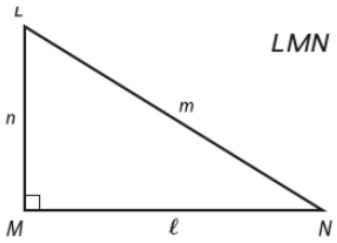
J $-\frac{3}{4}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

11. استخدم المثلث قائم الزاوية LMN على اليسار لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$.

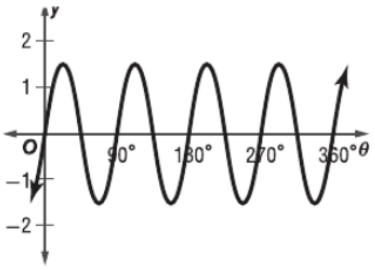


12. الإجابة الشبكية حُلّ المعادلة المثلثية أدناه في الفترة من 0 إلى 2π. وقرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئة عند الحاجة.

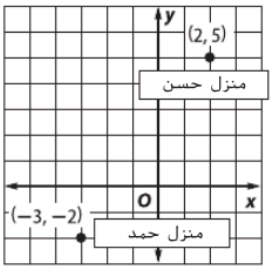
$$3 \cos \frac{t}{3} = 2$$

13. تصمّم سنديّة صفحة سجلّ قصاصاتٍ بعداها 30 في 30 سنتيمترًا. حيث تقصّ صورةً بعداها 10 في 15 سنتيمترًا. وتقرر أن تكون الصورة التالية بحجم 75% من الصفحة الأولى وأن تكون الصورة الثالثة بحجم 150% بالنسبة للصورة الثانية. فما هما البعدان التقريبيان للصورة الثالثة؟

14. حدّد سعة الدالة الممثلة بيانيًا أدناه وفترتها.. ثم اكتب معادلةً للدالة.



15. الإجابة الشبكية توضع شبكة إحداثية فوق خريطة. يقع منزل حمد عند النقطة $(-3, -2)$. ويقع منزل حسن عند النقطة $(2, 5)$. يمثّل ضلع كل مربع كتلةً واحدة. فما المسافة التقريبية بين منزل حمد ومنزل حسن؟



الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

16. يساوي راتب منى السنوي AED 50,000. وتحصل على زيادة في الراتب بنسبة 6% كل عام.

a. كم سيساوي راتبها في غضون أربعة أعوام مقربًا إلى أقرب درهم؟

b. كم سيساوي راتبها في غضون عشرة أعوام مقربًا إلى أقرب درهم؟

17. الأقراص المدمجة أشار استطلاعٌ جرى مؤخرًا إلى أن 91% من طلاب المدارس الثانوية لا يشترون أقراصًا مدمجة. وقد اختير 8 طلابٍ عشوائيًا.

a. حدّد الاحتمالات المرافقة لعدد الطلاب الذين لا يشترون أقراصًا مدمجةً عبر حساب التوزيع الاحتمالي.

b. ما احتمال أن يكون 7 من الطلاب الـ 8 على الأقل لا يشترون أقراصًا مدمجة؟

c. كم عدد الطلاب الذين تتوقع أنهم لا يشترون أقراصًا مدمجة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 12

المتتاليات والمتسلسلات

السابق

- قمتَ بتحويل التعابير الجبرية لأبسط صورها وأوجدتَ قيمتها.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - استخدام المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
  - استخدام المتتاليات الخاصة ودوال التكرار.
  - تفكيك الأسس باستخدام نظرية ذات الحدين.
  - برهنة العبارات باستخدام الاستقراء الرياضي.

لماذا؟

- **الاستدامة والبيئة** تظهر الرياضيات عبر المظاهر الطبيعية بطرق مذهلة. فتتجلى متتالية فيبوناتشي في البذور والأزهار ومخاريط الصنوبر والفاكهة والخضروات. كذلك، قد تساعدنا المتتاليات والمتسلسلات في الحفاظ على الموارد الطبيعية من خلال زيادة فعالية أنظمة تصفية المياه.

Chapter sourced from Sequences and Series, from Algebra 2 Chapter 10 © 2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

1. $-6 = 7x + 78$
2. $768 = 3x^4$
3. $23 - 5x = 8$
4. $2x^3 + 4 = -50$
5. **النباتات** لدى ليلى 48 نباتًا في حديقتين خاصتين بها. وتزرع 12 نباتًا في الحديقة الصغيرة. أما في الحديقة الكبيرة، فتريد زراعة 4 نباتات في كل صف. ما عدد الصفوف التي ستكون لديها؟

مثّل كل دالة بيانيًا.

6. $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$
7. $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$
8. $\left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$
9. $\left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$
10. **الرعاية الصباحية** يتكلف مركز رعاية أطفال AED 450 في اليوم. ويتقاضون AED 150 عن كلّ طفل في اليوم. وتنتج الدالة $P(c) = 150c - 450$ المبلغ المالي الذي يجنيه المركز عند وجود عدد c من الأطفال. ما إجمالي الربح الذي سيجنيه المركز إذا كان يوجد به 8 أطفال؟

أوجد قيمة كل تعبير في ضوء قيمة (قيَم) المتغير (المتغيرات).

11. $\frac{a}{3}(b + c)$ إذا كان $a = 9$، و $b = -2$، و $c = -8$
12. $r + (n - 2)t$ إذا كان $r = 15$، و $n = 5$، و $t = -1$
13. $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2$، و $y = \frac{1}{3}$، و $z = 5$
14. $\frac{a(1 - bc)^2}{1 - b}$ إذا كان $a = -3$، و $b = -4$، و $c = 1$

مراجعة سريعة

مثال 1

حُـلّ المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$.

المعادلة الأصلية

$25 = 3x^3 + 400$

اطرح 400 من الطرفين.

$-375 = 3x^3$

اقسم الطرفين على 3.

$-125 = x^3$

أوجد الجذر التكعيبي للطرفين.

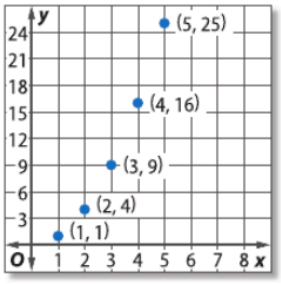
$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$

بسّط.

$-5 = x$

مثال 2

مثل الدالة بيانيًا $\{(5, 25), (4, 16), (3, 9), (2, 4), (1, 1)\}$. حدد المدى والمجال.



مجال الدالة هو مجموعة جميع الاحتمالات لقيم x. إذًا، مجال هذه الدالة هو $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. مدى الدالة هو مجموعة جميع الاحتمالات لقيم y. إذًا مدى هذه الدالة هو $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

مثال 3

أوجد قيمة $2 \cdot 3^{x+y}$ إذا كان $x = -2$ و $y = -3$.

عوّض.

$2 \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 3^{-2+(-3)}$

بسّط.

$= 2 \cdot 3^{-5}$

أعد الكتابة بأس موجب.

$= \frac{2}{3^5}$

أوجد قيمة الأس.

$= \frac{2}{243}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك للوحدة 12. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

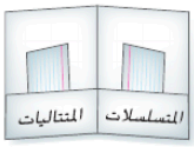
المتتاليات والمتسلسلات ابتكر المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 12 عن المتتاليات والمتسلسلات. وابدأ بورقة واحدة أبعادها $8\frac{1}{2}$″ في 11″.

1 **اطوِ** الورقة إلى نصفين، مع مطابقة الأضلاع القصيرة.

2 **افرد** واطوِ الضلع الأطول لأعلى لعمل جيب.

3 **دبّس** الحواف الخارجية أو ألصِقها لإكمال الجيب.

4 **اكتب** اسم كل ضلع كما هو موضح. استخدم بطاقة الفهرسة لتسجيل الملاحظات والأمثلة.



المفردات الجديدة

العربية

متتالية	sequence
متتالية منتهية	finite sequence
متتالية غير منتهية	infinite sequence
متتالية حسابية	arithmetic sequence
فرق مشترك	common difference
متتالية هندسية	geometric sequence
نسبة مشتركة	common ratio
أوساط حسابية	arithmetic means
متسلسلة	series
متسلسلة حسابية	arithmetic series
المجموع الجزئي	partial sum
أوساط هندسية	geometric means
متسلسلة هندسية	geometric series
متسلسلة تقاربية	convergent series
متسلسلة تباعدية	divergent series
متتالية تكرارية	recursive sequence
الإعادة	iteration
الاستقراء الرياضي	mathematical induction
فرضية الاستقراء	induction hypothesis

مراجعة المصطلحات

المعامل (coefficient) العامل العددي لذات الحد الواحد

الصيغة (formula) جملة رياضية تعبر عن العلاقة بين كميات بعينها

الدالة (function) علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12-1 المتتاليات كدوال

السابق:
- قمتَ بتحليل الدوال الخطية والأسيّة.

الحالي:
1. ربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية.
2. ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية.

لماذا؟
- خلال الفرقة المدرسية، تتحرك مجموعة من الطلاب. ويتحرك مؤدٍّ واحد أمام الصف، ويوجد بالصف التالي ثلاثة طلاب. ويوجد خمسة طلاب بالصف التالي. ويستمر هذا النمط لبقية الصفوف.

1 متتاليات حسابية

المتتالية هي مجموعة من الأعداد تأخذ ترتيب أو نمط محدد. ويُطلق على كل عدد في المتتالية **حد**. وقد تكون المتتالية **متتالية منتهية** وتحتوي على أعداد محددة، مثل {6, 4, 2, 0, −2}. أو قد تكون **متتالية غير منتهية** وتستمر دون نهاية مثل {... ,3 ,2 ,1 ,0}. يُرمز إلى الحد الأول من المتتالية بالرمز a_1، ويُرمز إلى الحد الثاني بالرمز a_2، وهكذا.

المفهوم الأساسي المتتاليات في صورة دوال

الشرح المتتالية هي دالة يتكون مجالها من الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ويتكون مداها من الأعداد الحقيقية.

الرموز

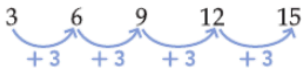
المجال:	n	...	3	2	1	رتبة الحد
المدى:	a_n	...	a_3	a_2	a_1	حدود المتتالية

أمثلة

متتالية منتهية	متتالية غير منتهية
{3, 6, 9, 12, 15}	{3, 6, 9, 12, 15, ...}
المجال: {1, 2, 3, 4, 5}	المجال: {جميع الأعداد الطبيعية}
المدى: {3, 6, 9, 12, 15}	المدى: $\{y \mid y$ هو أحد مضاعفات العدد 3. $3 \geq y\}$

في **المتتالية الحسابية**، يتحدد كل حد من خلال إضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق. ويُطلق على هذه القيمة الثابتة **الفرق المشترك**.

تأمل المتتالية 3, 6, 9, 12, 15. هذه المتتالية حسابية، وذلك لأن الحدود لها نفس الفرق المشترك. وكل حد يزيد عن الحد الذي يسبقه بمقدار 3 أضعاف.



مثال 1 المتتاليات الحسابية

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية.

a. 5, −6, −17, −28, ...

الفرق المشترك هو −11.
المتتالية حسابية.

b. −4, 12, 28, 42, ...

لا يوجد فرق مشترك.
هذه ليست متتالية حسابية.

تمرين موجّه

1A. 7, 12, 16, 20, ...

1B. −6, 3, 12, 21, ...

المفردات الجديدة

- متتالية sequence
- حد term
- متتالية منتهية finite sequence
- متتالية غير منتهية infinite sequence
- متتالية حسابية arithmetic sequence
- فرق مشترك common difference
- متتالية هندسية geometric sequence
- نسبة مشتركة common ratio

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يُمكنك استخدام الفرق المشترك لإيجاد حدود المتتالية الحسابية.

مثال 2 تمثيل المتتالية الحسابية بيانيًا

فكّر في المتتالية الحسابية ... 18, 14, 10,.

a. أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتالية.

الخطوة 1 لتحديد الفرق المشترك، اطرح أي حد من الحد التالي له مباشرة. الفرق المشترك هو $14 - 10$ أو -4.

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، أضِف -4 إلى الحد الأخير.

استمر في جمع -4 لإيجاد الحدود التالية.

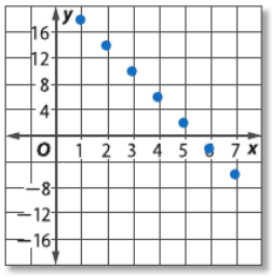
الحدود الأربعة التالية هي 6 و 2 و -2 و -6.

b. مثّل الحدود السبعة الأولى من المتتالية بيانيًا.

يحتوي المجال على العناصر {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

ويحتوي المدى على العناصر {18, 14, 10, 6, 2, −2, −6}.

وبذلك، مثّل الأزواج المرتبة المقابلة بيانيًا.



تمرين موجّه

2. أوجد الحد الرابع في المتتالية الحسابية ... 18, 11, 4,. ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًا.

لاحظ أن التمثيل البياني لحدود المتتالية الحسابية يقع على مستقيم واحد. وتعد المتتالية الحسابية دالة خطية يكون فيها رتبة الحد n هو المتغير المستقل، والحد a_n هو المتغير التابع، والفرق المشترك هو ميل المستقيم.

مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد حد مُعين

الفرقة المدرسية **راجع بداية الدرس. بفرض أن مخرج العرض يريد تحديد عدد الطلاب المشاركين في الصف الرابع عشر خلال سير الفرقة.**

الاستيعاب نظرًا لأن الفرق بين أي صفين متتاليين هو 2، فإن الفرق المشترك للمتتالية هو 2.

التخطيط استخدم صيغة الميل والنقطة للمتتالية. افترض أن $m = 2$ و $(x_1, y_1) = (3, 5)$. ثم حُل لإيجاد قيمة $x = 14$.

الحل

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة النقطة والميل
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$m = 2$ و $(x_1, y_1) = (3, 5)$
$y - 5 = 2x - 6$	اضرب.
$y = 2x - 1$	أضِف 5 إلى الطرفين.
$y = 2(14) - 1$	عوض عن x بالعدد 14.
$y = 28 - 1$ أو 27	بسّط.

التحقق يمكنك إيجاد حدود المتتالية عن طريق جمع 2، بدايةً من الصف 1، وحتى تصل إلى الصف 14.

تمرين موجّه

3. المال يعرض صاحب العمل على أسامة أجر بقيمة AED 33 لكل ساعة بالإضافة إلى AED 0.50 علاوة كل ثلاثة أشهر. ما إجمالي المبلغ الذي سيتقاضاه أسامة لكل ساعة بعد 3 أعوام؟

الربط بالحياة اليومية

كل عام، تتنافس قرابة 100 فرقة في البطولات الوطنية الكبرى التي تنظمها منظمة Bands of America (فرق أمريكا).

المصدر: منظمة فرق أمريكا

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المتتالية الهندسية

تُعد المتتالية الهندسية نوعًا آخر من المتتاليات. في **المتتالية الهندسية** يتم تحديد كل حد من خلال ضرب ثابت غير صفري في الحد السابق. ويُطلق على هذا الثابت **النسبة المشتركة**.

تأمل المتتالية $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$. هذه متتالية هندسية لأن الحدود لها نفس النسبة المشتركة. وكل حد أكبر من الحد السابق له بمقدار 4 مرات.

$$\frac{1}{16} \xrightarrow{\times 4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16$$

مثال 4 تحديد المتتاليات الهندسية

حدد ما إذا كانت كل متتالية هندسية.

a. −2, 6, −18, 54, ...

أوجد نسب الحدود المتتابعة.

$$\frac{6}{-2} = -3 \qquad \frac{-18}{6} = -3 \qquad \frac{54}{-18} = -3$$

النسب متماثلة، إذًا فالمتتالية هندسية.

b. 8, 16, 24, 32, ...

$$\frac{16}{8} = 2 \qquad \frac{24}{16} = 1.5 \qquad \frac{32}{24} = 1.\overline{3}$$

النسب ليست متماثلة، إذًا فالمتتالية ليست هندسية.

انتبه!

النسب إذا أوجدتَ نسبة حد إلى الحد السابق له، فأنشئ النسب المتبقية بالطريقة نفسها.

تمرين موجّه

4A. -8, 2, -0.5, 0.125, ...

4B. 1, 3, 7, 15, ...

عند منحك مجموعة من المعلومات، يمكنك إنشاء مسألة ترتبط بقصة.

مثال 5 تمثيل المتتالية الهندسية بيانيًا

فكّر في لمتتالية الهندسية ... 32, 8, 2,.

a. أوجد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية.

الخطوة 1 أوجد قيمة النسبة المشتركة: $\frac{2}{8}$ أو $\frac{1}{4}$.

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، اضرب الحد السابق في $\frac{1}{4}$.

استمر في الضرب في $\frac{1}{4}$ لإيجاد الحدود التالية.

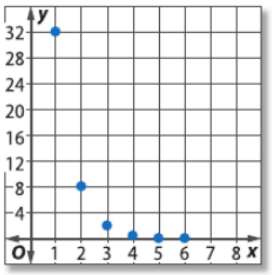
$$2 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{8} \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{32}$$

الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{2}$، و$\frac{1}{8}$، و$\frac{1}{32}$.

b. مثّل الحدود الستة الأولى للمتتالية بيانيًا.

المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

المدى: $\left\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}\right\}$



تمرين موجّه

5. أوجد الحدين التاليين في ... 7, 21, 63,. ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًا.

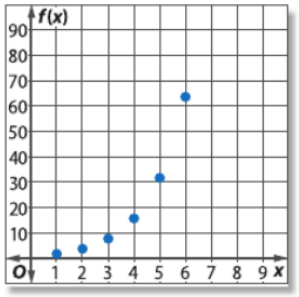
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة المصطلحات

الدالة الأسية دالة على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 0$ و $b \neq 1$

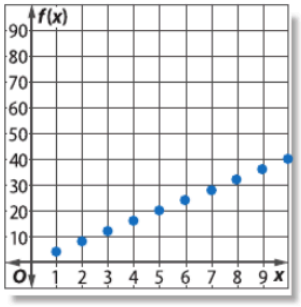
من التمثيل البياني في المثال 5، تجد أن التمثيل البياني للمتتالية الحسابية يكون خطيًا، فإن التمثيل البياني للمتتالية الهندسية يكون أسيًا ويمكن تمثيله بواسطة $f(x) = r^x$، حيث r هي النسبة المشتركة، و $r > 0$، و $r \neq 1$.

هندسية



x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	8	16	32	64

حسابية



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

المتتاليات الحسابية والهندسية هي دوال يكون فيها المجال مُعرفًا بواسطة عدد الحدود n وتتضمن مجموعة أو مجموعة فرعية لأعداد صحيحة موجبة. ويُمكن استخدام خواص المتتاليات الحسابية والهندسية لتصنيف المتتاليات.

مثال 5 تصنيف المتتاليات

حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية* أم *هندسية* أم غير *ذلك*. اشرح استنتاجك.

a. 16, 24, 36, 54, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$54 - 36 = 18$ $\quad 36 - 24 = 12$ ✗

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$\frac{54}{36} = \frac{3}{2}$ $\quad \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ $\quad \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ ✓

نظرًا لوجود نسبة مشتركة، فإن المتتالية هندسية.

b. 1, 4, 9, 16, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$16 - 9 = 7 \quad 9 - 4 = 5$ ✗

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$\frac{16}{9} = 1.\overline{7}$ $\quad \frac{9}{4} = 2.25$ ✗

نظرًا لعدم وجود فرق مشترك أو نسبة مشتركة، فإن المتتالية ليست حسابية ولا هندسية.

c. 23, 17, 11, 5, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$17 - 23 = -6$ ✓ $\quad 11 - 17 = -6$ $\quad 5 - 11 = -6$

نظرًا لوجود فرق مشترك، فإن المتتالية حسابية.

تمرين موجّه

6A. $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ **6B.** $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \ldots$ **6C.** $-4, 4, 5, -5, \ldots$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا.**

1. 8, −2, −12, −22,
2. −19, −12, −5, 2, 9
3. 1, 2, 4, 8, 16
4. 0.6, 0.9, 1.2, 1.8, ...

مثال 2 **أوجد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مـثّـل المتتالية بيانيًا.**

5. 6, 18, 30, ...
6. 15, 6, −3, ...
7. −19, −11, −3, ...
8. −26, −33, −40, ...

مثال 3

9. **المعرفة المالية** تدخر ياسمين من أموالها لشراء سيارة. ولديها AED 950. لكنها تخطط لادخار AED 320 كل أسبوع من عملها في مجالسة الأطفال.
   a. كم ستدخر ياسمين بعد 8 أسابيع؟
   b. إذا كانت السيارة تكلف AED 7,350. فكم من الزمن ستستغرق لادخار مالٍ كافٍ لهذا السعر؟

مثال 4 **حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم غير ذلك. اكتب نعم أو لا.**

10. −8, −5, −1, 4, ...
11. 4, 12, 36, 108, ...
12. 27, 9, 3, 1, ...
13. 7, 14, 21, 28, ...

مثال 5 **أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية. ثم مـثّـل المتتالية بيانيًا.**

14. 8, 12, 18, 27, ...
15. 8, 16, 32, 64, ...
16. 250, 50, 10, 2, ...
17. 9, −3, 1, $-\frac{1}{3}$, ...

مثال 6 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *غير ذلك*. اشرح استنتاجك.**

18. 5, 1, 7, 3, 9, ...
19. 200, −100, 50, −25, ...
20. 12, 16, 20, 24, ...

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا.**

21. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$
22. −9, −3, 0, 3, 9
23. 14, −5, −19, ...
24. $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

مثال 2 **أوجد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مـثّـل المتتالية بيانيًا.**

25. −4, −1, 2, 5, ...
26. 10, 2, −6, −14, ...
27. −5, −11, −17, −23, ...
28. −19, −2, 15, ...
29. $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \ldots$
30. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$

مثال 3

31. **المسرح** هناك 28 مقعدًا في الصف الأول بالمسرح. وكل صف تالي يتضمن مقعدين أكثر من الصف السابق. إذا كان هناك 24 صفًا. فكم مقعدًا في الصف الأخير بالمسح؟
32. **التبرير المنطقي** بدأ إبراهيم برنامجًا تدريبيًا لرفع مستوى اللياقة البدنية. ويخطط للتجديف لمدة 5 دقائق على آلة التجديف الخاصة به في اليوم الأول، ثم يزيد فترة التجديف بمقدار دقيقة وثلاثين ثانية كل يوم.
   a. ما المدة التي سيقضيها في التجديف خلال اليوم الثامن عشر؟
   b. في أي يوم سيجدف جمال لمدة ساعة أو أكثر لأول مرة؟
   c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 **حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم غير ذلك. اكتب نعم أو لا.**

33. 21, 14, 7, ...
34. 124, 186, 248, ...
35. $-27, 18, -12, \ldots$
36. 162, 108, 72, ...
37. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$
38. $-4, -2, 0, 2, \ldots$

مثال 5 **أوجد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية. ثم مثّل المتتالية بيانيًا.**

39. 0.125, −0.5, 2, ...
40. 18, 12, 8, ...
41. 64, 48, 36, ...
42. 81, 108, 144, ...
43. $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, ...
44. 1, 0.1, 0.01, 0.001, ...

مثال 6 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *غير ذلك*. اشرح استنتاجك.**

45. 3, 12, 27, 48, ...
46. $1, -2, -5, -8, \ldots$
47. 12, 36, 108, 324, ...
48. $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \ldots$
49. $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$
50. 6, 9, 14, 21, ...

51. القراءة قررت أسماء قراءة كتاب من 800 صفحة خلال العطلة. فإذا كانت قد وصلت بالفعل إلى الصفحة 112 وبقي من عطلتها 8 أيام، فما العدد الأدنى من الصفحات التي تحتاج إلى قراءتها كل يوم لتنتهي من قراءة الكتاب بنهاية عطلتها؟

52. الاستهلاك من المتوقع لسيارة أمنية أن تنخفض قيمتها بمعدل 15% كل عام. إذا كانت قيمة سيارتها في الوقت الراهن هي AED 88,200، فما ستكون قيمتها بعد 6 أعوام مع التقريب لأقرب درهم؟

53. الانتظام عند طي ورقة على نفسها، يتضاعف سمكها. إذا كانت هناك ورقة سمكها 0.1 mm ويُمكن طيها 37 مرة، فما السمك الذي ستصبح عليه حينها؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. التبرير اشرح السبب في أن المتتالية 8, 10, 13, 17, 22 ليست حسابية.

55. مسألة غير محددة الإجابة صِف موقفًا من الحياة اليومية يمكن تمثيله باستخدام متتالية حسابية بها فرق مشترك قيمته 8.

56. تحدٍ مجموع ثلاثة حدود متتالية لمتتالية حسابية يساوي 6. وناتج ضرب الحدود يساوي 42−. أوجد هذه الحدود.

57. تحليل الخطأ يحدد بدر وسالم ما إذا كانت المتتالية ... 8, 8, 8, *حسابية*، أم *هندسية*، أم *غير ذلك*، أم *حسابية* و*هندسية*. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

بدر	سالم
الفرق المشترك للمتتالية يساوي 0. والمتتالية حسابية.	*النسبة المشتركة في المتتالية تساوي 1. والمتتالية هندسية.*

58. مسألة غير محددة الإجابة أوجد متتالية هندسية ومتتالية حسابية ومتتالية ليست هندسية ولا حسابية تبدأ على النحو ... 3, 9,.

59. التبرير إذا كان لدى متتالية هندسية النسبة r حيث إن $|r| < 1$. فماذا سيحدث للحدود عند زيادة n؟ وماذا سيحدث للحدود إذا كان $|r| \geq 1$؟

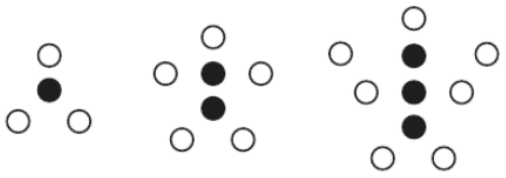
60. الكتابة في الرياضيات صِف ما سيحدث لحدود المتتالية الهندسية عند مضاعفة النسبة المشتركة. وماذا سيحدث عند نقصانها إلى النصف؟ اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

61. الإجابة المختصرة يبلغ قياس حجرة نوم فوزية التي على شكل مستطيل 4.5 m في 3.5 m. وتريد شراء سجادة لغرفة النوم بتكلفة 108 AED لكل متر مربع شامل الضريبة. ما المبلغ الذي ستنفقه على فرش غرفة نومها بالسجاد؟

62. يمكن وصف نمط الدوائر المملوءة والدوائر البيضاء أدناه من خلال علاقة بين متغيرين.



أي علاقة تربط w، وهو عدد الدوائر البيضاء، بـ f، وهو عدد الدوائر الغامقة؟

A $w = 3f$
C $w = 2f + 1$
B $f = \frac{1}{2}w - 1$
D $f = \frac{1}{3}w$

63. SAT/ACT كانت تريد رانيا تحديد متوسط درجاتها في ستة اختبارات. وقد أدرجت الدرجات بشكل صحيح للحصول على T. ولكنها قامت بالقسمة على 7 بدلاً من 6. فكان المتوسط 12 درجة أقل من المتوسط الحقيقي. ما المعادلة التي يُمكن استخدامها لتحديد قيمة T؟

F $6T + 12 = 7T$
J $\frac{T}{6} = \frac{T - 12}{7}$
G $\frac{T}{7} = \frac{T - 12}{6}$
K $\frac{T}{6} = 12 - \frac{T}{7}$
H $\frac{T}{7} + 12 = \frac{T}{6}$

64. أوجد الحد التالي في المتتالية الهندسية

$8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$.

A $\frac{11}{8}$
C $\frac{9}{4}$
B $\frac{27}{16}$
D $\frac{81}{32}$

مراجعة شاملة

حُـلّ كل من أنظمة المعادلات الآتية.

65. $y = 5$
$y^2 = x^2 + 9$

66. $y - x = 1$
$x^2 + y^2 = 25$

67. $3x = 8y^2$
$8y^2 - 2x^2 = 16$

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. وحدد ما إذا كان التمثيل البياني لها *قطعًا مكافئًا*، أم *دائرةً*، أم *قطعًا ناقصًا*، أم *قطعًا زائدًا*. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

68. $6x^2 + 6y^2 = 162$

69. $4y^2 - x^2 + 4 = 0$

70. $x^2 + y^2 + 6y + 13 = 40$

مـثّـل كل دالة بيانيًا.

71. $f(x) = \frac{6}{(x - 2)(x + 3)}$

72. $f(x) = \frac{-3}{(x - 2)^2}$

73. $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$

74. الصحة تمت إزالة دواء معين من مجرى الدم بمعدل ثابت. وانخفض معدل الدواء وفق الدالة $y = ae^{-0.1625t}$، حيث t بالساعات. أوجد عمر النصف لهذه المادة.

مراجعة المهارات

اكتب معادلة المستقيم في كل من الحالات الآتية:.

75. يمر بالنقطة (6, 4)، و $m = 0.5$

76. يمر بالنقطة $\left(2, \frac{1}{2}\right)$، و $m = -\frac{3}{4}$

77. يمر بالنقطة (0, −6)، و $m = 3$

78. يمر بالنقطة (0, 4)، و $m = \frac{1}{4}$

79. يمر بالنقطتين (1, 3) و $\left(8, -\frac{1}{2}\right)$

80. يمر بالنقطتين (−5, 1) و (5, 16)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

السابق:
- حددتَ ما إذا كانت المتتالية حسابية.

الحالي:
1. استخدام المتتاليات الحسابية.
2. إيجاد مجاميع المتسلسلات الحسابية.

لماذا؟
- في القرن الثامن عشر، طلب معلم من فصل يضم طلابًا من المرحلة الابتدائية إيجاد مجموع أعداد العد من 1 إلى 100. وتوصل الطالب كارل جاوس إلى الإجابة الصحيحة في ثوانٍ معدودة مما أذهل المعلم. وعندما كبر جاوس، أصبح رياضيًا عظيمًا.

فقد حل هذه المسألة باستخدام المتسلسلات الحسابية.

المفردات الجديدة

أوساط حسابية arithmetic means

متسلسلة series

متسلسلة حسابية arithmetic series

مجموع جزئي partial sum

الرمز سيجما sigma notation

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 المتتاليات الحسابية

في الدرس 12-1، استخدمت صيغة النقطة والميل لإيجاد حد معين لمتتالية حسابية. ومن الممكن وضع معادلة لأي حد لمتتالية حسابية باستخدام نفس العملية.

فكر في المتتالية الحسابية $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ التي فيها الفرق المشترك هو d.

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$(a_n - a_1) = d(n - 1)$ $(x, y) = (n, a_n)$، $(x_1, y_1) = (1, a_1)$، و $m = d$

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ أضف a_1 إلى الطرفين.

يمكنك استخدام هذه المعادلة لإيجاد أي حد في متتالية حسابية عند معرفتك للحد الأول والفرق المشترك.

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية حسابية

يتم الحصول على الحد نوني a_n لمتتالية حسابية، والتي يكون الحد الأول فيها هو a_1 والفرق المشترك هو d، من خلال الصيغة التالية، حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستبرهن على هذه الصيغة في التدريب 80.

مثال 1 إيجاد الحد النوني

أوجد الحد الثاني عشر للمتتالية الحسابية ... 9, 16, 23, 30,.

الخطوة 1 أوجد الفرق المشترك.

$30 - 23 = 7$ $23 - 16 = 7$ $16 - 9 = 7$

إذًا، $d = 7$.

الخطوة 2 أوجد الحد الثاني عشر.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ الحد النوني لمتتالية حسابية

$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7)$ $a_1 = 9$، $d = 7$، و $n = 12$

$= 9 + 77$ أو 86 بسّط.

تمرين موجّه

أوجد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

1A. $a_1 = -4, d = 6, n = 9$

1B. $a_1 = 15, d = -8$ بالنسبة لـ a_{20}

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا كان لديك بعض الحدود الخاصة بمتتالية حسابية ما، فيمكنك كتابة معادلة للحد النوني للمتتالية.

مثال 2 اكتب معادلات للحد النوني

اكتب معادلة للحد *النوني* لكل متتالية حسابية.

a. 5, −13, −31, ...

$d = -13 - 5$ أو -18؛ 5 هو الحد الأول.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$a_n = 5 + (n-1)(-18)$	$d = -18$ و $a_1 = 5$
$a_n = 5 + (-18n + 18)$	خاصية التوزيع
$a_n = -18n + 23$	بسّط.

b. $a_5 = 19$, $d = 6$

أولاً، أوجد a_1.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$19 = a_1 + (5-1)(6)$	$d = 6$ و $n = 5$، $a_5 = 19$
$19 = a_1 + 24$	اضرب.
$-5 = a_1$	اطرح 24 من الطرفين.

ثم اكتب المعادلة.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$a_n = -5 + (n-1)(6)$	$d = 6$ و $a_1 = -5$
$a_n = -5 + (6n - 6)$	خاصية التوزيع
$a_n = 6n - 11$	بسّط.

تمرين موجّه

2A. 12, 3, −6, ...

2B. $a_6 = 12$, $d = 8$

نصيحة دراسية

التحقق من الحلول تحقق من إجابتك مستخدمًا إياها لتحديد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية.

يكون لديك في بعض الأحيان حدين لمتتالية، لكنهما غير متتاليين في المتتالية. يُطلق على الحدود الواقعة بين أي حدين غير متتاليين **أوساط حسابية**. ويُمكن استخدامه لإيجاد الحدود المجهولة لمتتالية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتالية ..., 22, ?, ?, ?, ?, −8.

الخطوة 1 بما أن هناك أربعة حدود بين الحدين الأول والأخير المُعطيين، فإن إجمالي الحدود يساوي 2 + 4 أو 6. إذًا $n = 6$.

الخطوة 2 أوجد قيمة d.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$22 = -8 + (6-1)d$	$n = 6$، $a_6 = 22$، و $a_1 = -8$
$30 = 5d$	خاصية التوزيع
$6 = d$	اقسم الطرفين على 5.

الخطوة 3 استخدم d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة.

الأوساط الحسابية هي 2−. و 4. و 10. و 16.

تمرين موجّه

3. أوجد الأوساط الحسابية الخمسة بين 18− و 36.

قراءة في الرياضيات

الوسط الحسابي متوسط عددين أو أكثر

الأوساط الحسابية الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتابعين لمتتالية حسابية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المتسلسلة الحسابية

تتكوّن **المتسلسلة** عند جمع حدود متتالية. و **المتسلسلة الحسابية** هي عبارة عن مجموع حدود المتتالية الحسابية المرتبطة بها. ويُطلق على مجموع الحدود النونية **المجموع الجزئي** ويُرمز إليه بالرمز S_n.

المفهوم الأساسي المجموع الجزئي لمتسلسلة حسابية

الصيغة	معطى	مجموع S_n للحدود النونية الأولى يساوي:
عامة	a_1 و a_n	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$
بديلة	a_1 و d	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

يلزم أحيانًا تحديد a_1، أو a_n، أو n قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وعند حدوث ذلك، استخدم صيغة الحد النوني.

مثال 4 استخدام صيغ المجموع

أوجد مجموع $12 + 19 + 26 + \ldots + 180$.

الخطوة 1 $a_1 = 12$، و $a_n = 180$، و $d = 19 - 12$ أو 7.

يتعين إيجاد n قبل أن نتمكن من استخدام إحدى الصيغ.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحد النوني لمتتالية حسابية

$180 = 12 + (n-1)(7)$ — $a_n = 180$، و $a_1 = 12$، و $d = 7$

$168 = 7n - 7$ — بسّط.

$25 = n$ — أوجد قيمة n.

الخطوة 2 استخدم أيًا من الصيغتين لإيجاد S_n.

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ — صيغة المجموع

$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)(7)]$ — $n = 25$، و $a_1 = 12$، و $d = 7$

$S_{25} = 12.5(192)$ or 2400 — بسّط.

تمرين موجّه

أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.

4A. $2 + 4 + 6 + \ldots + 100$

4B. $n = 16$, $a_n = 240$, $d = 8$.

يمكنك استخدام صيغة المجموع لإيجاد حدود المتسلسلات.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى

أوجد الحدود الثلاثة الأولى للمتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 7$، و $a_n = 79$، و $S_n = 430$.

الخطوة 1 أوجد n.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ — صيغة المجموع

$430 = n\left(\frac{7 + 79}{2}\right)$ — $S_n = 430$، و $a_1 = 7$، و $a_n = 79$

$430 = n(43)$ — بسّط.

$10 = n$ — اقسم الطرفين على 43.

انتبه!

الفرق المشترك احرص ألا يختلط عليك الأمر في علامة الفرق المشترك بالمتتالية الحسابية. تحقق أن القاعدة تنتج بالفعل حدود المتتالية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الخطوة 2 أوجد قيمة d.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$79 = 7 + (10-1)d$	$n = 10$ و $a_1 = 7$، $a_n = 79$
$72 = 9d$	اطرح 7 من الطرفين.
$8 = d$	اقسم الطرفين على 9.

الخطوة 3 استخدم d لتحديد a_2 و a_3.

$a_2 = 7 + 8$ أو 15 $\quad$ $a_3 = 15 + 8$ أو 23

الحدود الثلاثة الأولى هي 7 و 15 و 23.

تمرين موجّه

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.

5A. $S_n = 120,\ n = 8,\ a_n = 36$ $\quad$ **5B.** $a_1 = -24,\ a_n = 288,\ S_n = 5280$

يمكن كتابة مجموع المتسلسلة باختصار عن طريق استخدام **الرمز سيجما**.

المفهوم الأساسي الرمز سيجما

الرموز

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

n: آخر قيمة لـ k — 1: أول قيمة لـ k — $f(k)$: صيغة حدود المتسلسلة

مثال

$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \cdots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \cdots + 50$$

قراءة في الرياضيات

الرمز سيجما يأتي الاسم من الحرف اليوناني سيجما، والذي يُستخدَم في الرمز.

مثال 6 على الاختبار المعياري استخدام الرمز سيجما

أوجد قيمة $\sum_{k=4}^{18}(6k-1)$.

A 846 $\quad$ **B** 910 $\quad$ **C** 975 $\quad$ **D** 1008

قراءة فقرة الاختبار

يتوجب عليك إيجاد مجموع المتسلسلات. أوجد قيمة a_1، و a_n، و n.

حُل فقرة الاختبار

هناك $1 + 4 - 18$ أو 15 حدًا. إذًا $n = 15$.

$a_1 = 6(4) - 1$ أو 23 $\quad$ $a_n = 6(18) - 1$ أو 107

أوجد المجموع.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$	صيغة المجموع
$S_{15} = 15\left(\frac{23 + 107}{2}\right)$	$n = 15$، $a_1 = 23$، و $a_n = 107$
$S_{15} = 15(65) = 975$	الإجابة الصحيحة هي C.

نصيحة عند حل الاختبار

المثابرة

أحيانًا يلزم تقسيم مسألة ما إلى أجزاء، وحل كل جزء منفردًا، ثم دمج حلول الأجزاء.

تمرين موجّه

6. أوجد قيمة $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$.

F 972 $\quad$ **G** 1053 $\quad$ **H** 1281 $\quad$ **J** 1701

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.**

1. $a_1 = 14,\ d = 9,\ n = 11$
2. a_{18} ـ ل بالنسبة 12, 25, 38, ...

مثال 2 **اكتب معادلة للحد *النوني* لكل متتالية حسابية.**

3. 13, 19, 25, ...
4. $a_5 = -12,\ d = -4$

مثال 3 **أوجد الأوساط الحسابية في كل متتالية.**

5. 6, ?, ?, ?, 42
6. −4, ?, ?, ?, 8

مثال 4 **أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.**

7. الأعداد الطبيعية الخمسين الأولى
8. $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$
9. $a_1 = 12,\ a_n = 188,\ d = 4$
10. $a_n = 145,\ d = 5,\ n = 21$

مثال 5 **أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.**

11. $a_1 = 8,\ a_n = 100,\ S_n = 1296$
12. $n = 18,\ a_n = 112,\ S_n = 1098$

مثال 6

13. **اختيار من متعدد** أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$.

A 45
B 78
C 342
D 410

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد الحد المشار إليه في كل متتالية حسابية.**

14. $a_1 = -18,\ d = 12,\ n = 16$
15. $a_1 = -12,\ n = 66,\ d = 4$
16. $a_1 = 9,\ n = 24,\ d = -6$
17. a_{15} ـ ل بالنسبة −5, −12, −19, ...
18. a_{10} ـ ل بالنسبة −1, 1, 3, ...
19. a_{24} ـ ل بالنسبة 8.25, 8.5, 8.75, ...

مثال 2 **اكتب معادلة للحد *النوني* لكل متتالية حسابية.**

20. 24, 35, 46, ...
21. 31, 17, 3, ...
22. $a_9 = 45,\ d = -3$
23. $a_7 = 21,\ d = 5$
24. $a_4 = 12,\ d = 0.25$
25. $a_5 = 1.5,\ d = 4.5$
26. 9, 2, −5, ...
27. $a_6 = 22,\ d = 9$
28. $a_8 = -8,\ d = -2$
29. $a_{15} = 7,\ d = \frac{2}{3}$
30. −12, −17, −22, ...
31. $a_3 = -\frac{4}{5},\ d = \frac{1}{2}$

32. **البنية** يبلغ متوسط إجمالي ما يحرزه جمال لكل مباراة في بطولة البولينج بهذا الموسم 123 قارورة. ولكنه يتلقى دروسًا في البولينج حتى يزيد متوسط ما يحرزه في كل موسم بمقدار 8 قارورات.

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد النوني للمتتالية.

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي موسم سيحرز جمال متوسط 187 قارورة في المباراة؟

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح.

مثال 3 **أوجد الأوساط الحسابية في كل متتالية.**

33. 24, ?, ?, ?, ?, −1
34. −6, ?, ?, ?, ?, 49
35. −28, ?, ?, ?, ?, 7
36. 84, ?, ?, ?, ?, 39
37. −12, ?, ?, ?, ?, ?, −66
38. 182, ?, ?, ?, ?, ?, 104

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 4 **أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.**

39. أول 100 عدد طبيعي زوجي

40. أول 200 عدد طبيعي فردي

41. أول 100 عدد طبيعي فردي

42. أول 300 عدد طبيعي زوجي

43. $-18 + (-15) + (-12) + \cdots + 66$

44. $-24 + (-18) + (-12) + \cdots + 72$

45. $a_1 = -16,\ d = 6,\ n = 24$

46. $n = 19,\ a_n = 154,\ d = 8$

47. المسابقات تبدأ الجوائز التي يتم منحها في مسابقة أسبوعية على الراديو بمبلغ قيمته AED 150 ويزداد بمقدار AED 50 لكل أسبوع يبقى فيه المتنافس. إذا استمرت المسابقة لمدة 11 أسبوعًا، فما إجمالي المبلغ الذي سيحصل عليه الرابح في النهاية؟

مثال 5 **أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.**

48. $n = 32,\ a_n = -86,\ S_n = 224$

49. $a_1 = 48,\ a_n = 180,\ S_n = 1368$

50. $a_1 = 3,\ a_n = 66,\ S_n = 759$

51. $n = 28,\ a_n = 228,\ S_n = 2982$

52. $a_1 = -72,\ a_n = 453,\ S_n = 6858$

53. $n = 30,\ a_n = 362,\ S_n = 4770$

54. $a_1 = 19,\ n = 44,\ S_n = 9350$

55. $a_1 = -33,\ n = 36,\ S_n = 6372$

56. الجوائز تمنح محطة راديو جائزة يصل الإجمالي فيها إلى AED 8500 نظير عشر ساعات. وتزيد الجائزة كل ساعة بمقدار AED 100. أوجد قيمتي الجائزة الأولى والجائزة الأخيرة.

مثال 6 **أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.**

57. $\sum_{k=1}^{16} (4k - 2)$

58. $\sum_{k=4}^{13} (4k + 1)$

59. $\sum_{k=5}^{16} (2k + 6)$

60. $\sum_{k=0}^{12} (-3k + 2)$

61. المعرفة المالية اقترضت نجلاء بعض المال من والديها. ووافقت على سداد AED 50 بنهاية الشهر الأول وإضافة AED 25 في كل شهر آخر لمدة 12 شهرًا. ما إجمالي المبلغ الذي ستكون قد سددته بعد مرور 12 شهرًا؟

62. الجاذبية إذا وقع جسم في سقوط حر مع إهمال مقاومة الهواء، فإنه يسقط بمعدل 16 ft في الثانية الأولى، ويزيد بمقدار 48 ft في الثانية التالية، و 80 ft في الثانية الثالثة. ما إجمالي الأقدام التي سيقطعها هذا الجسم في سقوطه بعد مرور 10 ثوانٍ؟

استخدم المعلومات المعطاة لكتابة معادلة تمثل الحد *النوني* في كل متتالية حسابية

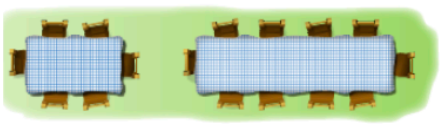
63. الحد رقم 100 في المتتالية هو 245. والفرق المشترك يساوي 13.

64. الحد الحادي عشر في المتتالية هو 78. والفرق المشترك يساوي -9.

65. الحد السادس في المتتالية هو -34. الحد رقم 23 في المتتالية هو 119.

66. الحد رقم 25 في المتتالية هو 121. الحد رقم 80 في المتتالية هو 506.

67. تمثيل النماذج غالبًا ما يتم وضع الطاولات المستطيلة في قاعة الاستقبال بلصق طرف كل طاولة بالأخرى. يوضّح الرسمان التخطيطيان التاليان عدد الأشخاص الذين يُمكنهم الجلوس في كل ترتيب للطاولات.



a. قم بإعداد رسومات لإيجاد الأعداد الثلاثة التالية عند إضافة الطاولات بمعدل واحدة في المرة إلى الطاولات المرتبة.

b. اكتب معادلة لتمثيل العدد *النوني* في هذا النمط.

c. هل من الممكن الحصول على مقاعد تكفي بالضبط 100 شخص في هذه الطاولات المرتبة؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

68. **الأداء** هناك شركة ما تدفع لموظفيها وفقًا لمعدلات أدائهم. تقاضت بدرية سعرًا موحدًا يبلغ AED 800 لكل أسبوع بالإضافة إلى AED 96 نظير كل وحدة تنجزها. إذا تقاضت AED 2,048 في أسبوع واحد، فما عدد الوحدات التي أنجزتها؟

69. **الراتب** يتقاضى طارق في الوقت الراهن AED 112,000 في العام. إذا كان طارق يتوقع زيادة راتبه كل عام بقيمة AED 16,000، فبعد كم عام سيصبح راتبه AED 400,000 في العام؟

70. **الألعاب الرياضية** أثناء التدريب لخوض سباق الضاحية، تخطط سندية للجري 3 km كيلومترات يوميًا في الأسبوع الأول، ثم زيادة المسافة بمقدار 05 km في كل من الأسابيع التالية.

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد *النوني* للمتتالية.

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي أسبوع ستجري 10 km في اليوم؟

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح.

71. **التمثيلات المتعددة** تأمل $\sum_{k=1}^{x}(2k+2)$.

a. **جدوليًا** اصنع جدولاً للمجاميع الجزئية للمتسلسلة بالنسبة لـ $1 \le k \le 10$.

b. **بيانيًا** مثِّل بيانيًا $(k$، المجموع الجزئي$)$.

c. **بيانيًا** مثِّل بيانيًا $f(x) = x^2 + 3x$ على نفس الشبكة.

d. **لفظيًا** ماذا تلاحظ بشأن التمثيلين البيانيين؟

e. **تحليليًا** ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الدوال التربيعية ومجموع المتسلسلة الحسابية؟

f. **جبريًا** أوجد المتسلسلة الحسابية التي ترتبط بـ $g(x) = x^2 + 8x$.

أوجد قيمة x.

72. $\sum_{k=3}^{x}(6k-5) = 928$

73. $\sum_{k=5}^{x}(8k+2) = 1032$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

74. **النقد** يحدد عيسى وجاسم صيغة الحد *النوني* للمتتالية ... 16, 7, −2, −11. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

عيسى	جاسم
$d = 16 - 7$ or 9, $a_1 = -11$	$d = 16 - 7$ or 9, $a_1 = -11$
$a_n = -11 + (n-1)9$	$a_n = 9n - 11$
$= 9n - 20$	

75. **التبرير** إذا كان a هو الحد الثالث في متتالية حسابية، و b هو الحد الخامس، و c هو الحد الحادي عشر، فعبِّر عن c بدلالة a و b.

76. **تحدٍ** توجد ثلاثة أوساط حسابية بين a و b في متتالية حسابية. ومتوسط الأوساط الحسابية يساوي 16. ما متوسط a و b؟

77. **تحدٍ** أوجد S_n حيث إن ... $+ (x+3y) + (x+2y) + (x+y)$.

78. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة حسابية بها 8 حدود ومجموع يبلغ 324.

79. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقارن بين المتتاليات والمتسلسلات الحسابية.

80. **البرهان** برهن الصيغة المتعلقة بالحد *النوني* لمتتالية حسابية.

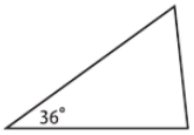
81. **البرهان** اشتق صيغة مجموع لا تشمل a_1.

82. **البرهان** اشتق صيغة المجموع البديلة باستخدام صيغة المجموع العامة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

83. SAT/ACT تُكوِّن قياسات الزوايا الخاصة بأحد المثلثات متتالية حسابية. إذا كان قياس الزاوية الأصغر هو36°. فما قياس الزاوية الأكبر؟



A 54°
B 75°
C 84°
D 90°
E 97°

84. تبلغ مساحة مثلث ما $\frac{1}{2}q^2 - 8$ ويبلغ الارتفاع $q + 4$. أي تعبير يصف قاعدة المثلث على نحو أدق؟

F $(q + 1)$ H $(q - 3)$
G $(q + 2)$ J $(q - 4)$.

85. التعبير $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ يساوي

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$ C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$
B $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$ D $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

86. الإجابة المختصرة يستطيع أحمد كتابة مقال يتألف من 200 كلمة خلال 6 ساعات. ويُمكن لحسام كتابة نفس المقال خلال $4\frac{1}{2}$ ساعات. إذا عملا معًا، ما إجمالي عدد الساعات التي سيمضيانها في كتابة المقال؟

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا. (الدرس 1-12)

87. $-6, 4, 14, 24, \ldots$

88. $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$

89. $10, 8, 5, 1, \ldots$

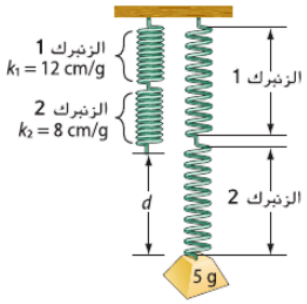
حُـلّ كل نظام من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

90. $x + 2y > 1$
$x^2 + y^2 \leq 25$

91. $x + y \leq 2$
$4x^2 - y^2 \geq 4$

92. $x^2 + y^2 \geq 4$
$4y^2 + 9x^2 \leq 36$

93. الفيزياء ترتبط المسافة التي يتمددها الزنبرك بالكتلة المُعلقَّة به. ورُمز إلى ذلك بالمعادلة $d = km$. حيث d هو المسافة، و m هو الكتلة، و k هو ثابت الزنبرك. عند ربط زنبركين الثابتين الخاصين بهما هما k_1 و k_2 بسلسلة، فإنه يُمكن إيجاد ثابت الزنبرك k باستخدام المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.



a. إذا كان هناك زنبرك بثابت يبلغ 12 cm/g معلق في سلسلة مع زنبرك آخر بثابت يبلغ 8 cm/g. فأوجد ثابت الزنبرك الناتج.

b. إذا كان هناك جسم يزن 5 g معلق بسلسلة الزنبركين. فلأي مدى سيتمدد الزنبركان؟ وهل هذه الإجابة معقولة في هذا السياق؟

مـثِّـل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

94. $f(x) = \frac{2}{3}(2^x)$

95. $f(x) = 4^x + 3$

96. $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

مراجعة المهارات

حُـلّ كل معادلة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

97. $5^x = 52$

98. $4^{3p} = 10$

99. $3^{n+2} = 14.5$

100. $16^{d-4} = 3^{3-d}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 12-1 إلى 12-2

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. اشرح استنتاجك. (الدرس 12-1)

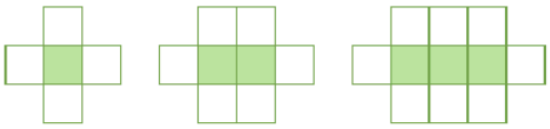
1. $5, -3, -12, -22, -33 \ldots$
2. $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5} \ldots$

3. **الإسكان** تعمل سهى وكيلةعقارات. ويجب عليها بيع 15 منزلاً خلال 6 أشهر. (الدرس 12-1)

   a. بنهاية أول شهرين، كانت قد باعت 4منازل. إذا باعت منزلين كل شهر خلال ما تبقى من الستة أشهر، فهل ستبلغ الهدف المحدد لها؟ اشرح. انظر الهامش.

   b. إذا باعت 5منازل بنهاية الشهرالأول، فما متوسط عدد المنازل التي عليها بيعها كل شهر تبلغ الهدف المحدد لها؟

4. **الهندسة** توضح الأشكال التالية نمطًا من المربعات المظللة والمربعات البيضاء. (الدرس 12-1)



الشكل 1 الشكل 2 الشكل 3

   a. اكتب معادلة تمثل العدد *النوني* في هذا النمط، حيث n هو عدد المربعات البيضاء.

   b. هل من الممكن الحصول على 84 مربعًا أبيض تمامًا في ترتيب ما؟ اشرح.

أوجد الحد الموضح لكل متتالية حسابية. (الدرس 12-2)

5. $a_1 = 10, d = -5, n = 9$
6. $a_1 = -8, d = 4, n = 99$

أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية. (الدرس 12-2)

7. $-15 + (-11) + (-7) + \cdots + 53$
8. $a_1 = -12, d = 8, n = 22$
9. $\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$

10. **الاختيار من متعدد** ما مجموع أول 50 عددًا فرديًا؟ (الدرس 12-2)

   A 2550

   B 2500

   C 2499

   D 2401

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

السابق:
- حددتَ ما إذا كانت المتتالية هندسية أم لا.

الحالي:
1. استخدام المتتاليات الهندسية.
2. إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية.

لماذا؟
- رأى حسن كتابًا جديدًا في المكتبة. وأرسل رسالة إلكترونية برابط للموقع الإلكتروني لمؤلف الكتاب إلى خمسة من أصدقائه. ثم أعاد أصدقاؤه توجيه الرابط بنفس النمط. كم عدد الأشخاص الذين سيتلقون الرابط في الجولة الثامنة من الرسائل الإلكترونية؟

المفردات الجديدة

أوساط هندسية
geometric means

متسلسلة هندسية
geometric series

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 المتتاليات الهندسية

كما هو الحال في المتتاليات الحسابية، هناك صيغة للحد *النوني* للمتتالية الهندسية. ويُمكن استخدام هذه الصيغة لتحديد أي حد من المتتالية.

المفهوم الأساسي الحد *النوني* لمتتالية هندسية

يتم الحصول على الحد *النوني* a_n لمتتالية هندسية يكون الحد الأول فيها هو a_1 والنسبة المشتركة هي r، من خلال الصيغة التالية، حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ستبرهن على هذه الصيغة في التدريب 68.

مثال 1 من الحياة اليومية إيجاد الحد النوني

الموسيقى **إذا استمر النمط، فكم عدد رسائل البريد الإلكتروني التي ستُرسل في الجولة الثامنة؟**

الاستيعاب نحتاج إلى تحديد عدد رسائل البريد الإلكتروني المعاد إرسالها في الجولة الثامنة. وتم إرسال خمسة رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى. وكل مستلم من المستلمين الخمسة أرسل خمس رسائل في الجولة الثانية، وهكذا.

التخطيط هذه متتالية هندسية، والنسبة المشتركة هي 5. استخدم الصيغة للحد *النوني* للمتتالية الهندسية.

الحل

$a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد النوني للمتتالية الهندسية

$a_8 = 5(5)^{8-1}$ $a_1 = 5$، و $r = 5$، و $n = 8$

$a_8 = 5(78{,}125)$ $78{,}125 = 5^7$ 390,625

التحقق اكتب أول ثمانية حدود من خلال الضرب في النسبة المشتركة.

5, 25, 125, 625, 3125, 15,625, 78,125, 390,625

سيكون هناك 390,625 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها في الجولة الثامنة.

تمرين موجّه

1. **الرسائل الإلكترونية** استلمت سمية دعابة في رسالة بريد إلكتروني تطلب منها أن تعيد إرسالها إلى أربعة من أصدقائها. وبالفعل أعادت إرسالها، ثم أرسلتها كل صديقة من صديقاتها إلى أربعة آخرين من الأصدقاء، وهكذا. وإذا استمر هذا النمط، فكم عدد الأشخاص الذين سيستلمون هذه الرسالة الإلكترونية في الجولة التاسعة من إعادة الإرسال؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا أعطيت بعض الحدود الخاصة بمتتالية هندسية ما، فيمكنك تحديد صيغة لإيجاد الحد *النوني* للمتتالية.

مثال 2 كتابة صيغة الحد النوني

اكتب صيغة الحد *النوني* لكل متتالية هندسية.

a. 0.5, 2, 8, 32, ...

$r = 8 \div 2$ أو 4; 0.5 هو الحد الأول.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد *النوني* لمتتالية هندسية
$a_n = 0.5(4)^{n-1}$	$r = 4$ و $a_1 = 0.5$

b. $a_4 = 5$ و $r = 6$

الخطوة 1 أوجد a_1.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد *النوني* لمتتالية هندسية
$5 = a_1(6^{4-1})$	$n = 4$، و $r = 6$، و $a_n = 5$
$5 = a_1(216)$	أوجد قيمة الأس.
$\frac{5}{216} = a_1$	اقسم الطرفين على 216.

الخطوة 2 اكتب الصيغة.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد *النوني* لمتتالية هندسية
$a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$	$r = 6$ و $a_1 = \frac{5}{216}$

تمرين موجّه

اكتب صيغة الحد *النوني* لكل متتالية هندسية.

2A. $-0.25, 2, -16, 128, \ldots$ **2B.** $a_3 = 16, r = 4$

الربط بتاريخ الرياضيات

أرخيتاس (347–428 قبل الميلاد.) تمت دراسة المتتاليات الهندسية أو المتعاقبات الهندسية لأول مرة بواسطة عالم الرياضيات اليوناني أرخيتاس. وجاءت دراساته لهذه المتتاليات بسبب شغفه بالموسيقى والأوكتافات الموسيقية.

كما هو الحال في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الموجودة بين حدين غير متعاقبين لمتتالية هندسية. ويمكن استخدام النسبة المشتركة r لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين 2 و 1250.

الخطوة 1 بما أن هناك ثلاثة حدود بين الحد الأول والحد الأخير، فهناك $2 + 3$ أو 5 حدود إجمالية، إذًا $n = 5$.

الخطوة 2 أوجد قيمة r.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد *النوني* لمتتالية هندسية
$1250 = 2r^{5-1}$	$n = 5$، و $a_1 = 2$، و $a_n = 1250$
$625 = r^4$	اقسم الطرفين على 2.
$\pm 5 = r$	أوجد الجذر الرابع للطرفين.

الخطوة 3 استخدم r لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة.

2 $\xrightarrow{\times -5}$ −10 $\xrightarrow{\times -5}$ 50 $\xrightarrow{\times -5}$ −250 $\xrightarrow{\times -5}$ 1250 أو 2 $\xrightarrow{\times 5}$ 10 $\xrightarrow{\times 5}$ 50 $\xrightarrow{\times 5}$ 250 $\xrightarrow{\times 5}$ 1250

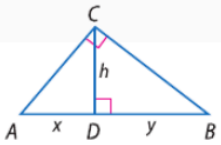
الأوساط الهندسية هي 10 و 50 و 250 أو −10 و 50 و −250.

تمرين موجّه

3. أوجد الأوساط الهندسية الأربعة التي تقع بين 0.5 و 512.

قراءة في الرياضيات

الأوساط الهندسية يمكن تمثيل الوسط الهندسي بطريقة هندسية أيضًا. في الشكل التالي، يمثل h الوسيط الهندسي الذي يقع بين x و y.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتالية الهندسية. وُرمز إلى مجموع الحدود *النونية* الأولى في المتسلسلة بالرمز S_n. يُمكنك استخدام الصيغ التالية لإيجاد المجموع الجزئي S_n للحدود *النونية* الأولى للمتسلسلة الهندسية.

المفهوم الأساسي المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية

المعطيات	مجموع S_n للحدود النونية الأولى يساوي:
a_1 و n	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}, r \neq 1$
a_1 و a_n	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

موسيقى راجع بداية الدرس. إذا استمر النمط، فما إجمالي عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسلة في الجولات الثماني؟

يتم إرسال خمس رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى وهناك ثماني جولات من عملية إرسال رسائل البريد الإلكتروني.

إذًا، $a_1 = 5$، و $r = 5$، و $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{5 - 5 \cdot 5^8}{1 - 5}$ $n = 8$، و $r = 5$، و $a_1 = 5$

$S_8 = \frac{-1{,}953{,}120}{-4}$ بسّط البسط والمقام.

$S_8 = 488{,}280$ اقسم.

سيكون هناك 488,280 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها بعد الجولات الثماني.

تمرين موجّه

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية.

4A. $a_1 = 2,\ n = 10,\ r = 3$

4B. $a_1 = 2000,\ a_n = 125,\ r = \frac{1}{2}$

كما هو الحال مع المتسلسلة الحسابية، يُمكن استخدام الرمز سيجما أيضًا لتمثيل المتسلسلة الهندسية.

مثال 5 المجموع في الرمز سيجما

أوجد قيمة $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$.

أوجد قيم a_1، و r، و n. في الحد الأول، $k = 3$ و $a_1 = 4 \cdot 2^{3-1}$ أو 16. قاعدة الدالة الأسية هي r، إذًا $r = 2$. هناك $10 - 3 + 1$ أو 8 حدود، إذًا $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$= \frac{16 - 16(2)^8}{1 - 2}$ $n = 8$، و $r = 2$، و $a_1 = 16$

$= 4080$ استخدم الحاسبة.

انتبه!

الرمز سيجما لاحظ أنه يُطلب منك في المثال 5 ايجاد قيمة المجموع من الحد الثالث إلى الحد العاشر.

تمرين موجّه

أوجد مجموع كل مما يلي.

5A. $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

5B. $\sum_{k=2}^{9} \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن استخدام الصيغة المتعلقة بمجموع المتسلسلة الهندسية للمساعدة في إيجاد حد معين للمتسلسلة.

مثال 6 إيجاد الحد الأول للمتسلسلة

أوجد قيمة a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = 13{,}116$، و $n = 7$، و $r = 3$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$13{,}116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$ $S_n = 13{,}116$، و $r = 3$، و $n = 7$

$13{,}116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$ خاصية التوزيع

$13{,}116 = \frac{-2186a_1}{-2}$ اطرح.

$13{,}116 = 1093a_1$ بسّط.

$12 = a_1$ اقسم الطرفين على 1093.

تمرين موجّه

6. أوجد قيمة a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = -26{,}240$، و $n = 8$، و $r = -3$.

التحقق من فهمك

مثال 1

1. الانتظام يرسم إسماعيل شجرة عائلة لجده. وقد تمكن من تتبع العديد من الأجيال. وإذا استطاع إسماعيل تتبع 10 أجيال سابقة من عائلته، بدءًا من والديه، فكم عدد الأسلاف الذين سيتمكن من تتبعهم؟

مثال 2

اكتب صيغة للحد *النوني* لكل متتالية هندسية.

2. 2, 4, 8, ...

3. 18, 6, 2, ...

4. $-4, 16, -64, \ldots$

5. $a_2 = 4, r = 3$

6. $a_6 = \frac{1}{8}, r = \frac{3}{4}$

7. $a_2 = -96, r = -8$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية لكل متتالية.

8. 0.25, ?, ?, ?, 64

9. 0.20, ?, ?, ?, 125

مثال 4

10. الألعاب ترتب منى بعض صفوف قطع الدومينو بحيث عندما تضرب أول قطعة منها، تتساقط كل قطعة على قطعتين أخريين عندما تسقط. وإذا كانت هناك عشرة صفوف، فكم عدد قطع الدومينو التي ستستخدمها منى؟

مثال 5

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية.

11. $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$

12. $\sum_{k=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

مثال 6

أوجد a_1 في كل متسلسلة هندسية موضحة.

13. $S_n = 85\frac{5}{16}, r = 4, n = 6$

14. $S_n = 91\frac{1}{12}, r = 3, n = 7$

15. $S_n = 1020, a_n = 4, r = \frac{1}{2}$

16. $S_n = 121\frac{1}{3}, a_n = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريب وحل المسائل

يوجد تدريب إضافي في الصفحة R10.

مثال 1

17. الطقس تسببت الأمطار الغزيرة في مدينة بلال بارتفاع منسوب النهر. وقد ارتفع النهر ثلاث سنتيمترات في اليوم الأول، وكل يوم بعد ذلك كان يرتفع ضعف مقدار اليوم السابق. فكم ارتفع منسوب النهر خلال خمسة أيام؟

أوجد قيمة a_n لكل متتالية هندسية.

18. $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

19. $a_1 = 800, r = \frac{1}{2}, n = 6$

20. $a_1 = \frac{2}{9}, r = 3, n = 7$

21. $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

22. الأحياء تنمو بكتيريا محددة بمعدل 3 خلايا كل دقيقتين. وإذا كان هناك 260 خلية في بادئ الأمر، فكم سيكون عددها بعد 21 دقيقة؟

مثال 2

اكتب صيغة الحد *النوني* لكل متتالية هندسية.

23. $-3, 6, -12, \ldots$

24. $288, -96, 32, \ldots$

25. $-1, 1, -1, \ldots$

26. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

27. $8, 2, \frac{1}{2}, \ldots$

28. $12, -16, \frac{64}{3}, \ldots$

29. $a_3 = 28, r = 2$

30. $a_4 = -8, r = 0.5$

31. $a_6 = 0.5, r = 6$

32. $a_3 = 8, r = \frac{1}{2}$

33. $a_4 = 24, r = \frac{1}{3}$

34. $a_4 = 80, r = 4$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية لكل متتالية.

35. $810, _?_, _?_, _?_, 10$

36. $640, _?_, _?_, _?_, 2.5$

37. $\frac{7}{2}, _?_, _?_, _?_, \frac{56}{81}$

38. $\frac{729}{64}, _?_, _?_, _?_, \frac{324}{9}$

39. أوجد وسطين هندسيين بين 3 و 375.

40. أوجد وسطين هندسيين بين 16 و -2.

مثال 4

41. المثابرة يمكن لنظام ترشيح مياه أن يزيل 70% من الملوثات في كل مرة يتم تمرير عينة من المياه من خلاله. وإذا تم تمرير نفس كمية المياه عبر النظام أربع مرات، فكم النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستُزال من عينة المياه؟

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية.

42. $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

43. $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

44. $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

45. $a_1 = 360, r = \frac{4}{3}, n = 8$

46. المكانس الكهربائية يُقال إن المكنسة الكهربائية تلتقط 80% من الأتربة والأوساخ في كل مرة يتم تمريرها فوق السجاد. ومع افتراض صحة ذلك، فما النسبة المئوية للكمية الأصلية من الأوساخ التي سيتم التقاطها وإزالتها بعد تمرير المكنسة فوق السجاد سبع مرات؟

مثال 5

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية.

47. $\sum_{k=1}^{7} 4(-3)^{k-1}$

48. $\sum_{k=1}^{8} (-3)(-2)^{k-1}$

49. $\sum_{k=1}^{9} (-1)(4)^{k-1}$

50. $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

مثال 6

أوجد قيمة a_1 في كل متسلسلة هندسية موضحة.

51. $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

52. $S_n = -10{,}922, r = 4, n = 7$

53. $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

54. $S_n = 4118, a_n = 128, r = \frac{2}{3}$

55. $a_n = 1024, r = 8, n = 5$

56. $a_n = 1875, r = 5, n = 7$

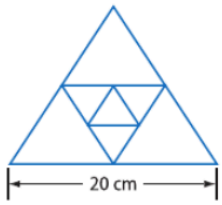
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

57. العلوم ارتفع بالون ممتلئ بالغاز لمسافة 100 m بعد دقيقة من إطلاقه. وفي كل دقيقة بعد ذلك، يرتفع البالون 50% فقط من المسافة التي ارتفعها في الدقيقة السابقة. ما المسافة التي سيرتفع إليها بعد مرور 5 s؟

58. الكيمياء يبلغ نصف عمر عنصر الرادون حوالي 4 أيام. وهذا يعني أنه كل 4 أيام تقريبًا، تتحلل نصف كتلة عنصر الرادون إلى عنصر آخر. فكم جرامًا من الرادون سيتبقى من 60 g موجودين من البداية بعد 4 أسابيع؟

59. التبرير ينتشر الفيروس في حاسوب مصيبًا الملفات. وإذا أُصيب ملف في بادئ الأمر مع تضاعف عدد الملفات المصابة كل دقيقة، فكم عدد الملفات التي ستصاب بعد 20 دقيقة؟

60. الهندسة في الشكل، تبلغ أضلاع كل مثلث متساوي الأضلاع ضعف حجم أضلاع المثلث المُحاط الخاص به. وإذا استمر النمط، فأوجد مجموع محيطات أول ثمانية مثلثات.



61. البندول تبلغ المسافة المقطوعة لحركة الأرجحة الأولى للبندول 30 cm. وإذا بلغت مسافة كل حركة أرجحة تالية 95% من حركة الأرجحة السابقة، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول بعد الأرجحة الثلاثين.

62. سلاسل الاتصالات أنشأت إحدى المدارس سلسلة اتصالات بحيث يمكن لكل موظف الاتصال باثنين آخرين من الموظفين لإخبارهم بمواعيد إغلاق المدرسة بسبب أحوال الطقس. وبدأت الجولة الأولى من الاتصالات عندما اتصل المشرف بكلا مديري المدرسة. فإذا كان عدد الموظفين إجمالاً يبلغ 94 موظفًا بالمدرسة، فكم جولة من الاتصالات ستتم في هذا الخصوص؟

63. أجهزة التلفاز تعلن إحدى شركات الإلكترونيات الكبرى عن طرحها خطة تقسيط أسبوعية يمكن بموجبها شراء جهاز من علامة تجارية شهيرة من أجهزة التلفاز عالية الدقة. ويدفع المشتري AED 15 في نهاية الأسبوع الأول، و AED 16.50 في نهاية الأسبوع الثاني، و AED 18.15 في نهاية الأسبوع الثالث، وهكذا لمدة عام. (افترض أن عامًا واحدًا = 52 أسبوعًا.)

a. كم ستبلغ المدفوعات في نهاية الأسبوع العاشر والعشرين والأربعين؟

b. أوجد التكلفة الإجمالية لجهاز التلفاز.

c. لماذا تعتبر التكلفة الموجودة في الجزء b غير دقيقة كليًا؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

64. البرهان اشتق صيغة المجموع العامة باستخدام صيغة المجموع البديلة.

65. البرهان اشتق صيغة مجموع لا تشمل a_1.

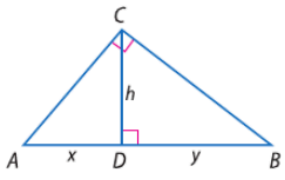
66. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متسلسلة هندسية بحيث يكون $r = \frac{3}{4}$ و $n = 6$.

67. التبرير اشرح كيف أن $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$ تحتاج إلى التغيير للإشارة إلى نفس المتسلسلة إذا تغير $k = 1$ إلى $k = 0$. اشرح استنتاجك.

68. البرهان برهِن الصيغة المتعلقة بالحد *النوني* لمتتالية هندسية.

69. تحدٍ الحد الخامس لمتتالية هندسية هو الحد رقم $\frac{1}{27}$ للحد الثامن. إذا كان الحد التاسع يساوي 720، فما قيمة الحد الثامن؟

70. تحدٍ استخدم حقيقة أن h يمثل الوسط الهندسي x و y في الشكل الموجود على اليسار لإيجاد h^4 in بدلالة كلٍ من x و y.



71. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متسلسلة هندسية بها 6 حدود ومجموع يساوي 252.

72. الكتابة في الرياضيات كيف يمكنك تصنيف متتالية؟ وضّح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

73. أيٍ من التالي يُعد الأقرب إلى $\sqrt[3]{7.32}$؟

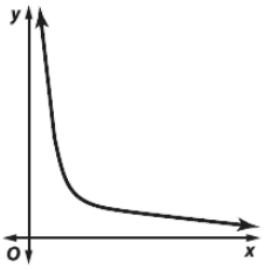
A 1.8
B 1.9
C 2.0
D 2.1

74. الحد الأول لمتسلسلة هندسية هو 5. والنسبة المشتركة هي -2. كم عدد الحدود في المتسلسلة إذا كان مجموعها يساوي -6825؟

F 5
G 9
H 10
J 12

75. الإجابة المختصرة لدى عائشة حساب ادخار خاص بها. وهي تسحب نصف محتويات الحساب كل عام. وبعد 4 أعوام، تبقى لديها AED 2000. فكم كان لديها في حساب الادخار في الأصل؟

76. SAT/ACT ما الدالة التي قد يكون المنحنى أدناه جزءًا من التمثيل البياني لها؟



A $y = \sqrt{x}$
B $y = x^2 - 5x + 4$
C $y = -x + 20$
D $y = \log x$
E $xy = 4$

مراجعة شاملة

77. المال اشترت منال جهاز تلفاز بتقنية LCD عالي الدقة من متجر الإلكترونيات. ودفعت AED 800 على الفور و AED 300 شهريًا لمدة عام ونصف. فكم دفعت منال إجمالاً مقابل التلفاز؟ (الدرس 2-12)

حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *غير ذلك*. اشرح استنتاجك. (الدرس 1-12)

78. $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \ldots$

79. $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \ldots$

80. $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \ldots$

أوجد مركز ونصف قطر كل دائرة في ما يلي. ثم ارسم الدائرة بيانيًا.

81. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

82. $(x+3)^2 + (y+7)^2 = 81$

83. $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 50$

84. افترض أن y تتغير بشكل مشترك مع x وz. أوجد y عندما يكون $x = 9$ و $z = -5$. إذا كان $y = -90$ عندما يكون $z = 15$ و $x = -6$.

85. التسوق لكتشف متجر ما أن عدد العملاء الذين سيحضرون تخفيضات للبيع بأسعار يمكن تمثيلهم باستخدام $N = 125\sqrt[3]{100Pt}$. حيث N تمثّل العدد المتوقع للعملاء، و P النسبة المئوية للخصم، و t عدد ساعات سريان الخصم. أوجد عدد العملاء الذين يتوقع المتجر حضورهم لهذه التخفيضات التي ستصل نسبتها إلى 50%. وستستمر لأربع ساعات.

مراجعة المهارات

إذا كان $a = -2$، و $b = \frac{1}{3}$، و $c = -12$.فأوجد قيمة كل تعبير في ما يلي:

86. $\frac{3ab}{c}$

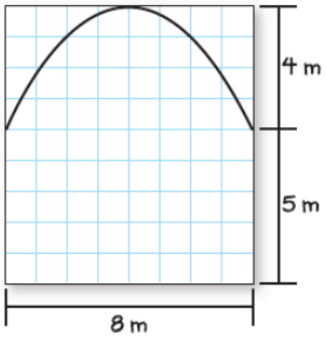
87. $\frac{a-c}{a+c}$

88. $\frac{a^3 - c}{b^2}$

89. $\frac{c+3}{ab}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر الجبر
المساحة تحت المنحنى



يتم إعادة تصميم إستاد لكرة القدم بحيث يكون هناك ممر على شكل قوس في المدخل الرئيسي. وتم وضع مقياس رسم لهذا الممر بحيث يمثل كل خط على ورقة الرسم البياني متر واحد على الممر الحقيقي. وقام المصمم بتمثيل قمة الشكل باستخدام المعادلة التربيعية $y = -0.25x^2 + 3x$.

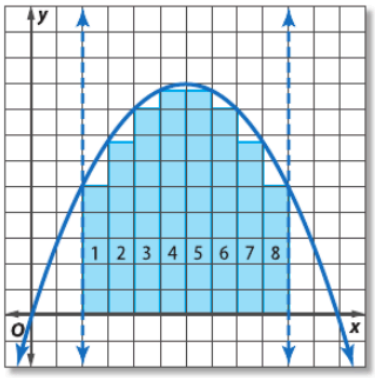
النشاط

أوجِد مساحة الفتحة تحت الممر القوسي.

الطريقة 1

الخطوة 1 أنشئ جدولاً لقيم $y = -0.25x^2 + 3x$. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	2.75	5	6.75	8	8.75	9	8.75	8	6.75	5	2.75	0



الخطوة 2 قسّم الشكل إلى عدة مناطق.

لتقدير مساحة المنطقة الواقعة داخل الممر القوسي، يُمكنك قسمة القوس على المستطيلات كما هو موضح باللون الأزرق.

نظرًا لأن الطرفين الأيسر والأيمن للممر القوسي يقعان على ارتفاع $y = 5$ m و $x = 2$ إذا كان $x = 10$ وإذا كان $x = 10$. فإن فتحة المدخل تمتد من $x = 2$ إلى $x = 10$.

الخطوة 3 أوجد مساحة هذه المناطق.

المستطيل	1	2	3	4	5	6	7	8
العرض (m)	1	1	1	1	1	1	1	1
الارتفاع (m)	5	6.75	8	8.75	8.75	8	6.75	5
المساحة (m^2)	5	6.75	8	8.75	8.75	8	6.75	5

المساحة التقريبية للممر القوسي تساوي مجموع مساحات المستطيلات.

$$5 + 6.75 + 8 + 8.75 + 8.75 + 8 + 6.75 + 5 = 57 \text{ m}^2$$

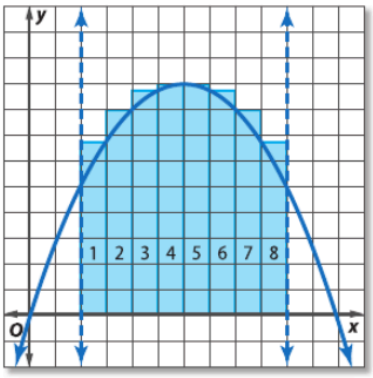
(يُتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المساحة تحت المنحنى تابع

الطريقة 2

الخطوة 1 ارسم التمثيل البياني الثاني للمعادلة واقسمه إلى مناطق.
اقسم الممر القوسي إلى مستطيلات كما هو موضح باللون الأزرق.



الخطوة 2 أوجد مساحة هذه المناطق.

المستطيل	1	2	3	4	5	6	7	8
العرض (m)	1	1	1	1	1	1	1	1
الارتفاع (m)	6.75	8	8.75	9	9	8.75	8	6.75
المساحة (m^2)	6.75	8	8.75	9	9	8.75	8	6.75

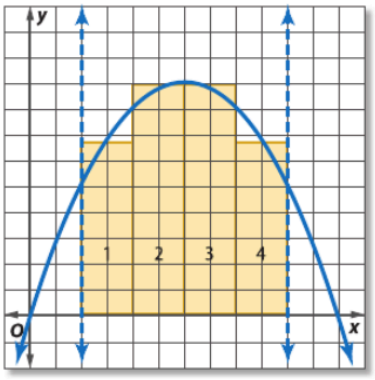
المساحة التقريبية للممر القوسي تساوي مجموع مساحات المستطيلات.

$$6.75 + 8 + 8.75 + 9 + 9 + 8.75 + 8 + 6.75 = 65\ m^2$$

توضح الطريقتان 1 و 2 كيفية تقريب المساحة الواقعة تحت منحنى وعلى فترة محددة.

تحليل النتائج

1. هل مساحة المناطق التي تم حسابها باستخدام الطريقة 1 أكبر أم أصغر من المساحة الحقيقية للممر القوسي؟ اشرح استنتاجك.
2. هل مساحة المناطق التي تم حسابها باستخدام الطريقة 2 أكبر أم أصغر من المساحة الحقيقية للممر القوسي؟ اشرح استنتاجك.
3. قارن بين تقديرات المساحات بالنسبة للطريقتين. كيف يُمكنك إيجاد أفضل تقدير للمساحة الواقعة داخل الممر القوسي؟ اشرح استنتاجك.
4. يوضّح الرسم التخطيطي طريقة ثالثة لإيجاد تقدير لمساحة الممر القوسي. هل هذا التقدير للمساحة أكبر أم أصغر من المساحة الفعلية؟ ما وضع هذا التقدير عند مقارنته بالتقديرين الآخرين للمساحة؟



التمارين

قدّر المساحة التي توصلت إليها كل طريقة. وأنشئ جدولاً بالقيم، وارسم تمثيلات بيانية بالمستطيلات، واستخدم الجدول لتسجيل قيم مساحات المستطيلات. قارن بين كل تقدير والمساحة الفعلية.

5. مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى بالنسبة لـ $y = -x^2 + 4$، من $x = -2$ إلى $x = 2$، وفوق المحور x

6. مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى بالنسبة لـ $y = x^3$، من $x = 0$ إلى $x = 4$، وفوق المحور x

7. مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى بالنسبة لـ $y = x^2$، من $x = -3$ إلى $x = 3$، وفوق المحور x

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 12-4

المتسلسلة الهندسية اللانهائية

السابق

- لقد أوجدت مجاميع المتسلسلات الهندسية المنتهية.

الحالي

1 إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية اللانهائية.

2 كتابة الكسور العشرية الدورية في صورة كسور اعتيادية.

لماذا؟

- في مباراة لكرة القدم الأمريكية، كان الخصم يقف على خط العشر ياردات، وتمت معاقبة الدفاع بنصف المسافة إلى إحراز الهدف، وكانت الكرة موضوعة على خط الخمس ياردات. إذا استمروا في تلقي المعاقبات بهذه الطريقة، فأين سيتم وضع الكرة في النهاية؟ وما إجمالي عدد ياردات المعاقبة التي سوف يتكبدها الدفاع؟ يُمكن الإجابة على هذين السؤالين من خلال الاطلاع على المتسلسلة الهندسية اللانهائية.

1 المتسلسلة الهندسية اللانهائية

يوجد لدى **المتسلسلة الهندسية الانهائية** عدد لا يُحصى من الحدود. ويُطلق على المتسلسلة التي لها مجموع **متسلسلة تقاربية**، وذلك لأن مجموعها يقترب من قيمة محددة. أما المتسلسلة التي ليس لها مجموع، فيُطلق عليها **متسلسلة تباعدية**.

عندما تقوم بتقدير المجموع S_n لمتسلسلة هندسية لانهائية للحدود النونية الأولى، فأنت توجد المجموع الجزئي للمتسلسلة. ومن الممكن كذلك إيجاد مجموع متسلسلة كاملة. في التطبيق الوارد أعلاه، يبدو أن الكرة ستصل في النهاية خط إحراز الهدف، وسيكبد الدفاع عقوبة بإجمالي 10 ياردات. وهذه القيمة هي المجموع الفعلي للمتسلسلة اللانهائية $5 + 2.5 + 1.25 + \ldots$. موضح على اليمين أدناه التمثيل البياني لـ S_n حيث $1 \le n \le 10$. وكلما ازداد n، يقترب S_n من العدد 10.

المفردات الجديدة

المتسلسلة الهندسية الانهائية
infinite geometric series
متسلسلة تقاربية
convergent series
متسلسلة تباعدية
divergent series
لانهاية infinity

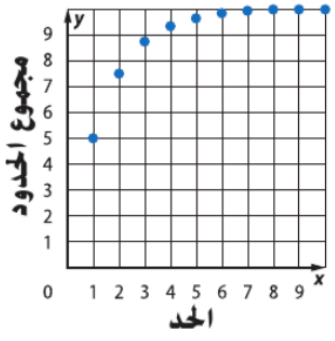
ممارسات في الرياضيات

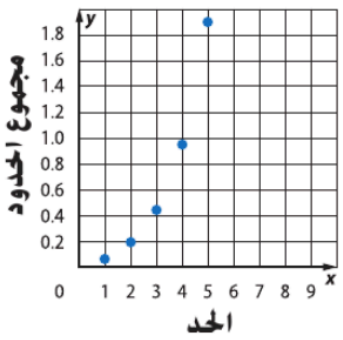
مراعاة الدقة.

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

المفهوم الأساسي المتسلسلات التقاربية والتباعدية

متسلسلة تقاربية	متسلسلة تباعدية
الشرح يقترب المجموع من قيمة نهائية.	**الشرح** لا يقترب المجموع من قيمة نهائية.
النسبة $\lvert r \rvert < 1$	**النسبة** $\lvert r \rvert \ge 1$
مثال $5 + 2.5 + 1.25 + \ldots$	**مثال** $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots$





مثال 1 المتسلسلات التقاربية والتباعدية

حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لانهائية تقاربية أم تباعدية.

a. $54 + 36 + 24 + \ldots$

أوجد قيمة r.

$r = \frac{36}{54}$ أو $\frac{2}{3}$؛ حيث إن $-1 < \frac{2}{3} < 1$. المتسلسلة تقاربية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b. $8 + 12 + 18 + \ldots$

$r = \frac{12}{8}$ أو 1.5؛ نظرًا لأن $1 < 1.5$، فإن المتسلسلة تباعدية.

تمرين موجّه

1A. $2 + 3 + 4.5 + \ldots$ **1B.** $100 + 50 + 25 + \ldots$

نصيحة دراسية

القيمة المطلقة تذكر أن $|r| < 1$ يعني أن $-1 < r < 1$.

عندما يكون $|r| < 1$، فإن قيمة r^n سوف تقترب من الصفر مع زيادة n. وبهذا ستقترب المجاميع الجزئية للمتسلسلات الهندسية اللانهائية من $\frac{a_1 - a_1(0)}{1 - r}$ أو $\frac{a_1}{1 - r}$.

المفهوم الأساسي مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية

يُمكن إيجاد مجموع S لمتسلسلة هندسية لانهائية عند $|r| < 1$ باستخدام

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

إذا كان $|r| \geq 1$، فإن المتسلسلة لا يوجد لها مجموع.

عندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية **تباعدية**، فإن $|r| \geq 1$، ولا يكون للمتسلسلة أية مجموع. نظرًا لأن القيمة المطلقة لـ r^n سوف تزداد بشكل لانهائي بزيادة n.

يوضّح الجدول على اليسار المجاميع الجزئية للمتسلسلة التباعدية $4 + 16 + 64 + \ldots$. عندما تزداد قيمة n، فإن قيمة S_n تزداد بسرعة وإلى ما لا نهاية.

n	S_n
5	1364
10	1,398,100
15	1,431,655,764

مثال 2 مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.

حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لانهائية *تقاربية* أم *تباعدية*.

a. $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \ldots$

الخطوة 1 أوجد قيمة r لتحديد ما إذا كان هناك مجموع.

اقسم الحدود المتتالية لتحديد النسبة المشتركة.

$r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3}$ أو $\frac{3}{5}$

نظرًا لأن $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$، إذًا هناك مجموع.

الخطوة 2 استخدم الصيغة لإيجاد المجموع.

صيغة المجموع $S = \frac{a_1}{1 - r}$

$r = \frac{3}{5}$ و $a_1 = \frac{2}{3}$ $= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{5}}$

بسّط. $= \frac{2}{3} \div \frac{2}{5}$ أو $\frac{5}{3}$

نصيحة دراسية

التقارب والتباعد تتقارب المتسلسلة عندما تكون القيمة المطلقة للحد أصغر من القيمة المطلقة للحد السابق. وبذلك ستكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية دائمًا تباعدية.

b. $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \ldots$

$r = \frac{9}{6}$ أو 1.5؛ نظرًا لأن $|1.5| \geq 1$، فإن المتسلسلة تتباعد ولا يوجد مجموع.

تمرين موجّه

2A. $4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots$ **2B.** $16 + 20 + 25 + \ldots$

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

يُمكن استخدام الرمز سيجما لتمثيل المتسلسلات اللانهائية. إذا كانت متتالية **لانهائية**، فإنها تستمر دون نهاية. ويوضع رمز اللانهاية ∞ فوق رمز ∑ لتوضيح أن المتسلسلة لانهائية.

مثال 3 المتسلسلة اللانهائية في الرمز سيجما

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{18}{1-\frac{4}{5}}$ $r=\frac{4}{5}$ و $a_1 = 18$

$= \frac{18}{\frac{1}{5}}$ أو 90 بسّط.

تمرين موجّه

3. أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$.

2 الكسور العشرية الدورية

الكسر العشري الدوري هو مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية. على سبيل المثال، $0.\overline{45} = 0.454545\ldots$ أو $0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$. ويُمكن استخدام صيغة مجموع المتسلسلات اللانهائية هذه لتحويل الكسر العشري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4 اكتب كسرًا عشريًا دوريًا في صورة كسر اعتيادي

اكتب $0.\overline{63}$ في صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1 استخدم مجموع المتسلسلات اللانهائية.

$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + \ldots$

$= \frac{63}{100} + \frac{63}{10{,}000} + \ldots$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$ $r=\frac{1}{100}$ و $a_1=\frac{63}{100}$

$= \frac{63}{99}$ أو $\frac{7}{11}$ بسّط.

الطريقة 2 استخدم الخواص الجبرية.

$x = 0.\overline{63}$ بفرض أن $x = 0.\overline{63}$.

$x = 0.636363\ldots$ اكتب في صورة كسر عشري دوري.

$100x = 63.636363\ldots$ اضرب الطرفين في 100.

$99x = 63$ اطرح x من $100x$ واطرح $0.\overline{63}$ من $63.\overline{63}$.

$x = \frac{63}{99}$ أو $\frac{7}{11}$ اقسم الطرفين على 99.

تمرين موجّه

4. اكتب $0.\overline{21}$ في صورة كسر اعتيادي.

نصيحة في حل المسائل

الاستنتاج المنطقي في العديد من الحالات، يُمكن حل مسألة بأكثر من طريقة. استخدم الطريقة التي تشعر معها براحة أكبر.

نصيحة دراسية

الكسور العشرية الدورية

كل كسر عشري دوري هو عبارة عن عدد نسبي ويُمكن كتابته في صورة كسر اعتيادي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لانهائية *تقاربية* أم *تباعدية*.**

1. $16 - 8 + 4 - \ldots$
2. $32 - 48 + 72 - \ldots$
3. $0.5 + 0.7 + 0.98 + \ldots$
4. $1 + 1 + 1 + \ldots$

مثال 2 **أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.**

5. $440 + 220 + 110 + \ldots$
6. $520 + 130 + 32.5 + \ldots$
7. $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \ldots$
8. $\frac{32}{9} + \frac{16}{3} + 8 + \ldots$
9. **التبرير المنطقي** يبلغ عمر النصف لدواء معين 8 ساعات قبل تناول المريض له. ما النسبة المئوية للدواء الموجودة داخل جسم المريض بعد مرور 24 ساعة؟

مثال 3 **أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.**

10. $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$
12. $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

مثال 4 **اكتب كل كسر عشري دوري في صورة كسر اعتيادي.**

14. $0.\overline{35}$
15. $0.\overline{642}$

التدريب وحل المسائل

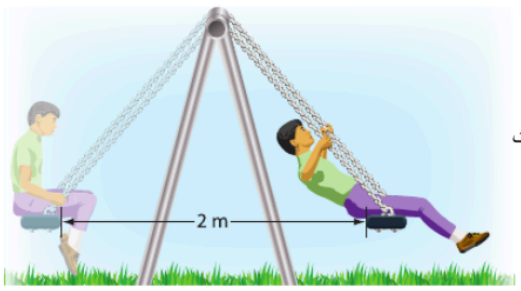
مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لانهائية *تقاربية* أم *تباعدية*.**

16. $21 + 63 + 189 + \ldots$
17. $480 + 360 + 270 + \ldots$
18. $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \ldots$
19. $\frac{5}{6} + \frac{10}{9} + \frac{40}{27} + \ldots$
20. $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$
21. $0.008 + 0.08 + 0.8 + \ldots$

مثال 2 **أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.**

22. $18 + 21.6 + 25.92 + \ldots$
23. $-3 - 4.2 - 5.88 - \ldots$
24. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \ldots$
25. $\frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \ldots$
26. $21 + 14 + \frac{28}{3} + \ldots$
27. $32 + 40 + 50 + \ldots$

28. **أرجوحات** إذا لم يدفع حسن الأرجوحة مرة أخرى بعد الأرجحة الأولى، فإن المسافة التي تقطعها في الأرجحة الواحدة سوف تتناقص بمقدار 10% مع كل أرجحة. إذا كانت في الأرجحة الأولى قد قطعت مترين، فأوجد إجمالي المسافة التي قطعتها الأرجوحة عند استقرارها.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 **أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.**

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{k-1-1}$

مثال 4 **اكتب كل كسر عشري دوري في صورة كسر اعتيادي.**

35. $0.3\overline{21}$

36. $0.1\overline{45}$

37. $2.\overline{18}$

38. $4.\overline{96}$

39. $0.12\overline{14}$

40. $0.43\overline{36}$

41. **المراوح** تدور مروحة بسرعة 10 دورات في الثانية. وبعد إيقاف تشغيلها، تتناقص سرعتها بمعدل 75% في الثانية. حدد عدد الدورات التي تكملها المروحة بعد إيقاف تشغيلها.

42. **الدقة** أودعت سالي مبلغًا قدره AED 5000 في حساب مصرفي في بداية العام. ويسدد المصرف لها 8% كل عام كنسبة مرابحة*.

a. ما مقدار المال الذي سيكون في الحساب بعد 20 عامًا؟ (*إرشاد*: افترض أن $5000(1 + 0.08)^1$ يمثل نهاية العام الأول.)

b. هل هذه المتسلسلة تقاربية أم تباعدية؟ اشرح.

43. **بطاريات قابلة للشحن** تم الترويج لنوع من البطاريات القابلة للشحن على أنها يُمكن شحنها بمقدار 99.9% من سعتها السابقة في كل شحنة. إذا كانت السعة الأصلية هي 8 ساعات من التشغيل، فما إجمالي الساعات التي يُمكن للبطارية أن تعملها حتى تنتهي؟

أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.

44. $\frac{7}{5} + \frac{21}{20} + \frac{63}{80} + \ldots$

45. $\frac{15}{4} + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \ldots$

46. $-\frac{16}{9} + \frac{4}{3} - 1 + \ldots$

47. $\frac{15}{8} + \frac{5}{2} + \frac{10}{3} + \ldots$

48. $\frac{21}{16} + \frac{7}{4} + \frac{7}{3} + \ldots$

49. $-\frac{18}{7} + \frac{12}{7} - \frac{8}{7} + \ldots$

50. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستخدم مربعًا من الورق يبلغ طول ضلعه 8 cm على الأقل.

a. **عمليًا** افترض أن المربع على وحدة واحدة. اقطع نصفًا واحدًا من المربع. وأطلق على هذه القطعة الحد 1. ثم اقطع نصفًا واحدًا من الجزء المتبقي من الورقة. وأطلق على هذه القطعة الحد 2. استمر في قطع الجزء المتبقي من الورقة إلى أنصاف وأطلق عليها عدد الحدود إلى أن تنتهي الورقة. ثم أدرج الكسور التي تمثلها هذه القطع في قائمة.

b. **عدديًا** إذا كنت تستطيع قطع المربعات بشكل لانهائي، فسيكون لديك متسلسلة لانهائية. أوجد مجموع هذه المتسلسلة.

c. **لفظيًا** كيف يرتبط مجموع المتسلسلات بالورقة الأصلية المربعة؟

51. **الفيزياء** في تجربة فيزياء، تتم زيادة سرعة كرة معدنية على مسار مسطح، ثم تتدحرج بحرية. بعد الدقيقة الأولى، تدحرجت الكرة 120 m. وفي كل دقيقة تقطع الكرة 40% فقط من المسافة التي قطعتها خلال الدقيقة السابقة. ما المسافة التي تقطعها الكرة؟

52. **البندول** يقطع بندول 12 cm في الأرجحة الأولى و95% من المسافة التي قطعها في الأرجحة السابقة. أوجد إجمالي المسافة التي قطعها البندول عند استقراره.

53. **الألعاب** إذا كانت هناك كرة مطاطية تستطيع القفز بمقدار 95% من الارتفاع الأصلي، فما إجمالي المسافة العمودية التي سوف تقطعها إذا سقطت على ارتفاع 30 m؟

54. **السيارات** خلال فحص صيانة لسيارة، تم نزع إطار وتدويره على آلة فحص. وعند إيقاف تشغيل الآلة، يكمل التدوير للإطار 20 دورة في الثانية الأولى، و98% من الدورات للثانية أخرى. كم عدد الدورات التي يُكملها الإطار قبل أن يتوقف عن الدوران؟

*يشير المصطلح نسبة المرابحة إلى مبلغ المال الذي يتم سداده أو تلقيه عند الإقراض أو الإيداع. إذا اقترض عميل مبلغًا ماليًا من المصرف، فإنه يسدد للمصرف نسبة مرابحة نظير استخدام المال من المصرف. وإذا ادخر عميل مبلغًا ماليًا في حساب مصرفي، فإن المصرف يدفع له نسبة مرابحة نظير استخدام مال العميل.

ويُطلق على المبلغ المالي الأصلي الذي تم إقراضه أو ادخاره رأس المال. وتمثل نسبة المرابحة نسبة مئوية للمبلغ الذي يتلقاه العميل أو يسدده خلال فترة زمنية محددة. ونسبة المرابحة البسيطة هي مبلغ نسبة المرابحة الذي يتلقاه العميل أو يسدده بعد تطبيق نسبة المرابحة على رأس المال.

نسبة المرابحة البسيطة (I) هي ناتج ضرب ثلاث قيم: رأس المال (P)، ونسبة المرابحة المكتوبة في صورة كسر عشري (r)، والفترة الزمنية (t): $I = P \times r \times t$

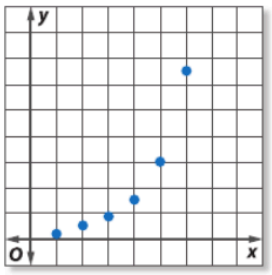
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

55. **الاقتصاد** قررت الحكومة تحفيز اقتصادها من خلال إعطاء كل شخص بالغ AED 500. وافترضت الحكومة أن كل فرد استلم هذا المبلغ سينفق 80% منه على سلع استهلاكية، وسينفق المنتجون في المقابل 80% على السلع الاستهلاكية. ما مقدار المبلغ الذي كسبه الاقتصاد نظير كل AED 500 قدمتها الحكومة؟

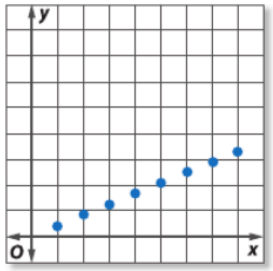
56. **متحف العلوم** يقدم معرض في متحف للعلوم فرصة للزوار باختبار حركة جسم ما على الزنبرك. سحب أحد الزوار الجسم لأسفل وأطلقه للحركة، فقطع الجسم مسافة 1.2m لأعلى قبل الرجوع مرة أخرى للجهة المقابلة. وفي كل مرة يغير فيها الجسم اتجاهه، تقل المسافة التي يقطعها بمقدار 20% عند مقارنتها بالمسافة التي قطعها في الاتجاه السابق. أوجد إجمالي المسافة التي قطعها الجسم؟

صِل كل تمثيل بياني بالوصف المقابل له.

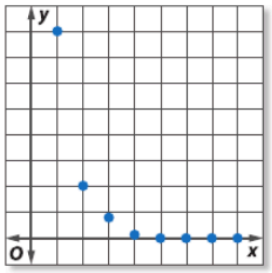
57.



58.



59.



a. متسلسلة هندسية تقاربية

b. متسلسلة هندسية تباعدية

c. متسلسلة حسابية تقاربية

d. متسلسلة حسابية تباعدية

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

60. **تحليل الخطأ** حاول محمد وفالح إيجاد مجموع ... − 1 + 1 − 1.
هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

محمود	فالح
المجموع يساوي 0 نظرًا لأن مجموع كل زوج من حدود المتتالية يساوي 0.	*لا يوجد مجموع نظرًا لأن* $\|r\| \geq 1$، *والمتسلسلة تتباعد.*

61. **البرهان** اشتق صيغة لمجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية.

62. **تحدٍ** ما قيمة b التي تجعل للمتسلسلة ... + $81b^3$ + $27b^2$ + $9b$ + 3 مجموعًا؟

63. **التبرير** متى يكون للمتسلسلة الهندسية اللانهائية مجموعًا؟ ومتى لا يكون لها مجموعًا؟ اشرح استنتاجك.

64. **الفرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

إذا كانت القيمة المطلقة لحد في أي متسلسلة هندسية أكبر من القيمة المطلقة للحد السابق له، فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

65. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة لانهائية بحيث يتقارب مجموعها من 9.

66. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ... − 12 + 6 − 3 باستخدام الرمز سيجما بطريقتين مختلفتين.

67. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية دائمًا تباعدية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

68. SAT/ACT ما مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي يبلغ حدها الأول 27 وتبلغ النسبة المشتركة الخاصة بها $\frac{2}{3}$؟

A 18
B 34
C 41
D 65
E 81

69. قام كلٌّ من حارب وحمد وحميد وحمدان بتبسيط نفس التعبير على اللوحة. وفيما يلي حل كل طالب منهم. وقال المعلم بأن اثنين منهما قد توصلا إلى الإجابة الصحيحة، بينما لا يوجد سوى طالب واحد توصل إلى الاستنتاج الصحيح باستخدام الخطوات الصحيحة.

حل حارب

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^{-5}}$$
$$= x^7, x \neq 0$$

حل حميد

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^5}$$
$$= \frac{1}{x^3}, x \neq 0$$

حل حمد

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^{-5}}$$
$$= x^{-3}, x \neq 0$$

حل حمدان

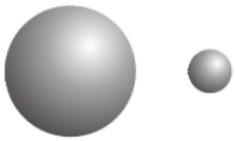
$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^5}$$
$$= x^3, x \neq 0$$

أي حل يمثل التبسيط الدقيق بالكامل؟

F حل حارب
G حل حمد
H حل حميد
J حل حمدان

70. الإجابة الشبكية قدّر $\log_8 60$ إلى أقرب جزء من المئة.

71. الهندسة تم ضرب نصف قطر كرة كبيرة في العامل $\frac{1}{3}$ لإنتاج كرة أصغر.



نصف القطر $= r$ القطر $= \frac{1}{3}r$

ما حجم الكرة الصغيرة مقارنة بحجم الكرة الكبيرة؟

A يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{9}$ من حجم الكرة الكبيرة.
B يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{\pi^3}$ من حجم الكرة الكبيرة.
C يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{27}$ من حجم الكرة الكبيرة.
D يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{3}$ من حجم الكرة الكبيرة.

مراجعة شاملة

72. المسابقات تُعقد تجارب أداء لمسابقة تلفزيونية. وفي نهاية كل جولة، يتم استبعاد نصف المرشحين المحتملين من المسابقة. وفي يوم محدد، يبدأ 542 متسابقًا تجارب الأداء. (الدرس 3-12)

a. اكتب صيغة لإيجاد عدد المتسابقين المتبقيين بعد عدد n من الجولات.

b. باستخدام هذه الطريقة، هل عدد المتسابقين الذين سيتم استبعادهم سيكون دائمًا عبارة عن عدد كلي؟ اشرح.

73. النوادي يتكون نادٍ لخياطة اللحف من 9 أعضاء. كل أسبوع، يجب على كل عضو أن يحضر معه مربعًا من لحاف قد انتهى من خياطته. (الدرس 2-12)

a. أوجد الحدود الثمانية الأولى للمتتالية التي تصف إجمالي عدد اللحف المربعة التي تمت خياطتها بعد كل اجتماع.

b. هناك لحاف واحد تبلغ أبعاده 144 cm في 168 cm، ويتم تصميمه باستخدام مربعات طول ضلعها 8 cm. بعد كم اجتماع سيتم الانتهاء من خياطة اللحاف؟

مراجعة المهارات

أوجد قيمة كل دالة.

74. $f(x) = 5x - 9,\ f(6)$

75. $g(x) = x^2 - x,\ g(4)$

76. $h(x) = x^2 - 2x - 1,\ h(3)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التوسع 12-4

مختبر تقنية التمثيل البياني
الحدود

قد تكون لاحظت أنه في بعض المتتاليات الهندسية، كلما اقترب حد المتتالية من النهاية، اقترب أكثر من الصفر. هناك طريقة أخرى لوصف هذا الأمر وهي أنه كلما زاد n، اقترب a_n من الصفر. وتقترب قيمة حد المتتالية في هذه الحالة من الصفر، ويُطلق عليه **حد** المتتالية. قد يكون هناك حدود لمتتاليات أخرى لانهائية. إذا كانت حدود متتالية لا تقترب من القيمة الفريدة، يُمكننا القول بأن حد المتتالية غير موجود.

يمكنك استخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني من نوع TI-83/84 Plus لمساعدتك على إيجاد حدود المتتاليات اللانهائية.

النشاط

أوجد حد المتتالية الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$.

الخطوة 1 أدخل المتتالية.

صيغة المتتالية هي $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

- ضع المؤشر على **L1** في شاشة **STAT EDIT 1: Edit...** وأدخل الصيغة **seq(N,N,1,10,1)**. وستظهر أمامك القيم 1, 2, ..., 10 للمؤشر **N**.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ENTER ▲ 2nd [STAT] ▶ 5 X,T,θ,n , 1 , 10 , 1) ENTER

- ضع المؤشر على **L2** وأدخل الصيغة **seq((1/4)^(N-1),N,1,10,1)** . وستظهر أمامك الحدود العشرة الأولى من المتتالية.

خطوات العملية على الحاسبة: ▶ ▲ 2nd [STAT] ▶ 5 (1 ÷ 4) ^ (X,T,θ,n — 1) , X,T,θ,n , 1 , 10 , 1) ENTER

لاحظ أنه كلما ازداد n ، تصبح حدود المتتالية المعطاة أقرب وأقرب إلى الصفر. وإذا قمت بالتمرير لأسفل، فسوف ترى أنه عندما يكون $n \geq 6$ ، تصبح الحدود أقرب ما تكون إلى الصفر بحيث تعبر عنها الحاسبة بالرموز العلمية. ويبرز هذا حد المتتالية على أنه يساوي 0.

الخطوة 2 مثّل المتتالية بيانيًا.

[0, 10] scl: 1 by [0, 1] scl: 0.1

استخدم خيار **STAT PLOT** لتمثيل المتتالية بيانيًا. واستخدم **L1** على أنه **Xlist** و **L2** على أنه **Ylist**.

يوضّح التمثيل البياني كذلك أنه كلما ازداد n ، تقترب الحدود من الصفر. وفي الحقيقة بالنسبة لـ $n \geq 3$ ، يبدو أن العلامات تقع على المحور الأفقي. ويقترح هذا بشدة أن حد المتتالية يساوي 0.

التمارين

أوجد حد كل متتالية.

1. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2. $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
3. $a_n = 5^n$
4. $a_n = \frac{1}{n^2}$
5. $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$
6. $a_n = \frac{n^2}{n + 2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية (الدرسان 12-1 و 12-2)

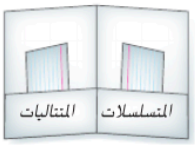
- الحد النوني في a_n من المتتالية الحسابية حدها الأول a_1 والفرق المشترك d يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 + (n-1)d$، حيث يشير n إلى أي عدد صحيح موجب.
- مجموع S_n للحدود n الأولى في متسلسلة حسابية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ أو $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية (الدرسان 12-3 و 12-4)

- الحد النوني a_n من المتتالية الهندسية حدها الأول a_1 والنسبة المشتركة r يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$، حيث يكون n هو أي عدد صحيح موجب.
- مجموع S_n للحدود n الأولى في متتالية هندسية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$، حيث يكون $r \neq 1$.
- مجموع S لمتسلسلة هندسية لانهائية ذات $-1 < r < 1$ يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{a_1}{1-r}$.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

أوساط حسابية arithmetic means
متتالية حسابية arithmetic sequence
متسلسلة حسابية arithmetic series
فرق مشترك common difference
نسبة مشتركة common ratio
متسلسلة متقاربة convergent series
متسلسلة متباعدة divergent series
صيغة صريحة explicit formula
متتالية فيبوناتشي Fibonacci sequence
متتالية منتهية finite sequence
أوساط هندسية geometric means
متتالية هندسية geometric sequence
متسلسلة هندسية geometric series
فرضية الاستقراء induction hypothesis
المتسلسلة الهندسية اللانهائية infinite geometric series
متتالية غير منتهية infinite sequence
لانهاية infinity
الإعادة iteration
الاستقراء الرياضي mathematical induction
مجموع جزئي partial sum
مثلث باسكال Pascal's triangle
صيغة تكرارية/ضمنية recursive formula
متتالية تكرارية recursive sequence
متتالية sequence
متسلسلة series
الرمز سيجما sigma notation
حد term

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خطّ لجعل الجملة صحيحة.

1. يُطلق على المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لها مجموع متسلسلة تقاربية.
2. الاستقراء الرياضي هو عملية تكوين دالة بشكل متكرر من نفسها.
3. الأوساط الحسابية لمتتالية هي الحدود التي تقع بين أي حدين غير متتاليين في متتالية حسابية.
4. الحد هو قائمة أعداد بترتيب معين.
5. يُطلق على مجموع حدود n الأولى لمتسلسلة المجموع الجزئي.
6. الصيغة $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ هي صيغة تكرارية.
7. المتتالية الهندسية هي متتالية يتحدد كل حد فيها من خلال جمع قيمة ثابتة إلى الحد السابق.
8. يُطلق على المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لا تتضمن مجموعًا المجموع الجزئي.
9. أحد عشر و 17 هما وسطان هندسيان بين 5 و 23 في المتتالية 5, 11, 17, 23.
10. باستخدام نظرية الحدين، يُمكن فكه إلى $(x-2)^4$ $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

12-1 المتتاليات كدوال

أوجد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

11. $a_1 = 9,\ d = 3,\ n = 14$
12. $a_1 = -3,\ d = 6,\ n = 22$
13. $a_1 = 10,\ d = -4,\ n = 9$
14. $a_1 = -1,\ d = -5,\ n = 18$

مثال 1

أوجد الحد الخامس والعشرين لمتتالية حسابية إذا كان $a_1 = -15$ و $d = 6$.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ صيغة للحد n

$a_{11} = -15 + (11 - 1)6$ $n = 11,\ a_1 = -15,\ d = 6$

$a_{11} = 45$ بسّط.

12-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

15. $-12, __, __, __, 8$
16. $15, __, __, 29$
17. $12, __, __, __, __, -8$
18. $72, __, __, __, 24$

19. **الأعمال المصرفية** يدخر زايد AED 150 كل شهرين. إذا ادخر بهذا المعدل لمدة عامين، فكم سيكون لديه بنهاية عامين؟

أوجد S_n لكل متتالية حسابية.

20. $a_1 = 16,\ a_n = 48,\ n = 6$
21. $a_1 = 8,\ a_n = 96,\ n = 20$
22. $9 + 14 + 19 + \ldots + 74$
23. $16 + 7 + -2 + \ldots + -65$

24. **الدراما** لدى ليلى أداء مسرحي بعد 12 يومًا. وتخطط للتدريب على الأجزاء الخاصة بها كل ليلة. وفي أول ليلة، تدربت على الأجزاء الخاصة بها مرتين. وفي الليلة التالية، تدربت 4 مرات. وفي الليلة الثالثة، تدربت 6 مرات. في الليلة الحادية عشر، كم مرت تدربت على الأجزاء الخاصة بها؟

أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.

25. $\sum_{k=5}^{21}(3k - 2)$
26. $\sum_{k=0}^{10}(6k - 1)$
27. $\sum_{k=4}^{12}(-2k + 5)$

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابيين بين 3 و 39.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ صيغة للحد n

$a_4 = 3 + (4 - 1)d$ $n = 4,\ a_1 = 3$

$39 = 3 + 3d$ $a_4 = 39$

$12 = d$ بسّط.

الوسطان الحسابيان هما $3 + 12$ أو 15 و $15 + 12$ أو 27.

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية ذات $a_1 = 18$ و $a_n = 56$ و $n = 8$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$ $n = 8,\ a_1 = 18,\ a_n = 56$

$= 296$ بسّط.

مثال 4

أوجد قيمة $\sum_{k=3}^{15} 5k + 1$.

استخدم الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. يوجد 13 حدًا.

$a_1 = 5(3) + 1$ أو 16 و $a_{13} = 5(15) + 1$ أو 76.

$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$

$= 598$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

أوجد الحد المشار إليه لكل متتالية هندسية.

28. $a_1 = 5,\ r = 2,\ n = 7$

29. $a_1 = 11,\ r = 3,\ n = 3$

30. $a_1 = 128,\ r = -\frac{1}{2},\ n = 5$

31. a_8 بالنسبة إلى $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \ldots$

أوجد الأوساط الهندسية في كل متتالية.

32. 6, __, __, 162

33. 8, __, __, __, 648

34. −4, __, __, 108

35. **المدخرات** لدى نجاة حساب ادخار يبلغ الرصيد به حاليًا AED 1500. كم سيبلغ رصيد نجاة بعد 4 أعوام إذا حصل على نسبة مرابحة بقيمة 5% سنويًا؟

أوجد S_n لكل متتالية هندسية.

36. $a_1 = 15,\ r = 2,\ n = 4$

37. $a_1 = 9,\ r = 4,\ n = 6$

38. $5 - 10 + 20 - \ldots$ إلى 7 حدود

39. $243 + 81 + 27 + \ldots$ إلى 5 حدود

أوجد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

40. $\sum_{k=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{k-1}$

41. $\sum_{k=1}^{8} -1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

42. **الإعلان** تسلّم نبيلة منشورات دعائية للترويج لاجتماع مجلس الطلاب التالي. وتسلّم المنشورات لأربعة أشخاص. ثم يُسلّم هؤلاء الأشخاص الأربعة المنشورات إلى 4 أشخاص آخرين. ومن ثم يسلّم هؤلاء الأشخاص الأربعة المنشورات الأربعة إلى 4 أشخاص جدد. إذا اعتبرنا أن نبيلة هي الجولة الأولى، كم عدد الأشخاص الذين حصلوا على منشورات حتى الجولة الرابعة؟

مثال 5

أوجد الحد السادس لمتتالية هندسية، والتي فيها $a_1 = 9$ و $r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ صيغة للحد n

$a_6 = 9 \cdot 4^{6-1}$ $n = 6,\ a_1 = 9,\ r = 4$

$a_6 = 9216$

الحد السادس هو 9216.

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1 و 27.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ صيغة الحد النوني

$a_4 = 1 \cdot r^{4-1}$ $n = 4$ و $a_1 = 1$

$27 = r^3$ $a_4 = 27$

$3 = r$ بسّط.

الوسطان الهندسيان هما 1(3) أو 3 و 3(3) أو 9.

مثال 7

أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية التي يكون فيها $a_1 = 3$ و $r = 5$ و $n = 11$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$S_{11} = \frac{3 - 3 \cdot 5^{11}}{1 - 5}$ $n = 11,\ a_1 = 3,\ r = 5$

$S_{11} = 36{,}621{,}093$ استخدم الآلة الحاسبة.

مثال 8

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{6} 2 \cdot (4)^{k-1}$.

$S_6 = \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4}$ $n = 6,\ a_1 = 2,\ r = 4$

$= \frac{-8190}{-3}$ بسّط.

$= 2730$ بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12-4 المتسلسلة الهندسية اللانهائية

أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وُجد.

43. $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$

44. $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \ldots$

45. $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

46. **العلوم الفيزيائية** أسقطت ميسون كرة من أعلى مبنى يصل ارتفاعه 20 مترًا. وفي كل مرة تقفز فيها الكرة، ترتد مرة أخرى إلى $\frac{2}{3}$ من الارتفاع السابق. إذا استمرت الكرة في اتباع هذا النمط ـ، ما إجمالي المسافة التي قطعتها الكرة؟

مثال 9

أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية التي فيها $a_1 = 15$ و $r = \frac{1}{3}$.

$S = \frac{a_1}{1 - r}$ صيغة المجموع

$= \frac{15}{1 - \frac{1}{3}}$ $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

$= \frac{15}{\frac{2}{3}}$ أو 22.5 بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 12 تدريب على الاختبار

1. أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتالية الحسابية ... ,63 ,72 ,81.

2. أوجد الحد الخامس والعشرين لمتتالية حسابية فيها $a_1 = 9$ و $d = 5$.

3. **الاختيار من متعدد** ما الحد الثامن في المتتالية الحسابية التي تبدأ بـ ... ,24.6 ,22.4 ,20.2 ,18؟

A 26.8

B 29

C 31.2

D 33.4

4. أوجد الأوساط الحسابية الأربعة بين -9 و 11.

5. أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 11$ و $n = 14$ و $a_n = 22$.

6. **الاختيار من متعدد** ما هو الحد التالي في المتتالية الهندسية التالية؟

$$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32}, \ldots$$

F $\frac{5}{8}$

G $\frac{5}{32}$

H $\frac{5}{128}$

J $\frac{5}{256}$

7. أوجد الأوساط الهندسية الثلاثة التي تقع بين 6 و 1536.

8. أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية التي فيها $a_1 = 15$ و $r = \frac{2}{3}$ و $n = 5$.

أوجد مجموع كل متسلسلة، إن وُجد.

9. $\sum_{k=2}^{12}(3k - 1)$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(3^k)$

11. $45 + 37 + 29 + \ldots + -11$

12. $\frac{1}{8} + \frac{2}{24} + \frac{4}{72} + \ldots$

13. اكتب $0.\overline{65}$ في صورة كسر اعتيادي.

أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

14. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = 3a_n + 5$

15. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + n$

16. **الاختيار من متعدد** ما التكرارات الثلاثة الأولى للدالة $f(x) = -5x + 4$ بالنسبة للقيمة الأولية $x_0 = 3$؟

A 3, −11, 59

B −11, 59, −291

C −1, −6, −11

D 59, −291, 1459

17. فكك $(2a - 3b)^4$.

18. ما معامل الحد الخامس لـ $(m + 3n)^6$؟

19. أوجد الحد الرابع لمفكوك $(c + d)^9$.

برهن على أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة.

20. $1 + 6 + 36 + \ldots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$.

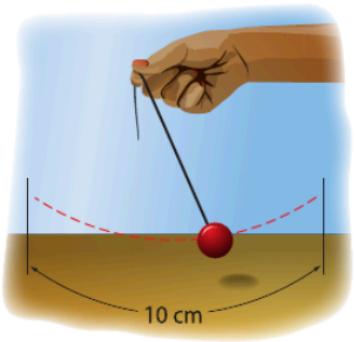
21. $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10.

22. أوجد مثالاً مضادًا للعبارة التالية.

$2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4.

23. **المدرسة** يوجد في صف الأستاذ خالد لتدريس العلوم عددًا متساويًا من الطلاب الذين تبلغ أعمارهم 15 عامًا والطلاب الذين تبلغ أعمارهم 16 عامًا. ويريد اختيار 8 طلاب لتمثيل الفصل في معرض العلوم. ما مدى احتمال اختياره 5 طلاب من الذين يبلغون 15 عامًا؟

24. **البندول** تأرجح ليلى البندول. وتتناقص المسافة التي يقطعها البندول بمقدار 15% مع كل أرجحة. إذا قطع البندول في البداية 10 سنتيمترات، فأوجد إجمالي المسافة التي سيكون البندول قد قطعها عندما يستقر.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 12 التحضير للاختبارات المعيارية

البحث عن نمط

تتمثل إحدى أكثر إستراتيجيات حل المسائل شيوعًا في البحث عن نمط. فالقدرة على التعرف على الأنماط، وتمثيلها جبريًا، وتوسعتها تعد أداة قيّمة لحل المسائل.

إستراتيجيات البحث عن نمط

الخطوة 1

حدد النمط.

- قارن بين الأعداد أو الأشكال أو التمثيلات البيانية في النمط.
- **اسأل نفسك:** ما مدى الصلة بين حدود النمط؟
- **اسأل نفسك:** هل هناك أي عمليات مشتركة تؤدي إلى الانتقال من أحد الحدود إلى الحد التالي؟

الخطوة 2

عمم النمط.

- اكتب قاعدة باستخدام الكلمات لوصف كيفية إنتاج حدود النمط.
- عيّن المتغيرات واكتب تعبيرًا جبريًا لتمثيل النمط إن أمكن.

الخطوة 3

أوجد الحدود المفقودة، ووسّع النمط، وأوجد حل المسألة.

- استخدم النمط الخاص بك أو قاعدتك لإيجاد الحدود المفقودة و/أو وسع النمط لحل المسألة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

استخدم متتالية المربعات الموضحة. كم عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع في المتتالية؟

الشكل 1 الشكل 2 الشكل 3

A 55 C 74

B 65 D 82

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. يتمإعطاؤك ثلاثة أشكال من متتالية ويُطلب منك إيجاد عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع.

ابحث عن نمط في أشكال المربعات. وعد المربعات في كل شكل.

اكتب تعبيرًا لتمثيل هذا النمط.

الشرح عدد المربعات يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.

المتغير لنفترض أن n تمثل رقم الشكل.

المعادلة $a_n = n^2 + 1$

استخدم التعبير الذي كتبته لتوسعة النمط وإيجاد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذًا، سيتضمن الشكل التاسع 82 مربعًا. الإجابة الصحيحة هي D.

التمارين

اقرأ المسألة. واستخدم النمط في حلها.

1. الأعداد أدناه تُشكّل متتالية رياضية شهيرة من الأعداد تُعرف باسم متتالية فيبوناتشي. ما عدد فيبوناتشي التالي في المتتالية؟

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

A 36

B 34

C 31

D 29

2. ما العدد المجهول في الجدول؟

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

F 17

G 18

H 20

J 21

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 12

تدريب على الاختبارات المعيارية

تراكمي، الوحدات من 9 إلى 12

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. أوجد الحد التالي للمتتالية الحسابية. **B**

7, 13, 19, 25, 31, ...

A 36 **C** 38

B 37 **D** 39

2. تحصل مها على تكبير لصورة بمقدار 10 cm في 15 cm. بحيث تكون الصورة الجديدة ذات أبعاد أكبر 4 مرات من أصلها. فما مساحة التكبير مقارنةً بمساحة الصورة الأصلية؟

F المساحة أكبر بمرتين.

G المساحة أكبر بأربع مرات.

H المساحة أكبر بثماني مرات.

J المساحة أكبر بست عشرة مرة.

3. أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{15} (8k - 1)$.

A 119 **C** 945

B 826 **D** 1072

4. ما ذا يحدث للتمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2$ عند تغييرها إلى $y = 2x^2$؟

F التمثيل البياني للمعادلة $y = 2x^2$ هو انعكاسٌ للتمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي y.

G يدور التمثيل البياني بمقدار 90 درجةً حول نقطة الأصل.

H يقل عرض التمثيل البياني.

J يزيد عرض التمثيل البياني.

5. اكتب الصيغة الخاصة بالحد النوني للمتتالية الهندسية الموضحة بالجدول.

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

A $a_n = (5)^n$

B $a_n = 5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(5)^{n-1}$

D $a_n = 5(2)^n$

6. يبين الجدول أبعاد خيمة مربعة الشكل وعدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم الخيمة.

طول الخيمة (بالمتر)	عدد الأشخاص
2	7
5	28
6	39
8	67
12	147

بفرض أن ℓ يمثل طول الخيمة، ويمثل n عدد الأشخاص الذين يُمكن أن تتسع لهم الخيمة. حدد المعادلة التي تصف على أفضل نحو العلاقة بين طول الخيمة وعدد الأشخاص الذين تتسع لهم.

F $\ell = n^2 + 3$ **H** $\ell = 3n + 1$

G $n = \ell^2 + 3$ **J** $n = 3\ell + 1$

7. يُقال أن مرشح هواء معين يزيل 90% من الملوثات الموجودة في الهواء في كل مرة يمر فيها بالمرشح. فإذا تم تدوير نفس كمية الهواء عبر المرشح ثلاث مرات، فما النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستُزال من الهواء؟

A 0.01% **B** 0.1% **C** 99.0% **D** 99.9%

8. في دار السينما، تبلغ تكلفة علبتين من الفُشار ومشروب غازي AED 34.50. وتبلغ تكلفة 3 علب من الفُشار و 4 مشروبات غازية AED 81.75. فأي زوج من المعادلات يمكن استخدامه لتحديد p وهو تكلفة علبة الفُشار، و s، وهو تكلفة المشروب الغازي؟

F $2p + s = 81.75$
$3p + 4s = 34.50$

H $2p + s = 34.50$
$3p + 4s = 81.75$

G $2p - s = 34.50$
$3p - 4s = 81.75$

J $p + s = 34.50$
$p + 4 = 81.75$

9. أي من المتسلسلات الهندسية التالية لا يقارب من المجموع؟

A $\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$

B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

C $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

D $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 9 استوعب الحدود المُستخدمة في الجبر، وكيفية تطبيقها. تكون المتسلسلة الهندسية تقاربية إذا كان لدى النسبة المشتركة r قيمة مطلقة أقل من 1.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

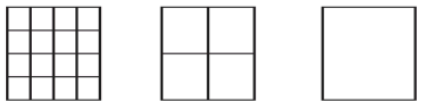
الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

10. ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية الضرب الموضحة؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

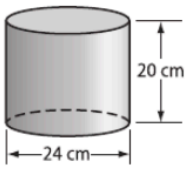
11. الإجابة الشبكية تأمل النمط أدناه. إلى كم قطعة سيتم تقسيم الشكل السادس في النمط؟



الشكل 1: قطعة واحدة — الشكل 2: 4 قطع — الشكل 3: 16 قطعة

12. استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك التعبير $(c + d)^6$.

13. الإجابة الشبكية تمتلك سهيلة وعاءً أسطوانيًا تحتاج إلى ملئه بالتربة حتى تتمكن من زرع بعض الزهور.



ما حجم الأسطوانة بالسنتيمترات المكعبة مقربًا إلى أقرب سنتيمتر مكعب؟

14. في مزرعة بكتيريا، تنمو البكتيريا بمعدل أسي مع مرور الوقت، كما هو موضح بالجدول.

الساعات	عدد البكتيريا
0	1000
1	2000
2	4000

اكتب معادلة للتعبير عن عدد البكتيريا، y، بالنسبة للزمن، t.

15. الإجابة الشبكية ما قيمة $f[g(6)]$ إذا كان $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = x^2 + 5$؟

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

16. برهِن على أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

17. النقطتان الطرفيتان لقطر دائرة يكونان عند النقطتين $(-1, 0)$ و $(5, -8)$.

a. ما إحداثيات مركز الدائرة؟ اشرح طريقتك في إيجاد الإجابة.

b. أوجد نصف قطر الدائرة. اشرح طريقتك في إيجاد الإجابة.

c. اكتب معادلة للدائرة.

18. تقطع دراجة المسافة من دبي إلى الشارقة خلال ساعتين ونصف. إذا زادت من سرعتها، فيُمكنها قطع نفس المسافة خلال ساعتين.

a. هل يمثل هذا الموقف تغيرًا طرديًا أم تغيرًا عكسيًا؟ اشرح استنتاجك.

b. إذا كانت الرحلة من دبي إلى الشارقة تستغرق ساعتين ونصف عند السير بسرعة 12 km/h ما السرعة التي ينبغي التغيير إليها لقطع نفس المسافة خلال ساعتين؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education