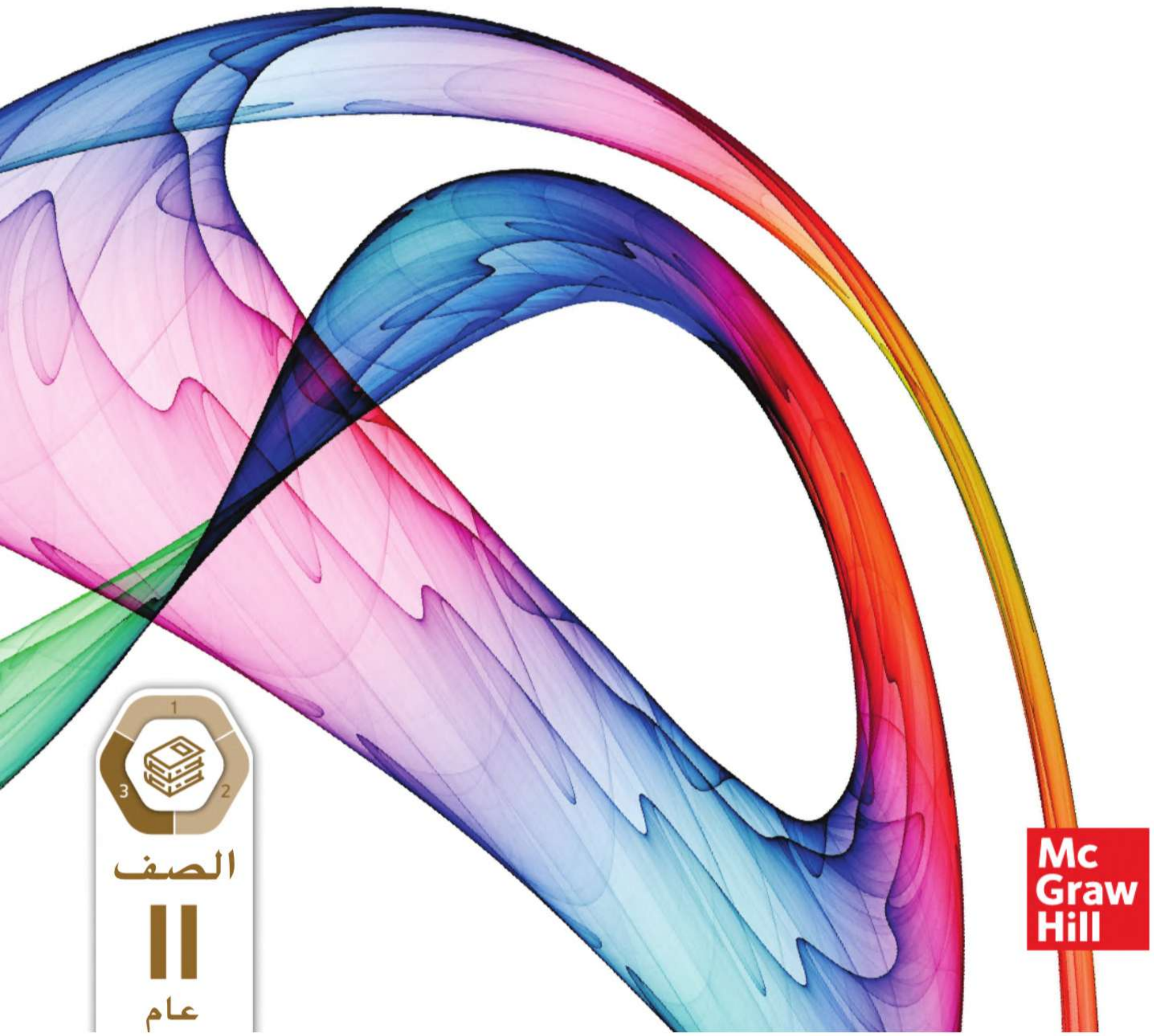
الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

الإمارات

2019-2020

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة



الصف
11
عام

Mc Graw Hill

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار العام

نسخة الإمارات العربية المتحدة

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 11 Integrated Math T3

FM. Front Matter, from Integrated Math III © 2012
10. Transformations and Symmetry, from Integrated Math III Chapter 14 © 2012
11. Trigonometric Functions, from Algebra 2 Chapter 12 © 2014
12. Trigonometric Identities and Equations, from Algebra 2 Chapter 13 © 2014
EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math III © 2012

صورة الغلاف: K-Fractals/Alamy Stock Photo

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2020 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-44-700047-1 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-700047-1 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-44-700049-5 (نسخة المعلم)
MHID: 1-44-700049-8 (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-44-700057-0 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-700057-9 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-44-700059-4 (نسخة المعلم)
MHID: 1-44-700059-5 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

ملخص المحتويات

الوحدة 1 المعادلات و المتباينات

الوحدة 2 الدوال و العلاقات الخطية

الوحدة 3 الأنظمة الخطية والمصفوفات

الوحدة 4 كثيرات الحدود و الدوال كثيرة الحدود

الوحدة 5 الدوال والعلاقات العكسية والجذرية

الوحدة 6 الدوال و العلاقات الأسيّة و اللوغاريتمية

الوحدة 7 الدوال والعلاقات النسبية

الوحدة 8 المتتاليات والمتسلسلات

الوحدة 9 الإحصاء والإحتمالات

الوحدة 10 التحويلات الهندسية والتناظر

الوحدة 11 الدوال المثلثية

الوحدة 12 المتطابقات والمعادلات المثلثية

Chapter sourced from: FM. Front Matter, from Integrated Math III © 2012 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المؤلفون

يضمن المؤلفون الرئيسون بأن برامج الرياضيات لـ Macmillan/McGraw–Hill تم ضبطها رأسياً بشكل صحيح من البداية إلى النهاية–للنجاح في الرياضيات المتكاملة I و ما يلحقها. بمراجعة المحتوى من برامج المدرسة الثانوية، جميع برامجنا الرياضية تم ضبطها بوضوح من حيث المجال و الترتيب.

المؤلفون الرئيسون

الدكتور ج. أ. كارتر،
المدير العام
مدرسة أدلاي أ. ستيفنسون الثانوية
لينكولن شاير، إلينوي

مجالات الخبرة: استخدام التكنولوجيا و الطرق اليدوية لتصوير النظريات؛ إنجاز الرياضيات لمتعلمين اللغة الإنجليزية

الدكتور جيلبرت ج. كيوفاس.
أستاذ تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس – سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

مجالات الخبرة: تطبيق النظريات و المهارات في السياقات الغنية في الرياضيات؛ التمثيلات الرياضية

الدكتور روجر داي، NBCT
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاونشيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

مجالات الخبرة: تعلم و تطبيق الإحتمالية و الإحصاء؛ تعليم مدرس الرياضيات

الدكتور كارول مالوي،
أستاذ مساعد
جامعة شمال كارولينا في شابل هيل
شابل هيل، شمال كارولينا

مجالات الخبرة: التمثيلات و التفكير النقدي؛ نجاح الطالب في الجبر 1

مؤلفو البرنامج

راث كايسي
مستشار الرياضيات
مدرس إقليمي شريك
جامعة كنتاكي
ليكسنجتون، كنتاكي

مجالات الخبرة: تكنولوجيا التمثيل البياني و الرياضيات

جيري كامينز
مستشار الرياضيات
رئيس سابق، المجلس الوطني لمشرفين الرياضيات
ويسترن سبرينج، إلينوي

مجالات الخبرة: تكنولوجيا التمثيل البياني و الرياضيات

الدكتور بيرتشي هوليداي Ed.D.
مستشار الرياضيات الوطني
سيلفر سبرينج، ماريلاند

مجالات الخبرة: استخدام الرياضيات لتمثيل و فهم البيانات من الحياة اليومية؛ تأثير الرسومات البيانية على فهم الرياضيات

باتريس مور لاتشين
مستشار الرياضيات
هيوستن، تكساس

مجالات الخبرة: تعليم الرياضيات؛ العمل مع متعلمين اللغة الإنجليزية

المؤلف المشارك

دينا زايك محطويات
مستشار تعليمي
أنشطة Dinah–Might، Inc.
سان أنطونيو، تكساس

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المعادلات والمتباينات

الاستعداد للوحدة 1 3

1-1 التعابير و الصيغ 5

1-2 خواص الأعداد الحقيقية 11

1-3 حل المعادلات 18

■ إختبار منتصف الوحدة 26

1-4 حل معادلات القيمة المطلقة 27

1-5 حل المتباينات 33

📖 **استكشف: مختبر الجبر** الرمز الزمني 40

1-6 حل المتباينات المركبة و متباينات القيمة المطلقة 41

ا قويم

■ دليل الدراسة والمراجعة 49

■ تدريب على الاختبار 53

■ التحضير للإختبارات المعيارية 54

■ تدريب الإختبار المعياري،الوحدة 1 56

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

العلاقات و الدوال الخطية

الوحدة 2

الاستعداد 59

2-1 الـ ـقات و الدوال 61

توسع: مختبر الجبر الدوال المنفصلة و المستمرة 68

2-2 الـ ـات و الدوال الخطية 69

توسع: مختبر الجبر جذور المعادلات و أصفار الدوال 75

2-3 معدل التغير و الميل 76

2-4 كتابة المعادلات الخطية 83

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني الإختلاف المباشر 90

إختبار منتصف الوحدة 91

2-5 الدوال الخاصة 93

استكشف: مختبر تقنية التمثيل البياني عائلات الخطوط 100

2-6 الدوال الأصلية و التحويلات 101

2-7 التمثيل البياني للمتباينات الخطية و متباينات القيمة المطلقة 109

ا ـويم

ليل الدراسة والمراجعة 114

دريب على الاختبار 119

التحضير للإختبارات المعيارية 120

تدريب الإختبار المعياري، الوحدات 1–2 122

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الأنظمة الخطية والمصفوفات

الوحدة 3

الاستعداد 125

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تقاطعات التمثيلات البيانية 127

3-1 حل أنظمة المعادلات 128

3-2 حل أنظمة المتباينات بالتمثيل البياني 138

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني أنظمة المتباينات الخطية 145

3-3 إيجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية 146

3-4 أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات 153

■ ختبار منتصف الوحدة 160

3-5 المصفوفات 162

3-6 العمليات على المصفوفات 169

3-7 ضرب المصفوفات 177

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني العمليات على المصفوفات 185

3-8 حل أنظمة المعادلات باستخدام قاعدة كرامر 187

3-9 حل أنظمة المعادلات باستخدام معكوس المصفوفات 196

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المصفوفات الموسعة 203

ا ة يم

■ يل الدراسة والمراجعة 204

■ دريب على الاختبار 209

■ التحضير للإختبارات المعيارية 210

■ تدريب الإختبار المعياري، الوحدات 1–3 212

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 4
كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

الاستعداد للوحدة 4 215

4-1 الـ ـليات على كثيرات الحدود 217

📖 **وسع: مختبر الجبر** تحليل بعدي 224

4-2 قـ ـة كثيرات الحدود 225

🖩 **وسع: مختبر تقنية التمثيل البياني** قسمة كثيرات الحدود 232

4-3 الدوال كثيرة الحدود 234

4-4 تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود 242

🖩 **توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني** تمثيل البيانات باستخدام الدوال كثيرة الحدود 250

■ **إختبار منتصف الوحدة** 252

🖩 **استكشف: مختبر تقنية التمثيل البياني** حل المعادلات كثيرة الحدود عن طريق التمثيل البياني 253

4-5 حل المعادلات كثيرة الحدود 254

🖩 **توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني** المتطابقات كثيرة الحدود 262

4-6 نظريتا الباقي والعامل 264

4-7 الـ ـذور و الأصفار 270

🖩 **وسع: مختبر تقنية التمثيل البياني** تحليل الدوال كثيرة الحدود 278

4-8 نظرية الصفر النسبي 279

الـ ـقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 285

■ **تدريب على الاختبار** 289

■ **التحضير للإختبارات المعيارية** 290

■ **تدريب الإختبار المعياري، الوحدات 1-4** 293

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

5 الدوال والعلاقات العكسية والجذرية

الاستعداد للوحدة 5 295

5-1 **العمليات على الدوال** 297

5-2 **العلاقات والدوال العكسية** 305

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني العلاقات والدوال العكسية 311

5-3 **دوال الجذر التربيعي والمتباينات** 312

5-4 **الجذور النونية** 319

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني لدوال الجذور النونية 325

■ **إختبار منتصف الوحدة** 326

5-5 **العمليات الحسابية على التعابير الجذرية** 327

5-6 **الأسس النسبية** 334

5-7 **حل المعادلات والمتباينات الجذرية** 341

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات الجذرية 348

التقويم

■ **دليل الدراسة و المراجعة** 350

■ **تدريب على الاختبار** 354

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 356

■ **تدريب الإختبار المعياري، الوحدات 1–4** 358

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

الاستعداد لوحدة 6 361

6-1 ا وغاريتمات و الدوال اللوغاريتمية 364

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني إختيار النموذج الأمثل 372

6-2 حل المعادلات و المتباينات اللوغاريتمية 374

■ إختبار منتصف الوحدة 380

6-3 خواص اللوغاريتمات 381

6-4 ا غاريتمات العادية 388

وسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات و المتباينات اللوغاريتمية 395

6-5 الأساس e واللوغايتمات الطبيعية 397

استكشف: مختبر ورقة البيانات المرابحة المركبة 404

6-6 استخدام الدوال الأسيّة و اللوغاريتمية 405

ا قويم

■ دليل الدراسة و المراجعة 413

■ تدريب على الاختبار 417

■ التحضير للاختبارات المعيارية 418

■ تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1–6 420

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدوال والعلاقات النسبية

الاستعداد للوحدة 7 423

7-1 **ضرب التعابير النسبية وقسمتها** 425

7-2 **جمع التعابير النسبية وطرحها** 434

7-3 **تمثيل دوال المقلوب بيانياً** 441

■ **إختبار منتصف الوحدة** 448

7-4 **التمثيل البياني للدوال النسبية** 449

وسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني للدوال النسبية 457

7-5 **حل المعادلات والمتباينات النسبية** 458

وسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات النسبية 467

ا تقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 469

■ **تدريب على الاختبار** 473

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 474

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1-7** 476

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المتتاليات والمتسلسلات

الاستعداد للوحدة 8 479

8-1 المتتاليات كدوال 481

8-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية 488

8-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية 496

■ إختبار منتصف الوحدة 503

8-4 نظرية ذات الحدين 505

8-5 الاستقراء الرياضي 514

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة 519

■ تدريب على الاختبار 523

■ التحضير للإختبارات المعيارية 524

■ تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1–8 526

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الإحصاء والإحتمالات

الاستعداد للوحدة 9 529

9-1 إعداد دراسة 531

لتوسع: مختبر حاسبة التمثيل البياني المحاكاة و هامش الخطأ 539

9-2 توزيعات البيانات 541

9-3 التوزيعات الاحتمالية 550

■ اختبار منتصف الوحدة 559

9-4 التوزيع ذو الحدين 560

ا تقويم

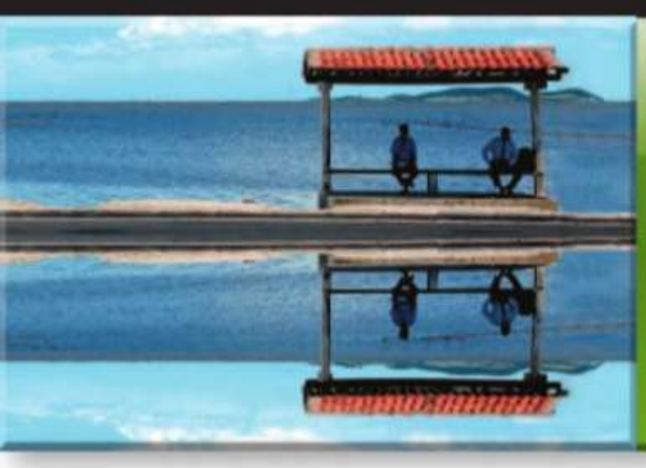
■ دليل الدراسة والمراجعة 568

■ تدريب على الاختبار 571

■ التحضير للإختبارات المعيارية 572

■ تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1-9 574

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



التحويلات الهندسية والتناظر

الاستعداد للوحدة 10 577

10-1 الإنعكاس 579

10-2 الإزاحة 588

ستكشاف: مختبر الهندسة عمليات التدوير 595

10-3 ران 596

التوسع: مختبر الهندسة المجسمات الناتجة عن التدوير 603

■ اختبار منتصف الوحدة 605

ستكشاف: مختبر برنامج الهندسة تركيب التحويلات 606

10-4 تر ب التحويلات 607

التوسع: مختبر الهندسة الفسيفساء 616

10-5 التناظر 619

التوسع: مختبر الهندسة استكشاف الإنشاءات بواسطة جهاز عاكس 626

لاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني عمليات تغيير الأبعاد (التمدّد) 628

10-6 عمليات تغيير الأبعاد (التمدد) 630

ا قويم

■ دليل الدراسة والمراجعة 636

■ تدريب على الاختبار 643

■ التحضير للإختبارات المعيارية 644

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤ

الدوال المثلثية

الاستعداد للوحدة 11 647

الاستكشاف: مختبر ورقة البيانات استكشاف المثلثات القائمة الخاصة 649

11-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة 650

11-2 ال ايا وقياس الزوايا 659

التوسع: مختبر الهندسة مساحات متوازيات الأضلاع 666

11-3 النسب المثلثية للزوايا العامة 667

11-4 ون الـ Sine 674

الاستكشاف: مختبر الهندسة المضلعات المنتظمة 682

11-5 قانون الـ Cosine 683

اختبار منتصف الوحدة 689

11-6 الدوال المثلثية الدائرية والدورية 690

11-7 التمثيل البياني للدوال المثلثية 697

لاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيلات البيانية المثلثية 704

11-8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية 705

11-9 النسب المثلثية العكسية 713

ا قويم

دليل الدراسة والمراجعة 719

تدريب على الاختبار 725

التحضير للإختبارات المعيارية 726

تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1–11 728

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

المتطابقات والمعادلات المثلثية

الاستعداد للوحدة 12 731

12-1 المتطابقات المثلثية 733

12-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية 740

12-3 متطابقات مجموع زوايتين والفرق بينهما 746

■ ختبار منتصف الوحدة 752

12-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها 753

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات المثلثية 760

12-5 حل المعادلات المثلثية 761

ا قويم

■ دليل الدراسة والمراجعة 768

■ تدريب على الاختبار 771

■ التحضير للإختبارات المعيارية 772

■ تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1–12 774

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

10 التحويلات الهندسية والتناظر

Chapter Sourced from: 10. Transformations and Symmetry, from Integrated Math III Chapter 14 © 2012 McGraw-Hill Education مؤسسة

السابق

- لقد حدّدت الانعكاس والإزاحة والدوران.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تحديد أسماء أشكال عكست أو أزيحت أو دوّرت أو غيّرت أبعادُها(تمدّدت) ورسمها.
  - تمييز تركيب التحويلات ورسمها.
  - تحديد التناظر في الأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.

لماذا؟ ▲

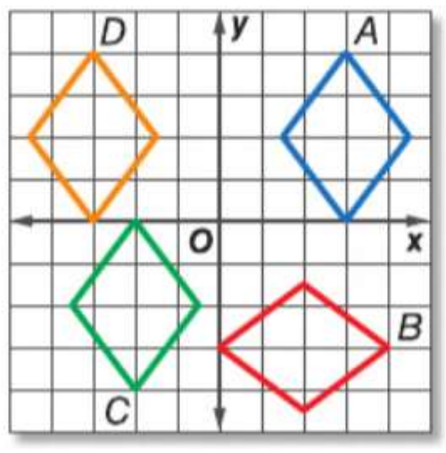
- **التصوير الضوئي** يستخدم المصورون الانعكاس والدوران والتطابق ليجعلوا صورهم مثيرةً للإعجاب وملفتةً للنظر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب سريع

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسا*، *أو إزاحةً*، أو *دورانًا*.

1. A إلى B
2. D إلى A
3. A إلى C

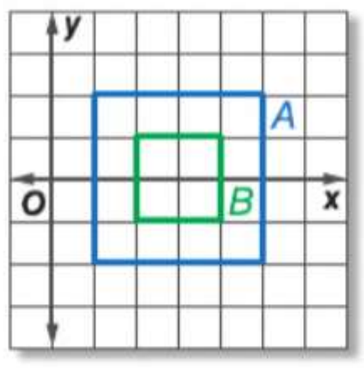


جـــد مجموع كل متّجهين.

4. $\langle 13, -4\rangle + \langle -11, 9\rangle$
5. $\langle 6, -31\rangle + \langle -22, 3\rangle$

6. **الفرقة الموسيقية** خلال جزءٍ من أغنية، يوجه ضارب الطبل في فرقة استعراضية الفرقة للتحرك من النقطة (1, 4) إلى النقطة (5, 1). اكتب صورة مركبة المتّجه الذي يصف هذه الحركة.

7. حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أو تصغير. ثم جـــد معامل مقياس تغيير الأبعاد .



8. **المسرحيات** يصنع أحمد نموذج نملةٍ لمسرحية. جـــد معامل مقياس النموذج إذا كان طول النملة سنتيمترًا واحدًا وكان طول النموذج $\frac{1}{4}$ m.

مراجعة سريعة

مثال 1

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسا*، *أو إزاحة*، *أو دورانًا*.

كل رأس وصورته على مسافة واحدة من المحور الرأسي y.
هذا انعكاس

مثال 2

اكتب صورة مركّبة $\overrightarrow{AB}$ لـــ A(−1, 1) و B(4, −3).

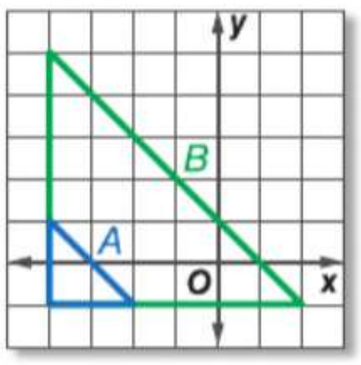
صورة مركبة المتّجه $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$

بالتعويض. $= \langle 4 - (-1), -3 - 1\rangle$

بالتبسيط $= \langle 5, -4\rangle$

مثال 3

حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من *A* إلى *B* عبارة عن **تكبير أو تصغير**. ثمّ جـــد معامل مقياس تغيير الأبعاد.



B أكبر من *A*، إذًا فهو تكبير.

المسافة بين رؤوس *A* تساوي 2 والمسافة المناظرة بالنسبة لـــ *B* تساوي 6.

عامل المقياس يساوي $\frac{6}{2}$ أو 3.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك للوحدة 10.
ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظم مواردك.

المطويات منظم **الدراسة**

التحويلات والتطابق اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 10 حول التحويلات والتطابق. وابدأ بثلاث صفحات في الدفتر.

1 **اطوِ** كل ورقة إلى نصفين.

2 **افتح** الأوراق المطوية واطوِ كل ورقةٍ بالاتجاه الطولي لتشكيل جيب.

3 **ألصق** الورقات جنبًا إلى جنب لتشكيل كتيّب.

4 **سمِّ** كلا من الجيوب كما هو موضح.

المفردات **الجديدة**

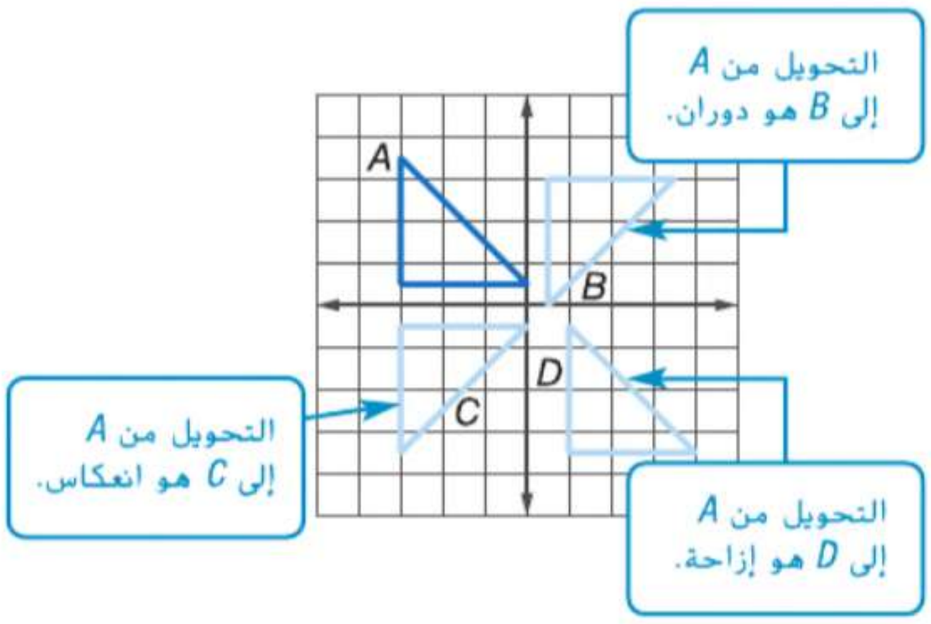
line of reflection	خط الانعكاس
center of rotation	مركز الدوران
angle of rotation	زاوية الدوران
composition of transformations	تركيب التحويلات
symmetry	التناظر (التماثل)
line symmetry	تناظر محوري
line of symmetry	خط التناظر(التماثل)

مراجعة **المصطلحات**

الانعكاس هو تحويلٌ يمثل قلب شكلٍ بالنسبة لنقطة أو مستقيم أو مستوى

الدوران هو تحويلٌ يدير كل نقطةٍ في صورةٍ أصليةٍ بزاويةٍ واتجاهٍ محددين حول نقطة ثابتة

الإزاحة هي تحويلٌ يحرّك كل نقاط شكل ما للمسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-1 الانعكاس

السابق:
- لقد حدّدت الانعكاس وأثبتّه على أنه تحويل تطابق.

الحالي:
1. رسم الانعكاس.
2. رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي.

لماذا؟
- لاحظ في هذا الانعكاس في الماء أن المسافة التي تقع عندها نقطةٌ فوق خط الماء تبدو مماثلةً للمسافة التي تقع عندها صورة تلك النقطة تحت الماء.

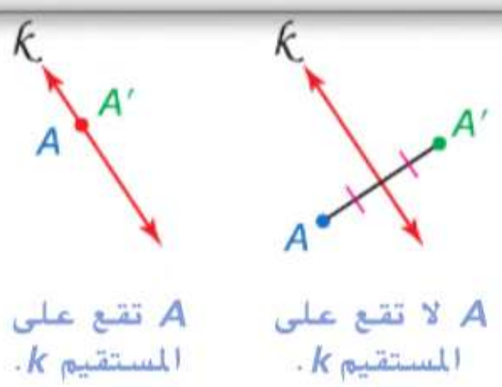
المفردات الجديدة
خط الانعكاس
line of reflection

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 رسم الانعكاس تعلمت سابقًا أن الانعكاس أو القَلب تحويلٌ بالنسبة لمستقيمٍ يدعى **خط الانعكاس**. تبعد كل نقطة في الصورة الأصلية ونظيرتها في الصورة المسافة نفسها عن هذا المستقيم.

المفهوم الأساسي الانعكاس بالنسبة لمستقيم

الانعكاس بالنسبة لمستقيمٍ هو دالةٌ تربط كل نقطةٍ بصورتها بحيث:
- إذا كانت النقطة تقع على المستقيم، فإن فإن الصورة والصورة الأصلية هما النقطة نفسها أو
- إذا لم تكن النقطة تقع على المستقيم، فالمستقيم هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين.



A تقع على المستقيم k.

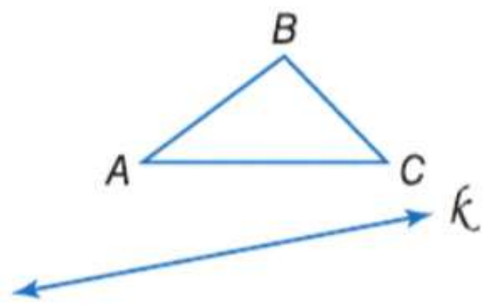
A لا تقع على المستقيم k.

وهكذا دواليك هي تسميات النقاط المتناظرة لتحويلٍ أو أكثر. A', A'', A'''

لتعكس مضلعا بالنسبة لمستقيم، اعكس كلا من رؤوس المضلع. ثم صل هذه الرؤوس لتشكل الصورة المنعكسة.

مثال 1 انعكاس شكلٍ بالنسبة لمستقيم

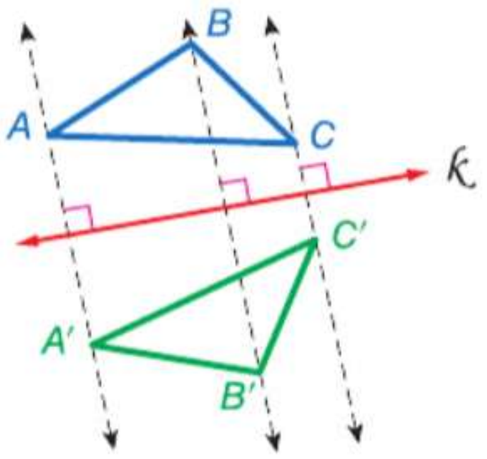
انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة.



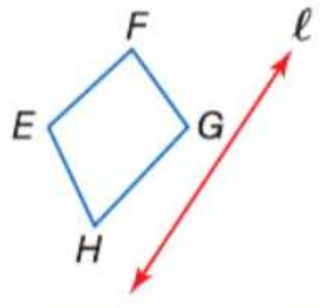
الخطوة 1 ارسم مستقيما من خلال كل رأس بحيث يكون عموديًا على المستقيم k.

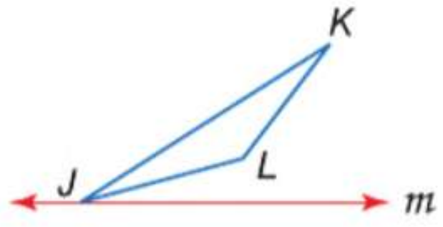
الخطوة 2 قِس المسافة من النقطة A إلى المستقيم k. ثم حدد A' على المسافة نفسها من المستقيم k على الطرف المقابل

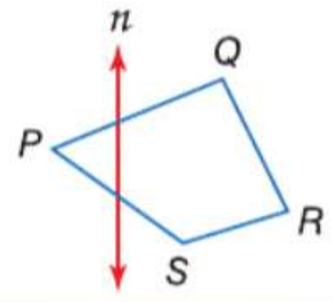
الخطوة 3 كرّر الخطوة 2 لتحديد النقطتين B' و C'. ثم صل الرؤوس A' و B' و C' لتشكيل الصورة المنعكسة.



تمرين موجّه

1A.


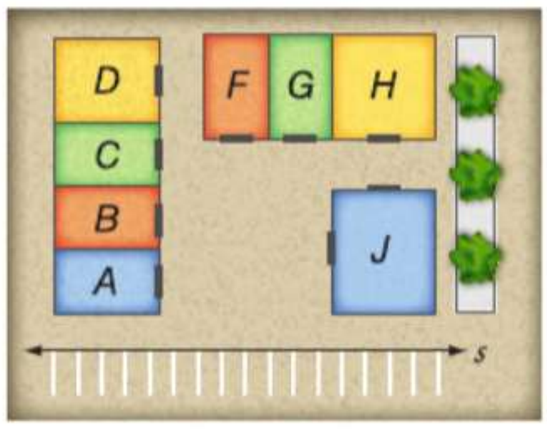
1B.


1C.


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

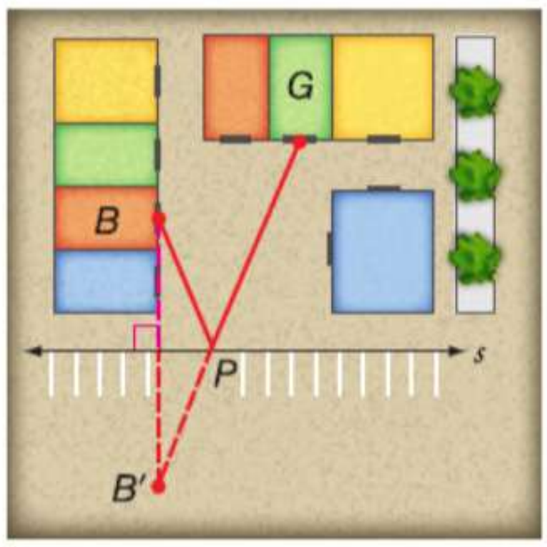
تذكر أن الانعكاس هو تحويل تطابق أو تساوي أبعاد. في الشكل المبيّن في المثال 1، $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

مثال 2 من الحياة اليومية تصغير المسافات باستخدام الانعكاس



التسوق **افترض أنك ستشتري ملابس من المتجر B، ثم ستعود إلى سيارتك، ثم ستشتري حذاء من المتجر G. فأين عليك أن تركن سيارتك على طول المستقيم s من أماكن إيقاف السيارات لتحدّ من المسافة التي ستمشيها سيرًا على الأقدام إلى الحدّ الأدنى؟**

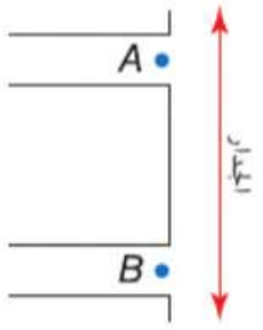
استيعاب المسألة تطلب المسألة منك تحديد نقطة P على المستقيم s بحيث يكون لـ $BP + PG$ أقل قيمة ممكنة.



التخطيط تكون المسافة الكلية من B إلى P ثم من P إلى G أصغر ما يمكن حين تكون النقاط الثلاثة على استقامة واحدة. استخدم انعكاس النقطة B بالنسبة للمستقيم s لإيجاد موقع النقطة P.

الحلّ ارسم $\overline{B'G}$. حدّد P عند تقاطع المستقيم s و $\overline{B'G}$.

التحقق قارن المجموع $BP + PG$ لكل حالة لتتحقق من أن موقع P الذي وجدته يصغر هذا المجموع.



تمرين موجّه

2. **بيع البطاقات** تريد إيمان اختيار موقعٍ جيدٍ لبيع بطاقات حضور حفل التخرج. حدد نقطة P بحيث تكون المسافة التي على شخص ما أن يقطعها من الردهة A إلى النقطة P على الجدار، ومن ثمّ إلى الصف التالي في الردهة B أصغر ما يمكن.

مهنة من الحياة اليومية

المصوّر يلتقط العاملون في مجال التصوير الصور لأسباب متعددة، منها ما يتعلق بالثقافة أو الفنّ أو تسجيل حدث ما، ومنها ما يكون لأغراض علمية. وتطلب بعض الاختصاصات كالتصوير الصحفي والتصوير العلمي نيل درجة البكالوريوس. بينما لا تستلزم بعض مجالات التصوير الأخرى، كالتقاط الصور الشخصية، سوى براعةً فنية.

2 رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي

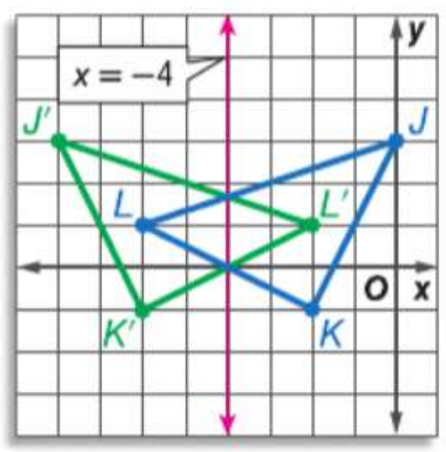
يمكن إجراء الانعكاس أيضا في المستوى الإحداثي عبر استخدام التقنيات المقدّمة في المثال 3.

مثال 3 انعكاس شكلٍ بالنسبة لمستقيمٍ أفقي أو رأسي

للمثلث JKL الرؤوس $J(0, 3)$ و $K(-2, -1)$ و $L(-6, 1)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته بالنسبة للمستقيم المعطى.

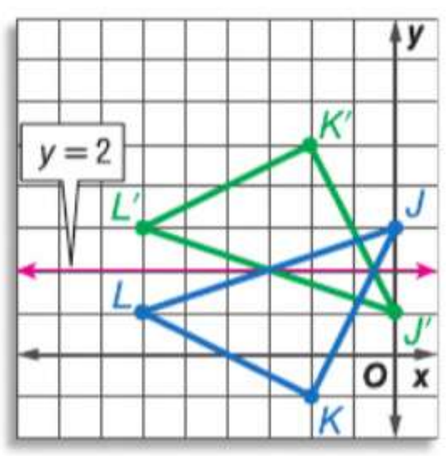
a. $x = -4$

جد نقطةً مناظرةً لكل رأس بحيث يكون الرأس وصورته متساويي البعد عن المستقيم $x = -4$.



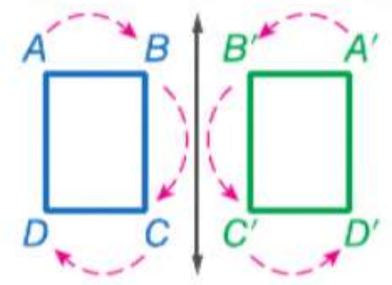
b. $y = 2$

جد نقطةً مناظرةً لكل رأس بحيث يكون الرأس وصورته متساويي البعد عن المستقيم $y = 2$.



نصيحة دراسية

خواص الانعكاس تحافظ الانعكاس، شأنها شأن جميع حالات تساوي القياس، على المسافات وقياسات الزوايا وبينيّة النقاط ووقوعها على استقامةٍ واحدة. ولكن توجيه الصورة الأصلية وصورتها يكونان متعاكستين.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

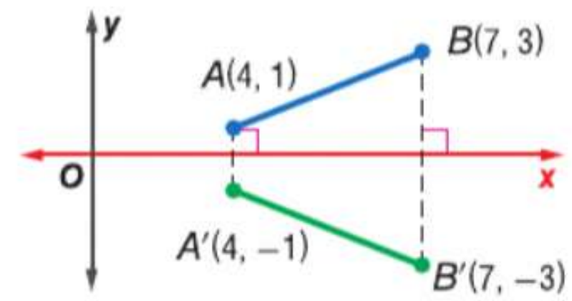
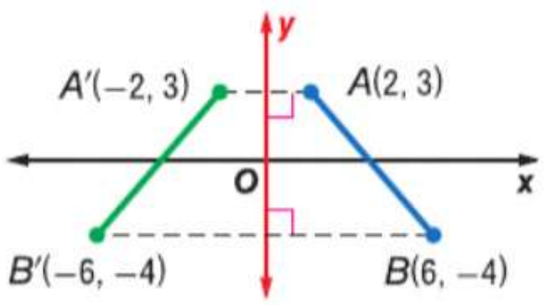
تمرين موجّه

لشبه المنحرف *RSTV* الرؤوس $R(-1, 1)$ و $S(4, 1)$ و $T(4, -1)$ و $V(-1, -3)$. مثل شبه المنحرف *RSTV* وصورته بالنسبة للمستقيم المعطى.

3A. $y = -3$ **3B.** $x = 2$

حين يكون خط الانعكاس هو المحور الأفقي *x* أو المحور الرأسي *y*. فيمكنك استخدام القاعدة التالية.

المفهوم الأساسي الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي *x* أو المحور الرأسي *y*

الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي *x*	الانعكاس بالنسبة للمحور الرأسي *y*
الشرح لتعكس نقطةً بالنسبة للمحور الأفقي *x*، اضرب الإحداثي الرأسي *y* الخاص بها بـ -1.	**الشرح** لتعكس نقطةً بالنسبة للمحور الرأسي *y*، اضرب الإحداثي الأفقي *x* الخاص بها بـ -1.
الرموز $(x, y) \rightarrow (x, -y)$	**الرموز** $(x, y) \rightarrow (-x, y)$
مثال 	**مثال** 

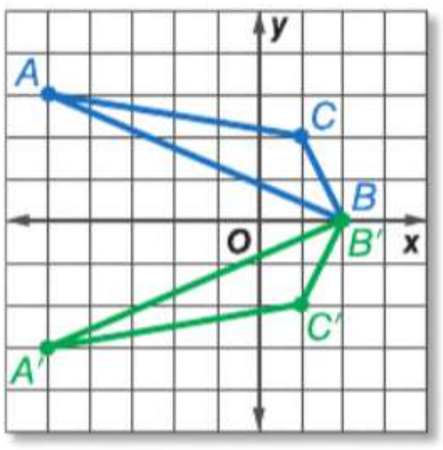
قراءة في الرياضيات

الرمز الإحداثي للدالة يمكن قراءة التعبير $P(a, b) \rightarrow P'(a, -b)$ على النحو: *النقطة P التي إحداثياها a و b رُبطت بموقعٍ جديد P إحداثياه a وناقص b.*

مثال 4 انعكاس شكلٍ بالنسبة للمحور الإحداثي *x* أو المحور الإحداثي *y*

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق الانعكاس المعطى.

a. المثلث *ABC* $\triangle$ ذو الرؤوس $A(-5, 3)$ و $B(2, 0)$ و $C(1, 2)$ بالنسبة للمحور الأفقي *x*



اضرب الإحداثي الرأسي *y* لكل رأس بـ -1.

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$A(-5, 3) \rightarrow A'(-5, -3)$

$B(2, 0) \rightarrow B'(2, 0)$

$C(1, 2) \rightarrow C'(1, -2)$

b. متوازي الأضلاع *PQRS* ذو الرؤوس $P(-4, 1)$ و $Q(2, 3)$ و $R(2, -1)$ و $S(-4, -3)$ بالنسبة للمحور الرأسي *y*

اضرب الإحداثي الأفقي *x* لكل رأس بـ -1.

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$

$P(-4, 1) \rightarrow P'(4, 1)$

$Q(2, 3) \rightarrow Q'(-2, 3)$

$R(2, -1) \rightarrow R'(-2, -1)$

$S(-4, -3) \rightarrow S'(4, -3)$

نصيحة دراسية

النقاط الثابتة في المثال 4a، تدعى النقطة *B* *بالنقطة الثابتة* لأنها ترتبط بنفسها فقط. وإن النقاط التي تقع على خط الانعكاس تبقى ثابتةً عند الانعكاس بالنسبة لهذا المستقيم.

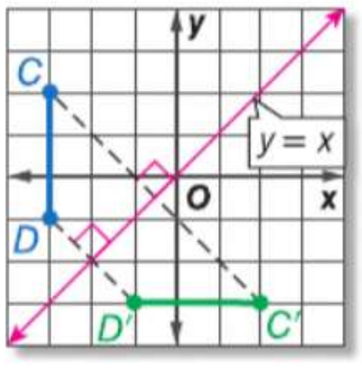
تمرين موجّه

4A. المستطيل ذو الرؤوس $E(-4, -1)$ و $F(2, 2)$ و $G(3, 0)$ و $H(-3, -3)$ بالنسبة للمحور الأفقي *x*

4B. المثلث *JKL* $\triangle$ ذو الرؤوس $J(3, 2)$ و $K(2, -2)$ و $L(4, -5)$ بالنسبة للمحور الرأسي *y*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

يمكنك أيضا عكس صورةٍ بالنسبة للمستقيم $y = x$.



ميل المستقيم $y = x$ يساوي 1. وفي التمثيل البياني المبيّن $\overline{CC'}$ عموديٌ على $y = x$، فإن فميله يساوي -1. من النقطة $C(-3, 2)$، تحرّك يمينًا لمسافة 2.5 وحدةً وإلى الأسفل لمسافة 2.5 وحدةً لتصل إلى $y = x$. ومن هذه النقطة على المستقيم $y = x$، تحرّك يمينًا لمسافة 2.5 وحدة وإلى الأسفل لمسافة 2.5 وحدة لتحدد النقطة $C'(2, -3)$. وباستخدام طريقة مشابهة، تجد أن صورة النقطة $D(-3, -1)$ هي النقطة $D'(-1, -3)$.

تعطي مقارنة إحداثيات هذه الأمثلة وغيرها القاعدة التالية للانعكاس بالنسبة للمستقيم $y = x$.

مراجعة المصطلحات

المستقيمات المتعامدة

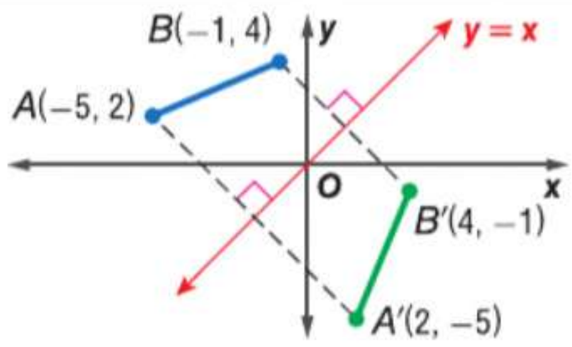
يكون مستقيمان غير رأسيان متعامدين فقط وفقط إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1.

المفهوم الأساسي انعكاس بالنسبة للمستقيم $y = x$

الشرح لعكس نقطةٍ بالنسبة للمستقيم $y = x$، بدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (y, x)$

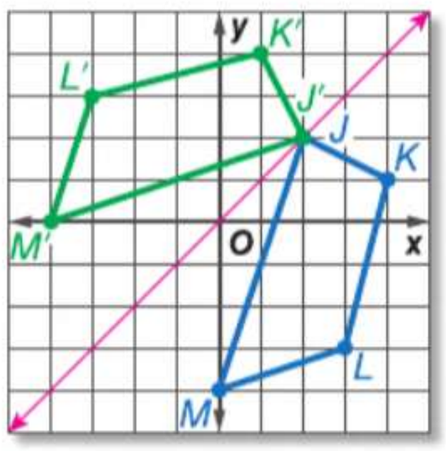
مثال



مثال 5 انعكاس شكلٍ بالنسبة للمستقيم $y = x$

للشكل الرباعي $JKLM$ الرؤوس $J(2, 2)$، $K(4, 1)$، $L(3, -3)$، $M(0, -4)$. مثّل $JKLM$ بيانيًا وصورته $J'K'L'M'$ بالنسبة للمستقيم $y = x$.

بدّل بين إحداثيات x و y لكل رأس.



$(x, y) \rightarrow (y, x)$

$J(2, 2) \rightarrow J(2, 2)$

$K(4, 1) \rightarrow K'(1, 4)$

$L(3, -3) \rightarrow L'(-3, 3)$

$M(0, -4) \rightarrow M'(-4, 0)$

نصيحة دراسية

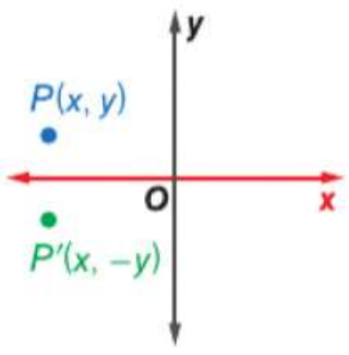
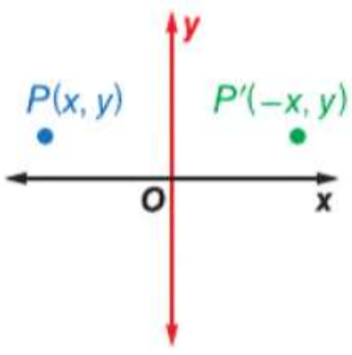
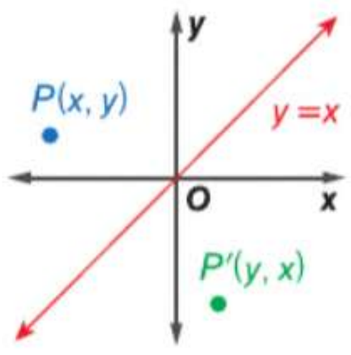
الصورة الأصلية وصورتها

سنعتمد في هذا الكتاب دائما اللون الأزرق للصورة الأصلية واللون الأخضر لصورتها المحوّلة.

تمرين موجّه

5. للمثلث BCD الرؤوس $B(-3, 3)$ و $C(1, 4)$ و $D(-2, -4)$. مثّل بيانيًا المثلث BCD وصورته بالنسبة للمستقيم $y = x$.

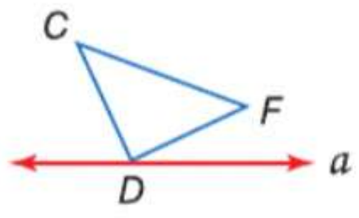
ملخص المفهوم الانعكاس في المستوى الإحداثي

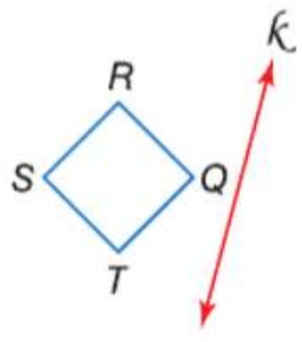
الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x	الانعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y	انعكاس بالنسبة لمستقيم $y = x$
		
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$

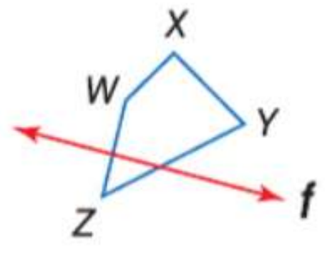
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

التحقق من فهمك

مثال 1 انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا الخط باستخدام مسطرة.

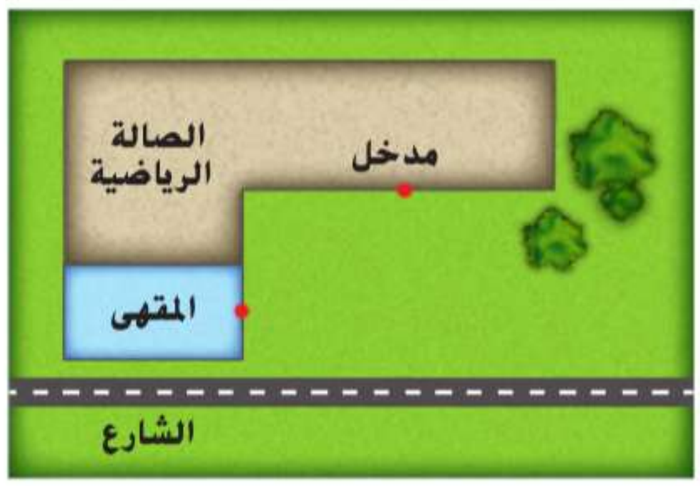
1.


2.


3.


مثال 2

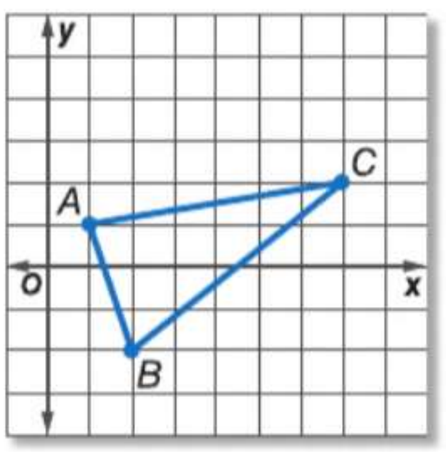
4. **الأحداث الرياضية** ينتظر أحمد في المقهى أن يحضر له صديقه بطاقةً لحضور حدثٍ رياضي بسعرٍ مخفض. فعند أي نقطة P على طول الطريق يتعين على الصديق إيقاف سيارته لتقليل المسافة التي على أحمد أن يسيرها من المقهى إلى السيارة ومن ثم إلى مدخل الصالة إلى الحدّ الأدنى؟ ارسم مخططا.



مثال 3 **مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ وصورته بالنسبة للمستقيم المعطى.**

5. $y = -2$

6. $x = 3$



المثالان 4–5 **مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته مما يلي وفق عملية الانعكاس المعطاة.**

7. المثلث $\triangle XYZ$ الذي رؤوسه $X(0, 4)$ و $Y(-3, 4)$ و $Z(-4, -1)$ بالنسبة للمحور y

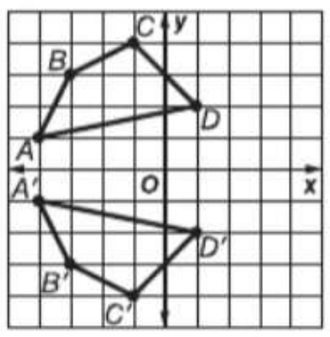
8. متوازي الأضلاع $\square QRST$ الذي رؤوسه $Q(-1, 4)$ و $R(4, 4), S(3, 1)$ و $T(-2, 1)$ بالنسبة للمحور الأفقي x

9. الشكل الرباعي $JKLM$ الذي رؤوسه $J(-3, 1)$ و $K(-1, 3)$ و $L(1, 3)$ و $M(-3, -1)$ بالنسبة للمستقيم $y = x$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

التدريب وحل المسائل

10. يعرض الشكل الموضح الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ في المستوى. فأي عبارةٍ يمكن استخدامها لتحديد نوع التحويل الذي حدث؟



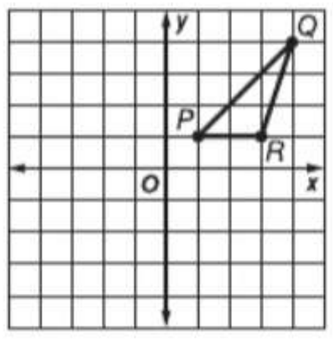
A ميل $\overline{AB} = 2$؛ ميل $\overline{B'C'} = -\frac{1}{2}$؛ بما أن قيمتي الميلين سالبتان، فالتحويل هو دوران بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة.

B إن صورة كل من النقاط A و B و C و D هي انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x. فإن فالتحويل هو انعكاس.

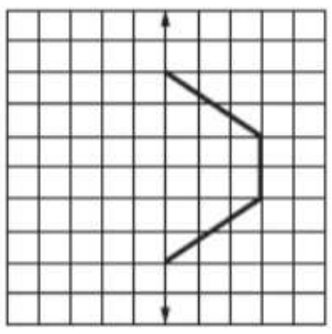
C بما أن B' تبعد ست نقاط أسفل B. فالتحويل هو إزاحةٌ لمسافة ست وحدات إلى الأسفل.

D $CD = 2\sqrt{2}$ و $C'D' = 2\sqrt{2}$؛ بما أن $CD = C'D'$. فالتحويل هو تغييرٌ للأبعاد بمعامل يساوي 1.

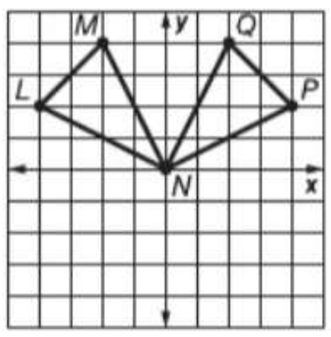
12. إذا انعكس المثلث PQR بالنسبة للمحور الأفقي x ليصبح المثلث $P'Q'R$. فماذا سيكون إحداثيا النقطة Q'؟



14. **الهندسة** توضح الشبكة أدناه ثلاث قطعٍ مستقيمة. ارسم ثلاث قطعٍ مستقيمةٍ أخرى لإتمام سداسي أضلاعٍ متماثلٍ بالنسبة للمستقيم الرأسي.



11. المثلث PQN △ هو تحويل للمثلث LMN △. فما العبارة التي تثبت أن التحويل هو انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y؟



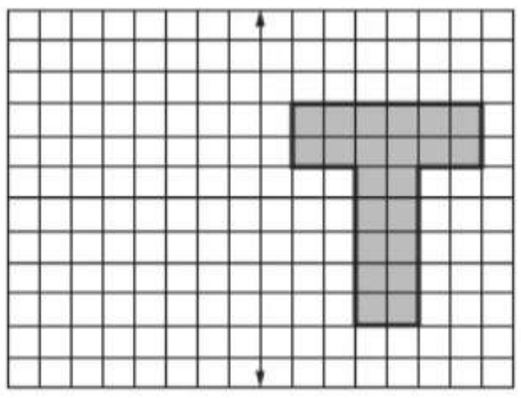
A ميل $\overline{MN}$ • ميل $\overline{NP} = -1$

B ميل $\overline{LN}$ • ميل $\overline{QN} = -1$

C صورة كل نقطة (x, y) هي $(-x, y)$.

D $\overline{MN} \cong \overline{QN}$

13. **الهندسة** ارسم شكلاً إلى يسار المستقيم بحيث يكون الشكل المعطى والشكل الذي رسمته متماثلين بالنسبة لذلك المستقيم.



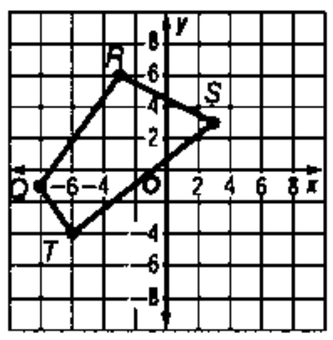
15. في الرسم التخطيطي، حوِّلَ الشكل الرباعي $ABCD$ إلى الشكل الرباعي $PQRS$.

فما الصورة الأصلية لـ $\overleftrightarrow{PS}$؟

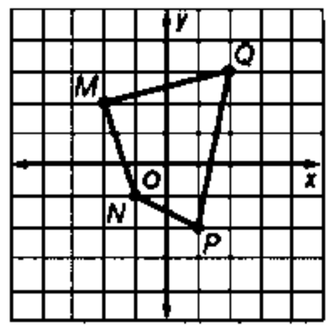
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

16. يعرض الشكل أدناه الشكل الرباعي $QRST$.

إذا انعكس الشكل الرباعي $QRST$ بالنسبة للمحور الأفقي x ومن ثمّ بالنسبة للمحور الرأسي y ليشكل شكل رباعي $Q''R''S''T''$. فماذا سوف يكون إحداثيا T''؟

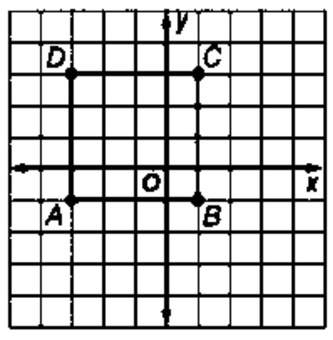


17. يعرض الشكل التمثيل البياني لـ $MNPQ$. ماذا سوف يكون إحداثيا Q' إذا ما انعكس الشكل الرباعي بالنسبة للمحور الأفقي x؟

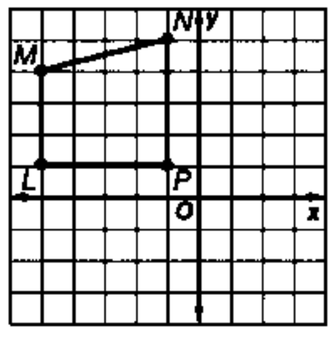


18. يوضح الشكل أدناه المربع $ABCD$.

إذا انعكس المربع $ABCD$ بالنسبة للمحور y. فماذا سيكون إحداثيا D'؟



19.



إذا انعكس شبه المنحرف $LMNP$ بالنسبة للمحور الرأسي y. فماذا سيكون إحداثيا L'؟

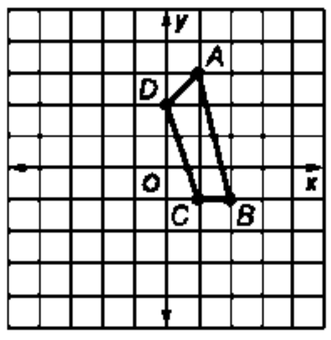
20. للمثلث $\triangle ABC$ الرؤوس $A(0, 6)$ و $B(2, 1)$ و $C(-3, 4)$. فإذا ما انعكس الشكل بالنسبة للمحور الأفقي x ليعطي $\triangle WXY$. فماذا ستكون إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle WXY$؟

21. يريد إسماعيل أن يعكس المستطيل $HIJK$ ذا الرؤوس $H(2, 4)$ و $I(5.5, 4)$ و $J(5.5, -1)$ و $K(2, -1)$ بالنسبة للمحور الرأسي y ليشكل المستطيل $LMNP$. فماذا ستكون إحداثيات النقطة L إذا كانت هذه النقطة هي نقطة الانعكاس H؟

22. للمثلث $\triangle UVW$ الرؤوس $U(-3, 1)$ و $V(2, 4)$ و $W(7, 2)$. وللمثلث $\triangle XYZ$ الرؤوس $X(-3, -1)$ و $Y(2, -4)$ و $Z(7, -2)$. فما هو نوع التحويل الذي يمكن استخدامه لربط المثلث $\triangle UVW$ بالمثلث $\triangle XYZ$؟

23. إذا انعكس المثلث $\triangle LMN$ ذو الرؤوس $L(-2, 6)$ و $M(5, 2)$ و $N(-6, -1)$ بالنسبة للمحور الأفقي x. فماذا سيكون إحداثيا L'؟

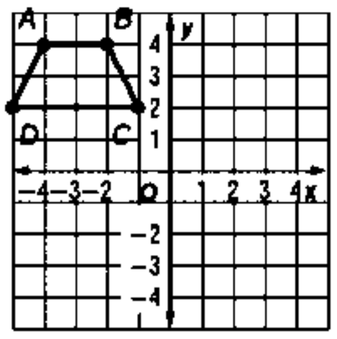
24. يعكس الشكل الرباعي $ABCD$ ذو الرؤوس $A(1, 3)$ و $B(2, -1)$ و $C(1, -1)$ و $D(0, 2)$. $ABCD$ بالنسبة للمستقيم $x = 1$ ليعطي الشكل الرباعي $WXYZ$. فماذا ستكون مجموعة إحداثيات $WXYZ$؟



25. تقع رؤوس مثلث عند النقاط $(1, 0)$ و $(1, -1)$ و $(-1, -1)$. ما هو المستقيم الذي إذا ما انعكس المثلث بالنسبة إليه سيعطي مثلثًا تقع رؤوسه عند النقاط $(0, 1)$ و $(-1, 1)$ و $(-1, -1)$؟

26. للمثلث $\triangle ABC$ الرؤوس $A(0, 6)$ و $B(2, 1)$ و $C(-3, 4)$. فإذا انعكس الشكل بالنسبة للمحور الأفقي x ليعطي المثلث $\triangle WXY$. فماذا ستكون إحداثيات المثلث $\triangle WXY$؟

27. ما هما إحداثيا النقطة B' إذا انعكس شبه المنحرف $ABCD$ بالنسبة للمحور الرأسي y؟

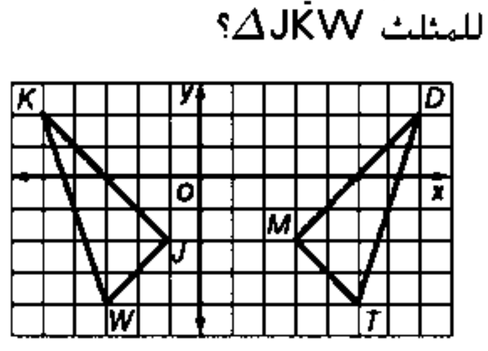


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

28. أيٌّ مما يلي هي نقطة انعكاس النقطة $E(-7, 1)$ بالنسبة للمحور الأفقي x؟

29. للمثلث ΔABC الرؤوس $A(-3, 1)$ و $B(1, 5)$ و $C(7, 0)$. فما هي إحداثيات الصورة $\Delta A'B'C'$ بموجب انعكاس المثلث الأصلي بالنسبة للمستقيم $y = x$؟

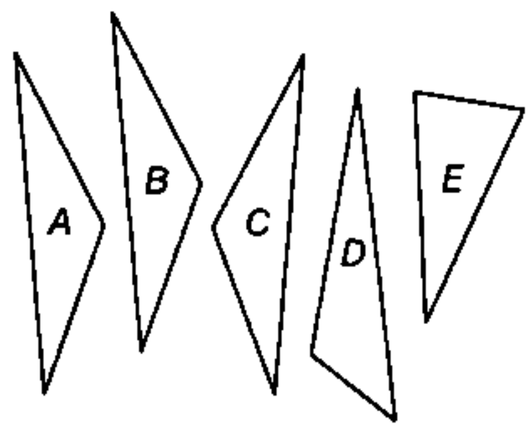
30. ما هو المستقيم الذي يعدّ المثلث ΔMDT بالنسبة إليه انعكاسا للمثلث ΔJKW؟



31. ما هو انعكاس النقطة $P(-3, 10)$ بالنسبة للمستقيم $y = x$؟

32. ما هما المستقيمان الذي تعدّ بالنسبة إليهما القطعة المستقيمة التي نقطتاها الطرفيتان هما $P''(10, 0)$ و$Q''(12, 4)$ نتيجةً لانعكاس مضاعف للقطعة المستقيمة التي نقطتاها الطرفيتان هما $P(0, 0)$ و $Q(2, 4)$؟

33. أيٌّ من الأشكال التالية يبدو أنه انعكاس للشكل A بالنسبة لمستقيمٍ ما؟



34. أيٌّ من العبارات التالية صحيحة؟

A إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الرأسي y، فإن إحداثيي الصورة هما $P''(x, -y)$.

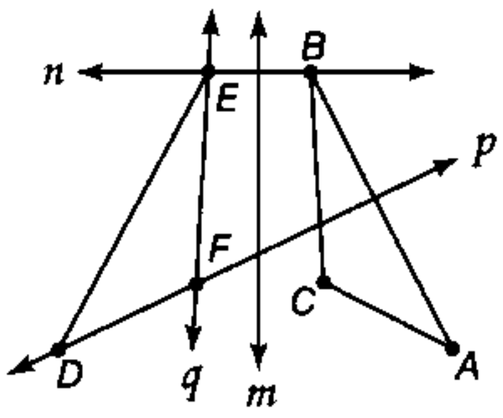
B إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الرأسي y، فإن إحداثيي الصورة هما $P''(y, -y)$.

C إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الرأسي y، فإن إحداثيي الصورة هما $P''(x, y)$.

D إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الأفقي x، فإن إحداثيي الصورة هما $P''(x, -y)$.

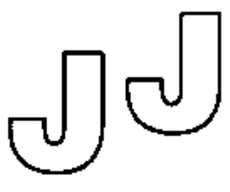
35. بناءً على أحد التحويلات. يكون لسداسي الأضلاع $PQRSTU$ الصورة $ABRSCD$. فأي من التحويلات التالية يعطي ذلك؟

36. ما هو المستقيم الذي معكوس المثلث ΔDEF بالنسبة إليه هو المثلث ΔABC؟

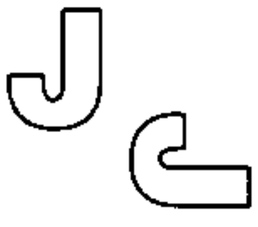


37. ما الصورة التي تمثل انعكاسا؟

A

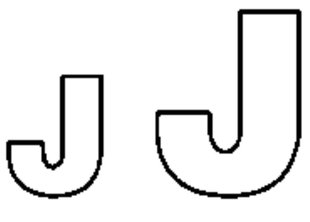


C



B

D



38. أي من النقاط التالية هي انعكاس للنقطة $L(-2, -9)$ بالنسبة للمحور الرأسي y؟

A $L'(-9, -2)$

B $L'(2, 9)$

C $L'(2, -9)$

D $L'(-9, -2)$

39. بموجب الانعكاس الانزلاقي $R_{x=0} \rightarrow T_{x, y}$ ، فإن صورة $A(1, 3)$ هي $A'(-1, 6)$. فما قيمتا x و y؟

A $x = -2$ و $y = 3$

B $x = 0$ و $y = 3$

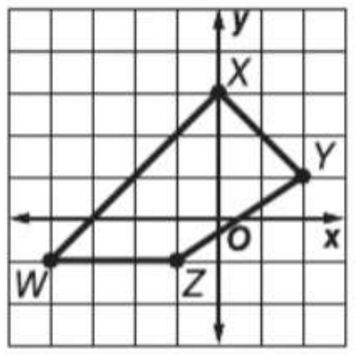
C $x = 3$ و $y = -2$

D $x = 3$ و $y = 0$

McGraw-Hill Education مؤسسة
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

تدريب على الاختبار المعياري

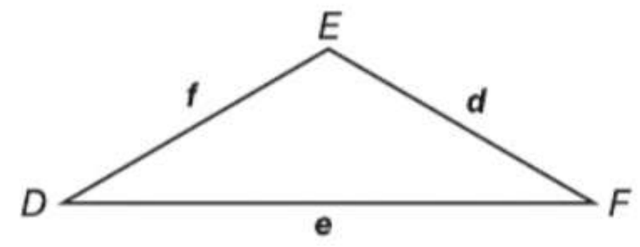
40. الإجابة القصيرة إذا انعكس الشكل الرباعي $WXYZ$ بالنسبة للمحور الرأسي y ليعطي الشكل الرباعي $W'X'Y'Z'$. فما إحداثيا X'؟



41. الجبر إذا كان الوسط الحسابي للأعداد $6x$ و $3x$ و 27 هو 18. فما قيمة x؟

A 2
B 3
C 5
D 6

42. في المثلث DEF، لدينا $m\angle E = 108$، $m\angle F = 26$، و $f = 20$. جـــد طول d مقربًا إلى أقرب عددٍ كلّي.



F 26 G 33 H 60 J 65

43. SAT/ACT في مستوى إحداثي، للنقطتين A و B الإحداثيان $(-2, 4)$ والإحداثيان $(3, 3)$، على الترتيب. فما قيمة AB؟

A $\sqrt{50}$
B $(1, 7)$
C $(5, -1)$
D $(1, -1)$
E $\sqrt{26}$

مراجعة شاملة

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90$

44. إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$، جـــد $\sin \theta$.

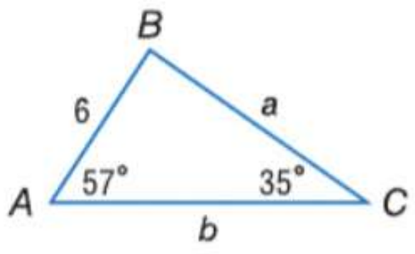
45. وإذا كان $\tan \theta = 2$، فجـــد $\cot \theta$.

46. إذا كان $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$، جـــد $\cos \theta$.

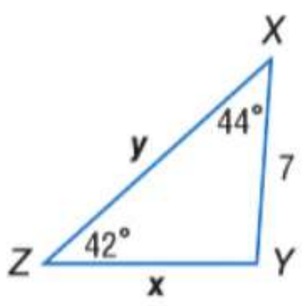
47. وإذا كان $\csc \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$، فجـــد $\tan \theta$.

حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

48.



49.



50. الهندسة الإحداثية في المثلث LMN، تقسم القطعة المستقيمة $\overline{PR}$ الضلعين $\overline{NL}$ و $\overline{MN}$ إلى أطوال متناسبة. فإذا كانت إحداثيات الرؤوس على النحو $N(8, 20)$ و $P(11, 16)$ و $R(3, 8)$ و $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$، جـــد إحداثيات L و M.

حُلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

51. Sin $\theta = -0.58$

52. Cos $\theta = 0.32$

53. Tan $\theta = 2.7$

مراجعة المهارات

جـــد مقدار كل متجه واتجاهه.

54. $\overrightarrow{RS}$: $R(-3, 3)$ و $S(-9, 9)$

55. $\overrightarrow{FG}$: $F(-4, 0)$ و $G(-6, -4)$

56. $\overrightarrow{JK}$: $J(8, 1)$ و $K(2, 5)$

57. $\overrightarrow{AB}$: $A(-1, 10)$ و $B(1, -12)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

10-2 الإزاحة

السابق:
- لقد وجدت مقادير متجهات واتجاهاتها

الحالي:
1 رسم الإزاحة.

2 رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي.

لماذا:
- إن تقنية الرسوم المتحركة هي تقنية يحرّك فيها جسمٌ بمقادير صغيرة جدًا بين صورٍ ملتقطةٍ كل على حدة. وعند تشغيل سلسلة من الصور على هيئة سلسلةٍ مستمرة، ينتج خداعٌ حركي.

المفردات الجديدة

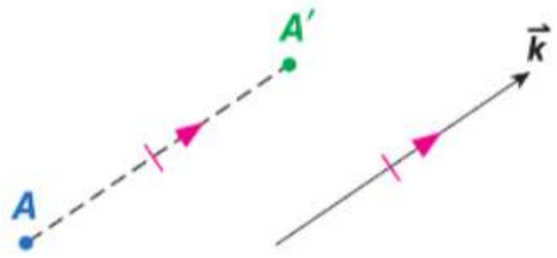
متّجه الإزاحة
translation vector

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 رسم الإزاحة تعلّمت سابقًا أن الإزاحة أو الانزلاق تحويلٌ يحرّك جميع نقاط شكلٍ المسافة نفسها في الاتجاه نفسه. وبما أنه يمكن استخدام متجهات لوصف المسافة والاتجاه، فيمكن استخدام متّجهات لتعريف الإزاحة.

المفهوم الأساسي الإزاحة

الإزاحة هي دالةٌ تربط كل نقطةٍ بصورتها على طول متجهٍ يدعى **متجه الإزاحة**. بحيث:
- يكون لكل قطعة مستقيمة تربط نقطةً بصورتها طول المتجه نفسه. و
- تكون هذه القطعة المستقيمة موازيةً للمتجه أيضا.



النقطة A' هي إزاحةٌ للنقطة A على طول متّجه الإزاحة $\vec{k}$.

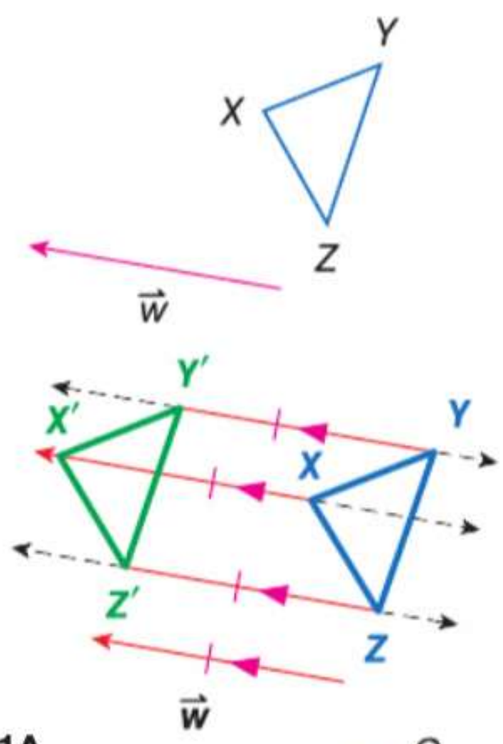
مثال 1 رسم الإزاحة

انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.

الخطوة 1 ارسم مستقيما عبر كل رأس بحيث يوازي المتجه $\vec{w}$

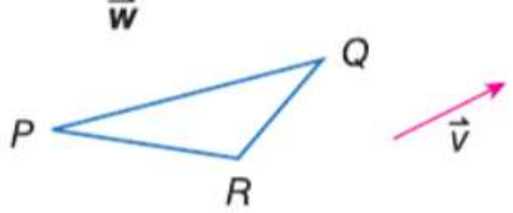
الخطوة 2 قِس طول المتجه $\vec{w}$. وحدّد النقطة X' عبر تحديد هذه المسافة على طول المستقيم المار بالرأس X والذي مبدؤه هو النقطة X واتجاهه هو اتجاه المستقيم نفسه.

الخطوة 3 كرر الخطوة 2 لتحديد نقطتين Y' و Z'. ثم اربط الرؤوس X' و Y' و Z' لتشكيل الصورة المزاحة.

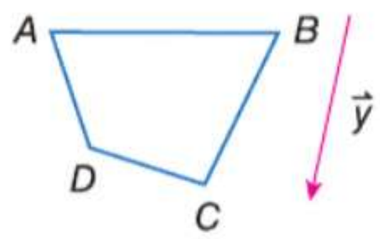


تمرين موجّه

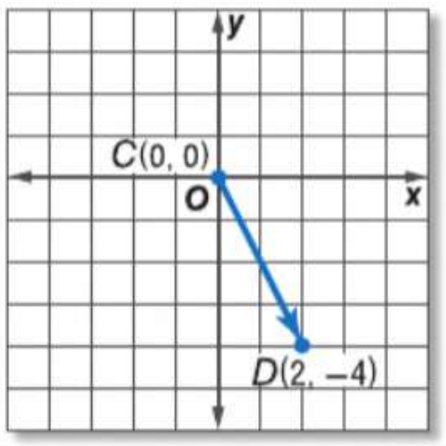
1A.



1B.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



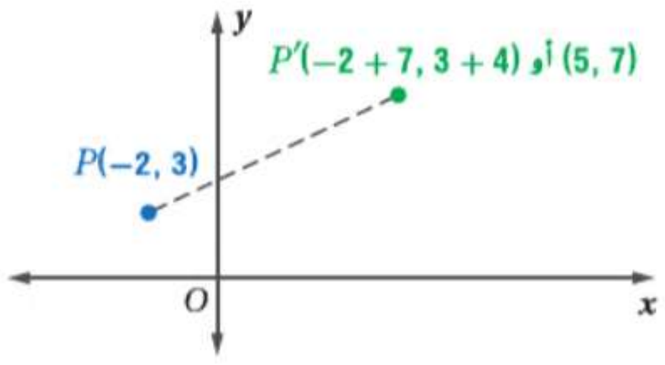
2 رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي تذكر أن أيّ متجهٍ في المستوى الإحداثي يمكن أن يكتب في الصورة $\langle a, b \rangle$. حيث a يمثل التغير الأفقي و b هو التغير الرأسي من رأس المتّجه إلى ذيله. $\overline{CD}$ ممثّلة بالزوج المرتّب $\langle 2, -4 \rangle$.

يمكن استخدام المتجهات وفق هذه الصيغة المدعوة بالصورة المركبة لإزاحة شكلٍ في المستوى الإحداثي.

قراءة في الرياضيات

الإزاحة الأفقية والرأسية عندما يكون متجه الإزاحة من الصيغة $\langle a, 0 \rangle$، فإن الإزاحة تكون أفقيةً فقط. وعندما يكون متجه الإزاحة من الصيغة $\langle 0, b \rangle$، فإن الإزاحة تكون رأسيةً فقط.

المفهوم الأساسي الإزاحة في المستوى الإحداثي



الشرح لإزاحة نقطةٍ على طول المتّجه $\langle a, b \rangle$، اجمع a بالإحدائي x و b بالإحدائي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$

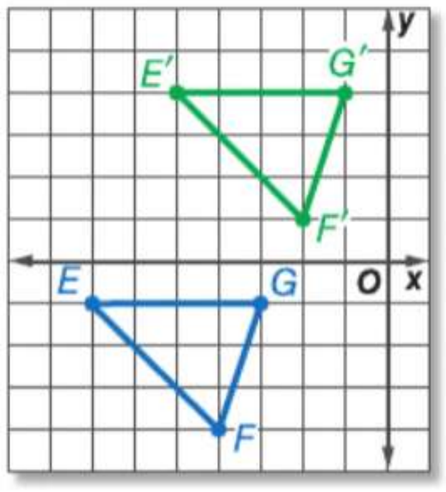
مثال صورة النقطة $P(-2, 3)$ المزاحة على طول المتّجه $\langle 7, 4 \rangle$ هي $P'(5, 7)$.

الإزاحة هي شكلٌ آخر من تحويل التطابق أو تساوي الأبعاد.

مثال 2 الإزاحة في المستوى الإحداثي

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته على طول المتجّه المعطى.

a. المثلث EFG ذو الرؤوس $E(-7, -1)$ و $F(-4, -4)$ و $G(-3, -1)$؛ $\langle 2, 5 \rangle$



يشير المتجه إلى إزاحةٍ لمسافة C وحدتين يمينًا و 5 وحدات إلى الأعلى.

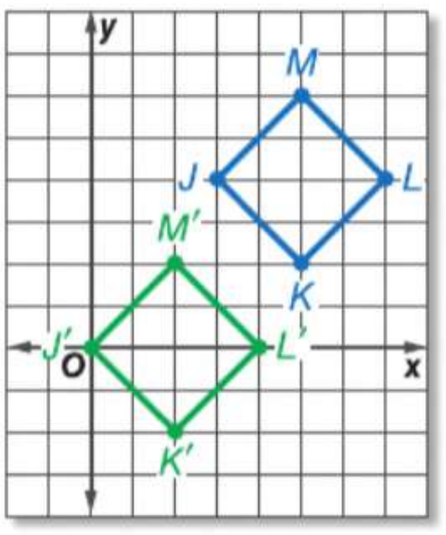
$(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 5)$

$E(-7, -1) \rightarrow E'(-5, 4)$

$F(-4, -4) \rightarrow F'(-2, 1)$

$G(-3, -1) \rightarrow G'(-1, 4)$

b. المربع $JKLM$ ذو الرؤوس $J(3, 4)$ و $K(5, 2)$ و $L(7, 4)$ و $M(5, 6)$؛ $\langle -3, -4 \rangle$



يشير المتجه إلى إزاحةٍ لمسافة 3 وحدات يسارًا و 5 وحدات إلى الأسفل.

$(x, y) \rightarrow (x + (-3), y + (-4))$

$J(3, 4) \rightarrow J'(0, 0)$

$K(5, 2) \rightarrow K'(2, -2)$

$L(7, 4) \rightarrow L'(4, 0)$

$M(5, 6) \rightarrow M'(2, 2)$

تمرين موجّه

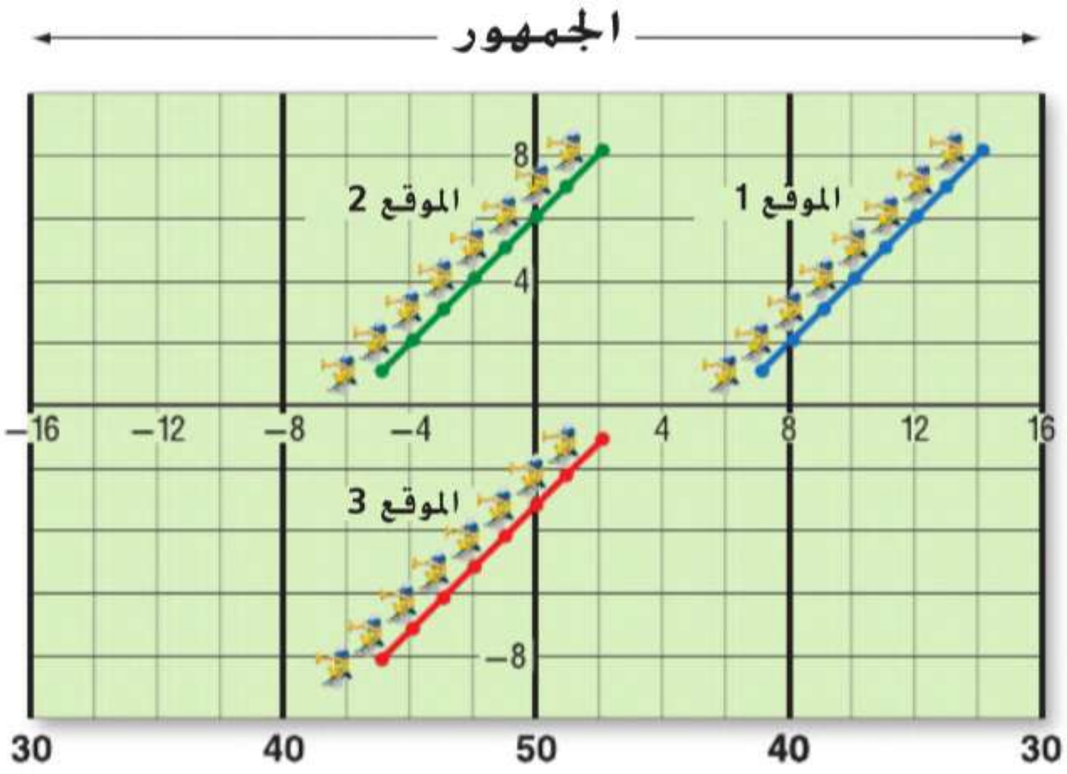
2A. المثلث ABC ذو الرؤوس $A(2, 6)$ و $B(1, 1)$ و $C(7, 5)$؛ $\langle -1, -4 \rangle$

2B. الشكل الرباعي $QRST$ ذو الرؤوس $Q(-8, -2)$ و $R(-9, -5)$ و $S(-4, -7)$ و $T(-4, -2)$؛ $\langle 7, 1 \rangle$

McGraw-Hill Education مؤسسة للصالح © محفوظة والتأليف الطبع حقوق

مثال 3 من الحياة اليومية وصف الإزاحة

الفرقة الموسيقية خلال إحدى فقرات عرض فرقةٍ موسيقيةٍ عسكرية. يبدأ نافخو البوق بالعزف عند الموقع 1، ثم يسيرون إلى الموقع 2، ومن ثمّ إلى الموقع 3. وتمثل كل وحدة على التمثيل البياني خطوة واحدة.



a. صِف إزاحة خط نافخي البوق من الموقع 1 إلى الموقع 2 باستخدام رمز الدالة وبالكلمات.

إحدى النقاط الواقعة على المستقيم في الموقع 1 هي (14, 8). وفي الموقع 2، تتحرك هذه النقطة إلى (28, 8) استخدم دالة الإزاحة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ لإعادة حل المعادلات من أجل إيجاد a و b.

$(14 + a, 8 + b)$ أو (28, 8)

$14 + a = 2$ $\qquad$ $8 + b = 8$

$a = -12$ $\qquad$ $b = 0$

رمز الدالة: $(x, y) \rightarrow (x + (-12), y + 0)$

إذًا، يزاح خط نافخي البوق 12 خطوة يسارًا ولكنه لا يزاح أي خطوة إلى الأمام أو الخلف من الموقع 1 إلى الموقع 2.

b. صف إزاحة خط نافخي البوق من الموقع 1 إلى الموقع 3 باستخدام متجه إزاحة.

$(14 + a, 8 + b)$ أو (2, −1)

$14 + a = 2$ $\qquad$ $8 + b = -1$

$a = -12$ $\qquad$ $b = -9$

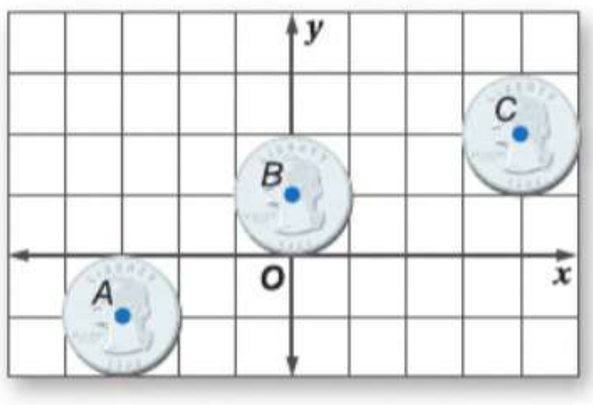
متّجه الإزاحة: $\langle -12, -9 \rangle$

الربط بالحياة اليومية

غالبًا ما تستخدم الفرق الموسيقية العسكرية سلسلةً من التشكيلات التي تضم أشكالاً هندسية. ويحدّد لكل عضو في الفرقة موقعٌ محددٌ في كل نوعٍ من التشكيلات. *الحركة العائمة* هي حركة مجموعة من الأعضاء معاً دون أن يغيروا شكل تشكيلتهم أو حجمها.

تمرين موجّه

3. **الرسوم المتحركة** يجري إعداد مقطعٍ لقطعةٍ نقديةٍ باستخدام تقنية الرسوم المتحركة بحيث تبدو وكأنها تتحرك.



A. صف الإزاحة من A إلى B بواسطة رمز الدالة وبالكلمات.

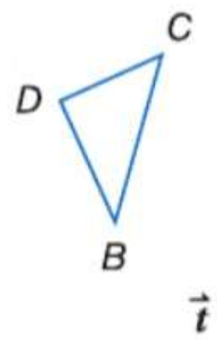
B. صف الإزاحة من A إلى C باستخدام متجه إزاحة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

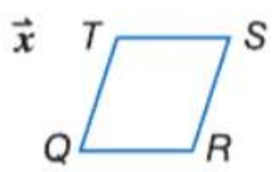
التحقق من فهمك

مثال 1 **انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.**

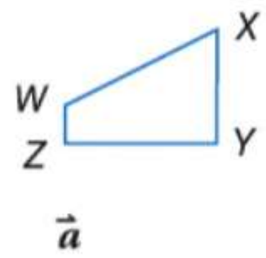
1.



2.



3.



مثال 2 **مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته على طول المتجّه المعطى.**

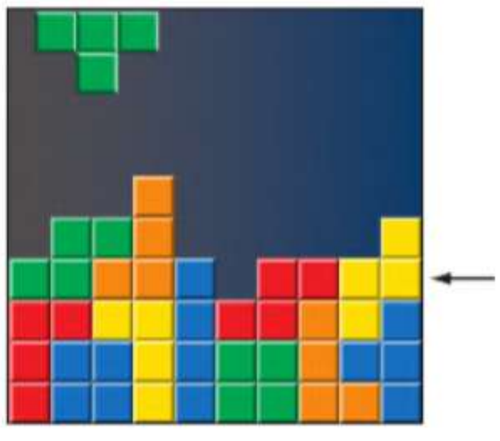
4. شبه المنحرف $JKLM$ ذو الرؤوس $J(2, 4)$ و $K(1, 1)$ و $L(5, 1)$ و $M(4, 4)$؛ $\langle 7, 1 \rangle$

5. المثلث $\triangle DFG$ ذو الرؤوس $D(-8, 8)$ و $F(-10, 4)$ و $G(-7, 6)$؛ $\langle 5, -2 \rangle$

6. متوازي الأضلاع $WXYZ$ ذو الرؤوس $W(-6, -5)$ و $X(-2, -5)$ و $Y(-1, -8)$ و $Z(-5, -8)$؛ $\langle -1, 4 \rangle$

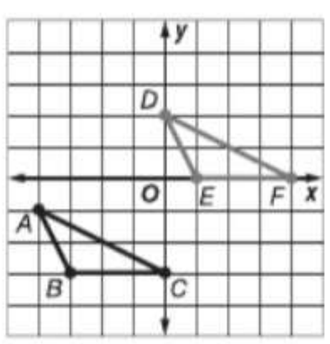
مثال 3

7. **ألعاب الفيديو** الهدف من لعبة الفيديو المبينة هو تحريك المكعبات الملونة يمينًا أو شمالا حالما تسقط من أعلى الشاشة حتى يملأ كل صف دون ترك أي فراغات. فإذا كان موقع البداية للمكعب الموجود في أعلى الشاشة هو (x, y). استخدم رمز الدالة لوصف الإزاحة التي تملأ الصف المحدد.



التدريب وحل المسائل

8. يوضح الشكل المثلث ABC وصورته الممثلة بالمثلث DEF. فأي عبارة مما يلي تصف نوع التحويل الذي وقع؟



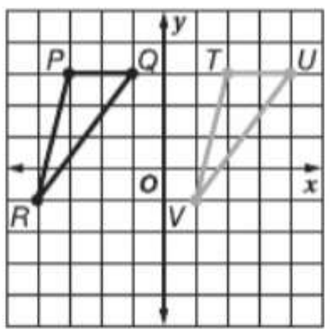
A ميل $\overline{AC}$ = ميل $\overline{DF}$؛ بما أن الميل هو نفسه، فالتحويل هو دوران.

B تنعكس كل من النقاط A و B و C بالنسبة للمحور الأفقي x.

C في كلٍ من النقاط A و B و C، يزاد كل إحداثي أفقي x بمقدار 4 وحدة، ويزاد كل إحداثي رأسي y بمقدار 3 وحدات. إذًا، فالتحويل عبارة عن إزاحة.

D بما أن $BC \neq DF$، فالتحويل هو تغييرٌ للأبعاد بمعامل مقياس يساوي 1.

9. يوضح الشكل المثلث PQR وصورته TUV. فأي عبارةٍ مما يلي تصف نوع التحويل الذي وقع؟



A بما أن كلاً من الإحداثيات الأفقية x للنقاط P و Q و R تزاد بمقدار 5. فالتحويل هو إزاحة.

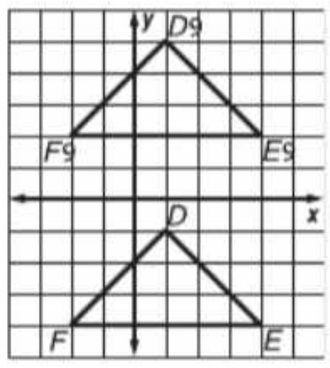
B صورة كلٍ من النقاط P و Q و R هي انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y.

C $R = (-4, -1)$; $U = (4, 3)$؛ بما أن الإحداثيات الأفقية x متعاكسة. فالتحويل هو انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x.

D بما أن $QR = UV$، فالتحويل هو تغييرٌ للأبعاد بمعامل مقياس يساوي 1.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10. في الشكل الموضح، يتشكل المثلث $D'E'F'$ e عبر إضافة 6 وحدات إلى الإحداثي الرأسي y لكل رأس في المثلث DEF. المصطلح الأفضل لوصف المثلث $D'E'F'$ هو



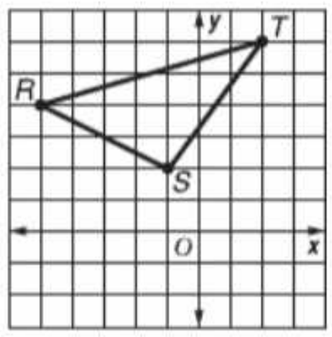
A دورانٌ للمثلث $\triangle DEF$.

B انعكاس للمثلث $\triangle DEF$.

C مثلث مشابه للمثلث $\triangle DEF$.

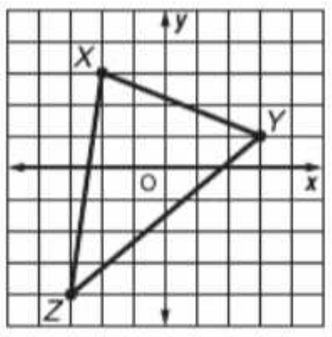
D مثلث مطابق للمثلث $\triangle DEF$.

11. للمثلث RST الإحداثيات $R(-5, 4)$ و $T(2, 6)$ و $S(-1, 2)$. فماذا سيكون الإحداثيان الجديدان للنقطة T إذا أزيح المثلث لمسافة 3 وحدات يمينًا و 5 وحدات إلى الأسفل



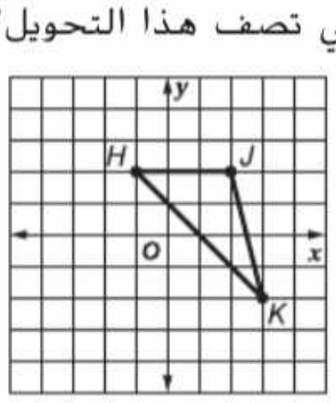
12. توضح الشبكة الإحداثية المثلث $\triangle XYZ$.

إذا أزيح المثلث $\triangle XYZ$ بحيث تقع النقطة X على المحور الرأسي y والنقطة Y عند $(5, -3)$، فما الإحداثيان الجديدان للنقطة Z؟



13. يزاح المثلث HJK المبيّن أدناه بحيث تكون الإحداثيات الجديدة لرؤوسه هي $H'(-2, 4)$ و $J'(1, 4)$ و $K'(2, 0)$.

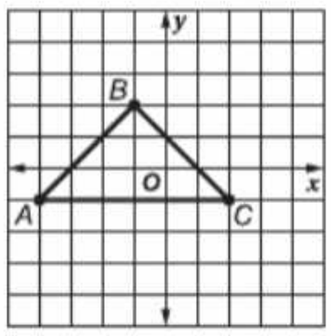
ما العبارة التي تصف هذا التحويل؟



14. لمتوازي الأضلاع $ABCD$ الرؤوس $A(-3, 0)$ و $B(-1, 3)$ و $C(-1, -2)$ و $D(-3, -5)$. فإذا أزيح الشكل مسافة 4 وحدات يمينًا ووحدتين إلى الأعلى، فما إحداثيا الرأس B'؟

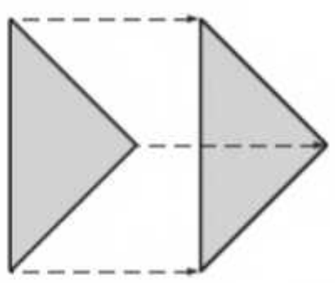
15. نريد إزاحة المثلث ABC إلى $\triangle A'B'C'$ باستخدام القاعدة التالية. $(x, y) \rightarrow (x - 2, y + 3)$

ماذا سيكون إحداثيا النقطة B'؟



16. للمثلث $\triangle ABC$ الرؤوس $A(0.5, 8)$ و $B(7.5, 7)$ و $C(4.2, 2)$. فما هي مجموعة إحداثيات رؤوس الصورة الناتجة عن إزاحة المثلث $\triangle ABC$ 3.5 وحدات إلى الأسفل؟

17. ما التحويل الموضح في الشكل من بين التحويلات التالية؟



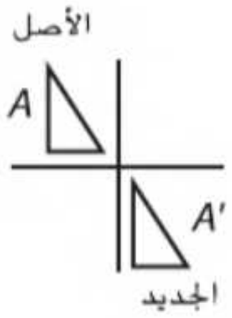
18. ما الرسم التخطيطي الذي يوضح إزاحة الشكل A؟

A

B

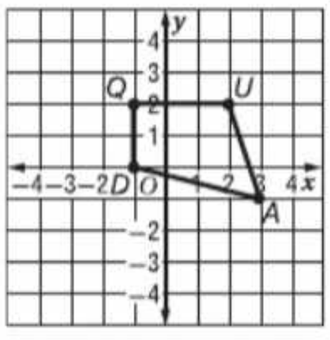
C

D



19. للشكل الرباعي $QUAD$ الرؤوس الموضحة في المستوى الإحداثي أدناه.

ما التحويل الذي سيضع رأسين عند $(5, 2)$ و $(1-, 6)$؟



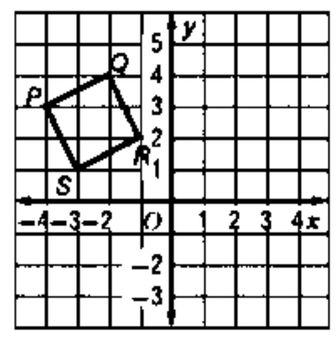
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

20. رؤوس المثلث $\triangle LMN$ هي $L(5, 6)$ و $M(2, 0)$ و $N(-8, 8)$. فإذا أزيح الشكل وكان للصورة رؤوس تقع عشوائيًا عند $(0, -2)$ و $(6, 1)$ و $(8, -12)$. إذًا فما القاعدة التي تصف الإزاحة؟

21. للمثلث قائم الزاوية GHI الرؤوس $G(0, 0)$ و $H(3, 0)$ و $I(0, 4)$. يحوّل المثلث بحيث يكون لـ H' الإحداثيان $(3, 2)$. فماذا يمكن أن يكون التحويل المطبّق على $\triangle GHI$؟

22. يزاح المربع $PQRS$ المبين أدناه إلى المربع $P'Q'R'S'$ عبر اتّباع قاعدة الحركة التالية.

$$(x, y) \longrightarrow (x + 2, y - 6)$$

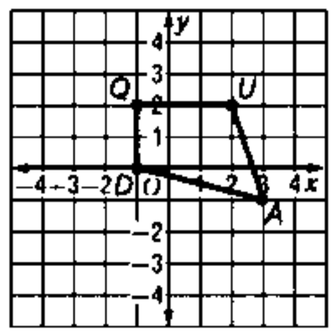


ماذا سيكون إحداثيا النقطة الرأس P'؟

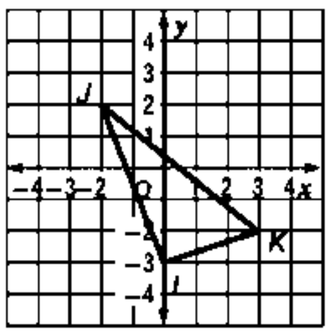
23. لمتوازي الأضلاع $ABCD$ الرؤوس $A(-3, 0)$ و $B(-1, 3)$ و $C(-1, -2)$ و $D(-3, -5)$. فإذا أزيح الشكل مسافة 4 وحدات يمينًا ووحدتين إلى الأعلى، فما إحداثيا الرأس B'؟

24. يزاح الشكل الرباعي $QUAD$ لمسافة وحدات يسارًا و 3 وحدات إلى الأعلى.

فما إحداثيا الرأس A'؟

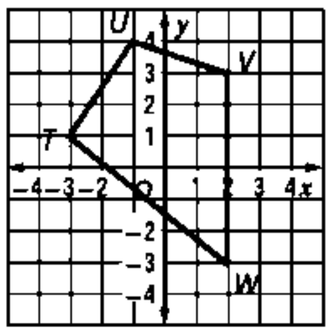


25. يزاح المثلث $\triangle JKL$ مسافة 3 وحدات يسارًا ووحدتين إلى الأعلى ليعطي المثلث $\triangle JK'L'$. فما إحداثيات الرؤوس؟



26. للمثلث $\triangle LMN$ الرؤوس $L(5, 6)$ و $M(2, 0)$ و $N(-8, 8)$. فإذا أزيح الشكل، وكانت الرؤوس الجديدة هي $L'(1, 6)$ و $M'(-2, 0)$ و $N'(-12, 8)$. فما القاعدة التي تصف التحويل؟

27. يزاح الشكل الرباعي $TUVW$ بحيث تكون الرؤوس الجديدة هي $T'(-1, 0)$ و $U'(1, 3)$ و $V'(4, 2)$. فما إحداثيا W'؟



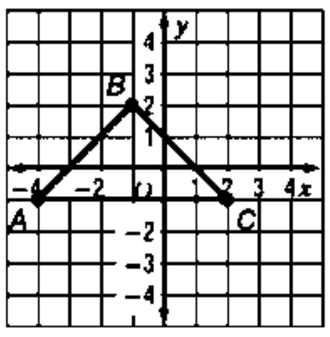
A $(0, -3)$ C $(4, -3)$

B $(0, -4)$ D $(4, -4)$

28. نريد إزاحة المثلث $\triangle ABC$ إلى $\triangle A'B'C'$ وفق قاعدة الحركة التالية.

$$(x, y) \longrightarrow (x - 2, y + 3)$$

ماذا سيكون إحداثيا النقطة B'؟



29. للشكل الرباعي $ABCD$ الرؤوس $A(-2, 1)$ و $B(-2, 5)$ و $C(3, 5)$ و $D(3, 1)$. فإذا أزيح الشكل الرباعي $ABCD$ لمسافة 6 وحدات إلى الأسفل و 5 وحدات يمينًا لإعطاء $D'E'F'G'$. فما إحداثيات رؤوس $D'E'F'G'$؟

30. ما إحداثيا الصورة P' الخاصة بالنقطة $P(4, 1)$ وفق التحويل $T_{-3, -3}$؟

31. ما هي الإزاحة التي تنتج بموجبها النقطة $B(-2, 5)$ عن النقطة $A(-7, 8)$؟

32. للمثلث $\triangle RST$ الإحداثيات $R(3, 1)$ و $S(5, 4)$ و $T(7, 11)$. فما إحداثيات رؤوس الصورة $\triangle R'S'T'$. وفق التحويل $T_{-6, 1}$؟

33. ما إحداثيات الصورة H للنقطة $H(-8, 3)$ وفق التحويل $T_{8, 7}$؟

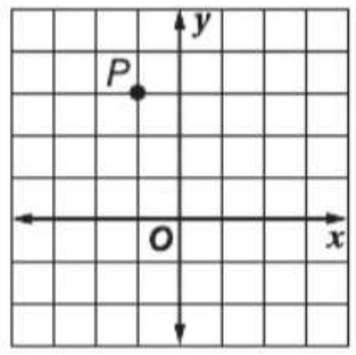
34. ما التحويل الذي ينتج الصورة $P'(-4, 2)$ من النقطة $R(2, -1)$؟

35. ما التحويل الذي يحافظ على المساحة والتوجيه؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

36. حدّد موقع النقطة P وفق الإزاحة $(x + 3, y + 1)$.



A $(0, 6)$ **C** $(2, -4)$
B $(0, 3)$ **D** $(2, 4)$

37. الإجابة القصيرة ما المتّجه الذي يصف على النحو الأمثل إزاحة $A(3, -5)$ إلى $A'(-2, -8)$؟

38. الجبر خلال الأيام الأربعة القادمة، تخطط ميسون لقيادة سيارتها مسافة 160 km و 235 km و 185 km و 220 km. فإذا كانت السيارة تقطع 32 km مقابل كل لترٍ تستهلكه من البنزين، فكم لترًا من البنزين عليها أن تتوقع استهلاكها بالإجمال؟

F 25 **G** 30 **H** 35 **J** 40

39. SAT/ACT يحتوي كيس 5 كرات رخامٍ حمراء وكرتي رخامٍ زرقاوين و 4 كرات رخامٍ بيضاء وكرة رخام صفراء واحدة. فإذا اختيرت كرتا رخامٍ على التوالي دون إعادة، فما احتمال الحصول على كرتي رخامٍ بيضاوين؟

A $\frac{1}{66}$ **C** $\frac{1}{9}$ **E** $\frac{2}{5}$
B $\frac{1}{11}$ **D** $\frac{5}{33}$

مراجعة شاملة

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق الإزاحة المعطاة. (الدرس 1-10)

40. القطعة المستقيمة $\overline{DJ}$ ذات النقطتين الطرفيتين $D(4, 4)$ و $J(-3, 2)$ بالنسبة للمحور الرأسي y

41. المثلث $\triangle XYZ$ ذو الرؤوس $X(0, 0)$ و $Y(3, 0)$ و $Z(0, 3)$ بالنسبة للمحور x

42. المثلث $\triangle ABC$ ذو الرؤوس $A(-3, -1)$ و $B(0, 2)$ و $C(3, -2)$ بالنسبة للمستقيم $y = x$

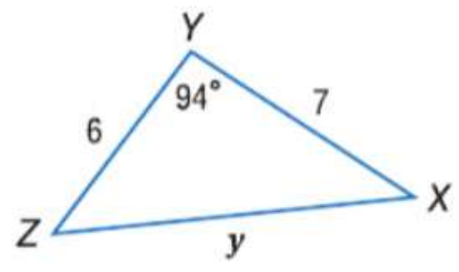
43. الشكل الرباعي $JKLM$ ذو الرؤوس $J(-2, 2)$ و $K(3, 1)$ و $L(4, -1)$ و $M(-2, -2)$ بالنسبة لنقطة الأصل

حُـلّ كل معادلة بحيث $0° \leq \theta \leq 360°$.

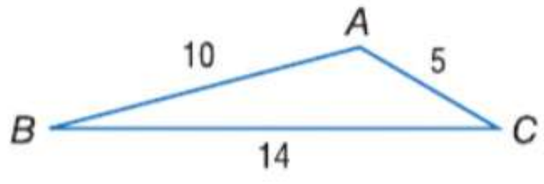
44. $2 \sin \theta = 1$ **45.** $2 \cos \theta + 1 = 0$ **46.** $4 \cos^2 \theta - 1 = 0$

حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

47.



48.

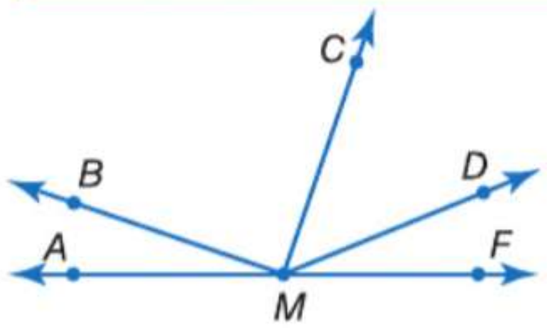


حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

49. $\sin \theta = -0.58$ **50.** $\cos \theta = 0.32$ **51.** $\tan \theta = 2.7$

مراجعة المهارات

انسخ الرسم التخطيطي المبيّن ومدّد كل شعاع. وصنّف كل زاويةٍ على أنها *قائمة* أو *حادّة* أو *منفرجة*. ثم استخدم منقلةً لقياس الزاوية مقربةً إلى أقرب درجة.



52. $\angle AMC$ **53.** $\angle FMD$
54. $\angle BMD$ **55.** $\angle CMB$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

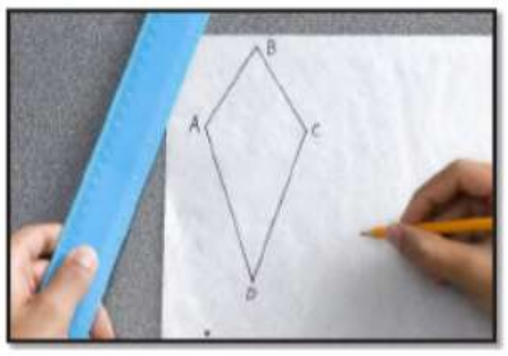
مختبر الهندسة
عمليات الدوران

الدوران هو نوع من التحويل يحرك شكلا حول نقطة ثابتة أو مركزٍ للدوران بزاوية محددة وباتجاه محدد. وفي هذا النشاط، سوف تستخدم ورق الرسم الاستشفافي لاستكشاف خواص الدوران.

النشاط استكشاف العلاقات باستخدام ورق الشمع

الخطوة 1 ارسم على ورقةٍ للرسم الاستشفافي الشكل الرباعي $ABCD$ ونقطة P.

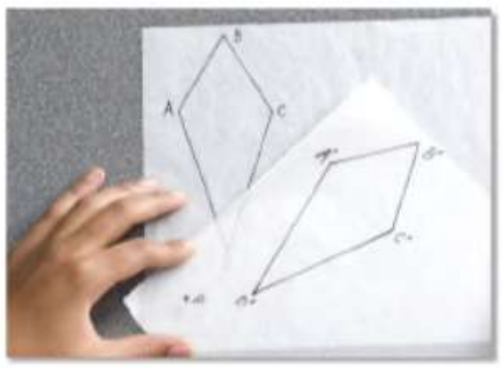
الخطوة 2 وعلى ورقةٍ أخرى للرسم الاستشفافي، ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ ونقطة P استشفافيًا. سمّ الشكل الرباعي الجديد $A'B'C'D'$ والنقطة الجديدة P.



الخطوة 1

الخطوة 3 ضع ورقة الرسم الاستشفافي بحيث تنطبق النقطتان P. دوّر الورقة بحيث لا يتداخل الشكلان $ABCD$ و $A'B'C'D'$. ألصق ورقتي الرسم الاستشفافي معا.

الخطوة 4 قس المسافة بين النقاط A و B و C و D والنقطة P كرّر العملية نفسها بالنسبة للشكل الرباعي $A'B'C'D'$. ثم انسخ الجدول أدناه وأكمله.

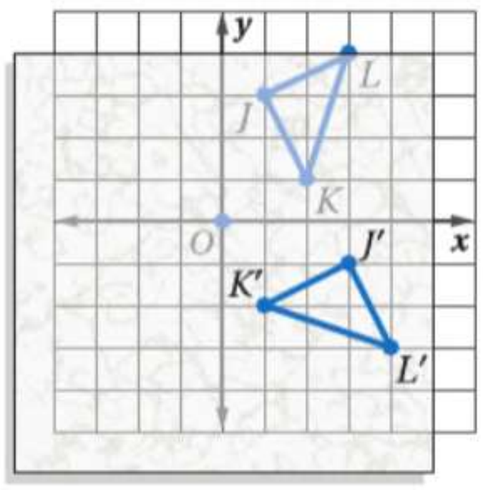


الخطوتان 2 و 3

الشكل الرباعي	الطول			
$ABCD$	AP	BP	CP	DP
$A'B'C'D'$	$A'P$	$B'P$	$C'P$	$D'P$

التمارين

1. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ ذا الرؤوس $J(1, 3)$ و $K(2, 1)$ و $L(3, 4)$ على مستوى إحداثي. ومن ثمّ ارسمه على ورق الرسم الاستشفافي.
   a. استخدم منقلةً لدوران كل رأس بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل وفق ما هو موضح في الشكل على الجهة اليمنى. ما هي رؤوس الصورة المدوّرة؟
   b. دوّر المثلث $\triangle JKL$ بمقدار $180°$ حول نقطة الأصل. ما هي رؤوس الصورة المدوّرة؟
   c. استخدم قانون المسافة لإيجاد المسافة من النقطتين J, K و L إلى نقطة الأصل. وكرّر الأمر نفسه بالنسبة لـ $J'K'L'$ و $J''K''L''$.



2. **الكتابة في الرياضيات** إذا دوّرت النقطة $(4, 2)$ بزاوية $90°$ و $180°$ حول نقطة الأصل. فكيف يتغير الإحداثيان الأفقي x والرأسي y ؟
3. **التنبؤ** ما الإحداثيان الجديدان (x, y) المدوّر بزاوية $270°$؟
4. **التخمين** خمن المسافة من مركز لدوران P إلى كل رأس مقابلٍ في الشكلين الرباعيين $ABCD$ و $A'B'C'D'$.

McGraw-Hill Education Ed-Imaging مؤسسة © محفوظة لصالح والتأليف الطبع حقوق

10-3 الدوران

السابق:
- لقد حدّدت الدوران وأثبتّه على أنه تحويل تطابق.

الحالي:
1 رسم الدوران.
2 رسم الدوران في المستوى الإحداثي.

لماذا؟
- قد تكون تقنية طواحين الهواء الحديثة بديلاً هاما للوقود الأحفوري. وتحول طواحين الهواء طاقة الرياح إلى كهرباءٍ من خلال دوران ريش توربينات.

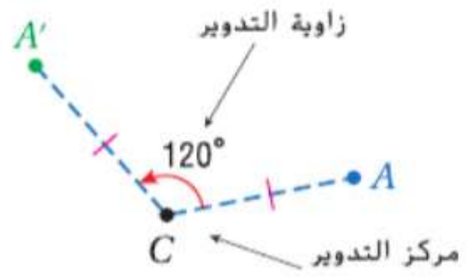
المفردات الجديدة
مركز الدوران
center of rotation
زاوية الدوران
angle of rotation

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

1 رسم الدوران تعلمت سابقًا أن عملية الدوران فالدوران تحرّك جميع نقاط صورةٍ أصليةٍ بزاويةٍ واتجاهٍ محددين حول نقطةٍ ثابتة.

المفهوم الأساسي الدوران

الدوران حول نقطة ثابتة، تدعى **مركز الدوران**، بزاوية $x°$ هو دالةٌ تربط نقطةً بصورتها بحيث:
- إذا كانت النقطة هي مركز الدوران، فإن الصورة والصورة الأصلية هما النقطة نفسها
- إذا لم تكن النقطة مركزَ الدوران، فالصورة والصورة الأصلية تبعدان مسافةً واحدةً عن مركز الدوران، قياس **زاوية الدوران** بين الصورة الأصلية ومركز الدوران وصورة النقطة يساوي القيمة x.



A' هي صورة A بعد دوران بزاوية قياسها 120° حول النقطة C.

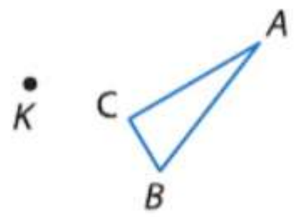
يمكن أن يكون الدوران إما باتجاه دوران عقارب الساعة أو بعكسه. افترض أن جميع الدورانات بعكس اتجاه عقارب الساعة ما لم يذكر خلاف ذلك.

عكس دوران عقارب الساعة

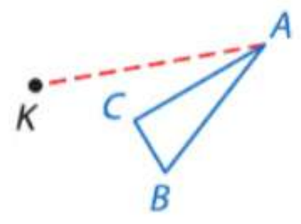
باتجاه دوران عقارب الساعة

مثال 1 رسم الدوران

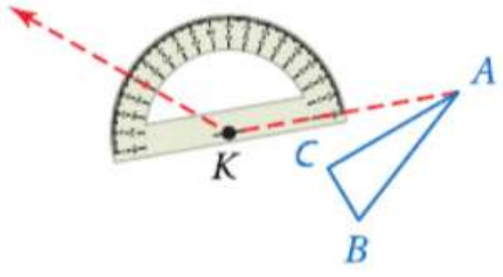
انسخ المثلث $\triangle ABC$ والنقطة K. ثم استخدم منقلة ومسطرة لرسم دوران بزاوية قياسها 140° للمثلث $\triangle ABC$ حول النقطة K.



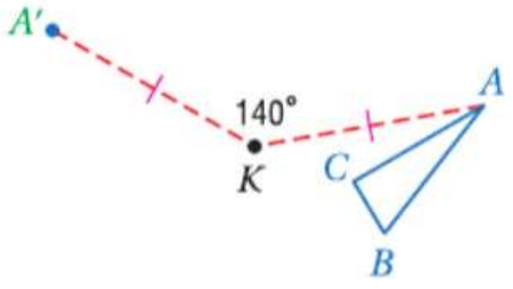
الخطوة 1 ارسم قطعةً مستقيمةً من A إلى K.



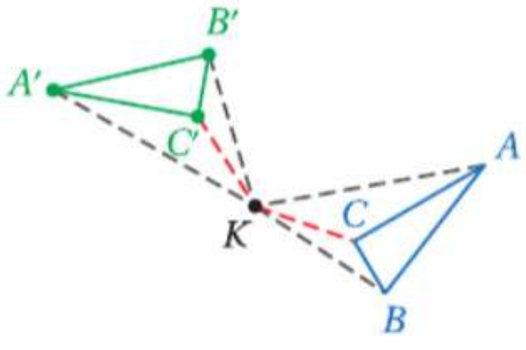
الخطوة 2 ارسم زاويةً قياسها 140° باستخدام $\overline{KA}$.



الخطوة 3 استخدم مسطرةً لرسم A' بحيث تكون $KA' = KA$.



الخطوة 4 كرر الخطوات من 1 إلى 3 بالنسبة للرأسين B و C وارسم المثلث $\triangle A'B'C'$.

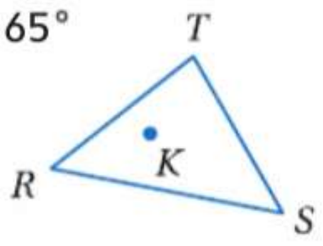


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

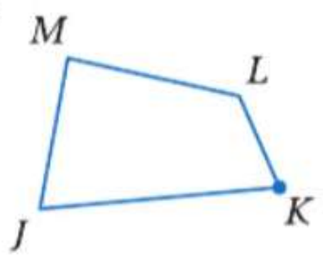
تمرين موجّه

انسخ كل شكل والنقطة K. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم دورانا للشكل وفق العدد المعطى من الدرجات حولَ K.

1A. 65°



1B. 170°



2 رسم الدوران في المستوى الإحداثي

عند دوران نقطةٍ بزاوية 90° أو 180° أو 270° بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل، فيمكنك استخدام القواعد التالية.

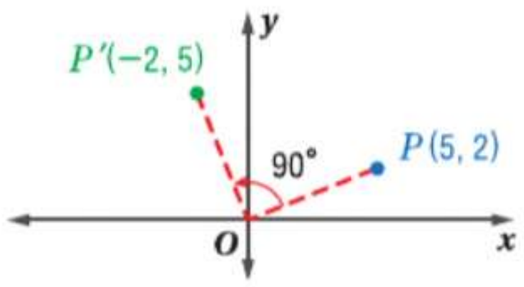
المفهوم الأساسي الدوران في المستوى الإحداثي

الدوران بزاوية 90°

لدوران نقطة بزاوية 90° بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي الرأسي y بـ -1 وبدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

مثال

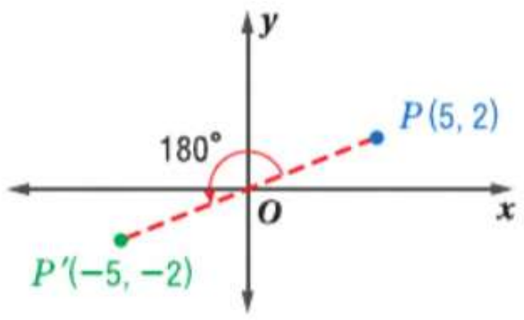


الدوران بزاوية 180°

لدوران نقطة بزاوية 180° بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل، فاضرب الإحداثيين x و y بـ -1.

الرموز $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

مثال

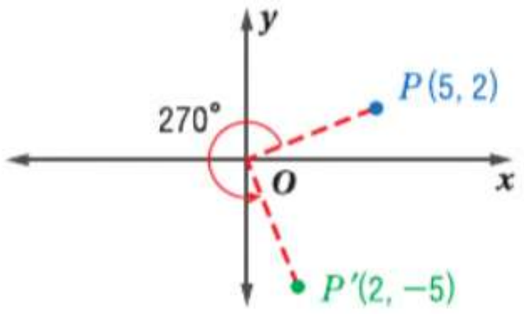


الدوران بزاوية 270°

لدوران نقطة بزاوية 270° بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي الأفقي x بـ -1 وبدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

مثال



مثال 2 الدوران في المستوى الإحداثي

للمثلث PQR الرؤوس $P(1, 1)$ و $Q(4, 5)$ و $R(5, 1)$. مثّل بيانيًا المثلث PQR △ وصورته بعد الدوران بزاوية 90° حول نقطة الأصل.

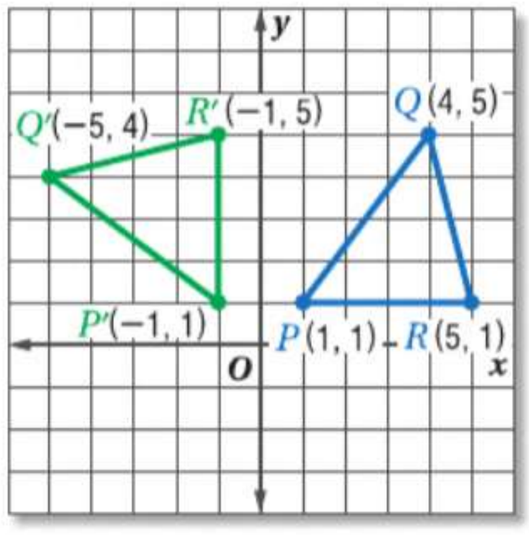
اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس بـ -1 وبدّل.

$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$P(1, 1) \rightarrow P'(-1, 1)$

$Q(4, 5) \rightarrow Q'(-5, 4)$

$R(5, 1) \rightarrow R'(-1, 5)$



مثّل بيانيًا المثلث PQR △ وصورته المثلث $P'Q'R'$ △.

تمرين موجّه

2. لمتوازي الأضلاع $FGHJ$ الرؤوس $F(2, 1)$ و $G(7, 1)$ و $H(6, -3)$ و $J(1, -3)$. مثّل بيانيًا $FGHJ$ وصورته بعد الدوران بزاوية قياسها 180°.

نصيحة دراسية

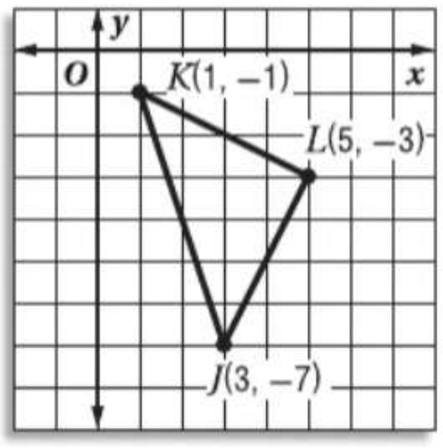
الدوران باتجاه عقارب الساعة يمكن التدليل على الدوران بعكس عقارب الساعة بقياس زاويةٍ سالب، كالدوران بزاوية قياسها $-90°$ حول نقطة الأصل والدوران بزاوية قياسها 90° حول نقطة الأصل على سبيل المثال.

نصيحة دراسية

الدوران بزاوية 360° يعيد الدوران بزاوية قياسها 360° حول نقطةِ الشكل إلى موقعه الأصلي، أي، تساوي الصورة الناتجة عن دورانٍ بزاويةٍ قياسها 360° الصورة الأصلية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 على الاختبار المعياري الدوران في المستوى الإحداثي



ليكن لديك المثلث *JKL* المبيّن على الجهة اليمنى.
ما صورة النقطة *J* بعد دورانٍ بزاوية قياسها 270° بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

A $(-3, -7)$

B $(-7, 3)$

C $(-7, -3)$

D $(7, -3)$

قراءة فقرة الاختبار

من المعلوم لديك أن للمثلث $\triangle JKL$ الإحداثيات $J(3, -7)$ و $K(1, -1)$ و $L(5, -3)$ ويطلب منك تحديد إحداثيات صورة النقطة *J* بعد الدوران بزاوية قياسها 270° بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

حل فقرة الاختبار

لإيجاد إحداثيي النقطة *J* بعد الدوران بزاوية قياسها 270° بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي الأفقي *x* بـ -1 وبدّل بين الإحداثيين الأفقي *x* والرأسي *y*.

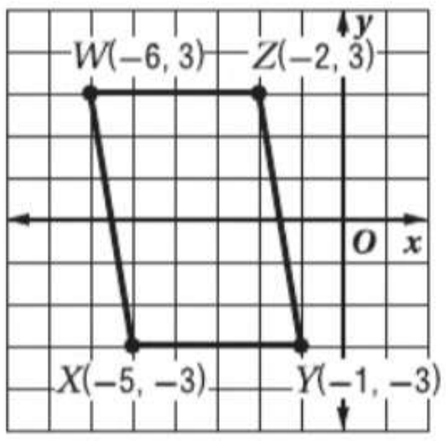
$(3, -7) \rightarrow (-7, -3)$ $\qquad (x, y) \rightarrow (y, -x)$

الإجابة هي الخيار C.

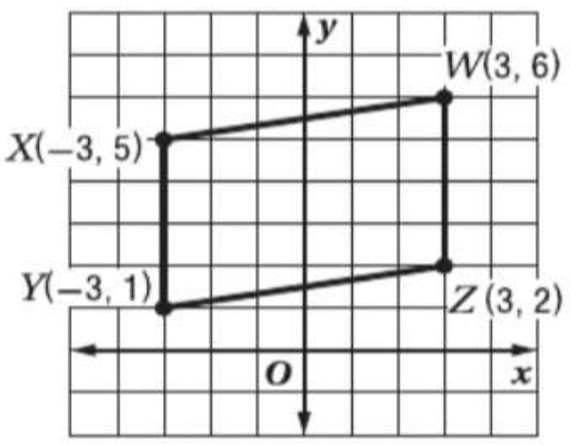
نصيحة دراسية
الدوران بزاوية 270° يمكنك إتمام دورانٍ بزاوية 270° عبر إجراء دورانٍ بزاوية 90° و دورانٍ بزاوية 180° على التسلسل.

تمرين موجّه

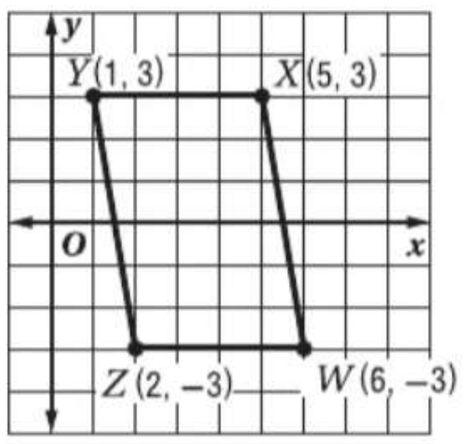
3. يدور متوازي الأضلاع *WXYZ* بزاوية 180° بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل. فأيّ من التمثيلات البيانية يمثّل الصورة الناتجة؟



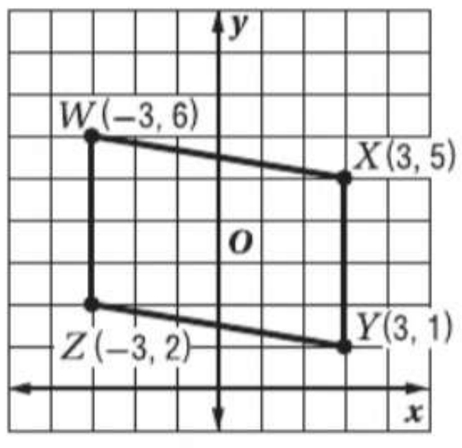
F



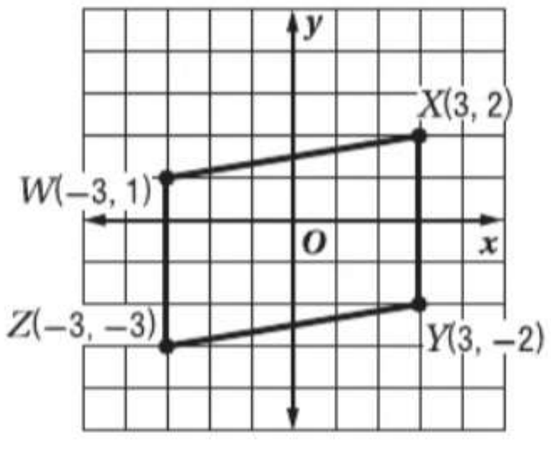
H



G



J



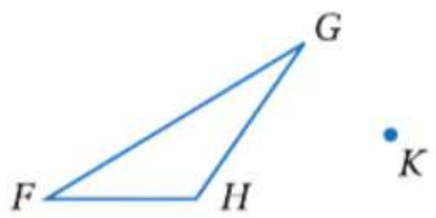
نصيحة عند حل الاختبار
التبرير المنطقي
بدلا من التحقق من رؤوس متوازي الأضلاع *WXYZ* جميعها في كل تمثيلٍ بياني، تحقق من رأس واحدٍ فقط، مثل *X*.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

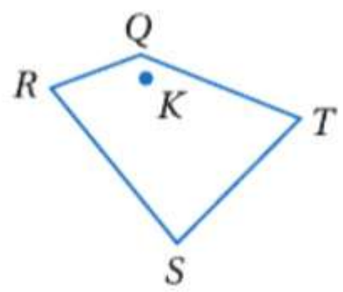
التحقق من فهمك

مثال 1 **الأدوات** **انسخ كل مضلعٍ ونقطة K. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم الدوران المحدد لكل شكل حول النقطة K.**

1. 45°

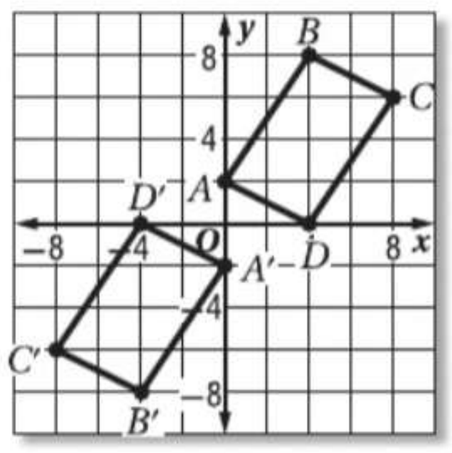


2. 120°



مثال 2 3 للمثلث DFG الرؤوس $D(-2, 6)$ و $F(2, 8)$ و $G(2, 3)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle DFG$ وصورته بعد الدوران بزاوية قياسها 180° حول نقطة الأصل.

مثال 3 4. **الاختيار من متعدد** في التحويل الموضح، ما قياس زاوية الدوران الشكل $ABCD$ حول نقطة الأصل؟



A 90°

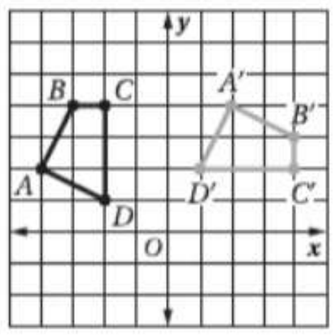
B 180°

C 270°

D 360°

التدريب وحل المسائل

5. يوضح الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ في المستوى. فما العبارات التي تصف نوع التحويل الذي وقع؟



A ميل $\overleftrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}$ ؛ ميل $\overleftrightarrow{D'O} = 2$ ؛ بما أن الميلين معكوسان ضربيان، فالتحويل هو دورانٌ باتجاه عقارب الساعة بزاوية 90°.

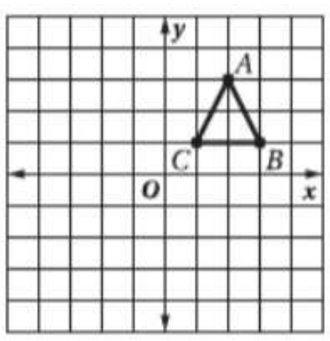
B $C = (-2, 4)$ ؛ $A' = (2, 4)$ ؛ بما أن A' هي صورة C بالنسبة للمحور الرأسي y، فالتحويل هو انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y.

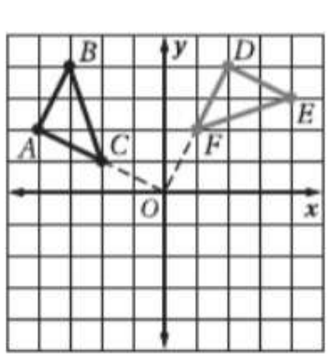
C $A = (-4, 2)$ ؛ $A' = (2, 4)$ ؛ التحويل إزاحةٌ لمسافة 6 وحدات يمينًا ووحدتان إلى الأعلى.

D $CD = 3$ و $B'C' = 1$ ؛ بما أن طول $B'C'$ يساوي ثلث طول $\overline{CD}$، فالتحويل تغيير للأبعاد بمعامل مقياس يساوي $\frac{1}{3}$.

6. المثلث $\triangle DEF$ هو دوران للمثلث $\triangle ABC$ في المستوى.

فما هي العبارة التي تثبت أن زاوية الدوران تساوي 90°؟

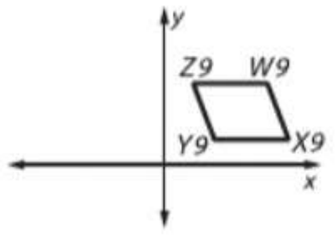




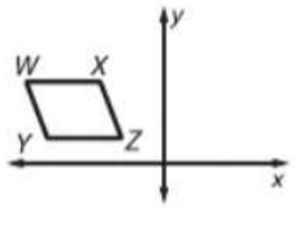
7. إذا أدير المثلث ABC بزاوية 90° باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ليعطي t المثلث $A'B'C'$، فما الإحداثيان الجديدان للرأس A'؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

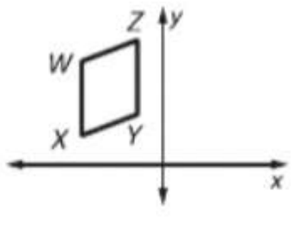
8. ما الصورة الأصلية للشكل الرباعي $W'X'Y'Z'$ التي توضح أن التحويل $WXYZ \rightarrow W'X'Y'Z'$ هو دوران؟



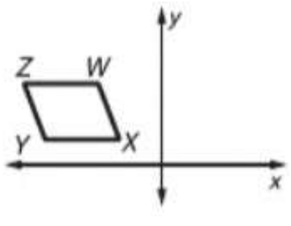
A



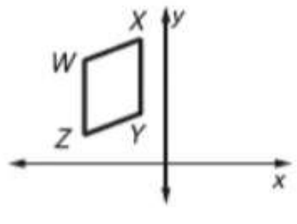
B



C

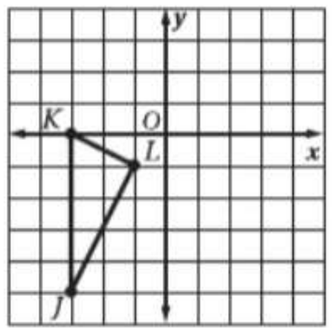


D

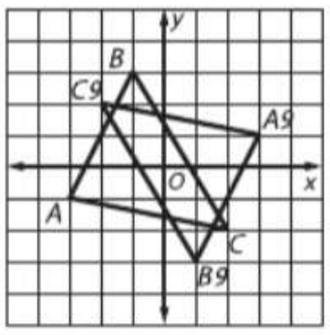


مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

9. المثلث JKL مرسومٌ على المستوى الإحداثي كما هو موضح أدناه. فإذا أدير المثلث $\triangle JKL$ بزاوية قياسها 180° حول نقطة الأصل، فما إحداثيا J'؟



في المستوى الإحداثي المبيّن أدناه، تم دوران المثلث $\triangle ABC$ حول نقطة الأصل بزاوية 180° لتشكيل المثلث $\triangle A'B'C'$.

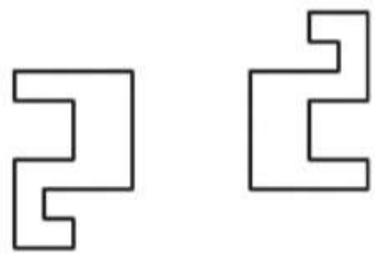


أكمل الجدول أدناه لمقارنة إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle ABC$ بإحداثيات الرؤوس المقابلة في المثلث $\triangle A'B'C'$.

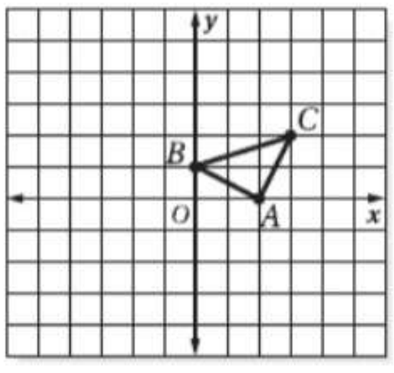
$\triangle ABC$	$\triangle A'B'C'$
A(-3, -1)	A'
B(-1, 3)	B'
C(2, -2)	C'

اختر إحداثيات رؤوس مثلث آخر $\triangle XYZ$ واكتبها في الجدول أدناه. استخدم النمط الذي اكتشفته في الجدول لإيجاد إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle X'Y'Z'$، الذي يمثل صورة المثلث $\triangle XYZ$ بعد الدوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل. اشرح كيف استخدمت النمط لإكمال الجدول أدناه.

10. ما نوع التحويل الذي طبّق على الشكل الأيسر لتشكيل الشكل الأيسر؟



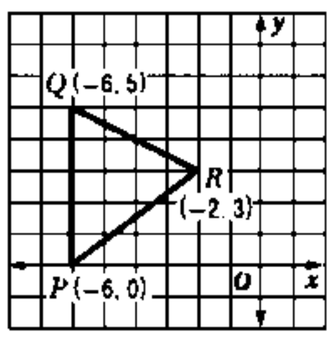
11. إذا أدير المثلث ABC بزاوية قياسها 90° باتجاه دوران عقارب الساعة حول النقطة B، فما إحداثيات B'؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

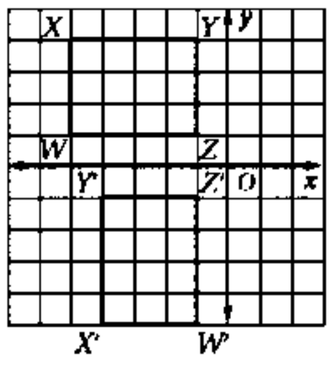
12. للمثلث PQR الرؤوس $P(-6, 0)$ و $Q(-6, 5)$ و $R(-2,3)$ كما هو موضح أدناه.

ما صورة النقطة R بعد الدوران بزاوية قياسها $270°$ حول نقطة الأصل؟

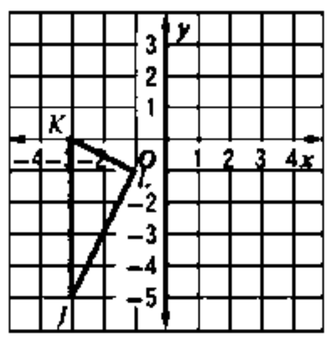


13. انظر إلى التحويل أدناه.

ما قياس زاوية دوران الشكل $WXYZ$ حول نقطة الأصل بعكس اتجاه عقارب الساعة؟



14. إذا أدير المثلث JKL بزاوية قياسها 180 درجة حول نقطة الأصل، فما إحداثيا J'؟



A (5, 3)

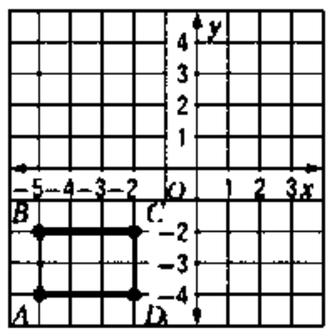
B (3, 0)

C (3, 5)

D (3, −5)

15. للمثلث JKL رؤوس عند النقاط $J(0, 1)$ و $K(2, 3)$ و $L(4, 0)$. فإذا أدير المثلث بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة الأصل، فماذا سيكون إحداثيا K'؟

16. ما إحداثيا النقطة C' إذا دار المستطيل $ABCD$ بزاوية قياسها $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

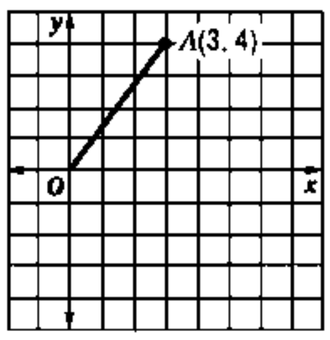


17. ما هي صورة $P(0, 7)$ وفق دوران بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة؟

18. أي مما يلي هي صورة $Q(-3, 0)$ بموجب دوران بزاوية قياسها $90°$ باتجاه عقارب الساعة؟

19. تدار النقطة $R(4, -2)$ حول نقطة الأصل بزاوية قياسها $90°$ وبعكس اتجاه عقارب الساعة. ففي أي ربعٍ ستقع صورة النقطة؟

20. النقطة A هي أحد رؤوس مربعٍ في الرسم التخطيطي الموضح أدناه. يدار المربع بزاويةٍ قياسها $180°$ حول نقطة الأصل. فما إحداثيا A'، التي تمثل صورة A نتيجة الدوران؟



21. ما الدوران حول نقطة الأصل الذي يجعل من النقطة $P'(-6, 1)$ صورةً للنقطة $P(1, 6)$؟

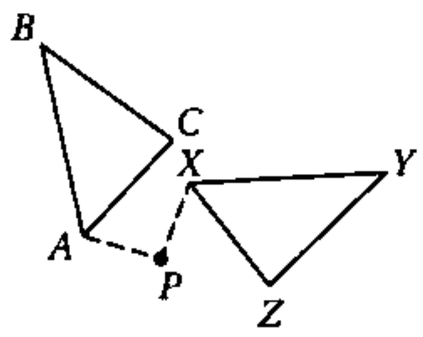
22. صورة النقطة $P(x, y)$ بموجب الدوران حول نقطة الأصل O وبزاوية قياسها $x°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة هي النقطة $P'(x', y')$. فما الدوران حول نقطة الأصل O الذي يمكن بموجبه دوران $P'(x', y')$ بحيث تنتج الصورة $P(x, y)$؟

23. تدار نقطة في الربع الأول بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة. ففي أي ربع ستقع صورة النقطة؟

24. النقطة $P(x, y)$ نقطة تقع في الربع الثاني. ما هو الدوران الذي بموجبه يكون إحداثيا الصورة هما $P(-y, x)$؟

25. ما النقطة التي تمثّل صورة دوران بعكس اتجاه عقارب الساعة وبزاوية $90°$ للنقطة $P(-4.7, 3.5)$ حول نقطة الأصل؟

26. أحد المثلثات هو دورانٌ لمثلث آخر حول P. فأي عبارة مما يلي **ليست** صحيحة؟



A المثلثان متطابقان.

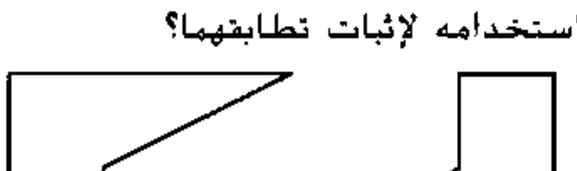
B توجيه أحد المثلثين مختلف عن المثلث الآخر.

C تدار كل من A و B و C بالعدد نفسه من الدرجات لتشكل المثلث ΔXYZ.

D $\angle A \cong \angle X$ و $\angle B \cong \angle Y$ و $\angle C \cong \angle Z$

27. ما هي صورة $P(-5, 12)$ بموجب دوران بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة؟

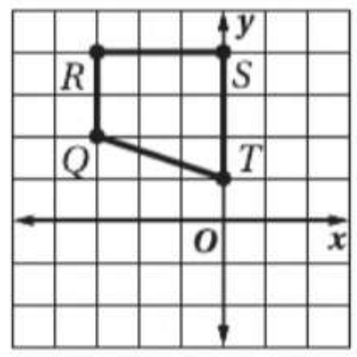
28. المضلعان الموضحان أدناه متطابقان. فما التحويل الذي يمكن استخدامه لإثبات تطابقهما؟



McGraw-Hill Education جميع الحقوق محفوظة

تدريب على الاختبار المعياري

29. ما الدوران الذي يخضع له شبه المنحرف $QRST$ ليعطي صورةً فيها النقطة R' تقع عند $(4, 3)$؟



A دوران بزاوية $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة وحول النقطة T

B دوران بزاوية $180°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة وحول النقطة T

C دوران بزاوية $180°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

D دوران بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

31. **الإجابة القصيرة** للمثلث $\triangle XYZ$ الرؤوس $X(1, 7)$ و $Y(0, 2)$ و $Z(-5, -2)$. فما إحداثيا X' بعد دوران بزاوية قياسها $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

30. **جبريًا** يقدّر أن عدد السكان في الولايات المتحدة الأمريكية عام 2007 تخطى 301,000,000 نسمة. وفي الوقت نفسه، قُدّر أن عدد سكان العالم قد تجاوز 6,602,000,000 نسمة. فما هي النسبة المئوية لعدد سكان الولايات المتحدة إلى عدد سكان العالم في ذلك الوقت؟

F 3.1%
G 3.5%
H 4.2%
J 4.6%

32. **SAT/ACT** يسند سلّم طوله 18 m على الحائط الخارجي لأحد المنازل. تبعد قاعدة السلّم 8 m عن الحائط. فما الارتفاع الذي تبلغه قمة السلّم على حائط المنزل مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

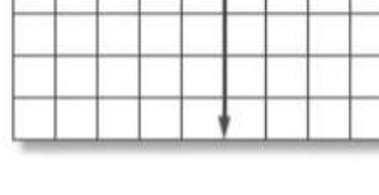
A 10.0 m
B 16.1 m
C 19.7 m
D 22.5 m
E 26.0 m

مراجعة شاملة

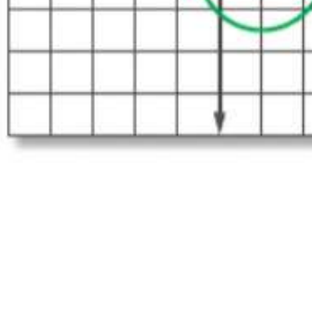
33. **البراكين** تتحرك سحابةٌ من الغازات الكثيفة والغبار صادرةٌ عن أحد البراكين مسافة 6.4 km باتجاه الغرب ومن ثم 4.8 km باتجاه الشمال. صمم تمثيلاً يوضح إزاحة حبيبات الغبار. ثم جد مسافة المسار الأقصر الذي يوصل الحبيبات إلى الموقع نفسه. (الدرس 2-10)

انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة. (الدرس 1-10)

34.



35.

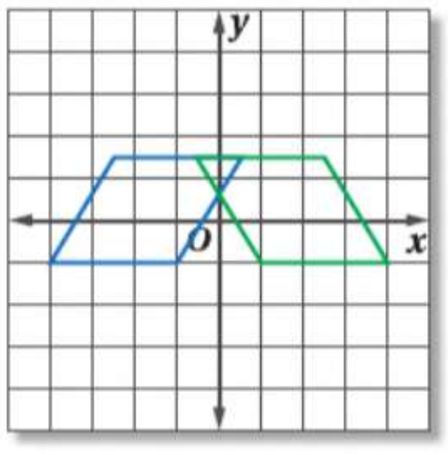


36.

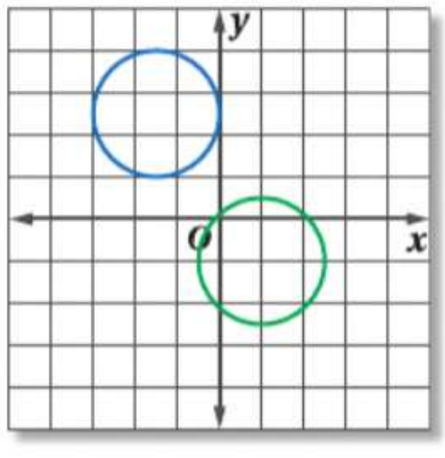
مراجعة المهارات

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا*، أو *إزاحة*، أو *دورانًا*.

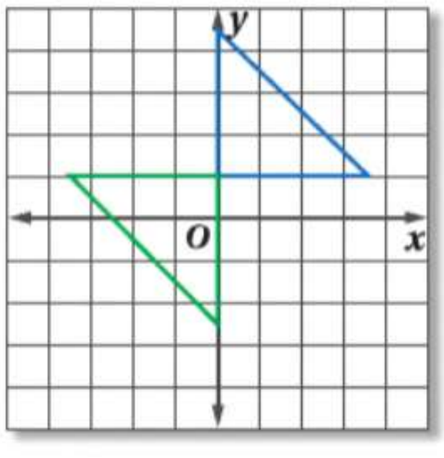
37.



38.



39.



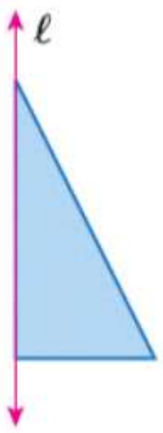
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

10-3 مختبر الهندسة
المجسمات الناتجة عن الدوران

المجسم الناتج عن الدوران هو شكلٌ ثلاثي الأبعاد ينتج عن دوران شكلٍ أو منحنى موجودٍ في مستوى حول مستقيم.

النشاط 1

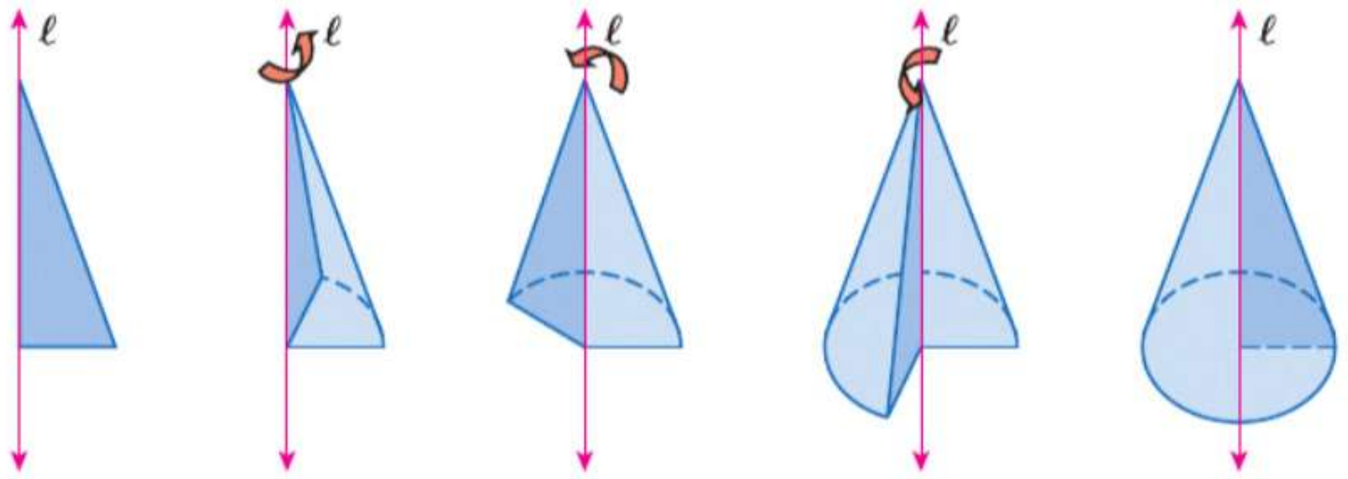
حدّد المجسم المتشكّل من خلال دوران المثلث القائم الموضح حول المستقيم ℓ.



الخطوة 1 انسخ المثلث على بطاقةٍ أو ورق مقوى وقُصه.

الخطوة 2 استخدم شريطا لاصقًا للصق المثلث على قضيب أو قشة للشرب.

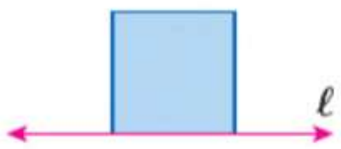
الخطوة 3 دور طرف القشة بين يديك بسرعةٍ وراقب النتيجة.

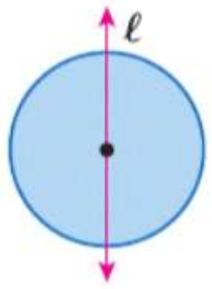


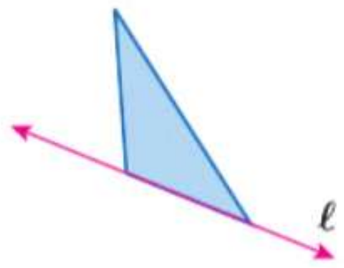
الصورة المشوشة التي تلاحظها هي صورة مخروط.

تمثيل النماذج والتحليل

حدّد المجسم المتشكّل من خلال دوران كل شكل ثنائي الأبعاد مما يلي حول المستقيم ℓ ومثّله.

1. 

2. 

3. 

4. مثّل وحدّد المجسم المتشكل نتيجةً لدوران المستطيل الموضح حول المستقيم المؤلّف من

   a. الضلع $\overline{AB}$.

   b. الضلع $\overline{AD}$.

   c. نقطة منتصف الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$.

5. **التصميم** ارسم شكلاً ثنائي الأبعاد يمكن دورانه لتشكيل الإناء الموضح، بما في ذلك المستقيم الذي ينبغي الدوران حوله.

6. **التبرير** *صواب* أو *خطأ*: يمكن أن تتشكل جميع المجسمات عبر دوران شكلٍ ثنائي الأبعاد. اشرح استنتاجك

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر الهندسة

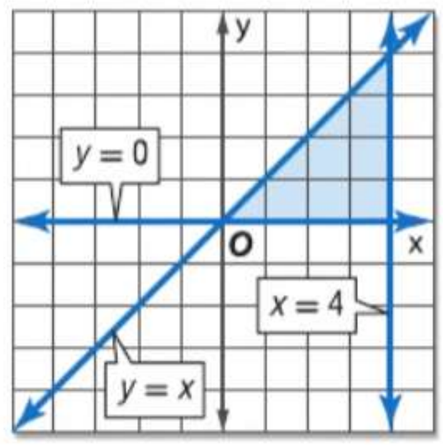
المجسمات الناتجة عن الدوران تابع

سيطلب منك في حساب التفاضل والتكامل إيجاد أحجام مجسمات ناتجةٍ عن دوران منطقةٍ على مستوى إحداثي حول المحور الأفقي x أو الرأسي y. ومن أولى الخطوات الهامة في حل هذه المسائل تصوّر المجسمات المتشكلة.

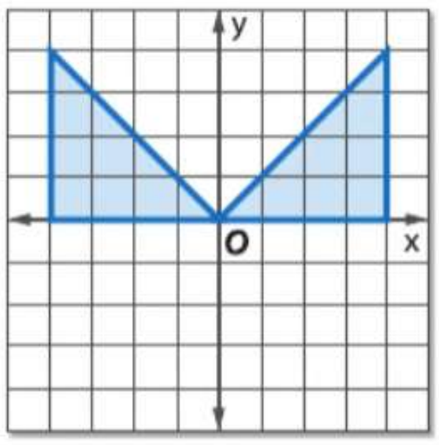
النشاط 2

مثّل المجسم الذي ينتج عند دوران المنطقة المحدّدة بـ $y = x$ و $x = 4$ و $y = 0$ حول المحور الرأسي y.

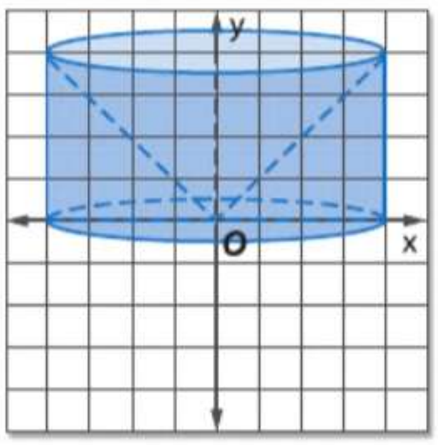
الخطوة 1 مثّل بيانيًا كل معادلة مما يلي لإيجاد المنطقة التي سيتم دورانها.



الخطوة 2 اعكس المنطقة حول المحور الرأسي y.



الخطوة 3 صل رؤوس المثلثات القائمة باستخدام خطوط منحنية.



المجسم أسطوانةٌ ذات مخروط مقتطعٍ في مركزها.

تمثيل النماذج والتحليل

مثّل المجسم الذي ينتج عند دوران كل منطقة تحكمها كل معادلة مما يلي حول المحور الرأسي y.

7. $y = -x + 4$
$x = 0$
$y = 0$

8. $y = x^2$
$y = 4$

9. $y = x^2$
$y = 2x$

مثّل المجسّم الذي ينتج عند دوران كل منطقة تحددّها كل معادلة مما يلي حول المحور الأفقي x.

10. $y = -x + 4$
$x = 0$
$y = 0$

11. $y = x^2$
$y = 0$
$x = 2$

12. $y = x^2$
$y = 2x$

13. مسألة غير محددة الإجابة مثّل منطقةً في الربع الأول من المستوى الإحداثي.

a. ارسم التمثيل البياني للمنطقة عند دورانها حول المحور الرأسي y.

b. ارسم التمثيل البياني للمنطقة عند دورانها حول المحور الأفقي x .

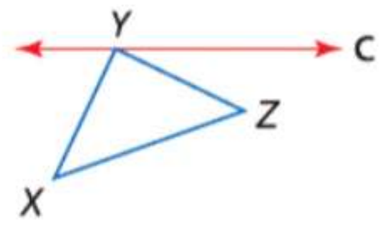
14. التحدي جـــد معادلةً تحدّد منطقةً حين تدوّر حول المحور الأفقي x. ينتج شكلٌ حجمه 18π وحدة مربعة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

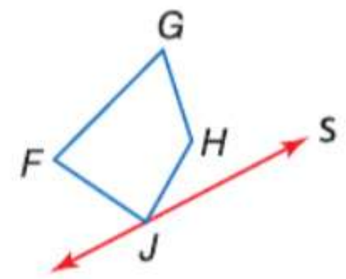
10 اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 1-10 إلى 3-10

انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة.
(الدرس 1-10)

1.



2.

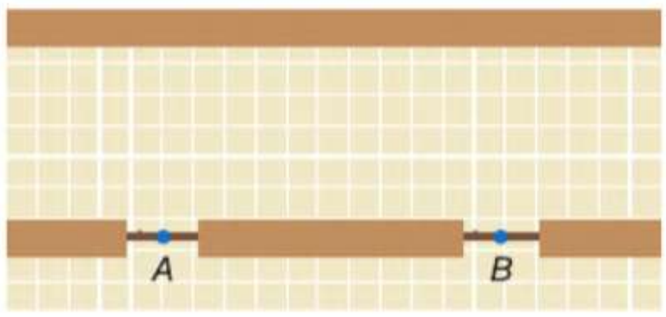


مثل كل شكلٍ مما يلي وصورته بيانيًا وفق الانعكاس المحدد.
(الدرس 1-10)

3. للمثلث $\triangle FGH$ الرؤوس $F(-4, 3)$ و $G(-2, 0)$ و $H(-1, 4)$؛ بالنسبة للمحور الرأسي y

4. للمعيّن $QRST$ الرؤوس $Q(2, 1)$ و $R(4, 3)$ و $S(6, 1)$ و $T(4, -1)$؛ بالنسبة للمحور الأفقي x

5. **النوادي** يبيع نادي الدراما الحلوى خلال استراحة إحدى المسرحيات المدرسية. حدّد نقطةً P على طول الجدار لتمثيل طاولة الحلوى بحيث يقطع الأشخاص القادمون من أي من البابين A أو B المسافة نفسها إلى الطاولة. (الدرس 1-10)



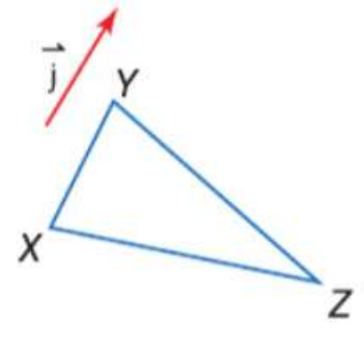
مثل كل شكلٍ بياني وصورته بعد الإزاحة المحددة.
(الدرس 2-10)

6. المثلث $\triangle ABC$ ذو الرؤوس $A(0, 0)$ و $B(2, 1)$ و $C(1, -3)$؛ $\langle 3, -1 \rangle$

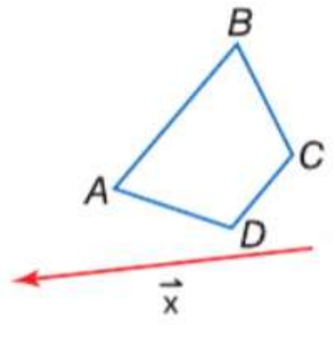
7. للمستطيل $JKLM$ الرؤوس $J(-4, 2)$ و $K(-4, -2)$ و $L(-1, -2)$ و $M(-1, 2)$؛ $\langle 5, -3 \rangle$

انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة. (الشكل 2-10)

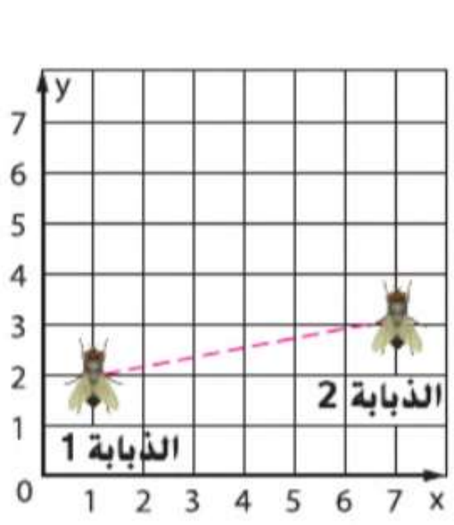
8.



9.

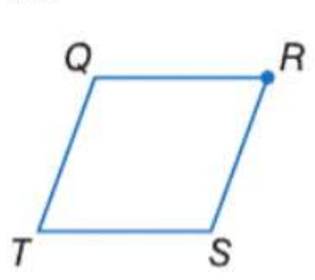


10. **الصور المتحركة** يصنع فارس صورةً متحركة. حيث يستخدم ورقًا للتمثيل البياني للتحقق من دقة أبعاد رسوماته. فإذا رسم مستوى إحداثيًا يضم ذبابتين كما هو موضح أدناه، فما المتجه الذي يمثل الحركة من الذبابة 1 إلى الذبابة 2؟
(الدرس 2-10)

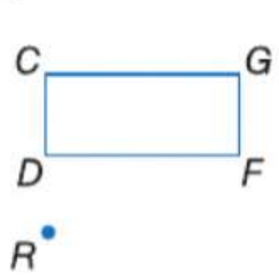


انسخ كل مضلعٍ ونقطة R. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم الدوران المحدد لكل شكلٍ حول النقطة R.
(الدرس 3-10)

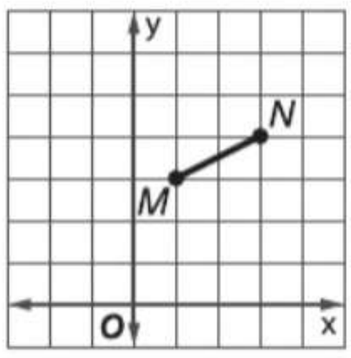
11. $45°$



12. $60°$



13. **الاختيار من متعدد** ما صورة النقطة M بعد دوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل؟ (الدرس 3-10)



A $(-3, 1)$

B $(-3, -1)$

C $(-1, -3)$

D $(3, 1)$

مثل كل شكلٍ بياني وصورته بعد الدوران المحدد.
(الدرس 3-10)

14. للمثلث $\triangle RST$ الرؤوس $R(-3, 0)$ و $S(-1, -4)$ و $T(0, -1)$؛ $90°$

15. للمربع $JKLM$ الرؤوس $J(-1, 2)$ و $K(-1, -2)$ و $L(3, -2)$ و $M(3, 2)$؛ $180°$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الاستكشاف

10-4 مختبر برامج الهندسة
تركيب التحويلات

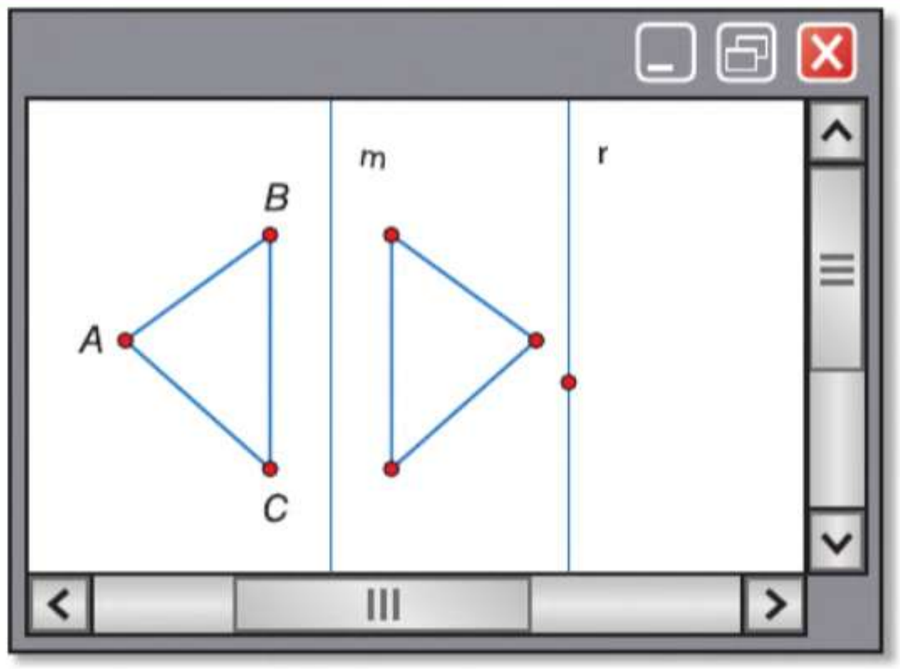
سوف تستخدم في هذا المختبر لوح الرسم الهندسي لاستكشاف آثار القيام بتحويلات متعددةٍ على شكلٍ ما.

النشاط

عكس شكلٍ بالنسبة لمستقيمين رأسيين.

الخطوة 1 استخدم أداة القطع المستقيمة لإنشاء مثلث يتجه أحد رؤوسه نحو اليسار بحيث يمكنك أن ترى بسهولةٍ التحويلات التي تجريها. سمِّ المثلث ABC.

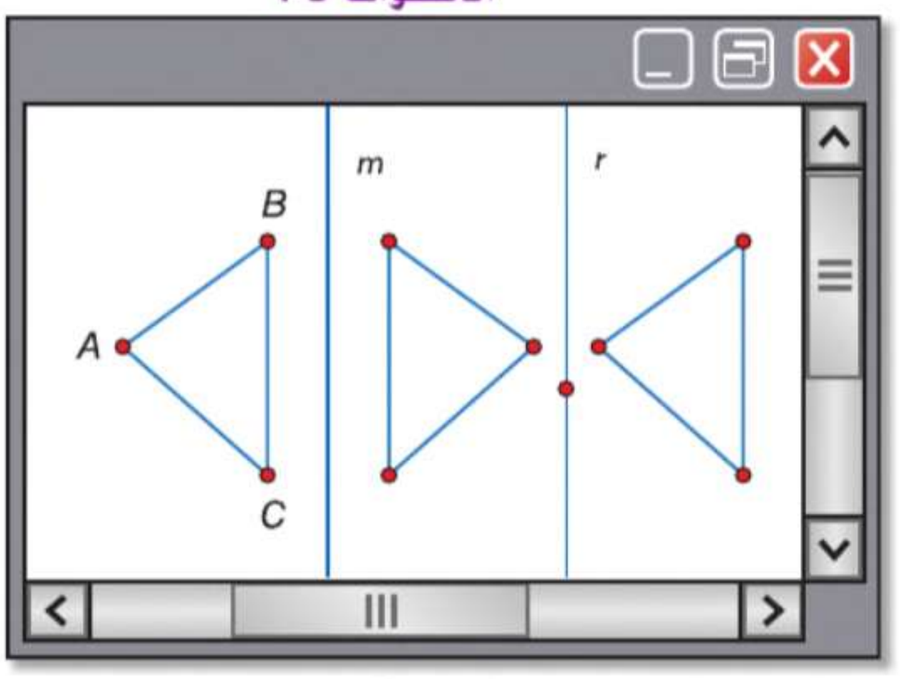
الخطوة 2 أدخل مستقيما وسمه m إلى يمين المثلث $\triangle ABC$. أدخل نقطةً بحيث تكون المسافة منها إلى المستقيم m أكبر من عرض المثلث $\triangle ABC$. ارسم المستقيم الموازي للمستقيم m من خلال النقطة وسمّ المستقيم الجديد r.



الخطوات 3-1

الخطوة 3 اختر المستقيم m واختر Mark Mirror من قائمة Transform (التحويل). اختر جميع أضلاع المثلث $\triangle ABC$ ورؤوسه واختر Reflect (العكس) من قائمة Transform (التحويل).

الخطوة 4 كرر العملية التي استخدمتها في الخطوة 3 لعكس الصورة الجديدة بالنسبة للمستقيم r.



الخطوة 4

تحليل النتائج

1. كيف يرتبط الشكل الأصلي بالشكل النهائي؟
2. ما التحويل الوحيد الذي يمكن استخدامه لإنتاج الشكل النهائي؟
3. إذا حركت المستقيم، فما الذي يحدث؟
4. **التخمين** إذا عكست الشكل بالنسبة لمستقيم ثالث، فما التحويل الوحيد الذي تعتقد أنه يمكن أن يستخدم لإنتاج الشكل النهائي؟ اشرح استنتاجك.
5. كرر النشاط لمستقيمين متعامدين. ما التحويل الوحيد الذي يمكن استخدامه لإنتاج الشكل النهائي نفسه؟
6. **التخمين** إذا عكست الشكل الوارد في التدريب 5 بالنسبة لمستقيمٍ ثالث عمودي على الثاني، فما التحويل الوحيد الذي تعتقد أنه يمكن أن يستخدم لإنتاج الشكل النهائي؟ اشرح استنتاجك.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10-4 تركيب التحويلات

السابق:
- لقد رسمت الانعكاس والإزاحة والدوران.

الحالي:
1. رسم الانعكاس الانزلاقي وغيره من تركيب حالات التساوي في المستوى الإحداثي.
2. رسم تركيبات الانعكاس بالنسبة لمستقيمات متوازية ومتقاطعة.

لماذا؟
- توضح آثار الأقدام التي يخلفها في الرمال شخص يسير على طول حافة شاطئ تركيب تحويلين مختلفين، وهما الإزاحة والانعكاس.

المفردات الجديدة

تركيب التحويلات
composition of transformations
الانعكاس الانزلاقي
glide reflection

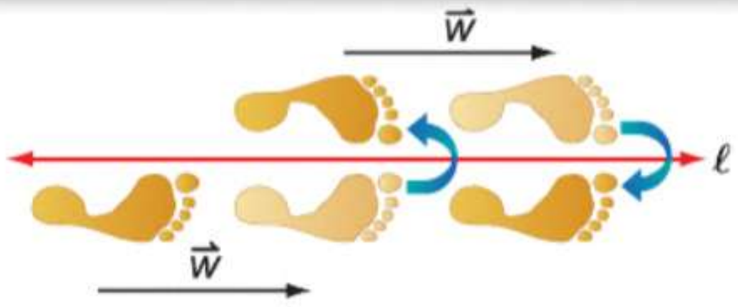
ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 الانعكاس الانزلاقي عند تطبيق تحويلٍ على شكلٍ ومن ثم تطبيق تحويلٍ آخر على صورته، فيطلق على النتيجة اسم **تركيب التحويلات**. والانعكاس الانزلاقي نوعٌ من تركيب التحويلات.

المفهوم الأساسي الانعكاس الانزلاقي

الانعكاس الانزلاقي هو تركيب لإزاحةٍ يتبعها انعكاس بالنسبة لمستقيمٍ موازٍ لمتّجه الإزاحة.

مثال
الانعكاس الانزلاقي الموضح هو تركيب لإزاحةٍ على طول $\vec{w}$ يتبعها انعكاس بالنسبة للمستقيم ℓ.



مثال 1 تمثيل انعكاس انزلاقي

للمثلث JKL الرؤوس $J(6, -1)$ و $K(10, -2)$ و $L(5, -3)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته بعد إزاحةٍ على طول $\langle 0, 4 \rangle$ انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y.

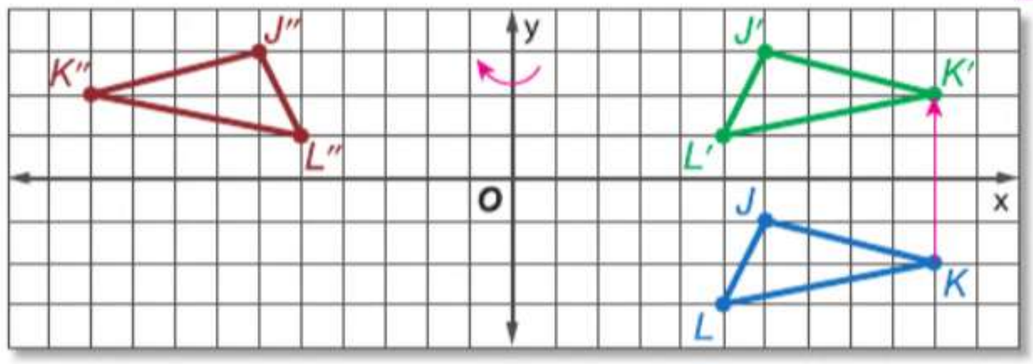
الخطوة 1 إزاحة على طول $\langle 0, 4 \rangle$

$(x, y) \rightarrow (x, y + 4)$
$J(6, -1) \rightarrow J'(6, 3)$
$K(10, -2) \rightarrow K'(10, 2)$
$L(5, -3) \rightarrow L'(5, 1)$

الخطوة 2 انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
$J'(6, 3) \rightarrow J''(-6, 3)$
$K'(10, 2) \rightarrow K''(-10, 2)$
$L'(5, 1) \rightarrow L''(-5, 1)$

الخطوة 3 مثّل المثلث $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J''K''L''$ بيانيًا.



تمرين موجّه

للمثلث PQR الرؤوس $P(1, 1)$ و $Q(2, 5)$ و $R(4, 2)$. مثّل المثلث $\triangle PQR$ وصورته بيانيًا بعد الانعكاس الانزلاقي المحدد.

1A. إزاحة: على طول $\langle -2, 0 \rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الأفقي x

1B. إزاحة: على طول $\langle -3, -3 \rangle$
انعكاس: بالنسبة للمستقيم $y = x$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

في المثال 1، $\triangle J'K'L' \cong \triangle JKL$ و $\triangle J''K''L'' \cong \triangle J'K'L'$. بناءً على خاصية التعدي في التطابق، فإن $\triangle J'K''L'' \cong \triangle JKL$. وهذا يقترح النظرية التالية.

النظرية 10.1 تركيب حالات تساوي الأبعاد

تركيب حالتي تساوٍ للأبعاد (أو أكثر) هو تساوٍ للأبعاد أيضا.

ستثبت إحدى حالات النظرية 10.1 في التدريب 30.

إذًا، يعطي تركيب حالتي تساوٍ للأبعاد، بما في ذلك الانعكاس أو الإزاحة أو الدوران، صورةً مطابقةً لصورتها الأصلية.

نصيحة دراسية

الحركات الصلبة إن الانعكاس الانزلاقي والانعكاس والإزاحة والدوران هي الأنواع الأربعة الوحيدة *للحركات الصلبة* أو حالات تساوي الأبعاد في مستوى.

مثال 2 تمثيل تركيبات تساوي الأبعاد الأخرى

النقطتان الطرفيتان لـ $\overline{CD}$ هما $C(-7, 1)$ و $D(-3, 2)$. مثّل بيانيًا $\overline{CD}$ وصورتها بعد الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x والدوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل.

الخطوة 1 الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$C(-7, 1) \rightarrow C'(-7, -1)$

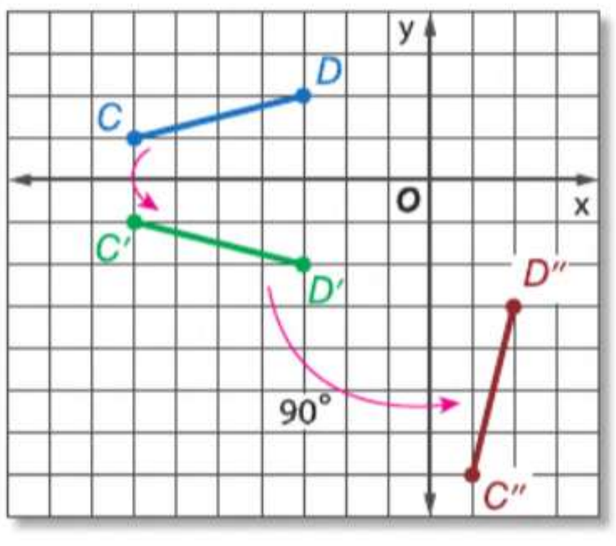
$D(-3, 2) \rightarrow D'(-3, -2)$

الخطوة 2 الدوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل

$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$C'(-7, -1) \rightarrow C''(1, -7)$

$D'(-3, -2) \rightarrow D''(2, -3)$



الخطوة 3 مثّل بيانيًا $\overline{CD}$ وصورتها $\overline{C''D''}$.

قراءة في الرياضيات

الفواصل العلوية المزدوجة تستخدم الفواصل العلوية المزدوجة للإشارة إلى أن رأسا هو صورة تحويلٍ ثان.

تمرين موجّه

للمثلث ABC الرؤوس $A(-6, -2)$ و $B(-5, -5)$ و $C(-2, -1)$.
مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ وصورته بعد تركيب التحويلات بالترتيب المدرج التالي.

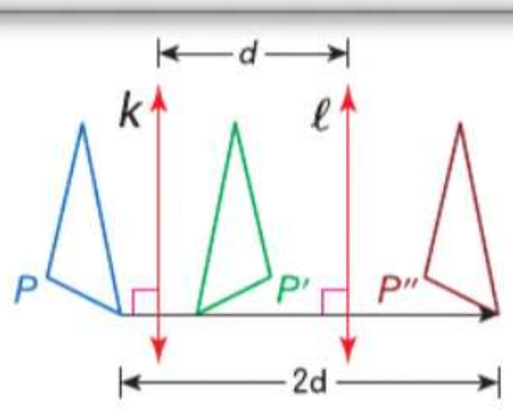
2A. إزاحة: على طول $\langle -1, 3 \rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الرأسي

2B. دوران: $180°$ حول نقطة الأصل
إزاحة: على طول $\langle 4, -2 \rangle$

2 تركيب انعكاسين

تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متوازيين يماثل عملية إزاحة واحدة.

النظرية 10.2 الانعكاس بالنسبة لمستقيمين متوازيين



يمكن وصف تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متوازيين بواسطة متجه إزاحة

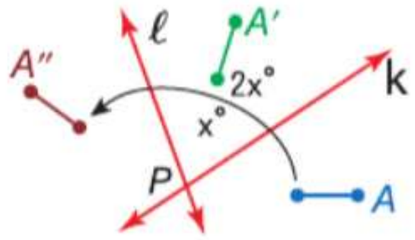
- عمودي على المستقيمين.
- طوله يساوي ضعف المسافة بين المستقيمين.

سوف تثبت النظرية 10.2 في التدريب 28.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين يماثل عملية دوران واحدة.

النظرية 10.3 الانعكاس بالنسبة لمستقيمين متقاطعين



يمكن وصف تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين على أنه عملية دوران واحدة.

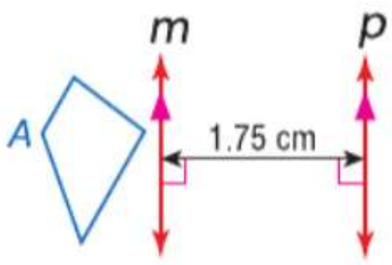
- حول النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان و
- بزاوية تساوي ضعف قياس الزاوية الحادة أو القائمة التي يشكلها المستقيمان.

سوف تثبت النظرية 10.3 في التدريب 37.

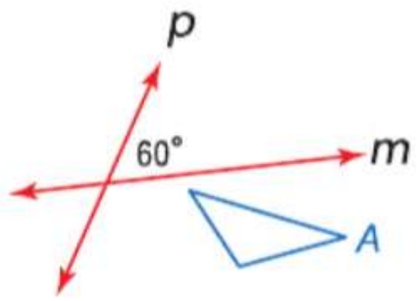
مثال 3 انعكاس شكلٍ بالنسبة لمستقيمين

انسخ الشكل A واعكسه بالنسبة للمستقيم m ثم بالنسبة للمستقيم p. ثمّ صف تحويل الزاوية الذي يربط A بـ A''.

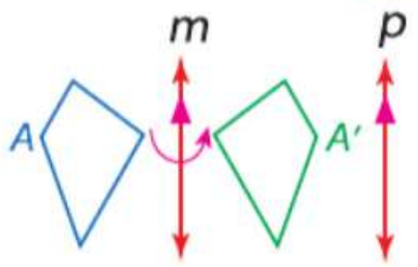
a.



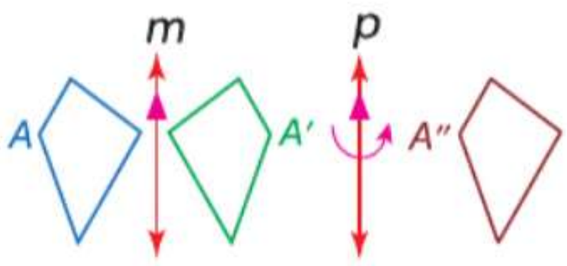
b.



الخطوة 1 اعكس A بالنسبة للمستقيم m.

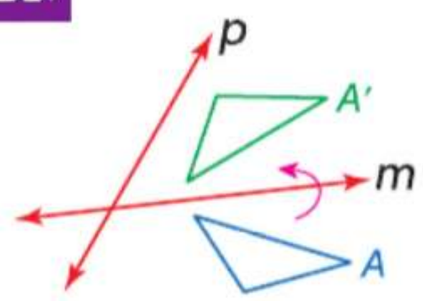


الخطوة 2 اعكس A' بالنسبة للمستقيم p.

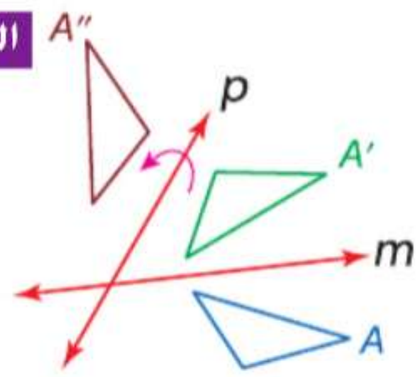


بحسب النظرية 10.2، يكافئ تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين رأسيين متوازيين m و p إزاحةً أفقيةً إلى الجهة اليمنى لمسافة $1.75 \cdot 2$ أو 3.5 cm

الخطوة 1



الخطوة 2



بحسب النظرية 10.3، يكافئ تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين m و p دورانًا بزاوية تساوي $60° \cdot 2$ أو $120°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان m و p.

انتبه!

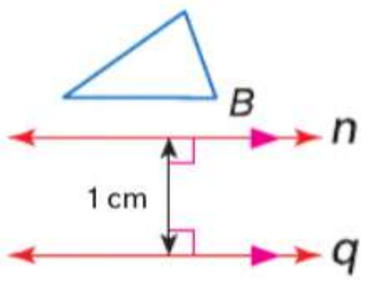
ترتيب التركيب

تحقق من تركيب تحويلين بحسب ترتيبهما المعطى

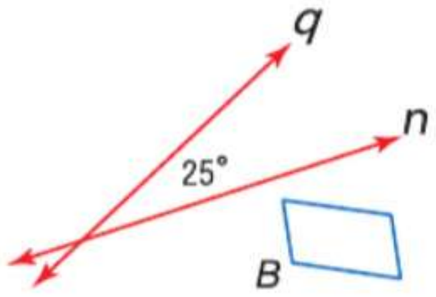
تمرين موجّه

انسخ الشكل B واعكسه بالنسبة للمستقيم n ثم بالنسبة للمستقيم q. ثمّ صف تحويل الزاوية الذي يربط B بـ B''.

3A.



3B.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تتشكل الكثير من الأنماط في الحياة اليومية باستخدام تركيب التحويلات.

الربط بالحياة اليومية

تنتج أنماط الحواشي في السجاد عند تكرار أي نوع من عدة أنواع من التحويلات الأساسية باتجاهٍ واحد. وثمة العديد من التشكيلات الممكنة لهذه التحويلات: الإزاحات والانعكاس الأفقي والانعكاس الرأسية والانعكاسا الرأسية المتبوعة بانعكاس أفقي والانعكاس الانزلاقي والدوران والانعكاس المتبوع بانعكاس انزلاقي.

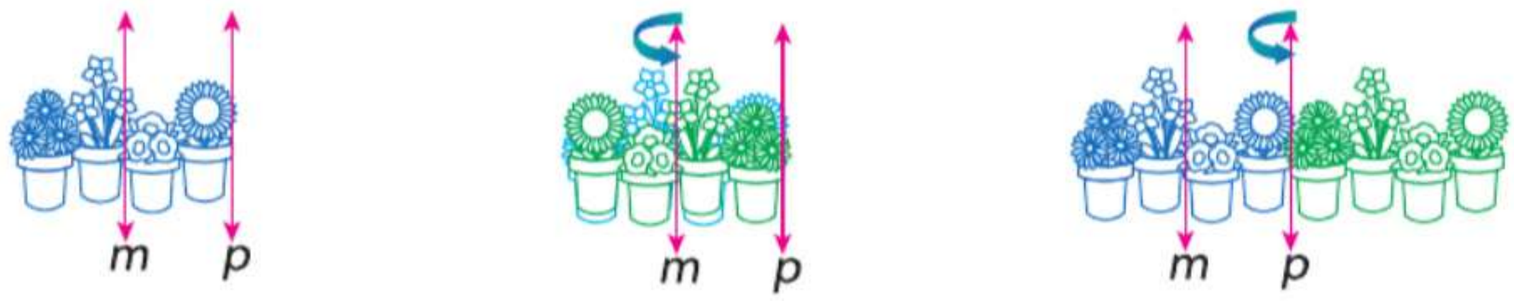
المصدر: متحف النسيج

مثال 4 من الحياة اليومية وصف التحويلات

أنماط الحواشي **صف التحويلات المركّبة لتشكيل كل شكلٍ من أشكال أنماط الحواشي الموضحة.**

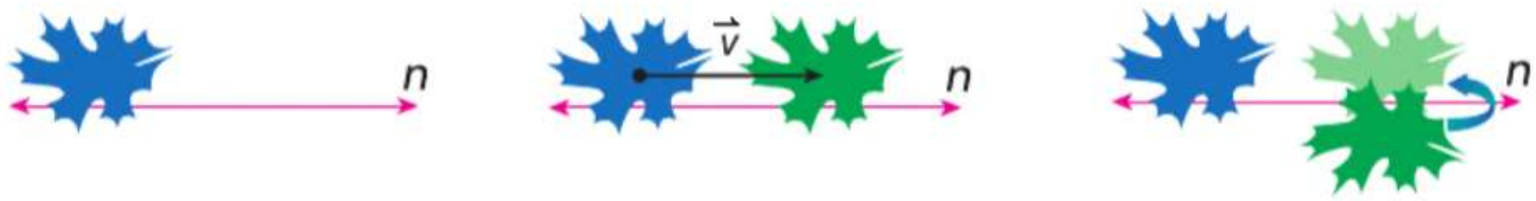
a.

ينتج النمط عبر إزاحات متعاقبةٍ لأصص النباتات الأربعة الأولى. وبموجب ذلك يمكن تشكيل هذا النمط عبر تركيب انعكاسين بالنسبة للمستقيمين m و p كما هو موضح. لاحظ أن المستقيم m يمرّ بمركز الصورة الأصلية.



b.

ينتج النمط من خلال الانعكاس الانزلاقي. ولذلك يمكن تشكيل النمط عبر تركيب إزاحةٍ على طول متّجه الإزاحة $\vec{v}$ ثمّ انعكاس بالنسبة للمستقيم الأفقي n كما هو موضح.

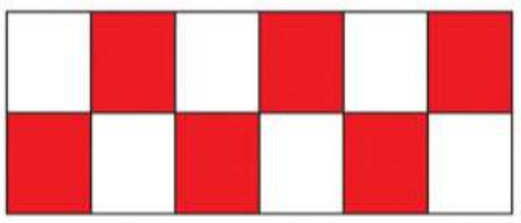


تمرين موجّه

4. **نقوش السجّاد** صف التحويلات المركبة لتشكيل نقش كلٍ من السجادتين الموضحتين.

A.

B.



ملخص المفهوم تركيب الإزاحات

انعكاس انزلاقي	الإزاحة	دوران
تركيب انعكاس وإزاحة	تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متوازيين	تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1

للمثلث *CDE* الرؤوس *C*(−5, −1) و *D*(−2, −5) و *E*(−1, −1). مثّل المثلث *CDE*△ وصورته بيانيًا بعد الانعكاس الانزلاقي المحدّد.

1. إزاحة: على طول ⟨4, 0⟩
   انعكاس: بالنسبة للمحور الأفقي x

2. إزاحة: على طول ⟨0, 6⟩
   انعكاس: بالنسبة للمحور الرأسي y

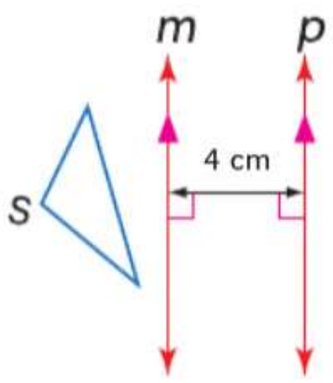
مثال 2

3. النقطتان الطرفيتان لـ $\overline{JK}$ هما *J*(2, 5) و *K*(6, 5). مثّل $\overline{JK}$ وصورتها بيانيًا بعد انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x ودوران بزاوية قياسها 90° حول نقطة الأصل.

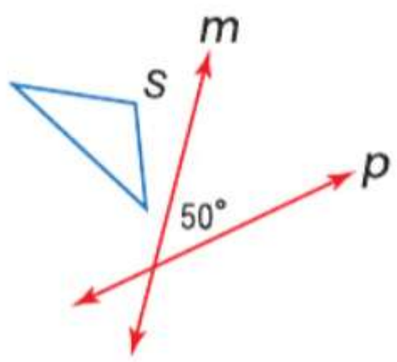
مثال 3

انسخ الشكل *S* واعكسه بالنسبة للمستقيم m ثم بالنسبة للمستقيم p. ثم صف تحويلاً وحيدًا يربط *S* بـ *S″*.

4.

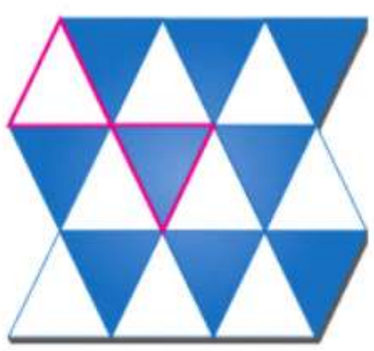


5.



مثال 4

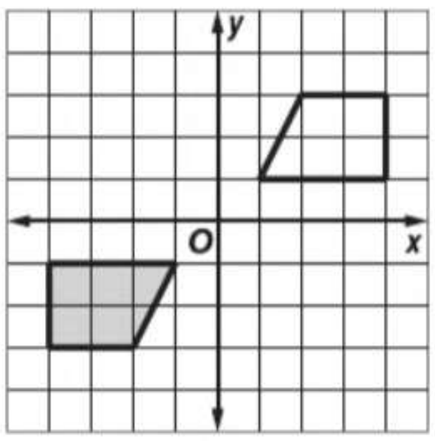
6. **أنماط المكعبات** يشكل إسماعيل نمطا من مكعبات على أشكال مثلثات متساوية الأضلاع لوضعها فوق سطح طاولة. صف تشكيلة التحويلات التي استخدمت لإعداد النمط.



التدريب وحل المسائل

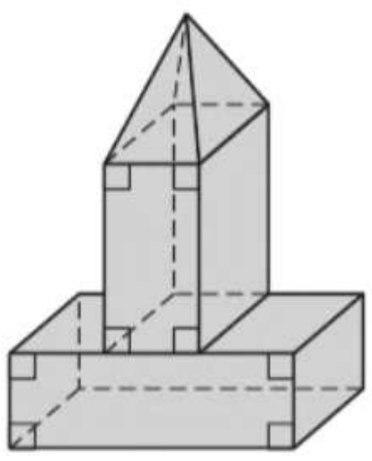
مثال 1

7. ما التحويلان اللذان قد يكونان استخدما لتغيير الشكل المظلل إلى الشكل غير المظلل؟



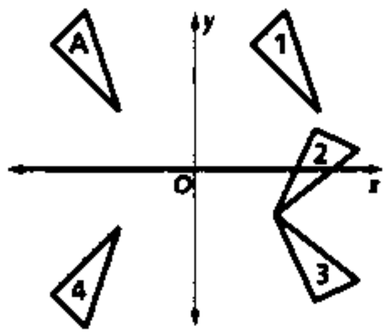
مثال 2

8. يمثل هذا الرسم بناءً يتوضع على الطرف الآخر من فندق في أبو ظبي. فما الأشكال الممثلة في الشكل؟

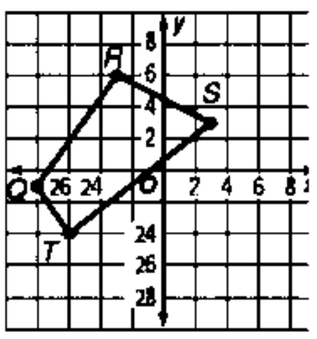


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9. إذا حوّل الشكل A بعملية دوران ثم انعكاس، فما الشكل الذي يمكن أن تأخذه الصورة الأخيرة؟



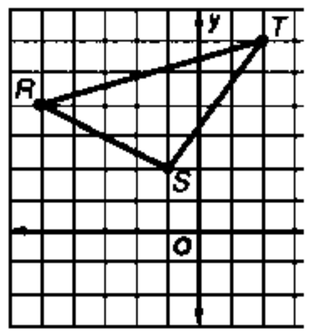
10. إذا عكس الشكل الرباعي $QRST$ بالنسبة للمحور الأفقي x ثم عكس بالنسبة للمحور الرأسي y. ففي أي أرباعٍ ستقع الصورة النهائية؟



A الربع الأول والثالث والرابع **C** الربع الأول والثاني فقط

B الربع الثاني والثالث والرابع **D** الربع الثاني والرابع فقط

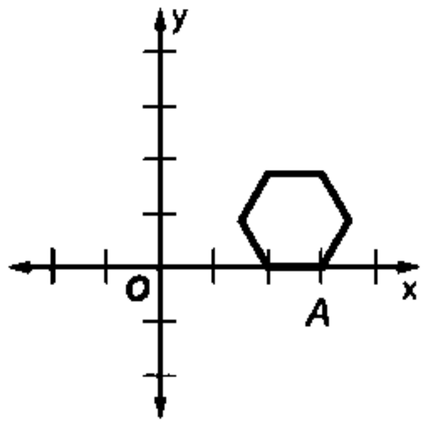
11. للمثلث RST الإحداثيات $R(-5, 4)$ و $S(-1, 2)$ و $T(2, 6)$. ماذا سيكون الإحداثيان الجديدان للنقطة T إذا أزيح المثلث لمسافة 5 وحدات إلى الأسفل وعكس بالنسبة للمحور الرأسي y؟



A $(-2, 1)$ **C** $(2, -1)$

B $(-1, 2)$ **D** $(2, 1)$

12. يقع سداسي أضلاع منتظم في المستوى الإحداثي بحيث تقع النقطة A عند $(3, 0)$.

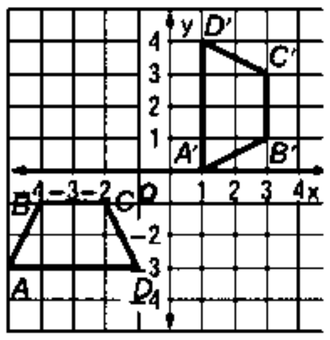


ما إحداثيا الرأس A بعد انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y وإزاحةٍ إلى الأعلى لمسافة وحدتين؟

13. يمدّد المثلث JKL بمعاملٍ يساوي 1.5 ويعكس بالنسبة للمحور الرأسي y ويزاح لمسافة وحدتين يسارًا. فماذا سيكون الإحداثيان الجديدان للرأس J بعد التحويلات الثلاث؟

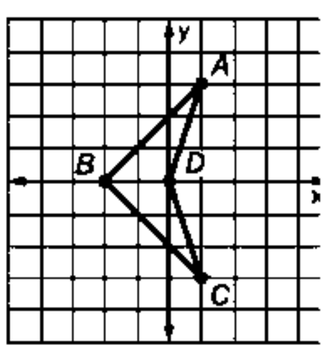
14. لشبه المنحرف $ABCD$ الرؤوس الموضحة في المستوى الإحداثي أدناه.

يحوّل الشكل $ABCD$ لتشكيل صورةٍ مطابقة. فما التحويلات الحادثة لتشكيل $A'B'C'D'$؟



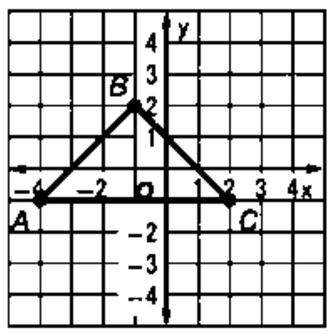
15. يدار الشكل الرباعي $ABCD$ ويزاح لتشكيل صورةٍ تضم الرأسين $A'(-3, 3)$ و $B'(0, 0)$.

فما إحداثيا النقطة D'؟



16. يمدّد المثلث ABC حول نقطة الأصل بمعامل مقياس يساوي 2 ثم يزاح بحيث يكون لنقطة منتصف $\overline{A'B'}$ الإحداثيان المماثلان لإحداثيي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

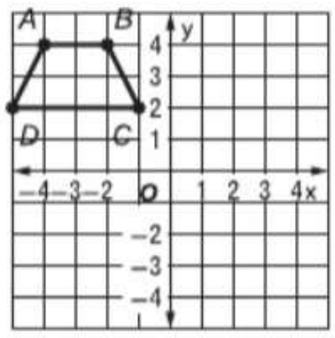
ما إحداثيا النقطة C'؟



17. يتشكل مثلث من النقاط $P(2, -2)$ و $Q(-2, -4)$ و $R(6, -2)$. تتغير أبعاد المثلث بمعامل مقياس يساوي $\frac{1}{2}$ ثم يزاح لمسافة أربع وحدات يمينًا وأربعةٍ إلى الأعلى.

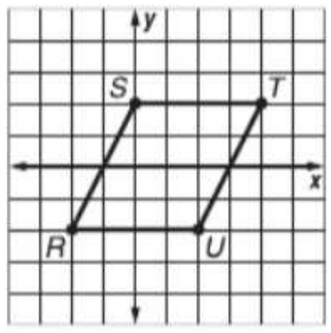
ما إحداثيات المثلث $\triangle P'Q'R'$؟

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

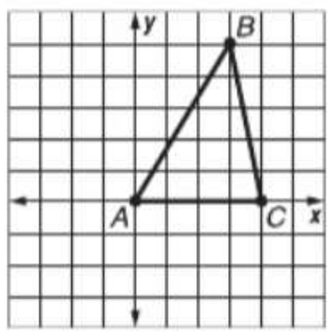


18. لشبه المنحرف $ABCD$ الرؤوس الموضحة في المستوى الإحداثي أدناه. فإذا عكس $ABCD$ بالنسبة للمحور الرأسي y ثمّ أدير بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. فماذا سيكون إحداثيا الرأس C'؟

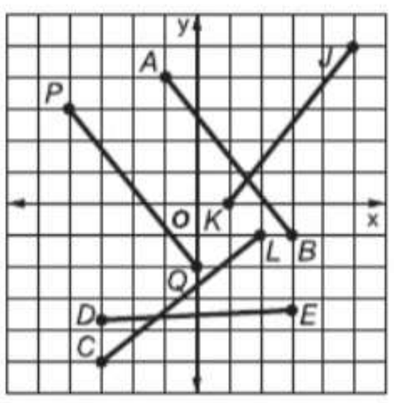
19. للمثلث STU الرؤوس $S(-5, -2)$ و $T(-1, 4)$ و $U(6, 3)$. فإذا أزيح المثلث لمسافة 3 وحدات يمينًا و 5 وحدات إلى الأسفل ثم عكس بالنسبة للمحور الأفقي x. فماذا سيكون إحداثيا T' وهي صورة T؟



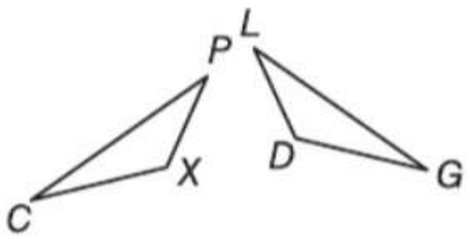
20. إذا أزيح متوازي الأضلاع $RSTU$ لمسافة 5 وحدات يسارا و 3 وحدات إلى الأعلى ثم عكس بالنسبة للمحور الرأسي y. فماذا سيكون إحداثيا T'. وهي صورة T وفق هذين التحويلين؟



21. إذا أدير المثلث $\triangle ABC$ كما هو موضح بزاوية قياسها $180°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. فستكون صورته $\triangle A'B'C'$. فما التحويل أو تشكيلات التحويلات على المثلث $\triangle ABC$ والتي ستنتج صورةً مختلفةً عن المثلث $\triangle A'B'C'$؟



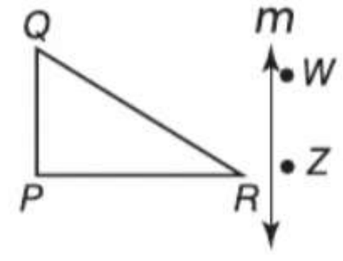
22. ما القطعة المستقيمة التي تمثل صورة $\overline{PQ}$ بموجب إزاحةٍ انزلاقية؟



23. ما نوع التحويل الذي يمكنك استخدامه لتثبت أن $\triangle CXP \cong \triangle GDL$؟

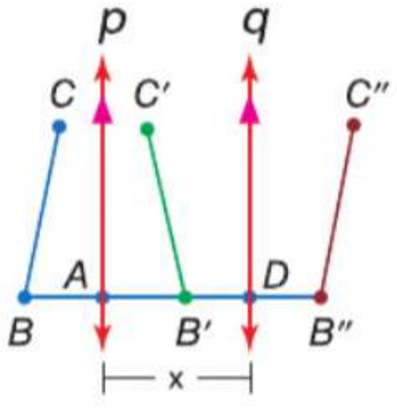
24. تقع رؤوس مثلث في الربع الثاني. ففي أي ربع ستقع صورة المثلث بموجب الانعكاس الانزلاقي $T_{0,4} \rightarrow R_{x=0}$؟

25. تعكس النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y. ثمّ أزيحت صورتها رأسيًا لمسافة a وحدة. حيث $a > 0$. فأيّ مما يلي يعطي إحداثيات الصورة النهائية P'؟



26. أي من مجموعات النقاط التالية يمكن أن تكون رؤوسا لصورة المثلث $\triangle PQR$ بموجب انعكاس انزلاقي بحيث يكون المستقيم m هو خط الانعكاس؟

27. تقع رؤوس مثلث عند النقاط $(3, -1)$ و $(5, 2)$ و $(1, 0)$. فإذا أزيح المثلث 4 وحدات يسارًا. ثمّ مُدّد بمعامل مقياس قيمته 3. فما إحداثيات صورة المثلث؟



28. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين للنظرية 10.2.

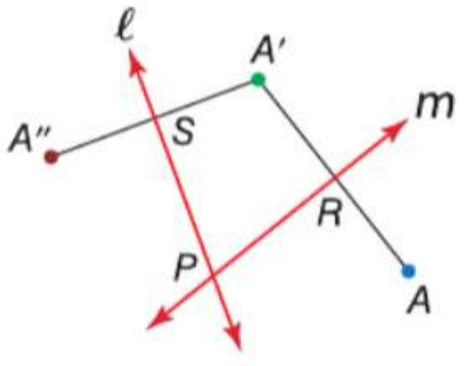
المعطيات: يطبّق انعكاس بالنسبة للمستقيم p على $\overline{BC}$ لتعطي $\overline{B'C'}$. ويطبق انعكاس بالنسبة للمستقيم q على $\overline{B'C'}$ لتعطي $\overline{B''C''}$.

$p \parallel q, AD = x$

المطلوب إثباته: **a.** $\overline{BB''} \perp p,\ \overline{BB''} \perp q$

b. $BB'' = 2x$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



29. **البرهان** اكتب فقرة برهان للنظرية 10.3.

المعطيات: يتقاطع المستقيمان ℓ و m عند النقطة P.
A هي أي نقطة على المستقيم ℓ أو المستقيم m.

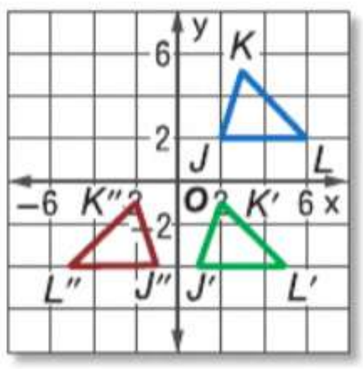
المطلوب إقباته: **a.** إذا عكست النقطة A بالنسبة للمستقيم m.
ثم عكست صورتها A' بالنسبة للمستقيم ℓ. فإن A''
هي صورة A بعد دوران حول النقطة P.

b. $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$

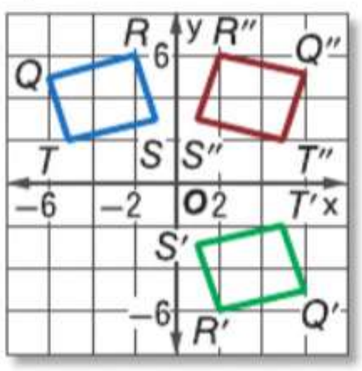
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

صف التحويلات التي رُكّبت لتشكيل صورة كل شكلٍ مما يلي.

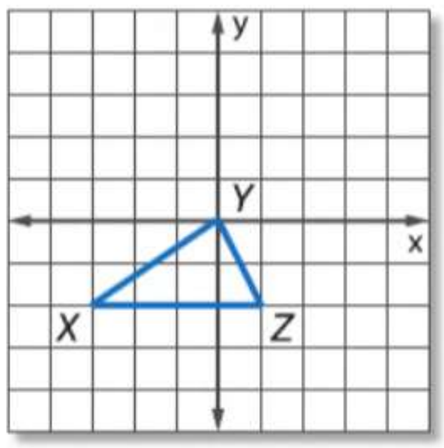
30.



31.

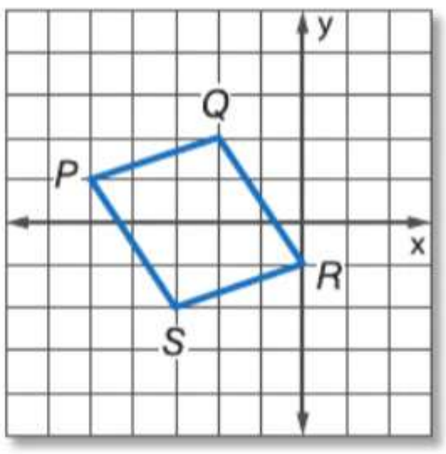


32. **تحليل الخطأ** تزيح أسماء وأماني المثلث $\triangle XYZ$ على طول $\langle 2, 2\rangle$ وتعكسانه بالنسبة للمستقيم $y = 2$. تقول أسماء إن التحويل هو انعكاس انزلاقي. وتخالفها أماني قائلةً إن التحويل تركيب من تحويلات متعددة.
فهل أيٌّ منهما على صواب؟
اشرح استنتاجك.

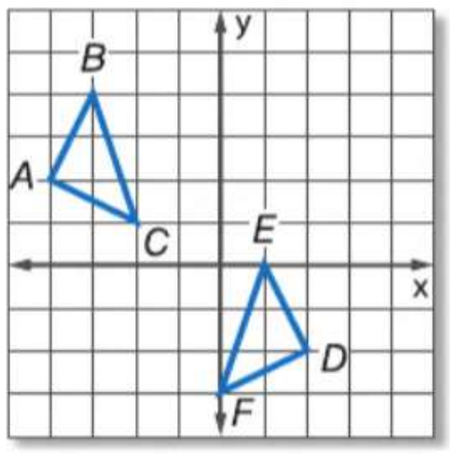


33. **الكتابة في الرياضيات** هل تبقى أي نقاط ثابتةً بموجب الانعكاس الانزلاقي؟ وهل تبقى كذلك بموجب تركيبات لتحويلات؟ اشرح.

34. **التحدي** إذا أزيح الشكل $PQRS$ على طول $\langle -2, 3\rangle$. وعكس بالنسبة للمستقيم $y = -1$. وأدير بزاوية قياسها 90° حول نقطة الأصل. فما إحداثيات الشكل $P'''Q'''R'''S'''$؟



35. **الفرضيات** إذا أردنا عكس صورةٍ بالنسبة للمستقيم $y = x$ والمحور الأفقي x. فهل يؤثر ترتيب الانعكاس في الصورة النهائية؟ اشرح.



36. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب انعكاسا انزلاقيًا أو تركيبًا لتحويلات يمكن استخدامها لتحويل المثلث $\triangle ABC$ إلى $\triangle DEF$.

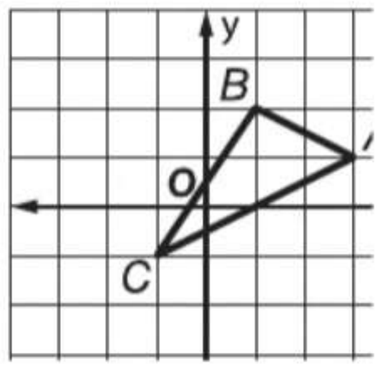
37. **التبرير** عند إجراء دورانين على صورةٍ وحيدة، فهل يؤثر ترتيب الدوران *أحيانًا* أو *دائما* أو لا يؤثر *إطلاقًا* في موقع الصورة النهائية؟ اشرح.

38. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل الانعكاس الانزلاقي وتركيب التحويلات.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

39. يزاح المثلث $\triangle ABC$ على طول المتجه $\langle -2, 3 \rangle$ ثم يعكس بالنسبة للمحور الأفقي x. فما إحداثيا النقطة A' بعد التحويل؟



A $(1, -4)$
B $(1, 4)$
C $(-1, 4)$
D $(-1, -4)$

40. الإجابة القصيرة ما إحداثيا D'' إذا أزيحت القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ التي فيها الرأسان $C(2, 4)$ و $D(8, 7)$ على طول $\langle -6, 2 \rangle$ ثم عكست بالنسبة للمحور الرأسي y؟

41. جبريا اكتب $\frac{18x^2 - 2}{3x^2 - 5x - 2}$ بأبسط صورة.

F $\frac{18}{3x + 1}$
H $\frac{2(3x - 1)}{x - 2}$
G $\frac{2(3x + 1)}{x - 2}$
J $2(3x - 1)$

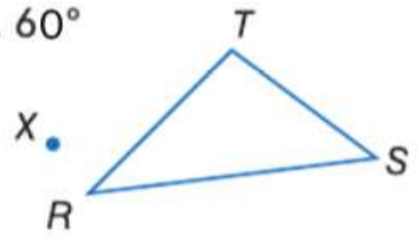
42. SAT/ACT إذا كانت $f(x) = x^3 - x^2 - x$. فما هي قيمة $f(-3)$؟

A -39
B -33
C -21
D -15
E -12

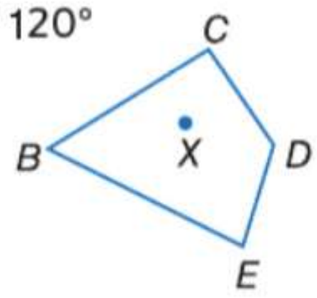
مراجعة شاملة

انسخ كل مضلع ونقطة X. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم الدوران المحدد لكل شكل حول النقطة X. (الدرس 3-10)

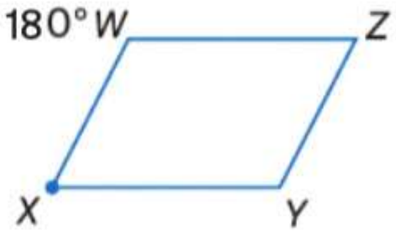
43. $60°$



44. $120°$



45. $180°$



مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته على طول المتّجه المعطى. (الدرس 2-10)

46. المثلث $\triangle FGH$ ذو الرؤوس $F(1, -4)$ و $G(3, -1)$ و $H(7, -1)$؛ $\langle 2, 6 \rangle$

47. الشكل الرباعي $ABCD$ ذو الرؤوس $A(-2, 7)$ و $B(-1, 4)$, $C(2, 3)$ و $D(2, 7)$؛ $\langle -3, -5 \rangle$

48. الشراع طول ضلعٍ في شراعٍ مستطيل يساوي 7.5 m. وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع يساوي $40°$. وقياس زاويةٍ أخرى يشكلها الشراع يساوي $55°$. فكم يساوي محيط الشراع مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

49. تنسيق الحدائق أطوال أضلاع حوض أزهارٍ مثلثي الشكل 1.35 m و 1.8 m و 2.25 m. جـــد قياس أصغر زوايا المثلث.

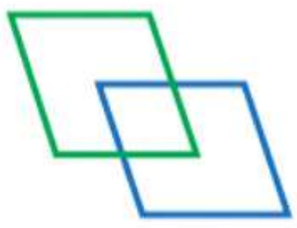
مراجعة المهارات

يعرض كل شكلٍ صورةً أصليةً وصورتها المنعكسة بالنسبة لخط ما. انسخ كل شكلٍ وارسم خط الانعكاس

50.

51.

52.

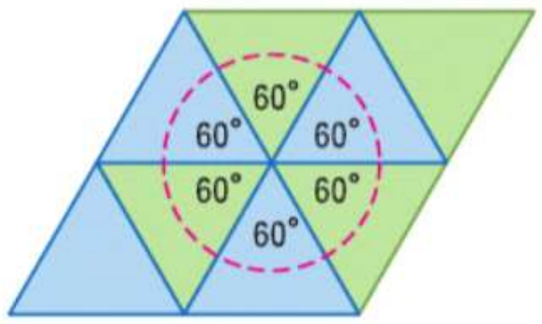


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-4 مختبر الهندسة
الفسيفساء

الفسيفساء عبارة عن نمط شكلي أو أكثر يغطي مستوى معين بحيث لا تبقى مسافات فارغة أو متداخلة. مجموع الزوايا التي تحيط برأس الفسيفساء يساوي 360°.

تتشكل **الفسيفساء المنتظمة** بنوع واحد من المضلعات المنتظمة. سيشكل المضلع المنتظم فسيفساء إذا كان به قياس زاوية داخلية يمثل معامل بمقدار 360 درجة. وتتشكل **الفسيسفاء شبه المنتظمة** بمضلعين منتظمين أو أكثر.



النشاط 1 الفسيفساء المنتظمة

حدد ما إذا كان كل مضلع منتظم سيشكّل فسيفساء في المستوى الإحداثي أو لا. اشرح.

a. سداسي الأضلاع

لنفترض أن x يمثل قياس إحدى الزوايا الداخلية لسداسي الأضلاع.

$$\begin{aligned} x &= \frac{180(n-2)}{n} && \text{قانون الزوايا الداخلية} \\ &= \frac{180(6-2)}{6} && n = 6 \\ &= 120 && \text{بسط.} \end{aligned}$$

بما أن 120 هو معامل 360، سيشكل سداسي الأضلاع المنتظم فسيفساء في المستوى الإحداثي.

b. عشاري الأضلاع

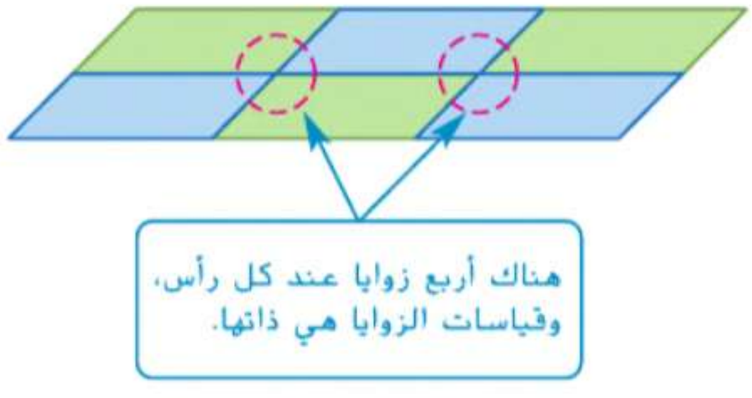
لنفترض أن x يمثل قياس أحدى الزوايا الداخلية في عشاري الأضلاع المنتظم.

$$\begin{aligned} x &= \frac{180(n-2)}{n} && \text{قانون الزوايا الداخلية} \\ &= \frac{180(10-2)}{10} && n = 10 \\ &= 144 && \text{بسط.} \end{aligned}$$

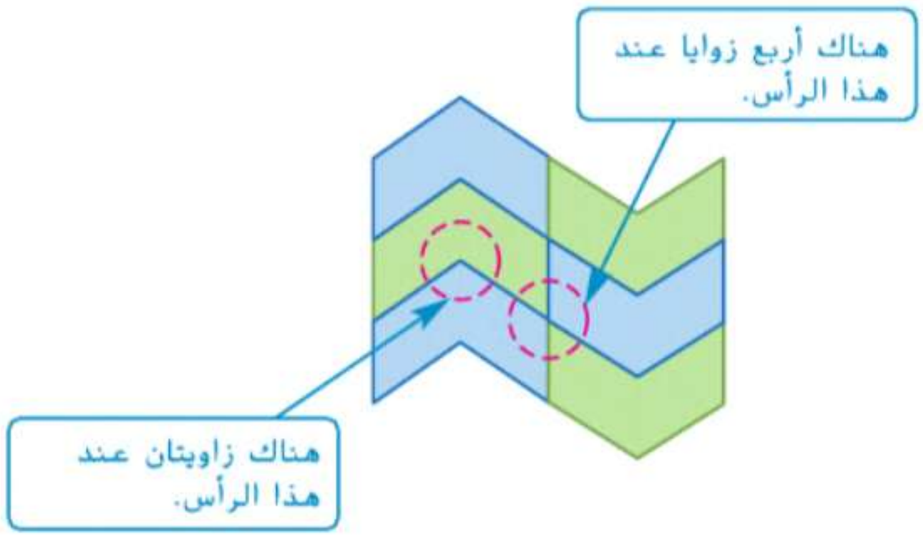
بما أن 144 ليس معامل 360، لن يشكل عشاري الأضلاع المنتظم فسيفساء في المستوى الإحداثي.

تصبح الفسيفساء **موحدة** إذا كان بها تنظيم واحد للأشكال والزوايا في كل رأس.

موحدة



غير موحدة

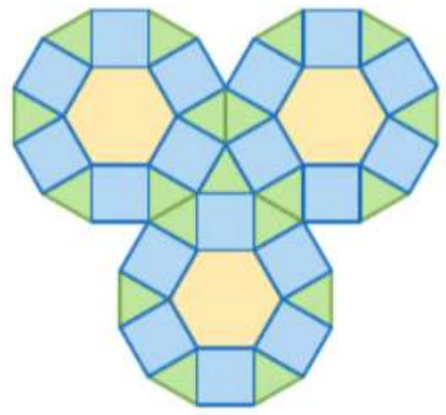


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النشاط 2 تصنيف الفسيفساء

حدد ما إذا كان كل نمط مما يلي عبارة عن فسيفساء أو لا، وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر هل هو فسيفساء *منتظمة، أم شبه منتظمة، أم ليست أي منهما، وموحدة أو ليست موحدة.*

a.

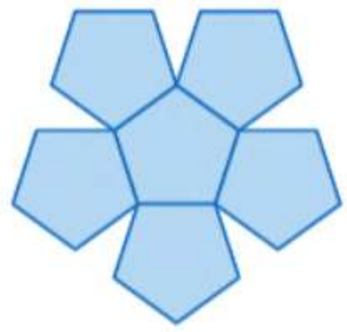


لا يوجد مسافات فارغة، ولا يوجد أشكال متداخلة، إذًا النمط عبارة عن **فسيفساء**.

تتكون الفسيفساء من أشكال منتظمة من سداسيات الأضلاع والمربعات والمثلثات متساوية الأضلاع، إذًا هي فسيفساء **شبه منتظمة**.

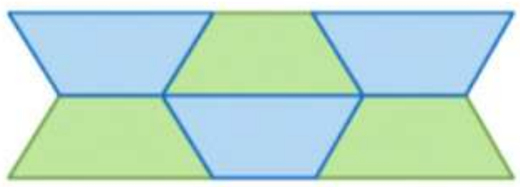
توجد أربع زوايا حول بعض الرؤوس وخمس زوايا حول البعض الآخر، إذًا الفسيفساء **ليست موحدة**.

b.



توجد مسافة غير مملوءة، إذًا النمط **ليس فسيفساء**.

c.



لا توجد مسافات فارغة، ولا توجد أشكال متداخلة، إذًا النمط عبارة عن **فسيفساء**.

تتكون الفسيفساء من أشباه منحرف، وهي مضلعات ليست منتظمة، إذًا الفسيفساء **ليست** منتظمة ولا شبه منتظمة.

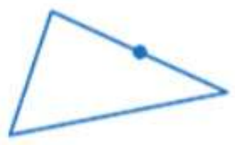
توجد أربع زوايا حول كل رأس من الرؤوس وقياسات الزوايا واحدة عند كل رأس، إذًا الفسيفساء **موحدة**.

يمكنك استخدام خصائص الفسيفساء لتصميم الفسيفساء وإنشائها.

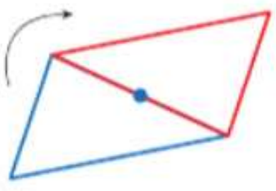
النشاط 3 رسم الفسيفساء

ارسم مثلثًا واستخدمه لإنشاء فسيفساء.

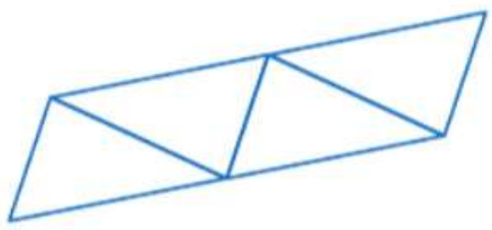
الخطوة 1 ارسم مثلثًا وجد نقطة منتصف أحد أضلاعه.



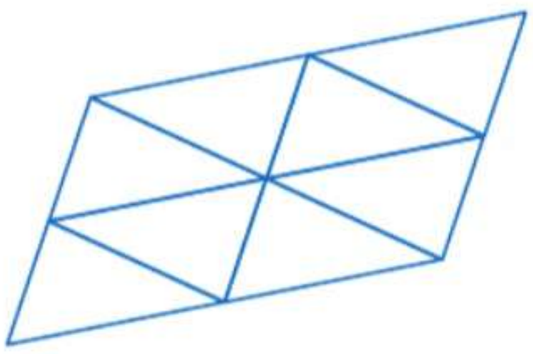
الخطوة 2 قم بدوران المثلث بمقدار 180° حول النقطة.



الخطوة 3 قم بإزاحة المثلثين لعمل صف.



الخطوة 4 قم بإزاحة الصف لعمل فسيفساء.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نشاط 4 الفسيفساء باستخدام التكنولوجيا

استخدم برنامج Geometer's Sketchpad لإنشاء فسيفساء.

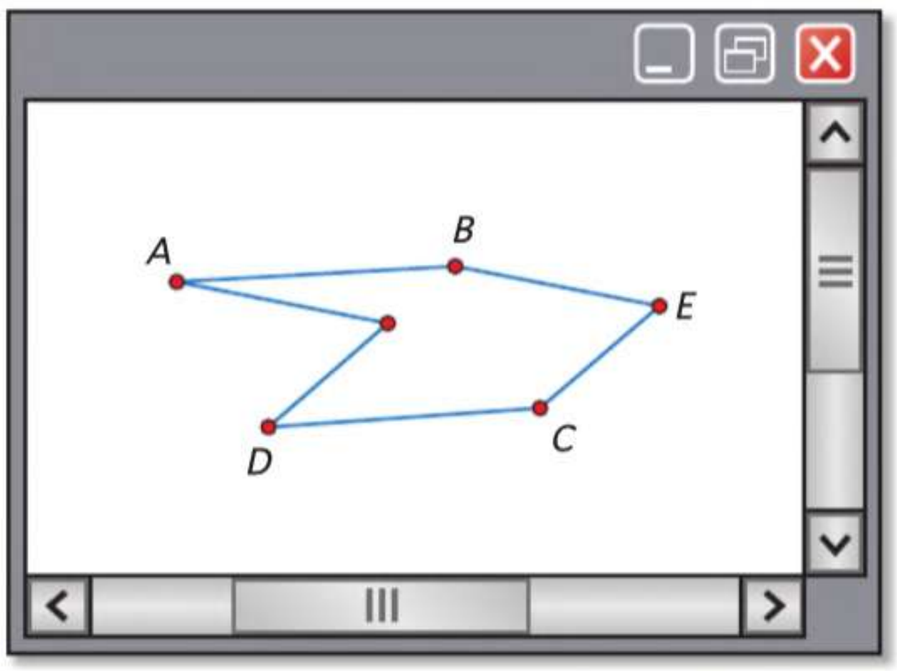
الخطوة 1 أدخل ثلاث نقاط وأنشئ مستقيما يمر بنقطتين منها. ثم أنشئ مستقيما يوازي المستقيم الأول ويمر بالنقطة الثالثة باستخدام خيار **Parallel Line (مستقيم موازٍ)** من قائمة **Construct (إنشاء)**. أكمل متوازي الأضلاع وحدد النقاط A و B و C و D. قم بإخفاء المستقيمات.

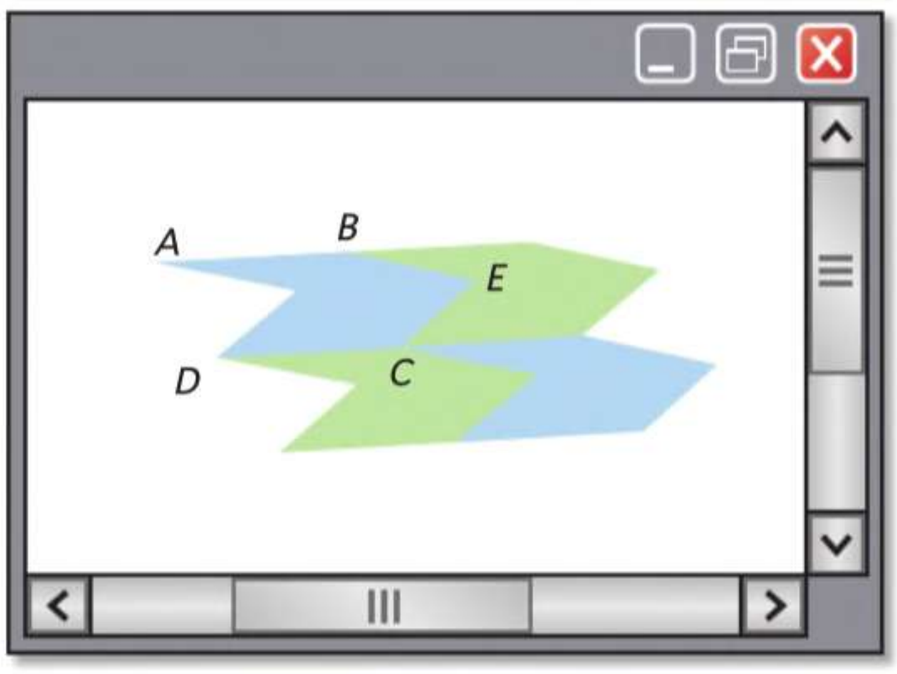
الخطوة 2 أدخل نقطة أخرى ولتكن E داخل متوازي الأضلاع. ارسم قطعا مستقيمة بين A و B و B و E و E و C و C و D.

الخطوة 3 ظلّل النقطة B ثم النقطة A. من قائمة **Transform (تحويل)**. اختر **Mark Vector (تحديد المتجهات)**. واختر $\overline{BE}$ و $\overline{EC}$، والنقطة E. ومن قائمة **Transform (تحويل)**. اختر **Translate (إزاحة)**.

الخطوة 4 بدءًا من النقطة A. اختر جميع الرؤوس التي حول محيط المضلع. اختر **Hexagon Interior (داخل سداسي الأضلاع)** من قائمة **Construct (إنشاء)**.

الخطوة 5 اختر النقطة A ثم النقطة B وحدد المتجه كما فعلت في الخطوة 3. حدد داخل المضلع واختر **Translate (إزاحة)** من قائمة **Transform (تحويل)**. استمر في عمل الفسيفساء بتحديد المتجهات وإزاحة المضلع. يمكنك اختيار **Color (اللون)** من قائمة **Display** لإنشاء نمط ملون.





التمارين

حدد هل كل مضلع منتظم سيشكّل فسيفساء في المستوى الإحداثي أو لا. اكتب نعم أو لا. اشرح.

1. مثلث
2. خماسي أضلاع
3. سداسي عشري

حدد ما إذا كان كل نمط مما يلي عبارة عن فسيفساء أو لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر هل هو *فسيفساء منتظمة، أو شبه منتظمة، أو ليس أي منهما وفسيفساء موحدة أو ليست موحدة*.

4.
5.
6.

ارسم فسيفساء باستخدام الشكل (الأشكال) التالية

7. ثماني أضلاع ومربع
8. سداسي أضلاع ومثلث
9. مثلث قائم الزاوية
10. شبه منحرف ومتوازي أضلاع
11. **الكتابة في الرياضيات** اذكر أمثلة على استخدام الفسيفساء في المعمار والترصيع بالفسيفساء والأعمال الفنية. واشرح طريقة استخدام الفسيفساء في كل مثال.
12. التخمين اذكر شكلاً تعتقد أنه سيشكل فسيفساء في مساحة ثلاثية الأبعاد. اشرح استنتاجك.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10-5 التناظر

السابق

- لقد رسمت انعكاس الأشكال ودورانها.

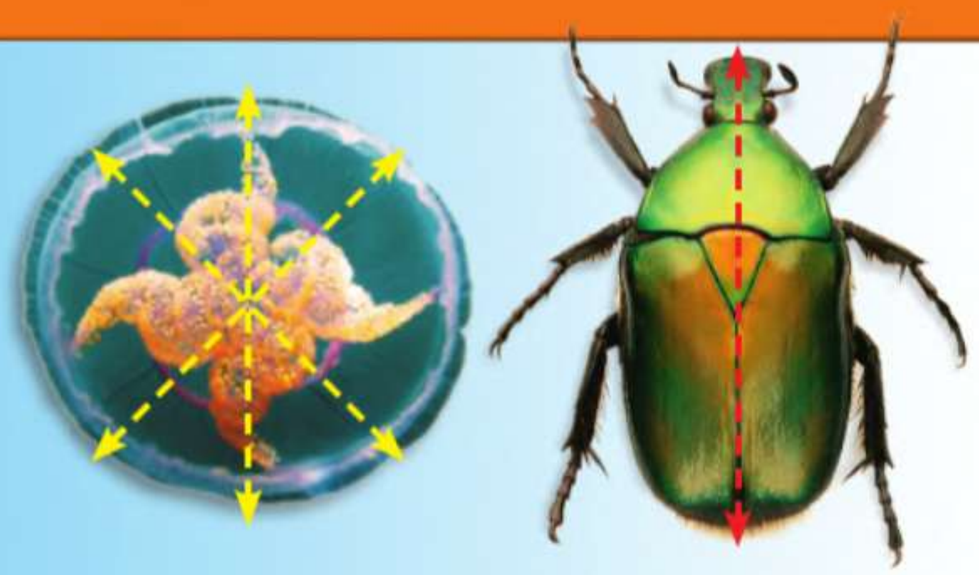
الحالي

1 تحديد عمليات التناظر المحوري والدوراني في الأشكال ثنائية الأبعاد.

2 تحديد عمليات التناظر المحوري وفي المستوى الإحداثي في الأشكال ثلاثية الأبعاد.

لماذا؟

- في مملكة الحيوانات، غالبًا ما يدل التناظر في جسم الحيوان على تعقيد جسم الحيوان. والحيوانات التي تظهر تناظرًا محوريًا، مثل الحشرات، عادة ما تكون أنماط حياتها أكثر تعقيدًا من تلك التي تظهر تناظرًا دورانيًا، مثل قنديل البحر.



المفردات الجديدة

التناظر symmetry
تناظر محوري line symmetry
خط/محور التناظر line of symmetry
التناظر الدوراني rotational symmetry
مركز التناظر center of symmetry
ترتيب التناظر order of symmetry
مقدار التناظر magnitude of symmetry
التناظر في المستوى الإحداثي plane symmetry
التناظر المحوري axis symmetry

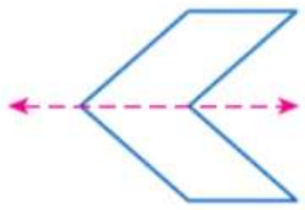
ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.
البحث عن التوافق في التبريرات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 التناظر في الأشكال ثنائية الأبعاد يوجد في الشكل **تناظر** إذا كان هناك انعكاس ذو حركة ثابتة، أو إزاحة، أو دوران، أو انعكاس انزلاقي يرسم الشكل على نفسه. وأحد أنواع التناظر هو التناظر المحوري.

المفهوم الأساسي التناظر المحوري

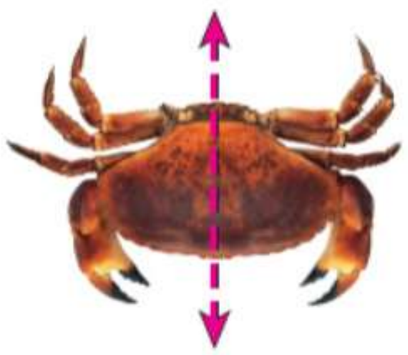
الشكل في المستوى له **تناظر محوري** (أو *تناظر انعكاس*) إذا كان من الممكن انعكاس الشكل على ذاته عن طريق انعكاس في أحد المستقيمات، ويسمى **محور التناظر** .



مثال 1 من الحياة اليومية تعريف التناظرالمحوري

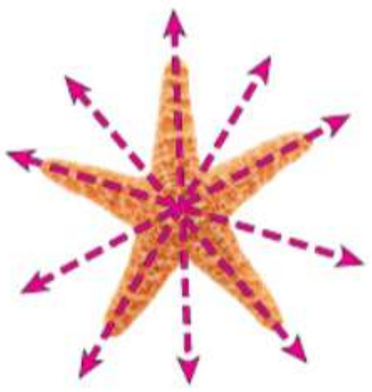
الشواطئ اذكر هل الجسم يبدو أن به تناظرًا محوريًا أو لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

a.



نعم؛ السلطعون له مستقيم تناظر واحد.

b.



نعم؛ نجم البحر له خمسة مستقيمات تناظرية.

c.

لا؛ لا توجد مستقيمات في صدفة المحار يمكن أن تنعكس فيه بحيث تتماثل مع ذاتها.

تمرين موجّه

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا محوريًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، انسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

1A.

1B.

1C.

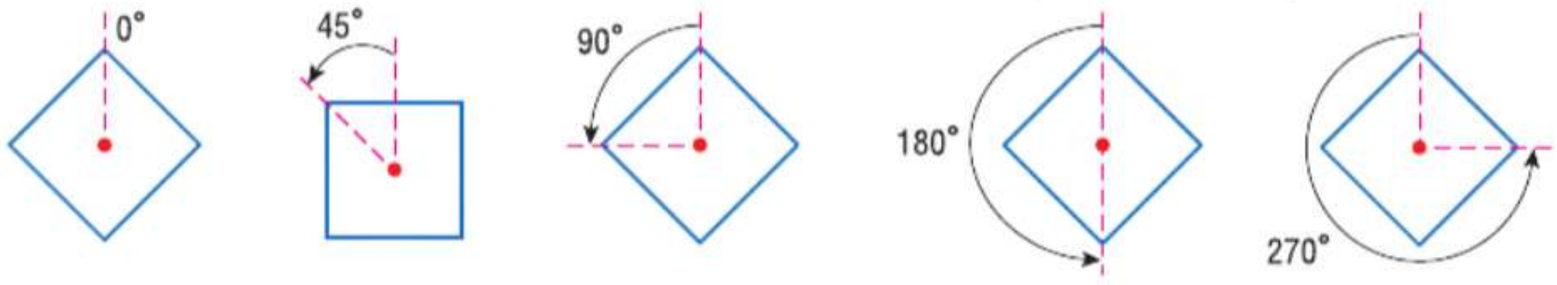
McGraw-Hill Education مؤسسة ماكجرو هيل للتعليم
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة ماكجرو هيل للتعليم

ويوجد نوع آخر من أنواع التناظر وهو التناظر الدوراني.

المفهوم الأساسي التناظر الدوراني

يكون للشكل في المستوى الإحداثي **تناظر دوراني** (أو *تناظر قطري*) إذا كان يمكن انعكاسه على نفسه عن طريق الدوران ما بين 0° و360° حول مركز الشكل، ويسمى **مركز التناظر** (أو *نقطة التناظر*).

الأمثلة الشكل التالي له تناظر دوراني لأن الدوان بمقدار 90° أو 270° يعكس الشكل على نفسه.



عدد المرات التي ينعكس فيها الشكل على نفسه عند الدوران من 0° إلى 360° يطلَق عليه **ترتيب التناظر**. **مقدار التناظر** (أو زاوية التناظر) هي أصغر زاوية يمكن أن يدور بها الشكل بحيث ينعكس على ذاته. ويرتبط ترتيب الدوران ومقداره بالمعادلة التالية.

$$\text{المقدار} = 360° \div \text{الترتيب}$$

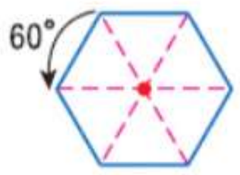
في الشكل السابق يوجد تناظر دوران بترتيب 4 ومقداره 90°.

مثال 2 تعريف التناظر الدوراني

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أو لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

a.

نعم؛ الشكل السداسي المنتظم له 6 تناظرات دورانية ومقداره 6 ÷ 360° أو 60°. المركز هو تقاطع الأقطار.

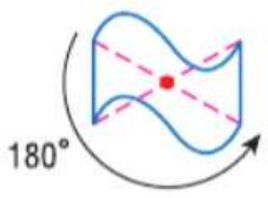


b.

لا؛ لا يوجد تناظر دوراني بين 0° و 360° ينعكس المثلث قائم الزاوية على نفسه.

c.

نعم؛ الشكل له 2 من التناظرات الدورانية ومقداره 2 ÷ 360° أو 180°. المركز هو تقاطع الأقطار.



تمرين موجّه

الزهور اذكر هل يبدو أن في الزهرة تناظر دوراني أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الزهرة وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

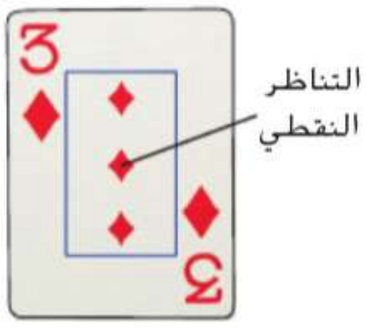
2A.

2B.

2C.

نصيحة دراسية

التناظر النقطي يوجد في الشكل *تناظر نقطي* إذا كان يمكن انعكاسه على نفسه عن طريق الدوران بزاوية 180°. يوضح الشكل التناظر النقطي. وذلك لأنه يوجد تماثل بين الجانب العلوي جهة اليسار والجانب المقابل له في الأسفل.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

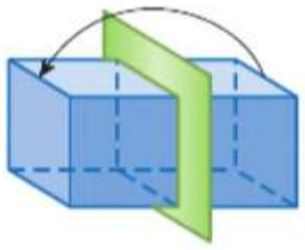
2 التناظر في الأشكال ثلاثية الأبعاد

قد يوجد تناظر في الأشكال ثلاثية الأبعاد أيضا.

المفهوم الأساسي التناظرات ثلاثية الأبعاد

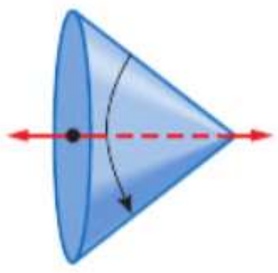
التناظر في المستوى الإحداثي

يحدث **التناظر في المستوى الإحداثي** في الشكل ثلاثي الأبعاد إذا كان يمكن أن ينعكس الشكل على نفسه عن طريق الانعكاس في المستوى الإحداثي.



التناظر المحوري

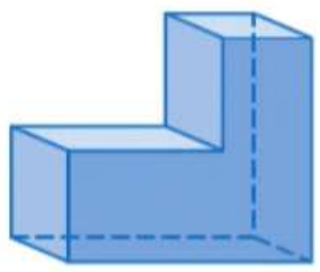
يحدث **التناظر المحوري** في الشكل ثلاثي الأبعاد إذا كان يمكن أن ينعكس الشكل على نفسه عن طريق الدوران بين 0° و 360° في أحد المستقيمات.



مثال 3 التناظر ثلاثي الأبعاد

اذكر هل الشكل به تناظر في المستوى الإحداثي أم تناظر محوري أم كلاهما أم ليس أيًا منهما.

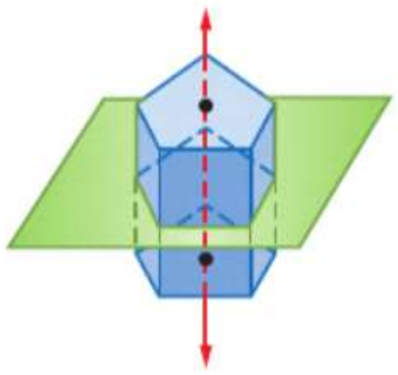
a. منشور على شكل حرف L

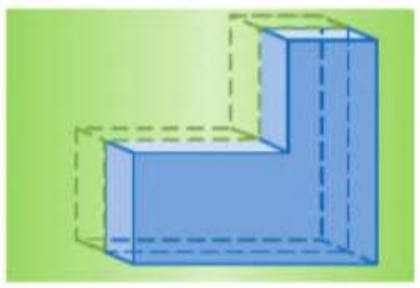


التناظر في المستوى الإحداثي الإحداثي

b. منشور خماسي منتظم

كلاهما، تناظر في المستوى الإحداثي وتناظر محوري





مراجعة المصطلحات

المنشور هو شكل متعدد الوجوه له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان يتصل ببعضه عن طريق أوجه متوازي الأضلاع

تمرين موجّه

الرياضات ***اذكر هل كل أداة من الأدوات الرياضية بها تناظر في المستوى الإحداثي أم تناظر محوري أم كليهما أم ليس أيًا منهما*** **(مع تجاهل الخياطة أو العلامات في الأداة).**

3A.

3B.

3C.

3D.

الربط بالحياة اليومية

تم تصميم كرة القدم بطريقة ديناميكية هوائية حتى تلف بعد ركلها، بحيث يكون شكلها كروي متطاول. وهذا يعني أن أحد محاور التناظر أطول من المحاور الأخرى.

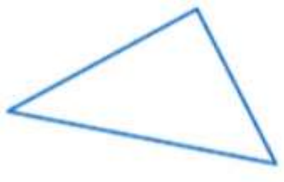
المصدر: الدليل الإرشادي الكامل إلى كرة القدم

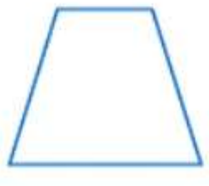
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

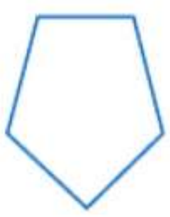
مثال 1 **اذكر هل يبدو أن الشكل به تناظر خطي أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.**

1.

2. 

3. 

مثال 2 **اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.**

4. 

5.

6.

المثالان 1 و 2

7. **مبنى البرلمان الأمريكي** تعدّ القبة التي تم اكتمال بنائها في عام 1863. أحدث الإضافات لمبنى البرلمان الأمريكي في الولايات المتحدة. وهي مدعومة بدعامات حديدية عددها 36 وبها 108 نافذة مقسمة بالتساوي على ثلاثة مستويات.

a. باستثناء قمة القبة، كم عدد مستقيمات التناظر الأفقية والرأسية التي يبدو أنها موجودة في القبة؟

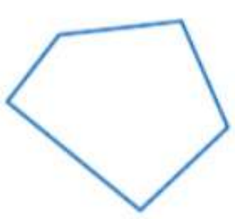
b. هل القبة لها تناظر دوراني؟ إذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر ترتيب التناظر ومقداره.

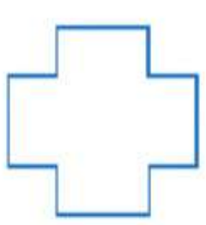
مثال 3

8. اذكر هل الشكل به *تناظر* في المستوى الإحداثي أم *تناظر محوري* أم *كلا التناظرين* أم *لا شيء منهما*.

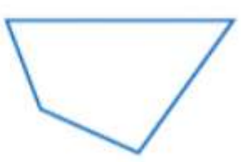
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **الانتظام ذكر هل يبدو أن الشكل يتضمن تناظرًا محوريًا أو لا. اكتب نعم أو لا. إذا كان الأمر كذلك، فانسخ الشكل، وارسم كل مستقيمات التناظر، واذكر عددها.**

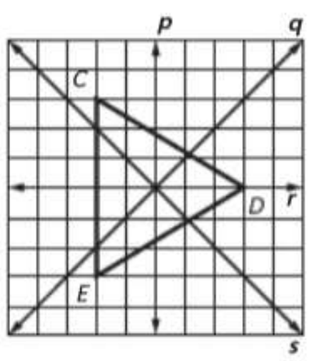
9. 

10. 

11.

12. 

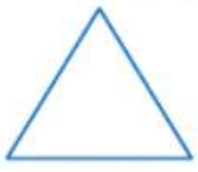
13. تم رسم المثلث CDE في المستوى الإحداثي. أي مستقيم هو مستقيم التناظر؟

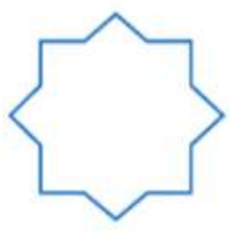


اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

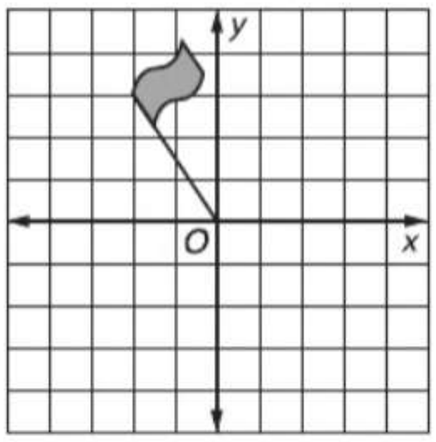
14.

15.

16. 

17. 

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



18. تم دوران علَم بمقدار 180° في المستوى الإحداثي. أي عبارة صحيحة؟

A الشكل متناظر حول النقطة (0, 0).

B الشكل متناظر حول المحور الرأسي y.

C الشكل متناظر حول المحور الأفقي x.

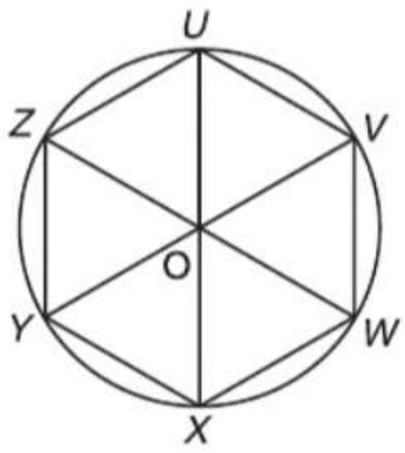
D الشكل متناظر حول النقطة (−3, 2).

اذكر هل الشكل به تناظر في المستوى الإحداثي أم تناظر محوري أم كلاهما أم ليس أيًا منهما.

19.

20.

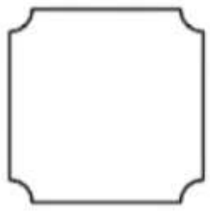
21.



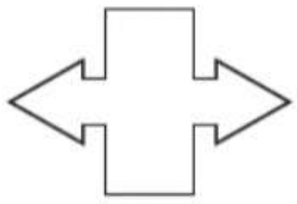
22. سداسي الأضلاع $UVWXYZ$ محاط بدائرة لتصميم بلاطة. أي نقطة توضح موقع النقطة U بعد الدوران حول نقطة المركز O بمقدار 120° باتجاه عقارب الساعة ؟

23. فنان جرافيك يريد تصميم شعار باستخدام مستقيمات التناظر. أي شعار لا يوجد به 4 مستقيمات تناظر بالتحديد؟

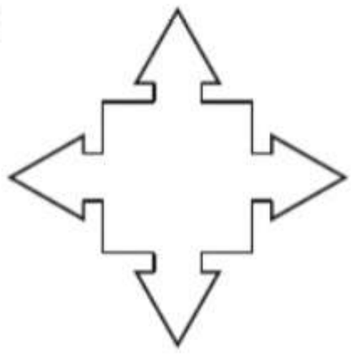
A



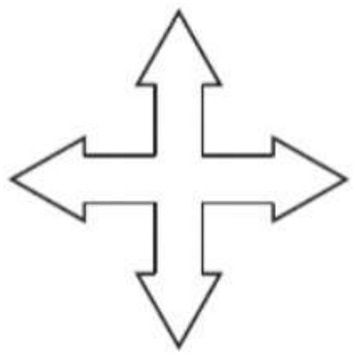
B



C



D



24. تنظر أمل إلى تصميمات سترة.
أي عبارة تصف التناظر في التصميم؟

A التصميم به 4 مستقيمات تناظر بالتحديد.

B التصميم به 3 مستقيمات تناظر بالتحديد.

C التصميم به مستقيمان تناظر بالتحديد.

D التصميم به مستقيم تناظر واحد بالتحديد.

25. يصمم أحمد شعارًا لناديه.
أي عبارة تصف التناظر في التصميم؟

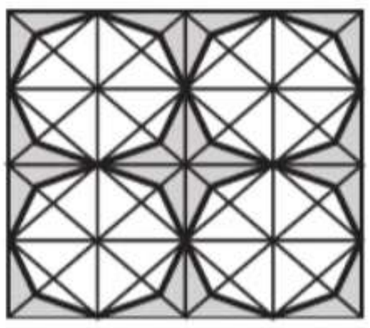
A التصميم به مستقيم تناظر واحد فقط.

B التصميم به مستقيما تناظر فقط.

C التصميم به 3 مستقيمات تناظر فقط.

D التصميم به 4 مستقيمات تناظر فقط.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



26. ابتكر فنان فسيفساء برسم مستقيمات التناظر في مربع ثم استخدمها في رسم التصميم. ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأحد الأشكال ثمانية الأضلاع المحدبة في التصميم؟

هندسة الإحداثيات **حدد ما إذا كان الشكل الموضح بالرؤوس له تناظر محوري و/أو *دوراني*.**

27 A(−4, 0) B(0, 4) C(4, 0) D(0 −4)

28. R(−3, 3) S(−3 −3) T(3, 3)

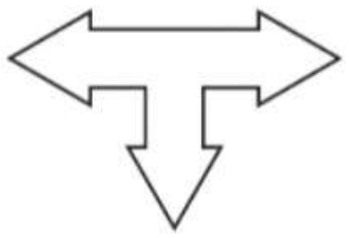
الجبر **مثّل الدالة بيانيًا وحدد ما إذا كان التمثيل البياني له تناظر *محوري* و/أو *دوراني* أم لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر ترتيب التناظر ومقداره واكتب معادلات لأي مستقيمات تناظر.**

29. $y = x$

30. $y = x^2 + 1$

31. $y = -x^3$

32. يصمم إسماعيل شعارًا لناديه. أي عبارة تصف التناظر في التصميم؟



A التصميم به مستقيم تناظر واحد فقط.

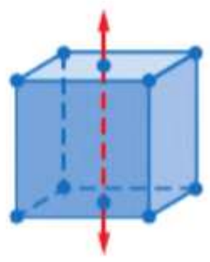
B التصميم به مستقيما تناظر فقط.

C التصميم به 3 مستقيمات تناظر فقط.

D التصميم به 4 مستقيمات تناظر فقط.

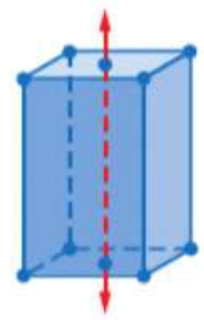
علم البلوريات **حدد هل البلورات التالية لها تناظر في *المستوى الإحداثي* و/أو تناظر *محوري* أم لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر مقدار التناظر.**

33.



34.

35.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **النقد** يقول أسامة أن الشكل A له تناظر محوري فقط. ويقول أيمن أن الشكل A له تناظر دوراني فقط. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. انظر الهامش.

الشكل A

37. **التحدي** شكل رباعي له بالتحديد مستقيما تناظر. $y = x - 1$ و $y = -x + 2$. جـــد الرؤوس المحتملة للشكل. مثل الشكل ومستقيمات التناظر بيانيًا.

38. **التبرير** شكل متعدد الوجوه له تناظر محوري بترتيب 3، ولكن ليس له تناظر في المستوى. ما هو الشكل؟ اشرح. انظر الهامش.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

39. كم عدد مستقيمات التناظر التي يمكن رسمها على صورة العلم الكندي التالي؟

A 0
B 1
C 2
D 4

40. الإجابة الشبكية ما ترتيب التناظر للشكل التالي؟

41. الجبر شركة حواسيب تشحن الحواسيب في صناديق خشبية يزن الواحد منها 45 kg عندما تكون فارغة. فإذا كان كل حاسوب لا يزن أكثر من 13 kg. أي متباينة تعطي أفضل وصف لإجمالي الوزن بالكيلو جرامات w لصندوق الحاسوب الذي يحتوي على عدد c من الحواسيب؟

F $c \leq 13 + 45w$
G $c \geq 13 + 45w$
H $w \leq 13c + 45$
J $w \geq 13c + 45$

42. SAT/ACT ما هو ميل المستقيم المحدد بالمعادلة الخطية $5x - 2y = 10$؟

A -5
B $-\frac{5}{2}$
C $-\frac{2}{5}$
D $\frac{2}{5}$
E $\frac{5}{2}$

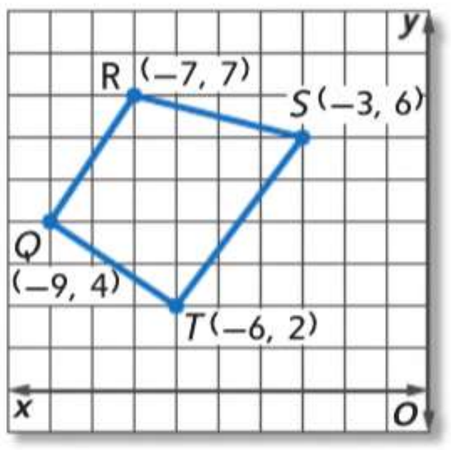
مراجعة شاملة

المثلث JKL له الرؤوس $J(1, 5)$ و $K(3, 1)$، و $L(5, 7)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته بعد التحويل المشار إليه.
(الدرس 4-10)

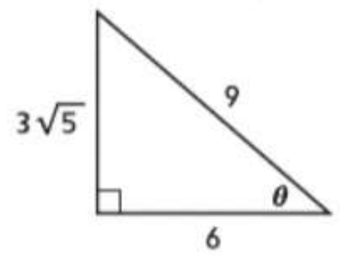
43. الإزاحة: بطول $\langle -7, -1 \rangle$
الانعكاس: في المحور x

44. الإزاحة: بطول $\langle 1, 2 \rangle$
الانعكاس: في المحور y

45. الشكل الرباعي $QRST$ موضح إلى اليسار. ما هي صورة النقطة R بعد الدوران حول نقطة الأصل بمقدار $180°$ عكس اتجاه عقارب الساعة؟
(الدرس 3-10)



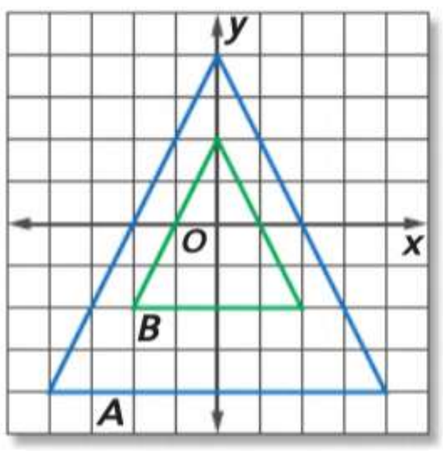
46. الإنشاءات نافذة أبعادها موضحة فيما يلي. استخدم قياسات أضلاع المثلث لتوضيح أن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.



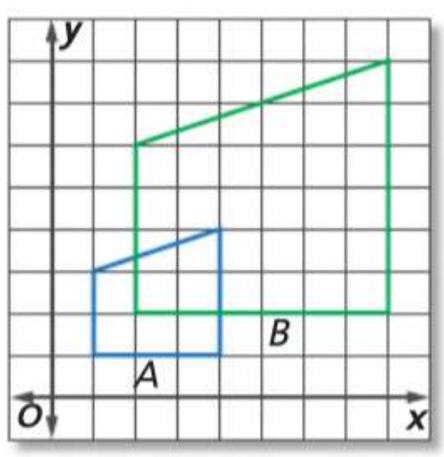
مراجعة المهارات

حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من الشكل A إلى الشكل B عبارة عن تكبير أو تصغير. ثمّ جد معامل مقياس تغيير الأبعاد.

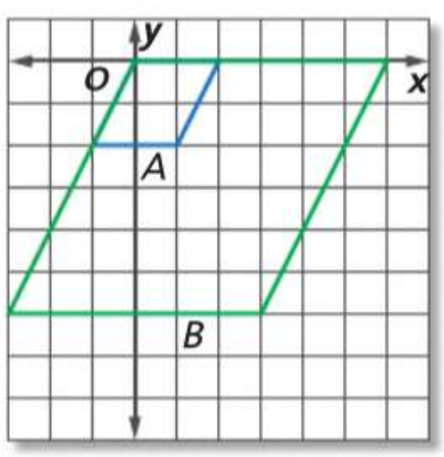
47.



48.



49.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

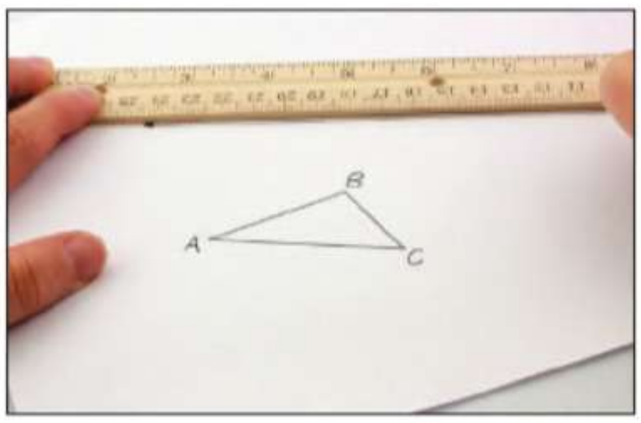
10-5 مختبر الهندسة
استكشاف الإنشاءات باستخدام جهاز عاكس

الجهاز العاكس هو عبارة عن أداة مصنوعة من البلاستيك شبه الشفاف تعكس الأجسام. وأفضل درجة انعكاس لها تكون عندما توضع على سطح مسطح في غرفة جيدة الإضاءة. ويمكنك استخدام الأداة العاكسة لتحويل الأشكال الهندسية.

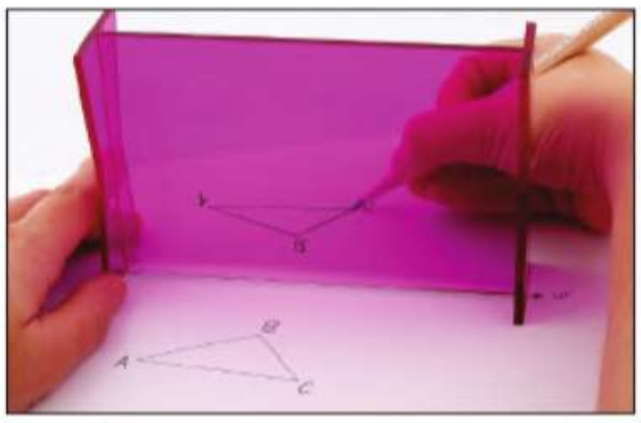
النشاط 1 انعكاس مثلث

استخدم الجهاز العاكس لعكس المثلث $\triangle ABC$ في w. ضع اسما للانعكاس $\triangle A'B'C'$.

الخطوة 1 ارسم المثلث $\triangle ABC$ وخط الانعكاس w.



الخطوة 2 باستخدام الجهاز العاكس على المستقيم w. ارسم النقاط لرؤوس الانعكاس.



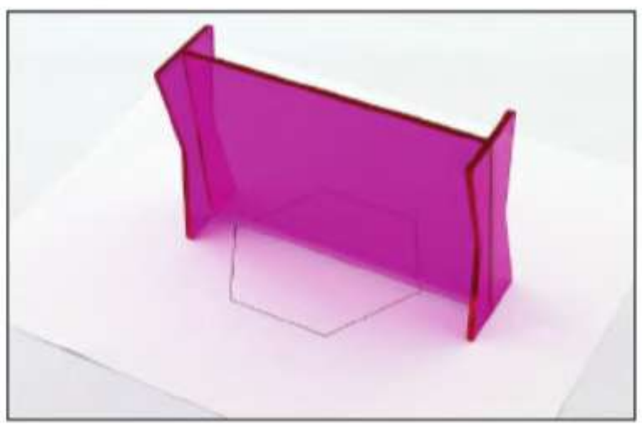
الخطوة 3 استخدم المسطرة لتوصيل النقاط لتكوين المثلث $\triangle A'B'C'$.

استخدمنا الفرجار والمسطرة المستقيمة والخيط والمطويات الورقية لعمل الإنشاءات الهندسية. ويمكنك أيضا استخدام الأداة العاكسة في تلك الإنشاءات.

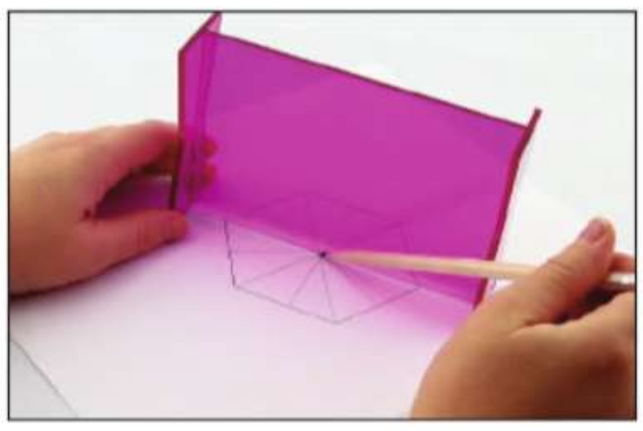
النشاط 2 إنشاء محاور التناظر

استخدم الأداة العاكسة لإنشاء محاور التناظر لسداسي الأضلاع المنتظم.

الخطوة 1 ارسم شكل سداسي منتظم. ضع الأداة العاكسة على الشكل وحركها حتى يتطابق أحد نصفي الشكل مع انعكاس النصف الآخر. ثم ارسم محور التناظر.



الخطوة 2 كرر الخطوة رقم 1 حتى تجد جميع محاور التناظر.

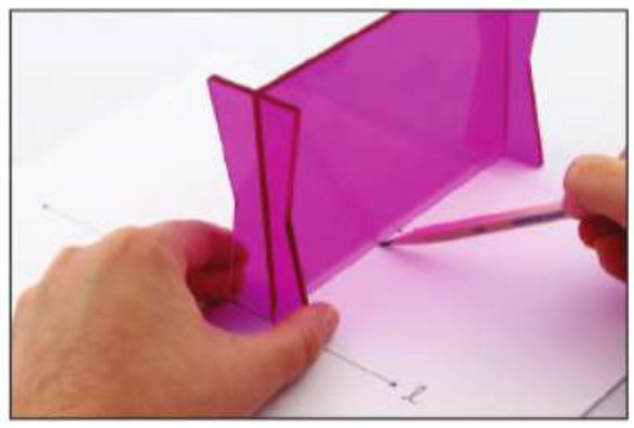


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

النشاط 3 إنشاء مستقيم موازٍ

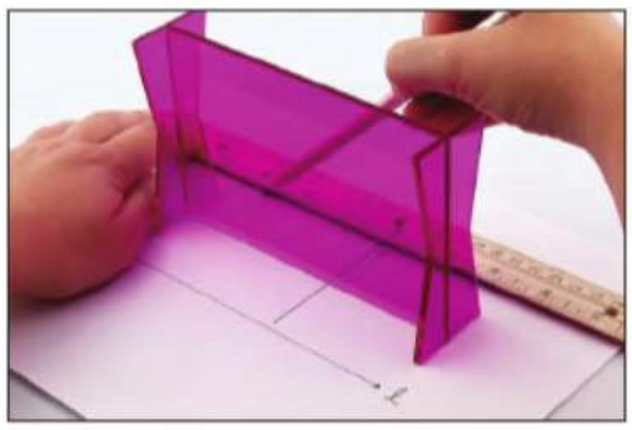
استخدم الجهاز العاكس لعكس المستقيم ℓ على المستقيم m الموازي والذي يمر بالنقطة P.

الخطوة 1



ارسم المستقيم ℓ والنقطة P. ضع الجانب القصير للجهاز العاكس على المستقيم ℓ والجانب الطويل على النقطة P. ارسم مستقيما بحيث يكون متعامدًا على المستقيم ℓ من خلال النقطة P.

الخطوة 2

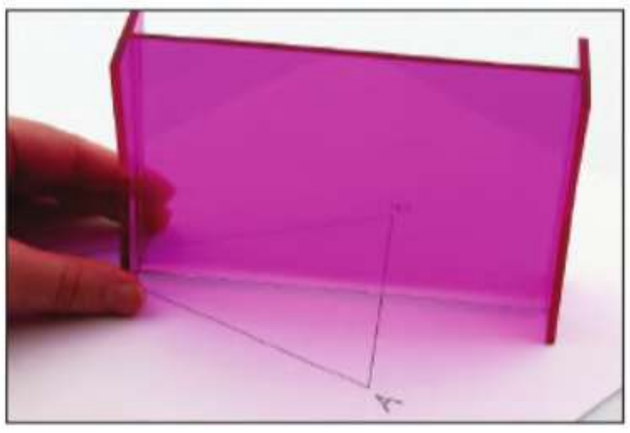


ضع الأداة العاكسة بحيث يتطابق المستقيم العمودي مع ذاته ويمر انعكاس المستقيم ℓ بالنقطة P. استخدم المسطرة لرسم المستقيم الموازي m الذي يمر بالنقطة P.

في درس الاستكشاف 1-5، أنشأنا منصفات عمودية بالمطويات الورقية. ويمكنك أيضا استخدام الأداة العاكسة لإنشاء منصفّات عمودية للمثلث.

النشاط 4 إنشاء المنصفات العمودية

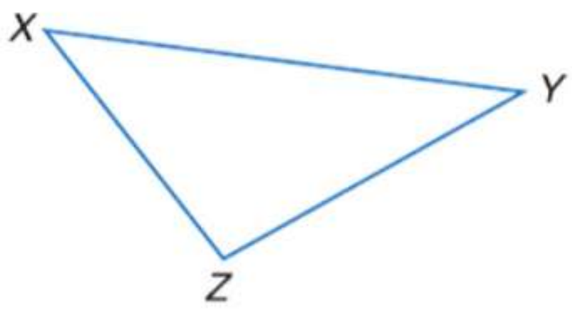
استخدم الأداة العاكسة لإيجاد مركز الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle ABC$.



الخطوة 1 ارسم المثلث $\triangle ABC$. ضع الجهاز العاكس بين النقطة A والنقطة B واضبطها إلى أن تتطابق النقطة A مع النقطة B. ارسم محور التناظر.

الخطوة 2 كرر الخطوة 1 مع الضلعين $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$. ثم ضع نقطة عند تعامد المنصفات العمودية الثلاثة. وهذا هو مركز الدائرة المحيطة للمثلث.

تمثيل النماذج والتحليل



1. كيف تعرف أن الخطوات في النشاط 4 تعطي المنصف العمودي الفعلي ومركز الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle ABC$؟

2. أنشئ منصف الزاوية وجـــد مركز الدائرة الداخلية للمثلث $\triangle XYZ$. اذكر كيف استخدمت الأداة العاكسة في الرسم.

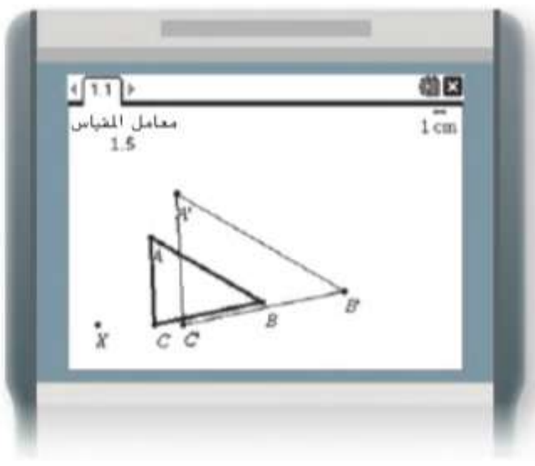
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

10-6 مختبر تقنية التمثيل البياني عمليات تغيير الأبعاد(التمدد)

يمكنك استخدام تقنية TI-Nspire لاستكشاف خواص عمليات تغيير الأبعاد.أو التمدد

النشاط 1 تغيير أبعاد المثلث

تغيير أبعاد المثلث بمعامل مقياس 1.5.



الخطوة 1 أضف صفحة **Geometry (هندسة)** جديدة. ثم من قائمة **Points & Lines (النقاط والمستقيمات)**. استخدم أداة **Point (نقطة)** لإضافة نقطة وسمها النقطة X.

الخطوة 2 من قائمة **Shapes (الأشكال)**. حدد **Triangle (مثلث)** وحدد ثلاث نقاط. وقم بتسمية النقاط A و B و C.

الخطوة 3 من قائمة **Actions (الإجراءات)**. استخدم أداة **Text** لإضافة النص **Scale Factor (معامل المقياس)** و 1.5 بشكل منفصل في الصفحة.

الخطوة 4 من قائمة **Transformation (تحويل)**. حدد **Dilation (تغيير الأبعاد)**. ثم حدد النقطة X. و $\triangle ABC$. والنص 1.5.

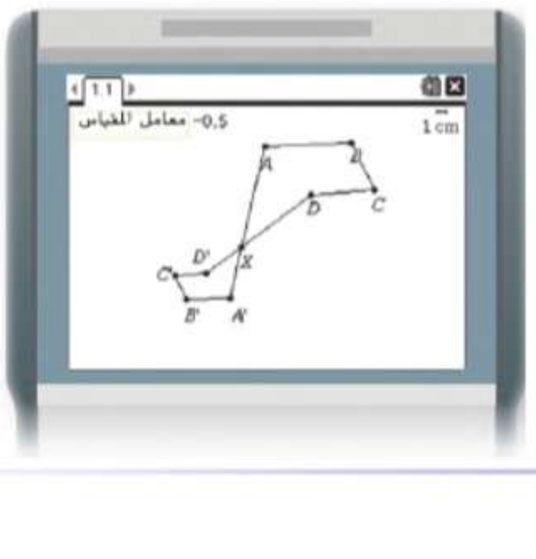
الخطوة 5 قم بتسمية النقاط على الصورة A' و B' و C'.

تحليل النتائج

1. باستخدام أداة **Slope (الميل)** في قائمة **Measurement (القياس)**. اذكر تأثير تغيير الأبعاد على $\overline{AB}$. وبذلك، كيف ترتبط المستقيمات التي تمر بالقطع المستقيمة $\overline{AB}$ و $\overline{A'B'}$ ببعضها البعض؟
2. ما تأثير تغيير الأبعاد على المستقيم الذي يقطع الضلع $\overline{CA}$؟
3. ما تأثير تغيير الأبعاد على المستقيم الذي يقطع الضلع $\overline{CB}$؟

النشاط 2 تغيير أبعاد المضلع

تغيير أبعاد المضلع بمعامل مقياس 0.5−.

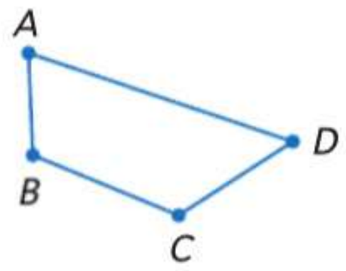


الخطوة 1 أضف صفحة **Geometry (هندسة)** جديدة وارسم المضلع $ABCDX$ كما هو موضح. أضف النص *Scale Factor (معامل المقياس)* و 0.5− في الصفحة.

الخطوة 2 من قائمة **Transformation (تحويل)**. حدد **Dilation (تغيير الأبعاد)**. ثم حدد النقطة X. والمضلع $ABCDX$. والنص 0.5−.

الخطوة 3 قم بتسمية النقاط على الصورة A' و B' و C' و D'.

تمثيل النماذج والتحليل



4. حلّل تأثير تغيير الأبعاد في النشاط 2 على الأضلاع التي تضم مركز تغيير الأبعاد.
5. حلّل تأثير تغيير أبعاد شبه المنحرف $ABCD$ الموضح بمعامل المقياس 0.75 ومركز تغيير الأبعاد عند النقطة A.
6. **التخمين** اذكر تأثير تغيير الأبعاد على المستقيمات التي تمر بمركز تغيير الأبعاد والمستقيمات التي لا تمر به.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

النشاط 3 تغيير أبعاد القطعة المستقيمة

غيّر أبعاد القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ بمعامل المقياس المشار إليه.

a. معامل المقياس: 0.75

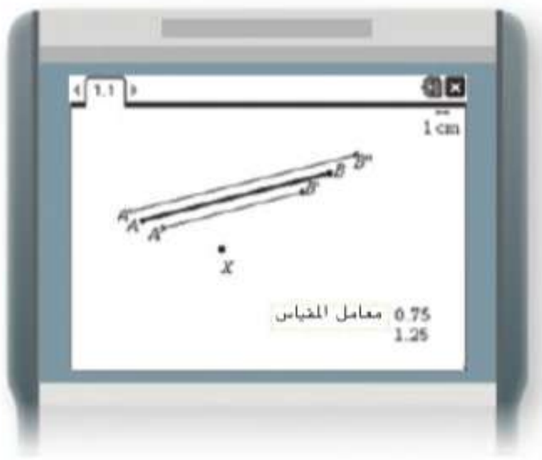
الخطوة 1 في صفحة **Geometry (هندسة)** جديدة، ارسم القطعة المستقيمة باستخدام قائمة **Points & Lines (النقاط والمستقيمات)**. سمي النقطتين الطرفيتين A و B. ثم أضف النقطة X وقم بتسميتها.

الخطوة 2 أضف النص *Scale Factor* (*معامل المقياس*) و 0.75 إلى الصفحة.

الخطوة 3 من قائمة **Transformation (تحويل)**. حدد **Dilation (تغيير الأبعاد)**. ثم حدد النقطة X، و $\overline{AB}$، والنص 0.75.

الخطوة 4 قم بتسمية القطعة المستقيمة التي تغيرت أبعادها $\overline{A'B'}$.

b. معامل المقياس: 1.25



الخطوة 1 أضف النص *1.25* في الصفحة.

الخطوة 2 من قائمة **Transformation**. حدد **Dilation**. ثم حدد النقطة X، و $\overline{AB}$، والنص 1.25.

الخطوة 3 قم بتسمية القطعة المستقيمة التي تغيرت أبعادها $\overline{A''B''}$.

تمثيل النماذج والتحليل

7. باستخدام أداة **Length (الطول)** من قائمة **Measurement (القياس)**. جـــد قياسات $\overline{AB}$، و $\overline{A'B'}$ و $\overline{A''B''}$.

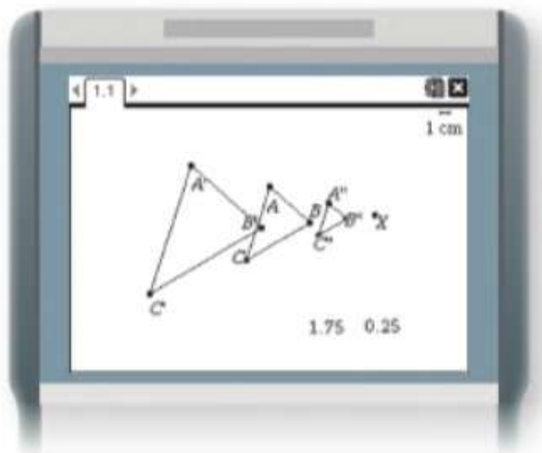
8. ما نسبة الضلع $A'B'$ إلى الضلع AB؟ وما نسبة الضلع $A''B''$ إلى AB؟

9. ما تأثير تغيير الأبعاد بمعامل المقياس 0.75 على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟
وما تأثير تغيير الأبعاد بمعامل المقياس 1.25 على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟

10. غيّر أبعاد القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ في النشاط 3 بمعامل المقياس -0.75 و -1.25. اذكر التأثير على طول كل قطعة مستقيمة تم تغيير أبعادها.

11. **التخمين** اذكر تأثير تغيير الأبعاد على طول القطعة المستقيمة.

12. اذكر تغيير الأبعاد من $\overline{AB}$ إلى $\overline{A'B'}$ ومن $\overline{A'B'}$ إلى $\overline{A''B''}$ في المثلثات الموضحة.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-6 عمليات تغيير الأبعاد(التمدد)

السابق:
- تم تعريف تغيير الأبعاد(التمدد) والتحقق منها في صورة تحويلات التشابه.

الحالي:
1. رسم عمليات تغيير الأبعاد(التمدد).
2. رسم عمليات تغيير الأبعاد(التمدد) في المستوى الإحداثي.

لماذا؟
- لا يزال بعض المصورين الفوتوغرافيين يفضلون الكاميرات التقليدية والأفلام لإنشاء صور سلبية. ومن تلك الصور السلبية، يستطيع المصورون الفوتوغرافيون عمل صور ذات أبعاد معينة.

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

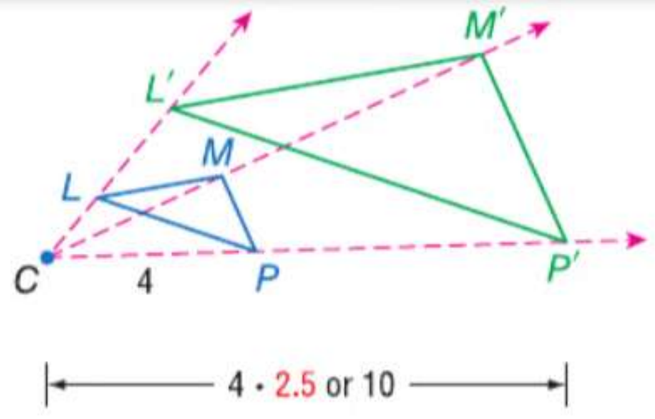
1 رسم عمليات تغيير الأبعاد(التمدد)

تغيير الأبعاد(التمدد) أو *المقياس* عبارة عن تحوّل تشابه يكبّر أو يصغر من الشكل نسبيًا فيما يتعلق بنقطة *المركز* ومعامل *المقياس*.

المفهوم الأساسي تغيير الأبعاد(التمدد) (التمدّد)

عملية تغيير الأبعاد(التمدد) ذات المركز C ومعامل المقياس الموجب k، $k \neq 1$، عبارة عن دالة تحدد نسبة النقطة P في الشكل إلى الصورة بحيث

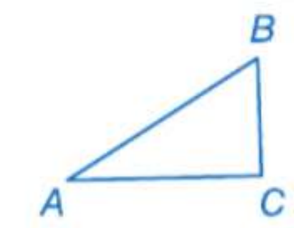
- إذا كانت النقطة P والنقطة C متطابقتين، فإن الصورة والصورة الأصلية يتكونان من النقطة ذاتها، أو
- إذا لم تكن النقطة P هي مركز عملية تغيير الأبعاد(التمدد)، فإن النقطة P' تقع على $\overrightarrow{CP}$ أو $CP' = k(CP)$.



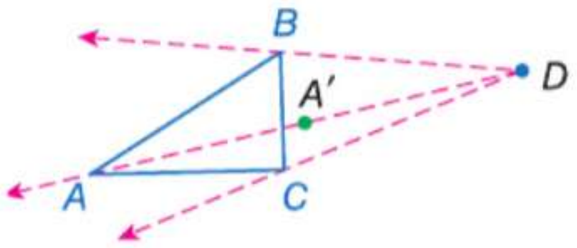
$\triangle L'M'P'$ عبارة عن صورة المثلث $\triangle LMP$ بناء على عملية تغيير أبعاد مركزها C ومعامل المقياس 2.5.

مثال 1 رسم عملية تغيير الأبعاد(التمدد)

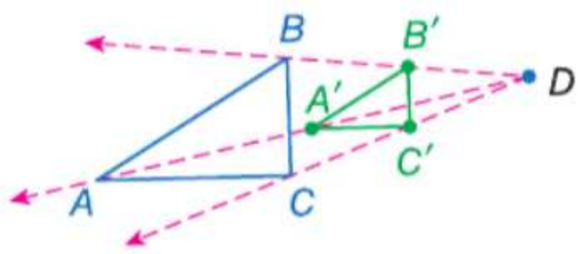
انسخ المثلث $\triangle ABC$ والنقطة D. ثم استخدم مسطرة لرسم صورة المثلث $\triangle ABC$ بناء على عملية تغير أبعاد مركزها D ومعامل القياس $\frac{1}{2}$.



الخطوة 1 ارسم أشعة من النقطة D بحيث تمر بكل رأس.



الخطوة 2 حدد موقع النقطة A' على $\overrightarrow{DA}$ بحيث $DA' = \frac{1}{2}DA$.

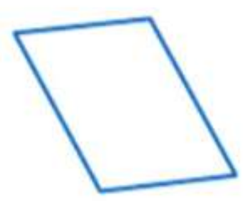


الخطوة 3 حدد موقع النقطة B' على $\overrightarrow{DB}$ والنقطة C' على $\overrightarrow{DC}$ بالطريقة ذاتها. ثم ارسم المثلث $\triangle A'B'C'$.

تمرين موجّه

انسخ الشكل وحدد النقطة J. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل بناء على عملية تغيير أبعاد مركزها J ومعامل القياس المحدّد هو k المُشار إليه.

1A. $k = \frac{3}{2}$



1B. $k = 0.75$

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

تعلّمت أيضا أنه إذا كانت $k > 1$، فإن عملية تغيير الأبعاد(التمدد) عبارة عن تكبير. وإذا كان $0 < k < 1$، فإن عملية تغيير الأبعاد(التمدد) عبارة عن تصغير. بما أن $\frac{1}{2}$ يقع بين 0 و 1، فإن عملية تغيير الأبعاد(التمدد) في المثال 1 عبارة عن تصغير.

تغيير الأبعاد(التمدد) باستخدام معامل المقياس 1 يطلق عليه تغيير *الأبعاد(التمدد) متساوي القياس*. فهو ينتج صورة تتطابق مع الصورة الأصلية. وبالتالي يكون الشكلان متطابقين.

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد معامل القياس لعملية تغيير الأبعاد(التمدد)

التصوير الفوتوغرافي لإنشاء صور مختلفة الأحجام، يمكنك تعديل المسافة بين صورة الفيلم السالبة والصورة المكبَّرة باستخدام أداة التكبير الفوتوغرافي. افترض أن المسافة بين مصدر الضوء C والصورة السالبة تساوي 45 mm (CP). فإلى أي مسافة PP' ينبغي ضبط أداة التكبير لإنشاء صورة بعرض 22.75 cm ($X'Y'$) من الصورة السلبية التي عرضها 35 mm (XY)؟

الفهم تتضمن هذه المسألة عملية تغيير أبعاد. ومركز تغيير الأبعاد(التمدد) هو النقطة C، $XY = 35\ mm$. أو $X'Y' = 22.75\ cm$. أو $227.5\ mm$، و $CP = 45\ mm$. والمطلوب إيجاد PP'.

الخطة جـــد معامل القياس لتغيير الأبعاد(التمدد) من الصورة الأصلية XY إلى الصورة $X'Y'$. استخدم معامل المقياس لإيجاد CP' ثم استخدم CP و CP' لإيجاد PP'.

الحل معامل المقياس k للتكبير هو نسبة الطول في الصورة إلى الطول الموجود في الصورة الأصلية.

$$k = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الصورة الأصلية}}$$ معامل قياس الصورة

$$= \frac{X'Y'}{XY}$$ $X'Y'$ = الصورة، XY = الصورة الأصلية

$$= \frac{227.5}{35} \text{ أو } 6.5$$ اقسم.

استخدم معامل القياس 6.5 لإيجاد CP'.

$$CP' = k(CP)$$ (تعريف تغيير الأبعاد(التمدد

$$= 6.5(45)$$ $k = 6.5$ و $CP = 45$

$$= 292.5$$ اضرب.

استخدم CP' و CP لإيجاد PP'.

$$CP + PP' = CP'$$ إضافة قطعة مستقيمة

$$45 + PP' = 292.5$$ $CP = 45$ و $CP' = 292.5$

$$PP' = 247.5$$ اطرح 45 من كل طرف.

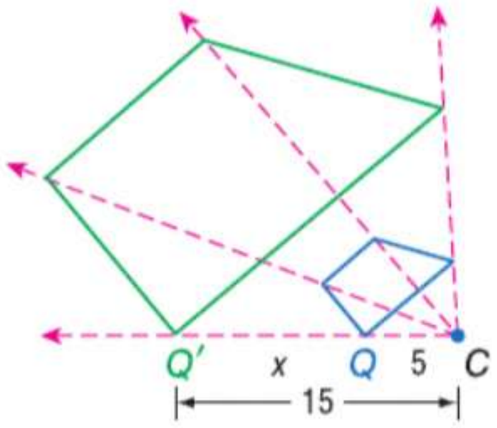
إذًا ينبغي ضبط أداة التكبير بحيث تكون المسافة من الصورة السلبية إلى الصورة المكبرة (PP') $247.5\ mm$ أو $24.75\ cm$.

تحقق بما أن تغيير الأبعاد(التمدد) عبارة عن تكبير، فإن معامل القياس ينبغي أن يكون أكبر من 1. وبما أن $6.5 > 1$، فإن معامل القياس الموجود منطقي. ✓

نصيحة في حل المسائل
المئابرة

لتجنب الوقوع في أخطاء السهو في حساباتك، قدّر إجابة المسألة قبل حلها. في المثال 2، يمكنك تقدير معامل مقياس تغيير الأبعاد(التمدد) ليصبح حوالي $\frac{240}{40}$ أو 6. ثم CP' ستكون الإجابة حوالي $50 \cdot 6$ أو 300 و PP' حوالي $300 - 50$ أو 250 ميليمترًا. وهذا يساوي $25\ cm$. والقياس $24.75\ cm$ قريب من هذا التقدير، إذًا فالإجابة منطقية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



تمرين موجّه

2. حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد(التمدد) من الشكل Q إلى Q' عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم جـــد معامل القياس و x.

2 عمليات تغيير الأبعاد(التمدد) في المستوى الإحداثي

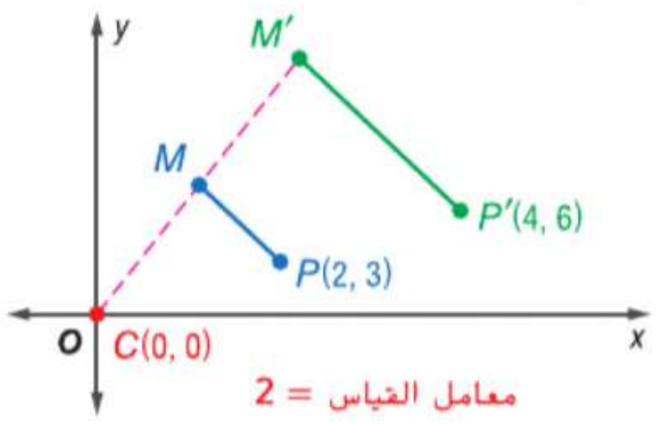
يمكن استخدام القواعد التالية لإيجاد صورة شكل بعد تمركز عملية تغيير الأبعاد(التمدد) على نقطة الأصل.

المفهوم الأساسي عمليات تغيير الأبعاد(التمدد) في المستوى الإحداثي

الشرح لإيجاد إحداثيات صورة بعد تغيير الأبعاد(التمدد) المتمركز في نقطة الأصل، اضرب الإحداثيين x و y لكل نقطة من الصورة الأصلية في معامل القياس لتغيير الأبعاد(التمدد) k.

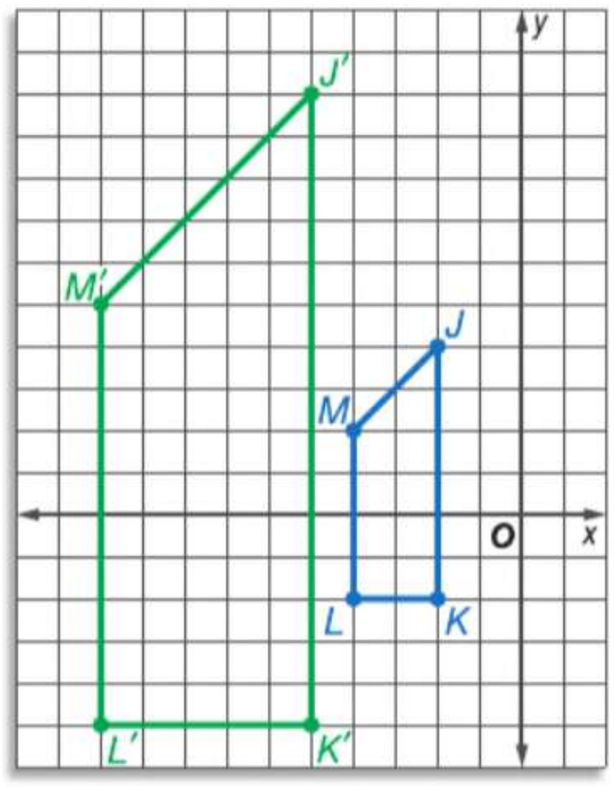
الرموز $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

مثال



مثال 3 تغيير الأبعاد(التمدد) في المستوى الإحداثي

الشكل الرباعي $JKLM$ له الرؤوس $J(-2, 4)$، و $K(-2, -2)$، و $L(-4, -2)$، و $M(-4, 2)$. مثّل صورة الشكل $JKLM$ بيانيًا بعد تغيير الأبعاد(التمدد) المتمركزة في نقطة الأصل باستخدام معامل القياس 2.5.



اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل القياس 2.5.

$(x, y) \rightarrow (2.5x, 2.5y)$

$J(-2, 4) \rightarrow J'(-5, 10)$

$K(-2, -2) \rightarrow K'(-5, -5)$

$L(-4, -2) \rightarrow L'(-10, -5)$

$M(-4, 2) \rightarrow M'(-10, 5)$

مثّل الشكل $JKLM$ وصورته بيانيًا $J'K'L'M'$.

تمرين موجّه

جـــد صورة كل مضلعٍ له الرؤوس المعطاة بيانيًا بعد تغيير للأبعاد مركزه نقطة الأصل ووفق معامل المقياس المعطى.

3A. $Q(0, 6), R(-6, -3), S(6, -3); k = \frac{1}{3}$ **3B.** $A(2, 1), B(0, 3), C(-1, 2), D(0, 1); k = 2$

McGraw-Hill Education مؤسسة صالح محفوظة لصالح © والتأليف الطبع حقوق

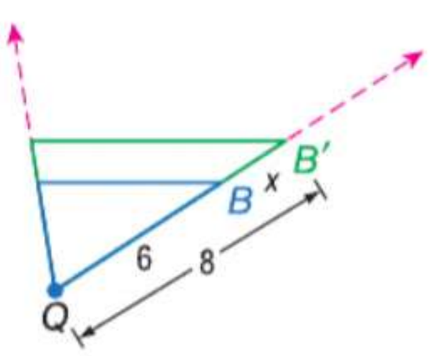
التحقق من فهمك

مثال 1 **انسخ الشكل إضافةً إلى النقطة M. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل بناء على عملية تغيير أبعاد مركزها النقطة M ومعامل القياس المحدّد k.**

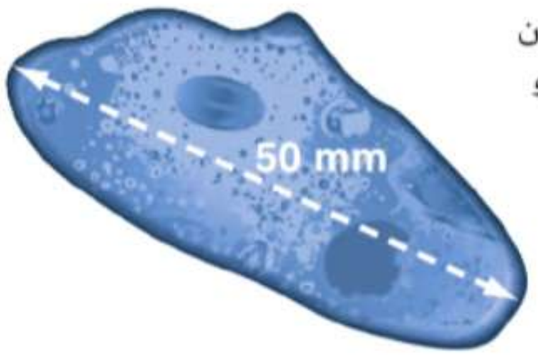
1. $k = \frac{1}{4}$

2. $k = 2$

مثال 2 3 حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد(التمدد) من الشكل B إلى B' عبارة عن تكبير أو تصغير. ثم جـــد معامل القياس وقيمة x.



4. **الأحياء** تحت المجهر، كائن دقيق أحادي الخلية بطول200 ميكرون يبدوا بطول $50\ mm$. فإذا كان $1\ mm = 1000$ ميكرون، فما هو ضبط التكبير (معامل القياس) المستخدم؟ اشرح إجابتك.

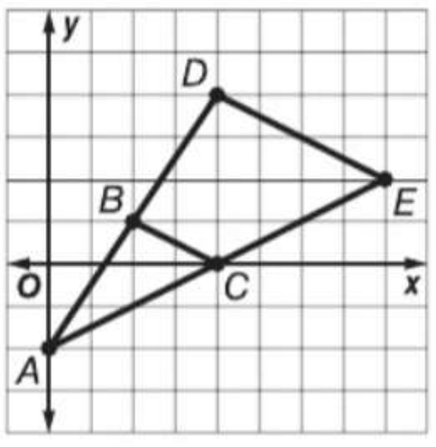


مثال 3 **مثّل صورة كل مضلعٍ له الرؤوس المعطاة بيانيًا بعد تغيير الأبعاد(التمدد) التي مركزها نقطة الأصل ووفق معامل المقياس المعطى.**

5. $W(0, 0), X(6, 6), Y(6, 0); k = 1.5$
6. $Q(-4, 4), R(-4, -4), S(4, -4), T(4, 4); k = \frac{1}{2}$
7. $A(-1, 4), B(2, 4), C(3, 2), D(-2, 2); k = 2$
8. $J(-2, 0), K(2, 4), L(8, 0), M(2, -4); k = \frac{3}{4}$

التدريب وحل المسائل

9. المثلث $\triangle ADE$ عبارة عن تغيير أبعاد للمثلث $\triangle ABC$ في المستوى. اكتب عبارة يمكن استخدامها للتأكد أن $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

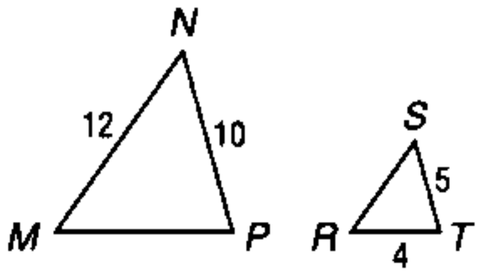


10. فكر في الرسم التخطيطي التالي.

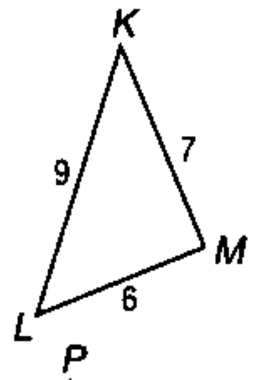
تم تغيير أبعاد المثلث بحيث يصبح محيط المثلث الجديد $82.4\ cm$. فما هو طول الضلع المفقود في المثلث الجديد؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

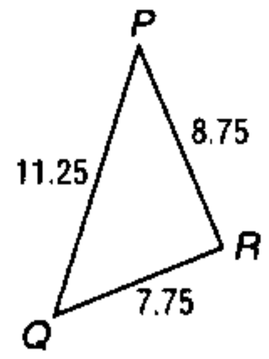
11. في الشكل التالي، المثلث MNP مشابه للمثلث RST.
أي معامل قياس استُخدم لتحويل المثلث $\triangle MNP$ إلى $\triangle RST$؟



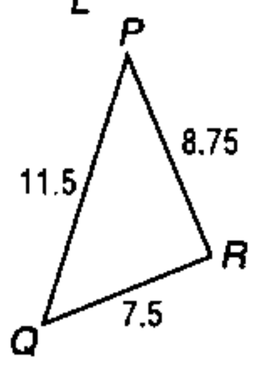
12. المثلث $\triangle KLM$ موضح أدناه.
أي مما يلي يوضح المثلث $\triangle KLM$ الذي تغيرت أبعاده باستخدام معامل المقياس $\frac{5}{4}$ لإنشاء المثلث المشابه $\triangle PQR$؟



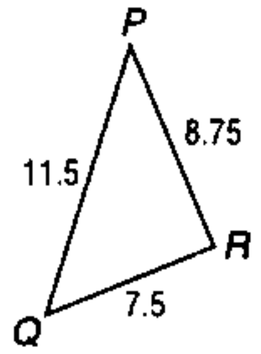
A



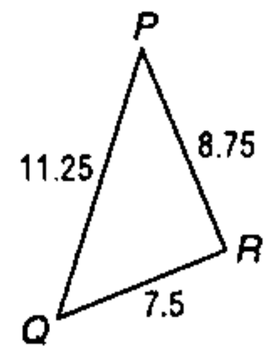
C



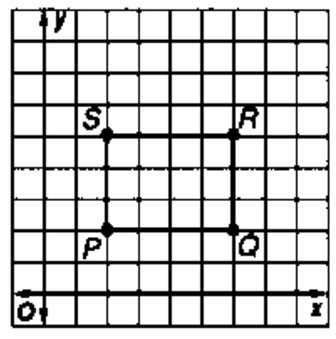
B



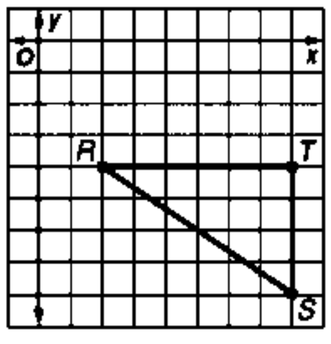
D



13. المستطيل $PQRS$ موضح فيما يلي. إذا تغيرت أبعاد المستطيل بمعامل المقياس 2، ومع جعل نقطة الأصل هي مركز تغيير الأبعاد(التمدد)، جد الإحداثيات الجديدة للنقطة R'.



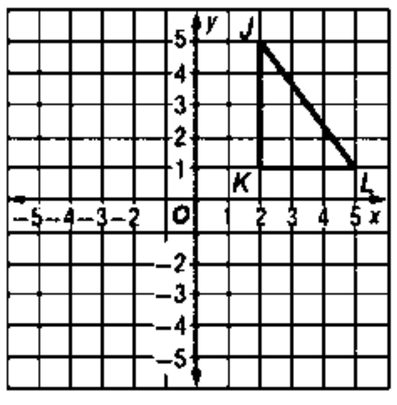
14. $\triangle RST$ موضح فيما يلي. فإذا تغيرت أبعاده باستخدام معامل القياس 2 وكانت نقطة الأصل هي مركز تغيير الأبعاد(التمدد)، فما هي إحداثيات النقطة S'؟



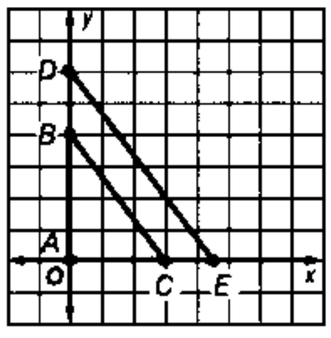
15. يحرّك بدر شخصية كرتونية في المستوى الإحداثي، باستخدام تغيير الأبعاد(التمدد) بمعامل مقياس 2. فإذا كانت $A(1, 3)$، و $B(3, 4)$، و $C(2, -3)$ عبارة عن ثلاث نقاط على صورة السمكة المنتفخة قبل أن ينفخها، فما هي إحداثيات النقاط ذات الصلة D، و E، و F على صورة السمكة المنتفخة؟

16. أي نوع من التحويل يحتفظ بالاتجاهات ولا يحتفظ بالحجم؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



17. المثلث قائم الزاوية JKL تغيرت أبعاده ليكوّن صورة المثلث $\triangle J'K'L'$. فإذا كان محيط المثلث $\triangle J'K'L'$ يساوي $36\ cm$. فما هي مساحة الصورة؟

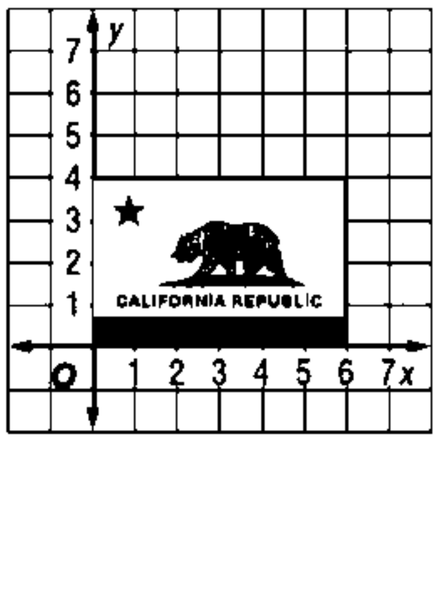


18. المثلث ABC الذي رؤوسه $A(0, 0)$. و $B(0, 4)$. و $C(3, 0)$ عبارة عن مثلث تغيّرت أبعاده من المثلث ADE.

فما هو طول $\overline{DE}$ إذا كان للنقطة D الإحداثيات $(0, 5)$؟

19. المربع $JKLM$ له الرؤوس $J(1, 0)$. و $K(2, 1)$. و$L(3, 0)$. و$M(2, -1)$. فإذا كان الشكل تغيرت أبعاده وكان المركز هو نقطة الأصل وكان معامل القياس $\sqrt{2}$. فما هو طول كل ضلع في المربع الذي تغيرت أبعاده؟

20. شبه المنحرف متساوي الساقين $LMNO$ له الرؤوس $L(-4, -3)$. و $M(-4, 0)$. و $N(-2, 1)$. و$O(-2, -4)$. فإذا تغيرت أبعاد الشكل وكان المركز هو نقطة الأصل وكان معامل القياس 1.5. فما هو طول $\overline{L'M'}$ في شبه المنحرف متساوي الساقين المنسوخ؟



21. علَم ولاية كاليفورنيا موضح على الشبكة أدناه. افترض أن العلم تم تكبيره بحيث أصبحت رؤوس العلم الجديد $(0, 0)$. و $(6, 0)$. و $(6, 9)$. و $(0, 9)$. فما هي نسبة محيط العلم الأصلي إلى العلم الذي تم تكبيره؟

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

22. بعد تغيير الأبعاد(التمدد)، المثلث $\triangle XYZ$ عبارة عن صورة للمثلث $\triangle ABC$ و $XY = \frac{5}{8}AB$. فما هو معامل القياس؟

23. أي مما يلي يمثل إحداثيات صورة $A(4, -12)$ بعد عملية تغيير الأبعاد(التمدد) يقع مركزها في نقطة الأصل ومعامل القياس يساوي 0.25؟

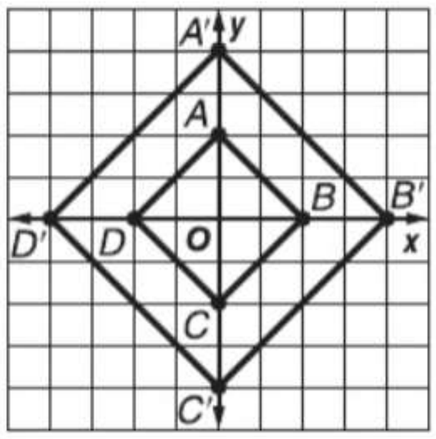
24. باستخدام أي معامل قياس r ستكون النقطة $Q(-20, 8)$ صورة من $P(-5, 2)$؟

25. بعد تغيير الأبعاد(التمدد)، صورة المربع $ABCD$ هي المربع $AXYZ$. أي نقطة مما يلي هي مركز تغيير الأبعاد(التمدد)؟

26. النقطتان الطرفيتان في $\overline{AB}$ هما $A(3, -7)$ و $B(7, -12)$. صورة $\overline{AB}$ بعد عملية تغيير الأبعاد(التمدد) التي يقع مركزها في نقطة الأصل هي $\overline{A'B'}$. إحداثيات النقطة A' هي $A'(9, -21)$. فما هي إحداثيات النقطة B'؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

27. انظر إلى الأشكال على الشبكة على اليمين.



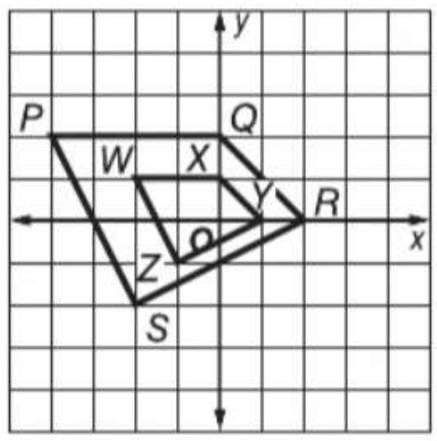
A صف عملية التحويل في الشكل الرباعي $ABCD$ التي أنتجت الشكل الرباعي $A'B'C'D'$.

B صف نتيجة دوران الشكل الرباعي $ABCD$ 90° حول نقطة الأصل في اتجاه عقارب الساعة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

28. الإجابة الموسعة الشكل الرباعي *PQRS* عبارة عن نسخة متغيرة الأبعاد(التمدد) من الشكل الرباعي *WXYZ*.



a. هل تغيير الأبعاد(التمدد) من *PQRS* إلى *WXYZ* عبارة عن تكبير أم تصغير؟

b. أي عدد يعطي أفضل تمثيل لمعامل قياس تغيير الأبعاد(التمدد)؟

29. الجبر كم جراما من الماء النقي يجب أن يضيفه الصيدلي إلى 50 g من المحلول الملحي بتركيز 15% لعمل محلول يكون تركيز الملح فيه 10%؟

A 25 C 15

B 20 D 50

30. تريد بثينة نسخ لوحة في المتحف الفني. يبلغ عرض اللوحة 0.90 m وطولها 1.80 m. وتقرر استخدام معامل تصغير في تغيير الأبعاد(التمدد) بقيمة 0.25. فما حجم الورق الذي ينبغي أن تستخدمه؟

F 10 cm × 20 cm H 20 cm × 40 cm

G 15 cm × 30 cm J 25 cm × 50 cm

31. SAT/ACT لجميع قيم x، $(x - 7)^2 =$؟

A $x^2 - 49$ D $x^2 - 14x + 49$

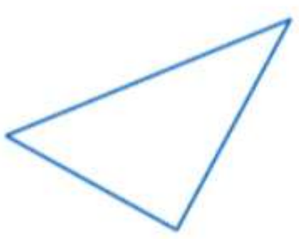
B $x^2 + 49$ E $x^2 + 14x - 49$

C $x^2 - 14x - 49$

مراجعة شاملة

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرا محوريا أم لا. اكتب نعم أو لا . وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها. (الدرس 5-10)

32.

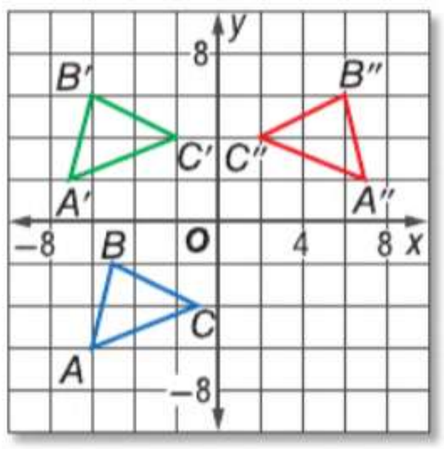


33 .

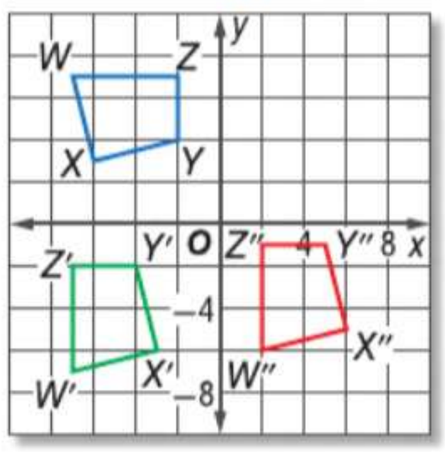
34.

صف التحويلات المجموعة لرسم كل شكل. (الدرس 4-10)

35.



36.



37. الطوابير يوزّع عدد الطوابير في مدرسة الشارقة الثانوية كل عام توزيعا طبيعيًا باستخدام المتوسط 12.4 والانحراف المعياري 1.6.

a. ما احتمال الزيادة بمقدار 10 طوابير في عام معين؟

b. إذا كانت المدرسة مؤسسة منذ 30 عاما، ففي كم عامٍ كانت تتراوح أعداد الطوابير ما بين 11 إلى 13 طابور؟

مراجعة المهارات

جـــد قيمة *x* إلى أقرب جزء من عشرة.

38. $58.9 = 2x$ **39.** $\frac{108.6}{\pi} = x$ **40.** $228.4 = \pi x$ **41.** $\frac{336.4}{x} = \pi$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الانعكاس (الدرس 1-10)

- الانعكاس هو تحويل يمثل عكس شكلٍ بالنسبة لنقطةٍ أو مستقيمٍ أو مستوى إحداثي.

الإزاحة (الدرس 2-10)

- الإزاحة هي تحويل يحرّك كل نقاط شكل ما للمسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه.
- الإزاحة تطابق كل نقطة بالنقطة المنسوخة منها بطول المتجه.

الدوران (الدرس 3-10)

- يلف الدوران كل نقطة في الشكل من خلال الزاوية ذاتها حول نقطة ثابتة.

تركيب التحويلات (الدرس 4-10)

- يمكن تمثيل الإزاحة في صورة تركيب من تركيب الانعكاسات في المستقيمات المتوازية ويمكن تمثيل الدوران في صورة تركيب من تركيب الانعكاس في المستقيمات المتقاطعة.

التناظر (الدرس 5-10)

- مستقيم التناظر في الشكل هو المستقيم الذي يمكن طي الشكل عنده مناصفة بحيث يتطابق النصفان تطابقًا دقيقًا.
- يطلَق على عدد مرات انعكاس الشكل على نفسه أثناء الدوران من 0° إلى 360° اسم ترتيب التناظر.
- مقدار التناظر هو أصغر زاوية يمكن دوران الشكل من خلالها بحيث ينعكس على نفسه.

تغيير الأبعاد(التمدّد) (الدرس 6-10)

- تغيير الأبعاد/التمدّد هو تكبير الأشكال أو تصغيرها نسبيًا.

المفردات الأساسية

زاوية الدوران angle of rotation

مقدار التناظر magnitude of symmetry

التناظر المحوري axis symmetry

ترتيب التناظر order of symmetry

مركز الدوران center of rotation

التناظر في المستوى plane symmetry

تركيب التحويلات composition oftransformations

التناظر الدوراني rotational symmetry

الانعكاس الانزلاقي glide reflection

التناظر symmetry

خط الانعكاس line of reflection

متجه الإزاحة translation vector

محور التناظر line of symmetry

تناظر محوري line symmetry

مطويات منظم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في مطويتك.

مراجعة المصطلحات

اختر أفضل مصطلح لإكمال كل جملة بالشكل الأمثل.

1. عند تطبيق تحويل على الشكل، ثم تطبيق تحويل آخر على صورته، فهذا يسمى (تركيب تحويلات، ترتيب عمليات التناظر).
2. إذا تم طي الشكل بطول خط مستقيم وتطابق النصفان تطابقًا تاما، فإن محور الطي يسمى (محور الانعكاس، محور التناظر).
3. (تغيير الأبعاد/التمدّد، الانعكاس الانزلاقي) يكبر الشكل أو يصغره نسبيًا.
4. يطلَق على عدد مرات انعكاس الشكل على نفسه أثناء الدوران من 0° إلى 360° اسم (مقدار التناظر، ترتيب التناظر).
5. A (خط الانعكاس، متجه الإزاحة) هو المسافة ذاتها من كل نقطة في الشكل إلى ما يقابلها في الصورة.
6. يكون للشكل (مركز دوران، تناظر) إذا كان يمكن انعكاسه على نفسه عن طريق حركة ثابتة.
7. يتضمن الانعكاس الانزلاقي كلاً من الانعكاس و (الدوران، الإزاحة).
8. لدوران نقطة بمقدار (90°، 180°) عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1 ثم بدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.
9. (المتجه، الانعكاس) هو أحد تحويلات التطابق.
10. يكون للشكل (تناظر في المستوى، تناظر دوراني) إذا كان يمكن أن ينعكس الشكل على نفسه عن طريق الدوران بين 0° و 360° حول مركز الشكل.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة درس بدرس

10-1 الانعكاس

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق الانعكاس المعطى.

11. المستطيل $ABCD$ له الرؤوس $A(2, -4)$، و $B(4, -6)$، و $C(7, -3)$، و $D(5, -1)$ على المحور x

12. المثلث XYZ الذي رؤوسه $X(-1, 1)$، و $Y(-1, -2)$، و $Z(3, -3)$ في المحور y

13. الشكل الرباعي $QRST$ الذي رؤوسه $Q(-4, -1)$، و $R(-1, 2)$ و $S(2, 2)$ و $T(0, -4)$ في المستقيم $y = x$

14. **الفن** تصنع بدرية النحت المكون من قطعتين الموضح لحديقة نصب تذكاري. في تصميمها، إحدى قطع النحت عبارة عن انعكاس للقطعة الأخرى، وذلك لتوضع بجانب الممر الذي قد يوجد بطول خط الانعكاس. انسخ الأشكال وارسم خط الانعكاس.

مثال 1

مثّل بيانيًا المثلث JKL الذي رؤوسه $J(1, 4)$، و $K(2, 1)$ و $L(6, 2)$ وصورته المنعكسة على المحور x.

اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس في -1.

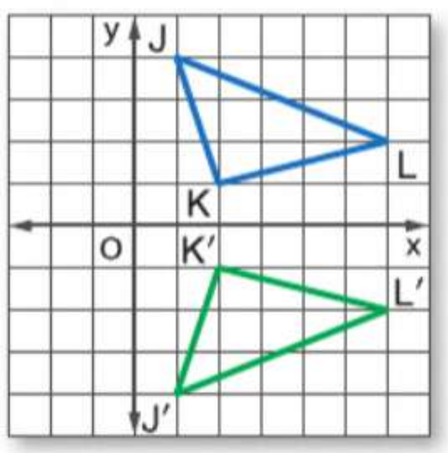
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$J(1, 4) \rightarrow J'(1, -4)$

$K(2, 1) \rightarrow K'(2, -1)$

$L(6, 2) \rightarrow L'(6, -2)$

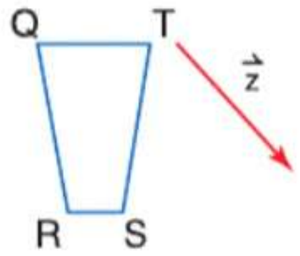
مثل بيانيا المثلث JKL وصورته $J'K'L'$.



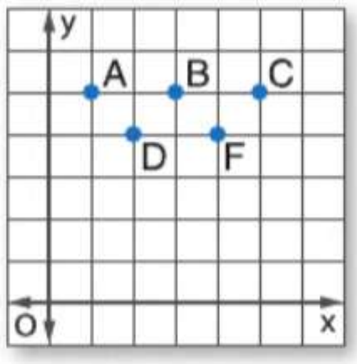
10-2 الإزاحة

15. مثّل بيانيًا المثلث ABC الذي رؤوسه $A(0, -1)$ و $B(2, 0)$ و $C(3, -3)$ وصورته بطول $\langle -5, 4 \rangle$.

16. انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.



17. **الأداء** خمس فنانين موجودون على المسرح كما هو موضح. يتحرك كل من B و F و C بطول $\langle 0, -2 \rangle$، بينما يتحرك A بطول $\langle -5, -1 \rangle$. ارسم الأوضاع النهائية.



مثال 2

مثل بيانيًا المثلث XYZ الذي رؤوسه $X(2, 2)$، و $Y(5, 5)$ و $Z(5, 3)$ وصورته بطول $\langle -5, -3 \rangle$.

يشير المتجه إلى إزاحةٍ لمسافة 3 وحدات يسارًا و 5 وحدات إلى الأسفل.

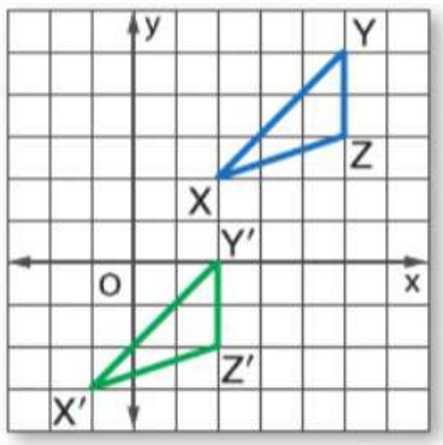
$(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 5)$

$X(2, 2) \rightarrow X'(-1, -3)$

$Y(5, 5) \rightarrow Y'(2, 0)$

$Z(5, 3) \rightarrow Z'(2, -2)$

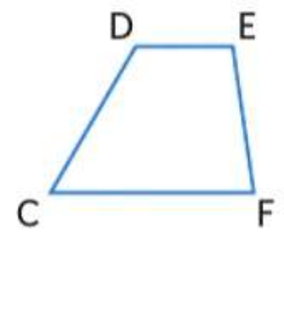
مثل بيانيا المثلث XYZ وصورته المثلث $X'Y'Z'$.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-3 الدوران

18. انسخ شبه المنحرف $CDEF$ والنقطة P. ثم استخدم المنقلة والمسطرة لرسم دوران بمقدار $50°$ للشكل $CDEF$ حول النقطة P.



مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته بعد الدوران المحدد حول نقطة الأصل.

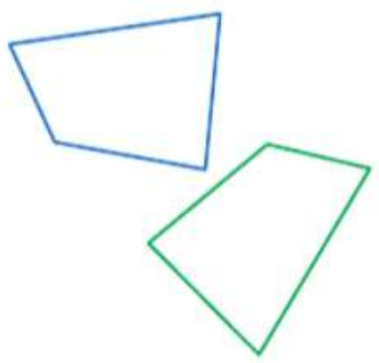
19. المثلث $\triangle MNO$ الذي رؤوسه: $O(1, 0)$. $N(0, -2)$. $M(-2, 2)$ $180°$

20. المثلث $\triangle DGF$ الذي رؤوسه: $F(1, 3)$. $G(2, 3)$. $D(1, 2)$ $90°$

يوضح كل شكل الصورة الأصلية ونسختها بعد الدوران حول النقطة P. انسخ كل شكل، وحدد موقع النقطة P، وجد زاوية الدوران.

21.

22.



مثال 3

المثلث ABC له الرؤوس $A(-4, 0)$ و $B(-3, 4)$ و $C(-1, 1)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ وصورته بعد الدوران $270°$ حول نقطة الأصل.

تتمثل إحدى طرق حل هذه المسألة في الجمع بين الدوران بمقدار $180°$ والدوران بمقدار $90°$. وضرب كل من الإحداثي x والإحداثي y لكل رأس في -1.

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

$A(-4, 0) \rightarrow A'(4, 0)$

$B(-3, 4) \rightarrow B'(3, -4)$

$C(-1, 1) \rightarrow C'(1, -1)$

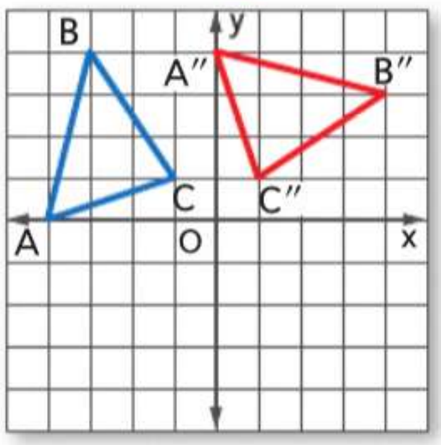
اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس في -1 وبدّل.

$(-x, -y) \rightarrow (y, -x)$

$A'(4, 0) \rightarrow A''(0, 4)$

$B'(3, -4) \rightarrow B''(4, 3)$

$C'(1, -1) \rightarrow C''(1, 1)$



مثل بيانيا المثلث $\triangle ABC$ وصورته $\triangle A''B''C''$.

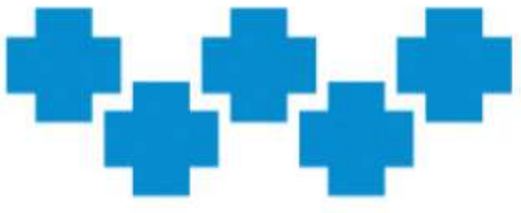
10-4 تركيب التحويلات

مثّل بيانيًا كل شكل له الرؤوس المعطاة وصورته بعد التحويل المشار إليه.

23. $\overline{CD}$: $C(3, 2)$ و $D(1, 4)$
الانعكاس: في $y = x$
الدوران بمقدار $270°$ حول نقطة الأصل.

24. $\overline{GH}$: $G(-2, -3)$ و $H(1, 1)$
الإزاحة: بطول $\langle 4, 2 \rangle$
الانعكاس: في المحور الأفقي x

25. **الأنماط** يبتكر جاسم نمطا لجعله إطارًا لملصق باستخدام رسم مطبوع. اذكر تركيب التحويل الذي استخدمه لابتكار النمط التالي.



مثال 4

النقطتان الطرفيتان للقطعة المستقيمة $\overline{RS}$ تساويان $R(4, 3)$ و $S(1, 1)$. مثّل بيانيًا القطعة المستقيمة $\overline{RS}$ وصورتها بعد الإزاحة بطول $\langle -1, -5 \rangle$ والدوران بمقدار $180°$ حول نقطة الأصل.

الخطوة 1 الإزاحة بطول $\langle -1, -5 \rangle$

$(x, y) \rightarrow (x - 5, y - 1)$

$R(4, 3) \rightarrow R'(-1, 2)$

$S(1, 1) \rightarrow S'(-4, 0)$

الخطوة 2 الدوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

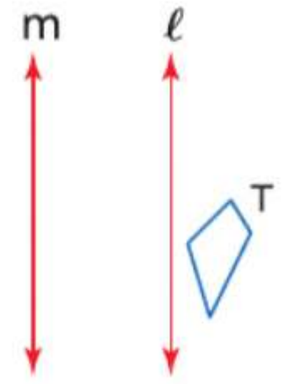
$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

$R'(-1, 2) \rightarrow R''(1, -2)$

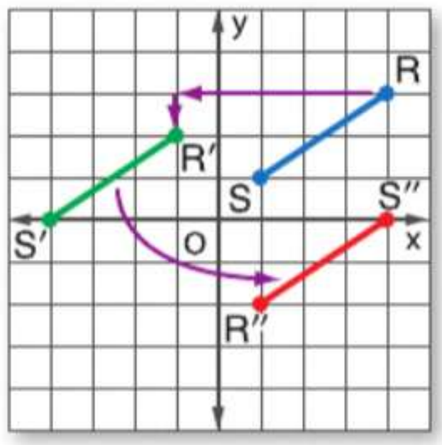
$S'(-4, 0) \rightarrow S''(4, 0)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

26. انسخ واعكس الشكل T في المستقيم ℓ ثم المستقيم m. ثم اذكر تحويلاً واحدًا يعكس المستقيم T على المستقيم T''.



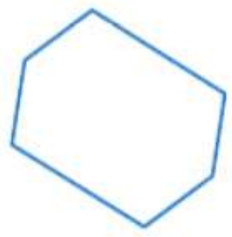
الخطوة 3 مثّل بيانيًا القطعة المستقيمة $\overline{RS}$ وصورتها $\overline{R''S''}$.



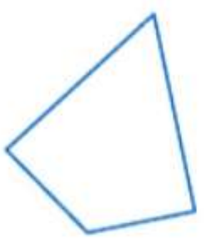
10-5 التناظر

اذكر هل كل شكل يبدو أن به تناظرًا محوريًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

27.



28.

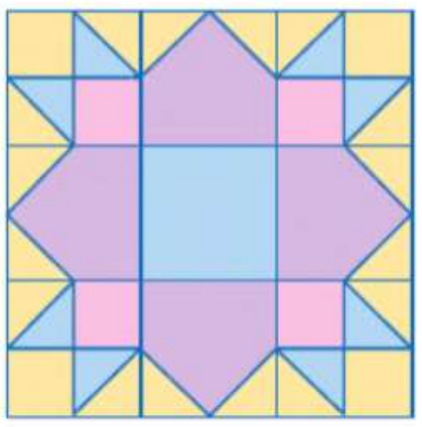


اذكر هل كل شكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، انسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

29.

30.

31. النسج تبتكر حصة نمطا لكوفية تنسجها لصديقتها. كم عدد مستقيمات التناظر الموجودة في النمط؟



مثال 5

اذكر هل كل شكل له تناظر *في المستوى الإحداثي* أم تناظر *محوري* أم *كلاهما* أم *ليس أيًا منهما*.

a.

لمصباح الإضاءة تناظر في المستوى الإحداثي وتناظر محوري.

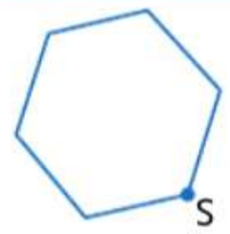
b.

المنشور له تناظر في المستوى.

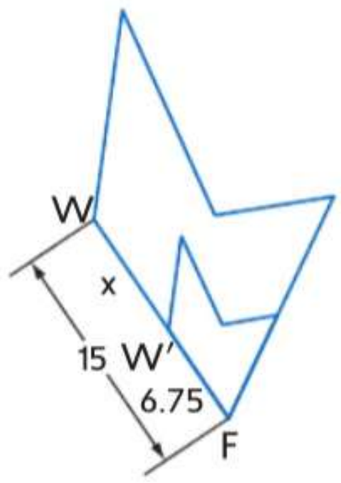
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-6 عمليات تغيير الأبعاد(التمدّد)

32. انسخ الشكل والنقطة S. ثم استخدم المسطرة لرسم صورة الشكل وفق المركز S ومعامل المقياس $r = 1.25$.



33. حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد من الشكل W إلى الشكل W' عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم جد معامل المقياس لتغيير الأبعاد والنقطة x.



34. النوادي يستخدم أعضاء نادي الرياضيات جهاز عرض الصور الشفافة لعمل ملصق. إذا كان عرض الصورة الأصلية 15 cm، وعرضها على الملصق 1.2 cm، فما هو معامل مقياس للتكبير؟

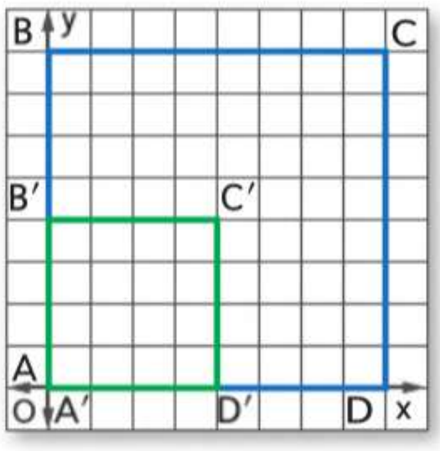
مثال 6

المربع $ABCD$ له الرؤوس $A(0, 0)$ و $B(0, 8)$ و $C(8, 8)$ و $D(8, 0)$. جد صورة المربع $ABCD$ بعد تغيير الأبعاد وفق المركز عند نقطة الأصل ومعامل المقياس 0.5.

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل المقياس 0.5.

(x, y)	→	$(0.5x, 0.5y)$
$A(0, 0)$	→	$A'(0, 0)$
$B(0, 8)$	→	$B'(0, 4)$
$C(8, 8)$	→	$C'(4, 4)$
$D(8, 0)$	→	$D'(4, 0)$

مثل بيانيًا الشكل $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$.

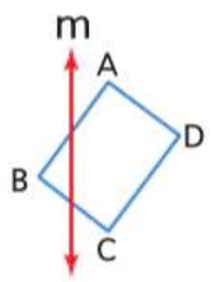


McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

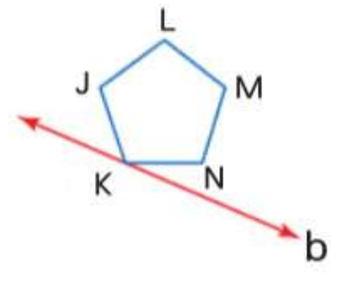
10 تدريب على الاختبار

انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة.

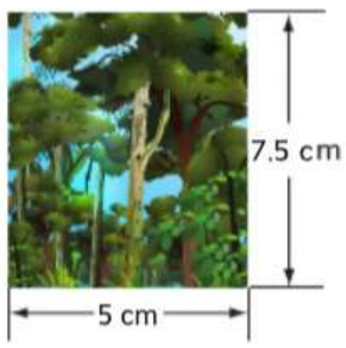
1.



2.

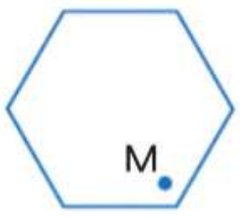


3. **المشروعات** يريد جمال تكبير الصورة التالية إلى 10 cm إلى 15 cm من أجل مشروع في المدرسة. إذا كانت ماكينة التصوير في المدرسة لا يمكن أن تكبر إلا حتى 150% في النسب المئوية للعدد الكلي، جـــد نسبتين مئويتين لأعداد كلية يمكن تكبير الصورة بهما وجعلها قريبة من 10 cm إلى 15 cm أو أقل.

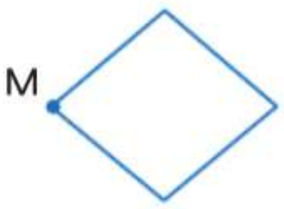


انسخ الشكل والنقطة M. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل الذي مركزه M بعد تغيير الأبعاد وفق معامل القياس المحدّد r.

4. $r = 1.5$



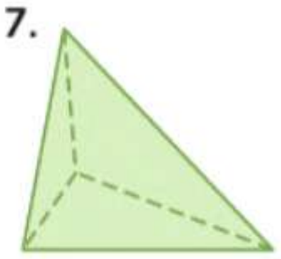
5. $r = \frac{1}{3}$



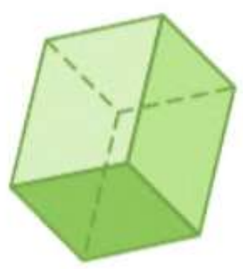
6. **الحدائق** في إحدى حدائق التنزه، تركب حليمة إحدى ألعاب الملاهي التي تجعل الراكب ينزلق جهة اليمين، ثم تدور عكس اتجاه عقارب الساعة حول مركزها بمقدار 60° كل ثانيتين. كم عدد الثواني التي تمر قبل أن ترجع حليمة إلى موقع البداية؟

اذكر هل كل شكل له تناظر في *المستوى الإحداثي* أم تناظر *محوري* أم *كليهما* أم *ليس أيًا منهما*.

7.



8.



مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق التحويل المعطى.

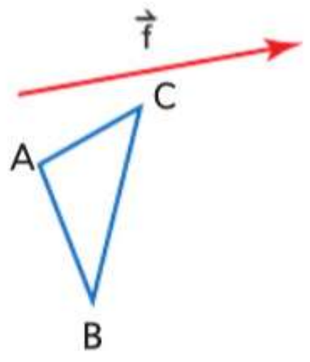
9. $\square FGHJ$ له الرؤوس $F(-1, -1)$، و $G(-2, -4)$ و $H(1, -4)$ و $J(2, -1)$ في المحور x

10. المثلث $\triangle ABC$ له الرؤوس $A(0, -1)$، $B(2, 0)$، $C(3, -3)$ $\langle -5, 4 \rangle$

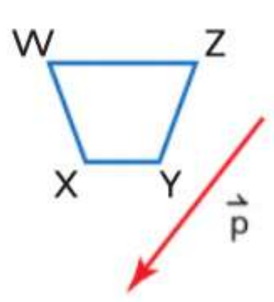
11. الشكل الرباعي $WXYZ$ له الرؤوس $W(2, 3)$، $X(1, 1)$، $Y(3, 0)$. $Z(5, 2)$، $180°$ حول نقطة الأصل

انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.

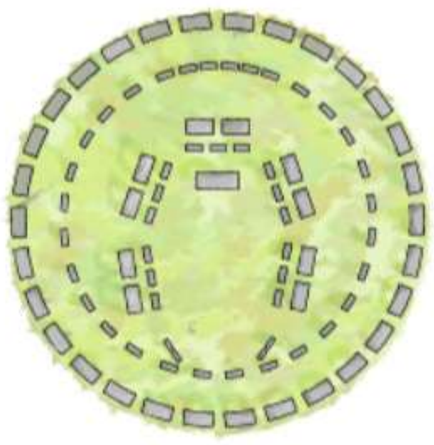
12.



13.



14. **الفنون** موضح فيما يلي تصور أحد الفنانين للصورة التي كان عليها وهو موقع ستونهنج، موقع أثري في إنجلترا. قبل سقوط الأحجار أو إزالتها. ما ترتيب التناظر ومقداره للحلقة الخارجية؟



15. **الاختيار** من متعدد ما التحويل أو تركيب التحويلات التي يمثلها الشكل التالي؟

A تغيير الأبعاد

B انعكاس انزلاقي

C دوران

D إزاحة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 التحضير للاختبارات المعيارية

الحل بترتيب عكسي

في معظم المسائل، تتوفر مجموعة من الشروط والمعطيات ويجب عليك إيجاد النتيجة النهائية. ولكن بعض المسائل تعطيك النتيجة النهائية وتطلب منك إيجاد شيء قد حدث من قبل في العملية. ولحل المسائل من هذا النوع، يجب عليك الحل بترتيب عكسي.

إستراتيجيات الحل بترتيب عكسي

الخطوة 1

ابحث عن الكلمات الأساسية التي تشير إلى ما ستحتاج إليه للحل بترتيب عكسي لحل المسألة.

نموذج من الكلمات الأساسية:

- ماذا كانت **نقطة الأصل**...؟
- ماذا كانت القيمة **قبل**...؟
- أين كان **البدء** أو **البداية**...؟

الخطوة 2

تراجع عن الخطوات المعطاة في نص المسألة لحلها.

- أدرج تسلسل الخطوات من البداية إلى النتيجة النهائية.
- ابدأ بالنتيجة النهائية. وتتبع الخطوات بترتيب عكسي.
- "تراجع" عن كل خطوة باستخدام المعكوسات للرجوع إلى القيمة الأصلية.

الخطوة 3

تحقق من حلّك إذا سمح الوقت.

- تأكد من منطقية إجابتك.
- ابدأ بإجابتك واتبع تقدم الخطوات في نص المسألة لترى هل حصلت على النتيجة ذاتها أم لا.

مثال على الاختبار المعياري

حُـلّ المسألة أدناه. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة.

يستخدم حمادة برنامجا هندسيًا ليجربه في التحويلات على الشبكة الإحداثية. فبدأ بنقطة وأزاحها بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى و 8 وحدات جهة اليسار. ثم عكس الصورة في المحور x. وأخيرًا غيّر أبعاد هذه الصورة الجديدة وفق معامل المقياس 0.5 وفيما يتعلق بنقطة الأصل ليصل إلى $(-4, -1)$. ما هي الإحداثيات الأصلية للنقطة؟

معايير رصد الدرجات	
المعايير	**النقاط**
درجة كاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة صحيحة ولكن التفسير كامل.	1
لن يتم منح درجات: إما أن الإجابة غير مكتوبة أو غير منطقية.	0

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

اقرأ نص المسألة جيدًا. لديك سلسلة من التحويلات لنقطة على الشبكة الإحداثية. وتعرف إحداثيات الصورة النهائية ومطلوب منك إيجاد الإحداثيات الأصلية. تراجع عن كل تحويل للحل بترتيب عكسي وحل المسألة.

مثال على إجابة من نقطتين:

النقطة الأصلية← إزاحة← انعكاس← تغيير أبعاد← النتيجة النهائية

ابدأ بإحداثيات النتيجة النهائية وحل بترتيب عكسي.

غير الأبعاد بمقدار 2 وتراجع عن تغيير الأبعاد بمقدار 0.5:

$$(-1, -4) \rightarrow (-1 \times 2, -4 \times 2) = (-2, -8)$$

اقلب الانعكاس عبر المحور x للتراجع عن الانعكاس:

$$(-2, -8) \rightarrow (-2, 8)$$

أزح بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل و 8 وحدات جهة اليمين للتراجع عن الإزاحة:

$$(-2, 8) \rightarrow (-2 + 8, 8 - 4) = (6, 4)$$

الإحداثيات الأصلية للنقطة هي (6, 4).

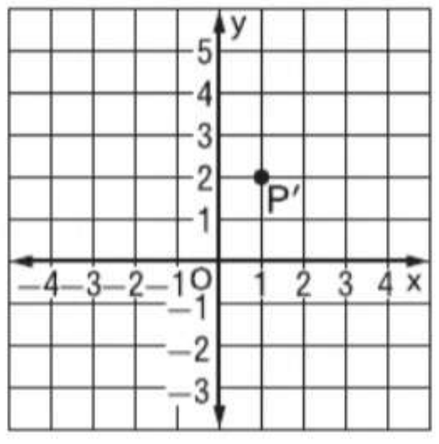
تم بوضوح ذكر الخطوات والحسابات والتبرير. وقد وصل الطالب أيضا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

التمارين

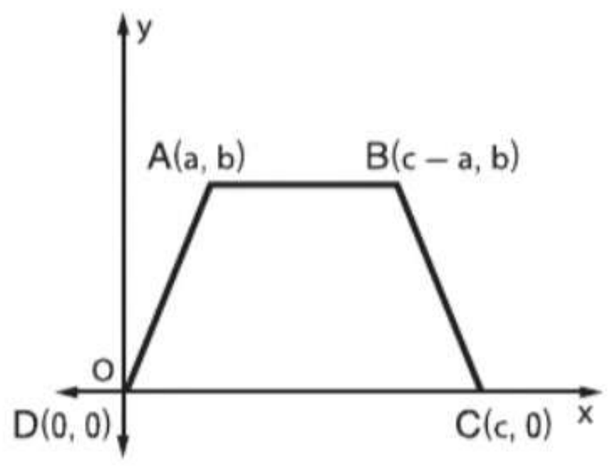
حل كل مسألة. اكتب الحل هنا. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة في بداية الدرس.

1. استقر برغوث على الشبكة الإحداثية. قفز البرغوث عبر المحور x ثم عبر المحور y ليشكل انعكاسين متتاليين. ثم انتقل 9 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى الأسفل. إذا كان المكان النهائي للبرغوث عند (1−, 4). فما هي النقطة التي استقر عليها في البداية؟

2. توضح الشبكة الإحداثية التالية الصورة النهائية عندما تم دوران صورة بزاوية 90° باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. وتم تغيير أبعادها وفق معامل المقياس 2. وانتقلت 7 وحدات جهة اليمين. فما هي الإحداثيات الأصلية؟



3. الشكل $ABCD$ عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين.



أي مما يلي يمثل إحداثيات النقطتين الطرفيتين لوسيط $ABCD$؟

A $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

B $\left(\frac{2c-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

C $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$

D $\left(\frac{c}{2}, b\right)$

4. إذا كان قياس زاوية داخلية في مضلع منتظم يساوي 108. فما نوع المضلع؟

F ثماني أضلاع

G سداسي أضلاع

H خماسي أضلاع

J مثلث

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الوحدة 11

الدوال المثلثية

Chapter sourced from: 11, Trigonometric Functions, from Algebra 2 Chapter 12 © 2014 McGraw-Hill Education

السابق

- لقد مثلت الدوال بيانيًا وحللتها.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - إيجاد قيم الدوال المثلثية.
  - حل المسائل باستخدام حساب مثلثات المثلث القائم.
  - حل المثلثات باستخدام قانون sine وقانون cosine.
  - تمثيل الدوال المثلّثية بيانيًا.

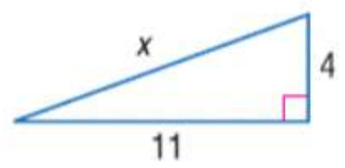
لماذا؟ ▲

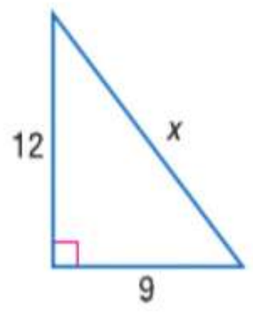
- **الرياضات المائية** لمعرفة الدوال المثلثية تطبيقات عملية في الرياضات المائية. يمكنك مثلاً استخدام حساب مثلثات المثلث القائم في إيجاد المسافة التي قطعها قارب الكاياك في النهر. وإذا كنت ماهرًا في الزوايا وقياساتها. فستفهم بشكل أفضل مدى روعة أن تتمكن من عمل دورة $540°$ على لوح التزلج على الماء.

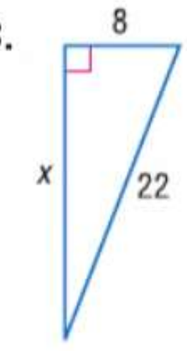
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب سريع

جـ ـد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

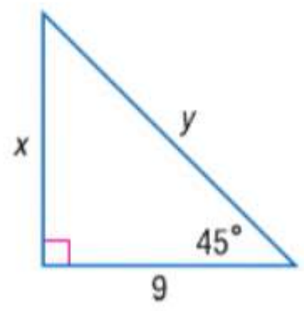
1. 

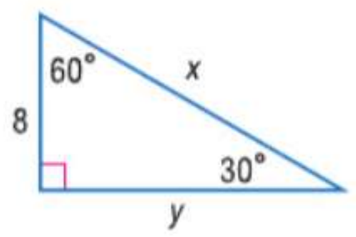
2. 

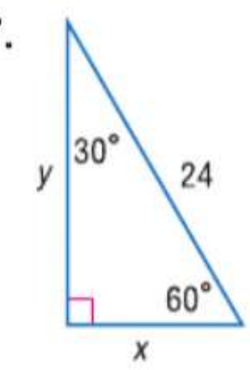
3. 

4. لدى سهيلة حديقة مستطيلة الشكل في خلفية المنزل. قياسها 12 m في 15 m. تريد سهيلة أن تضع ممشى صخريًا على قطر المستطيل. كم سيكون طول الممشى؟ قرّب إلى أقرب عشرة من المتر.

جـ ـد القياس المجهول، واكتب جميع الجذور في أبسط صورة.

5. 

6. 

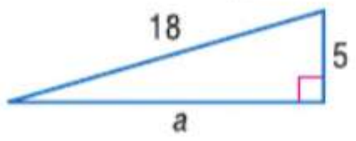
7. 

8. يميل السلم على الحائط بزاوية 45°. إذا كان طول السلم 12 m. فما الارتفاع الذي سيصل إليه السلم؟

مراجعة سريعة

مثال 1

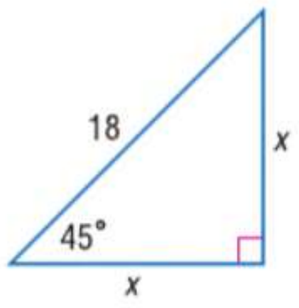
جـــد القياس المجهول في المثلث القائم.



$c^2 = a^2 + b^2$	نظرية فيثاغورس
$18^2 = a^2 + 5^2$	عوّض عن c بـ 18 وعن b بـ 5.
$324 = a^2 + 25$	بسّط.
$299 = a^2$	اطرح 25 من الطرفين.
$17.3 \approx a$	أخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

مثال 2

جـــد القياسات المجهولة، واكتب جميع الجذور في أبسط صورة.



$x^2 + x^2 = 18^2$	نظرية فيثاغورس
$2x^2 = 18^2$	جمّع الحدود المتشابهة.
$2x^2 = 324$	بسّط.
$x^2 = 162$	اقسم كل طرف على 2.
$x = \sqrt{162}$	أخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$x = 9\sqrt{2}$	بسّط.

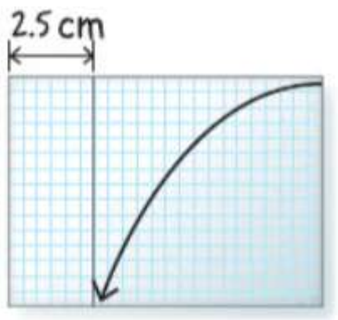
McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح © محفوظة لصالح والتأليف الطبع حقوق

المخبدء في هذه الوحدة

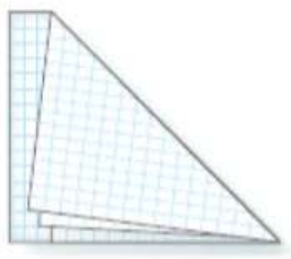
ستتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك للوحدة 11. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

الدوال المثلثية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 11 عن الدوال المثلثية. وابدأ بأربع ورقات من ورق التمثيل البياني.

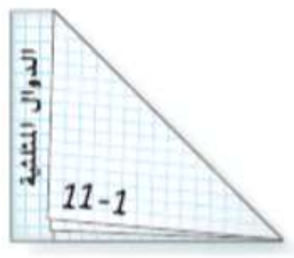


1 **دبس** الأوراق معًا وقِس 2.5 cm من أسفل.



2 **اطو** الأوراق بشكل مائل.

3 **دبس** الأوراق بالطول لعمل الكتاب.



4 **اكتب** على الحافة الدوال المثلثية.

المفردات الجديدة

trigonometry	حساب المثلثات
sine	جيب الزاوية
cosine	cosine
tangent	ظل الزاوية
cosecant	قاطع التمام
secant	القاطع
cotangent	ظل التمام
angle of elevation	زاوية الارتفاع
angle of depression	زاوية الانخفاض
standard position	الوضع القياسي
radian	راديان
Law of Sines	قانون sine
ambiguous case	حالة مبهمة
Law of Cosines	قانون cosine
unit circle	دائرة الوحدة
circular function	دالة دائرية
periodic function	دالة دورية
cycle	دورة
period	فترة
amplitude	سعة
frequency	التردد

مراجعة المصطلحات

الدالة علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

الدالة العكسية تكون الدالتان f و g متعاكستين إذا وفقط إذا كان تركيبهما عبارة عن الدالة المحايدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

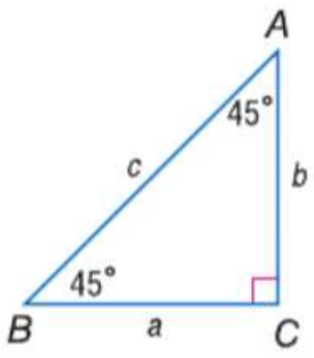
11-1 مختبر ورقة البيانات
استكشاف المثلثات القائمة الخاصة

يمكنك استخدام ورقة بيانات في استكشاف قياسات أضلاع المثلثات القائمة الخاصة.

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في التبريرات المتكررة والتعبير عن ذلك.

النشاط مثلث 45°-45°-90°

قياس الساقين a و b في المثلث ذي القياس 45°-45°-90°، متساويان. ما الأنماط التي تلاحظها في نسب قياسات الأضلاع في تلك المثلثات؟



الخطوة 1 أدخل الصيغ الموضحة في ورقة البيانات. تستخدم الصيغة نظرية فيثاغورس في صورة $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

=SQRT(A2^2+B2^2) =B2/A2 =B2/C2 =A2/C2

45-45-90 triangles

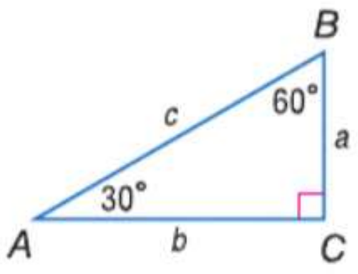
	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

الخطوة 2 افحص النتائج. لأن المثلثات ذات القياس 45°-45°-90° تشترك في قياسات الزوايا نفسها، فهي جميعًا تكون متشابهة. وتكون جميع نسب الأضلاع بهذه المثلثات متشابهة. نسب الضلع b إلى الضلع a تكون 1. نسب الضلع b إلى الضلع c والضلع a إلى الضلع c تكون 0.71 تقريبًا.

النموذج والتحليل

استخدم ورقة البيانات أدناه للمثلثات 30°-60°-90°.



30-60-90 triangles

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

1. انسخ ورقة البيانات أعلاه وأكملها.
2. صِف العلاقة بين المثلثات 30°-60°-90° مستخدمًا الأبعاد الموضحة.
3. ما الأنماط التي تلاحظها في نسب قياسات الأضلاع في تلك المثلثات؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة

السابق

- استخدمتَ نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال الأضلاع في المثلثات القائمة.

الحالي

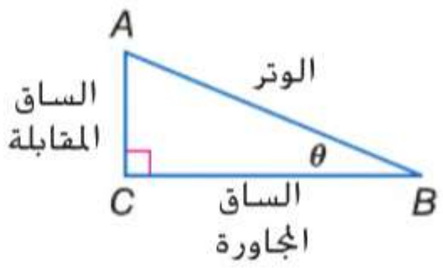
1. إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة.
2. استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع المثلثات القائمة وقياسات زواياها.

لماذا؟

- ارتفاع الشخص الذي يمارس التزلج المائي بالمظلة يعتمد على حبل السحب ℓ والزاوية التي يصنعها الحبل مع محور $x°$ الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، فإنه يمكنك استخدام نسبة لإيجاد ارتفاع الشخص الذي يمارس هذا النشاط.

1 النسب المثلثية للزوايا الحادة

حساب المثلثات هو دراسة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلثالقائم. وتقارن **النسبة المثلثية** بين أطوال الأضلاع في المثلث القائم. وتكون **للدالة المثلثية** قاعدة تعطيها نسبة مثلثية.



يُستخدم الحرف الإغريقي *theta* θ غالبًا في تمثيل قياس زاوية حادة في مثلث قائم. ويُستخدم كلّ من الوتر، والساق المقابلة θ، والساق المجاورة θ في تعريف النسب المثلثية الست.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية في المثلثات القائمة

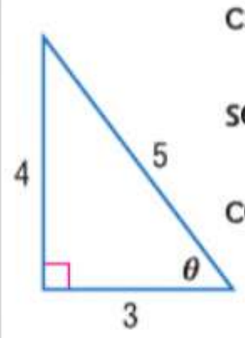
الشرح إذا كان θ هو قياس زاوية حادة في مثلث قائم، فإذًا النسب المثلثية التالية المشتملة على الضلع المقابل *opp*، والضلع المجاور *adj*، والوتر *hyp*، صحيحة.

الرموز

$$\sin(\text{sine})\ \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \csc(\text{قاطع التمام})\ \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

$$\cos(\text{cosine})\ \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \sec(\text{القاطع})\ \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\tan(\text{ظل الزاوية})\ \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \cot(\text{ظل التمام})\ \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$$



أمثلة

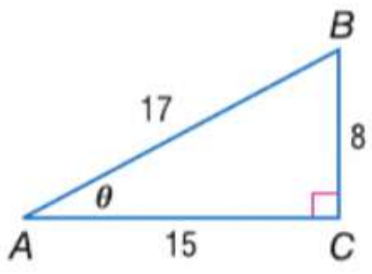
$$\sin\theta = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

مثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية

جـ ـد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

الساق المقابلة θ: $CB = 8$ الساق المجاورة θ: $AC = 15$ الوتر: $AB = 17$



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{8}{17} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{15}{17} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{8}{15}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{17}{8} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{17}{15} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{15}{8}$$

تمرين موجّه

1. جـ ـد قيم النسب المثلثية الست للزاوية B.

المفردات الجديدة

- حساب المثلثات trigonometry
- النسبة المثلثية trigonometric ratio
- دالة مثلثية trigonometric function
- sine
- cosine cosine
- ظل الزاوية tangent
- قاطع التمام cosecant
- القاطع secant
- ظل التمام cotangent
- الدوال العكسية reciprocal functions
- معكوس sine inverse sine
- معكوس cosine inverse cosine
- معكوس ظل الزاوية inverse tangent
- زاوية الارتفاع angle of elevation
- زاوية الانخفاض angle of depression

ممارسات في الرياضيات

مراعاة الدقة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

لاحظ أن نسب cosecant و secant و cotangent معكوسات لنسب sine وcosine و tangent على التوالي. ويُطلق عليها اسم **النسب المثلثية العكسية**.

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مجال أي دالة مثلثية يكون مجموعة كل الزوايا الحادة θ في المثلث القائم. إذًا، تعتمد الدوال المثلثية في المثلث القائم على قياسات الزوايا الحادة فقط. وليس أطوال الأضلاع.

نصيحة دراسية

احفظ النسب المثلثية تعد SOH-CAH-TOA وسيلة لتذكر الحرف الأول من كل كلمة في النسب تعويضًا عن sine و cosine و tangent.

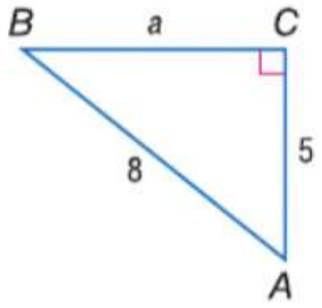
$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

مثال 2 إيجاد النسب المثلثية

إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$، فجد القيمة الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية لـ B.



الخطوة 1 ارسم مثلثًا قائمًا مع تسمية زاوية حادة واحدة B.
قم بتسمية الضلع المقابل 5 والوتر 8.

الخطوة 2 استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد a.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$a^2 + 5^2 = 8^2$	$b = 5$ و $c = +8$
$a^2 + 25 = 64$	بسّط.
$a^2 = 39$	اطرح 25 من كل طرف.
$a = \pm\sqrt{39}$	خذ الجذر التربيعي من كل طرف.
$a = \sqrt{39}$	الطول لا يمكن أن يكون سالبًا.

الخطوة 3 جد القيم الأخرى.

بما أن $\sin B = \frac{5}{8}$، فإن $\csc B = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$ أو $\frac{8}{5}$.

$\cos B = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ $\qquad \sec B = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{8}{\sqrt{39}} = \frac{8\sqrt{39}}{39}$

$\tan B = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{5}{\sqrt{39}} = \frac{5\sqrt{39}}{39}$ $\qquad \cot B = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\sqrt{39}}{5}$

تمرين موجّه

2. إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$، فجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية المتبقية لـ B.

قراءة في الرياضيات

تسمية المثلثات
في جميع أنحاء هذه الوحدة، سيُستخدم حرف كبير لتمثيل كل من رأس المثلث وقياس الزاوية عند هذا الرأس. ويُستخدم نفس الحرف ولكن بالصورة الصغيرة له لتمثيل الضلعين المقابلين لهذه الزاوية وطول الأضلاع.

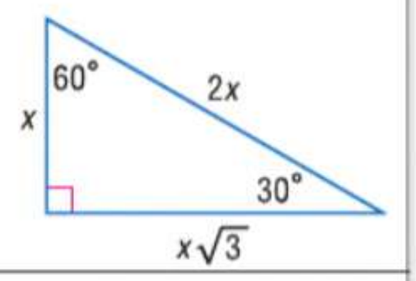
الزوايا التي تكون قياساتها 30° و45° و60°، تحدث كثيرًا في حساب المثلثات.

المفهوم الأساسي القيم المثلثية للزوايا الخاصة

30°-60°-90°

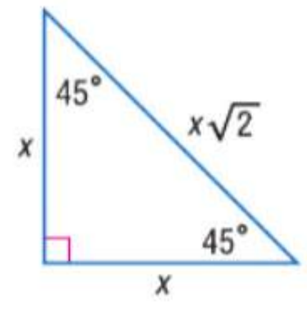
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \tan 60° = \sqrt{3}$



45°-45°-90°

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan 45° = 1$



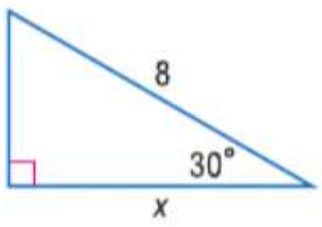
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 استخدام النسب المثلثية

يمكنك استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع الناقصة وقياسات الزوايا الناقصة في المثلثات القائمة.

مثال 3 إيجاد طول الضلع الناقص

استخدم دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



طول الوتر هو 8 . القياس الناقص هو الضلع المجاور للزاوية 30°. استخدم دالة cosine لإيجاد x.

$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ دالة cosine

$\cos 30° = \frac{x}{8}$ عوّض عن θ بـ 30°، وعن adj بـ x، وعن hyp بـ 8.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$ اضرب كل طرف في 8.

$6.9 \approx x$ استخدم آلة حاسبة.

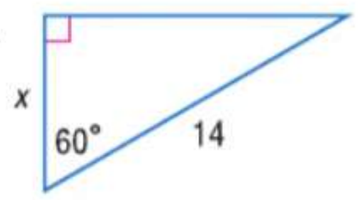
نصيحة دراسية

اختر دالة

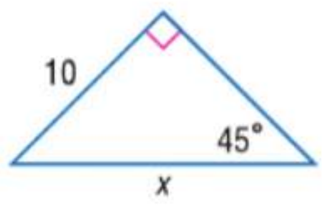
إذا كان طول الوتر مجهولاً، فينبغي إذًا استخدام إما دالة sine أو cosine لإيجاد القياس الناقص.

تمرين موجّه

3A.



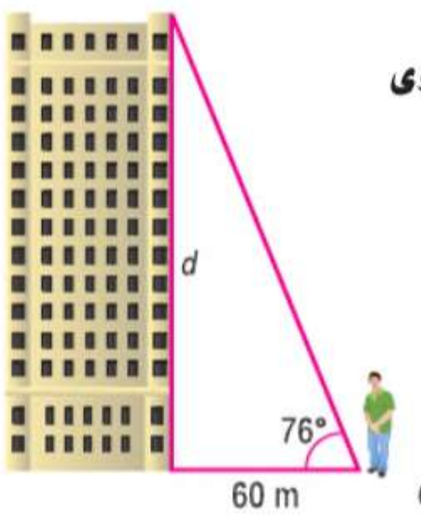
3B.



يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع الناقصة في المثلثات التي ليس لها زوايا بقياس 30° أو 45° أو 60°

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد طول الضلع الناقص

المباني لحساب ارتفاع مبنى، سار مازن مسافة 60 m من قاعدة المبنى واستخدم أداة الميال لقياس الزاوية من عينيه إلى قمة المبنى. إذا كان مستوى عينيه هو مترين، فكم يبلغ ارتفاع المبنى؟



الزاوية المقيسة هي 76° . الضلع المجاور للزاوية يبلغ 60 m. القياس الناقص هو الضلع المقابل للزاوية. استخدم دالة Tangent لإيجاد d.

$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ دالة Tangent

$\tan 76° = \frac{d}{60}$ عوّض عن θ بـ 76°، وعن opp بـ d، وعن adj بـ 60.

$60 \tan 76° = d$ اضرب كل طرف في 60.

$240 \approx d$ استخدم آلة حاسبة للتبسيط: 60 TAN 76 ENTER

لأن قياس الميال بلغ مترين أعلى مستوى الأرض، فارتفاع المبنى هو 242 m تقريبًا.

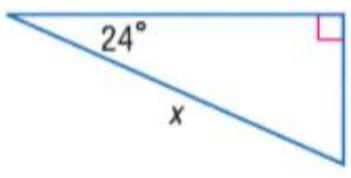
الربط بالحياة اليومية

تقيس أدوات الميال زاوية المجال المغناطيسي للأرض وكذلك الانحدار والتمايل للمركبات والمراكب الشراعية والطائرات. وهي تُستخدم أيضًا في رصد البراكين وحفر الآبار.

المصدر: مجلة العلوم

تمرين موجّه

4. استخدم دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

عند حل معادلات مثل $3x = -27$، أنت تستخدم معكوس الضرب لإيجاد x . يمكنك أيضًا إيجاد قياسات الزوايا باستخدام معكوس sine أو cosine أو tangent.

المفهوم الأساسي معكوس النسب المثلثية

الشرح إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و sine زاوية A هو x، فإن **معكوس sine** لـ x هو قياس $\angle A$.

الرموز إذا كان $\sin A = x$، فإن $m\angle A = \sin^{-1} x$.

مثال $\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$

الشرح إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و cosine A هو x، فإن **معكوس cosine** لـ x هو قياس $\angle A$.

الرموز إذا كان $\cos A = x$، فإن $m\angle A = \cos^{-1} x$.

مثال $\cos A = \sqrt{22} \rightarrow \cos^{-1} \sqrt{22} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$

الشرح إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و tangent لـ A هو x، فإن **معكوس الظل** لـ x هو قياس $\angle A$.

الرموز إذا كان $\tan A = x$، فإن $m\angle A = \tan^{-1} x$.

مثال $\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

قراءة في الرياضيات

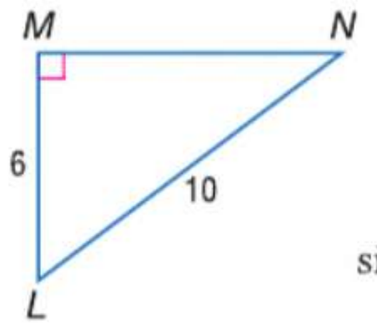
الدقة التعبير $\sin^{-1} x$ يُقرأ معكوس sine لـ x ويُفسر على أنه الزاوية التي sine لها هو x. انتبه ولا تخلط بين هذا الترميز والترميز الخاص بالأسس السالبة؛ $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$. بدلاً من ذلك، هذا الترميز يُشبه الترميز الخاص بمعكوس الدالة، $f^{-1}(x)$.

إذا كنت تعرف sine أو cosine أو tangent الخاص بزاوية حادة، فإنه يمكنك استخدام آلة حاسبة لإيجاد قياس الزاوية، وهذا يُمثل معكوس النسبة المثلثية.

مثال 5 إيجاد قياس الزاوية الناقصة

جـ ـ ـد قياس كل زاوية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

a. $\angle N$



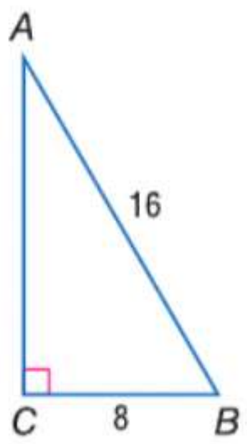
أنت تعلم قياس الضلع المقابل لـ $\angle N$ وقياس الوتر. استخدم دالة sine.

$\sin N = \frac{6}{10}$ $\quad \sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\sin^{-1} \frac{6}{10} = m\angle N$ $\quad$ معكوس sine

$36.9° \approx m\angle N$ $\quad$ استخدم آلة حاسبة.

b. $\angle B$



استخدم دالة cosine.

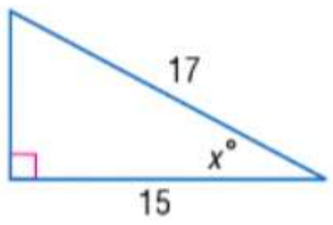
$\cos B = \frac{8}{16}$ $\quad \cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\cos^{-1} \frac{8}{16} = m\angle B$ $\quad$ معكوس cosine

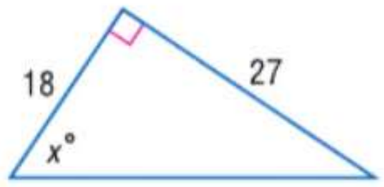
$60° = m\angle B$ $\quad$ استخدم آلة حاسبة.

تمرين موجّه **جـ ـ ـد قيمة x. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

5A.



5B.



McGraw-Hill Education مؤسسة للصالح © محفوظة لصالح والتأليف الطبع حقوق

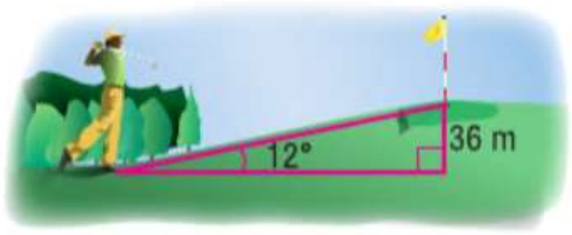
نصيحة دراسية

زوايا الارتفاع والانخفاض

زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض متطابقتان بما أنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لمستقيمات متوازية.

في الشكل المبين على اليسار، الزاوية التي يصنعها مستقيم رؤية السباح ومستقيم موازٍ للأفق تُسمى **زاوية الارتفاع**. الزاوية التي يصنعها مستقيم رؤية حارس الإنقاذ ومستقيم موازٍ للأفق تُسمى **زاوية الانخفاض**.

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض



a. الجولف يقف لاعب الجولف عند قاعدة الكرة وينظر لأعلى إلى العشب الذي يكسو التل. إذا كانت القاعدة أدنى من العشب 36 m وزاوية الارتفاع من القاعدة إلى الحفرة تساوي 12° ، فجد المسافة من القاعدة إلى الحفرة.

اكتب معادلة باستخدام دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل لزاوية 12°) والمسافة من قاعدة الكرة إلى الحفرة (الوتر).

$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

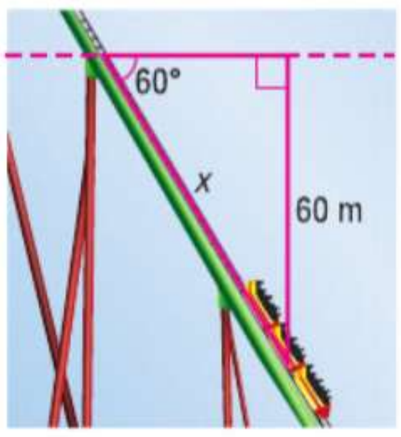
$\sin 12^\circ = \frac{36}{x}$ اضرب كل طرف في x.

$x \sin 12^\circ = 36$ اقسم كل طرف على $\sin 12^\circ$.

$x = \frac{36}{\sin 12^\circ}$ استخدم آلة حاسبة.

$x \approx 173.2$

إذًا، المسافة من قاعدة الكرة إلى الحفرة هي حوالي 173.2 m.



b. قطار الملاهي تل قطار الملاهي له *زاوية هبوط*، أو زاوية انخفاض، تساوي 60°. وهبوط رأسي يبلغ 60 m. قدّر طول التل.

اكتب معادلة باستخدام دالة مثلثية تتضمن نسبة الهبوط الرأسي (الضلع المقابل لزاوية 60°) وطول التل (الوتر).

$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\sin 60^\circ = \frac{60}{x}$ اضرب كل طرف في x.

$x \sin 60^\circ = 60$ اقسم كل طرف على $\sin 60^\circ$.

$x = \frac{60}{\sin 60^\circ}$ استخدم آلة حاسبة.

$x \approx 70$

إذًا، طول التل هو حوالي 70 m.

الربط بالحياة اليومية

أكثر قطارات الملاهي انحدارًا في العالم لها زوايا هبوط تقترب من 90°.

المصدر: التيمت رولر كوستر

تمرين موجّه

6A. النقل منحدر مُستخدَم لتفريغ شاحنة منقولات له زاوية ارتفاع 32° . إذا كانت قمة المنحدر ترتفع عن الأرض 1.2 m. فقدّر طول المنحدر.

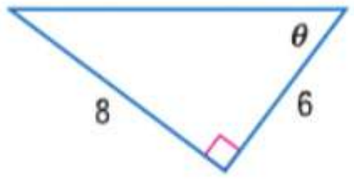
6B. السلالم إذا وُضع سلم طوله 14 m في منزل بزاوية ارتفاع 72°. فما ارتفاع قمة السلم عن الأرض؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

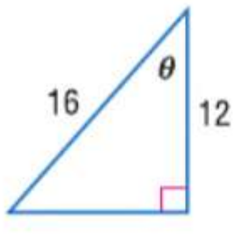
التحقق من فهمك

مثال 1 جـ ـ د قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

1.



2.



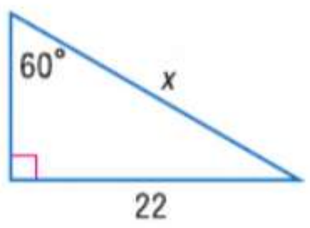
مثال 2 في مثلث قائم، تكون $\angle A$ حادة. جـ ـ د قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.

3. $\cos A = \frac{4}{7}$

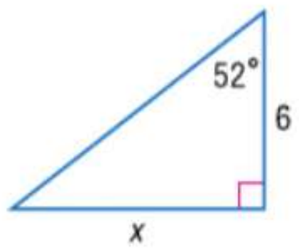
4. $\tan A = \frac{20}{21}$

المثالان 3 و 4 استخدم نسبة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

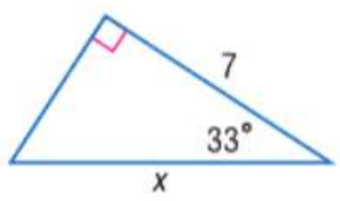
5



6.

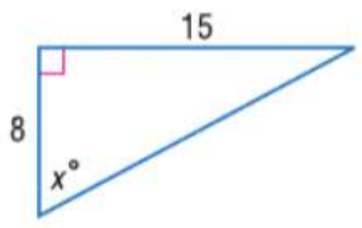


7.

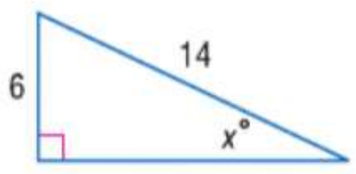


مثال 5 جـ ـ د قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

8.



9.



10.

مثال 6

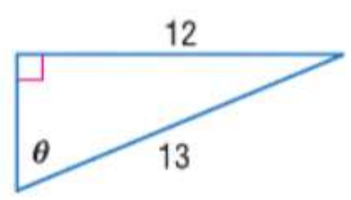
11. **التبرير المنطقي** وجد عمر شجرتين أمام بعضهما مباشرة على كل جانب من الوادي. عندما تحرك مسافة 100 m من الشجرة على جانبه (بشكل موازٍ مع حافة الوادي)، تشكلت زاوية قياسها 70° بالشجرة على جانبه والشجرة على الجانب الآخر. جـ ـ د المسافة عبر الوادي.

12. **السلالم** زاوية الارتفاع الموصي بها للسلم المستخدم في مكافحة الحريق هي 75°. ما الارتفاع الذي يصل إليه سلم طوله 21 m على مبنى إذا تم استخدام زاوية الارتفاع الموصي بها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

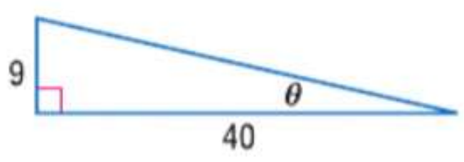
التدريب وحل المسائل

مثال 1 جـ ـ د قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

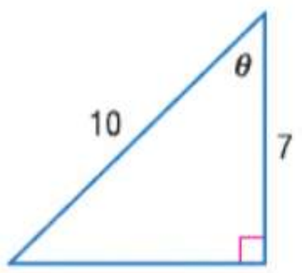
13.



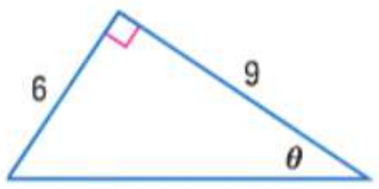
14.



15.



16.



مثال 2 في مثلث قائم، تكون $\angle A$ و $\angle B$ حادتين. جـ ـ د قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.

17. $\tan A = \frac{8}{15}$

18. $\cos A = \frac{3}{10}$

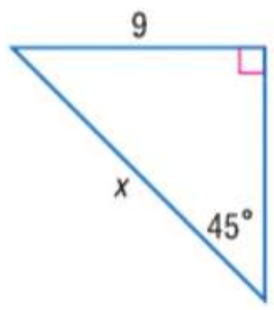
19. $\tan B = 3$

20. $\sin B = \frac{4}{9}$

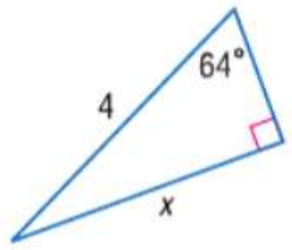
McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

المثالان 3 و 4 استخدم نسبة مثلثية لإيجاد كل قيمة لـ x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

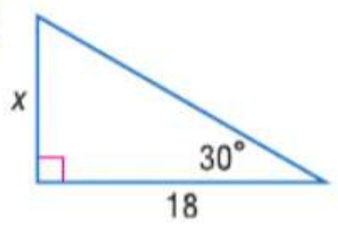
21.



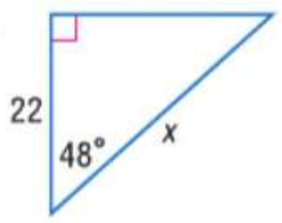
22.



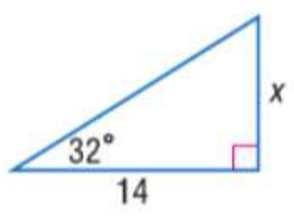
23



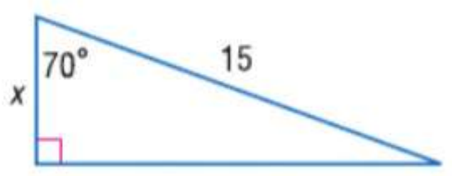
24.



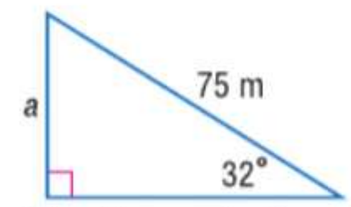
25.



26.



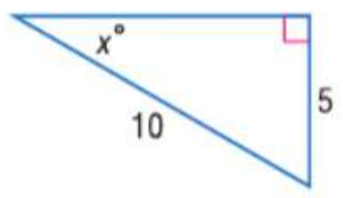
27. **التزلج المائي بالمظلة** ارجع إلى بداية الدرس والشكل الموضح على اليسار. جـ ـ ـد قيمة a . ارتفاع الشخص المتزلج، إذا كان حبل السحب طوله 75 m والزاوية الناشئة قياسها 32°. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



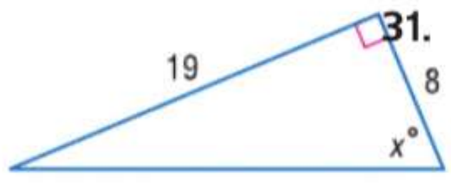
28. **تمثيل النماذج** يرغب علي في بناء جسر من حبال بين منزل الشجرة الخاص به ومنزل الشجرة الخاص بخالد. افترض أن منزل الشجرة الخاص بعلي يقع خلف نظيره الخاص بخالد مباشرة. وعلى مسافة 20 m على اليسار من منزل الشجرة الخاص بعلي، توجد زاوية قياسها 52° بين المنزلين. جـ ـ ـد طول الحبال.

مثال 5 جـ ـ ـد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

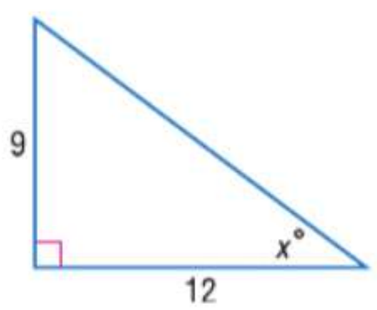
29.



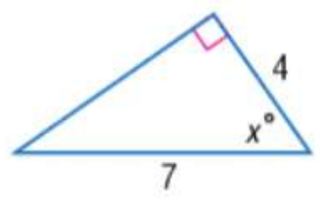
30.



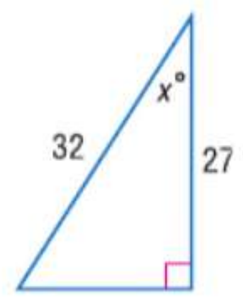
31.



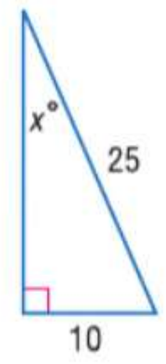
32.



33.



34.



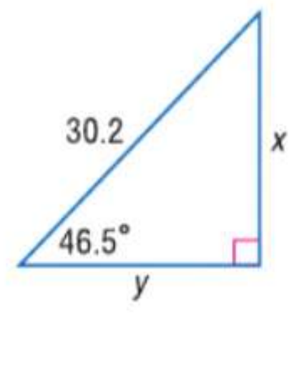
مثال 6

35. **السناجب** السناجب الطائرة البالغة تستطيع أن تصنع قفزة منزلقة من ارتفاع 50 m. إذا طار سنجاب منزلقًا من مسافة رأسية تبلغ 50 m وزاوية هبوط 9°. فجـ ـ ـد التغير في ارتفاع السنجاب.

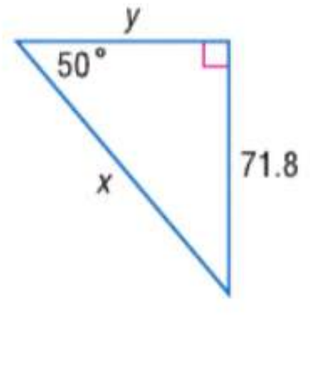
36. **الطيران الشراعي** قفزت طائرة شراعية بزاوية ارتفاع 20°. جـ ـ ـد التغير في ارتفاع هذه الطائرة إذا طارت مسافة أفقية تبلغ 18 m.

استخدم النسب المثلثية لإيجاد قيمتي x و y. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

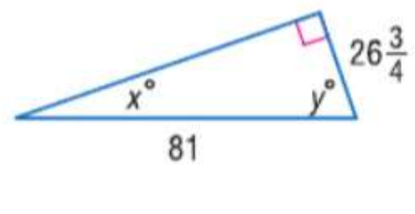
37.



38.



39.



جـ ـ ـد حل كل من المعادلات التالية.

40. $\cos A = \frac{3}{19}$

41. $\sin N = \frac{9}{11}$

42. $\tan X = 15$

43. $\sin T = 0.35$

44. $\tan G = 0.125$

45. $\cos Z = 0.98$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

46. **المعالم** مَعْلَم يلقي بظل طوله 24 m. وزاوية الارتفاع من نهاية الظل إلى قمة المَعْلَم قياسها 50°.

a. ارسم مثلثًا قائمًا مع تسميته لتمثيل هذه الحالة.

b. اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد ارتفاع المَعْلَم.

c. جـ ـد قيمة الدالة لتحديد ارتفاع المَعْلَم مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة.

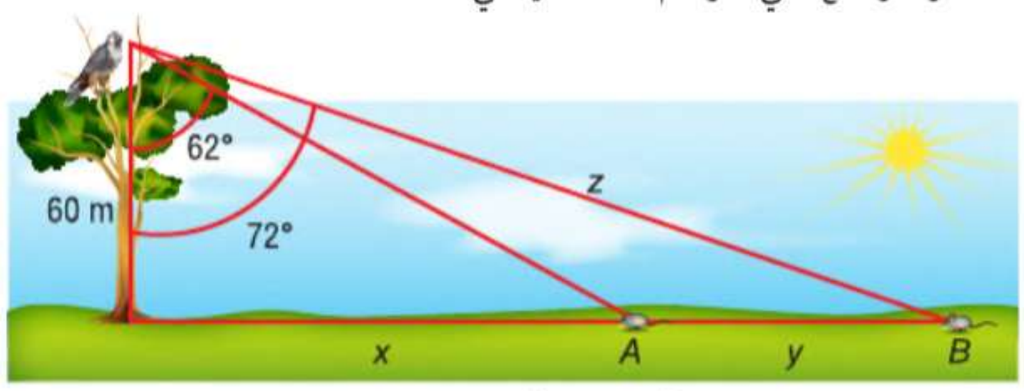
47. **أعشاش الطيور** ترتفع عينا أماني 1.5 m عن الأرض وهي تنظر إلى عش طائر في شجرة. إذا كانت زاوية الارتفاع هي 74.5° وهي تقف على بعد 4 m من قاعدة الشجرة. فما ارتفاع عش الطائر؟ قرّب إلى أقرب متر.

48. **المنحدرات** منحدران للدراجات يغطي كل منهما مسافة أفقية من 8 m. وتبلغ زاوية الارتفاع لأحدهما 20°. والآخر 35°. كما هو موضح على اليسار.

a. بكم يزيد ارتفاع المنحدر الثاني عن الأول؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

b. بكم يزيد طول المنحدر الثاني عن الأول؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

49. **الصقور** صقر على ارتفاع 60 m يرى فأرين A و B، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.



a. ما المسافة التقريبية z بين الصقر والفأر B؟

b. ما المسافة الفاصلة بين الفأرين؟

في المثلث $\triangle ABC$، تكون $\angle C$ زاوية قائمة. استخدم القياسات المعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا الناقصة للمثلث $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

50. $m\angle A = 36°$, $a = 12$

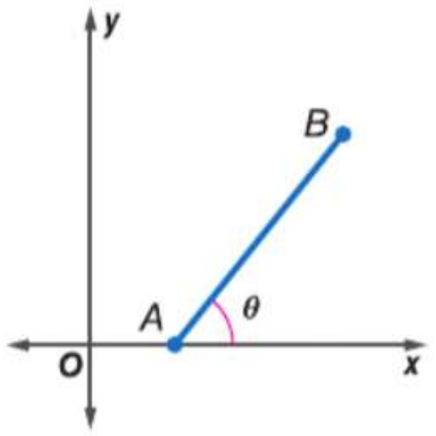
51. $m\angle B = 31°$, $b = 19$

52. $a = 8$, $c = 17$

53. $\tan A = \frac{4}{5}$, $a = 6$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. **التحدِّ** قطعة مستقيمة لها نقطتا النهاية $A(2, 0)$ و $B(6, 5)$. كما هو موضح في الشكل على اليسار. ما قياس الزاوية الحادة θ التي تصنعها القطعة المستقيمة والمحور الأفقي x؟ اشرح كيف وجدت القياس.



55. **الفرضيات** حدد ما إذا كان العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

بالنسبة لأي زاوية حادة، دالة sine لا تكون لها قيمة سالبة أبدًا.

56. **مسألة غير محددة الإجابة** في المثلث القائم CBA، $\sin A = \sin C$. ما الذي يمكنك استنتاجه بشأن $\triangle ABC$؟ برر استنتاجك.

57. **الكتابة في الرياضيات** سطح له ميل $\frac{2}{3}$. صِف العلاقة بين الميل وزاوية الارتفاع θ التي يصنعها السطح مع المحور الأفقي. ثم استخدم دالة مثلثية عكسية لإيجاد قيمة θ.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبارات المعيارية

58. الإجابة الموسعة تحتاج مدرستك إلى 5 حافظات للكتب السنوية. تعرض شركة الأمل للكتب السنوية حافظة الكتاب السنوي بسعر AED 153.85 مع تخفيض 10% على طلب 5 حافظات. وتعرض شركة التفوق للكتب السنوية حافظة الكتاب السنوي بسعر AED 157.36 مع تخفيض 15% على طلب 5 حافظات.

a. أي شركة ستختارها؟

b. ما أقل مبلغ يمكنك إنفاقه على الكتب السنوية؟

59. الإجابة القصيرة باعت فرقة العزف قمصانًا وقبعات لجمع التبرعات. وبلغ إجمالي ما باعوه 105 سلع وجمعوا AED 1170. إذا كانت تكلفة القبعة AED 10 وتكلفة القميص AED 15، فكم قميصًا بيعت؟

60. كشك شطائر يقدم الشطيرة بسعر x والمشروب بسعر y. وتبلغ فاتورة شطيرتين ومشروب واحد AED 4.50، وثلاث شطائر ومشروبين AED 7.25 أي مصفوفة يمكن ضربها في $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة x و y؟

A $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

61. SAT/ACT طول مستطيل وعرضه تمثلهما النسبة 5:12 . إذا كانت مساحة المستطيل 240 cm مربعًا، فما طول قطره، بالسنتيمتر؟

F 24 **H** 28 **K** 32

G 26 **J** 30

مراجعة شاملة

حدد فرضية العدم والفرضية البديلة لكل عبارة. ثم حدد أي عبارة تمثل الافتراض.

62. يعتقد ناصر أن قطع المسافة من منزله إلى المتجر بدراجته يستغرق أقل من 10 دقائق.

63. لافتة طعام تنص على أن شطيرة الديك الرومي البالغة 30 cm تحتوي على تسعين جرامًا من اللحم.

64. تستغرق السيدة منى 15 دقيقة على الأقل لإعداد كعكة.

65. حمام السباحة عدد الزيارات إلى حمام سباحة عام التي يقوم بها 425 عضوًا في العام موزع طبيعيًا باستخدام المتوسط 90 والانحراف المعياري 15.

a. ما النسبة المئوية التقريبية للأعضاء الذين ذهبوا إلى حمام السباحة 45 مرة على الأقل؟

b. ما احتمال اختيار عضو عشوائيًا يكون ذهب إلى حمام السباحة أكثر من 120 مرة؟

c. ما النسبة المئوية للأعضاء الذين ذهبوا إلى حمام السباحة ما بين 75 و105 مرات؟

66. الاستطلاعات شركة استطلاعات ترغب في تقدير عدد الأشخاص المؤيدين لقانون بيئي جديد. تجري الشركة استطلاعها على 20 شخصًا. ما احتمال أن يكون الشخص المؤيد للقانون هو 0.5.

a. ما احتمال وجود 12 شخصًا بالضبط مؤيدين للقانون الجديد؟

b. ما العدد المتوقع للأشخاص المؤيدين للقانون؟

مراجعة المهارات

جد ناتج ضرب كل مما يلي. واستخدم الوحدات المناسبة في إجابتك.

67. $4.3 \text{ km} \cdot \frac{5280 \text{ m}}{1 \text{ km}}$ **22,704 m**

68. $8 \text{ L} \cdot \frac{8 \text{ mL}}{1 \text{ L}}$ **64 ml**

69. $\frac{5 \text{ dirhams}}{3 \text{ m}} \cdot 21 \text{ m}$ **35 dirhams**

70. $\left(\frac{18 \text{ cubic centimeters}}{5 \text{ seconds}}\right) 24 \text{ sec}$

71. $\frac{65 \text{ degrees}}{10 \text{ cm}} \cdot \frac{1 \text{ L}}{3 \text{ degrees}}$

72. $\frac{7 \text{ L}}{30 \text{ min}} \cdot 10 \text{ min}$ **$2\frac{1}{3}$ L**

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11-2 الزوايا وقياس الزاوية

السابق
- استخدمت الزوايا بمقياس الدرجات.

الحالي
1. رسم الزوايا في وضع قياسي وإيجادها.
2. التحويل بين القياسات بالدرجات والقياسات بالراديان.

لماذا؟
- الساعة الشمسية أداة تشير إلى الوقت من اليوم عن طريق الظل الذي تلقيه على سطح موسوم لإظهار الساعات أو أجزاء من الساعات. ويتحرك الظل حول القرص بزاوية 15° كل ساعة.

المفردات الجديدة

الوضع القياسي
standard position
ضلع الابتداء initial side
ضلع الانتهاء terminal side
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء
coterminal angles
راديان radian
الزاوية المركزية
central angle
طول القوس arc length

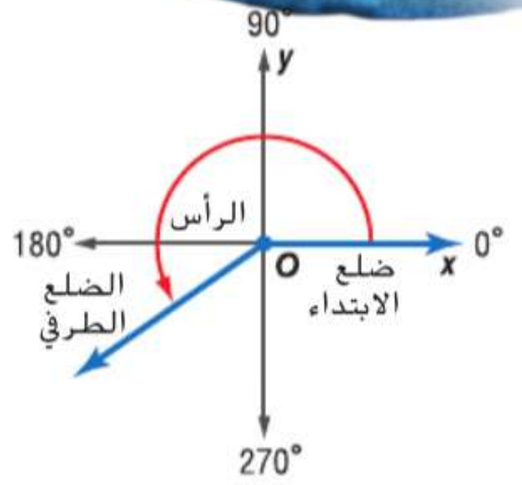
ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 الزوايا في الوضع القياسي

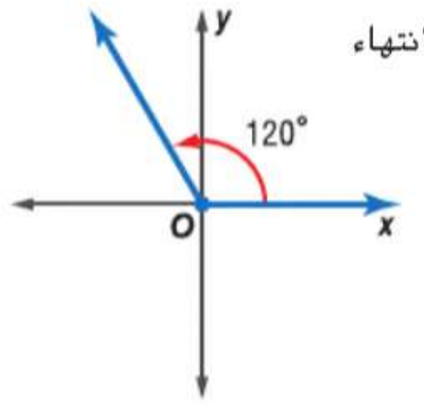
الزاوية التي توجد على المستوى الإحداثي تكون في **وضع قياسي** إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل وكان أحد شعاعيها موجودًا على محور x الموجب.

- الشعاع الموجود على محور x يُسمى **ضلع الابتداء** للزاوية.
- الشعاع الذي يدور حول المركز يُسمى **ضلع الانتهاء**.

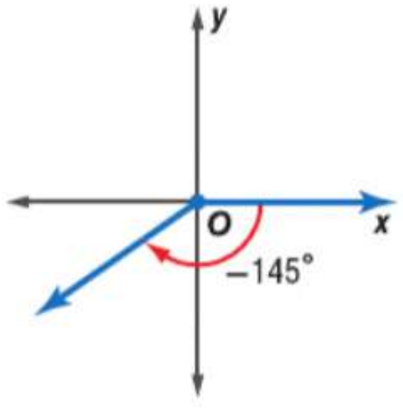


المفهوم الأساسي قياسات الزوايا

إذا كان قياس الزاوية موجبًا، يدور ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة.



إذا كان قياس الزاوية سالبًا، يدور ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

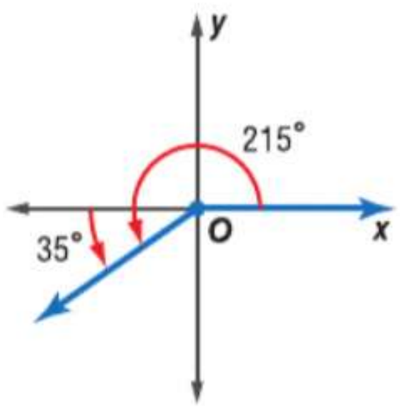


مثال 1 رسم الزوايا في وضع قياسي

ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المعطى.

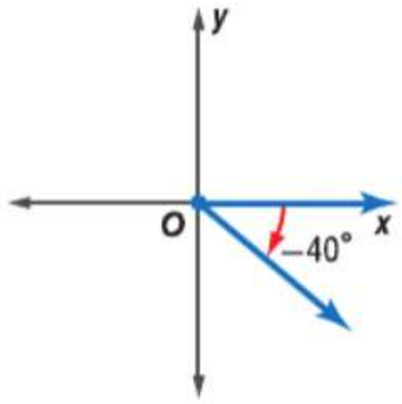
a. 215° $215° = 180° + 35°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 35° في عكس اتجاه عقارب الساعة من بعد محور x السالب.



b. −40°

الزاوية سالبة. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 40° في اتجاه عقارب الساعة من محور x الموجب.



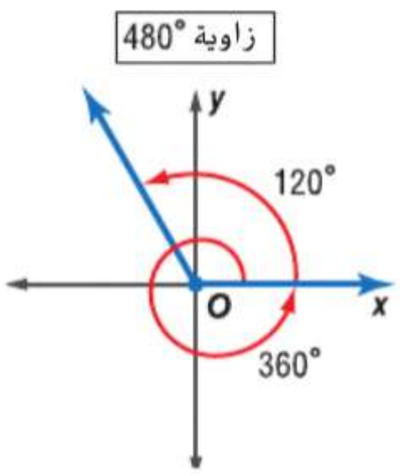
تمرين موجّه

1A. 80°

1B. −105°

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يستطيع ضلع الانتهاء لأي زاوية إتمام أكثر من دورة كاملة واحدة. على سبيل المثال، الدوران الكامل بزاوية 360° زائد دوران بزاوية 120° يشكلان زاوية قياسها 360° + 120° أو 480°.

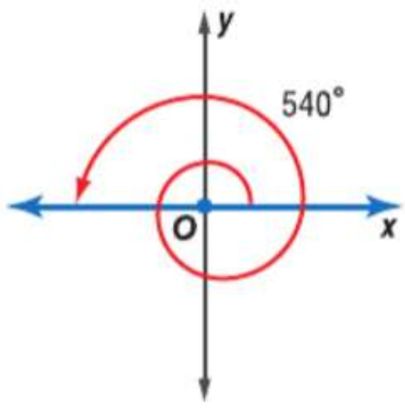


مثال 2 من الحياة اليومية رسم الزوايا في وضع قياسي

التزلج المائي بالألواح *التزلج على الماء بالألواح* **يجمع بين ركوب الأمواج والتزلج على الألواح والتزلج على الجليد بالألواح والتزلج على الماء. وتتمثل إحدى مناورات التزلج في الدوران بزاوية 540° في الهواء. ارسم زاوية في وضع قياسي قياسها 540°.**

$540° = 360° + 180°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 180° من بعد محور x الموجب.

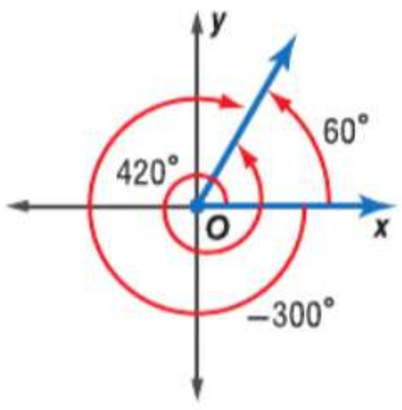


تمرين موجّه

2. ارسم زاوية في وضع قياسي قياسها 600°.

إذا كانت توجد زاويتان أو أكثر في وضع قياسي وتشترك في ضلع الانتهاء، فهي تُسمى **زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء**. على سبيل المثال، الزوايا التي يكون قياسها 60° و 420° و −300°. تكون زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء، كما هو موضح في الشكل على اليسار.

يمكن إيجاد الزاوية التي تكون مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، عن طريق الجمع إلى مضاعف 360° أو الطرح منه.



- $60° + 360° = 420°$
- $60° - 360° = -300°$

مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

جـ ـد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.

a. 130°

$130° + 360° = 490°$ زاوية موجبة: اجمع إلى 360°.

$130° - 360° = -230°$ زاوية سالبة: اطرح 360°.

b. −200°

$-200° + 360° = 160°$ زاوية موجبة: اجمع إلى 360°.

$-200° - 360° = -560°$ زاوية سالبة: اطرح 360°.

تمرين موجّه

3A. 15°

3B. −45°

الربط بالحياة اليومية

يعد التزلج المائي بالألواح من أسرع الرياضات المائية انتشارًا في الولايات المتحدة. حيث ازدادت المشاركة فيها بأكثر من 100% في الأعوام الأخيرة.

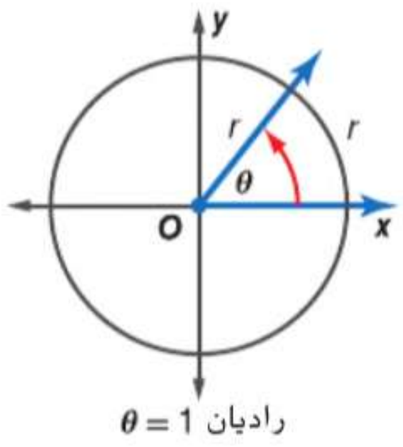
المصدر: King of Wake

قراءة في الرياضيات

زاوية الدوران

في حساب المثلثات، يُشار إلى الزاوية في بعض الأحيان *بزاوية الدوران*.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



2 التحويل بين الدرجات والراديان

يمكن قياس الزوايا أيضا بالوحدات المستندة إلى طول القوس. **راديان** واحد هو قياس زاوية θ في وضع قياسي يقطع ضلع الانتهاء لها قوسًا له نفس الطول كما هو الأمر مع نصف قطر الدائرة.

محيط الدائرة هو $2\pi r$ لذا، الدوران الكامل حول الدائرة يساوي 2π راديان.
بما أن 2π راديان $= 360°$، فإن القياس بالدرجة والقياس بالراديان تربط بينهما علاقة تو ضحها المعادلات التالية.

$$360° = 2\pi \text{ راديان} \qquad 180° = \pi \text{ راديان}$$

نصيحة دراسية

البنية كما هو الحال مع الدرجات، يقيس الراديان مقدار الدوران من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.

- قياس الزاوية بالراديان يكون موجبًا إذا كان دورانه عكس اتجاه عقارب الساعة.
- يكون القياس سالبًا إذا كان الدوران في اتجاهعقارب الساعة.

المفهوم الأساسي التحويل بين الدرجات والراديان

درجات إلى راديان	راديان إلى درجات
للتحويل من درجات إلى راديان، اضرب عدد الدرجات في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.	للتحويل من راديان إلى درجات، اضرب عدد الراديان في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$.

مثال 4 التحويل بين الدرجات والراديان

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

a. $-30°$

$$-30° = -30° \cdot \frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$$

$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ راديان}$$

b. $\frac{5\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \text{ راديان} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$$

$$= \frac{900°}{2} \text{ أو } 450°$$

تمرين موجّه

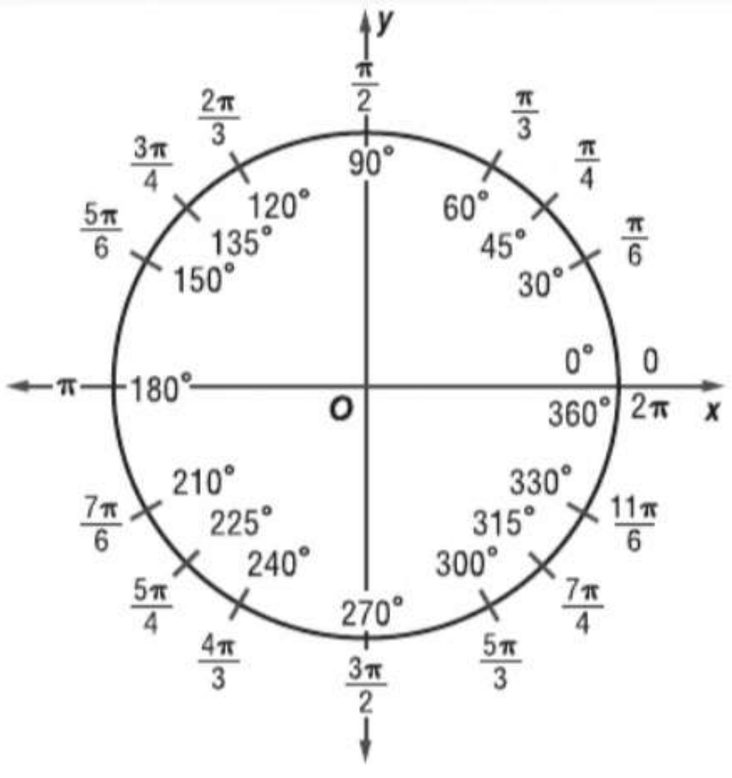
4A. $120°$ **4B.** $-\frac{3\pi}{8}$

قراءة في الرياضيات

القياسات بالراديان تُحذف كلمة *راديان* عادةً عندما يتم التعبير عن الزوايا بقياس الراديان. لذلك، في حالة ذُكرت الزاويةون وحدات قياس، يكون القياس بالراديان ضمنيًا.

ملخص المفهوم الدرجات والراديان

يوضح الرسم التخطيطي قياسات متكافئة بالدرجات والراديان لزوايا خاصة.



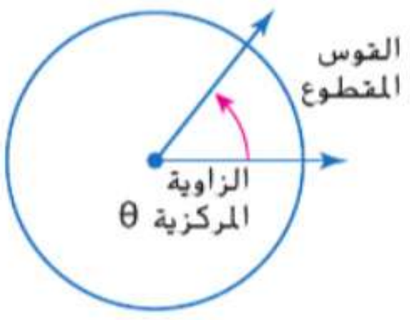
قد تستفيد من حفظ ما يلي من القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان. ولا تكون الزوايا الخاصة الأخرى سوى مضاعفات لهذه الزوايا.

$30° = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $45° = \frac{\pi}{4}$

$60° = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $90° = \frac{\pi}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

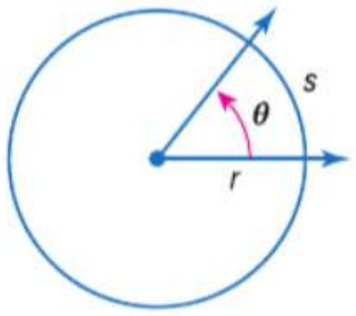
الزاوية المركزية للدائرة هي زاوية يقع رأسها عند مركز الدائرة. إذا كنت تعلم قياس الزاوية المركزية ونصف قطر الدائرة، فإنه يمكنك إيجاد طول القوس الذي تقطعه هذه الزاوية.



المفهوم الأساسي طول القوس

الشرح بالنسبة لدائرة نصف قطرها r وزاويتها المركزية θ (بالراديان). **طول القوس** s يساوي ناتج ضرب r و θ.

النموذج



الرموز $s = r\theta$

ستبرر هذه الصيغة في التدريب 52.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد طول القوس

الشاحنات إذا كان نصف قطر إطارات الشاحنة الكبيرة يساوي 82 cm . فما المسافة التي تقطعها شاحنة كبيرة بالمتر بعد ثلاثة أرباع فقط من دوران الإطار؟

الخطوة 1 جـ ـد الزاوية المركزية بالراديان.

$\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ الزاوية تساوي $\frac{3}{4}$ دورة كاملة.

الخطوة 2 استخدم نصف القطر والزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

$s = r\theta$ اكتب صيغة لطول القوس.

$= 82 \cdot \frac{3\pi}{2}$ عوّض عن r بـ 28 وعن θ بـ $\frac{3\pi}{2}$.

$= 388.8$ cm استخدم آلة حاسبة للتبسيط.

$= 3.9$ m اقسم على 100 للتحويل إلى أمتار.

إذًا، تقطع الشاحنة حوالي 3.9 m بعد ثلاثة أرباع من دوران الإطار.

انتبه!
طول القوس تذكر عند إيجاد طول القوس أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجة. وتذكر كذلك أن عدد الراديان في دوران كامل هو 2π.

تمرين موجّه

5. دائرة قطرها 9 cm. جـ ـد طول القوس إذا كانت الزاوية المركزية تساوي 60°. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المعطى.**

1. 140° **2.** −60° **3.** 390°

مثال 3 **جـ ـد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.**

4. 25° **5** 175° **6.** −100°

مثال 4 **أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.**

7. $\frac{\pi}{4}$ **8.** 225° **9.** −40°

مثال 5 **10. التبرير** صنع لاعب تنس دورة بيده تحركت على امتداد مسار قوس. إذا كان نصف قطر دائرة القوس هو 1.2 m وزاوية الدوران هي 100°. فما طول القوس؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المعطى.**

11. 75° **12.** 160° **13.** −90°

14. −120° **15.** 295° **16.** 510°

17. **الجمباز** لاعب جمباز على المتوازي المختلف الارتفاع يتأرجح ليصنع زاوية دوران 240°.

18. **الطعام** تم تدوير غطاء برطمان صلصة المعكرونة 420°قبل أن يُفتح.

مثال 3 **جـ ـ ـد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.**

19. 50° **20.** 95° **21.** 205°

22. 350° **23.** −80° **24.** −195°

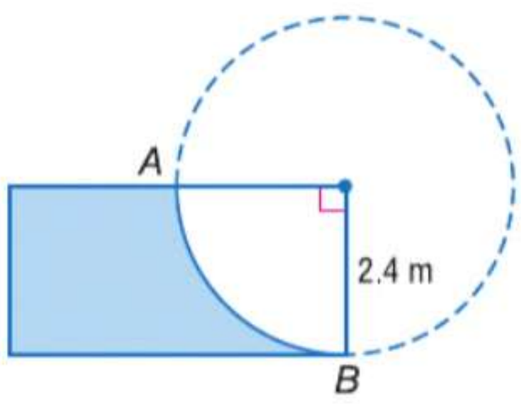
مثال 4 **أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.**

25 330° **26.** $\frac{5\pi}{6}$ **27.** $-\frac{\pi}{3}$

28. −50° **29.** 190° **30.** $-\frac{7\pi}{3}$

مثال 5

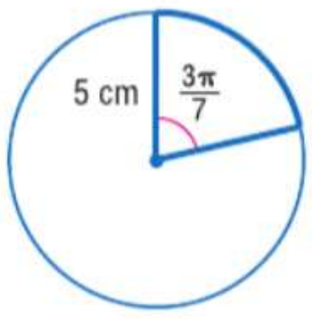
31. **التزلج على الألواح** منحدر التزلج على الألواح المبين على اليسار يُسمى *أنبوب ربعي (quarter pipe)*. والسطح المنحني يحدده نصف قطر الدائرة.
جـ ـ ـد طول الجزء المنحني من المنحدر.



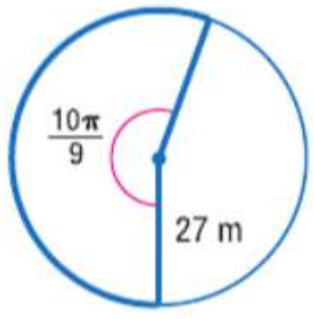
32. **القوارب النهرية** ناعور القارب النهري له قطر 7.2 m.
جـ ـ ـد طول القوس للدائرة التي يصنعها الناعور عندما يدور 300°.

جـ ـ ـد طول كل قوس. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

33.



34.



35. **الساعات** كم يستغرق عقرب الدقائق في الساعة للمرور عبر 2.5π راديان؟

36. **المثابرة** راجع بداية الدرس. ظل يتحرك حول ساعة شمسية بزاوية 15° كل ساعة.

a. بعد كم ساعة ستكون زاوية دوران الظل $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟

b. ما زاوية الدوران بالراديان بعد 5 ساعات؟

c. ساعة شمسية نصف قطرها 20 cm. ما القوس الذي يشكله ظل بعد 14 ساعة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

جـ ـ ـد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.

37. 620° **38.** −400° **39.** $-\frac{3\pi}{4}$ **40.** $\frac{19\pi}{6}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

41. **أرجوحات** زاوية دوران الأرجوحة قياسها 165°.

a. ارسم الزاوية في وضع قياسي.

b. اكتب قياس الزاوية بالراديان.

c. إذا كانت سلاسل الأرجوحة طولها 2 m. فما طول القوس الذي تصنعه الأرجوحة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

d. صِف كيف سيتغير طول القوس إذا تمت مضاعفة أطوال سلاسل الأرجوحة.

42. **التمثيلات المتعددة** تأمل $A(-4, 0)$ و $B(-4, 6)$ و $C(6, 0)$ و $D(6, 8)$.

a. هندسيًا ارسم $\triangle EAB$ و $\triangle ECD$ مع جعل E عند نقطة الأصل.

b. جبريًا جـد قيمة كلاً من tangent لـ $\angle BEA$ و tangent لـ $\angle DEC$.

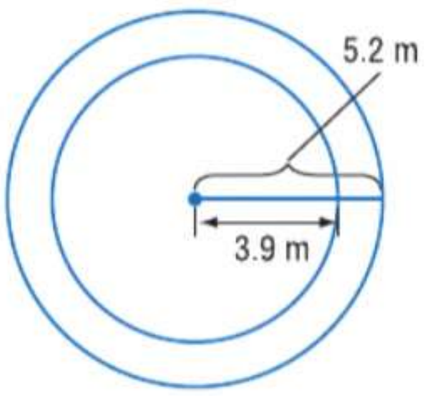
c. جبريًا جـد ميل $\overline{BE}$ و $\overline{ED}$.

d. لفظيًا ما التبريرات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الميل وزاوية الظل؟

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

43. $\frac{21\pi}{8}$ 44. 124° 45. −200° 46. 5

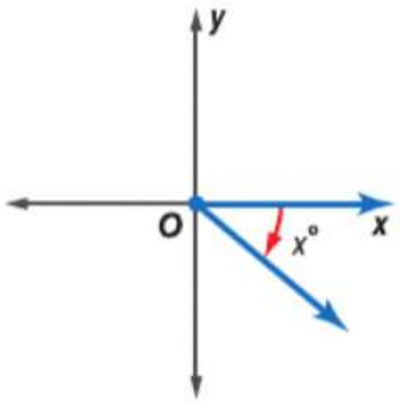
47. **لعبة الداوّات** تصنع لعبة الدوّارة 5 دورات في الدقيقة. الدائرة التي تشكلها مقاعد الركاب في الصف الخارجي لها نصف قطر يساوي 5.2 m. والدائرة التي تشكلها مقاعد الركاب في الصف الداخلي لها نصف قطر يساوي 3.9 m.



a. جـد الزاوية θ بالراديان التي تدورها الدوّارة في ثانية واحدة.

b. في ثانية واحدة، ما الفرق بين طول القوسين لمقاعد الركاب في الصف الخارجي ومقاعد الركاب في الصف الداخلي؟

مسائلمهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



48. **التفكير النقدي** يكتب سعيد وأيوب تعبيرًا لقياس زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الموضحة على اليسار. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

سعيد	أيوب
قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء هو $(x - 360)°$.	*قياس الزاوية المشتركة* في ضلع الانتهاء هو $(360 - x)°$.

49. **التحدٍ** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع محور x الموجب عند النقطة $(2, 0)$. جـد معادلة لهذا المستقيم.

50. **التبرير** عبّر عن $\frac{1}{8}$ الدورة بالدرجات والراديان. اشرح استنتاجك.

51. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم زاوية حادة في وضع قياسي مع تسميتها. جـد زاويتين، إحداهما موجبة والأخرى سالبة، تشتركان في ضلع الانتهاء مع الزاوية.

52. **التبرير** برر صيغة طول القوس.

53. **الكتابة في الرياضيات** استخدم دائرة نصف قطرها r لوصف ما تمثله درجة واحدة وراديان واحد. ثم اشرح كيفية التحويل بين القياسين.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبارات المعيارية

54. الإجابة القصيرة إذا كان $(x + 6)(x + 8) - (x - 7)(x - 5) = 0$، فجد قيمة x.

55. أي مما يلي يمثل تغيرًا عكسيًا؟

A

x	2	5	10	20	25	50
y	50	20	10	5	4	2

B

x	2	4	6	8	10	12
y	−4	−8	−12	−16	−20	−24

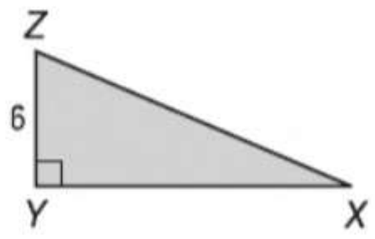
C

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30

D

x	10	9	8	7	6	5
y	5	6	7	8	9	10

56. الهندسة إذا كانت مساحة الشكل هي 60 وحدة مربعة، فما طول الضلع $\overline{XZ}$؟



F $2\sqrt{34}$
G $2\sqrt{109}$
H $4\sqrt{34}$
J $4\sqrt{109}$

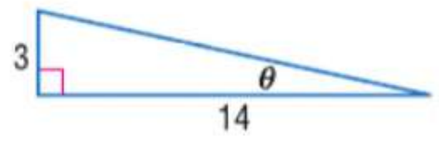
57. SAT/ACT الحد الأول من المتتالية هو 6−، وكل حد يأتي بعد الأول يكون أكبر بمقدار 8 من الحد السابق له مباشرة. ما قيمة الحد رقم 101؟

A 788
B 794
C 802
D 806
E 814

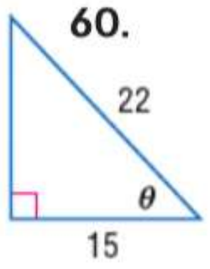
مراجعة شاملة

جد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 1-11)

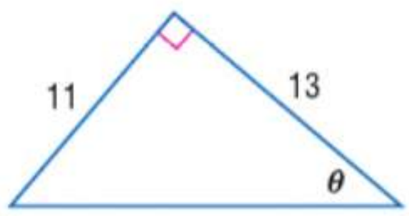
58.



59.



60.



حدد فرضية العدم والفرضية البديلة لكل عبارة، ثم حدد العبارة التي تمثل الافتراض. (الدرس 6-11)

61. يشرب يوسف ما لا يقل عن ثمانية أكواب من الماء كل يوم.

62. تقول سها إن معها مظلتين في سيارتها.

63. التصنيع أحجام الأسطوانات المضغوطة التي تصنعها شركة ما يتم توزيعها طبيعيًا انحراف معياري 1 mL. من المفترض أن يبلغ قطر الأسطوانات المضغوطة 120 mL. وهي تُصنّع لمحركات أسطوانات عرضها 122 mL. (الدرس 2-11)

a. ما النسبة المئوية للأسطوانات المضغوطة التي تتوقع أن تكون أكبر من 120 mL؟

b. إذا كانت تصنع الشركة 1000 أسطوانة مضغوطة في الساعة، فكم عدد الأسطوانات التي تتوقع أن يكون قطرها 119 mL و 122 mL ضمن الأسطوانات التي تُصنع في ساعة واحدة؟

c. حوالي كم أسطوانة مضغوطة في الساعة ستكون أكبر من أن تكون ملاءمة لمحركات الأسطوانات؟

64. المعرفة المالية إذا كان معدل التضخم 2% ويمكن إيجاد تكلفة سلعة ما في السنوات القادمة عن طريق تكرار المعادلة $c(x) = 1.02x$. فجد تكلفة مشغل صوت رقمي سعره 70 AED بعد أربعة أعوام إذا ظل معدل التضخم ثابتًا.

مراجعة المهارات

استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر لكل مثلث قائم علمًا بأطوال الأضلاع المعطاة.

65. $a = 12, b = 15$

66. $a = 8, b = 17$

67. $a = 14, b = 11$

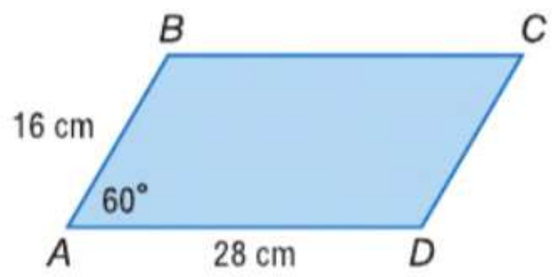
McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر الهندسة
مساحات متوازيات الأضلاع

يمكن إيجاد مساحة أي مثلث باستخدام نسبة sine في المثلث. ويمكن استخدام عملية مشابهة لإيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

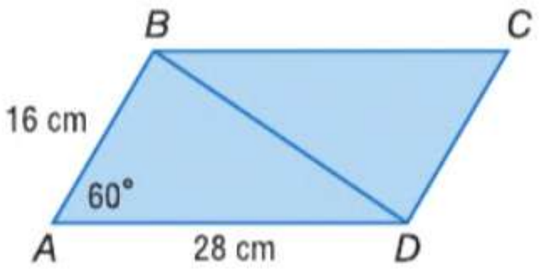
النشاط

جـ ـ د مساحة متوازي الأضلاع *ABCD*.



الخطوة 1 ارسم القطر $\overline{BD}$

$\overline{BD}$ يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين، $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$.



الخطوة 2 جـ ـ د مساحة $\triangle ABD$.

استخدم نسبة sine لتحديد الارتفاع h من B إلى $\overline{AD}$.

$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ تعريف sine

$\sin \theta = \frac{h}{AB}$ $h = \text{opp}, AB = \text{hyp}$

$AB \sin \theta = h$ حل لإيجاد h.

إذًا، $h = AB \sin \theta$.

الخطوة 3 جـ ـ د مساحة $\square ABCD$.

مساحة $\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتي $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$.
بما أن $\triangle CDB \cong \triangle ABD$، فإن مساحتي $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$ متساويتان.
إذًا، مساحة $\square ABCD$ تساوي ضعف مساحة $\triangle ABD$.

المساحة $= bh\frac{1}{2}$ مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}(AD)(AB) \sin A$ $b = AD,\ h = AB \sin A$

$= \frac{1}{2}(28)(16) \sin 60^\circ$ $AD = 28,\ AB = 16,\ A = 60^\circ$

$= 224\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ اضرب وجـ ـ د قيمة $\sin 60^\circ$.

$= 112\sqrt{3}$ بسّط.

$112\sqrt{3} = 224\sqrt{3}$ ٢٠ أو حوالي 387.98 cm2.

التمارين

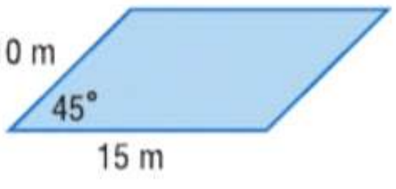
لكل شكل مما يلي،

a. جـ ـ د مساحة كل متوازي أضلاع.

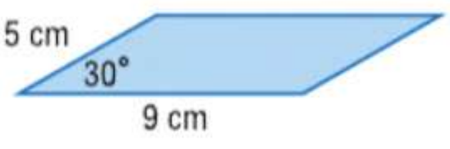
b. جـ ـ د مساحة كل متوازي أضلاع إذا كان قياس الزاوية المحصورة نصف القياس المُعطى.

c. جـ ـ د مساحة كل متوازي أضلاع إذا كان قياس الزاوية المحصورة ضعف القياس المُعطى.

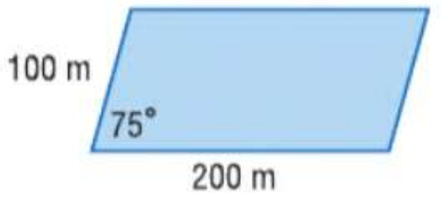
1.



2.



3.



McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

11-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

السابق

- وجـدتَ قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة.

الحالي

1. إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا العامة.
2. إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام زوايا المرجع.

لماذا؟

- في لعبة الملاهي المبينة على اليسار، تدور السيارات ذهابًا وإيابًا حول نقطة مركزية. ويمكن وصف مواضع الأذرع التي تدعم السيارات، باستخدام زوايا مثلثية في الوضع القياسي مع جعل النقطة المركزية للعبة عند نقطة الأصل بالمستوى الإحداثي.

المفردات الجديدة

زاوية ربعية
quadrantal angle

زاوية مرجع
reference angle

ممارسات في الرياضيات

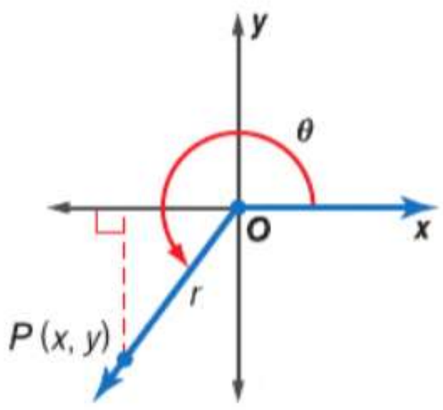
مراعاة الدقة.

1 النسب المثلثية للزوايا العامة

يمكنك إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الأكبر من 90° أو الأقل من 0°.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية للزوايا العامة

افترض أن θ هي زاوية في وضع قياسي وأن $P(x, y)$ هي نقطة على ضلع الانتهاء. باستخدام نظرية فيثاغورس، $r=\sqrt{x^2+y^2}$. النسب المثلثية الست للزاوية θ مُعرَّفة أدناه.

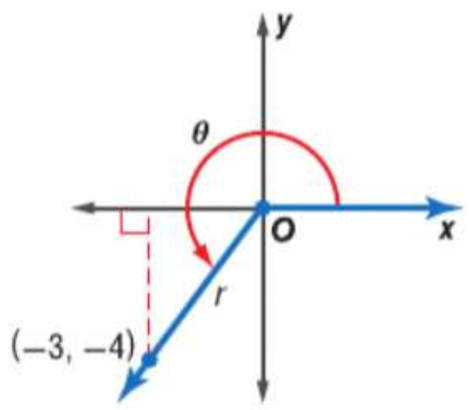


$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \tan\theta=\frac{y}{x},\ x\neq 0$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y},\ y\neq 0 \qquad \sec\theta=\frac{r}{x},\ x\neq 0 \qquad \cot\theta=\frac{x}{y},\ y\neq 0$$

مثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية عند معرفة نقطة

ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(-3, -4)$. جـد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.



الخطوة 1 ارسم الزاوية، وجـد قيمة r.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

الخطوة 2 استخدم $x=-3$ و $y=-4$ و $r=5$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5} \qquad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4} \qquad \sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3} \qquad \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

تمرين موجّه

1. ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يمر بالنقطة $(-6, 2)$. جـد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

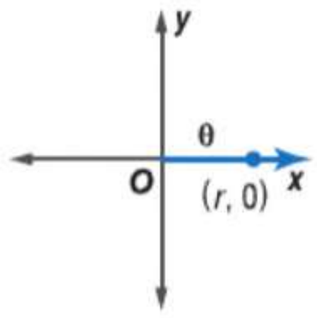
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في وضع قياسي على المحور x أو y، فتُسمى الزاوية **زاوية ربعية**.

نصيحة دراسية

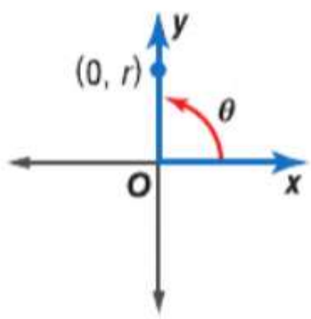
الزوايا الربعية قياس الزاوية الربعية هو مضاعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

المفهوم الأساسي الزوايا الربعية

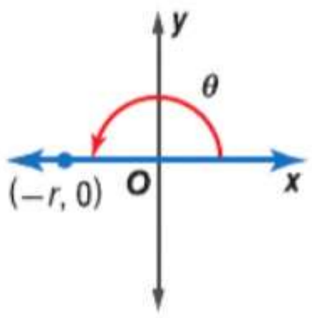
$\theta = 0°$ أو 0 راديان



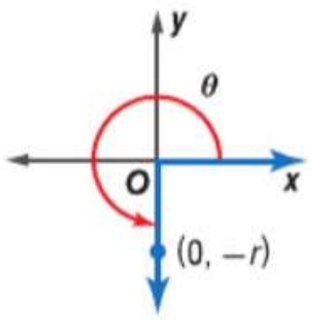
$\theta = 90°$ أو $\frac{\pi}{2}$ راديان



$\theta = 180°$ أو π راديان



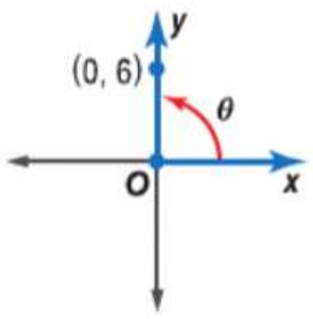
$\theta = 270°$ أو $\frac{3\pi}{2}$ راديان



مثال 2 الزوايا الربعية

ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند (0, 6). جـ ـد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

النقطة عند (0, 6) تقع عند محور y الموجب، إذًا، الزاوية الربعية θ هي $90°$. استخدم $x = 0$ و $y = 6$ و $r = 6$ لكتابة النسب المثلثية.



$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = \theta$ $\quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{0}$ = غير مُعرَّفة

$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{6}{0}$ = غير مُعرَّفة $\quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = \theta$

تمرين موجّه

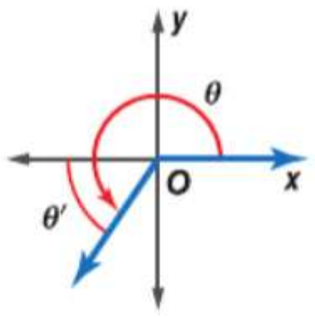
2. ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يمر بالنقطة $(-2, 0)$. جـ ـد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

2 النسب المثلثية بزوايا المرجع

إذا θ كانت زاوية غير ربعية في وضع قياسي، فإن **زاوية المرجع** θ' لها تكون الزاوية الحادة التي يصنعها ضلع الانتهاء لـ θ مع المحور x. فيما يلي قواعد إيجاد قياسات زوايا المرجع حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0° < \theta < 2\pi$.

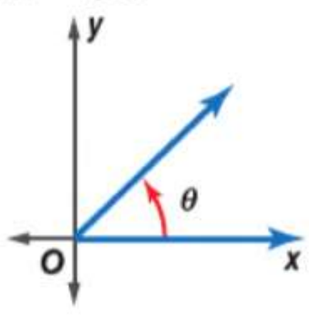
قراءة في الرياضيات

زاوية ثيتا الأولية θ' تُقرأ *ثيتا الأولية*.



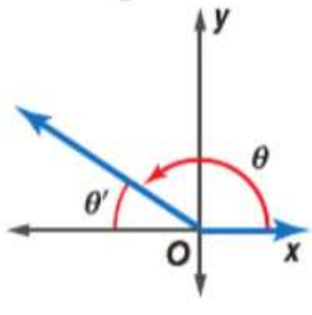
المفهوم الأساسي زوايا المرجع

الربع الأول



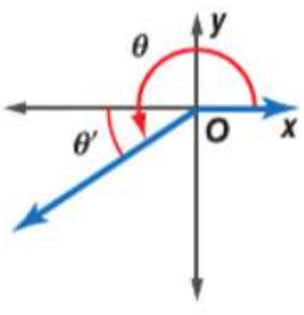
$\theta' = \theta$

الربع الثاني



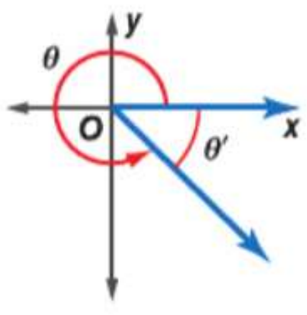
$\theta' = 180° - \theta$
$\theta' = \pi - \theta$

الربع الثالث



$\theta' = \theta - 180°$
$\theta' = \theta - \pi$

الربع الرابع



$\theta' = 360° - \theta$
$\theta' = 2\pi - \theta$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

إذا كان قياس θ أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$. فاستخدم إذًا زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء يكون قياسها موجب بين $0°$ و $360°$ لإيجاد زاوية المرجع.

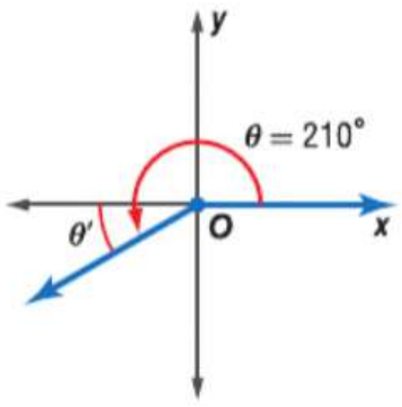
نصيحة دراسية

تمثيل الزوايا بيانيًا يمكنك الرجوع إلى الرسم التخطيطي في ملخص المفهوم. الدرس 2-11 ليساعدك على رسم الزوايا.

مثال 3 إيجاد زوايا المرجع

ارسم كل زاوية مما يلي، ثم جـ ـد زاوية المرجع لها.

a. $210°$



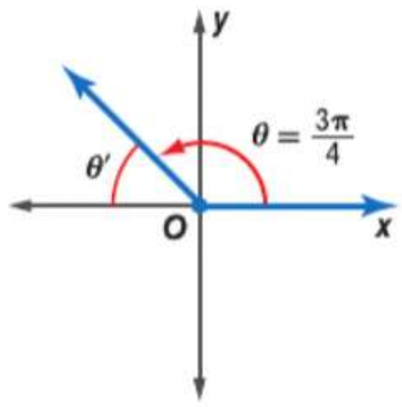
ضلع الانتهاء لـ $210°$ يقع في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180°$

$210° - 180° = 30°$

b. $-\frac{5\pi}{4}$

زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$



ضلع الانتهاء لـ $210°$ يقع

يقع ضلع الانتهاء لـ $\frac{3\pi}{4}$ في الربع الثاني.

$\theta' = \pi - \theta =$

$= \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

تمرين موجّه

3A. $-110°$

3B. $\frac{2\pi}{3}$

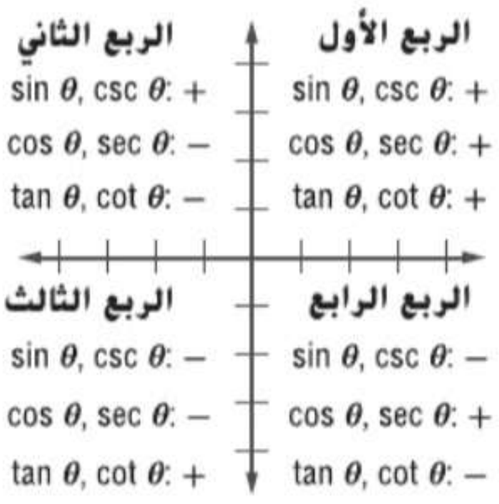
يمكنك استخدام زوايا المرجع لإيجاد قيمة النسب المثلثية لأي زاوية θ . رمز النسبة يحدده الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. استخدم الخطوات التالية لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي إيجاد قيمة النسب المثلثية

الخطوة 1 جـ ـد قياس زاوية المرجع θ'.

الخطوة 2 جـ ـد قيمة النسبة المثلثية لـ θ'.

الخطوة 3 حدد رمز قيمة النسبة المثلثية. استخدم رمز الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لـ θ.



يمكنك استخدام القيم المثلثية للزوايا التي قياسها $30°$ و$45°$ و$60°$ التي تعلمتها في الدرس 1-11.

قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة

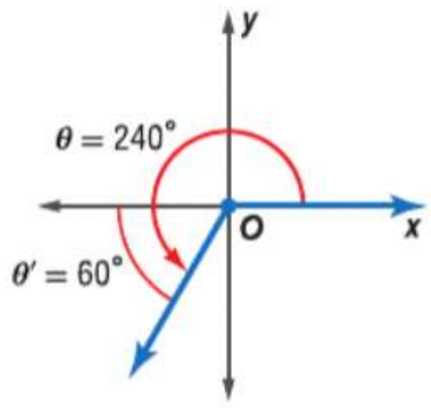
sine	cosine	Tangent	Cosecant	Secant	Cotangent
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4 استخدام زاوية المرجع لإيجاد قيمة مثلثية

جـ ـ ـد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

a. cos 240°



ضلع الانتهاء لـ ـ 240° يقع في الربع الثالث.

جـ ـ ـد قياس زاوية المرجع.

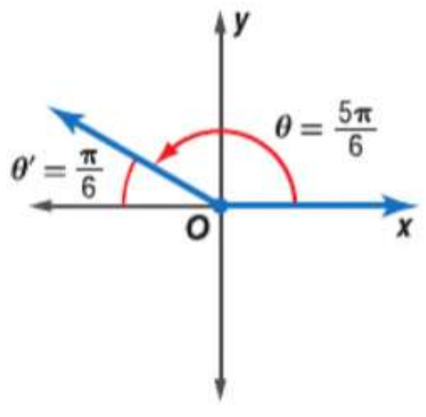
$\theta' = \theta - 180^\circ$
$= 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$

$\theta = 240^\circ$

$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

نسبة cosine سالبة في الربع الثالث.

b. csc $\frac{5\pi}{6}$



ضلع الانتهاء لـ ـ $\frac{5\pi}{6}$ يقع في الربع الثاني.

جـ ـ ـد قياس زاوية المرجع.

$\theta' = \pi - \theta$
$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{5\pi}{6}$

$\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$

نسبة cosecant موجبة في الربع الثاني.

$= \csc 30^\circ$

$30^\circ =$ راديان $\frac{\pi}{6}$

$= 2$

$= \frac{1}{\sin 30} \csc 30^\circ$

تمرين موجّه

4A. $\cos 135^\circ$

4B. $\tan \frac{5\pi}{6}$

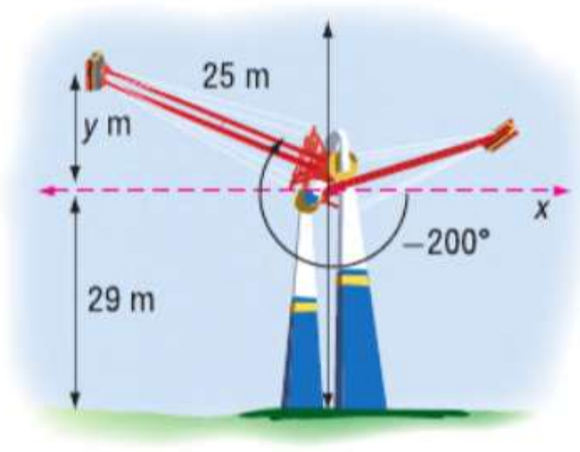
مثال 5 من الحياة اليومية استخدام النسب المثلثية

الربط بالحياة اليومية

على لعبة ملاهٍ دوّارة. اختبر الركاب انعدام الوزن كما في الهبوط الجانبي لقطار الملاهي تمامًا. دامت اللعبة لدقيقة وبلغت السرعة 96 كيلومترًا في الساعة في كلا الاتجاهين.

المصدر: سيدار بوينت

ألعاب الملاهي **الأذرع الدوارة للعبة الملاهي الموضحة على اليسار طولها 25 m وارتفاع المحور الذي تتأرجح منه الذراع طوله 29 m . ما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟**



الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء: $-200^\circ + 360^\circ = 160^\circ$

زاوية المرجع: $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

نسبة sine

$\sin \theta = \frac{y}{r}$

$\theta = 20^\circ$ و $r = 25$

$\sin 20^\circ = \frac{y}{25}$

اضرب كل طرف في 25.

$25 \sin 20^\circ = y$

استخدم آلة حاسبة لإيجاد y.

$8.6 \approx y$

بما أن y يساوي 8.6 m تقريبًا، فإن الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة لها هو 29 + 8.6 أو حوالي 37.6 m.

تمرين موجّه

5. ألعاب الملاهي لعبة ملاهٍ مماثلة لها أذرع دوّارة أصغر طولها 22 m . ارتفاع المحور الذي تتأرجح الذراع منه يساوي 26 m وزاوية الدوران من الوضع القياسي هي -195° . ما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. جـ ـ د القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

1. $(1, 2)$ **2.** $(-8, -15)$ **3.** $(0, -4)$

مثال 3 ارسم كل زاوية، ثم جـ ـ د زاوية المرجع لها.

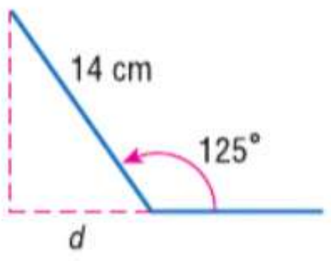
4. 300° **5.** 115° **6.** $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 جـ ـ د القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

7. $\sin \frac{3\pi}{4}$ **8.** $\tan \frac{5\pi}{3}$ **9.** $\sec 120^\circ$ **10.** $\sin 300^\circ$

مثال 5

11. الترفيه فتحت ميساء مشغل DVD المحمول بحيث يصنع زاوية 125°. ويبلغ طول الشاشة 14 cm.



a. أعد تصميم الرسم التخطيطي بحيث تكون الزاوية في وضع قياسي على المستوى الإحداثي.

b. جـ ـ د زاوية المرجع. ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة إلى الجدار d التي يمكن وضع مشغل DVD عندها.

c. استخدم النسبة لإيجاد المسافة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. جـ ـ د القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

12. $(5, 12)$ **13.** $(-6, 8)$ **14.** $(3, 0)$

15. $(0, -7)$ **16.** $(4, -2)$ **17.** $(-9, -3)$

مثال 3 ارسم كل زاوية، ثم جـ ـ د زاوية المرجع لها.

18. 195° **19.** 285° **20.** -250°

21. $\frac{7\pi}{4}$ **22.** $-\frac{\pi}{4}$ **23.** 400°

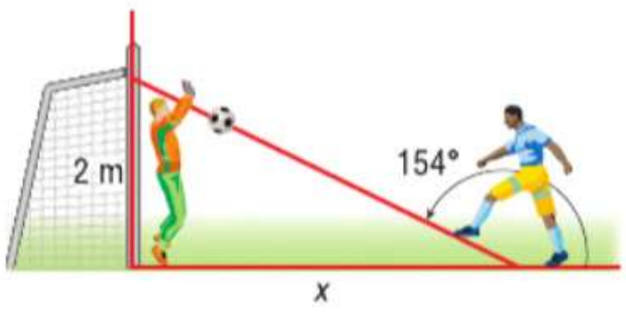
مثال 4 جـ ـ د القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

24. $\sin 210^\circ$ **25.** $\tan 315^\circ$ **26.** $\cos 150^\circ$ **27.** $\csc 225^\circ$

28. $\sin \frac{4\pi}{3}$ **29.** $\cos \frac{5\pi}{3}$ **30.** $\cot \frac{5\pi}{4}$ **31.** $\sec \frac{11\pi}{6}$

مثال 5

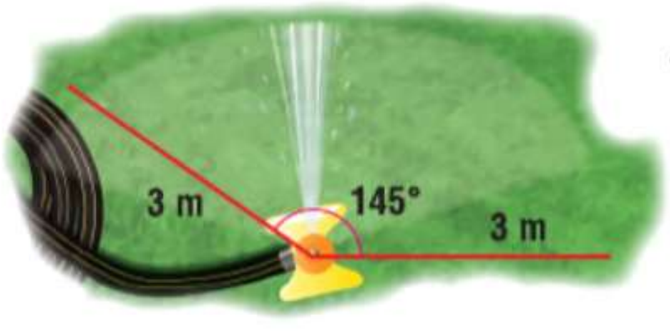
32. التبرير يقف لاعب كرة قدم على بعد x أمتار من حارس المرمى، ركل الكرة صوب المرمى، كما هو موضح في الشكل. قفز حارس المرمى وأمسك بالكرة على ارتفاع مترين في الهواء.



a. جـ ـ د زاوية المرجع، ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة بين حارس المرمى واللاعب عندما ركل الكرة.

b. كم المسافة تقريبًا بين حارس المرمى ولاعب كرة القدم؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



33. آلة الرش آلة رش تدور ذهابًا وإيابًا ترش المياه على مسافة 3 m. من وضع أفقي، تدور الآلة 145° قبل أن تعكس اتجاهها. عند الزاوية 45°. ما المسافة التقريبية التي تبلغها المياه على يسار آلة الرش؟

34. كرة السلة الصيغة $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{32}$ تعطي مسافة ضربة كرة السلة بسرعة متجهة أولية V_0 متر في الثانية بزاوية θ مع الأرض.

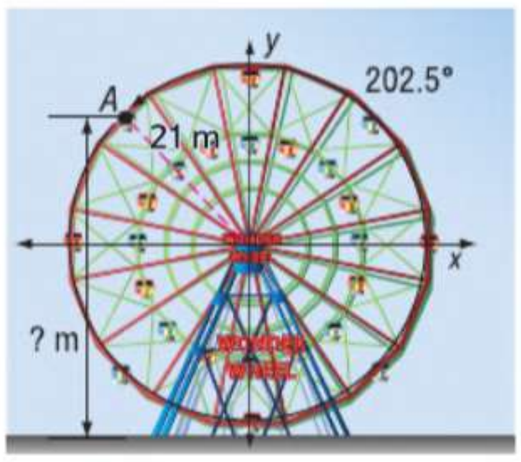
a. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية 7 m/s بزاوية 75°. فما المسافة التي ستقطعها كرة السلة؟

b. إذا ضُربت كرة السلة بزاوية 65° وقطعت 3 m. فكم كانت سرعتها المتجهة الأولية؟

c. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية 9 m/s وقطعت 4 m. فما زاوية ضرب الكرة؟

35. الفيزياء رُميت صخرة من حافة واد بمقلاع بزاوية 65° وسرعة متجهة أولية قدرها 6 m/s. المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية للصخرة x هي $x = v_0 (\cos \theta)t$ حيث v_0 هي السرعة المتجهة الأولية، و θ هي الزاوية التي ضُربت بها، و t هو الزمن بالثواني. ما المسافة التي ستقطعها الصخرة تقريبًا بعد 4 ثوانٍ؟

36. عجلة فيريس نصف قطر عجلة الملاهي فيريس 21 m قريبًا وترتفع 4.5 m عن الأرض. بعد أن يركب الشخص في العربة السفلية، تدور العجلة بزاوية 202.5° عكس اتجاه عقارب الساعة قبل أن تتوقف. كم كان ارتفاع هذه العربة فوق الأرض عندما توقفت العجلة؟



افترض أن θ زاوية في وضع قياسي ضلع الانتهاء لها في الربع المعطى. لكل نسبة، جـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية لـــ θ.

37. $\sin \theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

38. $\tan \theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

39. $\cos \theta = -\frac{8}{17}$، الربع الثالث

40. $\cot \theta = -\frac{12}{5}$، الربع الرابع

جـ ـد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

41. cot 270° 0

42. csc 180°

43. sin 570°

44. $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

45. $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

46. $\cot \frac{9\pi}{4}$

مسائلمهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

47. التحدٍ بالنسبة للزاوية θ في وضع قياسي، $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan \theta = -1$. هل يمكن أن تكون قيمة θ تساوي 225°؟ برر استنتاجك.

48. الفرضيات حدد إذا ما كانت العبارة $\sin 180° = 3 \sin 60°$ صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.

49. التبرير استخدم دالتي sine و cosine واشرح لماذا تكون 180° غير مُعرَّفة.

50. مسألة غير محددة الإجابة اذكر مثالاً لزاوية سالبة θ يكون فيها $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$.

51. الكتابة في الرياضيات صِف خطوات إيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية θ تكون أكبر من 90°. أدرج وصفًا لزاوية المرجع.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبارات المعيارية

52. الإجابة الشبكية إذا كان مجموع عددين 21 والفرق بينهما 3. فما ناتج ضربهما؟

53. الهندسة D هي نقطة منتصف $\overline{BC}$. و A و E هما نقطتا منتصف $\overline{BD}$ و $\overline{DC}$، على التوالي. إذا كان طول $\overline{AE}$ يساوي 12. فما طول $\overline{BC}$؟

A 6
B 12
C 24
D 48

54. التعبير $(-6 + i)^2$ مكافئ لأي من التعابير التالية؟

F $-12i$
G $36 - i$
H $36 - 12i$
J $35 - 12i$

SAT/ACT .55 ما الأقل فيما يلي؟

A $1 + \frac{1}{4}$
B $1 - \frac{1}{4}$
C $1 \div \frac{1}{4}$
D $1 \times \frac{1}{4}$
E $\frac{1}{4} - 1$

مراجعة شاملة

أعد كتابة كل قياس بالراديان بالدرجات. (الدرس 2-11)

56. $\frac{4}{3}\pi$
57. $\frac{11}{6}\pi$
58. $-\frac{17}{4}\pi$

حُلّ المعادلات الآتية. (الدرس 1-11)

59. $\cos a = \frac{13}{17}$
60. $\sin 30 = \frac{b}{6}$
61. $\tan c = \frac{9}{4}$

62. العمارة الهندسية يتم إنشاء نصب تذكاري في حديقة بالمدينة. سيكون عبارة عن حائط طوبي يتكون فيه الصف العلوي من ست طوبات مطلية بالذهب محفور عليها أسماء ستة أشخاص محليين مشهورين. ويزيد كل صف بطوبتين عن الصف الذي يعلوه. أثبت أن عدد الطوب في أعلى n صفوف هو $n^2 + 5n$.

63. أساطير تقول الإسطورة إن ملكًا أراد مكافأة فتى على فعلٍ حسن، ولكنه منحه الاختيار. إما أن يحصل على AED 1,000,000 دفعةً واحدة، أو يحصل على مكافأة يومية لمدة شهر، بحيث يحصل على فلس واحد في اليوم الأول، وفلسين في اليوم الثاني، وهكذا، وبهذا يحصل على ضعف الفلسات كل يوم أكثر من اليوم السابق. كم ستكون قيمة الخيار الثاني؟

اكتب معادلة لكل دائرة علمًا بنقطتي نهاية القطر.

64. $(2, -4), (10, 2)$
65. $(-1, -10), (-7, 6)$
66. $(9, 0), (4, -7)$

بسّط كل تعبير مما يلي.

67. $\frac{5}{x^2 + 6x + 8} + \frac{x}{x^2 - 3x - 28}$
68. $\frac{3x}{x^2 + 8x - 20} - \frac{6}{x^2 + 7x - 18}$
69. $\frac{4}{3x^2 + 12x} + \frac{2x}{x^2 - 2x - 24}$

حُلّ كل معادلة أو متباينة. وقرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

70. $8^x = 30$
71. $5^x = 64$
72. $3^{x+2} = 41$

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

73. $16^{-\frac{1}{4}}$
74. $27^{\frac{4}{3}}$
75. $25^{-\frac{5}{2}}$

مراجعة المهارات

حُلّ لإيجاد x.

76. $\frac{x + 2}{18} = \frac{x - 2}{9}$
77. $\frac{x + 5}{x - 1} = \frac{7}{4}$
78. $\frac{5}{x + 8} = \frac{15}{2x + 20}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 11-4 قانون الـ Sine

السابق
- لقد وجـدتَ أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية للمثلثات القائمة.

الحالي
1. إيجاد مساحة مثلث باستخدام ضلعين وزاوية محصورة.
2. استخدام قانون الsine في حل المثلثات.

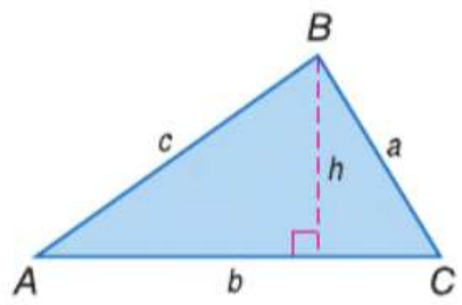
لماذا؟
- يوجد في كوكب المريخ مئات الآلاف من الفوهات التي سميت بأسماء أشهر العلماء ومؤلفي قصص الخيال العلمي وأسماء المدن على كوكب الأرض. يوضح الشكل الفوهات "واهو" و"واباش" و"ناوكان". يمكنك استخدام حساب المثلثات في إيجاد المسافة بين "واهو" و"ناوكان"

المفردات الجديدة
- قانون الـ Sines Law of Sines
- حل المثلث solving a triangle
- حالة مبهمة ambiguous case

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 إيجاد مساحة مثلث

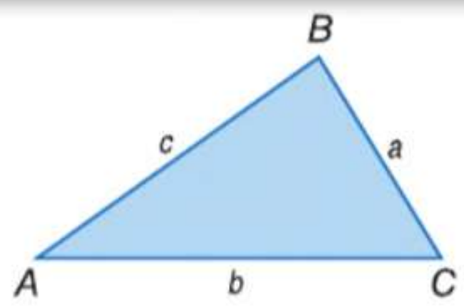
في المثلث الموجود على اليسار، $\sin A = \frac{h}{c}$، أو $h = c \sin A$.



$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bh$	قانون مساحة المثلث
$\text{المساحة} = \frac{1}{2}b(c \sin A)$	استبدل بـ h $c \sin A$.
$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A$	بسّط.

يمكنك استخدام هذه الصيغة وصيغتين أخريين في إيجاد مساحة المثلث إذا علمت طولي ضلعيه وقياس الزاوية المحصورة.

المفهوم الأساسي مساحة المثلث



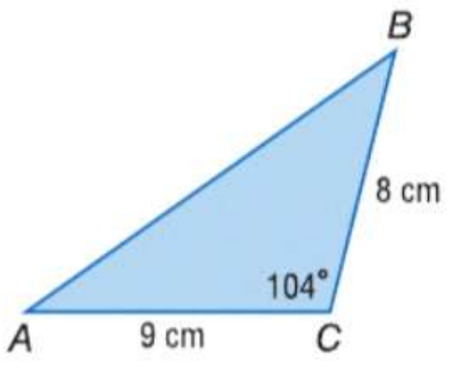
الشرح مساحة المثلث هي نصف ناتج ضرب ضلعين و sine الزاوية المحصورة بينهما.

الرموز $\text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

مثال 1 إيجاد مساحة مثلث.

جـد مساحة المثلث ABC △ مُقرَّبة إلى أقرب عشرة.

في $\triangle ABC$، $a = 8$ و $b = 9$ و $C = 104°$.



$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ab \sin C$	بحسب القياسات المعلومة، استخدم صيغة المساحة الثالثة.
$= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104°$	التعويض
$\approx 34.9 \text{ cm}^2$	بسّط.

التحقق الذهني قرّب sine 104° إلى sine 90° لأن sine 90° يساوي 1.

$\frac{1}{2}(8)(9)\sin 90° = \frac{1}{2}(8)(9)(1) = 36$

وهذا قريب من الإجابة 34.9 سنتيمترًا مكعبًا.

تمرين موجّه

1. جـد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب عشرة إذا كانت $A = 31°$، و $b = 18$ m و $c = 22$ m

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

2 استخدام قانون الsine في حل المثلثات

يمكنك استخدام صيغ المساحة في اشتقاق **قانون ال sine** الذي يبين العلاقات بين أطوال الأضلاع في المثلث وجيوب الزاوية المقابلة لها.

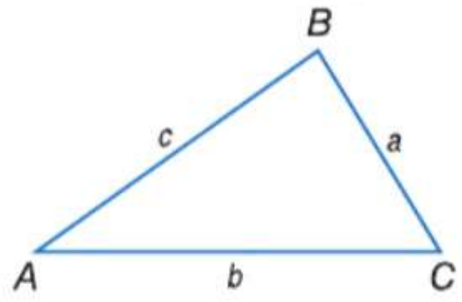
$$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$ اضبط صيغ المساحة المساوية لبعضها البعض.

$$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$$ اضرب كل تعبير في 2.

$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$ اقسم كل تعبير على abc.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$ بسّط.

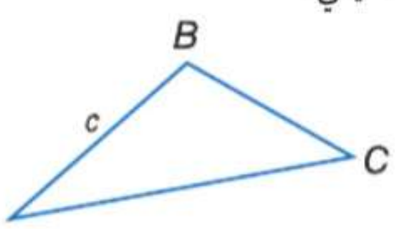
المفهوم الأساسي قانون الـ Sine



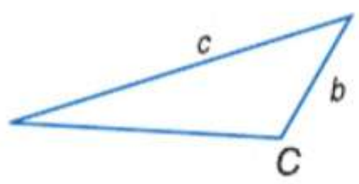
في المثلث $\triangle ABC$، إذا كانت الأضلاع التي أطوالها a و b و c مقابلة لزوايا قياساتها A و B و C، على الترتيب، فإن الحل التالي صحيح.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

يمكنك استخدام قانون الـ Sine في حل مثلث إذا كنت تعرف أيًا مما يلي.



- قياس زاويتين وأي ضلع (الحالتان زاوية–زاوية–ضلع أو زاوية–ضلع–زاوية)

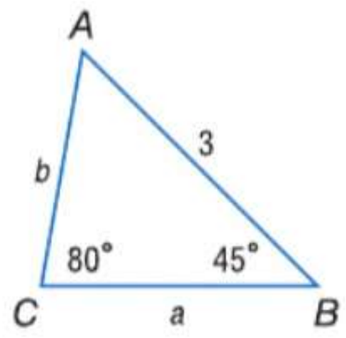


- قياس ضلعين والزاوية المقابلة لأي منهما (الحالة ضلع–ضلع–زاوية)

يُسمى استخدام القياسات المعطاة في إيجاد طول الضلع وقياسات الزاوية غير المعلومة في المثلث باسم **حل المثلث**.

مثال 2 حل المثلث عند معرفة زاويتين وضلع

جـ ـ ـد حل المثلث $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب عشرة إذا لزم الأمر.



الخطوة 1 جـ ـ ـد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle A = 180 - (80 + 45) \text{ أو } = 55°$$

الخطوة 2 استخدم قانون الsine في إيجاد طول الضلعين a و b. اكتب معادلة لإيجاد كل متغير.

قانون ال sine	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
التعويض	$\frac{\sin 55°}{a} = \frac{\sin 80°}{3}$	$\frac{\sin 45°}{b} = \frac{\sin 80°}{3}$
جـ ـ ـد حل كل متغير.	$a = \frac{3 \sin 55°}{\sin 80°}$	$b = \frac{3 \sin 45°}{\sin 80°}$
استخدم حاسبة.	$a \approx 2.5$	$b \approx 2.2$

إذًا، $A = 55°$ و $a \approx 2.5$ و $b \approx 2.2$.

تمرين موجّه

2. جـ ـ ـد حل المثلث $\triangle NPQ$ إذا كانت $P = 42°$ و $Q = 65°$ و $n = 5$.

الربط بتاريخ الرياضيات

بولين سبيري (1885–1967)

وضعت بولين سبيري كتابين مدرسيين خلال العقد الثاني من القرن العشرين، وهما *Short Course in Spherical Trigonometry* و *Plane Trigonometry*. وفي عام 1923 أصبحت أول امرأة تُرقى لمنصب أستاذ مساعد في قسم الرياضيات في جامعة كاليفورنيا، بيركلي.

نصيحة دراسية

التبرير يمكن أيضًا كتابة قانون الsine بالشكل $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

إذًا، يمكن أيضًا استخدام التعابير الموضحة أدناه في حل المثلث في المثال 2.

- $\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$
- $\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا علمت قياسات زاويتين وضلع، فسيمكنك حل مثلث واحد تحديدًا. ولكن، إذا علمت قياسات ضلعين والزاوية المقابلة لأي منهما، يمكن أن تحصل على صفر مثلث، أو مثلث واحد، أو اثنين. وتُعرف هذه الحالة باسم **الحالة المبهمة**. إذً ا، عند حل مثلث باستخدام الحالة ضلع-ضلع-زاوية، يمكن الحصول على الحل صفر أو واحد أو اثنين.

نصيحة دراسية

الحلان يُطلق على الحالة عندما يوجد حلان للمثلث اسم *الحالة المبهمة*.

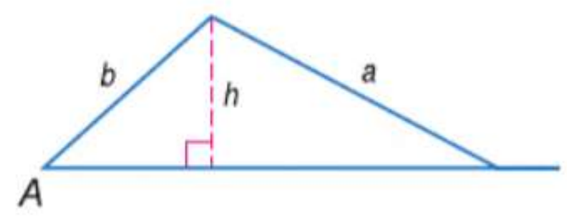
المفهوم الأساسي المثلثات المحتملة في حالة ضلع-ضلع-زاوية

تأمل المثلث عند معرفة a و b و $m\angle A$.

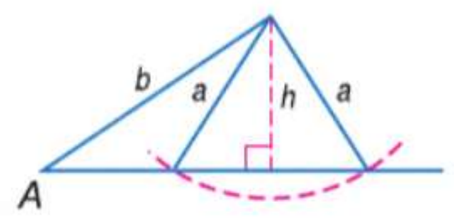
$\angle A$ زاوية حادة.

$a = h$
حل واحد

$a < h$
بلا حل



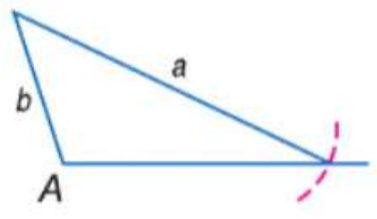
$a \geq b$
حل واحد



$h < a < b$
حلان

$\angle A$ زاوية قائمة أو منفرجة.

$a \leq b$
بلا حل



$a > b$
حل واحد

نصيحة دراسية

A زاوية حادة في الأشكال على اليسار، الارتفاع h يُقارن إلى a حيث h أقل مسافة من C إلى $\overline{AB}$ عندما تكون الزاوية A حادة.

$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

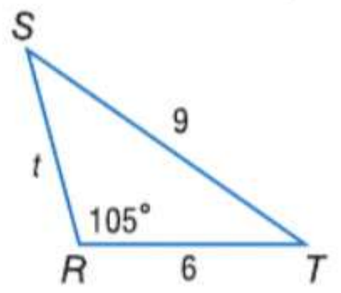
$\sin A = \frac{h}{b}$

نظرًا لأن $\sin A = \frac{h}{b}$، يمكنك استخدام $h = b \sin A$ في إيجاد h في المثلثات الحادة.

مثال 3 حل المثلث عند معرفة ضلعين وزاوية

حدد ما إذا كان كل مثلث *بلا حل*، أو له حل *واحد*، أو *حلين* . ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

a. في $\triangle RST$، $R = 105°$ و $r = 9$ و $s = 6$.



حيث إن $\angle R$ زاوية منفرجة و $6 < 9$ فلهذا تعلم أن هناك حلاً واحدًا للمثلث.

الخطوة 1 طبّق قانون الsine في إيجاد قيمة $m\angle S$.

قانون الـ Sine

$$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105°}{9}$$

اضرب كل طرف في 6.

$$\sin S = \frac{6 \sin 105°}{9}$$

استخدم حاسبة.

$$\sin S \approx 0.6440$$

استخدم نسبة $\sin^{-1}$.

$$S \approx 40°$$

الخطوة 2 جد $m\angle T$.

$$m\angle T \approx 180 - (105 + 40) \text{ أو } = 35°$$

الخطوة 3 طبّق قانون الsine لإيجاد قيمة t.

قانون الـ Sine

$$\frac{\sin 35°}{t} \approx \frac{\sin 105°}{9}$$

حل لإيجاد t.

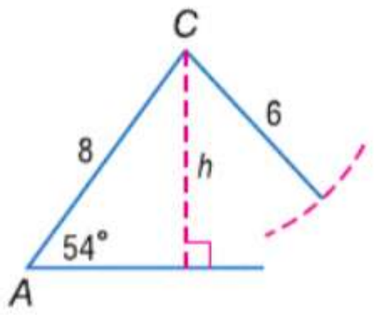
$$t \approx \frac{9 \sin 35°}{\sin 105°}$$

استخدم الحاسبة.

$$t \approx 5.3$$

إذًا، $T \approx 35°$ و $S \approx 40°$ و $t \approx 5.3$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



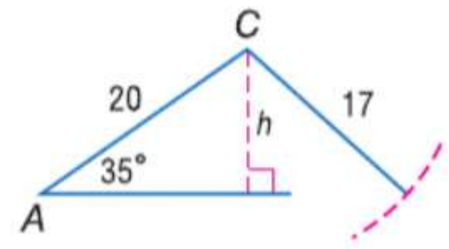
b. في $\triangle ABC$، $A = 54°$ و $a = 6$ و $b = 8$.

بما أن $\angle A$ زاوية حادة، و $6 < 8$. فجد h و قارنها بـ a.

$b \sin A = 8 \sin 54°$ $A = 54°$ و $b = 8$

≈ 6.5 استخدم الحاسبة.

بما أن $6 \leq 6.5$ أو $a \leq h$. فليس هناك حل.



c. في المثلث $\triangle ABC$، $A = 35°$، و $a = 17$، و $b = 20$.

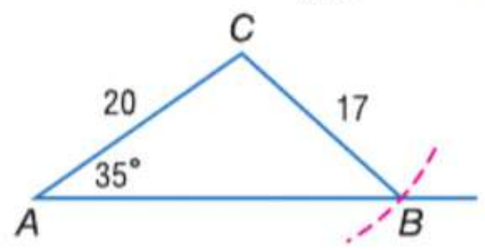
بما أن $\angle A$ زاوية حادة، و $17 < 20$. فجد h وقارنها بـ a.

$b \sin A = 20 \sin 35°$ $A = 35°$ و $b = 20$

≈ 11.5 استخدم الحاسبة.

بما أن $11.5 < 17 < 20$ أو $h < a < b$. فهناك حلان. إذًا هناك مثلثان يمكن حلهما

الحالة 1 $\angle B$ **زاوية حادة.**



الخطوة 1 جد $m\angle B$.

قانون الـ Sine $\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35°}{17}$

جد sin B. $\sin B = \frac{20 \sin 35°}{17}$

استخدم الحاسبة. $\sin B \approx 0.6748$

جد $\sin^{-1} 0.6748$. $B \approx 42°$

الخطوة 2 جد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 42)$ أو $103°$

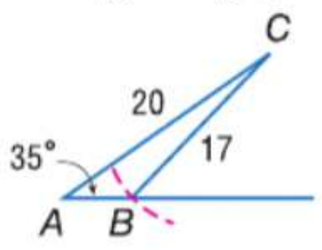
الخطوة 3 جد c.

قانون الـ Sine $\frac{\sin 103°}{c} = \frac{\sin 35°}{17}$

جد قيمة c. $c = \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$

بسّط. $c \approx 28.9$

الحالة 2 $\angle B$ **زاوية منفرجة.**



الخطوة 1 جد $m\angle B$.

نسبة الـsine لها أيضًا قيمة موجبة في الربع الثاني. إذًا، جد زاوية حادة B قيمة sin لها $B \approx 0.6748$.

$m\angle B \approx 180° - 42°$ أو $= 138°$

الخطوة 2 جد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 138)$ أو $= 7°$

الخطوة 3 جد c.

قانون الـ Sine $\frac{\sin 103°}{c} = \frac{\sin 35°}{17}$

جد قيمة c. $c = \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$

بسّط. $c \approx 28.9$

إذًا، أحد الحلين هو $B \approx 42°$، و $C \approx 103°$، و $c \approx 28.9$. والحل الثاني هو $B \approx 138°$، و $C \approx 7°$، و $c \approx 3.6$.

نصيحة دراسية

زاوية مرجع ستستخدم في المثلث في الحالة 2 زاوية المرجع $42°$ لإيجاد القيمة الأخرى لـ B.

تمرين موجّه

حدد ما إذا كان كل مثلث *بلا* حل، أو له حل *واحد*، أو *حلين*. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3A. في المثلث $\triangle RST$، $R = 95°$، و $r = 10$، و $s = 12$.

3B. في المثلث $\triangle MNP$، $N = 32°$، و $n = 7$، و $p = 4$.

3C. في $\triangle ABC$، $A = 47°$، و $a = 15$، و $b = 18$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

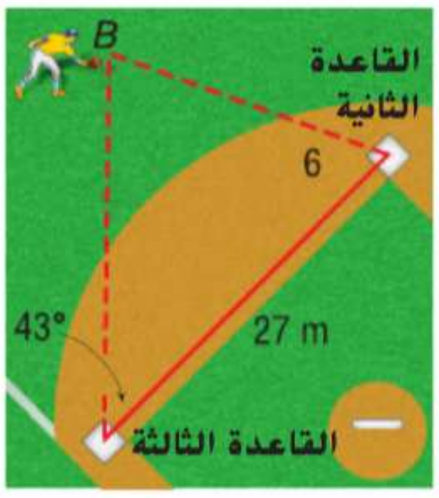
الربط بالحياة اليومية

تشترك ملاعب البيسبول في المدرسة الثانوية والكلية في أبعاد الملعب الداخلي مثل ملاعب البيسبول للمحترفين. بينما تختلف أبعاد الملعب الخارجي اختلافًا كبيرًا.

المصدر: مجلة *Baseball Digest Magazine*

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام قانون الـ sine في حل المسألة

لعبة البيسبول تُضرب كرة البيسبول بين القاعدتين الثانية والثالثة وتُلتقط عند النقطة B. مثلما هو موضح في الشكل. كم تبعد نقطة التقاط الكرة عن القاعدة الثانية؟



$\frac{\sin 72^\circ}{27} = \frac{\sin 43^\circ}{x}$	قانون الـ Sine
$x \sin 72^\circ = 27 \sin 43^\circ$	الضرب التقاطعي
$x = \frac{27 \sin 43^\circ}{\sin 72^\circ}$	حل لإيجاد قيمة x.
$x \approx 19.4$	استخدم الحاسبة.

إذًا، تبعد المسافة 19.4 m تقريبًا.

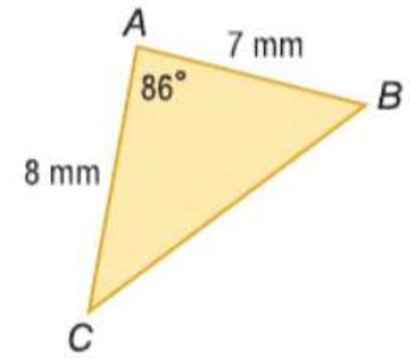
تمرين موجّه

4. كم تبعد نقطة التقاط الكرة عن القاعدة الثالثة؟

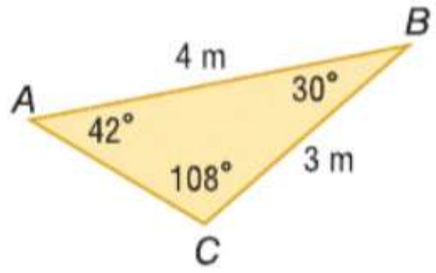
التحقق من فهمك

مثال 1 **جـ ـ ـد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب عشرة إذا لزم الأمر.**

1.



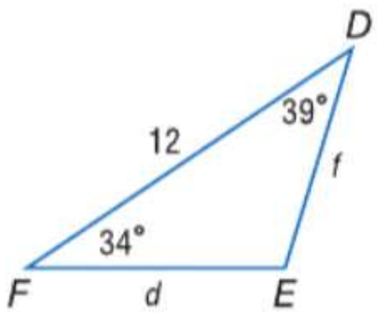
2.



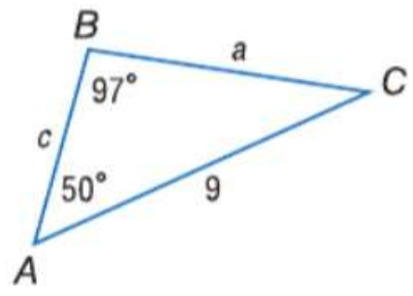
3 $A = 40^\circ$, $b = 11$ cm, $c = 6$ cm **4.** $B = 103^\circ$, $a = 20$ cm, $c = 18$ cm

مثال 2 **حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

5.



6.



7. جـ ـ ـد حل المثلث $\triangle FGH$. إذا كانت $G = 80^\circ$ و $H = 40^\circ$ و $g = 14$.

مثال 3 **المثابرة حدد هل كل مثلث $\triangle ABC$ *بلا حل*، أم له حل *واحد*، أم له *حلان* . ثم جـ ـ ـد حل المثلث. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

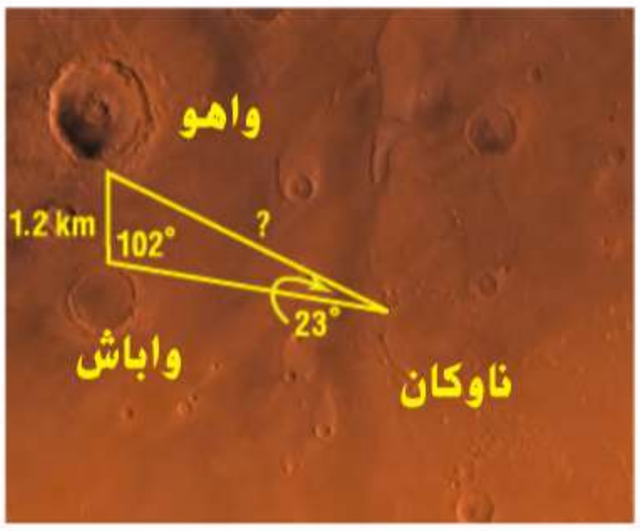
8. $A = 95^\circ$, $a = 19$, $b = 12$

9. $A = 60^\circ$, $a = 15$, $b = 24$

10. $A = 34^\circ$, $a = 8$, $b = 13$

11. $A = 30^\circ$, $a = 3$, $b = 6$

مثال 4 **12.** **الفضاء** راجع بداية الدرس. جـ ـ ـد المسافة بين فوهة واهو وفوهة ناوكان على كوكب المريخ.

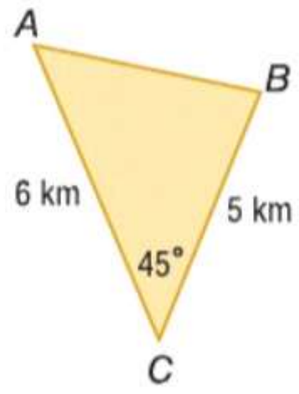


McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

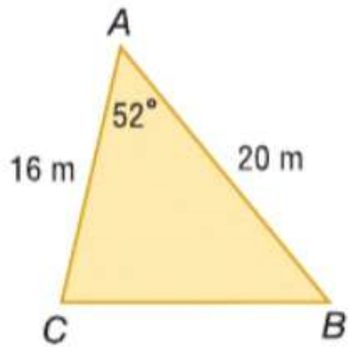
التدريب وحل المسائل

مثال 1 جـ ـ د مساحة المثلث $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة.

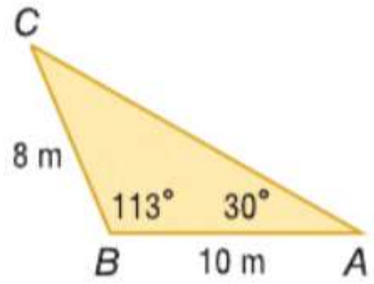
13.



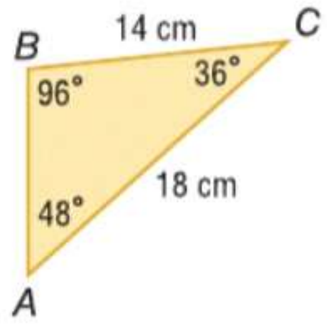
14.



15.



16.



17. $C = 25°,\ a = 4$ m, $b = 7$ m

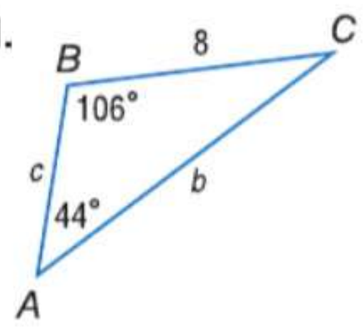
18. $A = 138°,\ b = 10$ cm, $c = 20$ cm

19. $B = 92°,\ a = 14.5$ m, $c = 9$ m

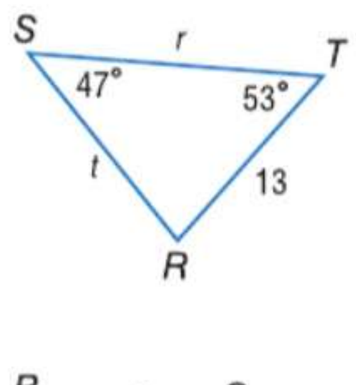
20. $C = 116°,\ a = 2.7$ cm, $b = 4.6$ cm

مثال 2 **التبرير** حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

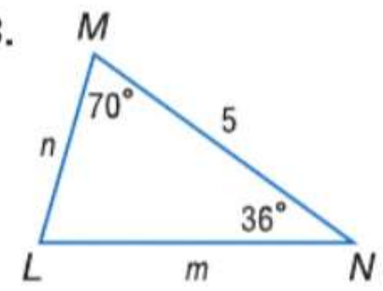
21.



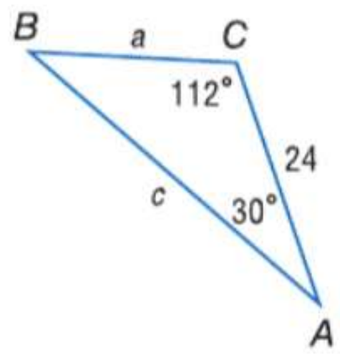
22.



23.



24.



25 جـ ـ د حل $\triangle HJK$ إذا كانت $H = 53°$ و $J = 20°$، و $h = 31$.

26. جـ ـ د حل المثلث $\triangle NPQ$ إذا كانت $P = 109°$، و $Q = 57°$ و $n = 22$.

27. جـ ـ د حل المثلث $\triangle ABC$ إذا كانت $A = 50°$، و $a = 2.5$، و $C = 67°$.

28. جـ ـ د حل المثلث $\triangle ABC$ إذا كانت $B = 18°$، و $C = 142°$، و $b = 20$.

مثال 3 **حدد ما إذا كان كل مثلث $\triangle ABC$ *بلا حل*، أم له *واحد*، أم له *حلان*. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

29. $A = 100°,\ a = 7,\ b = 3$

30. $A = 75°,\ a = 14,\ b = 11$

31. $A = 38°,\ a = 21,\ b = 18$

32. $A = 52°,\ a = 9,\ b = 20$

33. $A = 42°,\ a = 5,\ b = 6$

34. $A = 44°,\ a = 14,\ b = 19$

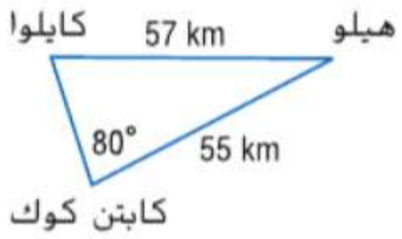
35. $A = 131°,\ a = 15,\ b = 32$

36. $A = 30°,\ a = 17,\ b = 34$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 4

الجغرافيا في مدينة هاواي، تقدر المسافة من "هيلو" إلى "كايلوا" بـ 57 km. والمسافة من "هيلو" إلى "كابتن كوك" بـ 55 km.



37. ما قياس الزاوية المتكونة عند "هيلو"؟

38. ما المسافة بين "كايلوا" و"كابتن كوك"؟

39. الأعاصير كوّن صافرات إنذار الأعاصير A و B، و C منطقة مثلثية الشكل في إحدى مناطق المدينة. تبعد صافرتا الإنذار A و B عن بعضهما 8 km . وقياس الزاوية المتكونة عند صافرة الإنذار A تساوي $112°$. والزاوية المتكونة عند صافرة الإنذار B تساوي $40°$. ما المسافة بين الصافرتين B و C؟

40. الألغاز مثلث برمودا هو منطقة في المحيط الأطلنطي بين برمودا، وميامي، وفلوريدا، وسان جوان، وبورتو ريكو. ولقد أشيع عنه أن السفن والطائرات تختفي فيه في ظروف غامضة.

a. ما المسافة بين ميامي وبرمودا؟

b. ما مساحة مثلث برمودا تقريبًا؟

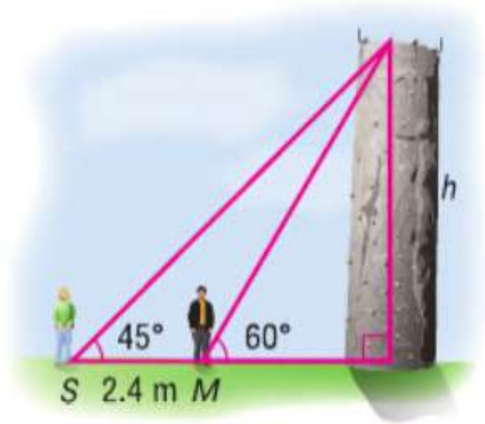
41. ركوب الدراجات طول الضلع في مسار ركوب الدراجة المثلث الشكل يساوي 4 km. والزاوية المقابلة لهذا الضلع تساوي $64°$. ولقد تكونت زاوية أخرى في المسار المثلثي قياسها $66°$.

a. صمم رسمًا للموقف، وقم بتسمية الأضلاع الناقصة a و b.

b. اكتب المعادلات التي يمكن استخدامها في إيجاد أطوال الأضلاع الناقصة.

c. ما محيط المسار ؟

42. تسلق الصخور سعيد (المشار إليه بالرمز S) وماجد (المشار إليه بالرمز M) يقفان على مسافة 2.4 m بعيدًا عن بعضهما البعض أمام حائط تسلق الصخور، مثلما هو موضح في الشكل على اليسار. ما ارتفاع الحائط؟ قرّب إلى أقرب عشرة.



مسائلمهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. التفكير النقدي في المثلث $\triangle RST$، $R = 56°$ و $r = 24$ و $t = 12$. تستخدم ميسون ومها قانون الsine لإيجاد T. هل أي منهما على صواب؟ فسّر استنتاجك.

ميسون

$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$

$\sin T \approx 0.4145$

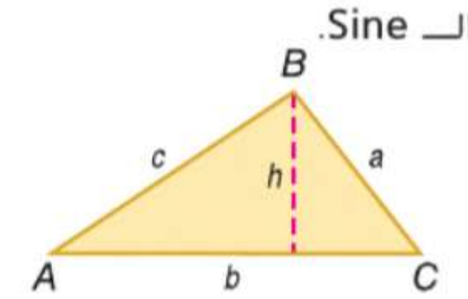
$T \approx 24.5°$

مها

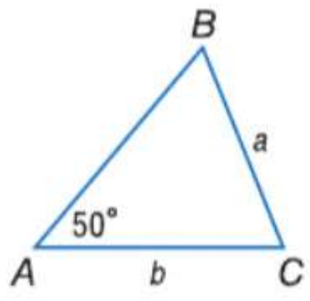
بما أن $r > t$، فلا يوجد حل.

44. مسألة غير محددة الإجابة ابتكر مسألة تطبيق تتضمن مثلثات قائمة الزاوية وقانون الـ Sine. ثم حل المسألة، وصمم رسمًا تخطيطيًا إذا لزم الأمر.

45. التحدي مستخدمًا الشكل الموضح على اليسار، استنبط الصيغة المساحة $A = \frac{1}{2} bc \sin A$.



46. التبرير جد أطوال أضلاع مثلثين مختلفين ABC التي يمكن تكوينها إذا كانت $A = 55°$ و $C = 20°$.



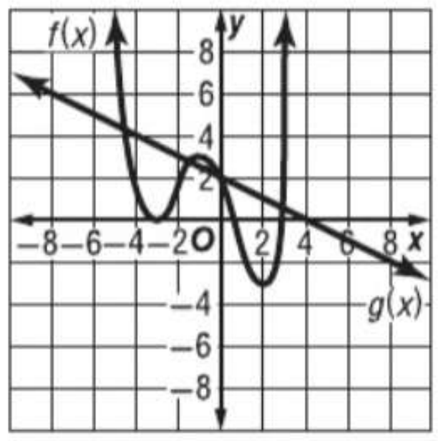
47. الكتابة في الرياضيات استخدم قانون الsine في توضيح لماذا a و b ليست لهما قيم مميزة في الشكل الموضح.

48. مسألة غير محددة الإجابة إذا علمت أن $E = 62°$ و $d = 38$. فجد قيمة e بحيث لا يوجد المثلث DEF. فسّر استنتاجك.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبارات المعيارية

49. الإجابة القصيرة مستخدمًا التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$؟



50. الإحصاء إذا كان متوسط سبعة أعداد صحيحة فردية متتالية هو n. فما وسيط تلك الأعداد الصحيحة السبعة؟

A 0
B 7
C n
D $n - 2$

51. صفر واحد في $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ يساوي 4. ما الصيغة ذات العوامل للتعبير $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$؟

F $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
F $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
H $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$
J $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$

52. SAT/ACT يُقسّم ثلاثة أشخاص aed 48,000 حسب النسبة 3 : 4 : 5. ما قيمة المبلغ صاحب النصيب الأكبر؟

A aed 12,000
B aed 16,000
C aed 20,000
D aed 24,000
E aed 30,000

مراجعة شاملة

جـد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. (الدرس 3-11)

53. $\sin 210^\circ$ **54.** $\cos \frac{3}{4}\pi$ **55.** $\cot 60^\circ$

جـد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية. (الدرس 2-11)

56. 125° **57.** -32° **58.** $\frac{2}{3}\pi$

59. المبيعات يكسب مندوب المبيعات AED 10 في الساعة زائد عمولة بنسبة 10% على المبيعات. اكتب دالة تصف دخل مندوب المبيعات. إذا كان مندوب المبيعات يريد أن يكسب AED 1000 في أسبوع يعمل خلاله 40 ساعة، فما رقم المبيعات الذي ينبغي أن يحققه؟

60. $\sqrt{x - 6} - \sqrt{x} = 3$ **61.** $\sqrt[3]{5m + 2} = 3$ **62.** $(6n - 5)^{\frac{1}{3}} + 3 = -2$

63. علم الفلك، تبتعد الأرض عن مركز الشمس مسافة 146.9 مليون كيلو متر عند أقرب نقطة لها. وتبتعد الأرض عن مركز الشمس مسافة 151.8 مليون كيلو متر عند أبعد نقطة لها. اكتب معادلةً تصف مدار الأرض، معتبرًا أن مركز المدار هو نقطة الأصل وأن الشمس تقع على المحور x.

بسّط.

64. $\sqrt{(x - 4)^2}$ **65.** $\sqrt{(y + 2)^4}$ **66.** $\sqrt[3]{(a - b)^6}$

مراجعة المهارات

جـد قيمة كل تعبير إذا كانت $w = 6$، و $x = -4$، و $y = 1.5$، و $z = \frac{3}{4}$.

67. $w^2 + y^2 - 6xz$ **68.** $x^2 + z^2 + 5wy$ **69.** $wy + xz + w^2 - x^2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-4 مختبر الهندسة
المضلعات المنتظمة

يمكنك استخدام الزوايا المركزية للدوائر لاستكشاف خواص المضلعات المنتظمة المحاطة بدائرة. تذكر أن المضلع المنتظم يكون محاطًا بدائرة إذا كان كل رأس من رؤوسه يقع على الدائرة.

النشاط جمع البيانات

الخطوة 1 استخدم فرجارًا لرسم دائرةٍ نصف قطرها سنتيمتر واحد.

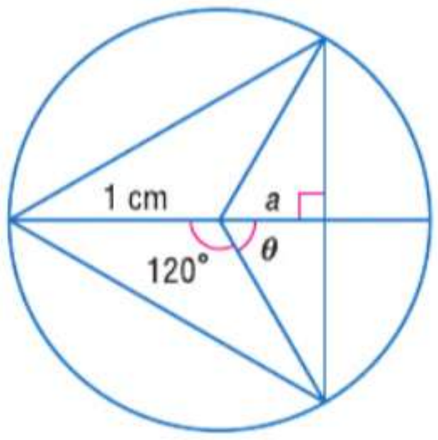
الخطوة 2 أحط مثلثًا متساوي الأضلاع بدائرة. وللقيام بذلك، استخدم منقلة لقياس ثلاث زوايا 120° في مركز الدائرة، حيث إن $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.
ثم صِل النقاط حيث تتقاطع أضلاع الزوايا مع الدائرة باستخدام مسطرة.

الخطوة 3 **عامد** المضلع المنتظم هو قطعة مستقيمة مرسومة من مركز المضلع وتكون عمودية على أحد أضلاعه. استخدم θ cosine لإيجاد طول العامد، المسمى a في الرسم التخطيطي.

النماذج والتحليل

1. أعد جدولا مُثل ذلك المبين أدناه ودونّ طول عامد المثلث المتساوي الأضلاع. وأدخل كل مضلع منتظم مذكور في الجدول، في دائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد. انسخ وأكمل الجدول.

عدد الأضلاع، n	θ	a	عدد الأضلاع، n	θ	a
3	60		7		
4	45		8		
5			9		
6			10		



2. ما الذي تلاحظه بشأن قياس θ مع تزايد عدد أضلاع المضلع المحاط؟
3. ما الذي تلاحظه بشأن قيمة a؟
4. **التخمين** افترض أنك أحطت مضلعًا منتظمًا من 30 ضلعًا بدائرة. جـ ـد قياس الزاوية θ.
5. اكتب القانون الذي يقدم قياس الزاوية θ لمضلع عدد أضلاع n.
6. اكتب قانونًا يعطي طول العامد لمضلع منتظم محاط بدائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد.
7. كيف سيتغير القانون الذي كتبته في التدريب 6 إذا لم يكن نصف قطر الدائرة سنتيمترًا واحدًا؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11-4 مختبر الهندسة
المضلعات المنتظمة

يمكنك استخدام الزوايا المركزية للدوائر لاستكشاف خواص المضلعات المنتظمة المحاطة بدائرة. تذكر أن المضلع المنتظم يكون محاطًا بدائرة إذا كان كل رأس من رؤوسه يقع على الدائرة.

النشاط جمع البيانات

الخطوة 1 استخدم فرجارًا لرسم دائرةٍ نصف قطرها سنتيمتر واحد.

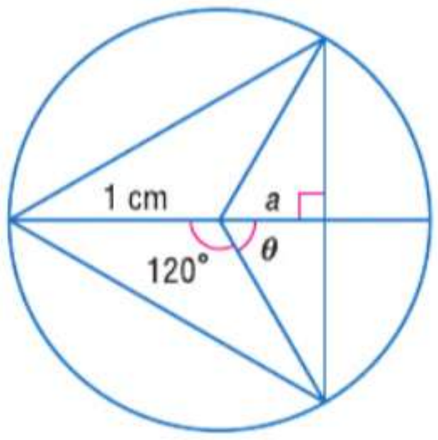
الخطوة 2 أحط مثلثًا متساوي الأضلاع بدائرة. وللقيام بذلك، استخدم منقلة لقياس ثلاث زوايا 120° في مركز الدائرة، حيث إن $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.
ثم صِل النقاط حيث تتقاطع أضلاع الزوايا مع الدائرة باستخدام مسطرة.

الخطوة 3 **عامد** المضلع المنتظم هو قطعة مستقيمة مرسومة من مركز المضلع وتكون عمودية على أحد أضلاعه. استخدم θ cosine لإيجاد طول العامد، المسمى a في الرسم التخطيطي.

النماذج والتحليل

1. أعد جدولا مُثل ذلك المبين أدناه ودونّ طول عامد المثلث المتساوي الأضلاع. وأدخل كل مضلع منتظم مذكور في الجدول، في دائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد. انسخ وأكمل الجدول.

عدد الأضلاع، n	θ	a	عدد الأضلاع، n	θ	a
3	60		7		
4	45		8		
5			9		
6			10		



2. ما الذي تلاحظه بشأن قياس θ مع تزايد عدد أضلاع المضلع المحاط؟
3. ما الذي تلاحظه بشأن قيمة a؟
4. **التخمين** افترض أنك أحطت مضلعًا منتظمًا من 30 ضلعًا بدائرة. جـ ـد قياس الزاوية θ.
5. اكتب القانون الذي يقدم قياس الزاوية θ لمضلع عدد أضلاع n.
6. اكتب قانونًا يعطي طول العامد لمضلع منتظم محاط بدائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد.
7. كيف سيتغير القانون الذي كتبته في التدريب 6 إذا لم يكن نصف قطر الدائرة سنتيمترًا واحدًا؟

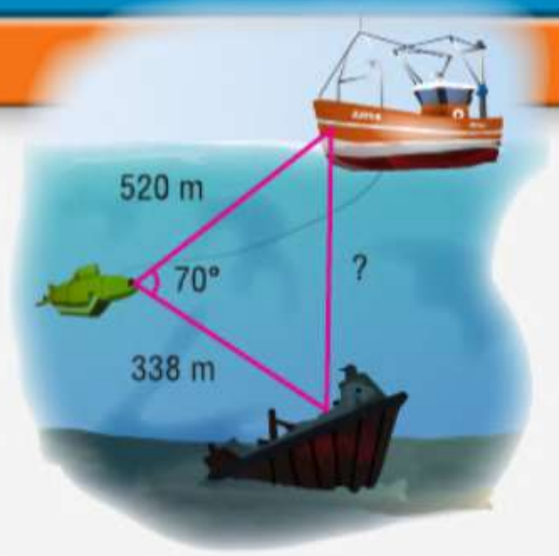
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11-5 قانون الـ Cosine

السابق
- وجـد حل المثلثات باستخدام قانون الـ Sine.

الحالي
1. استخدام قانون cosine لحل المثلثات.
2. الاختيار بين طرق حل المثلثات.

لماذا؟
- *الغواصة* هي مركبة مائية تُستخدم في استكشاف أعماق المحيط. يمكنك استخدام حساب المثلثات لإيجاد المسافة من السفينة المستخدمة لإنزال الغواصة في المحيط وحطام السفينة الذي عثرت الغواصة عليه في قاع المحيط.



المفردات الجديدة
قانون الـ Cosines
Law of Cosines

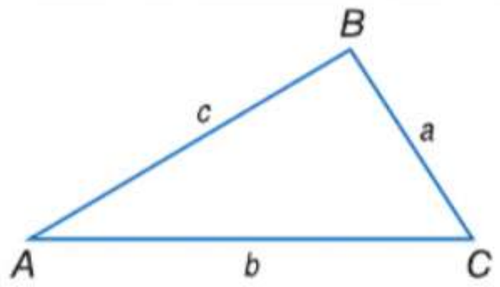
ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 استخدام قانون cosine لحل المثلثات

لا يمكنك استخدام قانون الـ Sine لحل مثلث مثل ذلك المبين أعلاه. ولكن يمكنك استخدام **قانون cosine** في حالة:

- معرفة قياسات ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (حالة ضلع-زاوية-ضلع).
- معرفة قياسات الأضلاع الثلاثة (حالة ضلع-ضلع-ضلع).

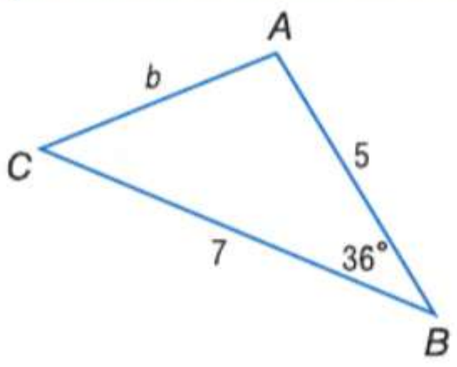
المفهوم الأساسي قانون الـ Cosine



في $\triangle ABC$، إذا كانت الأضلاع التي طولها a و b و c مقابلة لزوايا قياساتها A و B و C، على التوالي، إذًا فينطبق ما يلي.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

مثال 1 حل المثلث عند معرفة ضلعين وزاوية محصورة بينهما



جـد حل $\triangle ABC$.

الخطوة 1 استخدم قانون cosine لإيجاد طول الضلع المجهول.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ — قانون الـ Cosine

$b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36°$ — $a = 7,\ c = 5,\ B = 36°$

$b^2 \approx 17.4$ — استخدم آلة حاسبة للتبسيط.

$b \approx 4.2$ — جـد الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

الخطوة 2 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد قياس الزاوية المجهولة.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

$\frac{\sin A}{7} \approx \frac{\sin 36°}{4.2}$ — اضرب كل طرف في 7.

$\sin A \approx \frac{7 \sin 36°}{4.2}$ — استخدم نسبة $\sin^{-1}$.

$A \approx 78°$

الخطوة 3 جـد قياس الزاوية الأخرى.

$m\angle C \approx 180° - (36° + 78°)$ أو $66°$

إذًا $b \approx 4.2$ و $A \approx 78°$ و $C \approx 466$.

تمرين موجّه

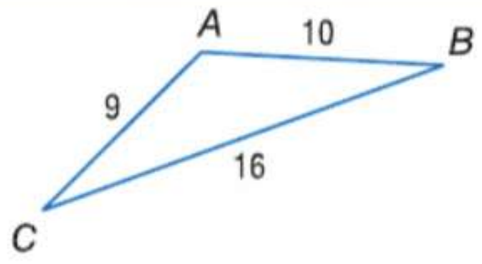
1. جـد حل $\triangle FGH$ إذا كانت $G = 82°$ و $f = 6$ و $h = 4$.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

عندما تعلم فقط أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث، يمكنك حل المثلث باستخدام قانون الـ Cosine. تتمثل الخطوة الأولى في إيجاد قياس الزاوية الأكبر. ويتم ذلك لضمان أن الزاويتين الأخريين حادتان عند استخدام قانون الـ Sine.

مثال 2 حل المثلث عند معرفة الأضلاع الثلاثة

جـ ـ ـد حل $\triangle ABC$.



الخطوة 1 استخدم قانون cosine لإيجاد قياس الزاوية الأكبر، $\angle A$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ — قانون الـ Cosine

$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10) \cos A$ — $a = 16$، $b = 9$، و $c = 10$

$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10) \cos A$ — اطرح 9^2 و 10^2 من كل طرف.

$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$ — اقسم كل طرف على $-2(9)(10)$.

$-0.4167 \approx \cos A$ — استخدم آلة حاسبة للتبسيط.

$115° \approx A$ — استخدم النسبة $\cos^{-1}$.

الخطوة 2 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد قياس $\angle B$.

$\frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115°}{16}$ — $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

$\sin B \approx \frac{9 \sin 115°}{16}$ — اضرب كل طرف في 9.

$\sin B \approx 0.5098$ — استخدم آلة حاسبة.

$B \approx 31°$ — استخدم النسبة $\sin^{-1}$.

الخطوة 3 جـ ـ ـد قياس $\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (115° + 31°)$ أو حوالي $= 34°$

إذًا، $A \approx 115°$ و $B \approx 31°$ و $C \approx 34°$.

نصيحة دراسية

طريقة بديلة بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استخدام قانون cosine مرة أخرى لإيجاد قياس الزاوية الثانية.

تمرين موجّه

2. جـ ـ ـد حل $\triangle ABC$ إذا كان $a = 5$ و $b = 11$ و $c = 8$.

2 اختيار طريقة لحل المثلثات

يمكنك استخدام قانون الـ Sine وقانون cosine لحل مسائل تشتمل على مثلثات مائلة. وتحتاج إلى معرفة قياس ضلع واحد على الأقل وأي جزأين آخرين. إذا كان المثلث له حل، فيجب أن تحدد ما إذا كنت ستستخدم قانون الـ Sine أم قانون cosine لحل المثلث.

مراجعة المصطلحات

مائل مثلث لا يتضمن زاوية قائمة

ملخص المفهوم حل المثلثات المائلة

المعطيات	ابدأ باستخدام
زاويتان وأي أضلاع	قانون الـ Sine
ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما	قانون الـ Sine
ضلعان وزاوية محصورة بينهما	قانون الـ Cosine
ثلاثة أضلاع	قانون الـ Cosine

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام قانون الـ Cosine

الغطس نظر الغواص لأعلى بزاوية 20° ورأى سلحفاة على بعد 2.7 m منه. ثم نظر لأسفل بزاوية 40° ورأى سمكة ببغائية زرقاء على بعد 3.6 m منه. ما المسافة الفارقة بين السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء؟

الفهم أنت تعلم الزاويتين اللتين تشكلتا عندما نظر الغواص لأعلى ولأسفل. وتعلم أيضًا كم تبعد السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء عن الغواص.

التخطيط استخدم المعلومات لتصميم رسم تخطيطي وتسميته. بما أنه معلوم ضلعان وزاوية محصورة بينهما في المثلث، يمكنك استخدام قانون الـ Sine لحل المسألة.

الحل

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ قانون cosine

$a^2 = 3.6^2 + 2.7^2 - 2(3.6)(2.7) \cos 60$ $A = 60$ و $c = 2.7$ و $b = 3.6$

$a^2 = 10.53$ استخدم آلة حاسبة.

$a \approx 3.2$ جـ ـ ـد القيمة الموجبة لـ ـ a.

إذًا، السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء تفصل بينهما مسافة حوالي 3.2 m.

التحقق باستخدام قانون الـ Sine، يمكنك إيجاد أن $B \approx 74°$ و $C \approx 46°$.
بما أن $C < A < B$ و $c < a < b$. فالحل منطقي.

الربط بالحياة اليومية

بلغ أعمق غطس في مياه البحار مسجل 313 m. وقام به غطاس في البحر الأحمر.

المصدر: *موسوعة غينيس للأرقام القياسية العالمية*

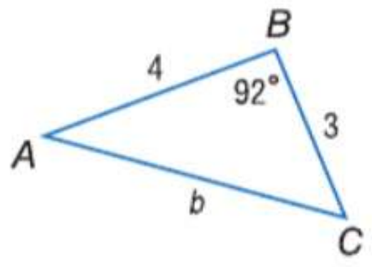
تمرين موجّه

3. **سباقات الماراثون** ركضت نهلة 6 km في نفس الاتجاه. ثم انعطفت بزاوية 79° وركضت 7 km في نهاية السباق. ما المسافة التي تبعدها نهلة عن نقطة البداية لها؟

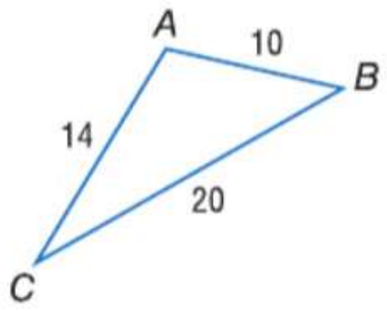
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

1.



2.

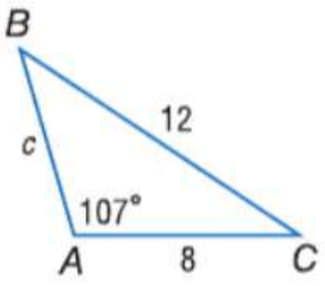


3. $a = 5,\ b = 8,\ c = 12$

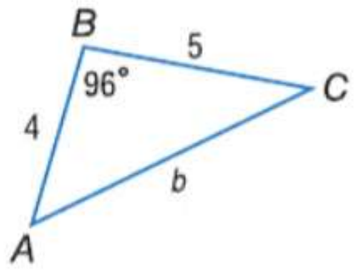
4. $B = 110°,\ a = 6,\ c = 3$

مثال 3 **الدقة** حدد ما إذا كان كل مثلث ينبغي حله بدءًا بقانون الـ *Sine* أم قانون الـ *Cosine*. ثم حل المثلث.

5.



6.



7. في $\triangle RST$، $R = 35°$ و $s = 16$ و $t = 9$.

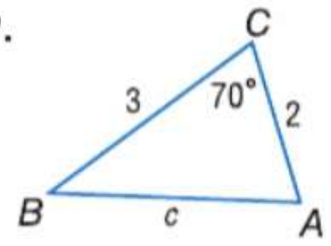
8. **كرة القدم** في مباراة كرة قدم، يبعد حارس المرمى عن المدافع A بمسافة 20 m. ودار بزاوية 40° لرؤية المدافع B الذي يبعد عنه بمسافة 16 m. ما المسافة التي تفصل بين هذين المدافعين؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

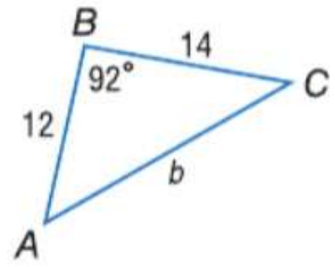
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

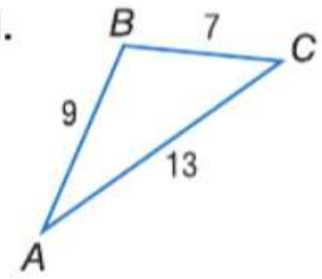
9.



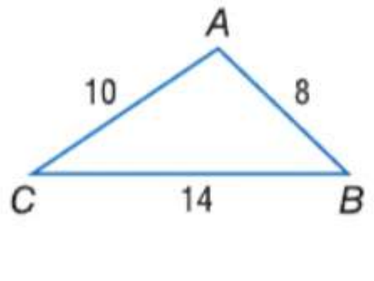
10.



11.



12.



13. $A = 116°,\ b = 5,\ c = 3$

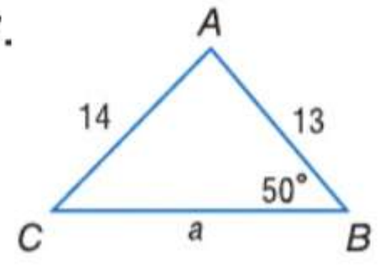
14. $C = 80°,\ a = 9,\ b = 2$

15. $f = 10,\ g = 11,\ h = 4$

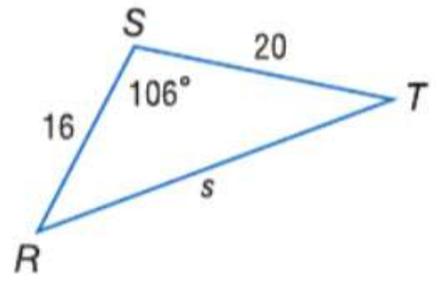
16. $w = 20,\ x = 13,\ y = 12$

مثال 3 حدد ما إذا كان كل مثلث ينبغي حله بدءًا بقانون الـ *Sine* أم قانون الـ *Cosine* . ثم حل المثلث.

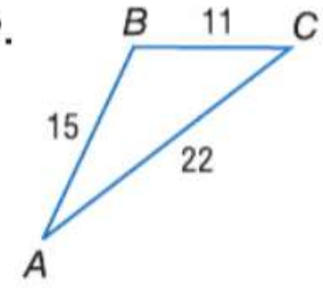
17.



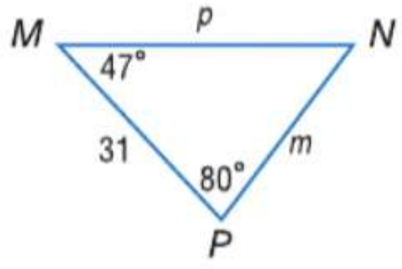
18.



19.



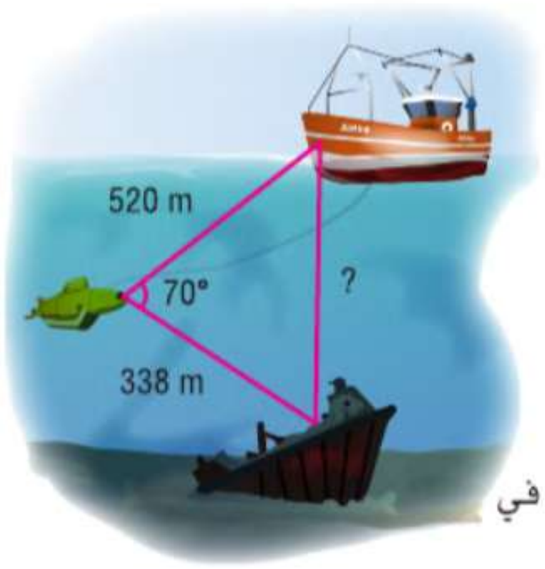
20.



21. في $\triangle ABC$، $C = 84°$ و $c = 7$ و $a = 2$.

22. في $\triangle HJK$، $h = 18$ و $j = 10$ و $k = 23$.

23 الاستكشاف جـ ـد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الموضحين في الرسم التخطيطي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



24. الهندسة متوازي أضلاع به ضلعان طولهما 8 cm و 12 cm. وتوجد زاوية محصورة بينهما قياسها 42°. ما طول القطر الأقصر مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟

25. السباق مسار سباق ريفي على شكل مثلث أطوال أضلاعه هي 1.8 km و2 km و1.2 km. ما الزوايا التي يشكلها كل زوج من الأضلاع؟

26. تمثيل النماذج مزرعة على قطعة أرض مثلثية الشكل قياسها 0.9 km في 0.5 km في 1.25 km.

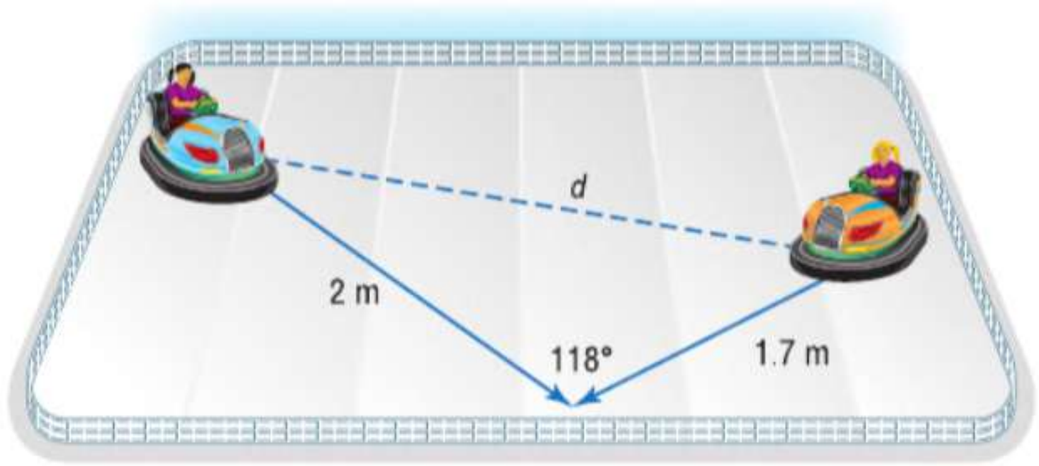
a. إذا كانت قطعة الأرض محاطة بسياج، فماذا سيكون قياس الزوايا التي تتلاقى أسياج الأضلاع الثلاثة عندها؟ قرّب إلى أقرب درجة.

b. ما مساحة قطعة الأرض؟

27. الأرض قطعة أرض على شكل مثلث. المسافات بين كل رأس في المثلث هي 140 m و 210 m و 300 m على التوالي. استخدم قانون cosine لإيجاد مساحة الأرض مع التقريب إلى أقرب متر مربع.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

28. **الملاهي** سيارتان متصادمتان في لعبة ملاهٍ اصطدمتا على النحو أدناه.



a. ما المسافة d التي كانت تبعدها السيارتان قبل التصادم؟

b. قبل التصادم، كانت توجد سيارة ثالثة على بعد 3 m من السيارة 1، و 4 m من السيارة 2. صِف الزوايا التي شكلتها السيارات 1 و 2 و 3 قبل التصادم.

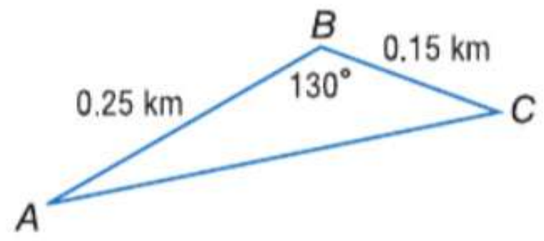
29. **المتنزهات** متنزه على شكل مثلث مساحته 11 m في 14 m في 10 m.

a. ارسم مساحة المتنزه لتمثيلها مع تسميتها.

b. صِف كيف يمكنك إيجاد مساحة المتنزه.

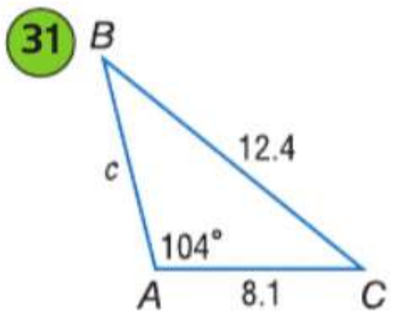
c. كم تبلغ المساحة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

30. **الرياضات المائية** امرأة على زورق شخصي قامت برحلة من النقطة A إلى النقطة B إلى النقطة C وهي تقطع مسافة 28 km/h. ثم عادت من النقطة C إلى نقطة البداية لها وهي تقطع مسافة 35 km/h. فكم عدد الدقائق التي استغرقتها الرحلة بالكامل؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

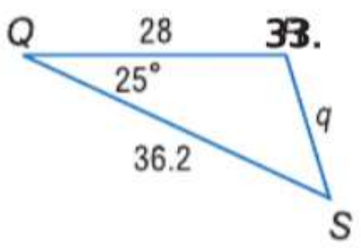


حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

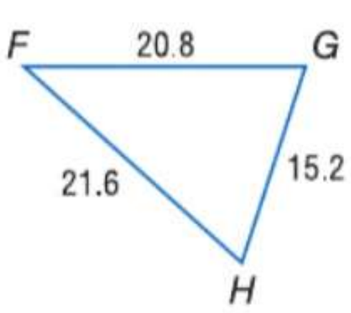
31

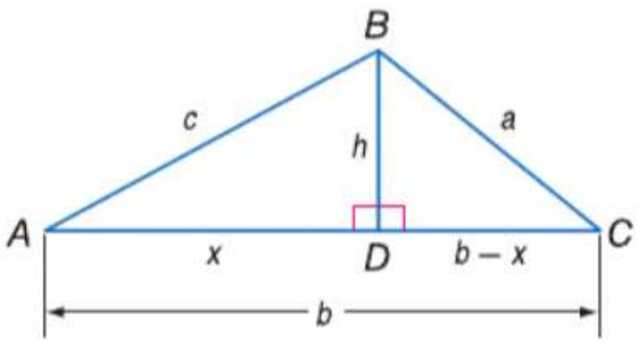


32.



33.





34. **التحدٍ** استعن بالشكل ونظرية فيثاغورس لاشتقاق قانون Cosines. استفد من الإرشادات أدناه.

- استخدم نظرية فيثاغورس أولًا لحل $\triangle DBC$.
- في $\triangle ADB$، $c^2 = x^2 + h^2$.
- $\cos A = \frac{x}{c}$

35. **الفرضيات** مثلث أطوال أضلاعه هي 10.6 cm و 8 cm و 14.5 cm. اشرح كيفية إيجاد قياس الزاوية الأكبر. ثم جـ ـد قياس هذه الزاوية مع التقريب إلى أقرب درجة.

36. **مسألة غير محددة الإجابة** ابتكر مسألة تطبيقية تتضمن مثلثات قائمة وقانون الـ Cosine. ثم حل مسألتك وصمم رسومًا تخطيطية إذا لزم الأمر.

37. **الكتابة في الرياضيات** كيف تحدد أي طريقة ينبغي استخدامها عند حل مثلث؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبارات المعيارية

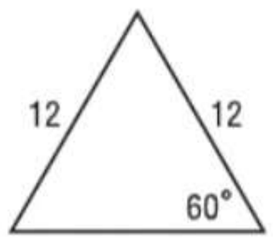
38. SAT/ACT إذا كان c و d عددين صحيحين موجبين و $4c + d = 26$. فما مجموع كل القيم الممكنة لـ c؟

A 6
B 10
C 15
D 21
E 28

39. إذا كان $6y = 21$. فما قيمة y؟

F $\log 12 - \log 6$
G $\frac{\log 21}{\log 6}$
H $\frac{\log 6}{\log 21}$
J $\log\left(\frac{6}{21}\right)$

40. الهندسة جـ ـد محيط الشكل.



A 24 **B** 30 **C** 36 **D** 48

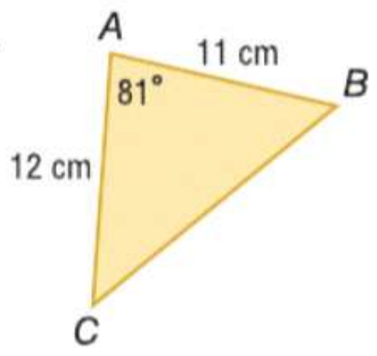
41. الإجابة القصيرة حُلّ المعادلة أدناه لإيجاد x.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$$

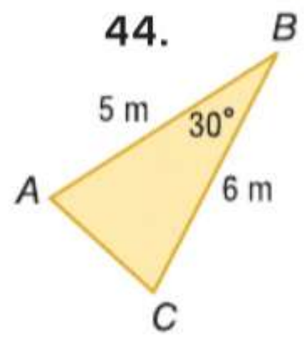
مراجعة شاملة

جـ ـد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 4-11)

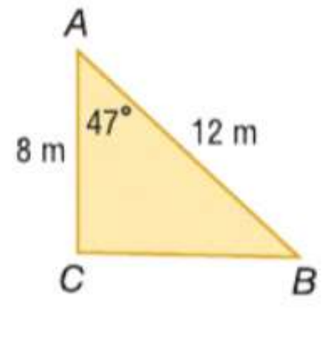
42.



43.



44.



ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. جـ ـد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست للزاوية θ . (الدرس 3-11)

45. (8, 5) **46.** (−4, −2) **47.** (6, −9)

48. الأحذية الرياضية أسعار عينة عشوائية من الأحذية الرياضية موضحة أدناه. (الدرس 2-11)

السعر (بالدرهم)				
70	300	400	250	250
150	120	250	100	70
150	160	200	170	300

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإنشاء مخطط رسم صندوقي، ثم صِف شكل التوزيع.

b. صِف مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

49. الأعمال خلال شهر يونيو، حققت شركة "الوسائط الدولية" عائدًا قدره AED 2700 من مبيعات مجموعة كاملة معينة من أسطوانات DVD. وخلال موسم تخفيضات شهر يوليو، كانت المجموعة معروضة بتخفيض AED 10 . وبلغ العائد من بيع هذه المجموعة AED 3750 في يوليو مع بيع 30 مجموعة إضافية عما تم بيعه في يونيو. جـ ـد سعر مجموعة أسطوانات DVD لشهري يونيو ويوليو

بدون كتابة المعادلة بالصيغة القياسية، حدد إذا ما كان التمثيل البياني لكل معادلة *قطعًا مكافئًا* أم *دائرةً* أم *قطعًا ناقصًا* أم *قطعًا زائدًا*.

50. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$ **51.** $3x^2 - 2y^2 + 32y - 134 = 0$ **52.** $y^2 + 18y - 2x = -84$

مراجعة المهارات

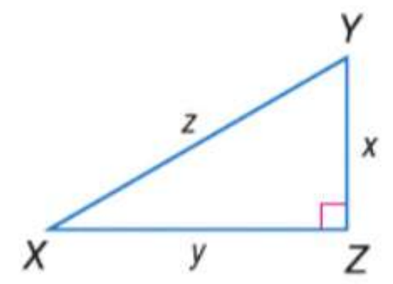
ارسم كل زاوية، ثم جـ ـد زاوية المرجع لها.

53. 245° **54.** -15° **55.** $\frac{5}{4}\pi$

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

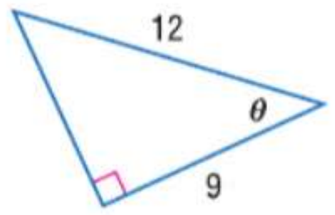
11 اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 1-11 إلى 5-11

حُلّ $\triangle XYZ$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 1-11)



1. $Y = 65°,\ x = 16$
2. $x = 25°,\ x = 8$

3. جـ ـد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 1-11)

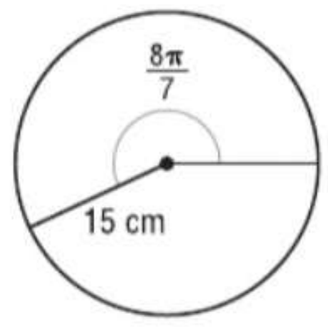


4. ارسم زاوية قياسها $-80°$ في وضع قياسي. (الدرس 2-11)

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة. (الدرس 2-11)

5. $215°$
6. $-350°$
7. $\frac{8\pi}{5}$
8. $\frac{9\pi}{2}$

9. **الاختيار من متعدد** ما طول القوس أدناه مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟ (الدرس 2-11)



A 4.2 cm
B 17.1 cm
C 53.9 cm
D 2638.9 cm

جـ ـد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. (الدرس 3-11)

10. $\tan \pi$
11. $\cos \frac{3\pi}{4}$

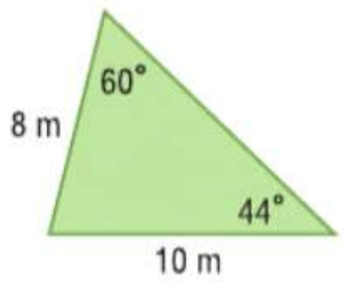
ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. جـ ـد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ. (الدرس 3-11)

12. $(0, -5)$
13. $(6, 8)$

14. **الاختيار من متعدد** افترض أن θ زاوية في وضع قياسي حيث $\cos \theta > 0$. في أي ربع/ أرباع يقع ضلع الانتهاء لـ θ ؟ (الدرس 3-11)

F الأول
G الثاني
H الثالث
J الأول والرابع

15. **الحديقة** لدى هالة حديقة على شكل مثلث كما هو موضح في الصورة أدناه. وهي تريد تغطية الحديقة بتربة سطحية. فما مساحة المثلث؟ (الدرس 4-11)

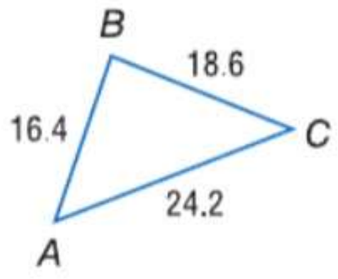


حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أو له حل واحد، أو حلّان. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 4-11)

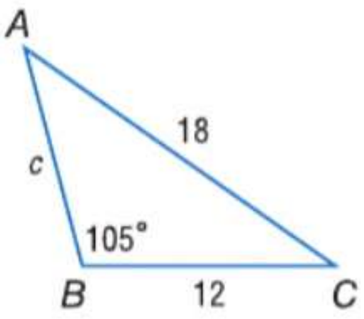
16. $A = 38°,\ a = 18,\ c = 25$
17. $A = 65°,\ a = 5,\ b = 7$
18. $A = 115°,\ a = 12,\ b = 8$

حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-11)

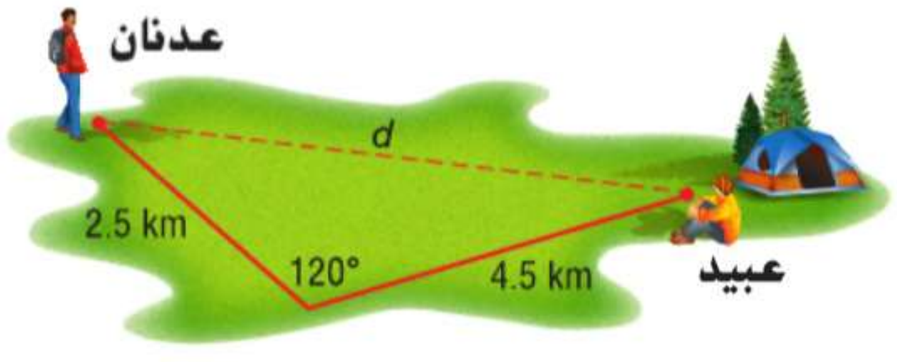
19.



20.



21. يخيم كل من عدنان وعبيد. ترك عدنان عبيد عند موقع التخييم وسار 4.5 km. ثم انعطف بزاوية 120° وسار 2.5 km. إذا سار عدنان مباشرة عائدًا إلى عبيد، فما المسافة التي سيقطعها مشيًا؟ (الدرس 5-11)



McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

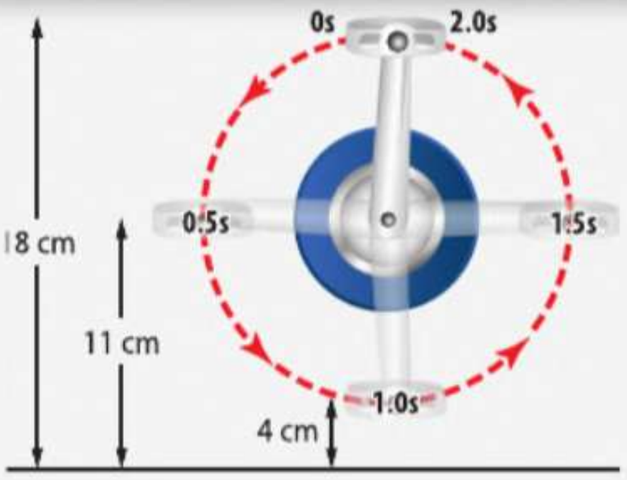
6-11 الدرس
الدوال الدائرية والدورية

السابق:
- قمت بإيجاد قيمة الدوال المثلثية باستخدام زوايا المرجع.

الحالي:
1. إيجاد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.
2. استخدام خصائص الدوال الدورية لإيجاد قيمة الدوال المثلثية.

لماذا؟
- تدور دواسات الدراجة أثناء قيادتها، ويكون ارتفاع الدواسة دالة زمن، كما هو موضح بالشكل على اليسار.

لاحظ أن الدواسة تصنع دورة كاملة كل ثانيتين.



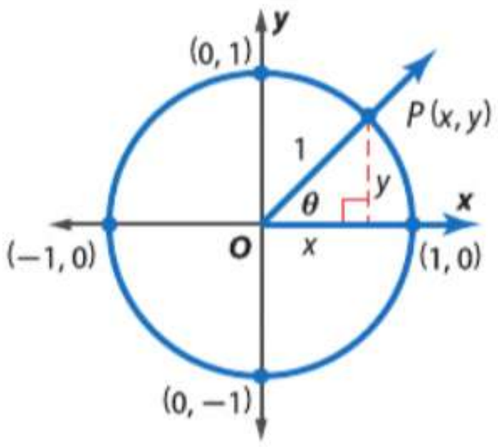
1 الدوال الدائرية

دائرة الوحدة هي دائرة يبلغ نصف قطرها وحدة واحدة ومركزها نقطة الأصل على المستوى الإحداثي.

يمكنك استخدام النقطة P على دائرة الوحدة لتعميم دوال sine و cosine.

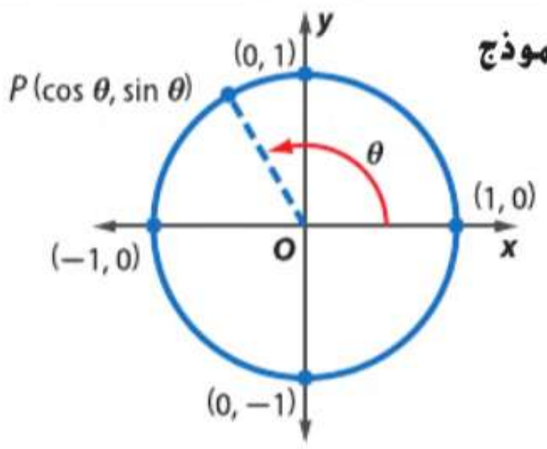
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

إذًا، قيمة $\sin\theta$ وقيمة $\cos\theta$ هما الإحداثي y والإحداثي x، على التوالي، للنقطة التي يتقاطع فيها ضلع الانتهاء لـ θ مع دائرة الوحدة.



المفهوم الأساسي الدوال على دائرة وحدة

الشرح إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية θ يتقاطع في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$.



النموذج

الرموز $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال إذا كانت $\theta = 120°$، فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$.

كل من $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$ دالة لـ θ. ولأنه تم تحديدهما باستخدام دائرة وحدة، فإنه يُطلق عليهما **دوال دائرية**.

مثال 1 إيجاد sine و cosine بدلالة نقطة على دائرة الوحدة

يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. جـ ـد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرين موجّه

1. يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. جـ ـد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

المفردات الجديدة

دائرة الوحدة	unit circle
دالة دائرية	circular function
دالة دورية	periodic function
دورة	cycle
فترة	period

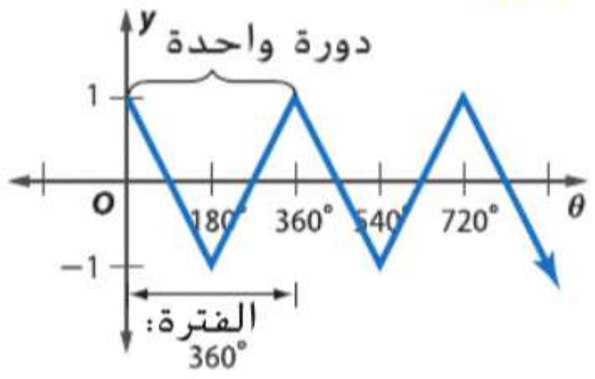
ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 الدوال الدورية

تحتوي **الدالة الدورية** على قيم y التي تتكرر على فترات منتظمة. ويُسمى النمط الواحد المكتمل **دورة**. ويُسمى الطول الأفقي للدورة الواحدة **فترة**.

θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1



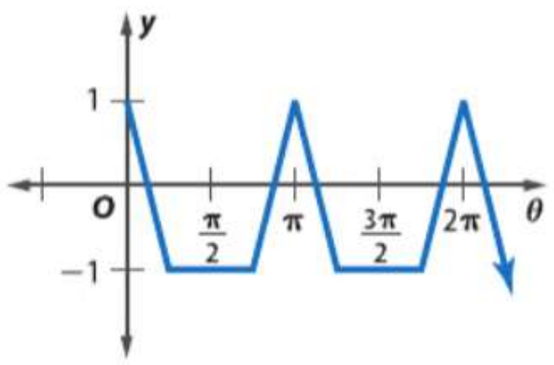
تتكرر الدورة كل 360°.

نصيحة دراسية

الدورات يمكن أن تبدأ الدورة من أي نقطة على التمثيل البياني للدالة الدورية. ففي المثال 2، إذا كانت بداية دائرة الوحدة عند النقطة $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط يتكرر عند $\frac{3\pi}{2}$. الفترة هي $\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}$ أو π.

مثال 2 تحديد الفترة

حدد فترة الدالة.



يتكرر النمط عند 2π و π وهكذا.
إذًا، الفترة هي π.

تمرين موجّه

2. ارسم تمثيلاً بيانيًا لدالة لها فترة من 4.

يعد دوران العجلات والدواسات ودوامات الخيل بمدن الملاهي والأجسام في الفضاء دورانًا دوريًا.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام الدوال المثلثية

قيادة الدراجات راجع بداية الدرس. يختلف ارتفاع دواسة الدراجة دوريًا كدالة زمن، مثلما هو موضح في الشكل.

a. ارسم جدولًا يبين ارتفاع دواسة الدراجة بعد 0، 0.5، 1.0، 1.5، 2.0، 2.5، 3.0ثوانٍ.

الزمن (s)	الطول (cm)
0	18
0.5	11
1.0	4
1.5	11
2.0	18
2.5	11
3.0	4

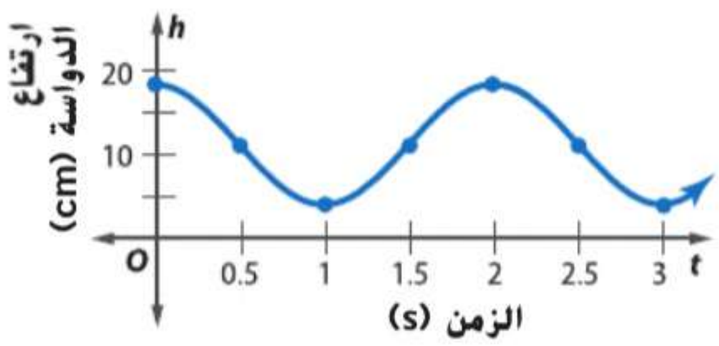
بعد 0 ثانية، يكون ارتفاع الدواسة 18 cm.
وبعد 0.5 ثانية، يكون ارتفاع الدواسة 11 cm.
وبعد 1.0 ثانية، يكون الارتفاع 4 cm وهكذا.

b. حدد فترة الدالة.

الفترة هي الوقت المستغرق لعمل لفّة واحدة كاملة. إذًا، الفترة هي ثانيتان.

c. مثّل الدالة بيانيًا. وافترض أن المحور الأفقي يمثل الوقت t والمحور الرأسي يمثل ارتفاع h الدواسة عن الأرض بالسنتيمترات.

أقصى ارتفاع للدواسة هو 18 cm، وأدنى ارتفاع هو 4 cm. ولأن فترة الدالة ثانيتان، يتكرر نمط التمثيل البياني على فترات من ثانيتين.



تمرين موجّه

3. قيادة الدراجات يقود سائق آخر الدراجة ذاتها بمعدل لفّة واحدة كل ثانية.

A. ارسم جدولاً يبين ارتفاع دواسة الدراجة بعد 0، 0.5، 1.0، 1.5، 2.0، 2.5، 3.0ثوانٍ.

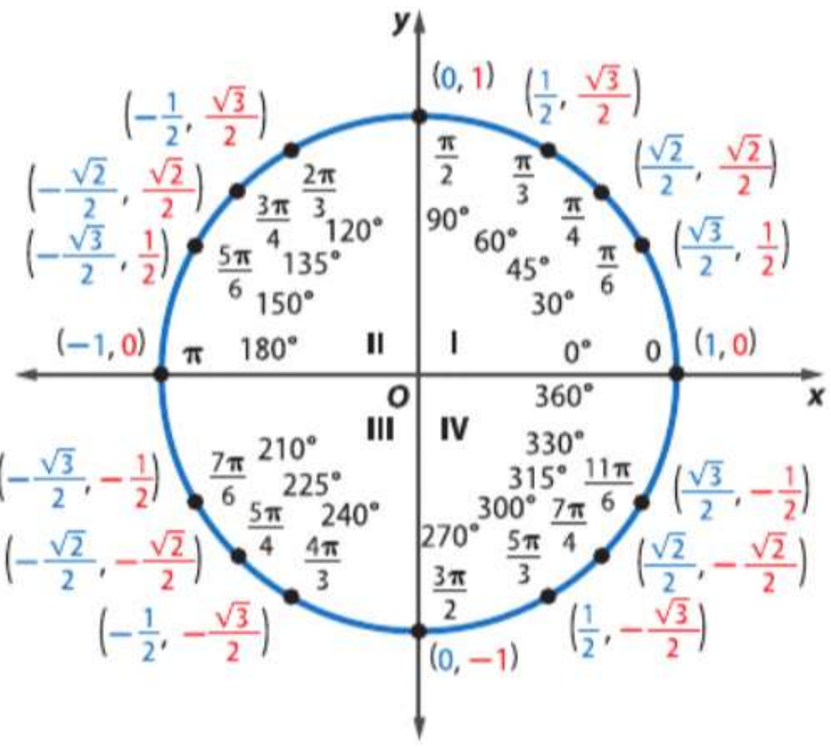
B. حدد الفترة ومثل الدالة بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

يقود معظم سائقي الدراجات المتنافسين دراجاتهم بمعدلات أكبر من 200 لفّة في الدقيقة. ويقود معظم الأشخاص الآخرين دراجاتهم بمعدل يتراوح بين 90 و 120 لفّة في الدقيقة.

المصدر: SpringerLink

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



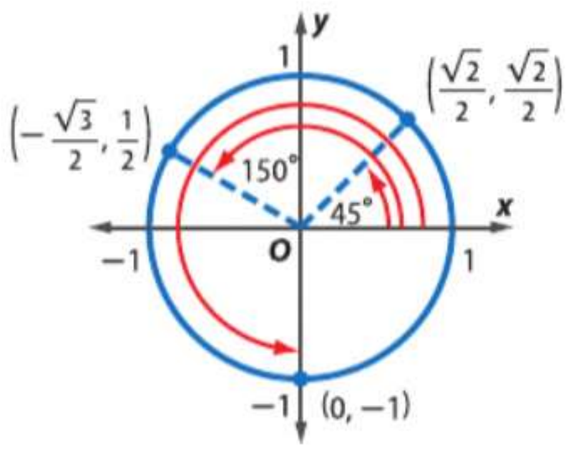
نصيحة دراسية

sine و cosine لمساعدتك على تذكر أنه بالنسبة إلى نقطة (x, y) على دائرة وحدة، فإن $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$. لاحظ أن الحرف x يسبق الحرف y أبجديًا وكذلك *cosine* يسبق *sine* الزاوية.

موضح على دائرة الوحدة المبينة على اليسار القيم الدقيقة لكل من $\cos\theta$ و $\sin\theta$ للزوايا الخاصة. وقيم cosine هي الإحداثي x للنقاط الواقعة على دائرة الوحدة. أما قيم sine فهي الإحداثي y.

يمكنك استخدام هذه المعلومات لتمثيل دوال sine و cosine بيانيًا وذلك بفرض أن المحور الأفقي يمثل قيم θ والمحور الرأسي يمثل قيم $\sin\theta$ أو $\cos\theta$.

تتكرر دورة دوال sine و cosine كل 360° ولذا، فهي دوال دورية. وفترة كل دالة هي 360° أو 2π.



تأمل النقاط الواردة على دائرة الوحدة عندما تكون $\theta = 45°$ و $\theta = 150°$ و $\theta = 270°$.

$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

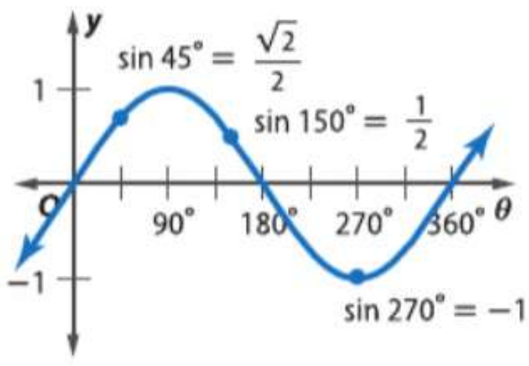
$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

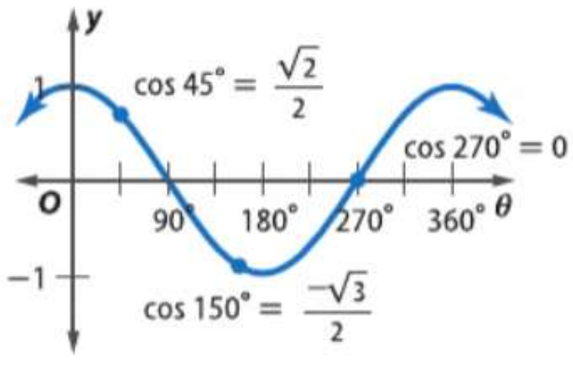
$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$

نصيحة دراسية

الراديان يمكن تمثيل دوال sine و cosine بيانيًا باستخدام الراديان باعتبارها الوحدات المستخدمة على المحور θ.

يمكن توضيح هذه النقاط أيضًا على تمثيلات بيانية لدوال sine و cosine.





حيث إن فترة دوال sine و cosine هي 360°، فإن القيم تتكرر كل 360°.
إذًا $\sin(x + 360°) = \sin x$ و $\cos(x + 360°) = \cos x$.

مثال 4 إيجاد قيم التعابير المثلثية

جـ ـد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\cos 480°$

$$\cos 480° = \cos(120° + 360°)$$
$$= \cos 120°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

b. $\sin\frac{11\pi}{4}$

$$\sin\frac{11\pi}{4} = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرين موجّه

4A. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

4B. $\sin 420°$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

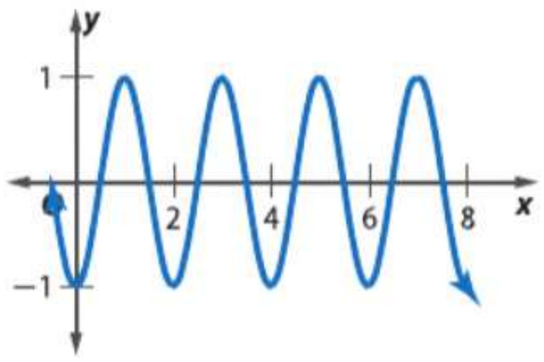
مثال 1 **البنية** يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند كل نقطة P. جـ ـد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

1. $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

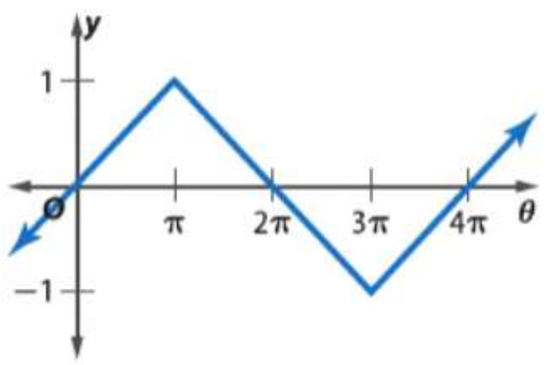
2. $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 حدد فترة كل دالة.

3.



4.



مثال 3

5. **الأرجوحات** يتغير ارتفاع الأرجوحة دوريًا كدالة الزمن. فالأرجوحة تتحرك للأمام وتصل إلى نقطة بارتفاع 6 m. ثم تعود للوراء وتصل إلى ارتفاع 6 m مرة أخرى. وتبلغ أدنى نقطة لها 2 m. والزمن المستغرق للتأرجح من أعلى نقطة إلى أدنى نقطة هو ثانية واحدة.

   a. ما المدة التي تستغرقها الأرجوحة في الحركة إلى الأمام والخلف مرة واحدة؟

   b. مثّل ارتفاع الأرجوحة h بيانيًا كدالة زمن t.

مثال 4 **جـ ـد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

6. $\sin\frac{13\pi}{6}$

7. $\sin(-60^\circ)$

8. $\cos 540^\circ$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند كل نقطة P. جـ ـد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

9. $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

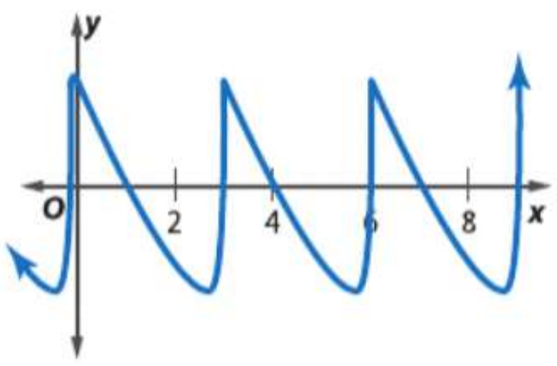
10. $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

11. $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

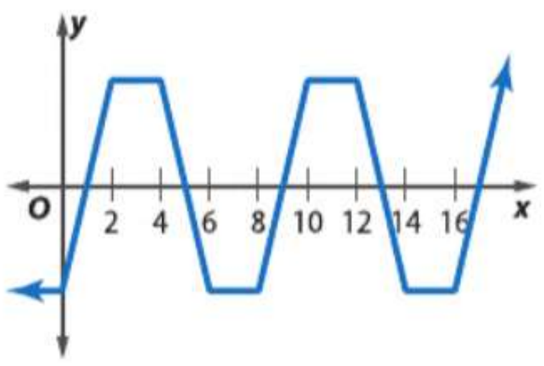
12. $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 حدد فترة كل دالة.

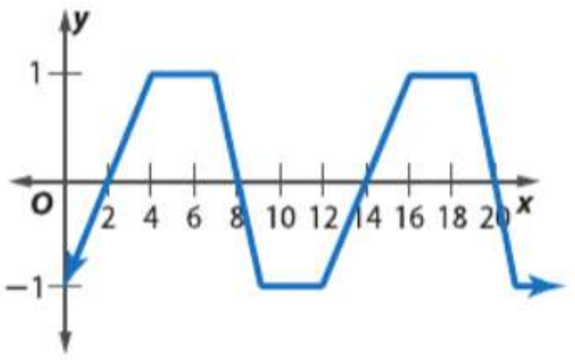
13.



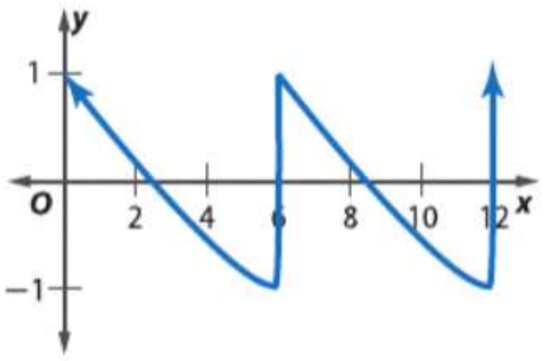
14.



15.



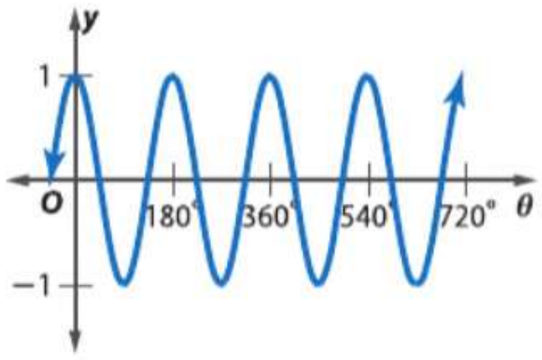
16.



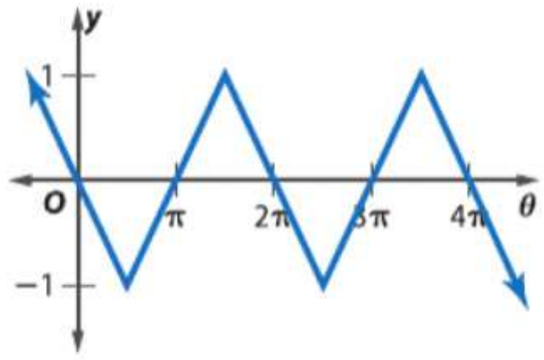
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

حدد فترة كل دالة.

17.



18.



مثال 3

19. **الطقس** موضح بالجدول متوسط درجة الحرارة العظمى في كل شهر لإحدى المدن.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة يمثل هذه الحالة.

b. صف فترة الدالة.

متوسط درجة الحرارة العظمى

الشهر	درجة الحرارة (C°)	الشهر	درجة الحرارة (C°)
يناير	2	يوليو	29
فبراير	5	أغسطس	28
مارس	11	سبتمبر	26
أبريل	18	أكتوبر	19
مايو	23	نوفمبر	11
يونيو	28	ديسمبر	5

المصدر: The Weather Channel

مثال 4

جـ ـد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

20. $\sin \frac{7\pi}{3}$

21. $\cos(-60^\circ)$

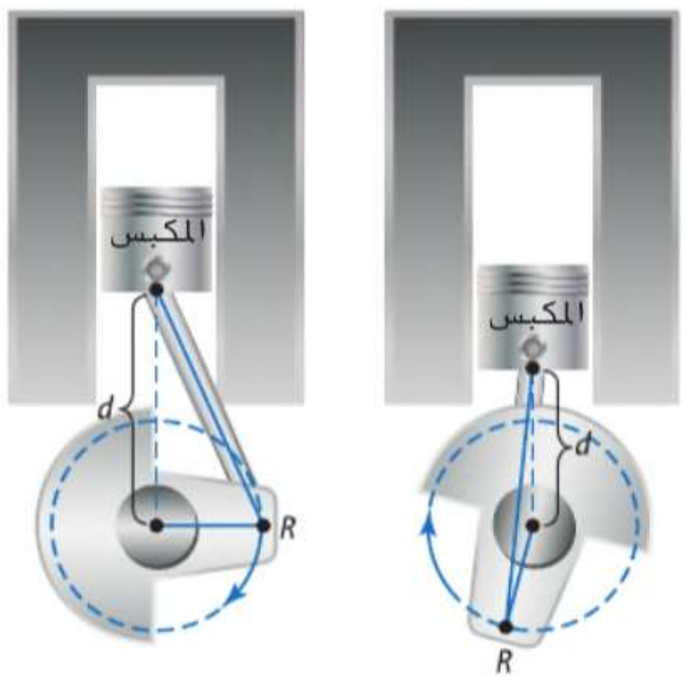
22. $\cos 450^\circ$

23. $\sin \frac{11\pi}{4}$

24. $\sin(-45^\circ)$

25. $\cos 570^\circ$

26. **التبرير المنطقي** في صورة المحرك الموضحة على اليسار، تُسمى المسافة d الواقعة بين المكبس ومركز الدائرة العمود المرفقي، وهي عبارة عن دالة السرعة لعصا المكبس. وتدور النقطة R الواقعة على عصا المكبس 150 لفة في الثانية.



a. حدد فترة الدالة على هيئة جزء من الثانية.

b. إذا كانت أقصى مسافة d هي 0.5 cm، وأطول مسافة هي 3.5 cm. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة مع فرض أن المحور الأفقي يمثل الزمن t . والمحور الرأسي يمثل المسافة d.

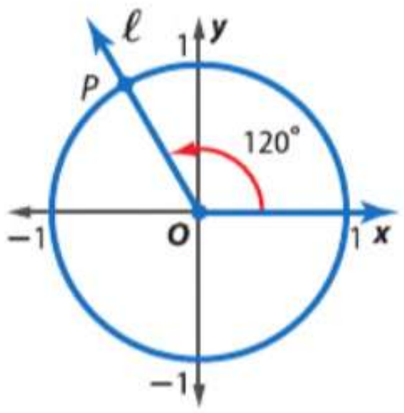
27 **الأعاصير** تصنع صافرة إنذار الأعاصير 2.5 لفّة في الدقيقة ويصل نصف قطر شعاع الصوت 1 km. يقع منزل السيدة هدى على بُعد 1 km من الصافرة. ويختلف بُعد الشعاع الصوتي عن منزلها دوريًا على هيئة دالة زمن.

a. حدد فترة الدالة بالثواني.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة مع فرض أن المحور الأفقي يمثل الزمن t من 0 ثانية حتى 60 ثانية، وفرض أن المحور الرأسي يمثل المسافة d بين الشعاع الصوتي ومنزل السيدة هدى في زمن t.

28. **عجلة فيريس الدوارة** يصل قطر عجلة دوارة في الصين إلى 155 m تقريبًا. ويعد ارتفاع المقصورة h دالة للزمن t. ويستغرق عمل لفّة واحدة كاملة حوالي 30 ثانية. افترض أن الارتفاع عند مركز العجلة يمثل الارتفاع عند الزمن 0 . ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



29. التمثيلات المتعددة يتقاطع ضلع الانتهاء لزاوية ما في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة P، كما هو موضح في الشكل.

a. **هندسيًا** انسخ الشكل. وارسم مستقيمات تمثل الزوايا $30°, 60°, 150°, 210°, 315°$.

b. **جدوليًا** استخدم جدول قيم لتوضيح ميل كل مستقيم مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

c. **تحليليًا** ما التبريرات التي يمكنك الخلوص إليها عن العلاقة بين ضلع الانتهاء للزاوية والميل؟ اشرح استنتاجك.

30. عكاز البهلوان يقفز شخص لأعلى وأسفل على عكاز بهلوان بمعدل ثابت. والفرق بين أعلى وأدنى نقطتين له هو 60 cm. يقفز هذا الشخص 50 مرة في الدقيقة.

a. صف المتغير المستقل والمتغير التابع للدالة الدورية التي تمثل هذه الحالة. ثم اذكر فترة الدالة بالثواني.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يعبر عن تغير ارتفاع الشخص الواثب بالنسبة إلى نقطة البداية لديه. افترض أن نقطة البداية في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة له. وافترض أيضًا أن المحور الأفقي يمثل الزمن t بالثواني وأن المحور الرأسي يمثل الارتفاع h.

جـ ـ ـد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

31 $\cos 45° - \cos 30°$

32. $6(\sin 30°)(\sin 60°)$

33. $2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$

34. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$

35. $(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$

36. $\frac{(\cos 30°)(\cos 150°)}{\sin 315°}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

37. التفكير النقدي تعمل هداية ونجلاء على إيجاد القيمة الدقيقة للتعبير $\cos \frac{-\pi}{3}$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

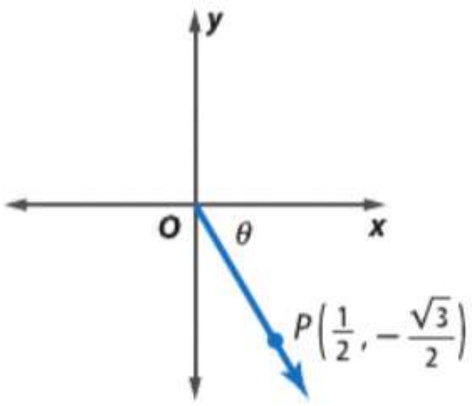
هداية

$$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$
$$= -0.5$$

نجلاء

$$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$
$$= \cos \frac{5\pi}{3}$$
$$= 0.5$$

38. التحدِّ شعاع له نقطة طرفية عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، وتقع النقطة $p\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على الشعاع. جـ ـ ـد الزاوية θ التي كوّنها المحور x مع الشعاع.



39. التبرير هل تكون فترة منحنى sine من مضاعفات π أحيانًا، أم دائمًا، أم لا تكون أبدًا؟ برر استنتاجك.

40. مسألة غير محددة الإجابة ارسم التمثيل البياني لدالة دورية قيمتها العظمى 10 وقيمتها الصغرى 10−. صف فترة الدالة.

41. الكتابة في الرياضيات اشرح طريقة تحديد فترة دالة دورية من تمثيلها البياني مع تضمين وصف للدورة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبارات المعيارية

42. الإجابة القصيرة صف إزاحة التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ إلى التمثيل البياني للدالة $g(x) = (x + 4)^2 - 3$.

43. يتم تمثيل التناقص في المعدل السكاني لمدينة هامبتون كوف بما يلي $P(t) = 24{,}000e^{-0.0064t}$. حيث t هو الزمن بالأعوام و24,000 هو عدد السكان الحالي. بعد كم عام سيكون تعداد السكان 10,000؟

A 14 **B** 104 **C** 137 **D** 375

44. SAT/ACT إذا كان $d^2 + 8 = 21$، فإن $d^2 - 8 =$

F 0 **H** 13 **K** 161

G 5 **J** 31

45. الإحصائيات إذا كان متوسط ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة هو 65. فما أكبر قيمة محتملة لواحد من هذه الأعداد الصحيحة؟

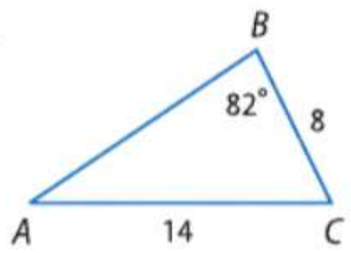
A 192 **B** 193 C 194 D 195

46. الإجابة الشبكية إذا كان $8xy + 3 = 3$. فما قيمة xy؟

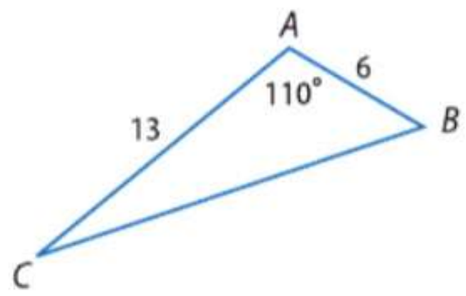
مراجعة شاملة

حُـلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-11)

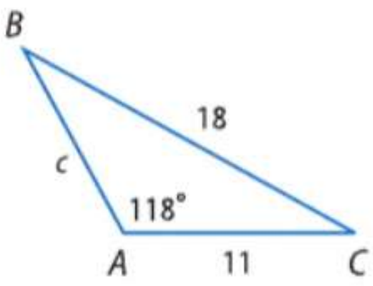
47.



48.



49.



حدد ما إذا كان كل مثلث *بلا حل*، أو له حل *واحد*، أو *حلّان* . ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 4-11)

50. $A = 72^\circ$, $a = 6$, $b = 11$

51. $A = 46^\circ$, $a = 10$, $b = 8$

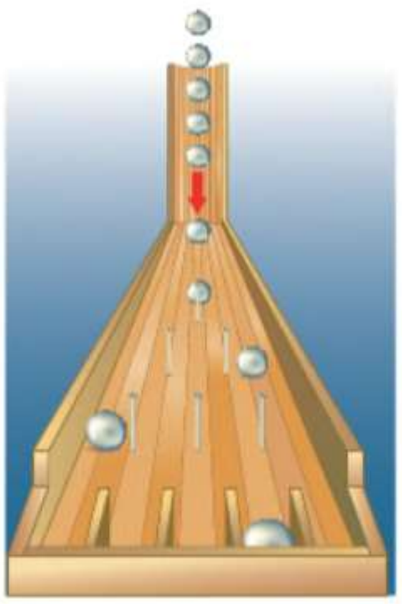
52. $A = 110^\circ$, $a = 9$, $b = 5$

تصل نسبة نجاح التوزيع ذي حدين إلى 70%. وهناك 10 محاولات.

53. ما احتمال فشل 3 محاولات؟

54. ما احتمال نجاح 7 محاولات على الأقل؟

55. ما العدد المتوقع للمحاولات الناجحة؟



56. الألعاب يوضح الرسم التخطيطي لوحة إحدى الألعاب التي يتم فيها إسقاط كرات من ممر مائل. وحسب نمط من المسامير والحواجز، تتجه الكرات في مسارات مختلفة إلى الأقسام السفلية. بالنسبة إلى كل قسم، كم عدد المسارات الموجودة باللوحة التي تؤدي إلى ذلك القسم؟

57. الرواتب يصل الراتب الحالي لفهد aed 40,000 في العام. ودائمًا ما تكون الزيادة السنوية في راتبه نسبة من الراتب في ذلك الوقت. فماذا سيكون راتبه إذا حصل على أربع زيادات متتالية نسبتها 4%؟

حُـلّ كل نظام من المعادلات.

58. $y = x + 2$
$y = x^2$

59. $4x + y^2 = 20$
$4x^2 + y^2 = 100$

مراجعة المهارات

بسّط كل تعبير.

60. $\dfrac{240}{\left|1 - \frac{5}{4}\right|}$

61. $\dfrac{180}{\left|2 - \frac{1}{3}\right|}$

62. $\dfrac{90}{\left|2 - \frac{11}{4}\right|}$

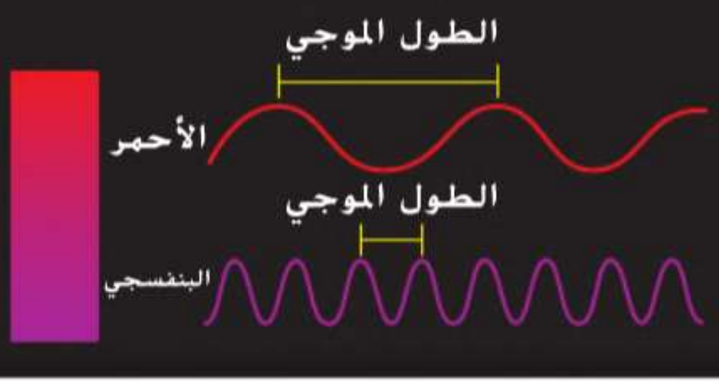
McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

11-7 التمثيل البياني للدوال المثلثية

السابق
- لقد استكشفت الدوال الدورية.

الحالي
1. وصف دوال sine و cosine وظل الزاوية وتمثيلها بيانيًا.
2. وصف الدوال المثلثية الأخرى وتمثيلها بيانيًا.

لماذا؟
- موجات الضوء المرئي لها أطوال موجية أو فترات مختلفة. فالأحمر له أطول طول موجي والبنفسجي له أقصر طول موجي.



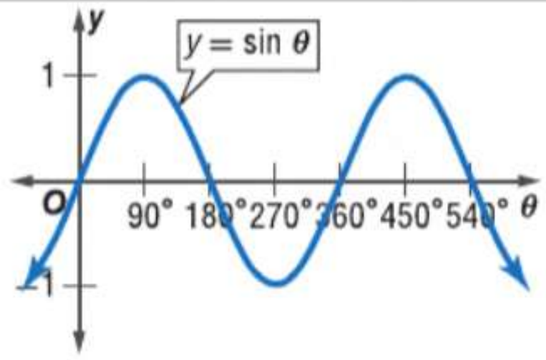
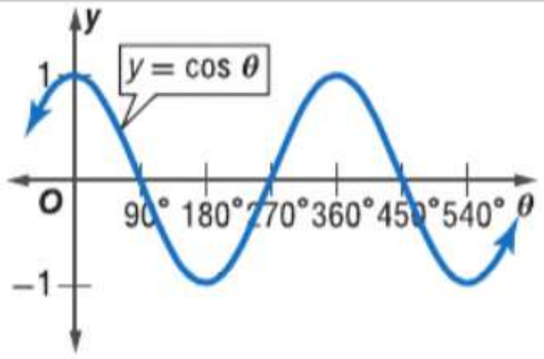
المفردات الجديدة
- **السعة** amplitude
- **التردد** frequency

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 دوال sine و cosine و Tangent

من الممكن أيضًا تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا على المستوى الإحداثي. تذكر أن التمثيلات البيانية للدوال الدورية لها أنماط متكررة، أو دورات. يُسمى الطول الأفقي لكل دورة الفترة. وتساوي **سعة** التمثيل البياني لدالة sine أو cosine نصف الفارق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

المفهوم الأساسي دالة sine ودالة cosine

الدالة الأصلية	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	{جميع الأعداد الحقيقية}	{جميع الأعداد الحقيقية}
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
الفترة	360°	360°

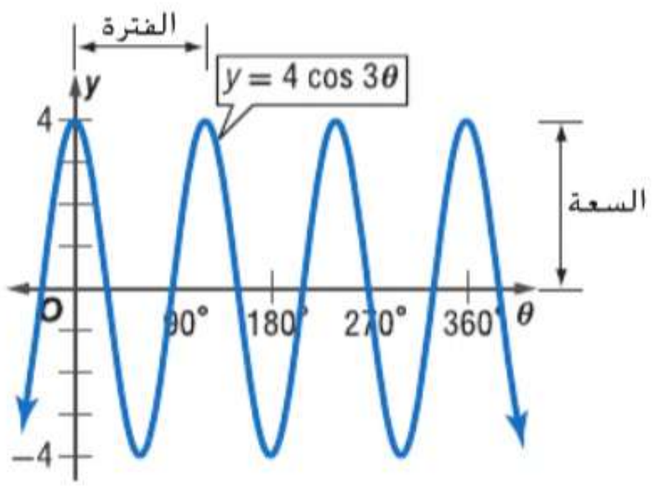
ومثلما هو الحال مع الدوال الأخرى، فإن الدوال المثلثية قابلة للتحويل. بالنسبة للتمثيلات البيانية لكل من $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$، فإن السعة $= |a|$ والفترة $= \frac{360^\circ}{|b|}$.

مثال 1 إيجاد السعة والفترة

جـ ـد السعة والفترة للدالة $y = 4 \cos 3\theta$.

السعة: $|a| = |4| = 4$

الفترة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|3|} = 120^\circ$



تمرين موجّه

جـ ـد السعة والفترة لكل دالة.

1A. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

1B. $y = 3 \sin 5\theta$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

نصيحة دراسية

الفترات في $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$. تمثل b عددالدورات بـ $360°$. في المثال 1، يشير العدد 3 في $y = 4 \cos 3\theta$ إلى وجود ثلاث دورات بـ $360°$. إذًا، توجد دورة واحدة بـ $120°$.

استخدم التمثيلات البيانية للدوال الأصلية لتمثيل $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ بيانيًا، ثم استخدم السعة والفترة لرسم المنحنيات الصحيحة لـ sine و cosine. يمكنك أيضًا استخدام نقاط تقاطع θ لمساعدتك على تمثيل الدوال بيانيًا.

نقاط تقاطع θ في $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ في دورة واحدة هي كالآتي.

$y = a \cos b\theta$	$y = a \sin b\theta$
$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$

مثال 2 التمثيل البياني لدالة sine ودالة cosine

مثّل كل دالة بيانيًا.

نصيحة دراسية

السعة التمثيلات البيانية لكل من $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ والتي سعتها $|a|$ لها قيم عظمى عند $y = a$ وقيم صغرى عند $y = -a$.

a. $y = 2 \sin \theta$

جـ ـ ـد السعة والفترة ونقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: $a = 2$ و $b = 1$.

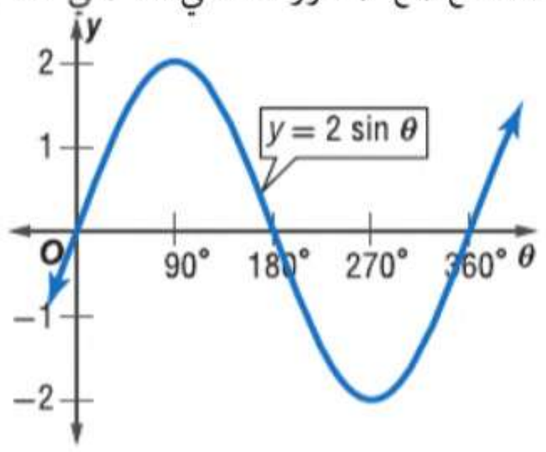
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← التمثيل البياني يمدد رأسيًا، ولذا فالقيمة العظمى هي 2 والقيمة الصغرى هي -2.

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|1|} = 360°$ ← دورة واحدة لها طول يساوي $360°$.

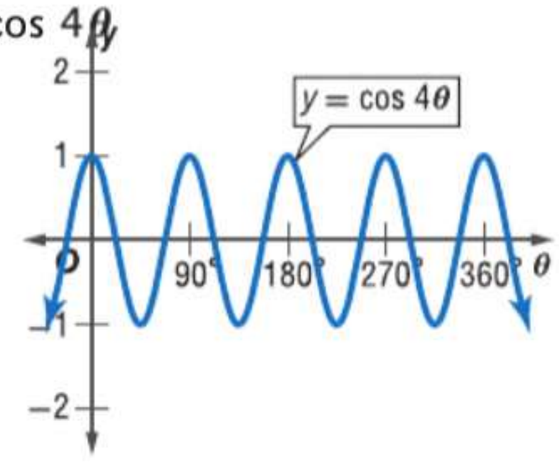
نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x هي $(0, 0)$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (180°, 0)$

$\left(\frac{360°}{b}, 0\right) = (360°, 0)$



b. $y = \cos 4\theta$



السعة: $|a| = |1| = 1$

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$

نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x:

$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (22.5°, 0)$

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (67.5°, 0)$

تمرين موجّه

2A. $y = 3 \cos \theta$

2B. $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوال المثلثية في تمثيل الحركة الدورية بالحياة اليومية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو الموجات الصوتية. وغالبًا ما توصف هذه الموجات باستخدام التردد. **والتردد** هو عدد الدورات في وحدة زمنية محددة.

وتردد التمثيل البياني للدالة هو المعكوس الضربي لفترة هذه الدالة.

إذًا إذا كانت فترة الدالة تساوي $\frac{1}{100}$ من الثانية، فإن التردد يساوي 100 دورة في الثانية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 من الحياة اليومية تمثيل الحالات الدورية بالنماذج

الصوت يُعرف الصوت الذي يقل تردده عن نطاق أذن الإنسان باسم *الصوت دون السمعي*. تستطيع الأفيال سماع أصوات في المدى دون السمعي، بترددات منخفضة تصل إلى 5 هرتز (Hz). أو 5 دورات في الثانية.

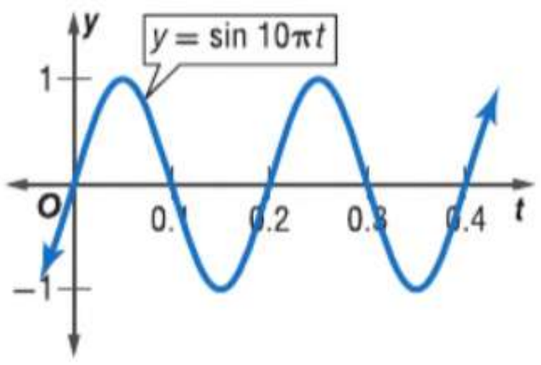
a. جد فترة الدالة التي تمثل الموجات الصوتية.

توجد 5 دورات في الثانية. والفترة هي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة.

إذًا، الفترة هي $\frac{1}{5}$ أو 0.2 ثانية.

b. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة sine لتمثيل الموجات الصوتية y على هيئة دالة للزمن t. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

$\text{الفترة} = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	اكتب العلاقة بين الفترة و b.
$0.2 = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	التعويض
$0.2\lvert b \rvert = 2\pi$	بضرب كل طرف في $\lvert b \rvert$.
$b = 10\pi$	بضرب كل طرف في 5؛ تكون b موجبة.
$y = a \sin b\theta$	اكتب المعادلة العامة لدالة sine.
$y = 1 \sin 10\pi t$	$a = 1$ و $b = 10\pi$، و $\theta = t$
$y = \sin 10\pi t$	بسّط.



تمرين موجّه

3. **الصوت** تستطيع الإنسان سماع أصوات بترددات منخفضة تصل إلى 20 هرتز.

A. جد فترة الدالة.

B. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة cosine لتمثيل الموجات الصوتية. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

تستطيع الأفيال سماع الصوت القادم من مسافة تبعد 8 km. ويستطيع الإنسان سماع أصوات ينحصر ترددها بين 20 Hz و 20000 Hz.

المصدر: School for Champions

نصيحة دراسية

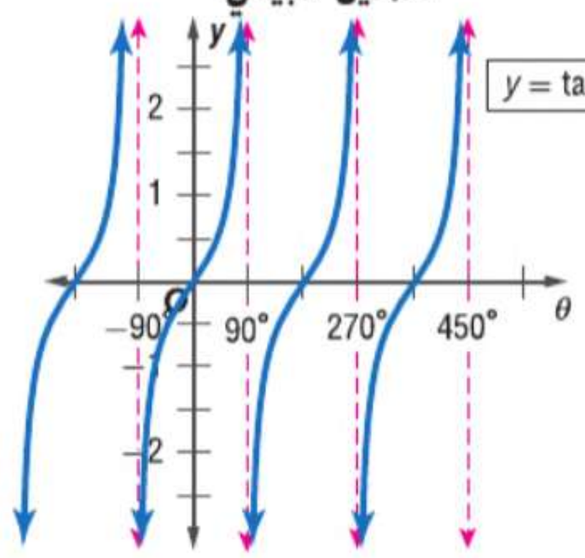
السعة والفترة لاحظ أن السعة تؤثر على المحور الرأسي بالتمثيل البياني، والفترة تؤثر على المحور الأفقي.

دالة tangent الزاوية هي إحدى الدوال المثلثية التي يوجد في تمثيلاتها البيانية خطوط تقارب.

المفهوم الأساسي دالة tangent الزاوية

الدالة الأصلية	$y = \tan \theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n\}$، n عدد صحيح$\}$
المدى	{ جميع الأعداد الحقيقية}
السعة	غير معرّفة
الفترة	180°
نقاط تقاطع θ في دورة واحدة	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$

التمثيل البياني



بالنسبة للتمثيل البياني لـ $y = a \tan b\theta$ ، الفترة $= \frac{180°}{\lvert b \rvert}$. لا توجد سعة وخطوط التقارب هي مضاعفات فردية لـ $\frac{180°}{2\lvert b \rvert}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

نصيحة دراسية

Tangent الزاوية ليس لدالة Tangent الزاوية سعة لأنه ليس لها قيم عظمى أو صغرى.

مثال 4 تمثيل دوال Tangent الزاوية بيانيًا

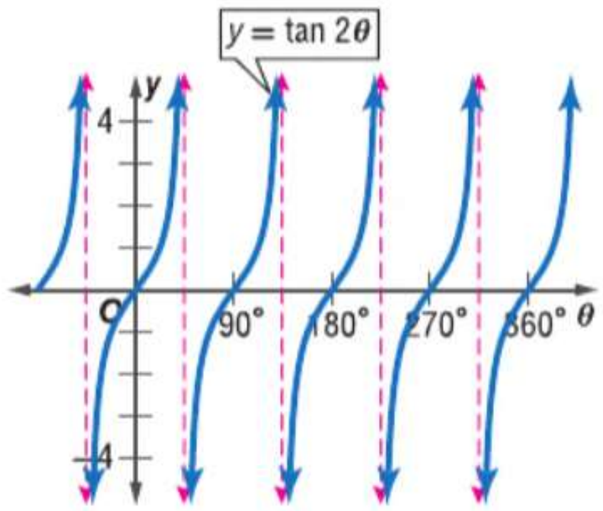
جـ ـ ـد فترة $y = \tan 2\theta$. ثم مثل الدالة بيانيًّا.

الفترة: $\frac{180^\circ}{|b|} = \frac{180^\circ}{|2|} = 90^\circ$

خطوط التقارب: $\frac{180^\circ}{2|b|} = \frac{180^\circ}{2|2|} = 45^\circ$

ارسم خطوط التقارب عند $45^\circ \cdot 1-$ أو -45°، $45^\circ \cdot 1$ أو 45°، $45^\circ \cdot 3$ أو 135°، وهكذا.

استخدم $y = \tan \theta$، ولكن ارسم دورة واحدة كل 90°.



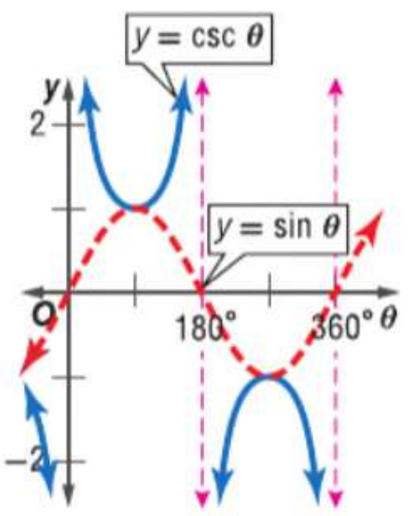
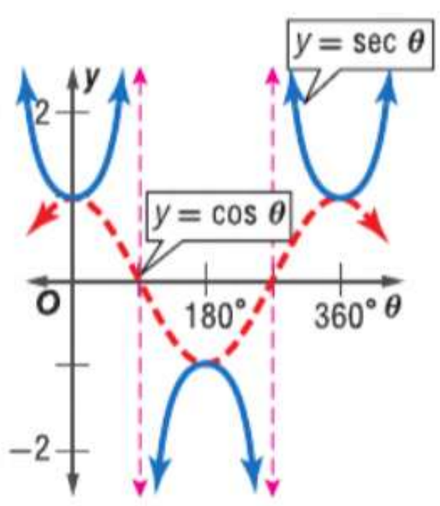
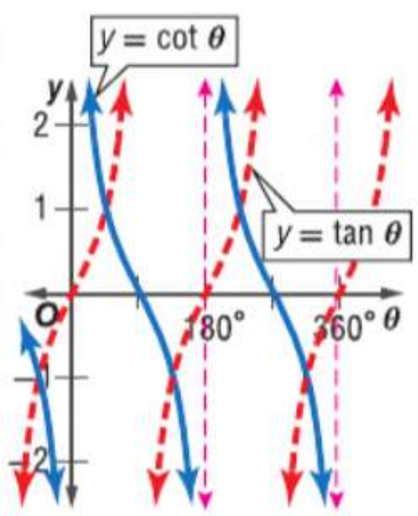
تمرين موجّه

4. جـ ـ ـد فترة $y = \frac{1}{2}\tan\theta$. ثم مثل الدالة بيانيًّا.

2 التمثيلات البيانية للدوال المثلثية الأخرى

ترتبط التمثيلات البيانية لدوال Tangent و secant و cotangent بالتمثيلات البيانية لدوال sine و cosine وظل الزاوية.

المفهوم الأساسي دوال Cosecant و Secant و Cotangent

الدالة الأصلية	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n\}$، n عدد صحيح	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n\}$، n عدد صحيح	$\{\theta \mid \theta \neq 180n\}$، n عدد صحيح
المدى	عدد حقيقي $\{y > 1 \text{ أو } y < -1 \mid y\}$	عدد حقيقي $\{y > 1 \text{ أو } y < -1 \mid y\}$	{ جميع الأعداد الحقيقية }
السعة	غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة
الفترة	360°	360°	180°

نصيحة دراسية

الدوال العكسية

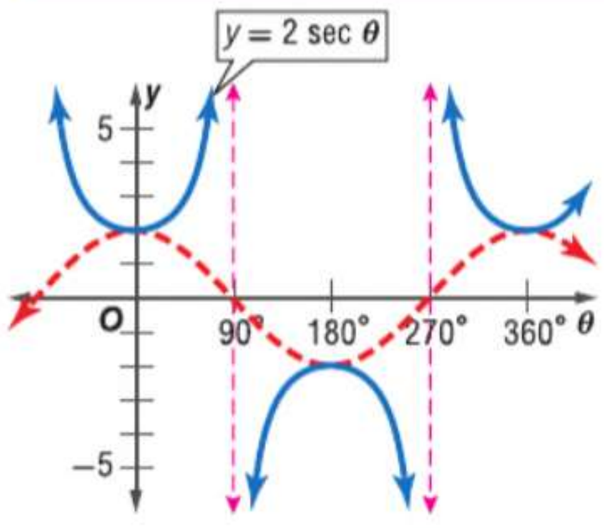
يمكنك استخدام التمثيلات البيانية لـ $y = \sin \theta$، و $y = \cos \theta$، و $y = \tan \theta$ لتمثيل الدوال العكسية بيانيًا، إلا أن هذه التمثيلات البيانية لا تكون جزءًا من التمثيلات البيانية لدوال cosecant و secant و cotangent.

مثال 5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

جـ ـ ـد الفترة $y = 2 \sec \theta$. ثم مثل الدالة بيانيًّا.

حيث إن $2 \sec \theta$ معكوس ضربي لـ $2 \cos \theta$، إذًا فالتمثيلات البيانية لها الفترة نفسها: 360° وتحدث خطوط التقارب الرأسية عند النقاط التي يكون فيها $2 \cos \theta = 0$، إذًا. توجد خطوط التقارب عندما تكون $\theta = 90^\circ$ و $\theta = 270^\circ$.

ارسم $y = 2 \cos \theta$ واستخدمها لتمثيل $y = 2 \sec \theta$ بيانيًا.



تمرين موجّه

5. جـ ـ ـد فترة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **جـ ـد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

1. $y = 4 \sin \theta$

2. $y = \sin 3\theta$

3. $y = \cos 2\theta$

4. $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3

5. العناكب عند تعلق حشرة في شبكة عنكبوت، تهتز الشبكة بتردد 14 هرتز.

a. جـ ـد فترة الدالة.

b. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة sine لتمثيل اهتزاز الشبكة y كدالة للزمن t. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

المثالان 5-4 **جـ ـد فترة كل دالة ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

6. $y = 3 \tan \theta$

7. $y = 2 \csc \theta$

8. $y = \cot 2\theta$

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **جـ ـد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

9. $y = 2 \cos \theta$

10. $y = 3 \sin \theta$

11. $y = \sin 2\theta$

12. $y = \cos 3\theta$

13. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

14. $y = \sin 4\theta$

15. $y = \frac{3}{4} \cos \theta$

16. $y = \frac{3}{2} \sin \theta$

17 $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

18. $y = 4 \cos 2\theta$

19. $y = 3 \cos 2\theta$

20. $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$

مثال 3

21. التبرير قارب في البحيرة يترنح لأعلى ولأسفل مع الأمواج. والفرق بين أعلى نقطة وأسفل نقطة يصل إليها القارب هو 8 cm. ويقع القارب عند نقطة التوازن عندما يكون في منتصف طريقه بين أعلى نقطة وأسفل نقطة. وكل دورة من دورات الحركة تستمر لمدة 3 ثوانٍ.

a. اكتب معادلة تمثل حركة القارب. وافرض أن h تمثل أعلى نقطة مقاسة بالسنتيمترات وافرض أن t تمثل الزمن مقاسًا بالثواني. بفرض أن القارب يكون عند نقطة توازنه عندما $t = 0$ ثانية.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح ارتفاع القارب في صورة دالة الزمن.

22. الكهرباء الجهد المتوفر في أحد المنافذ الكهربية عبارة عن دالة دورية يتذبذب، أو يتأرجح أعلى وأسفل، بين 165− فولت و 165 فولت بتردد 50 دورة في الثانية.

a. اكتب معادلة تمثل الجهد V في صورة دالة للزمن t. افرض أنه عندما يكون $t = 0$ ثانية، فإن التيار يساوي 165 فولت.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

المثالان 5-4 **جـ ـد فترة كل دالة ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

23. $y = \tan \frac{1}{2}\theta$

24. $y = 3 \sec \theta$

25. $y = 2 \cot \theta$

26. $y = \csc \frac{1}{2}\theta$

27. $y = 2 \tan \theta$

28. $y = \sec \frac{1}{3}\theta$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29 **الزلازل** رصدت محطة لرصد الزلازل موجة زلزال ترددها 0.5 هرتز وسعتها 1 m.

a. اكتب معادلة تتضمن sine لتمثيل ارتفاع الموجة h في صورة دالة للزمن t . افرض أن نقطة توازن الموجة، $h = 0$ ، عند نقطة المنتصف بين أعلى نقطة وأسفل نقطة.

b. مثل الدالة بيانيًّا. ثم حدد ارتفاع الموجة بعد مرور 20.5 ثانية.

30. **المثابرة** جسم معلق في زنبرك كما هو موضح على اليسار. وهو يتذبذب حسب المعادلة $y = 20 \cos \pi t$. حيث تكون y هي المسافة مقاسة بالسنتيمترات من موضع نقطة التوازن في الزمن t.

a. صف حركة الجسم بإيجاد ما يلي: السعة مقاسة بالسنتيمترات، والتردد مقاس بعدد الاهتزازات في الثانية الواحدة، والفترة مقاسة بالثواني.

b. جـ ـ ـد المسافة التي يقطعها الجسم من نقطة توازنه عندما تكون $t = \frac{1}{4}$ ثانية.

c. المعادلة $v = (-20 \text{ cm})(\pi \text{ rad/s}) \cdot \sin (\pi \text{ rad/s} \cdot t)$ تمثل سرعة v الجسم في زمن t . جـ ـ ـد السرعة عندما تكون $t = \frac{1}{4}$ ثوانٍ.

31. **البيانو** تهتز أوتار البيانو بتردد 130 هرتز.

a. اكتب معادلة باستخدام cosine ومثلها بيانيًّا لتمثيل اهتزاز الوتر y في صورة دالة للزمن t. وافرض أن السعة تساوي وحدة واحدة.

b. افرض أن تردد الاهتزاز قد تضاعف. فهل تظل السعة والفترة كما هي أم تزيد أم تقل؟ اشرح.

جـ ـ ـد السعة، إن وجدت، والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

32. $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta$

33. $y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4}\theta$

34. $y = 2 \tan \frac{1}{2}\theta$

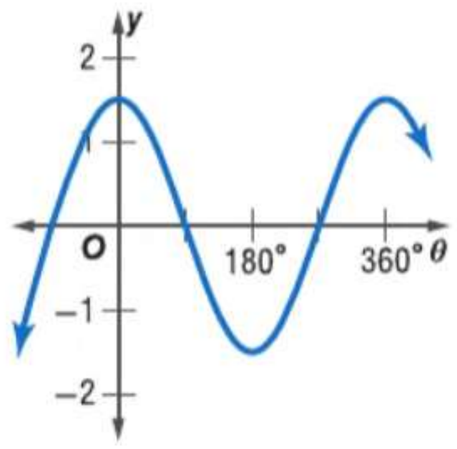
35. $y = 2 \sec \frac{4}{5}\theta$

36. $y = 5 \csc 3\theta$

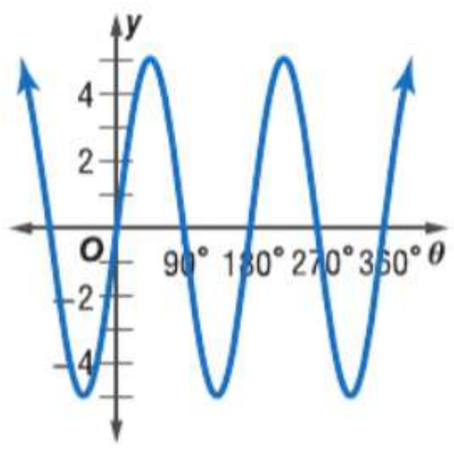
37. $y = 2 \cot 6\theta$

حدد فترة التمثيل البياني واكتب معادلة كل دالة.

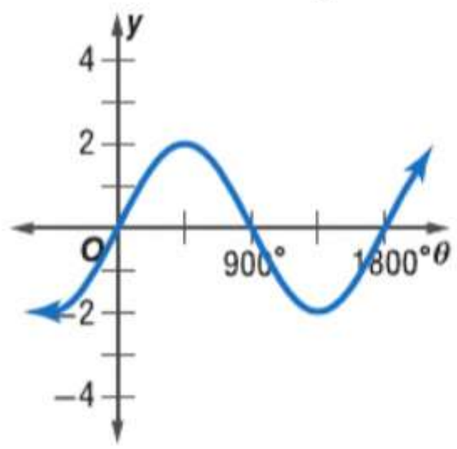
38.



39.



40.



مسائلمهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

41. **التحدٍ** صف مجال ومدى $y = a \cos \theta$ و $y = a \sec \theta$. حيث a هي أي عدد حقيقي موجب.

42. **التبرير** قارن بين التمثيلات البيانية لـ $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ و $y = \sin \frac{1}{2}\theta$.

43. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة مثلثية لها سعة 3 وفترة 180°. ثم مثل الدالة بيانيًّا.

44. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك استخدام خواص دالة مثلثية من أجل رسم تمثيلها البياني؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبارات المعيارية

45. الإجابة القصيرة جـــد الحد رقم 100,001 في التسلسل.

13, 20, 27, 34, 41, ...

46. الإحصاء لعبت خمس جولات في البولينج وكانت النتيجة كالآتي: 156, 133, 167, 171, 143. فماذا كان متوسطك؟

A 147 **B** 153 **C** 154 **D** 156

47. بلغ التعداد السكاني في مدينتك 312,430 منذ عشرة أعوام. فإذا كان التعداد الحالي هو 418,270، فما نسبة النمو على مدار 10 أعوام ماضية؟

F 25% **G** 34% **H** 66% **J** 75%

48. SAT/ACT إذا كان $h + 4 = b - 3$، فإن $(h - 2)^2 =$

A $h^2 + 4$
B $b^2 - 6b + 3$
C $b^2 - 18b + 81$
D $b^2 - 14b + 49$
E $b^2 - 10b + 25$

مراجعة شاملة

جـد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 2-11)

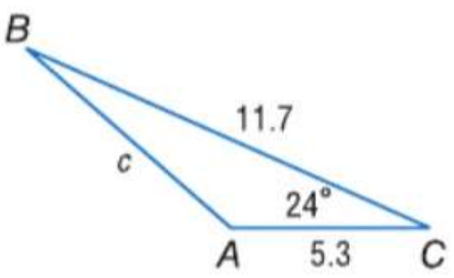
49. $\cos 120^\circ - \sin 30^\circ$

50. $3(\sin 45^\circ)(\sin 60^\circ)$

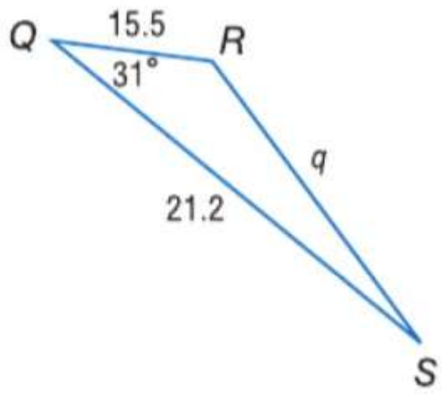
51. $4 \sin \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6}$

حُلّ كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-11)

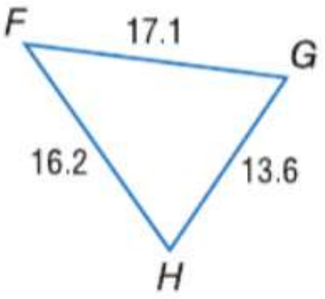
52.



53.



54.



تصل نسبة نجاح التوزيع ذي الحدين إلى 40%. وهناك 12 محاولة.

55. ما احتمال فشل 5 محاولات؟

56. ما احتمال نجاح 8 محاولات على الأقل؟

57. ما العدد المتوقع للمحاولات الناجحة؟

58. خدمات مصرفية أودعت نورا AED 1000 aeda في حساب مصرفي. وبنهاية كل عام يصدر المصرف مرابحة إلى حسابها بمقدار 3% من الرصيد، ثم يخصم رسومًا سنوية قيمتها AED 10.

a. افرض أن b_0 هو المبلغ الذي أودعته نورا. اكتب معادلة تكرارية للرصيد b_n الذي سيكون في حسابها بنهاية عدد n من الأعوام.

b. جـد الرصيد المودع في الحساب بعد أربعة أعوام.

اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة شروط مما يلي.

59. يقع المركز عند (3, 6)، وإحدى بؤرتيه عند (3, 2). ويقع الرأس المرافق عند (1, 6)

60. تقع البؤرتان عند (1, 2) و (13, 2). ويقع الرأس المرافق عند (7, 5)

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة بيانيًّا.

61. $y = 2(x - 3)^2 - 4$

62. $y = \frac{1}{3}(x + 5)^2 + 2$

63. $y = -3(x + 6)^2 + 7$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
التمثيلات البيانية المثلثية

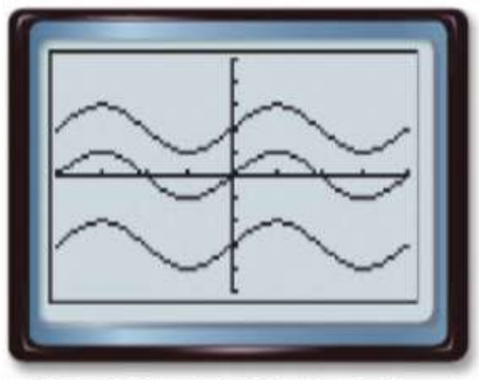
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف تحويلات التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 k في $y = \sin \theta + k$

مثّل بيانيًا $y = \sin \theta$ و $y = \sin \theta + 2$ و $y = \sin \theta - 3$ على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

اضبط نافذة العرض لتطابق النافذة الموضحة على اليسار.
وافترض أن $\mathbf{Y1} = \sin \theta$ و $\mathbf{Y2} = \sin \theta + 2$ و $\mathbf{Y3} = \sin \theta - 3$.


[−360, 360] scl: 90 by [−5, 5] scl: 1

خطوات العملية علي الحاسبة: :الحاسبة: Y= SIN X,T,θ,n) ENTER

SIN X,T,θ,n) + 2 ENTER

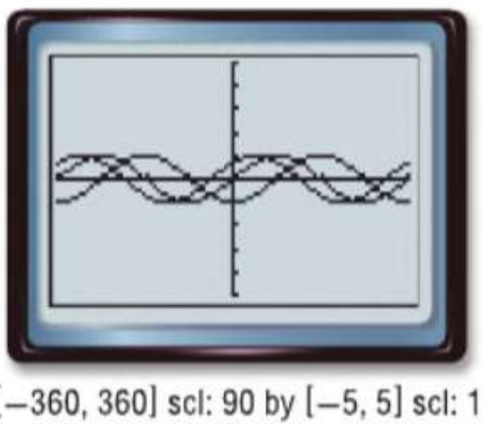
SIN X,T,θ,n) − 3 GRAPH

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه ولكن بمواضع رأسية مختلفة.

النشاط 2 h في $y = \sin (\theta - h)$

مثّل بيانيًا $y = sin\ \theta$ و $y = sin\ (\theta + 45°)$ و $y = sin\ (\theta - 90°)$ على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

افرض أن $\mathbf{Y1} = \sin \theta$ و $\mathbf{Y2} = \sin (\theta + 45)$ و $\mathbf{Y3} = \sin (\theta - 90)$.
تأكد من مسح الإدخالات التي وضعتها من النشاط 1.


[−360, 360] scl: 90 by [−5, 5] scl: 1

خطوات العملية علي الحاسبة:: Y= SIN X,T,θ,n) ENTER

SIN X,T,θ,n + 45) ENTER

SIN X,T,θ,n − 90) GRAPH

التمثيلات البيانية لها شكل واحد ولكن بمواضع أفقية مختلفة.

النموذج والتحليل

كرر الأنشطة مع دالة cosine ودالة tangent الزاوية.

1. ما مجال الدوال الواردة في النشاطين 1 و 2 ومداها؟
2. ما تأثير إضافة ثابت إلى دالة مثلثية؟
3. ما تأثير إضافة ثابت إلى θ في الدالة المثلثية؟

كرر الأنشطة مع كل مما يلي. صف العلاقة بين كل زوجين من التمثيلات البيانية.

4. $y = sin\ \theta + 4$
   $y = sin\ (2\theta) + 4$
5. $y = cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$
   $y = cos\frac{1}{2}(\theta + 45°)$
6. $y = 2\ sin\ \theta$
   $y = 2\ sin\ \theta - 1$
7. $y = cos\ \theta - 3$
   $y = cos\ (\theta - 90°) - 3$
8. اكتب معادلة عامة لدوال sine و cosine و tangent الزاوية بعد الفترات في السعة a والفترة b، والموضع الأفقي h، والموضع الرأسي k.

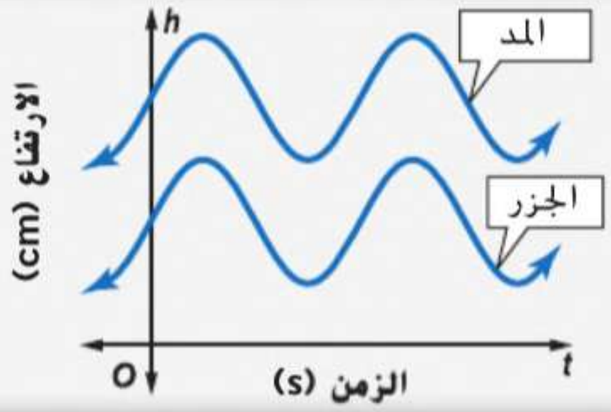
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11-8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

السابق:
- لقد قمت بإزاحة الدوال الأسية.

الحالي:
1. تمثيل الإزاحة الأفقية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية وتقوم بإيجاد إزاحات الطور.
2. تمثيل الإزاحة الرأسية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

لماذا؟
- تعبر التمثيلات البيانية الموضحة على اليسار عن الأمواج في أحد الخلجان أثناء تيارات المد والجزر. لاحظ أن شكل الأمواج لا يتغير.



المفردات الجديدة
- إزاحة الطور — phase shift
- إزاحة رأسية — vertical shift
- خط متوسط — midline

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

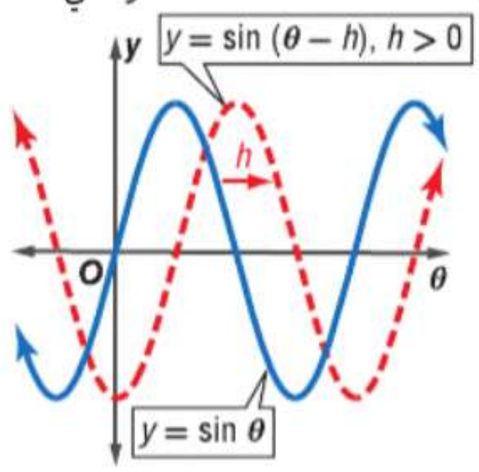
1 الإزاحة الأفقية تذكر أن الإزاحة تحدث عندما يتحرك الشكل من مكان إلى آخر على المستوى الإحداثي دون تغير اتجاهه. وتُسمى الإزاحة الأفقية للدالة الدورية باسم **إزاحة الطور**.

المفهوم الأساسي إزاحة الطور

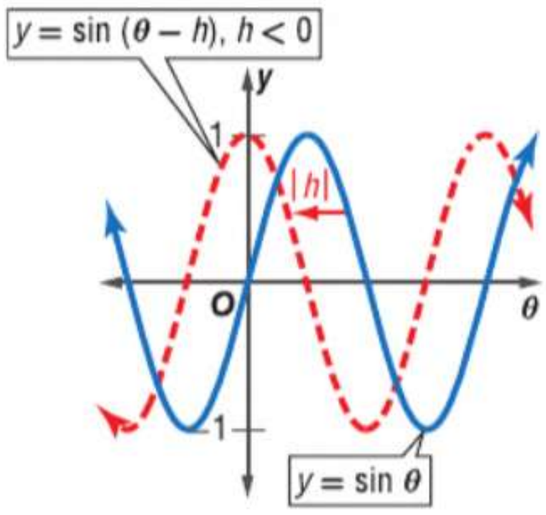
الشرح

إزاحة الطور للدوال $y = a \sin b(\theta - h)$ و $y = a \cos b(\theta - h)$ و $y = a \tan b(\theta - h)$ هي h. حيث $b > 0$.

النماذج



إذا كان $h > 0$، فإن الإزاحة تكون h وحدات إلى اليمين.



إذا كان $h < 0$، فإن الإزاحة تكون $|h|$ وحدات إلى اليسار.

أمثلة

إزاحة الطور 90° إلى اليمين. $y = \cos(\theta - 90°)$

إزاحة الطور 30° إلى اليسار. $y = \tan(\theta + 30°)$

يمكن تمثيل secant و cosecant و cotangent بيانيًا باستخدام القواعد نفسها.

مثال 1 التمثيل البياني لإزاحة الطور

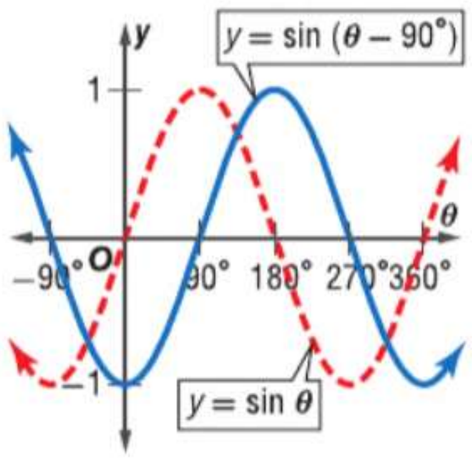
اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = \sin(\theta - 90°)$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

السعة: $a = 1$

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{1} = 360°$

إزاحة الطور: $h = 90°$

مثّل $y = \sin \theta$ بيانيًا بعد إزاحتها 90° إلى اليمين.



تمرين موجّه

1. اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = 2 \cos(\theta + 45°)$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 الإزاحة الرأسية

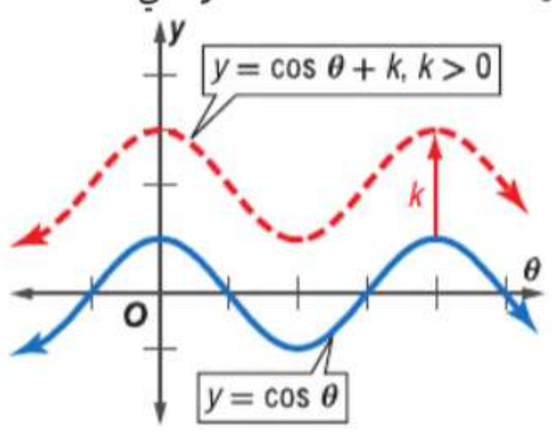
تذكر أن التمثيل البياني للدالة $y = x^2 + 5$ هو التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = x^2$ مزاحًا 5 وحدات لأعلى. وبالمثل، يمكن إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية رأسيًا باستخدام **الإزاحة الرأسية**.

المفهوم الأساسي الإزاحة الرأسية

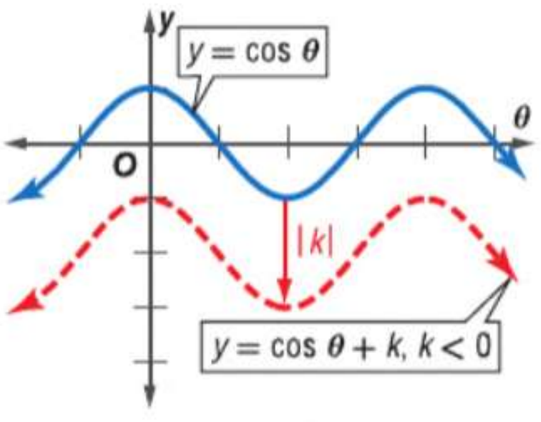
الشرح

الإزاحة الرأسية للدوال $y = a \sin b\theta + k$ و $y = a \cos b\theta + k$ و $y = a \tan b\theta + k$ هي k.

النماذج



إذا كانت $k > 0$، فإن الإزاحة تكون عدد k من الوحدات لأعلى.



إذا كانت $k < 0$، فإن الإزاحة تكون عدد $|k|$ من الوحدات لأسفل.

أمثلة

الإزاحة الرأسية تكون 4 وحدات لأعلى. $y = \sin \theta + 4$

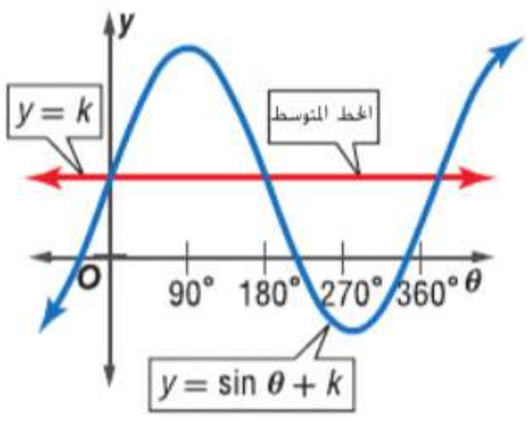
الإزاحة الرأسية تكون 3 وحدات لأسفل. $y = \tan \theta - 3$

يمكن تمثيل secant و cosecant و cotangent بيانيًا باستخدام القواعد نفسها.

نصيحة دراسية

الترميز لاحظ أن $\sin (\theta + x) \neq \sin \theta + x$. يشير التعبير الأول إلى إزاحة الطور. ويشير التعبير الثاني إلى الإزاحة الرأسية.

عند إزاحة دالة مثلثية رأسيًا عدد k من الوحدات، يكون المستقيم $y = k$ المحور الأفقي الجديد الذي يتحرك التمثيل البياني حوله. ويسمى هذا المستقيم **الخط المتوسط**. ويمكن استخدامه للمساعدة في رسم الإزاحة الرأسية.

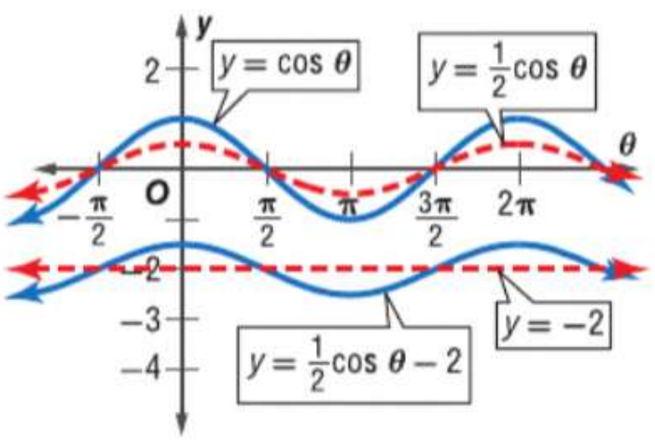


نصيحة دراسية

استخدام الألوان قد يساعدك تمثيل الدالة الأصلية بيانيًا بلون، ثم تطبيق الإزاحة الرأسية والتمثيل البياني للدالة بلون آخر. وبعد ذلك تطبيق التغير في السعة والتمثيل البياني للدالة بلون ثالث.

مثال 2 التمثيل البياني للإزاحات الرأسية

اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط للدالة $y = \frac{1}{2} \cos \theta - 2$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.



السعة: $|a| = \frac{1}{2}$

الفترة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

الإزاحة الرأسية: $k = -2$

الخط المتوسط: $y = -2$

لتمثيل $y = \frac{1}{2} \cos \theta - 2$ بيانيًا. ارسم أولاً الخط المتوسط. ثم استخدمه في تمثيل $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ بيانيًا بعد إزاحة وحدتين لأسفل.

تمرين موجّه

2. اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط للدالة $y = \tan \theta + 3$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح حقوق الطبع والتأليف © محفوظة

يمكنك استخدام الخطوات التالية في التمثيل البياني للدوال المثلثية المتضمنة إزاحات طور وإزاحات رأسية.

ملخص المفهوم التمثيل البياني للدوال المثلثية

$$y = a \sin b(\theta - h) + k$$

السعة: a — الفترة: b — إزاحة الطور: h — الإزاحة الرأسية: k

الخطوة 1 تحديد الإزاحة الرأسية وتمثيل الخط المتوسط بيانيًا.

الخطوة 2 تحديد السعة إن وجدت. واستخدام المستقيمات المتقطعة للإشارة إلى القيمتين العظمى والصغرى للدالة.

الخطوة 3 تحديد فترة الدالة وتمثيل الدالة الصحيحة بيانيًا.

الخطوة 4 تحديد إزاحة الطور وإزاحة التمثيل البياني وفقًا لها.

مثال 3 التمثيل البياني للتحويلات

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية للدالة $y = 3 \sin \frac{2}{3}(\theta - \pi) + 4$. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

السعة: $|a| = 3$

الفترة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = 3\pi$ — تشير الفترة إلى أن التمثيل البياني سوف يتمدد.

إزاحة الطور: $h = \pi$ — سوف تتم إزاحة التمثيل البياني π إلى اليمين.

الإزاحة الرأسية: $k = 4$ — سوف تتم إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لأعلى.

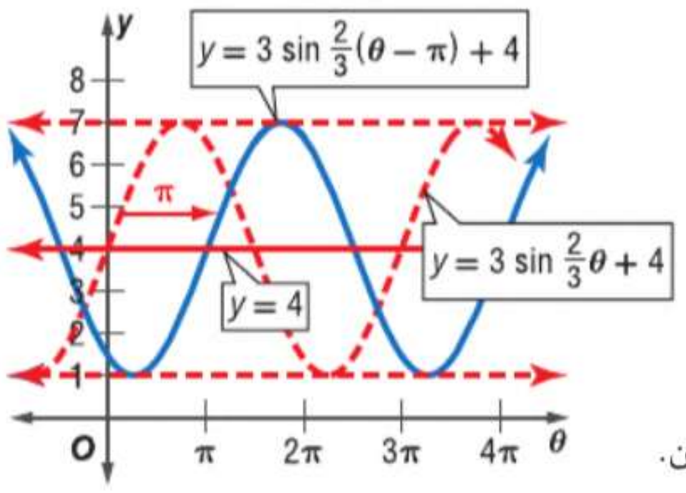
الخط المتوسط: $y = 4$ — سوف يتحرك التمثيل البياني حول المستقيم $y = 4$.

الخطوة 1 تمثيل الخط المتوسط بيانيًا.

الخطوة 2 بما أن السعة تساوي 3. فارسم مستقيمات متقطعة أعلى الخط المتوسط بمقدار 3وحدات وأسفله بمقدار 3وحدات.

الخطوة 3 التمثيل البياني للدالة $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta + 4$ باستخدام الخط المتوسط باعتباره مرجعًا.

الخطوة 4 إزاحة التمثيل البياني عدد πوحدات إلى اليمين.



التحقق يمكنك التحقق من دقة تحويلك عن طريق إيجاد قيمة الدالة مع القيم المختلفة لـ θ وتأكيد أماكنها على التمثيل البياني.

تمرين موجّه

3. اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية للدالة $y = 2 \cos \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - 2$. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

نصيحة دراسية

التحقق من التمثيل البياني

بعد رسم التمثيل البياني لدالة مثلثية؛ اختر قيم θ وجد قيمها في المعادلة للتحقق من التمثيل البياني.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تحدث الموجة الجيبية sine غالبًا في الفيزياء ومعالجة الإشارات والموسيقى والهندسة الكهربية والعديد من المجالات الأخرى.

مثال 4 من الحياة اليومية تمثيل الدوال الدورية

حمام السباحة **يتذبذب ارتفاع الماء في حمام السباحة بين قيمة عظمى قدرها 13 m وقيمة صغرى قدرها 5 m. ويضخ مولد الموجات 6 موجات في الدقيقة. اكتب دالة sine التي تمثل ارتفاع الماء في الزمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.**

الخطوة 1 اكتب معادلة للخط المتوسط. وحدد الإزاحة الرأسية.

$$y = \frac{13 + 5}{2} = 9$$ يقع خط الوسط في المنتصف بين القيمتين العظمى والصغرى.

بما أن الخط المتوسط هو $y = 9$ فإن الإزاحة الرأسية تساوي $k = 9$.

الخطوة 2 جـ ـ ـد السعة.

$$|a| = |13 - 9| = 4$$ جـ ـ ـد الفرق بين قيمة الخط المتوسط والقيمة العظمى.

إذًا، $a = 4$.

الخطوة 3 جـ ـ ـد الفترة.

بما أنه يتم توليد 6 موجات في الدقيقة، فهناك موجة واحدة كل 10ثوانٍ. إذًا، الفترة هي 10ثوانٍ.

$$10 = \frac{2\pi}{|b|}$$ الفترة $= \frac{\pi 2}{|b|}$

$$|b| = \frac{2\pi}{10}$$ جـ ـ ـد الحل لـ $|b|$.

$$b = \pm\frac{\pi}{5}$$ بسّط.

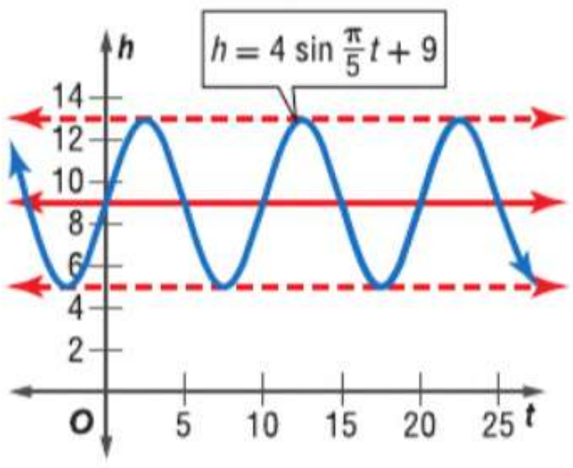
الخطوة 4 اكتب معادلة للدالة.

$$h = a \sin b(t - h) + k$$ اكتب معادلة snie التي تربط بين الارتفاع h والزمن t.

$$= 4 \sin \frac{\pi}{5}(t - 0) + 9$$ التعويض: $a = 4,\ b = \frac{\pi}{5},\ h = 0,\ k = 9$

$$= 4 \sin \frac{\pi}{5}t + 9$$ بسّط.

ثم مثّل الدالة بيانيًا.



الربط بالحياة اليومية

في بعض مسابح الأمواج الاصطناعية، يستطيع المتزحلقون على المياه ركوب أمواج يصل ارتفاعها إلى 70 m.

المصدر: Orlando Wave Pool

انتبه!

الدوال الأصلية غالبًا ما يمكن تمثيل الدالة المثلثية بأكثر من معادلة. على سبيل المثال، التمثيلات البيانية للدالة $y = \cos \theta$ والدالة $y = \sin(\theta + 90°)$ هي نفسها.

تمرين موجّه

4. **مسبح أمواج اصطناعية** يتردد ارتفاع الماء في مسبح أمواج اصطناعية بين 14 m كحد أقصى و 6 m كحد أدنى. تضخ ماكينة توليد الأمواج 5 موجات في الدقيقة. اكتب دالة cosine التي تمثل ارتفاع الماء في زمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

التحقق من فهمك

مثال 1 اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

1. $y = \sin(\theta - 180°)$
2. $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
3. $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
4. $y = \frac{1}{2}\cos(\theta + 90°)$

مثال 2 اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

5. $y = \cos\theta + 4$
6. $y = \sin\theta - 2$
7. $y = \frac{1}{2}\tan\theta + 1$
8. $y = \sec\theta - 5$

مثال 3 **الانتظام** اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

9. $y = 2\sin(\theta + 45°) + 1$
10. $y = \cos 3(\theta - \pi) - 4$
11. $y = \frac{1}{4}\tan 2(\theta + 30°) + 3$
12. $y = 4\sin\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 5$

مثال 4

13. **تدريب** عند ممارسة نشاط جسدي متوسط، يتراوح ضغط الدم عند الإنسان ما بين قيمة عظمى قدرها 130 وقيمة صغرى قدرها 90. ومعدل ضربات قلب الإنسانيساوي 90 ضربة في الدقيقة. اكتب معادلة sine التي تمثل ضغط دم الإنسان P في زمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

14. $y = \cos(\theta + 180°)$
15. $y = \tan(\theta - 90°)$
16. $y = \sin(\theta + \pi)$
17. $y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
18. $y = \tan\frac{1}{2}(\theta + 30°)$
19. $y = 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

مثال 2 اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

20. $y = \cos\theta + 3$
21. $y = \tan\theta - 1$
22. $y = 2\cos\theta - 5$
23. $y = \tan\theta + \frac{1}{2}$
24. $y = 2\sin\theta - 4$
25. $y = \frac{1}{3}\sin\theta + 7$

مثال 3 اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

26. $y = 4\sin(\theta - 60°) - 1$
27. $y = \cos\frac{1}{2}(\theta - 90°) + 2$
28. $y = \tan(\theta + 30°) - 2$
29. $y = 2\tan 2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 5$
30. $y = \frac{1}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 4$
31. $y = \cos 3(\theta - 45°) + \frac{1}{2}$
32. $y = 3 + 5\sin 2(\theta - \pi)$
33. $y = -2 + 3\sin\frac{1}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

مثال 4

34. **المد والجزر** يرتفع مستوى الماء في إحدى الموانئ إلى أقصى ارتفاع له عند 15 m في تمام الساعة 6:00 مساءً ثم ينخفض بعدها إلى أقل مستوى قدره 3 m في تمام 3:00 صباحاً يمكن تمثيل مستوى الماء بدالة sine. اكتب معادلة تمثل الارتفاع h الذي يصل إليه الماء في زمن t ساعات بعد الظهيرة في اليوم الأول.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

35. البحيرات عوامة تحدد مساحة السباحة في إحدى البحيرات تترنح كلما مر بها قارب سريع. ومسافتها d مقاسة بالأمتار من قاع البحيرة تمثلة بالمعادلة $d = 1.8 \sin \frac{3\pi}{4}t + 12$ حيث إن t هي الوقت مقاس بالثواني. مثّل الدالة بيانيًّا. صف أقصى مسافة وأقل مسافة للعوامة من قاع البحيرة عندما يمر بها القارب.

36. الأرجوحة الدوارة افرض أن الأرجوحة الدوارة لها قطر قياسه 520 m تقريبًا وتصنع دورة كاملة خلال 30ثانية. افرض أن العربة السفلية في الأرجوحة تبعد مسافة 5 mمن الأرض. افرض أن الارتفاع أعلى قمة الأرجوحة يمثل الارتفاع عندما يكون الزمن 0. اكتب معادلة لارتفاع العربة h في صورة دالة للزمن t دقيقة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

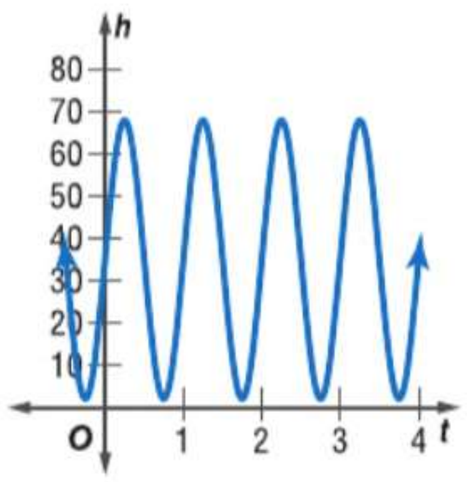
اكتب معادلة لكل إزاحة.

37. $y = \sin x$ 4 وحدات إلى اليمين و 3وحدات لأعلى

38. $y = \cos x$ 5وحدات إلى اليسار ووحدتين لأسفل

39. $y = \tan x$ π من الوحدات إلى اليمين و 2.5 وحدة لأعلى

40. حبل القفز التمثيل البياني الموضح على اليسار يقرّب ارتفاع حبل القفز h مقاسًا بالسنتيمترات في صورة دالة للزمن t مقاسًا بالثواني. أعلى نقطة على التمثيل البياني هي (1.25, 68). وأسفل نقطة هي (2.75, 2).



a. صف ما تعنيه أقصى نقطة وأسفل نقطة في سياق الموقف.

b. ما معادلة الخط المتوسط والسعة والفترة للدالة؟

c. اكتب معادلة للدالة.

41. لعبة الداوّات حصان في لعبة الداوّات يعلو ويدنو 3مرات كلما أتمت لعبة الداوّات دورة كاملة. وأقصى ارتفاع يصل إليه الحصان هو 55 cm. وأقل ارتفاع هو 37 cm. وتدور لعبة الداوّات مرة كل 21 s. افرض أن الحصان يبدأ ويتوقف عند ارتفاعه المتوسط.

a. اكتب معادلة لتمثيل ارتفاع الحصان h في صورة دالة للزمن t ثانية.

b. مثّل الدالّة بيانيًّا.

c. استخدم تمثيلك البياني لتقدير ارتفاع الحصان بعد 8 s . ثم استخدم الحاسبة لإيجاد الارتفاع مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

42. التبرير خلال شهر واحد، تتراوح درجة الحرارة في الخارج بين 40°C و 50°C. يقرّب منحنى cosine التغيير الحاصل في درجة الحرارة، مع ارتفاع يصل إلى 50°C يتحقق كل أربعة أيام.

a. صف السعة والفترة والخط المتوسط في الدالة التي تقرّب درجة ا لحرارة y في اليوم d.

b. اكتب دالة cosine لتقدير درجة الحرارة y في اليوم d.

c. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة.

d. قدر درجة الحرارة في اليوم السابع من الشهر.

جـ ـد الإحداثي الذي يمثل قيمة عظمى لكل تمثيل بياني.

43. $y = -2 \cos (x - \frac{\pi}{2})$ **44.** $y = 4 \sin (x + \frac{\pi}{3})$

45. $y = 3 \tan (x + \frac{\pi}{2}) + 2$ **46.** $y = -3 \sin (x - \frac{\pi}{4}) - 4$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

قارن بين كل زوجين من التمثيلات البيانية.

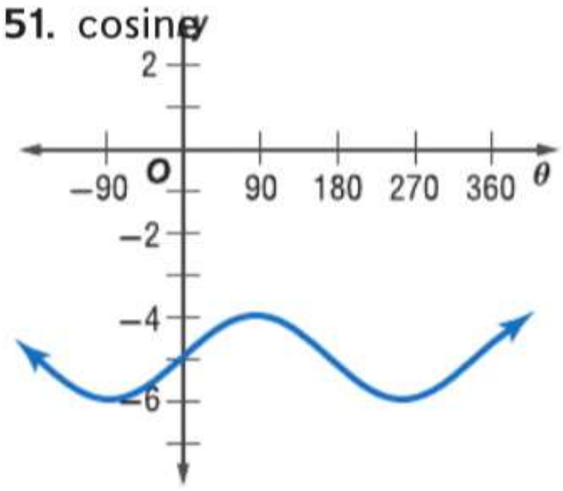
47. $y = -\cos 3\theta$ و $y = \sin 3(\theta - 90°)$

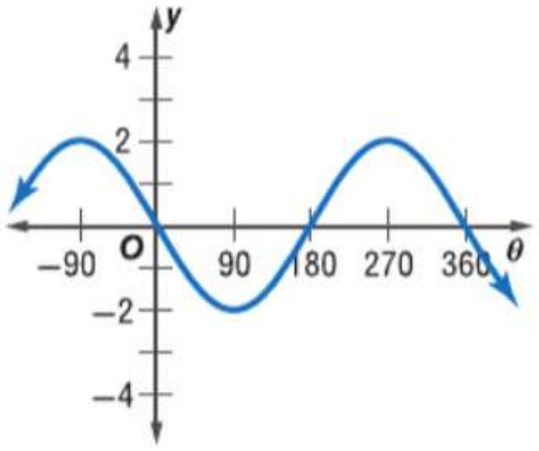
48. $y = 2 + 0.5 \tan \theta$ و $y = 2 + 0.5 \tan (\theta + \pi)$

49. $y = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ و $y = -2 \sin \left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right)$

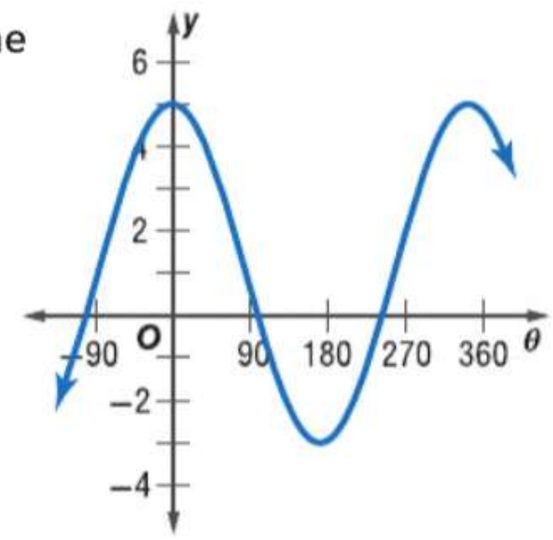
حدد فترة كل دالة. ثم اكتب معادلة للتمثيل البياني باستخدام الدالة المثلثية المحددة.

50. sine **51.** cosine

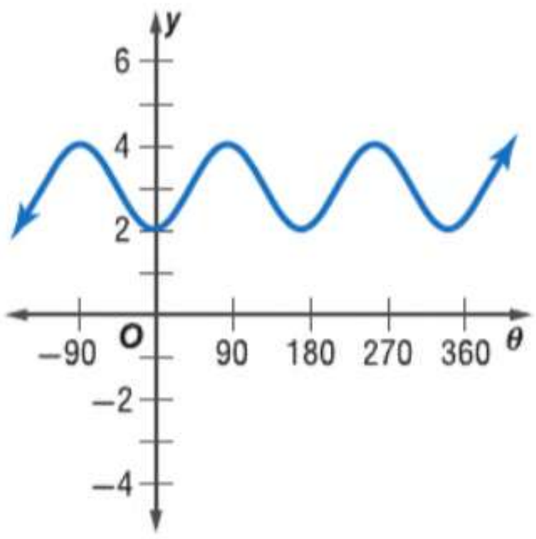




52. cosine



53 sine



اذكر الفترة، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية ثم مثّل الدالة بيانيًا.

54. $y = \csc (\theta + \pi)$ **55.** $y = \cot \theta + 6$

56. $y = \cot \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 2$ **57.** $y = \frac{1}{2} \csc 3(\theta - 45°) + 1$

58. $y = 2 \sec \frac{1}{2}(\theta - 90°)$ **59.** $y = 4 \sec 2 \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - 3$

مسائلمهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

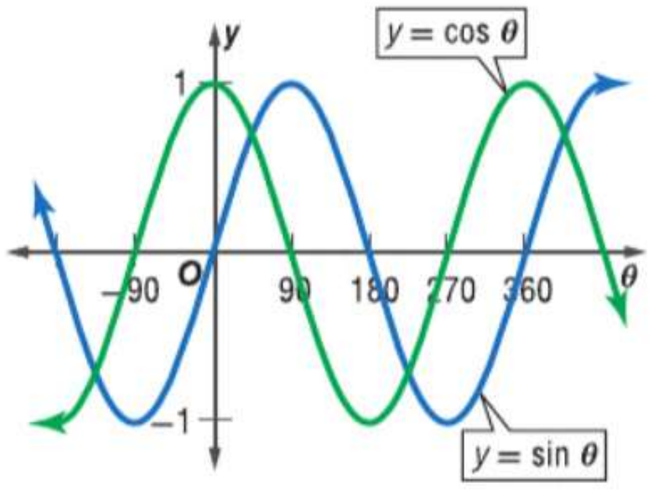
60. الفرضيات إذا أعطيت السعة والفترة لدالة cosine . فهل من الممكن *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم *غير ممكن أبدًا* إيجاد القيمة العظمى والصغرى للدالة. اشرح استنتاجك.

61. التبرير صف وجه اختلاف التمثيل البياني لـ $y = 3 \sin 2\theta + 1$ عن $y = \sin \theta$.

62. الكتابة في الرياضيات صف إزاحتي طور مختلفتين من شأنهما إزاحة منحنى sine على منحنى cosine الموضح على اليسار. ثم اكتب معادلة لمنحنى sine الجديد باستخدام كل إزاحة طور.

63. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالة دورية سعتها تساوي 2 والخط المتوسط عند $y = -3$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

64. التبرير ما عدد التمثيلات البيانية المختلفة لـ sine التي تمر بنقطة الأصل $(n\pi, 0)$؟ اشرح استنتاجك.



McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبارات المعيارية

65. الإجابة الشبكية ما مقدار زيادة التعبير $\frac{3x-1}{4} + \frac{x+6}{4}$ عن x؟

66. فكّك $(a-b)^4$.

A $a^4 - b^4$

B $a^4 - 4ab + b^4$

C $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

D $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

67. جـ ـد حل $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5$.

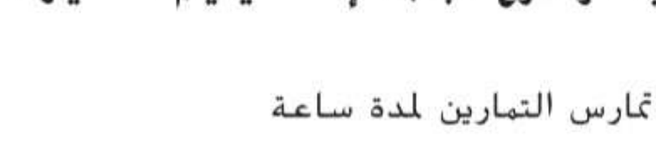
F 7

G 0, 7

H 7, 13

J لا يوجد حل

68. الهندسة باستخدام الأشكال الموضحة أدناه، ما متوسط f و d و c و b و a؟



A 21 **B** 45 **C** 50 **D** 54

مراجعة شاملة

جـ ـد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا. (الدرس 3-11)

69. $y = 2\cos\theta$ **70.** $y = 3\sin\theta$ **71.** $y = \sin 2\theta$

جـ ـد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 2-11)

72. $\sin\frac{4\pi}{3}$ **73.** $\sin(-30^\circ)$ **74.** $\cos 405^\circ$

حدد ما إذا كان كل موقف يصف *استطلاع رأي* أو *تجربة* أو *دراسة وصفية*. ثم حدد العينة، واقترح مجتمعًا إحصائيًا يتم الاختيار منه.

75. انقسمت مجموعة مكونة من 220 بالغًا بطريقة عشوائية إلى مجموعتين. مجموعة تمارس التمارين لمدة ساعة في اليوم والأخرى لا تتمرن. وتمت مقارنة مؤشرات كتلة الجسم حينئذ.

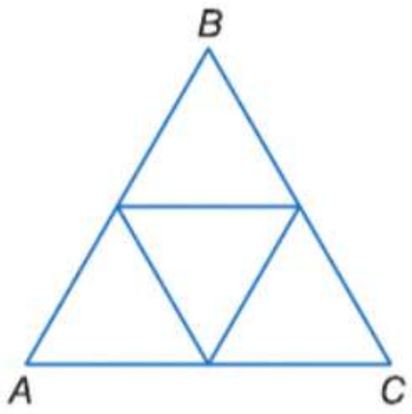
76. اختاومدرب كرة القدم بعضًا من لاعبيه بشكل عشوائي وقدم لهم استبيانًا يسألهم فيه عن عاداتهم اليومية في النوم.

77. اختار معلم 100طالب بشكل عشوائي يعملون في وظائف بدوام جزئي وقارن درجاتهم.

78. الهندسة مثلث متساوي الأضلاع ABC محيطه 39 cm . إذا كانت نقاط المنتصف في جميع الأضلاع متصلة، نتج مثلث متساوي الأضلاع أصغر. افرض أن عملية اتصال نقاط المنتصف في الأضلاع ورسم مثلثات جديدة مستمرة بلا انقطاع.

a. اكتب متسلسلة لا نهائية لتمثيل مجموع محيطات جميع المثلثات.

b. جـ ـد مجموع محيطات جميع المثلثات.



79. البناء تتعرض إحدى شركات البناء لدفع غرامة عن كل يوم تتأخر فيه عن إكمال الجسر. وسوف تكون الغرامة اليومية قدرها AEDaed 4000 عن اليوم الأول ثم تزيد بمقدار AED 4000 a كل يوم. وبحسب الميزانية، لا يمكن للشركة دفع تكلفة غرامات أكثر من AEDaed 60000 إجمالاً. فما أقصى عدد من الأيام يمكنها أن تتأخره؟

مراجعة المهارات

جـ ـد كل قيمة لـ x. قرّب إلى أقرب درجة.

80. $\sin\theta = \frac{7}{8}$ **81.** $\tan\theta = \frac{9}{10}$ **82.** $\cos\theta = \frac{1}{4}$

83. $\cos\theta = \frac{4}{5}$ **84.** $\sin\theta = \frac{5}{6}$ **85.** $\tan\theta = \frac{2}{7}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-9 الدوال المثلثية العكسية

السابق
- قمتَ بتمثيل الدوال المثلثية بيانيًا.

الحالي
1. إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية.
2. إيجاد حل المعادلات باستخدام الدوال المثلثية العكسية.

لماذا؟
- يبلغ طول رف الكتب المائل الموجود إلى اليسار 40 سنتيمترًا من الجدار ويصل إلى ارتفاع 200 سنتيمتر. في الدرس 1-13، تعلمت كيفية استخدام معكوس الدالة المثلثية لإيجاد قياس الزاوية الحادة θ.

$\tan \theta = \frac{15}{75}$ أو 0.2 استخدم دالة tangent.

جـ ـد زاوية تساوي tan 0.2.

2nd [TAN^{-1}] .2 ENTER 11.30993247

إذًا فقياس θ يساوي حوالي 11°.

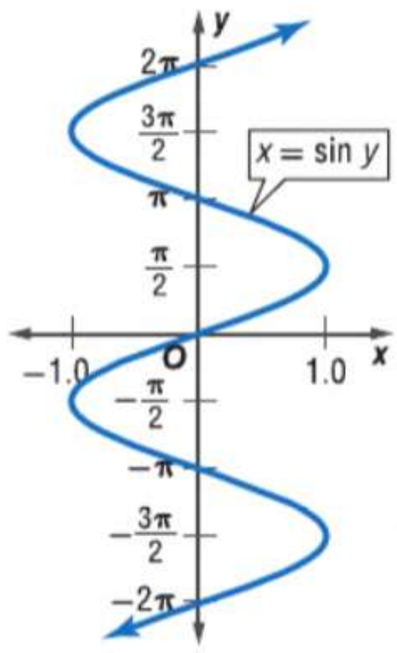
المفردات الجديدة

قيم أساسية
principal values
دالة قوس الجيب
Arcsine function
دالة قوس جيب التمام
Arccosine function
دالة قوس الظل
Arctangent function

ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 الدوال المثلثية العكسية إذا عرفت قيمة نسبة مثلثية لزاوية يمكنك استخدام معكوسها لإيجاد الزاوية. تذكر أن معكوس الدالة هو العلاقة التي يكون فيها جميع قيم x و y معكوسة. معكوس $y = \sin x$, $x = \sin y$. ممثل بيانيًا إلى اليسار.



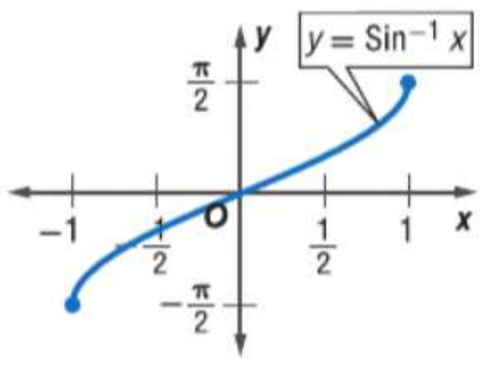
لاحظ أن المعكوس ليس بدالة، حيث يوجد الكثير من قيم y لكل قيمة من قيم x. وإذا قيّدت مجال دالة sine بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$، يصبح المعكوس دالة.

يطلق على قيم المجال المقيد **القيم الأساسية**. توضح الدوال المثلثية ذات المجالات المقيدة بحروف كبيرة.

- $y = \text{Sin } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ و $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
- $y = \text{Cos } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ و $0 \le x \le \pi$.
- $y = \text{Tan } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ و $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

يمكنك استخدام الدوال ذات المجالات المقيدة لتحديد الدوال المثلثية العكسية. ويعتبر معكوس دوال sine وCosine و tangent هي دالة **Arcsine** و **Arccosine** و **Arctan** على التوالي.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية العكسية

دالة عكسية	الرموز	المجال	المدى	النموذج
Arcsine قوس جيب الزاوية	$y = \text{Arcsin } x$ $y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$	
Arccosine قوس جيب تمام الزاوية	$y = \text{Arccos } x$ $y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$	
Arctan قوس ظل الزاوية	$y = \text{Arctan } x$ $y = \text{Tan}^{-1} x$	جميع الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$	

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

في العلاقة $y = \cos^{-1} x$. إذا كان $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$ و $300°$ وجميع الزوايا التي تشترك في ضلع الانتهاء مع هذه الزوايا. في الدالة $y = \text{Cos}^{-1} x$. إذا كان $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$ فقط.

مراجعة المصطلحات

الدوال العكسية إذا كان f و f^{-1} دالتين عكسيتين، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال 1 إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية

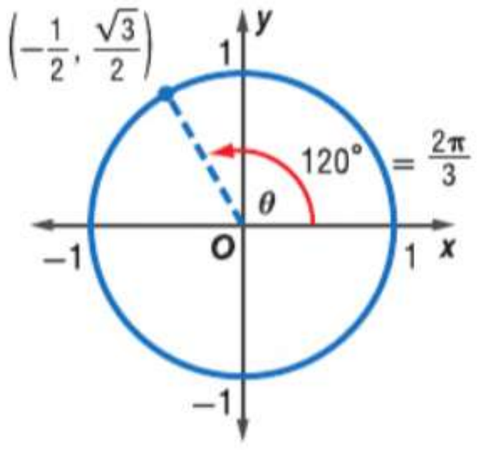
جـ ـ ـد كل قيمة مما يلي. اكتب قياسات الزوايا بالدرجات والراديان.

a. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

جـ ـ ـد الزاوية θ حيث $0° \le \theta \le 180°$ التي تساوي قيمة Cosine لها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 1 استخدام دائرة الوحدة.

جـ ـ ـد نقطة على دائرة الوحدة تكون قيمة إحداثي x لها هي $-\frac{1}{2}$.



عندما تكون $\theta = 120°$، فإن $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

إذًا، $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

الطريقة 2 استخدام الحاسبة.

خطوات خطلوت العملية علي الحاسبة::الحاسبة: 2nd [COS⁻¹] (−) 1 ÷ 2) ENTER 120

إذًا، $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

b. Arctan 1

جـ ـ ـد الزاوية θ حيث $-90° \le \theta \le 90°$ التي تساوي قيمة ظلها 1.

واتخطوات العملية علي الحاسبة:: 2nd [TAN⁻¹] 1 ENTER 45 إذًا، $\text{Arctan } 1 = 45°$ أو $\frac{\pi}{4}$.

نصيحة دراسية

قياس الزاوية تذكر أنه عند إيجاد قيمة دالة مثلثية عكسية، ستكون النتيجة قياس زاوية.

تمرين موجّه

1A. $\text{Cos}^{-1} 0$

1B. $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

عند إيجاد قيمة مع وجود عدة دوال مثلثية، استخدم ترتيب العمليات للحل.

مثال 2 إيجاد القيمة المثلثية

جـ ـ ـد $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$. قرب إلى أقرب جزء من مئة.

استخدم حاسبة.

خطلوت العملية علي الحاسبة::: TAN 2nd [COS⁻¹] 1 ÷ 2)) ENTER 1.732050808

إذًا، $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 1.73$.

التحقق $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60°$ و $\tan 60° \approx 1.73$. إذًا، الإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

جـ ـ ـد قيمة كل مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من مئة.

2A. $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$

2B. $\cos\left(\text{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

2 إيجاد حل المعادلة باستخدام المعكوس

يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية بالحل لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 3 على الاختبار المعياري إيجاد قياس الزاوية

إذا كان $\sin \theta = -0.35$، فجد θ.

A $-20.5°$ **B** $-0.6°$ **C** $0.6°$ **D** $20.5°$

قراءة فقرة الاختبار

sine θ هو -0.35 . يمكن كتابة ذلك في الصورة $\theta = \text{Arcsin}\ (-0.35)$.

حَل فقرة الاختبار

استخدم حاسبة.

خطوات العملية علي الحاسبة: الحاسبة: 2nd [SIN^{-1}] (−) .35 ENTER -20.48731511

إذًا، $\theta \approx -20.5°$. الإجابة هي A.

تمرين موجّه

3. إذا كان $\tan \theta = 1.8$. فجد θ.

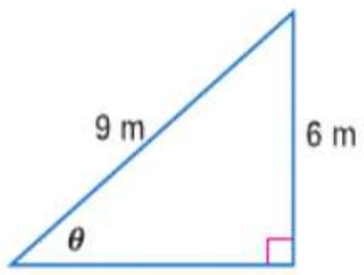
F $0.03°$ **G** $29.1°$ **H** $60.9°$ **J** لا يوجد حل

نصيحة **عند حل الاختبار**

تقدير الاحتمالات تقيّد دالة sin قياسات الزوايا المحتملة إلى الربع الأول أو الرابع. ولأن -0.35 سالبة، فابحث عن قياس الزاوية في الربع الرابع.

يمكن استخدام الدوال المثلثية العكسية لتحديد قياس زاويا الميل والانخفاض والارتفاع.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام الدوال المثلثية العكسية



التزلج على المياه يبلغ ارتفاع منحدر تزلج على ا لمياه 6 m وطوله 9 m كما هو مبين على اليسار. جـ ـد الدالة المثلثية العكسية التي يمكن استخدامها لإيجاد θ. الزاوية التي يشكلها المنحدر مع المياه. ثم جـ ـد قياس الزاوية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

نظرًا لمعرفة قياسي الضلع المقابل والوتر، يمكن استخدام دالة sine.

$\sin \theta = \frac{6}{9}$ دالة sine

$\theta = \text{Sin}^{-1} \frac{6}{9}$ دالة معكوس sine

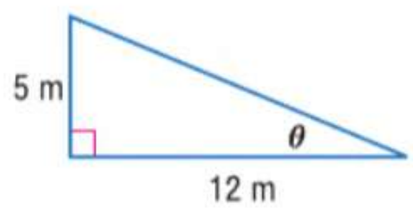
$\theta \approx 41.8°$ استخدم حاسبة.

إذًا، فإن زاوية المنحدر تساوي حوالي $41.8°$.

التحقق باستخدام حاسبتك، $\sin 41.8 \approx 0.66653 \approx \frac{6}{9}$.
إذًا، الإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

4. التزلج موضح على اليسار مسار تزلج. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ. الزاوية التي يشكلها المسار معأرض الوادي. ثم جـ ـد الزاوية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



مهنة **من الحياة اليومية**

مسؤول علوم التربية الرياضية

يقدم مسؤول علوم التربية الرياضية معلومات التربية الرياضية إلى اللاعبين و المدربين وأولياء الأمور. وينفذ برامج بالاختبار والتدريب والعلاج للرياضيين. ويحبذ لهذه الوظيفة الحصول على درجة الماجستير في علم التربية الرياضية.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

التحقق من فهمك

مثال 1 **جـ ـد قيمة كل مما يلي. اكتب قياسات الزاوية بالدرجات والراديان.**

1. $\text{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$ **2.** $\text{Arctan}\,(-\sqrt{3})$ **3.** $\text{Arccos}\,(-1)$

مثال 2 **جـ ـد قيمة كل مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.**

4. $\cos\left(\text{Arcsin}\,\frac{4}{5}\right)$ **5.** $\tan\,(\text{Cos}^{-1}\,1)$ **6.** $\sin\left(\text{Sin}^{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

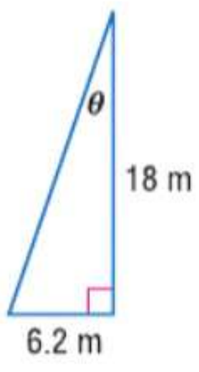
مثال 3 **7. الاختيار من متعدد** إذا كان $\text{Sin}\,\theta = 0.422$. فجـ ـد θ.

A 25° **B** 42° **C** 48° **D** 65°

حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

8. $\text{Cos}\,\theta = 0.9$ **9.** $\text{Sin}\,\theta = -0.46$ **10.** $\text{Tan}\,\theta = 2.1$

مثال 4 **11. التزحلق على الجليد** يوضح إلى اليسار مقطع عرضي لأنبوب ضخم للتزحلق على الجليد. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ، الزاوية التي تصف انحدار الأنبوب الضخم. بعد ذلك، جـ ـد قياس الزاوية لأقرب درجة.



التدريب وحل المسائل

مثال 1 **جـ ـد قيمة كل مما يلي. اكتب قياسات الزاوية بالدرجات والراديان.**

12. $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **13.** $\text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **14.** $\text{Sin}^{-1}\,(-1)$

15. $\text{Tan}^{-1}\,\sqrt{3}$ **16.** $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **17.** $\text{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

مثال 2 **جـ ـد قيمة كل مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.**

18. $\tan\,(\text{Cos}^{-1}\,1)$ **19.** $\tan\left[\text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **20.** $\cos\left(\text{Tan}^{-1}\,\frac{3}{5}\right)$

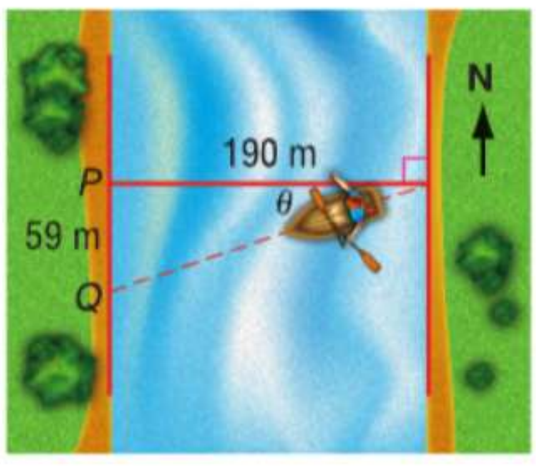
21. $\sin\left(\text{Arctan}\,\sqrt{3}\right)$ **22.** $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\,\frac{4}{9}\right)$ **23.** $\sin\left[\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

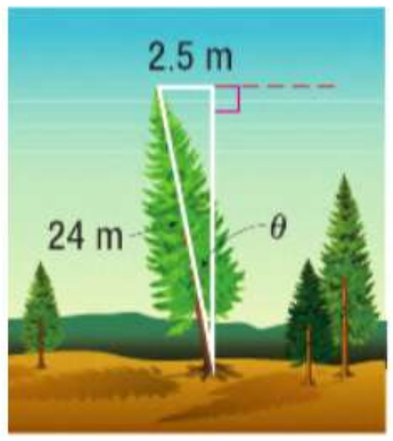
24. $\text{Tan}\,\theta = 3.8$ **25.** $\text{Sin}\,\theta = 0.9$ **26.** $\text{Sin}\,\theta = -2.5$

27. $\text{Cos}\,\theta = -0.25$ **28.** $\text{Cos}\,\theta = 0.56$ **29.** $\text{Tan}\,\theta = -0.2$

مثال 4 **30. التبرير المنطقي** يتحرك قارب غربًا عبر نهر يبلغ عرضه 190 m. وبسبب التيار، انتهى بالقارب المطاف عند النقطة Q والتي تبعد 59 m عن نقطة وجهته P. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ الزاوية التي انحرف بها القارب جنوب المحور الأفقي. ثم جـ ـد قياس الزاوية بالتقريب إلى أقرب جزء من عشرة.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



31. الأشجار تميل شجرة طولها 24 m بمقدار 2.5 m يسار المحور الرأسي كما هو موضح في الشكل. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها في إيجاد θ، الزاوية التي تميل بها الشجرة. ثم جـ ـ ـد قياس الزاوية مقربًا إلى أقرب درجة.

32. القيادة منحنى فرعي على الطريق السريع يبلغ نصف قطره 52 m وصمم لحركةالسيارات بأمان بسرعة 45 km في الساعة (أو 12.5 m في الثانية). تمثل المعادلة أدناه زاوية θ للمنحنى. ما قياس الزاوية مقربًا إلى أقرب درجة؟

$$\tan \theta = \frac{(12.5 \text{ m/s})^2}{(52 \text{ m})(9.8 \text{ m/s}^2)}$$

33. ألعاب القوى يقوم رامي الكرة الحديدية برمي كرة بسرعة مبدئية مقدارها 15 m/s. ويمثل التعبير $\frac{15 \text{ m/s } (\sin x)}{9.8 \text{ m/s}^2}$ الزمن بالثانية الذي بلغت فيه الكرة الحديدية أقصى ارتفاع لها. في التعبير، تمثل x الزاوية التي رميت بها الكرة الحديدية. وإذا كانت الكرة قد بلغت أقصى ارتفاع في 1.0 s. فما قياس الزاوية التي رميت بها؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

جـ ـ ـد حل كل معادلة حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

34. $\csc \theta = 1$ **35.** $\sec \theta = -1$ **36.** $\sec \theta = 1$

37. $\csc \theta = \frac{1}{2}$ **38.** $\cot \theta = 1$ **39.** $\sec \theta = 2$

40. التمثيلات المتعددة افرض أن $y = \text{Cos}^{-1} x$.

a. بيانيًا ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة. واذكر المجال والمدى.

b. رمزيًا اكتب الدالة باستخدام رموز مختلفة.

c. عدديًا اختر قيمة للمتغير x بين -1 و 0. ثم جـ ـ ـد قيمة دالة معكوس Cosine. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

d. تحليليًا قارن التمثيلات البيانية لكل من $y = \cos x$ و $y = \text{Cos}^{-1} x$.

41. التحدي حدد ما إذا كان $\cos (\text{Arccos } x) = x$ لجميع قيم x صحيحًا أم خطأ. وإذا كان خطأ، فقدم مثالاً عكسيًا.

42. التفكير النقدي تحل كل من نجاة ونسرين $\cos \theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$. هلأي منهما على صواب. اشرح استنتاجك.

نجاة	نسرين
$\cos \theta = 0.3$	$\cos \theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 162.5°$	$\cos^{-1} 0.3 = 72.5°$

43. التبرير اشرح العلاقة بين مجال $y = \text{Sin}^{-1} x$ ومدى $y = \text{Sin } x$.

44. مسألة غير محددة الإجابة اكتب معادلة بدالة قوس الجيب ومعادلة بدالة sine تتضمن كلاهما نفس قياس الزاوية.

45. الكتابة في الرياضيات قارن وبين الفرق بين العلاقتين $y = \tan^{-1} x$ و $y = \text{Tan}^{-1} x$. اذكر معلومات حول المجال والمدى.

46. التبرير اشرح كيف يكون $\text{Sin}^{-1} 8$ و $\text{Cos}^{-1} 8$ غير معرّفين بينما يكون $\text{Tan}^{-1} 8$ معرفًا.

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبارات المعيارية

47. بسّط $\dfrac{\frac{2}{x}+2}{\frac{2}{x}-2}$.

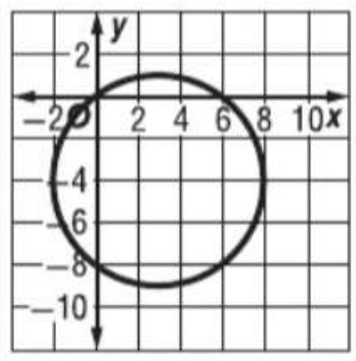
A $\dfrac{1+x}{1-x}$

B $\dfrac{2}{x}$

C $\dfrac{1-x}{1+x}$

D $-x$

48. الإجابة القصيرة ما معادلة التمثيل البياني أدناه؟



49. إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x,\ g(x) = 4 - 2x$. فما $g[f(x)]$؟

F $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

G $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

H $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

J $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

50. إذا كان g عددًا موجبًا، فأي مما يلي يساوي $12g$؟

A $\sqrt{144g}$

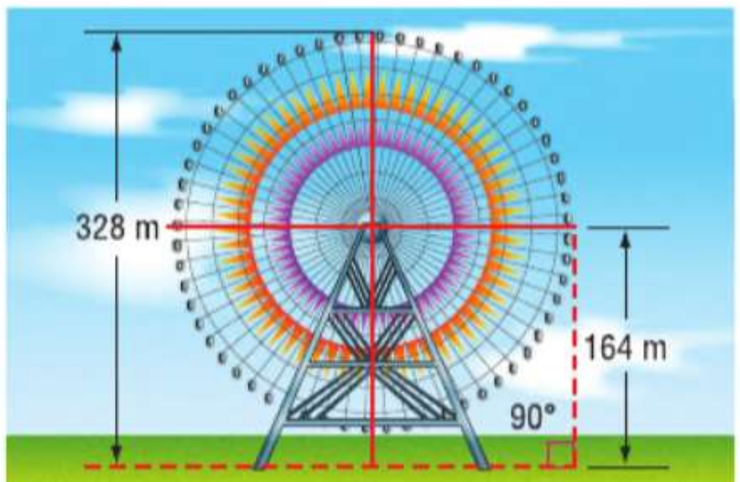
B $\sqrt{12g^2}$

C $\sqrt{24g^2}$

D $6\sqrt{4g^2}$

مراجعة شاملة

51. ألعاب الملاهي كوزمو كلوك 21 هي عجلة دوارة ضخمة بمدينة ملاهي في اليابان يبلغ قطرها 328 m افترض أن راكبًا دخلها عند ارتفاع 0 m. ثم دار بزيادات 90° عكس اتجاه الساعة. يوضح الجدول قياسات زوايا الدوران وارتفاع الراكب بالأمتار عن مستوى الأرض. (الدرس 8-11)



الزاوية	الارتفاع	الزاوية	الارتفاع
0°	0	450°	164
90°	164	540°	328
180°	328	630°	164
270°	164	720°	0
360°	0		

a. إن الدالة التي تمثل البيانات هي $y = 164 \cdot [\sin (x - 90°)] + 164$. حدد الإزاحة الرأسية والسعة والفترة وإزاحة الطور للتمثيل البياني.

b. اكتب معادلة باستخدام sine تمثل موقع الراكب على عجلة فيينا العملاقة في النمسا، والتي يبلغ قطرها 200 متر. تحقق بتعيين النقاط والمعادلة بحاسبة تمثيل بياني.

52. المد والجزر يحدث أقصى ارتفاع مسجل يبلغه المد في حوض ميناس، بنوفا سكوشا في كندا، حيث يبلغ مدى المد والجزر 16.4 m . ويكون المد والجزر في موضع توازنه عندما يكون بمستواه الطبيعي أي بمنتصف أدنى نقطة وأقصى نقطة له. اكتب معادلة تمثل الارتفاع h للمد والجزر. افترض أن المد والجزر يكون عند موضع توازنه عند $t = 0$ التي يبدأ عندها المد، وأن المد يكمل دورة كاملة في 12 ساعة. (الدرس 7-11)

حُلّ كل من المعادلات التالية.

53. $\log_3 5 + \log_3 x = \log_3 10$ **54.** $\log_4 a + \log_4 9 = \log_4 27$

55. $\log_{10} 16 - \log_{10} 2t = \log_{10} 2$ **56.** $\log_7 24 - \log_7 (y + 5) = \log_3 8$

مراجعة المهارات

جد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية مما يلي.

57. $\cos 3\pi$ **58.** $\tan 120°$ **59.** $\sin 300°$ **60.** $\sec \frac{7\pi}{6}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

النسب المثلثية في المثلثات القائمة (الدرس 1-11)

- $\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$, $\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$, $\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$, $\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$, $\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$, $\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

قياسات الزوايا والنسب المثلثية للزوايا العامة
(الدرسان 11-2 و 11-3)

- يحدد قياس الزاوية بمقدار الدوران من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.
- يمكنك إيجاد القيمة الدقيقة لست دوال مثلثية لـ θ. بافتراض إحداثيات نقطة $P(x, y)$ على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الـ Sines وقانون الـ Cosines (الدرسان 11-4 و 11-5)

- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

الدوال المثلثية العكسية والدائرية (الدرسان 11-6 و 11-9)

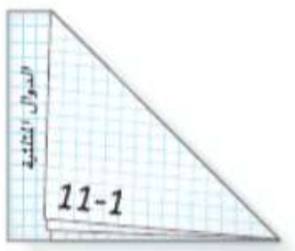
- إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية θ يتقاطع في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$.
- $y = \text{Sin } x$ إذا كان $y = \sin x$ و $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًّا (الدرس 11-7)

- للدوال المثلثية بالصيغة $y = a\sin b\theta$ و $y = a\cos b\theta$.
  تكون السعة $|a|$ s والفترة $\frac{360°}{|b|}$ أو $\frac{2\pi}{b}$.
- فترة $y = a\tan b\theta$ هي $\frac{180°}{|b|}$ أو $\frac{\pi}{|b|}$.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

ambiguous case حالة مبهمة	period فترة
amplitude السعة	periodic function دالة دورية
angle of depression زاوية الانخفاض	phase shift إزاحة الطور
angle of elevation زاوية الارتفاع	principal values قيم أساسية
Arccosine دالة قوس جيب التمام function	quadrantal angle زاوية ربعية
	radian راديان
Arcsine function دالة قوس الجيب	reference angle زاوية مرجع
Arctangent function دالة قوس الظل	secant القاطع
central angle الزاوية المركزية	sine
circular function دالة دائرية	solving a triangle حل المثلث
cosecant قاطع التمام	standard position الوضع القياسي
cosine	tangent ظل الزاوية
cotangent ظل التمام	terminal side ضلع الانتهاء
coterminal angles زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء	trigonometric function دالة مثلثية
cycle دورة	trigonometric ratio النسبة المثلثية
frequency التردد	trigonometry حساب المثلثات
initial side ضلع الابتداء	unit circle دائرة الوحدة
Law of Cosines Cosines قانون الـ	vertical shift إزاحة رأسية
Law of Sines Sines قانون الـ	
midline خط متوسط	

مراجعة المصطلحات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي *صواب* أم *خطأ*. وإذا كانت *خطأ* ، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خطّ بحيث تصبح الجملة صحيحة.

1. يستخدم قانون الـ Cosines في حل المثلثات عند معرفة قيم زاويتين وأي أضلاع.
2. الزاوية التي توجد على المستوى الإحداثي تكون في الوضع القياسي إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل وكان أحد شعاعيها موجودًا على المحور الأفقي x الموجب.
3. الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء هي زوايا في الوضع القياسي لها نفس ضلع الانتهاء.
4. يطلق على الإزاحة الأفقية لدالة دورية إزاحة الطور.
5. معكوس دالة sine هو دالة cosecant.
6. تساوي دورة التمثيل البياني لدالة sine أو دالة Cosine نصف الفارق بين القيمة الكبرى والقيمة الصغرى للدالة.

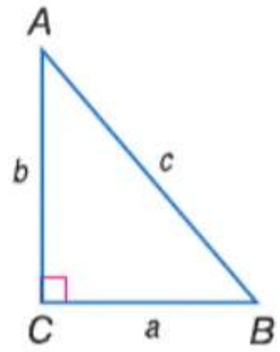
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11 دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

11-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة

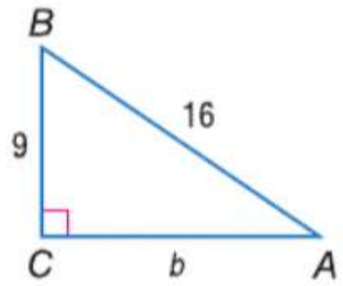
جـ ـ ـد حل $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



7. $c = 12, b = 5$
8. $a = 10, B = 55°$
9. $B = 75°, b = 15$
10. $B = 45°, c = 16$
11. $A = 35°, c = 22$
12. $\sin A = \frac{2}{3}, a = 6$
13. **شاحنات** يرتفع ظهر شاحنة متحركة 1 m عن الأرض. ما الطول الذي يفترض أن يكون عليه المنحدر الممتد من ظهر الشاحنة لتكون زاوية ارتفاع المنحدر 20°؟

مثال 1

جـ ـ ـد حل $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



جـ ـ ـد قيمة b.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$9^2 + b^2 = 16^2$$
$$b = \sqrt{16^2 - 9^2}$$
$$b \approx 13.2$$

جـ ـ ـد قيمة A.

$$\sin A = \frac{9}{16}$$

استخدم حاسبة.

قياس الزاوية إلى أقرب درجة، $A = 34°$.

جـ ـ ـد قيمة B.

$$34° + B \approx 90°$$
$$B \approx 56°$$

إذًا، $b \approx 13.2$ و $A \approx 34°$ و $B \approx 56°$.

11-2 الزوايا وقياس الزاوية

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

14. 215°
15. $\frac{5\pi}{2}$
16. -3π
17. $-315°$

جـ ـ ـد زاوية واحدةذات قياس موجب وزاوية واحدةذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء.

18. 265°
19. $-65°$
20. $\frac{7\pi}{2}$

21. **الدراجة** يؤدي إطار دراجة 8 لفات في الثانية الواحدة. ويبلغ نصف قطر الإطار 38 cm. جـ ـ ـد الزاوية θ التي يدور من خلالها الإطار في الثانية الواحدة بمقياس الراديان.

مثال 2

أعد كتابة 160° بالراديان.

$$160° = 160°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$$
$$= \frac{160\pi}{180} \text{ راديان} = \frac{8\pi}{9}$$

مثال 3

جـ ـ ـد زاوية واحدةذات قياس موجب وزاوية واحدةذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء لزاوية 150°.

زاوية موجبة:

$150° + 360° = 510°$ اجمع 360°.

زاوية سالبة:

$150° - 360° = -210°$ اطرح 360°.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

جـ ـ ـد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية مما يلي.

22. cos 135°

23. tan 150°

24. sin 2π

25. cos $\frac{3\pi}{2}$

يتضمن ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي كل نقطة. جـ ـ ـد القيم الدقيقة لست دوال مثلثية للزاوية θ.

26. $P(-4, 3)$

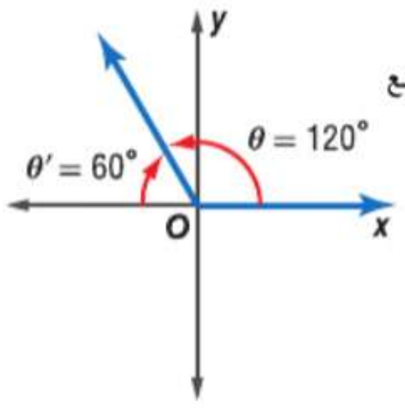
27. $P(5, 12)$

28. $P(16, -12)$

29. الكرة رُميت كرة من أعلى مبنى بزاوية 70° وسرعة متجهة أولية قدرها 5 m/s . المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية للكرة x هي $x = v_0 (\cos \theta) t$ حيث إن v_0 هي السرعة الأولية وθ هي الزاوية التي ضُربت بها و t هو الزمن بالثواني. ما المسافة التقريبية التي ستقطعها الكرة تقريبًا بعد 10 s؟

مثال 4

جـ ـ ـد القيمة لـ ـ sin 120°.



حيث إن ضلع الانتهاء للزاوية 120° يقع في الربع الثاني، فإن زاوية المرجع θ' هي 180° − 120° أو 60°. دالة sine موجبة في الربع الثاني، إذًا $\sin 120° = \sin 60°$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

مثال 5

يتضمن ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي النقطة عند (6, 5). جـ ـ ـد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ ـ θ.

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ أو $\frac{5\sqrt{61}}{61}$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$ أو $\frac{6\sqrt{61}}{61}$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{5}{6}$

$\csc \theta = \frac{r}{y}$ أو $\frac{\sqrt{61}}{5}$

$\sec \theta = \frac{r}{x}$ أو $\frac{\sqrt{61}}{6}$

$\cot \theta = \frac{x}{y}$ أو $\frac{6}{5}$

11-4 قانون الـ Sines

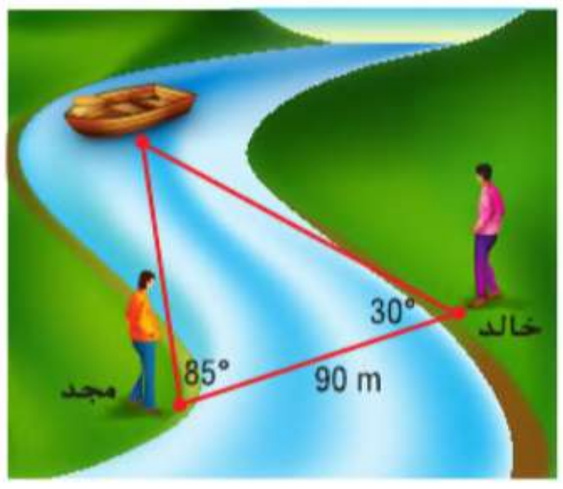
حدد ما إذا كان كل مثلث *بلا* حل، أم له حل *واحد*، أم له *حلان*. ثم جـ ـ ـد حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

30. $C = 118°, c = 10, a = 4$

31. $A = 25°, a = 15, c = 18$

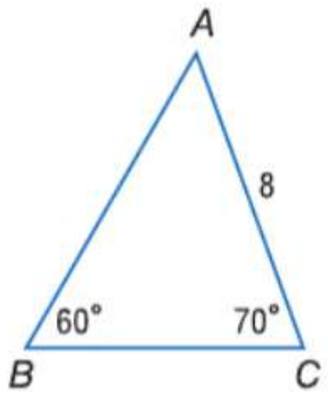
32. $A = 70°, a = 5, c = 16$

33. القارب يقف خالد ومجد على الضفاف المتقابلة لنهر. كم يبعد خالد عن القارب؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم لأمر.



مثال 6

جـ ـ ـد حل $\triangle ABC$.



أولاً، جـ ـ ـد قياس الزاوية الثالثة.

$60° + 70° + a = 180°$

$A = 50°$

والآن استخدم قانون الـ Sines وجـ ـ ـد a و c. اكتب معادلتين، كل منها بمتغير واحد.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 50°}{a}$

$a = \frac{8 \sin 50°}{\sin 60°}$

$a \approx 7.1$

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 70°}{c}$

$c = \frac{8 \sin 70°}{\sin 60°}$

$c \approx 8.7$

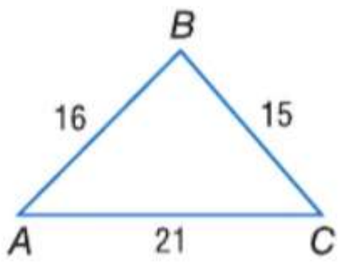
إذًا، $A = 50°$ و $c \approx 8.7$ و $a \approx 7.1$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

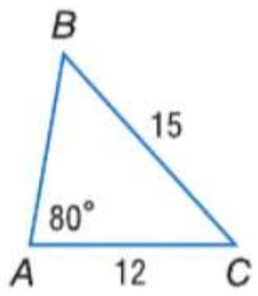
11-5 قانون الـ Cosines

حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ كل مثلثٍ عبر البدء بقانون الـ *Sines* أو قانون الـ *Cosines*. ثمّ حلّ كل مثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

34.



35.



36. $C = 75°, a = 5, b = 7$

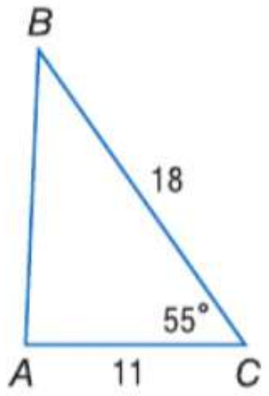
37. $A = 42°, a = 9, b = 13$

38. $b = 8.2, c = 15.4, A = 35°$

39. الزراعة يرغب مزارع في إحاطة قطعة من أرضه بسياج. ويبلغ طول ضلعين من أضلاع حقله المثلث الشكل 120 m و 325 m ويبلغ قياس الزاوية المحصورة بينهما 70°. ما قدر السياج التي سيحتاجه المزارع؟

مثال 7

جـ ـ ـد حل $\triangle ABC$ حيث $C = 55°$ و $b = 11$ و $a = 18$.



تذكر لك المعطيات قياس ضلعين وزاوية محصورة. ابدأ بتصميم رسم تخطيطي واستخدام قانون الـ Cosines لتحديد c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 182 + 112 - 2(18)(11) \cos 55°$$

$$c^2 \approx 217.9$$

$$c \approx 14.8$$

ثانيًا، يمكنك استخدام قانون الـ Sines لإيجاد قياس الزاوية A.

$$\frac{\sin A}{18} \approx \frac{\sin 55°}{14.8}$$

$$\sin A \approx \frac{18 \sin 55°}{14.8}$$ أو A تساوي حوالي $85.0°$

قياس الزاوية B يساوي تقريبًا

$$180 - (85.0 + 55) = 40.0°$$

وبالتالي، $c \approx 14.8$ و $A \approx 85.0°$ و $B \approx 40.0°$.

11-6 الدوال الدائرية والدورية

جـ ـ ـد القيمة الدقيقة لكل دالة.

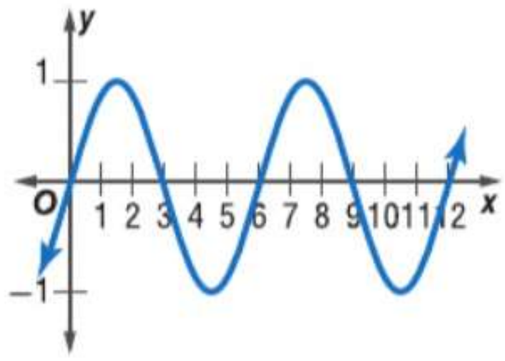
40. $\cos(-210°)$

41. $(\cos 45°)(\cos 210°)$

42. $\sin -\frac{7\pi}{4}$

43. $\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$

44. حدد فترة الدالة.



45. تكمل عجلة قطرها 418 cm دورات في دقيقة واحدة. ما فترة الدالة التي تصف ارتفاع بقعة على الحافة الخارجية للعجلة كدالة للزمن؟

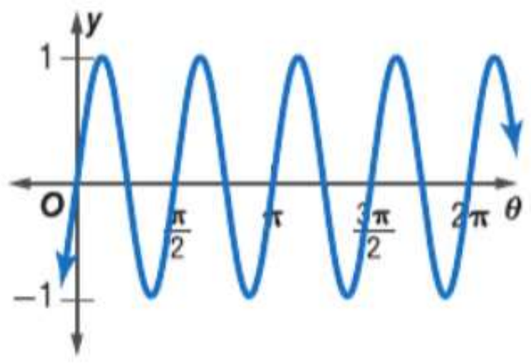
مثال 8

جـ ـ ـد القيمة الدقيقة لـ $\sin 510°$.

$$\sin 510° = \sin(360° + 150°)$$
$$= \sin 150°$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال 9

حدد فترة الدالة أدناه.



يتكرر النمط نفسه عند $\frac{\pi}{2}$، π، وهكذا. إذًا، الفترة هي $\frac{\pi}{2}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11-7 التمثيل البياني للدوال المثلثية

جـ ـ ـد السعة،إن وجدت، والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

46. $y = 4 \sin 2\theta$

47. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

48. $y = 3 \csc \theta$

49. $y = 3 \sec \theta$

50. $y = \tan 2\theta$

51. $y = 2 \csc \frac{1}{2}\theta$

52. عندما تقفز هناء على منصّة قفز تهتز المنصة بتردد 10 هرتز. افترض أن السعة تساوي 1.5 m. اكتب معادلة sine لتمثيل تردد منصة القفز y كدالة للزمن t.

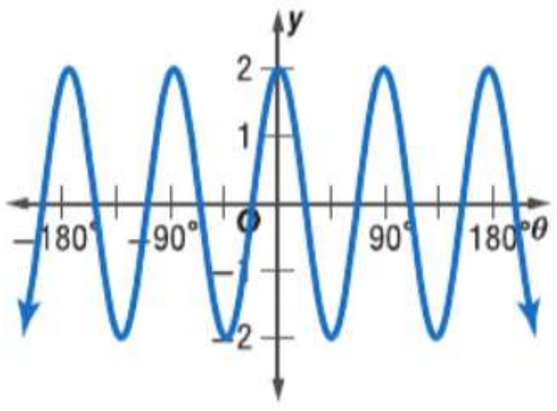
مثال 10

جـ ـ ـد سعة وفترة $y = 2 \cos 4\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

السعة: $|a| = |2|$ أو 2. التمثيل البياني ممدد رأسيًا. ولذا فالقيمة العظمى هي 2 والقيمة الصغرى هي -2.

الفترة:

$$\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$$



11-8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

اذكر الإزاحة الرأسية والسعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

53. $y = 3 \sin [2(\theta - 90°)] + 1$

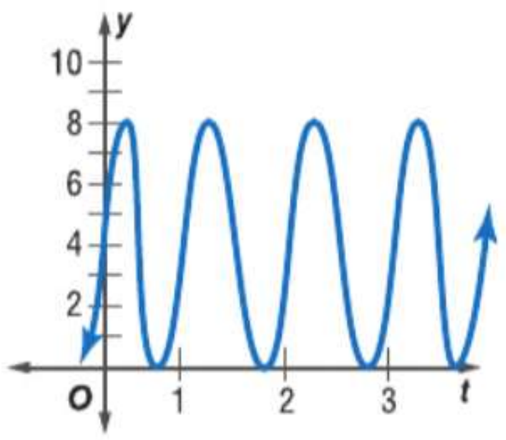
54. $y = \frac{1}{2} \tan [2(\theta - 30°)] - 3$

55. $y = 2 \sec \left[3\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 2$

56. $y = \frac{1}{2} \cos \left[\frac{1}{4}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 1$

57. $y = \frac{1}{3} \sin \left[\frac{1}{3}(\theta - 90°)\right] + 2$

58. يبين التمثيل البياني أدناه قيمة تقريبية للارتفاع y لحبل يقوم شخصان بتدويره كدالة للزمن t بالثواني. اكتب معادلة للدالة.



مثال 11

اذكر الإزاحة الرأسية السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = 2 \sin \left[3\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] + 4$. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

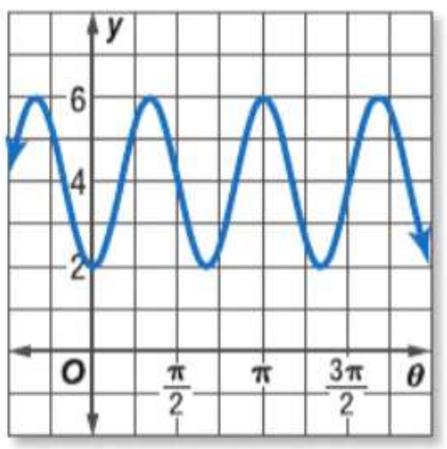
حدد قيم k و a و b و h.

$k = 4$. إذًا الإزاحة الرأسية تساوي 4.

$a = 2$. إذًا تساوي السعة 2.

$b = 3$. إذًا الفترة تساوي $\frac{2\pi}{|3|}$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

$h = -\frac{\pi}{2}$. تساوي إزاحة الطور $\frac{\pi}{2}$ إلى اليسار.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-9 الدوال المثلثية العكسية

جـ ـ ـد قيمة كل دالة مثلثية عكسية. اكتب قياسات الزوايا بالدرجات والراديان.

59. $\text{Sin}^{-1}(1)$

60. Arctan (0)

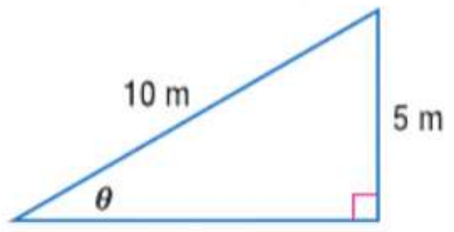
61. $\text{Arcsin}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

62. $\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

63. $\text{Tan}^{-1}1$

64. Arccos 0

65. المنحدرات يبلغ ارتفاع منحدر دراجات 5 m ويبلغ طوله 10 m كما هو موضح أدناه. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها في إيجاد θ وهي الزاوية التي يشكلها المنحدر مع الأرض. ثم جـ ـ ـد الزاوية.



جـ ـ ـد قيم كل دالة مثلثية عكسية. قرب إلى أقرب جزء من المئة إذا لزم الأمر.

66. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

67. $\sin\left(\text{Arcsin}\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

68. $\sin\left(\text{Tan}^{-1}0\right)$

حُلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

69. $\text{Tan}\ \theta = -1.43$

70. $\text{Sin}\ \theta = 0.8$

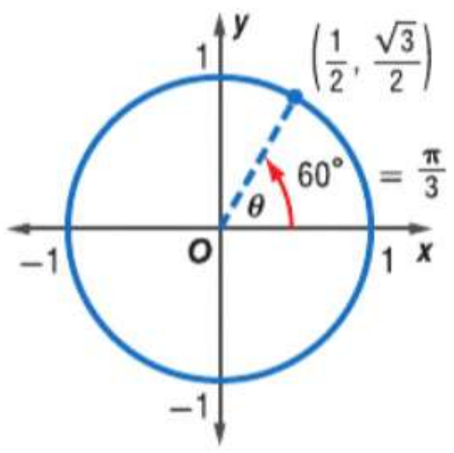
71. $\text{Cos}\ \theta = 0.41$

مثال 12

جـ ـ ـد قيمة $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$. اكتب قياسات الزوايا بالدرجات والراديان.

جـ ـ ـد الزاوية θ لـ ـ $0° \le \theta \le 180°$ التي تساوي قيمة cosine لها $\frac{1}{2}$.

استخدام دائرة الوحدة.



جـ ـ ـد نقطة على دائرة الوحدة التي يكون الإحداثي x لها يساوي $\frac{1}{2}$. عندما يكون $\theta = 60°$، $\text{Cos}\ \theta = \frac{1}{2}$.

إذًا، $\text{Cos}^{-1} = 60°$ أو $\frac{\pi}{3}$.

مثال 13

جـ ـ ـد قيمة $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$. قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

استخدم حاسبة.

خطالحاسبة:خطوات العملية علي الحاسبة: :الحاسبة:

SIN 2nd [TAN^{-1}] 1 ÷ 2))

ENTER 0.4472135955

إذًا، $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 0.45$.

مثال 14

إذا كان $\text{Cos}\ \theta = 0.72$، فجـ ـ ـد θ.

استخدم حاسبة.

خطوات خطوات العملية علي الحاسبة: الحاسبة:

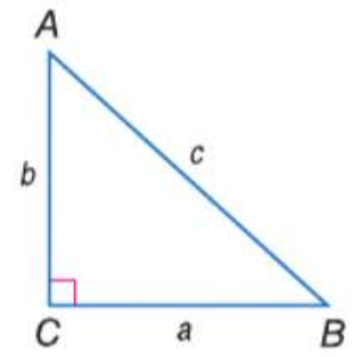
2nd [COS^{-1}] .72) ENTER 43.9455195623

إذًا، $\theta \approx 43.9°$.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح والتأليف © محفوظة حقوق الطبع

تدريب على الاختبار

حُـلّ $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



1. $A = 36^\circ, c = 9$
2. $a = 12, A = 58^\circ$
3. $B = 85^\circ, b = 8$
4. $a = 9, c = 12$

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

5. 325°
6. -175°
7. $\frac{9\pi}{4}$
8. $-\frac{5\pi}{6}$

9. حدد ما إذا كان $\triangle ABC$ الذي يحتوي على الزوايا $A = 110^\circ$ و $a = 16$ و $b = 21$ لا يوجد له حل أم حل واحد أم حلان. ثم جـ ـ ـد حل المثلث إن أمكن. وقرب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

جـ ـ ـد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. اكتب قياس الزوايا بالدرجات.

10. $\cos(-90^\circ)$
11. $\sin 585^\circ$
12. $\cot \frac{4\pi}{3}$
13. $\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$
14. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{4}{5}\right)$
15. $\text{Arccos}\ \frac{1}{2}$

16. يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. جـ ـ ـد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

17. **الاختيار من متعدد** ما الزاوية التي تكون قيمة ظلها وقيمة sine سالبتين؟

A 65°

B 120°

C 265°

D 310°

18. **الملاحة** تقيس الطيّارات والسفن المسافة بالأميال البحرية. ويمكن استخدام القانون 1 ميل بحري يساوي $6077 - 31\cos 2\theta$ قدم، حيث θ هي خط العرض بالدرجات، في إيجاد الطول التقريبي للميل البحري عند خط عرض معين. جـ ـ ـد طول الميل البحري عندما يكون خط العرض يساوي 120°.

جـ ـ ـد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

19. $y = 2\sin 3\theta$
20. $y = \frac{1}{2}\cos 2\theta$

21. **الاختيار من متعدد** ما فترة الدالة $y = 3\cot\theta$؟

F 120°

G 180°

H 360°

J 1080°

22. حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ $\triangle XYZ$ الذي معطياته $y = 15$ و $z = 9$ و $X = 105^\circ$ عبر البدء بقانون الـ Sines أم قانون الـ Cosines. ثمّ حلّ المثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

23. $y = \cos(\theta + 180)$
24. $y = \frac{1}{2}\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

25. **العجلات** ساقية مياه قطرها 20 m. وتكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن الارتفاع عند أعلى الساقية يمثل الارتفاع عندما الزمن يساوي 0. اكتب معادلة ارتفاع النقطة h في الرسم التخطيطي أدناه كدالة للزمن t. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11 التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام حاسبة علمية

تعتبر الحاسبة العلمية وحاسبة التمثيل البياني منالأدوات الفعالة لحل المسائل. وكما رأيت، تتضمن بعض مسائلالاختبارات التي تواجههاخطوات أو علميات حسابية تتطلب استخدام حاسبة علمية.

إستراتيجيات استخدام حاسبة علمية

الخطوة 1

تعرف على الوظائف المتعددة التي تقوم بها الحاسبة العلمية إلى جانب المواقف التي ينبغي استخدامها فيها.

- **الرمز العلمي**— لحساب الأعداد الكبيرة
- **الدوال الأسيّة واللوغاريتمية**—مسائل النمو والاضمحلال والمرابحة المركبة
- **الدوال المثلثية**— المسائل المتعلقة بالزوايا والمثلثات ومسائل القياسات غير المباشرة
- **الجذور التربيعية والجذور النونية *n*** — المسافة على المستوى الإحداثي. نظريةفيثاغورث

الخطوة 2

استخدم الحاسبة العلمية أو حاسبة التمثيل البياني في حل المسألة.

- تذكر الحل بأكبر قدر ممكن من الكفاءة. فيمكن إجراء بعض الخطوات ذهنيًا أو باليد، بينما في خطوات أخرى يجب استخدام الحاسبة.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخ دم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

عندما تقف خديجة على مسافة 18 m من قاعدة شجرة، فإنها تشكل زاوية مقدارها 57° من أعلى الشجرة. فما ارتفاع الشجرة إلى أقرب جزء من عشرة؟

A 27.7 m

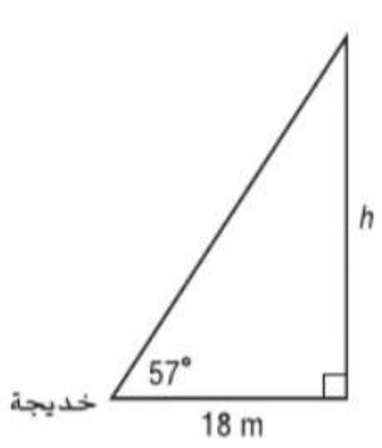
B 28.5 m

C 29.2 m

D 30.1 m

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

اقرأ المسألة بعناية. أعطيت بعض القياسات وطلب منك إيجاد ارتفاع الشجرة. قد يكون من المفيد أن ترسم أولاً نموذجًا للمسألة.



استخدم دالة مثلثية لربط الأطوال وقياس الزاوية في المثلث القائم.

$\text{tangent } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ تعريف نسبة tangent

$\tan 57° = \frac{h}{18}$ التعويض.

تحتاج إلى إيجاد قيمة $\tan 57°$ في الحل لإيجاد قيمة ارتفاع الشجرة h. استخدم حاسبة علمية.

$1.53986 \approx \frac{h}{18}$ استخدم حاسبة.

$27.71748 \approx h$ اضرب كل طرف في 18.

يبلغ ارتفاع الشجرة حوالي 27.7 m. الإجابة الصحيحة هي A.

التمارين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. تقلع طائرة وترتفع بسرعة ثابتة. بعد التحرك 800 m أفقيًا. ارتفعت الطائرة 285 m رأسيًا. ما زاوية الارتفاع للطائرة أثناء الإقلاع والارتفاع المبدئي؟

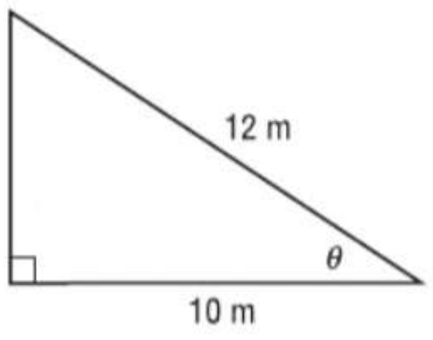
A 15.6°

B 18.4°

C 19.6°

D 22.3°

2. ما قياس زاوية منحدر الدراجات أدناه؟



F 26.3°

G 28.5°

H 30.4°

J 33.6°

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

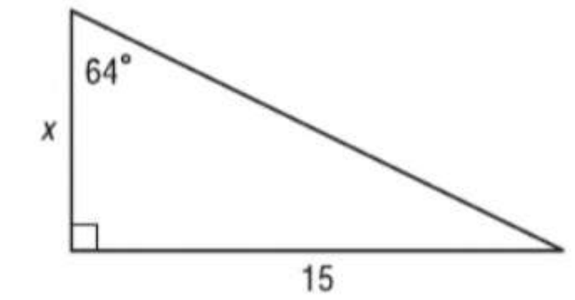
11 تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 11

الاختيار من متعدّد

اقرأكل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو فيأي ورقة أخرى.

1. ما قيمة x؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



A 6.5

B 6.9

C 7.1

D 7.3

2. يقود حسام دراجته بسرعة 21 km/h ويمكنه قطع حلقة التدريب 10مرات في الوقت الذي يستغرقه أخوه الأصغر لقطع حلقة التدريب 8مرات. ما التقدير المنطقي لسرعة الأخ الأصغر لحسام؟

F بين 14 km/h و 15 km/h

G بين 15 km/h و 16 km/h

H بين 16 km/h و 17 km/h

J بين 17 km/h و 18 km/h

3. افرض أن محيط عجلة دوارة يبلغ 68 m. وتدور العجلة 12° في كل مرة يتم التقاط راكب جديد بها. فكم تكون المسافة التي تتحركها عندما تدور العجلة 12°؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

A 7.1 m

B 7.5 m

C 7.8 m

D 14.2 m

4. ما ميل المستقيم الموازي لـ $y - 2 = 4(x + 1)$؟

F -4

G $-\frac{1}{4}$

H $\frac{1}{4}$

J 4

5. ما القيمة الدقيقة لـ $\sin 240°$؟

A $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B $-\frac{1}{2}$

C $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. ما حل نظام المعادلات المبين أدناه؟

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -5x + 3y - 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = 11 \end{cases}$$

F (0, 3, 3)

G (2, 5, 3)

H لا يوجد حل

J عدد لا نهائي من الحلول

7. جـ ـد قيمة m في المثلث MNO إذا كان $n = 12.4$ cm و $M = 35°$ و $N = 74°$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm

B 8.5 cm

C 14.6 cm

D 35.9 cm

8. دُ رتب نتائج اقتراع حديث في المصفوفة.

	لصالح	ضد
المقترح 1	1553	771
المقترح 2	689	1633
المقترح 3	2088	229

بناء على هذه النتائج، أي النتائج لا تكون صالحة؟

F يوجد 771 تصويتًا ضد المقترح 1.

G عدد المصوتين ضد المقترح 1 أكبر من عدد المصوتين للمقترح 2.

H فرصة فوز المقترح 2 ضئيلة.

J عدد المصوتين للمقترح 1 أكثر من عدد المصوتين للمقترح 3.

9. أي من التمثيلات البيانية للمعادلات التالية يكون متناظرًا حول المحور الرأسي y؟

A $y = x^2 + 3x - 1$

B $y = -x^2 + x$

C $y = 6x^2 + 9$

D $y = 3x^2 - 3x + 1$

10. ما الباقي عند قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

F -11

G -1

H 1

J 11

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 7 استخدم قانون الـ Sines في حل مسألة المثلث.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

11. يُمكن تمثيل الـ سرعة التي تقطعها أمواج تسونامي، أو موجة المد، بالمعادلة $s = 356\sqrt{d}$. حيث s تمثل السرعة بالكيلومترات في الساعة و d تمثل متوسط عمق المياه بالكيلومترات. وقد توصلنا إلى أن أمواج تسونامي تقطع 145 km/h. ما متوسط عمق المياه؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

12. الإجابة الشبكية افرض أنك أودعت مبلغ AED 500 في حساب يدفع نسبة مرابحة مركبة نصف سنوية قدرها 5.4%. جـ ـد قيمة الحساب بالدرهم مقربًا إلى أقرب فلس بعد 10سنوات.

13. لكي يظل الحصان بصحة جيدة، يحتاج إلى تناول 5 kg من التبن كل يوم.

a. اكتب معادلة لتمثيل مقدار التبن اللازم للحفاظ على صحة x من الأحصنة لعدد d من الأيام.

b. هل تمثل معادلتك تغيرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًا؟ اشرح سبب اختيارك.

c. ما مقدار التبن الذي تحتاجه ثلاثة من الأحصنة في شهر يوليو؟

14. الإجابة الشبكية ما نصف قطر الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 28 = 0$؟

15 تتدرب بدرية لتجري سباق 10 km. ويوضح الجدول أدناه الأزمنة التي حققتها في العديد من سباقات طولها 1 km. وترد الأزمنة بالدقائق. صِف المركز وفكك البيانات باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

7.25	8.10
7.40	6.75
7.20	7.35
7.10	7.25
8.00	7.45

16. الإجابة الشبكية يستمر نمط المربعات أدناه إلى ما لا نهاية. مع إضافة مزيد من المربعات في كل خطوة. فكم عدد المربعات في الخطوة العاشرة؟

الخطوة 1 الخطوة 2 الخطوة 3

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

17. توضح ساعات حمدة بوظيفتها الصيفية لأسبوع واحد في الجدول أدناه. وتحصل على AED 6 في الساعة.

ساعات عمل حمدة	
الأحد	6
الاثنين	6
الثلاثاء	4
الأربعاء	0
الخميس	2
الجمعة	0
السبت	8

a. اكتب تعبيرًا لإجمالي ما تكسبه حمدة أسبوعيًا.

b. جـ ـد قيمة التعبير من الجزء a باستخدام خاصية التوزيع.

c. تعمل أمل مع حمدة وتحصل أيضًا على AED 6 في الساعة. فإذا كان إجمالي ما ربحته أمل هذا الأسبوع AED 192 اكتب معادلة وحلها لإيجاد عدد الساعات الإضافية التي عملت بها أمل أكثر من حمدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 12

المتطابقات والمعادلات المثلثية

Chapter Sourced From: 12. Trigonometric Identities and Equations, from Algebra 2 Ch

السابق

- لقد مثّلت الدوال المثلثية بيانيًا وحددت الفترة والسعة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - استخدام المتطابقات المثلثية والتحقق من صحتها.
  - استخدام متطابقات مجموع الزوايا والفرق بينها.
  - استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها
  - حل المعادلات المثلثية.

لماذا؟ ▲

- **الإلكترونيات** يمكن تمثيل الكثير من النواحي الخاصة بالإلكترونيات باستخدام الدوال المثلثية. تنقل أجهزة المذياع والتلفاز والهاتف الخلوي إضافةً إلى الإنترنت اللاسلكي إشاراتها جميعا باستخدام أمواج لا سلكية تمثّلها دوال مثلثية. ويمكن إيجاد مقدار الطاقة في أداةٍ إلكترونيةٍ عبر استخدام معادلةٍ مثلثية.

Chapter 12 © 2014 McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

حلّل كثيرات الحدود التالية إلى عواملها الأولية. وإذا لم تكن قابلةً للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

1. $-16a^2 + 4a$
2. $5x^2 - 20$
3. $x^3 + 9$
4. $2y^2 - y - 15$
5. **الهندسة** تساوي مساحة قطعةٍ مستطيلةٍ من الورق المقوى $x^2 + 6x + 8$ سنتيمترات مربعة. فإذا كان طول قطعة الورق المقوى $(x + 4)$ سنتيمترًا، فكم يساوي عرضها؟

حـلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

6. $x^2 + 6x = 0$
7. $x^2 + 2x - 35 = 0$
8. $x^2 - 9 = 0$
9. $x^2 - 7x + 12 = 0$
10. **البستنة** تبني خديجة حوضا للأزهار في الفناء الخلفي. وتنوي أن تكون مساحة الحوض $42\ cm^2$. جـــد القيم الممكنة لـ x.

جـــد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

11. $\sin 45°$
12. $\cos 225°$
13. $\tan 150°$
14. $\sin 120°$
15. **ألعاب الملاهي** يمكن إيجاد المسافة من أعلى نقطةٍ في الأرجوحة الدوارة وبين سطح الأرض عبر ضرب $30\ m$ في $\sin 90°$. فما ارتفاع الأرجوحة الدوارة حين تكون عند منتصف المسافة بين أعلى نقطةٍ وبين الأرض؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حلّل $x^3 + 2x^2 - 24x$ إلى عواملها الأولية.

$x^3 + 2x^2 - 24x = x(x^2 + 2x - 24)$

من المفترض أن ناتج ضرب معاملات حدود x يساوي -24، ومن المفترض أن يساوي مجموعها 2. ناتج ضرب العددين 6 و -4 يساوي -24 ويساوي مجموعهما 2.

$x(x^2 + 2x - 24) = x(x + 6)(x - 4)$

مثال 2

حـلّ المعادلة التالية $x^2 + 6x + 5 = 0$ عن طريق التحليل إلى العوامل.

$x^2 + 6x + 5 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 5)(x + 1) = 0$	التحليل إلى العوامل.
$x + 5 = 0$ أو $x + 1 = 0$	
$x = -5$ أو $x = -1$	

مجموعة الحلول هي $\{-5, -1\}$.

مثال 3

جـــد القيمة الدقيقة لـ $\cos 135°$.

زاوية المرجع تساوي $180° - 135°$ أو $45°$.

$\cos 45°$ يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$. بما أن الزاوية $135°$ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

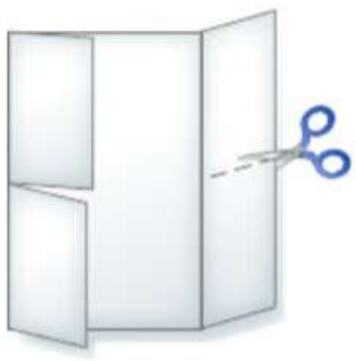
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفردات جديدةٍ أثناء دراستك للوحدة 12. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظم مواردك.

المطويات منظم الدراسة

المتطابقات المثلثية والمعادلات المثلثية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 12 حول المتطابقات المثلثية والمعادلات المثلثية. ابدأ بورقةٍ قياسها 17″ × 11″ وأربع أوراق رسم بياني.

1 **اطوِ** الأضلاع القصيرة للورقة التي قياسها 17″ × 11″ لتلتقي بمنتصف الورقة.

2 **قُص** كل لسان إلى نصفين كما هو موضح.



3 **قُص** أربع أوراق من ورقة الرسم البياني إلى نصفين واطو كل نصف ورقة إلى نصفين.

4 **أدخل** النصفين المطويين تحت كل من الألسنة الأربعة وضع دبابيس على طول الطيّة. سمِّ كل لسان كما هو موضح.

المفردات الجديدة

متطابقة مثلثية	trigonometric identity
متطابقة ناتج القسمة	quotient identity
متطابقة عكسية	reciprocal identity
متطابقة فيثاغورس	Pythagorean identity
متطابقة الزاويتين المتتامتين	cofunction identity
متطابقة الزاوية السالبة	negative angle identity
معادلة مثلثية	trigonometric equation

مراجعة المصطلحات

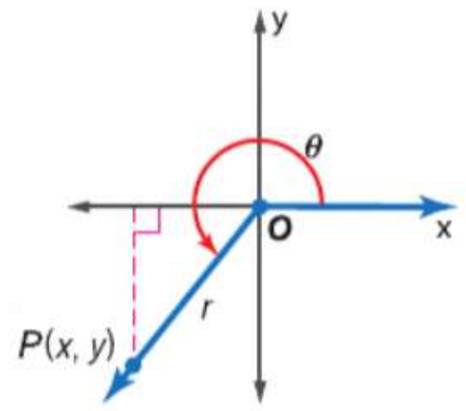
القانون هو جملة رياضية تعبر عن العلاقة بين كميات بعينها

المتطابقة هي معادلة تبقى صحيحةً لجميع قيم المتغيرات التي تضمها

النسب المثلثية لكل زاوية قياسها θ هناك نقطة $P(x, y)$ على ضلع الانتهاء، بحيث يكون $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. والنسبالمثلثية للزاوية θ هي كالتالي.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y}$$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12-1 المتطابقات المثلثية

السابق

- لقد وجـــدت قيم دوال مثلثية.

الحالي

1 استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم المثلثية.

2 استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط التعابير.

لماذا؟

- تدعى كمية الضوء التي يقدّمها مصدرٌ لسطحٍ *بالاستضاءة*. وترتبط الاستضاءة E – مقدرةً بوحدة "قدم شمعة" على سطحٍ ما – ببعد السطح R عن مصدر الضوء. يمكن استخدام القانون $\theta = \frac{I}{ER^2}$ حيث تمثل I شدّة مصدر الضوء مقدرة بالشمعة وتمثل θ الزاوية بين حزمة الضوء ومستقيم عمودي على السطح – في الحالات التي تكون الإضاءة فيها مهمة، كالتصوير الضوئي.

المفردات الجديدة

متطابقة مثلثية
trigonometric identity

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

1 إيجاد القيم المثلثية يمكن كتابة المعادلة أعلاه بالصورة $E = \frac{I \cos \theta}{R^2}$. هذا مثال عن متطابقة مثلثية. **المتطابقة المثلثية** معادلة تحتوي على نسبة مثلثية، أو أكثر وهي صحيحةٌ لكلّ القيم التي يكون فيها كل تعبيرٍ في المعادلة معرّفًا.

إذا كنت تستطيع أن تثبت أن قيمةً محددةً للمتغير في المعادلة تجعل المعادلة خاطئة، إذًا فعليك أن تقدم مثالا مضادًا. ويكفي مثالٌ مضادٌ واحدٌ لإثبات أن معادلةً ما ليست متطابقة.

المفهوم الأساسي المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات ناتج القسمة

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$ — $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$

المتطابقات العكسية

$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$, $\csc \theta \neq 0$ — $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$

$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$, $\sec \theta \neq 0$ — $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$

$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$, $\cot \theta \neq 0$ — $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$, $\tan \theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ — $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ — $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ — $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ — $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$

متطابقات الزوايا السالبة

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ — $\cos(-\theta) = \cos \theta$ — $\tan(-\theta) = -\tan \theta$

يطلق على متطابقات الزوايا السالبة في بعض الأحيان اسم متطابقات الدوال الزوجية والفردية.

المتطابقة $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ صحيحة إلا من أجل قياسات زوايا من قبيل 90° و 270° و ... و $90° + k180°$. حيث k عدد صحيح. يساوي cosine لكلٍّ من قياسات هذه الزوايا، إذًا $\tan \theta$ ليس معرفًا عندما $\cos \theta = 0$. وثمة متطابقةٌ مشابهةٌ لذلك هي $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية. ويمكنك إيجاد قيمٍ تقريبيةٍ باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مثال 1 استخدام المتطابقات المثلثية

a. جـــد القيمة الدقيقة لـ θ إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{4}$ و $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ بطرح $\sin^2 \theta$ من كل طرف.

$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$ عوّض $\frac{1}{4}$ بدلا من $\sin \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{16}$ بتربيع $\frac{1}{4}$.

$\cos^2 \theta = \frac{15}{16}$ اطرح: $\frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$ جـــد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن θ سالبة. ولذلك، $\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد إجابةٍ تقريبية.

الخطوة 1 جـــد $\text{Arcsin } \frac{1}{4}$.

$\sin^{-1} \frac{1}{4} \approx 14.48°$ استخدم حاسبة.

نظرًا إلى أن $90° < \theta < 180°$، فإن $\theta \approx 180° - 14.48°$ أو حوالي $165.52°$.

الخطوة 2 جـــد $\cos \theta$.

عوّض θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3 قارن مع القيم الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0.97$

$0.97 \approx -0.968$ ✓

b. جـــد القيمة الدقيقة لـ $\csc \theta$ إذا كانت $\cot \theta = -\frac{3}{5}$ و $270° < \theta < 360°$.

$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$ متطابقة فيثاغورس

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2 \theta$ عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلا من $\cot \theta$.

$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2 \theta$ بالتربيع $-\frac{3}{5}$.

$\frac{34}{25} = \csc^2 \theta$ اجمع: $\frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$.

$\pm \frac{\sqrt{34}}{5} = \csc \theta$ خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc \theta$ سالبة. وهكذا فإن $\csc \theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

تمرين موجّه

1A. جـــد $\sin \theta$ إذا كانت $\cos \theta = \frac{1}{3}$ و $270° < \theta < 360°$.

1B. جـــد $\sec \theta$ إذا كانت $\sin \theta = -\frac{2}{7}$ و $180° < \theta < 270°$.

نصيحة دراسية

الأرباع فيما يلي جدول لمساعدتك في تذكر أيّ القيم تكون موجبةً وأيها تكون سالبةً في كل ربع.

الدالة	+	−
$\sin \theta$	1, 2	3, 4
$\cos \theta$	1, 4	2, 3
$\tan \theta$	1, 3	2, 4
$\csc \theta$	1, 2	3, 4
$\sec \theta$	1, 4	2, 3
$\cot \theta$	1, 3	2, 4

2 تبسيط التعابير

تبسيط التعابير يعني تبسيط تعبيرٍ يضمّ نسب مثلثية كتابة ذلك التعبير في صورة قيمةٍ عدديةٍ بدلالة نسبةٍ مثلثيةٍ واحدةٍ في حال كان ذلك ممكنًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 تبسيط التعابير

بسط التعبير $\frac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\left(\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}\right)}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \text{ و } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

تمرين موجّه

بسط كل تعبير مما يلي.

2A. $\frac{\tan^2\theta \csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

2B. $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1 - \cos^2\theta)$

نصيحة دراسية

التبسيط من الأسهل في أغلب الأحيان كتابة جميع التعابير بدلالة sine و/أو cosine.

ويمكن أن يكون تبسيط التعابير المثلثية مفيدًا عند حل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية تبسيط التعابير واستخدامها

الإضاءة **راجع بداية الدرس.**

a. أكتب الصيغة بدلالة E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 \sec\theta = I \qquad \text{اضرب كل طرف بـ } RE^2.$$

$$ER^2 \frac{1}{\cos\theta} = I \qquad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{E}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \text{اقسم كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اضرب كل طرف في } \theta.$$

b. هل المعادلة الواردة في الجزء a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$؟ اشرح.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad \text{اضرب كل طرف بـ } E.$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اقسم كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسط.}$$

لا؛ ليست المعادلتان متكافئتين. تبسط المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ إلى $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$.

الربط بتاريخ الرياضيات

أريابهاتا (476-550 ميلادي)

لعلّ أريابهاتا هو الأشهر من بين علماء الرياضيات الهنود. وقد ارتبط اسمه بصورةٍ وثيقةٍ بموضوع الحساب المثلثي. إذ كان أول من أدخل الدوال المثلثية العكسية وحساب المثلثات الكروية. كما حسب أريابهاتا أيضا القيم التقريبية للعدد باي إضافةً للدوال المثلثية.

تمرين موجّه

3. أعد كتابة $\cot^2\theta - \tan^2\theta$ بدلالة $\sin\theta$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$.**

1. إذا كانت $\cot \theta = 2$، فجـــد $\tan \theta$.

2. إذا كانت $\sin \theta = \frac{4}{5}$، فجـــد $\cos \theta$.

3. إذا كانت $\cos \theta = \frac{2}{3}$، فجـــد $\sin \theta$.

4. إذا كانت $\cos \theta = \frac{2}{3}$، فجـــد $\csc \theta$.

مثال 2 **بسط كلا من التعابير التالية.**

5. $\tan \theta \cos^2 \theta$

6. $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$

7. $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$

مثال 3

8. **المثابرة** عندما يمرّ ضوء غير مستقطب عبر عدسة نظارةٍ شمسيةٍ مستقطبة، تنخفض شدة الضوء إلى النصف. وإذا مرّ الضوء بعد ذلك عبر عدسةٍ مستقطبةٍ أخرى يقع محورها عند زاوية θ بالنسبة للعدسة الأولى، فإن شدّة الضوء تنخفض مرةً أخرى. ويمكن إيجاد شدّة الضوء الخارج باستخدام الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$.

وفيها I_0 هي شدّة الضوء الوارد إلى العدسة المستقطبة الثانية، و I هي شدّة الضوء الخارج، و θ هي الزاوية بين محوري الاستقطاب.

a. بسط الصيغة بدلالة $\cos \theta$.

b. استخدم الصيغة المبسطة لتحديد شدّة الضوء المارّ عبر عدسة استقطاب ثانيةٍ يشكل محورها زاويةً قياسها $30°$ بالنسبة للعدسة الأصلية.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$.**

9. إذا كانت $\cos \theta = \frac{3}{5}$، فجـــد $\csc \theta$.

10. إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2}$، فجـــد $\tan \theta$.

11. إذا كانت $\sin \theta = \frac{3}{5}$، فجـــد $\cos \theta$.

12. إذا كانت $\tan \theta = 2$، فجـــد $\sec \theta$.

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $180° < \theta < 270°$.

13. إذا كانت $\cos \theta = -\frac{3}{5}$، فجـــد $\csc \theta$.

14. إذا كانت $\sec \theta = -3$، فجـــد $\tan \theta$.

15 إذا كانت $\cot \theta = \frac{1}{4}$، فجـــد $\csc \theta$.

16. إذا كانت $\sin \theta = -\frac{1}{2}$، فجـــد $\cos \theta$.

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $270° < \theta < 360°$.

17. إذا كانت $\cos \theta = \frac{5}{13}$، فجـــد $\sin \theta$.

18. إذا كانت $\tan \theta = -1$، فجـــد $\sec \theta$.

19. إذا كانت $\sec \theta = \frac{5}{3}$ فجـــد $\cos \theta$.

20. إذا كانت $\csc \theta = -\frac{5}{3}$، فجـــد $\cos \theta$.

مثال 2 **بسط كلا من التعابير التالية.**

21. $\sec \theta \tan^2 \theta + \sec \theta$

22. $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cot \theta$

23. $\cot \theta \sec \theta$

24. $\sin \theta (1 + \cot^2 \theta)$

25. $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sec \theta$

26. $\frac{\cos (-\theta)}{\sin (-\theta)}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3

27 **الإلكترونيات** عندما يمرّ تيارٌ كهربائيٌ في سلك موضوعٍ ضمن حقلٍ مغناطيسي، كما في مجفف الشعر، تتولّد قوةٌ تؤثّر في السلك. ويمكن تحديد قوة الحقل المغناطيسي باستخدام القانون $B = \frac{F \csc \theta}{I\ell}$. حيث تمثل F القوة المؤثرة في السلك، وتمثل I شدّة التيار المار بالسلك، وتمثل ℓ طول السلك، وتمثل θ الزاوية التي يصنعها السلك مع الحقل المغناطيسي. أعد كتابة المعادلة بدلالة $\sin \theta$. (تلميح: حلّ لإيجاد F.)

بسّط كلاًّ من التعابير التالية.

28. $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

29. $\tan \theta \csc \theta$

30. $\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

31. $2(\csc^2 \theta - \cot^2 \theta)$

32. $(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$

33. $2 - 2 \sin^2 \theta$

34. الشمس تتعلق قدرة جسمٍ على امتصاص الطاقة بعاملٍ يدعى انبعائية الجسم e. يمكن حساب الانبعائية باستخدام القانون $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$. حيث تمثل W معدّل امتصاص بشرة شخص للطاقة الصادرة عن الشمس، وتمثل S الطاقة الصادرة عن الشمس مقدرةً بالواط لكل متر مربع، وتمثل A مساحة السطح المعرّض للشمس، وتمثل θ الزاوية بين الإشعاعات الشمسية وخط عمودي على الجسم.

a. حلّ المعادلة لإيجاد W. واكتب إجابتك باستخدام $\sin \theta$ أو $\cos \theta$ فقط.

b. جـــد قيمة W إذا كان $e = 0.80$، و $\theta = 40°$، و $A = 0.75\ m^2$، و $S = 1000\ W/m^2$. وقرّب الإجابة إلى أقرب جزءٍ من مئة.

35. تمثيل النماذج تعرض الخريطة بعضا من المباني في حيّ إيمان، والتي تزورها بصورةٍ دورية. يساوي $\sin \theta$ المتشكلة بين الطرق التي تربط بين المكتبة والمدرسة ومنزل إيمان $\frac{4}{9}$.

a. ما cosine للزاوية؟

b. ما ظل الزاوية؟

c. ما sine المتشكلة من الطرقات التي تربط بين منزل معلّم الفنون والمدرسة ومنزل إيمان وما cosine وظلّها؟

36. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت معادلةٌ متطابقةً مثلثية. تأمل المتطابقة الهندسية $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$.

a. جدوليًا انسخ الجدول أدناه وأكمله.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$				
$\tan^2 \theta \sin^2 \theta$				

b. بيانيًا استخدم حاسبةً للتمثيل البياني من أجل تمثيل $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$ في صورة دالتين منفصلتين. وارسم التمثيل البياني.

c. تحليليًا إذا لم يكن التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين، إذًا فالمعادلة ليست متطابقة. هل يتطابق التمثيلان البيانيان؟

d. تحليليًا استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحديد ما إن كانت المعادلة $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ متطابقة. (تحقق من ضبط حاسبتك على نمط الدرجات).

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

37. التزلج يهبط متزلجٌ كتلته m على تلةٍ زاويتها θ درجةً بسرعة ثابتة. وعند تطبيق قوانين نيوتن على هذه الحالة، ينتج نظام المعادلات التالي: $F_n - mg\cos\theta = 0$ و $mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$. حيث تمثل g التسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية، وتمثل F_n القوة العمودية المؤثرة في المتزلج، وتمثل μ_k معامل الاحتكاك. استخدم نظام المعادلات لتحديد μ_k بوصفها دالة لـ θ.

بسط كل تعبير

38. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta}{1 - \csc^2\theta}$

39 $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 1}{1 + \sin(-\theta)}$

40. $\dfrac{\sec\theta\sin\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \sec\theta}$

41. $\dfrac{\cot\theta\cos\theta}{\tan(-\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

42. التفكير النقدي يتناقش إبراهيم وأحمد بشأن ما إذا كانت إحدى المعادلات الواردة في واجبهم المنزلي متطابقة. حيث يقول إبراهيم إنه ونظرًا لتجريبه عشر قيمٍ محددةٍ وإلى أنها جميعا كانت صالحة، فلا بدّ أنها متطابقة. في حين يقول أحمد إنه لا يمكن استخدام سوى قيمٍ محددةٍ بمثابة أمثلةٍ مضادةٍ لإثبات عدم كون معادلةٍ متطابقة. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

43. التحدٍ جـــد مثالاً مضادًا لتثبت أن $\cos x = 1 - \sin x$ ليست متطابقة.

44. التبرير وضح كيف يمكن إعادة كتابة قانون الاستضاءة الوارد في بداية هذا الدرس لإثبات أن $\cos\theta = \frac{ER^2}{I}$.

45. الكتابة في الرياضيات تعود شهرة العالم فيثاغورس في جلّها إلى نظرية فيثاغورس. وتعدّ المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ مثالاً عن متطابقات فيثاغورس. فلِمَ تصنّف هذه المتطابقة كذلك برأيك؟

46. البرهان أثبت أنّ $\tan(-a) = -\tan a$ باستخدام متطابقات ناتج القسمة والزاوية السالبة.

47. مسألة غير محددة الإجابة اكتب تعبيرين مكافئين لـ $\tan\theta\sin\theta$.

48. التبرير اشرح كيف يمكنك استخدام القسمة لإعادة كتابة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ بالصورة $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

49. التحدٍ جـــد $\cot\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و $90° \le \theta < 180°$.

50. تحليل الخطأ تبسط إيمان وأسماء $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إيمان

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \tan^2\theta + 1$$
$$= \sec^2\theta$$

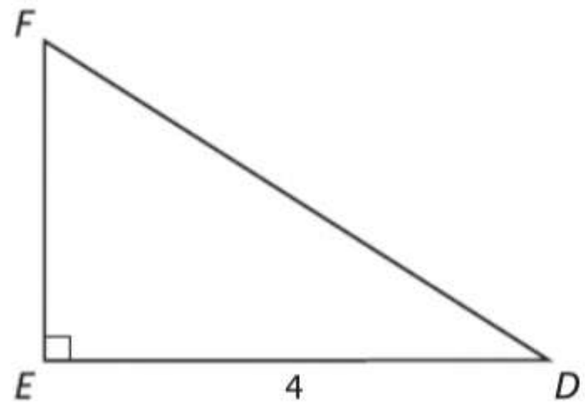
أسماء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$= \sin^2\theta$$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

51. استعن بالشكل الموضح أدناه. إذا كان $\cos D = 0.8$. فما طول $\overline{DF}$؟



A 5 **C** 3.2

B 4 **D** $\frac{4}{\overline{5}}$

52. الاحتمالات يحتوي وعاءٌ على 16 كرة زجاجية خضراء و كرتين زجاجيتين حمراوين و 6 كرات زجاجية صفراء. فكم عدد الكرات الزجاجية الصفراء التي تنبغي إضافتها إلى الوعاء من أجل مضاعفة احتمال اختيار كرة زجاجية صفراء؟

F 4 **H** 8

G 6 **J** 12

53. SAT/ACT تصغر أماني أمل بـ 6 سنوات. وعمر آمنة يساوي مثلي عمر أمل. ومجموع أعمارهنّ جميعا يساوي 54. فأيّ معادلةٍ مما يلي يمكن استخدامها لإيجاد عمر أمل؟

A $x + (x - 6) + 2(x - 6) = 54$

B $x - 6x + (x + 2) = 54$

C $x - 6 + 2x = 54$

D $x + (x - 6) + 2x = 54$

E $2(x + 6) + (x + 6) + x = 54$

54. أيّ من الدّوال التالية تمثّل نموًا أسيًا؟

F $y = (0.3)^x$

G $y = (1.3)^x$

H $y = x^3$

J $y = x^{\frac{1}{3}}$

مراجعة شاملة

جـــد كل قيمةٍ مما يلي، واكتب قياسات الزوايا بالراديان، وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

55. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

56. $\text{Sin}^{-1}\frac{\pi}{2}$

57. $\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}$

58. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{6}{7}\right)$

59. $\sin\left(\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

60. $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$

61. الفيزياء يربط ثقلٌ إلى نابض ويعلّق من السقف. وفي حالة التوازن، يتوضع الثقل على ارتفاع 4 m فوق الأرضية. يسحب الثقل إلى الأسفل مسافة 1 m ثمّ يحرّر. اكتب معادلة بعد d الثقل الموجود فوق سطح الأرضية بصورة دالة للزمن t ثانية على فرض أن الثّقل يعود إلى وضعيته الدنيا كلّ 4 s.

جـــد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

62. $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{4} \cdot 2^{k-1}$

63. $\sum_{k=1}^{7} 81\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

64. $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{3} \cdot 5^{k-1}$

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

65. $a + 1 = \frac{6}{a}$

66. $\frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$

67. $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

السابق:

- لقد استخدمت المتطابقات لإيجاد القيم المثلثية وتبسيط التعابير.

الحالي:

1 إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل أحد طرفي المتطابقة إلى صيغة الطرف الآخر.

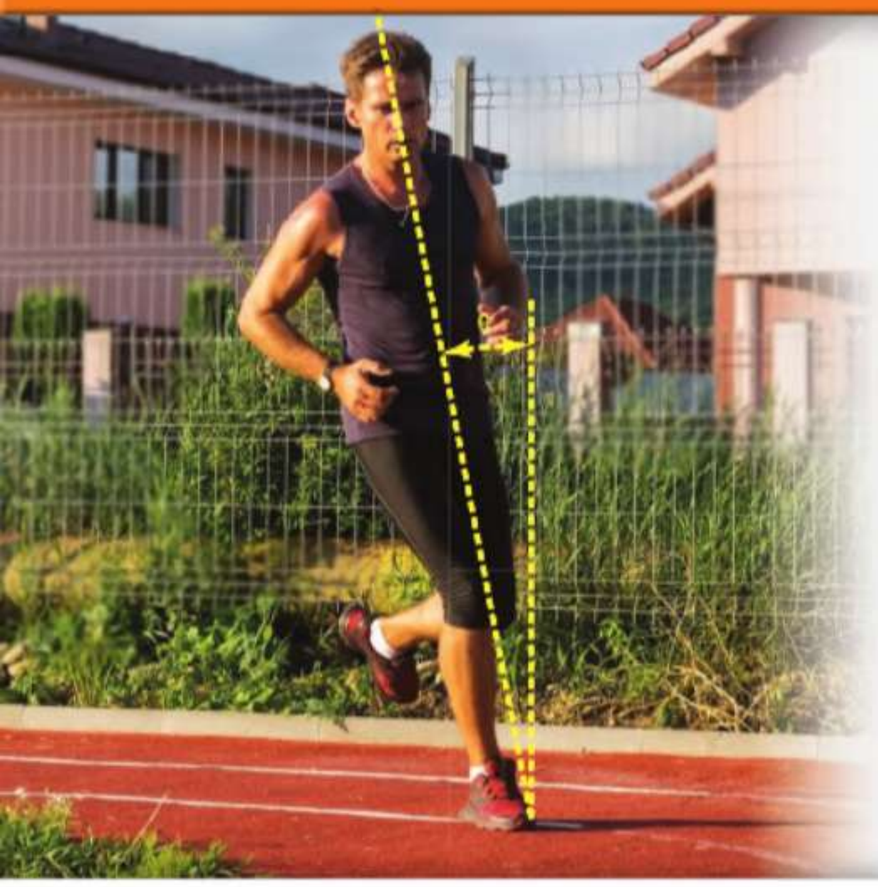
2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل كل طرف في المتطابقة إلى الصيغة نفسها.

لماذا؟

- حين كان خالد يركض على مضمارٍ دائري، لاحظ أن جسمه لم يكن عموديًا على الأرض. بل كان يميل بعيدًا عن الوضعية الرأسية. وتد الزاوية الحادة غير السالبة θ التي يصنعها جـ خالد مع الشاقول باسم *زاوية الميل* وتوصف بالمعادلة $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$.

هذه المعادلة ليست المعادلة الوحيدة التي تصف زاوية الميل بدلالة الدوال المثلثية. فهناك معادلة أخرى من هذا النوع صيغتها $\sin \theta = \cos \frac{v^2}{gR}\theta$. حيث $0 \le \theta \le 90°$.

هل هاتان المعادلتان مستقلتان تماما بعضهما عن بعض أم أنهما نسختان مختلفتان عن علاقةٍ واحدة؟



ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

البحث عن التوافق في التبريرات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 تحويل أحد طرفي متطابقة يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية إضافةً إلى تعاريف النسب المثلثية لإثبات صحة المتطابقات. فإذا أردت إثبات متطابقةٍ ما، فيتعين عليك إثبات صحتها من أجل جميع قيم θ.

المفهوم الأساسي إثبات المتطابقات عبر تحويل طرف واحد

الخطوة 1 بسط طرفًا واحدًا من المتطابقة إلى أن يصبح طرفاها متماثلين. وغالبًا ما تكون هذه الطريقة أسهل لمعالجة الطرف الأكثر تعقيدًا في المعادلة.

الخطوة 2 حوّل ذلك التعبير إلى صيغة الطرف الأبسط.

مثال 1 تحويل طرف واحد في متطابقة

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta$.

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$$ اضرب البسط والمقام بـ $1 + \cos \theta$.

$$\frac{\sin^2 \theta(1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$$ $(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \cos^2 \theta$

$$\frac{\sin^2 \theta(1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$$ $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$1 + \cos \theta = 1 + \cos \theta \checkmark$$ بقسمة البسط والمقام على $\sin^2 \theta$.

تمرين موجّه

1. أثبت صحة المتطابقة $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

عندما تثبت صحة متطابقةٍ مثلثية، فإنك في الحقيقة تحلّ بترتيب عكسي. ففي المثال 1، خذ الخطوة الأخيرة $1+\cos\theta = 1 + \cos\theta$ بما أن تلك الخطوة صحيحةٌ بوضوح. فيمكنك أن تستنتج أن الخطوة قبل الأخيرة صحيحةٌ أيضا، وهكذا دواليك بالعودة إلى المتطابقة الأصلية.

مثال 2 على الاختبار المعياري تبسيط التعابير

$$\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} =$$

A $\cot\theta$ **B** $\csc\theta$ **C** $\cot^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

قراءة فقرة الاختبار

جـــد تعبيرًا يساوي على الدوام التعبير المعطى. ولاحظ أن خيارات الإجابات جميعها إما تضمّ $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. ولذلك حلّ باتجاه اختزال النسب المثلثية الأخرى.

حل فقرة الاختبار

حوّل التعبير المعطى ليطابق أحد الخيارات.

$$\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ و } \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب.}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{بقلب المقام والضرب.}$$

$$= \cot\theta \cdot \cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{بالضرب.}$$

الإجابة هي C.

انتبه!

المثابرة
يشبه إثبات صحة متطابقةٍ التحقق من حل معادلة. يجب عليك تبسيط أحد الطرفين أو كليهما بصورةٍ منفصلةٍ إلى أن يصبحا متماثلين.

نصيحة عند حل الاختبار

التحقق من الإجابات تحقق من صحة إجابتك عبر اختيار قيمٍ لـــ θ. ثم جـــد قيمة التعبير الأصلي وقارنه مع إجابتك المختارة.

تمرين موجّه

2. $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta) =$

F $\cot^2\theta$ **G** $\tan^2\theta$ **H** $\cos^2\theta$ **J** $\sin^2\theta$

2 تحويل كل من طرفي المتطابقة

من الأسهل أحيانًا تحويل كل طرف من طرفي المتطابقة بصورةٍ منفصلة إلى صيغةٍ مشتركة. ومن شأن الاقتراحات التالية أن تساعدك في إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

المفهوم الأساسي اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- عوّض واحدة أو أكثر من المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط التعبير.
- حلّل إلى العوامل أو اضرب حسب الضرورة. وقد يتعيّن عليك ضرب البسط والمقام بالتعبير المثلثي نفسه.
- اكتب كلاً من طرفي المتطابقة بدلالة الـــ Sine و Cosine فقط. ثمّ بسط كلاً من الطرفين قدر الإمكان.
- لا تنطبق خواص المساواة على المتطابقات بالكيفية التي تنطبق بها على المعادلات. لا تقم بإجراء العمليات على الكميات في كلٍ من طرفي متطابقةٍ ليست مثبتة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 الإثبات بتحويل كلا الطرفين

أثبت صحة المتطابقة $1 - \tan^4 \theta = 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$.

$1 - \tan^4 \theta \stackrel{?}{=} 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$	المعادلة الأصلية
$(1 - \tan^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) \stackrel{?}{=} \sec^2 \theta (2 - \sec^2 \theta)$	بتحليل كل طرف إلى العوامل.
$[1 - (\sec^2 \theta - 1)] \sec^2 \theta \stackrel{?}{=} (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$(2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta = (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta$ ✓	بسط.

تمرين موجّه

3. أثبت صحة المتطابقة $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta$.

التحقق من فهمك

الأمثلة 1–3 **الدقة** **أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:.**

1. $\cot \theta + \tan \theta = \dfrac{\sec^2 \theta}{\tan \theta}$

2. $\cos^2 \theta = (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$

3. $\sin \theta = \dfrac{\sec \theta}{\tan \theta + \cot \theta}$

4. $\tan^2 \theta = \dfrac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$

5. $\tan^2 \theta \csc^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$

6. $\tan^2 \theta = (\sec \theta + 1)(\sec \theta - 1)$

مثال 2 **7** **الاختيار من متعدد** ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتشكيل متطابقةٍ فيها $\dfrac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta}$؟

A $\sin^2 \theta$ **B** $\cos^2 \theta$ **C** $\tan^2 \theta$ **D** $\csc^2 \theta$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:.**

8. $\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$

9. $\cot \theta (\cot \theta + \tan \theta) = \csc^2 \theta$

10. $1 + \sec^2 \theta \sin^2 \theta = \sec^2 \theta$

11. $\sin \theta \sec \theta \cot \theta = 1$

12. $\dfrac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = (\csc \theta - \cot \theta)^2$

13. $\dfrac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \tan \theta - \cot \theta$

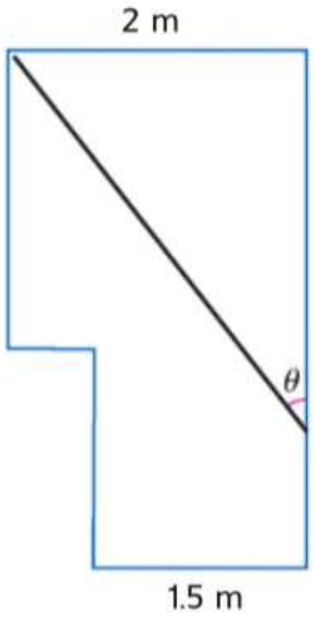
14. $\tan \theta = \dfrac{\sec \theta}{\csc \theta}$

15. $\cos \theta = \sin \theta \cot \theta$

16. $(\sin \theta - 1)(\tan \theta + \sec \theta) = -\cos \theta$

17. $\cos \theta \cos (-\theta) - \sin \theta \sin (-\theta) = 1$

مثال 2 **18.** **السلّم** استنتج بعض الطلاب تعبيرًا لحساب طول سلّم. علما أنه حين يحمل بصورةٍ مسطحةٍ فإنه يمكن أن يشغل زاويةً بحيث يمتدّ من رواق عرضه 1.5 m إلى رواق عرضه 2 m كما هو موضح. وقد حدّدوا أن الطول الأقصى ℓ لسلمٍ يشغل هذا الركن يعطى بالعلاقة $\ell(\theta) = \dfrac{2 \sin \theta + 1.5 \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$. وعندما حلّت المعلمة المسألة. استنتجت أن $\ell(\theta) = 2 \sec \theta + 1.5 \csc \theta$. فهل التعبيران متكافئان؟



McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 3 أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:

19. $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

20. $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

21. $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

22. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

23. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

24. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

25. $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

26. $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

27. $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

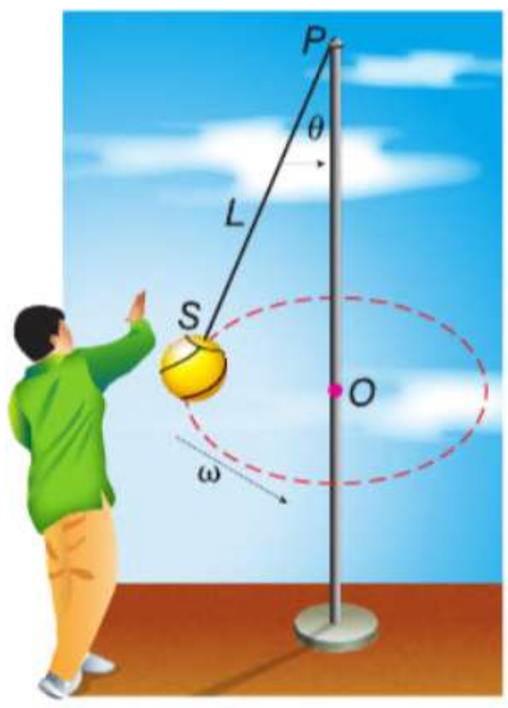
28. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

29. $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

30. $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

31. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

32. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$



33. التبرير المنطقي يمثل الرسم التخطيطي على الجهة اليسرى لعبة كرة الحبل. حين تدور الكرة حول العمود، تمسح القطعة المستقيمة $\overline{SP}$ سطحا مخروطيًا. تعطى الصيغة التي تعبر عن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية التي يشكلها الحبل مع العمود θ بالمعادلة $L = \dfrac{g\sec\theta}{\omega^2}$. هل $L = \dfrac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضا معادلةٌ تعبر عن العلاقة بين L و θ؟

34. الجري يأخذ جزء من مضمار سباق شكل قوس دائري نصف قطره 16.7 m. وعندما تجري عدّاءةٌ على طول القوس، فإن Sine زاوية ميل جسدها θ يساوي $\frac{1}{4}$. جد سرعة العدّاءة. واستخدم صيغة زاوية الميل الواردة في بداية الوحدة، $\tan\theta = \dfrac{v^2}{gR}$. حيث $g = 9.8$ و R تمثل نصف القطر. (إرشاد: جد $\cos\theta$ أولاً.)

عند تبسيط التعبير، فهل يساوي 1 أم 1–؟

35 $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

36. $\sin\theta\csc(-\theta)$

37. $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$

38. $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

39. $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$

40. $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

بسط التعبير إلى ثابت أو إلى نسبة مثلثيةٍ أساسية.

41. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$

42. $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

43. $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$

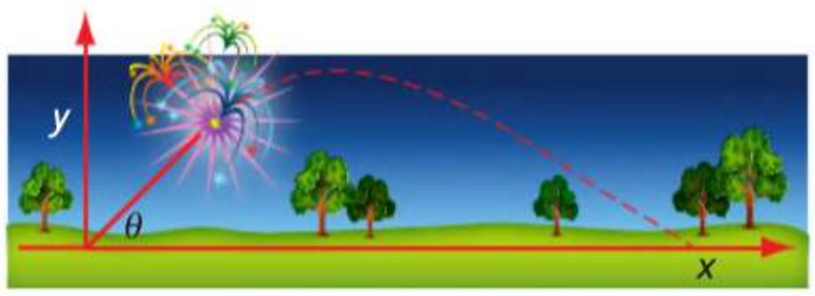
44. $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

45. $\tan\theta\cos\theta$

46. $\cot\theta\tan\theta$

47. $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

48. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{\csc^2\theta}$



49. فيزياء عند إطلاق إحدى الألعاب النارية من سطح الأرض، يرتبط ارتفاعها y وإزاحتها الأفقية x بالمعادلة $y = \dfrac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \dfrac{x\sin\theta}{\cos\theta}$: حيث تمثل v_0 السرعة البدائية للمقذوف، وتمثل θ زاوية إطلاق المقذوف، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة المعادلة بحيث تكون $\tan\theta$ الدالة المثلثية الوحيدة التي تظهر في المعادلة.

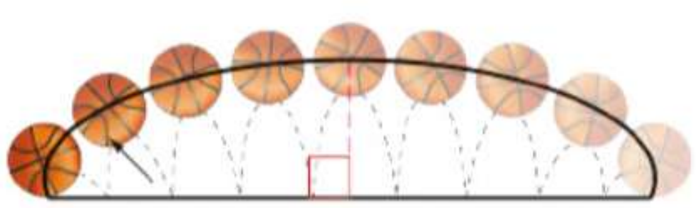
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

50. **الإلكترونيات** عند مرور تيارٍ متناوب تردده f وذروته I_0 عبر مقاومة R، فإن القدرة التي تبلغ المقاومة عند الزمن t ثانية تعطى بالعلاقة $P = I_0^2 R \sin^2 2\pi ft$.

a. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$.

b. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$.

51 **رمي كرة** في هذه المسألة، سوف تستكشف مسار الكرة الذي تمثّله المعادلة $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$. حيث تمثل θ قياس الزاوية بين الأرض ومسار الكرة، وتمثل v_0 سرعتها الإبتدائية بالأمتار في الثانية، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. قيمة g تساوي $9.8\ m/s^2$.



a. إذا كانت السرعة البدائية للكرة تساوي 47 m في الثانية، جـــد ارتفاع الكرةعند الزوايا $30°$ و $45°$ و $60°$ و $90°$. قرّب إلىأقرب جزءٍ من عشرة.

b. مثّل المعادلة بيانيًا على حاسبةٍ للتمثيل البياني.

c. أثبت أن الصيغة $h = \frac{v_0^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ مكافئة للصيغة المعطاة أعلاه.

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

52. **الفرضيات** حدّد المتطابقة التي لا تنتمي إلى المتطابقات الثلاث الأخرى. اشرح استنتاجك.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta + 1$
$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

53. **التحدٍ** حوّل الطرف الأيمن من $\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$ لتثبت أن $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$.

54. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يمكنك تربيع كلا طرفي معادلةٍ عندما تثبت صحة متطابقة مثلثية.

55. **التبرير** اشرح سبب كون $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة في حين $\theta = \sqrt{1 - \cos \theta}$ ليست كذلك.

56. **كتابة سؤال** يعاني أحد الزملاء في الصف من صعوبةٍ أثناء محاولة إثبات صحة متطابقةٍ مثلثيةٍ تتضمن العديد من النسب المثلثية لزوايا لها درجات متعددة. اكتب معادلةً لمساعدته في حلّ المسألة.

57. **الكتابة في الرياضيات** لماذا تعتقد أن التعابير في المتطابقات المثلثية تعاد كتابتها غالبًا بدلالة الـــ Sine وقانون الـــ Cosine؟

58. **التحدٍ** لتكن $x = \frac{1}{2} \tan \theta$، حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. اكتب $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$ بدلالة دالة مثلثيةواحدة لـــ θ.

59. **التبرير** برّر المتطابقات المثلثية الأساسية الثلاثة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

60. SAT/ACT يضطر صاحب إحدى الشركات الصغيرة إلى توظيف عمال موسميين حينما تقتضي الحاجة ذلك. توضح القائمة التالية عدد العاملين الذين تم توظيفهم شهريًا على مدى 5 أشهر.

5, 14, 6, 8, 12

إذا كان متوسط هذه البيانات يساوي 9. فما هو الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي لهذه البيانات؟ (قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرة)

A 3.5
B 3.9
C 5.7
D 8.6
E 12.3

61. جـــد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x - 4)^2 + y^2 - 16 = 0$.

F $C(-4, 0)$; $r = 4$ وحدات
G $C(-4, 0)$; $r = 16$ وحدة
H $C(4, 0)$; $r = 4$ وحدات
J $C(4, 0)$; $r = 16$ وحدة

62. الهندسة محيط مثلث قائم الزاوية يساوي 36 cm. فإذا علمت أن طول الساق الأطول ناقصا منه ضعف طول الساق الأقصر يساوي 6 cm. فما أطوال أضلاع المثلث الثلاثة جميعها؟

A 3 cm., 4 cm., 5 cm.
B 6 cm., 8 cm., 10 cm.
C 9 cm., 12 cm., 15 cm.
D 12 cm., 16 cm., 20 cm.

63. بسط $128^{\frac{1}{4}}$.

F $2\sqrt[4]{2}$
G $2\sqrt[4]{8}$
H 4
J $4\sqrt[4]{2}$

مراجعة شاملة

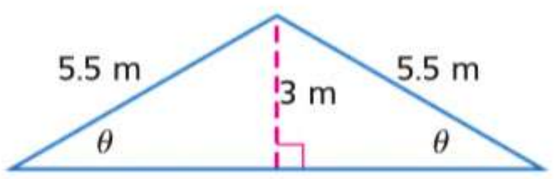
جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 1-12)

64. $\tan \theta$، إذا كان $\cot \theta = 2$؛ $0° \le \theta < 90°$

65. $\sin \theta$، إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$؛ $0° \le \theta < 90°$

66. $\csc \theta$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$؛ $90° < \theta < 180°$

67. $\cos \theta$، إذا كان $\sec \theta = \frac{5}{3}$؛ $270° < \theta < 360°$



68. الهندسة المعمارية للدعامة الخاصة بسقف شكل مثلثين قائمين كما هو موضح في الشكل على الجهة اليسرى. جـــد θ.

69. وجبات سريعة يعرض الجدول التوزيع الاحتمالي لوجبات التوفير التي طلبت في أحد المطاعم أيام الأحد صباحا. استخدم المعلومات لتحديد قيمة توقع الوجبات المطلوبة.

وجبات التوفير المطلوبة

الوجبات	AED 3	AED 4	AED 5	AED 6
الاحتمال	0.5	0.2	0.1	0.2

جـــد إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب لقطع الزائدٍ له المعادلة المعطاة. ثمّ مثّل القطع بيانيًا.

70. $\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{20} = 1$

71. $\frac{(y + 6)^2}{20} - \frac{(x - 1)^2}{25} = 1$

72. $x^2 - 36y^2 = 36$

مراجعة المهارات

بســـط.

73. $\frac{2 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}}$

74. $\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

75. $\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

76. $\frac{-2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

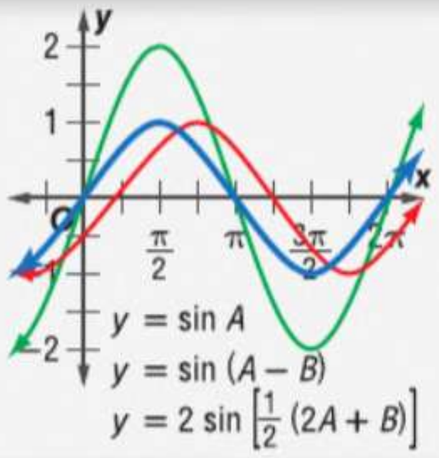
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

12-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

السابق:
- وجـــدت قيم الدوال المثلثية للزوايا العامة.

الحالي:
1. إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق.
2. إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق.

لماذا؟
- هل سبق أن استخدمت مزودًا لاسلكيًا لشبكة الإنترنت وفقدت الإشارة مؤقتا؟ يسبّب مرور أمواجٍ في مكان واحدٍ وفي الوقت نفسه حدوث تداخل. ويحدث التداخل عند تراكب موجتين لإعطاء موجةٍ سعتها أكبر أو أصغر من أيٍّ من الموجتين المركبتين لها.



ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 متطابقات المجموع والفرق

لاحظ أن المعادلة الثالثة المبيّنة أعلاه تتضمن مجموع A و B. من المفيد غالبًا استخدام صيغ القيم المثلثية لمجموع زاويتين أو فرقهما. على سبيل المثال، يمكنك إيجاد القيمة الدقيقة لـــ $\sin 15°$ عبر إيجاد قيمة $\sin (60° - 45°)$. توجد صيغٌ يمكن استخدامها لإيجاد قيم تعابير مثل $\sin (A - B)$ أو $\cos (A + B)$.

المفهوم الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	• $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
• $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	• $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
• $\tan (A + B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	• $\tan (A - B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية المجهولة

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\sin 105°$

استخدم المتطابقة $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$$\begin{aligned}
\sin 105° &= \sin (60° + 45°) && A = 60° \text{ و } B = 45° \\
&= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° && \text{متطابقة المجموع} \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) && \text{جـــد قيمة كل تعبير.} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} && \text{اضرب.}
\end{aligned}$$

b. $\cos (-120°)$

استخدم المتطابقة $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

$$\begin{aligned}
\cos (-120) &= \cos (60° - 180°) && A = 60° \text{ و } B = 180° \\
&= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180° && \text{متطابقة الفرق} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 && \text{جـــد قيمة كل تعبير.} \\
&= -\frac{1}{2} && \text{اضرب.}
\end{aligned}$$

تمرين موجّه

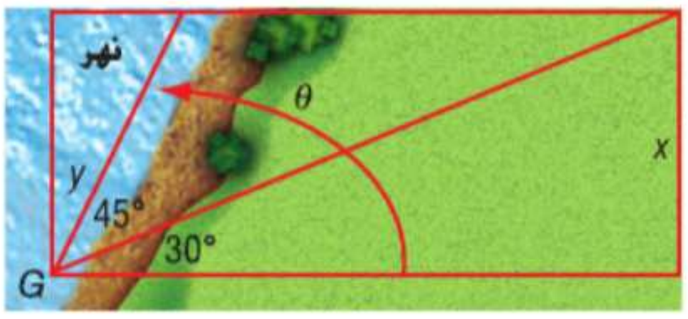
1A. $\sin 15°$ **1B.** $\cos (-15°)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك استخدام متطابقات مجموع الزوايا وفرقها لحلّ تطبيقات من الحياة اليومية.

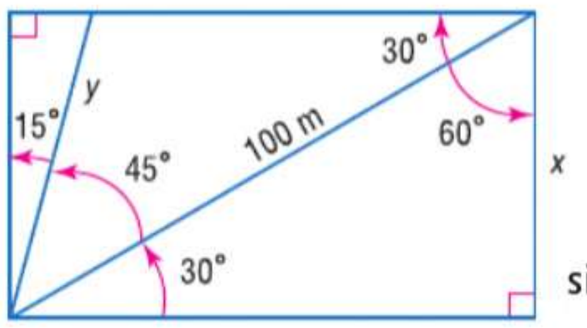
مثال 2 من الحياة اليومية متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

تقيس عالمة جيولوجيا الزاوية بين ضلع في قطعة أرض مستطيلة الشكل وبين المستقيم الممتدّ من موضعها إلى الزاوية المقابلة في قطعة الأرض تلك، لتجد أنها تساوي 30°. ثمّ تقيس الزاوية بين ذلك المستقيم والمستقيم الذي يصل بالنقطة التي يمر بها النهر على ذلك العقار، لتجد أنها تساوي 45°. تقف العالمة على بعد 100 m من الزاوية المقابلة للعقار. فكم تبعد عن نقطة مرور النهر بالعقار؟



الفهم تطلب المسألة إيجاد المسافة بين عالمة الجيولوجيا ونقطة مرور النهر بخط العقار، أي y.

التخطيط ارسم صورةً توضح المعطيات التي تعرفها من خلال المعلومات المعطاة.



الحل حلّ لإيجاد x.

$$\sin 30° = \frac{x}{100}$$ تعريف sine

$$x = 100 \sin 30°$$

$$x = 50$$ بما أن قطعة الأرض مستطيلة، فكل ضلعين متقابلين متساويان.

انظر الآن إلى المثلث في أقصى الجهة اليسرى وحُلّ لإيجاد y.

$$\cos 15° = \frac{50}{y}$$ تعريف cosine

$$\cos (45° - 30°) = \frac{50}{y}$$ $15 = 45 - 30$

$$\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{50}{y}$$ متطابقة الفرق

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{50}{y}$$ جد القيمة.

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{50}{y}$$ بسط.

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})y = 200$$ الضرب التبادلي

$$y = \frac{200}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$y = 50(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$y = 50\sqrt{6} - 50\sqrt{2} = 51.8$$ تقريبًا

تبعد عالمة الجيولوجيا حوالي 51.8 m عن نقطة مرور النهر بالخط الفاصل.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد معكوس Cosine تمام $15° \approx \frac{50}{51.8}$. ✓

نصيحة في حل المسائل

تشكيل نموذج شكل نموذجا لتصوير حالات المسائل. ويمكن أن يكون النموذج رسما أو شكلا معدًّا من أجسام مختلفة، كالقطع الجبرية أو المطويات الورقية.

تمرين موجّه

2. يمكن وصف الحركة التوافقية لجسمٍ ما بالعلاقة $x = 4 \cos \left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$، حيث تمثل x البعد عن نقطة التوازن بالسنتيمتر وتمثل t الزمن بالدقائق. جد المسافة الدقيقة عن نقطة التوازن بعد 45 s.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

نصيحة دراسية

التبرير المنطقي اصنع قائمة بالقيم المثلثية للزوايا التي يتراوح قياسها بين $0°$ و $360°$ والتي يسهل فيها استخدام متطابقات المجموع والفرق. استخدم قائمتك بمثابة مرجع.

2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية يمكنك أيضا استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 إثبات المتطابقات المثلّثية.

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

a. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\cos(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin\theta$	المعادلة الأصلية
$\cos 90° \cos\theta + \sin 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$	متطابقة المجموع
$0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$	بإيجاد قيمة كل تعبير.
$\sin\theta = \sin\theta$ ✓	بسط.

b. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} \cos\theta$	المعادلة الأصلية
$\sin\theta \cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta \sin\frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} \cos\theta$	متطابقة المجموع
$\sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1 \stackrel{?}{=} \cos\theta$	بإيجاد قيمة كل تعبير.
$\cos\theta = \cos\theta$ ✓	بسط.

تمرين موجّه

3A. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B. $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

التحقق من فهمك

مثال 1 **جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

1. $\cos 165°$
2. $\cos 105°$
3. $\cos 75°$
4. $\sin(-30°)$
5. $\sin 135°$
6. $\sin(-210°)$

مثال 2

7. **تمثيل النماذج** عد إلى بداية الدرس. يحدث التداخل البنّاء عندما تتراكب موجتان لتعطيا موجةً سعتها أكبر من سعة أيٍّ من الموجتين المركبتين لها. ويحدث التداخل الهدّام عندما تتراكب الموجتان لتعطيا موجةً لها سعة أصغر. ويمكن تمثيل الإشارة الأولى بالمعادلة $y = 20\sin(3\theta + 45°)$. بينما يمكن تمثيل الإشارة الثانية بالمعادلة $y = 20\sin(3\theta + 225°)$.
   a. جـــد مجموع الدالتين.
   b. ما نوع التداخل الذي ينتج عندما تتراكب الإشارتان الممثّلتان بالمعادلتين؟

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.**

8. $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$
9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$
10. $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$
11. $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤ

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

12. $\sin 165°$ **13.** $\cos 135°$ **14.** $\cos \frac{7\pi}{12}$

15. $\sin \frac{\pi}{12}$ **16.** $\tan 195°$ **17.** $\cos \left(-\frac{\pi}{12}\right)$

مثال 2 **18. الإلكترونيات** في دارةٍ يمرّ بها تيارٌ متناوب، يمكن استخدام الصيغة $c = 2\ sin\ (120t)$ لإيجاد شدة التيار c بالأمبير بعد مرور t ثانية.

a. أعد كتابة الصيغة باستخدام مجموع زاويتين.

b. استخدم صيغة مجموع الزاويتين لإيجاد الشدة الدقيقة للتيار عند $t = 1$ s

مثال 3 **أأثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.**

19. $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$ **20.** $\cos (60° + \theta) = \sin (30° - \theta)$

21. $\cos (180° + \theta) = -\cos \theta$ **22.** $\tan (\theta + 45°) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$

23. التبرير يمكن تمثيل درجات الحرارة العظمى في مدينة مينيابوليس بولاية مينيسوتا بالمعادلة $y = 31.65\ sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 52.35$، حيث تمثّل الأشهر x بأعدادٍ متسلسلة على النحو التالي: يناير $= 1$، فبراير $= 2$، وهكذا. ويمكن تمثيل درجات الحرارة الصغرى في مدينة مينيابوليس بالمعادلة $y = 30.15\ sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 32.95$.

a. اكتب متباينةً جديدةً عبر جمع التعابير على الجهة اليسرى في كل معادلة وقسمة الناتج على 2.

b. ما معنى الدالة التي كتبتها في الجزء **a**؟

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

24. $\tan 165°$ **25.** $\sec 1275°$ **26.** $\sin 735°$

27. $\tan \frac{23\pi}{12}$ **28.** $\csc \frac{5\pi}{12}$ **29.** $\cot \frac{113\pi}{12}$

30. القوة في الشكل المبيّن على الجهة اليسرى، تعطى القوة F اللازمة لتثبيت خزنة في موضعها على منحدرٍ بالعلاقة التالية

$$F = \frac{W(\sin A + \mu \cos A)}{\cos A - \mu \sin A}.$$

حيث W هو وزن الخزنة و $\mu = \tan \theta$. أثبت أن $F = W \tan (A + \theta)$.

31. خياطة اللحاف كجزءٍ من خياطة لحاف، يضع الخيّاط حاملين كلٌّ منهما على شكل مثلث قائم معا لتشكيل قطعة مثلثة جديدة. أطوال أضلاع أحد الحاملين هي 6 cm و 8 cm و 10 cm. ويضم الحامل الثاني أضلاعا أطوالها 8 cm و$8\sqrt{3}$ cm و 16 cm. يوضع الحاملان بحيث يتقابل الضلعان اللذان طول كل منهما 8 cm. كما هو موضح في الشكل ليتشكل المثلث ABC.

a. ما القيمة الدقيقة لـــ sine الخاص بالزاوية BAC؟

b. ما القيمة الدقيقة لـــ cosine الخاص بالزاوية BAC؟

c. ما قياس الزاوية BAC؟

d. هل المثلث المتشكل من المثلثين قائم أيضا؟

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

32. البصريات عندما يمرّ الضوء بصورةٍ متماثلةٍ عبر منشور، فإن معامل انكسار الزجاج n بالنسبة للهواء يساوي $n = \dfrac{\sin\left[\frac{1}{2}(a + b)\right]}{\sin \frac{b}{2}}$. حيث تمثل a قياس زاوية الانحراف، وتمثل b قياس الزاوية الرأسية للمنشور.

a. أثبت في المنشور الموضح أن: $n = \sqrt{3} \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}$.

b. جـــد قيمة n في المنشور الموضح.

33. التمثيلات المتعددة عليك أن تنفي في هذه المسألة الفرضية القائلة إن $(B + A)$ nis $= A$ nis $+ B$ nis.

a. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°		1		
45°	60°				
60°	45°				
90°	30°	1			

b. بيانيًا افترض أن B أقل دائما بمقدار $15°$ من A. استخدم حاسبة للتمثيل البياني لتمثيل $y = \sin(x + x - 15)$ و $y = \sin x + \sin(x - 15)$ على الشاشة نفسها.

c. تحليليًا حدّد ما إذا كانت $\cos(A + B) = \cos A + \cos B$ متطابقة. واشرح استنتاجك.

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

34. $\sin(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

35 $\cos(A + B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

36. $\sec(A - B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

37. $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

مسائل مهارات التفكير العليا

مسائل مهارات التفكير العليا

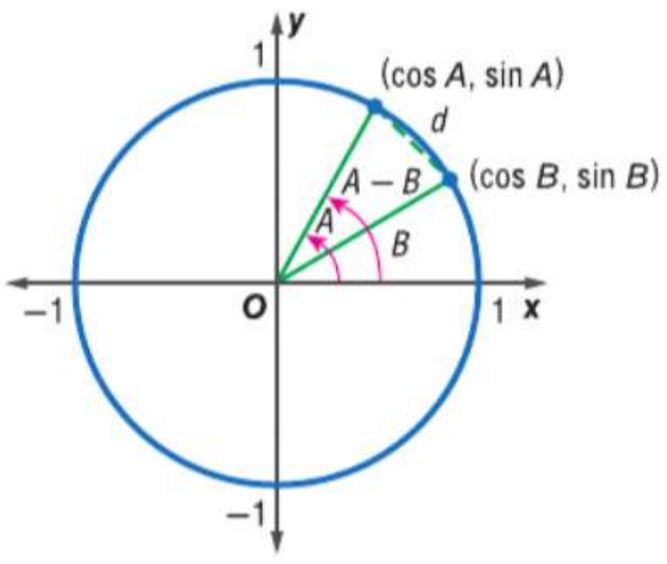
38. التبرير بسط التعبير التالي دون تفكيك أي من المجاميع أو الفروق.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

39. الكتابة في الرياضيات استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس وفي التدريب 7 لشرح كيفية استخدام متطابقات المجموع والفرق لوصف تداخل أمواج الإنترنت اللاسلكية. أضف شرحا للفرق بين التداخل البنّاء والهدّام.

40. التحدٍ اشتق متطابقةً لـــ $\cot(A + B)$ بدلالة $\cot A$ و $\cot B$.

41. الفرضيات يعرض الشكل زاويتين A و B في موضعيهما القياسيين على الدائرة الواحدية. استخدم قانون المسافة لإيجاد d. حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$ و $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$.



42. مسألة غير محددة الإجابة تأمل النظرية التالية. إذا كانت A و B و C زوايا مثلث مائل، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. اختر قيما لـــ A و B و C. وتحقق من أن التبرير صحيحٌ من أجل قيمك المحدّدة.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

43. الإجابة الشبكية متوسط سبعة أعداد يساوي 0. مجموع ثلاثة من هذه الأعداد يساوي 9−. فما مجموع بقية الأعداد؟

44. المتغيرات a و b و c و d و f و أعداد صحيحة في متتاليةٍ فيها $a = 2$ و $b = 12$. لإيجاد الحدّ التالي، ضاعف الحدّ الأخير واجمع ذلك الناتج إلى الحدّ الذي يسبق الحدّ الأخير منقوصا منه واحد. فعلى سبيل المثال، $c = 25$ لأن $2(12) = 24$ و $24 + 1 = 25$ و $25 - 1 = 2$. ما قيمة f؟

A 74

B 144

C 146

D 256

45. SAT/ACT حلّ $x^2 - 5x < 14$.

F $\{x|-7 < x < 2\}$

G $\{x|x < -7$ أو $x > 2\}$

H $\{x|-2 < x < 7\}$

J $\{x|x < -2$ أو $x > 7\}$

K $\{x|x > -2$ و $x < 7\}$

46. الاحتمالات توزّع معلّمةٌ عشوائيًا 15 قلما أصفر و 10 أقلام خضراء. فما احتمال أن يكون القلم الأول الذي توزعه أصفر والقلم الثاني أخضر؟

A $\frac{1}{24}$

B $\frac{1}{4}$

C $\frac{2}{5}$

D $\frac{23}{25}$

مراجعة شاملة

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.** (الدرس 12-2)

47. $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} + \frac{\cos \theta}{\cot \theta} = \cos \theta + \sin \theta$

48. $\sec \theta (\sec \theta - \cos \theta) = \tan^2 \theta$

بســـط كل تعبير مما يلي. (الدرس 12-1)

49. $\sin \theta \csc \theta - \cos^2 \theta$

50. $\cos^2 \theta \sec \theta \csc \theta$

51. $\cos \theta + \sin \theta \tan \theta$

52. الجيتار عند ضرب وتر الجيتار، فإنه يزاح عن نقطةٍ ثابتةٍ في المنتصف ويهتزّ جيئةً وذهابًا ليصدر نغمةً موسيقية. وتعتمد النغمة المحددة على التردد، أو عدد دورات اهتزاز الوتر في الثانية. لإصدار النغمة A، فإن التردد يساوي 440 دورةً في الثانية، أو 440 هرتز (Hz).

a. جـــد دور هذه الدالة.

b. مثّل بيانيًا ارتفاع النقطة الثابتة على الوتر عن موضع سكونها بدلالة الزمن. وافترض أن للمسافة القصوى فوق موضع السكون قيمة 1 وحدة، وافترض أن المسافة الصغرى تحت هذا الموقع تساوي 1 وحدة.

برهِن صحة كلٍ من العبارات التالية بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة.

53. $4^n - 1$ مقسومةً على 3.

54. $5^n + 3$ مقسومةً على 4.

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

55. $7 + \sqrt{4x + 8} = 9$

56. $\sqrt{y + 21} - 1 = \sqrt{y + 12}$

57. $\sqrt{4z + 1} = 3 + \sqrt{4z - 2}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

12 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 12-1 إلى 12-3

بسط كل تعبير مما يلي. (الدرس 12-1)

1. $\cot \theta \sec \theta$
2. $\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$
3. $\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \csc \theta$

5. **التاريخ** في عام 1971، تم اعتماد علم الإمارات العربية المتحدة. وفي هذا العلم، $\tan \theta = \frac{31.5}{51}$. جـــد قيمة $\sin \theta$.

جـــد قيمة كل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 12-1)

6. $\sin \theta$، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $0° < \theta < 90°$
7. $\csc \theta$، إذا كان $\cot \theta = \frac{1}{2}$; $270° < \theta < 360°$
8. $\tan \theta$، إذا كان $\sec \theta = \frac{4}{3}$; $0° < \theta < 90°$

9. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يكافئ $\frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta}$؟ (الدرس 12-1)

A $\cos \theta$

B $\csc \theta$

C $\tan \theta$

D $\sec \theta$

10. **مدن الملاهي** افترض أن طفلاً يجلس على الحصان الخارجي في دوامة الخيول. ويبلغ قطر دوامة الخيول 16 m. وتُعطى زاوية ميلها بالمعادلة $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث R هو نصف قطر المسار الدائري و v هي السرعة بالمتر في الثانية و g تساوي 9.8 m/s^2 (الدرس 12-1)

a. إذا كان Sine زاوية ميل الطفل يساوي $\frac{1}{5}$، فما زاوية الميل التي يصنعها الطفل؟

b. ما السرعة المتجهة لدوامة الخيول؟

c. إذا كانت سرعة دوامة الخيول 3.6 m/s فما قيمة زاوية ميل الراكب؟

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 12-2)

11. $\cot^2 \theta + 1 = \frac{\cot \theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta}$
12. $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\cot \theta} = 1$
13. $\frac{\sin \theta \tan \theta}{1 - \cos \theta} = (1 + \cos \theta) \sec \theta$
14. $\tan \theta(1 - \sin \theta) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin \theta}$

15. **الحاسوب** يقاس الوجه الأمامي لشاشة الحاسوب عادةً بطول قطر الشاشة كما هو موضح أدناه. (الدرس 12-2)

a. جـــد قيمة h.

b. استعن بالرسم التخطيطي الموضح لإثبات أن $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 12-2)

16. $\tan^2 \theta + 1 = \frac{\tan \theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta}$
17. $\frac{\sin \theta \cdot \sec \theta}{\sec \theta - 1} = (\sec \theta + 1) \cot \theta$
18. $\sin^2 \theta \cdot \tan^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta$
19. $\cot \theta(1 - \cos \theta) = \frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{1 + \cos \theta}$

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 12-3)

20. $\cos 105°$
21. $\sin (-135°)$
22. $\tan 15°$
23. $\cot 75°$

24. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 12-3)

F $\sqrt{2}$

G $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

H $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

J $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

25. أثبت أن $\cos 30° \cos \theta + \sin 30° \sin \theta = \sin 60° \cos \theta + \cos 60° \sin \theta$ عبارة عن متطابقة. (الدرس 12-3)

McGraw-Hill Education مؤسسة صالح للطبع والتأليف © محفوظة لصالح حقوق الطبع والتأليف

12-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

.. السابق

- وجـــدت قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق.

.. الحالي

1 إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات ضعف الزاوية..

2 إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات نصف الزوايا.

.. لماذا؟

- تضمّ نافورة باكنغهام في شيكاغو أنابيب نقّاثة موضوعة عند زوايا محددة لقذف الماء في الهواء وتشكيل أقواس. عند قذف تيارٍ من الماء في الهواء بسرعة متجهة v وزاوية θ مع المحور الأفقي، يتوقع النموذج أن الماء سيقطع مسافة أفقية تساوي $D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$ ويبلغ ارتفاعًا أقصى يساوي $H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$. تساعد نسبة H إلى D على تحديد ارتفاع النافورة وعرضها الكليين. عبّر عن $\frac{H}{D}$ في صورة دالة للزاوية θ.

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 متطابقات ضعف الزاوية من المفيد أحيانًا الاعتماد على متطابقات لإيجاد قيمة دالةٍ لضعف زاويةٍ أو نصفها.

المفهوم الأساسي متطابقات ضعف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \qquad \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \qquad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

مثال 1 متطابقات ضعف الزاوية

جـــد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين 0° و 90°.

الخطوة 1 استخدم المتطابقة $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ لإيجاد قيمة $\cos \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ $\quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\quad \sin \theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$ $\quad$ اطرح.

$\cos \theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad$ جـــد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الأول، فإن cosine موجب. لذلك، $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2 جـــد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ $\quad$ متطابقة الزاوية المزدوجة

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ $\quad \sin \theta = \frac{2}{3}$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ $\quad$ اضرب.

تمرين موجّه

1. جـــد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

مثال 2 متطابقات ضعف الزاوية

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين 0° و 90°.

a. $\cos 2\theta$

بما أننا نعلم قيمتي $\cos \theta$ و $\sin \theta$، فإننا نستطيع استخدام أي متطابقات للزوايا المزدوجة لإيجاد cosine. وسوف نستخدم المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$.

$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ متطابقة ضعف الزاوية

$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ $\sin \theta = \frac{2}{3}$

b. $\tan 2\theta$

الخطوة 1 جـــد $\tan \theta$ لاستخدام متطابقة الزاوية المضاعفة الخاصة بـ $\tan 2\theta$.

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ تعريف الـ tan

$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ إنطاق المقام.

الخطوة 2 جـــد $\tan 2\theta$.

$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ متطابقة ضعف الزاوية

$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$ $\tan \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}}$ تربيع المقام.

$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}}$ بســـــط.

$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

تمرين موجّه

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$.

2A. $\cos 2\theta$ **2B.** $\tan 2\theta$

نصيحة دراسية

اشتقاق الصيغ

يمكنك استخدام متطابقة $\sin (A + B)$ لإيجاد Sine ضعف زاوية θ و $\sin 2\theta$. ومتطابقة $\cos (A + B)$ لإيجاد cosine لضعف زاوية θ و $\cos 2\theta$.

مهنة من الحياة اليومية

الكهربائي يختص الكهربائي في توصيل الأجزاء الكهربائية. ويخضع الكهربائيون لتدريب يدوم مدة 3-5 سنوات. وهم بحاجةٍ إلى تعلّم المبادئ النظرية للكهرباء وأكواد البناء. كما أن نيل الشهادة يتطلب خبرةً عمليةً واجتياز اختبارٍ كتابي.

2 متطابقات نصف الزاوية

من المفيد أحيانًا الاعتماد على متطابقات لإيجاد قيمة نسبة نصف زاوية.

المفهوم الأساسي متطابقات نصف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ $\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 3 متطابقات نصف الزاوية

a. جـــد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ و θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ استخدم متطابقة لفيثاغورس لإيجاد $\cos \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$ جـــد قيمة الأس.

$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$ اطرح.

$\cos \theta = \pm\frac{3}{5}$ جـــد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ بسط.

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ إنطاق المقام.

إذا كانت الزاوية θ تقع بين 180° و 270°، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين 90° و 135°. فإذًا، $\cos \frac{\theta}{2}$ هو $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b. جـــد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos \frac{135°}{2}$ $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1 + \cos 135°}{2}}$ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ 67.5° تقع في الربع الأول؛ إذًا القيمة موجبة.

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2}}$ اطرح الكسور.

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$ اضرب.

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ بســـط.

تمرين موجّه

3. جـــد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع في الربع الثاني.

نصيحة دراسية

اختيار العلامة قد تحتاج في الخطوة الأولى للحل إلى تحديد الربع الذي سيقع فيه ضلع الانتهاء لـ $\frac{\theta}{2}$. وبعدها يمكنك استخدام العلامة الصحيحة بدءًا من ذلك فصاعدًا.

قراءة في الرياضيات

زائد أم ناقص تقرأ العلامة الأولى لمتطابقة نصف الزاوية *زائد أو ناقص*. وبعكس متطابقات الزوايا المضاعفة، فيجب عليك تحديد العلامة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 من الحياة اليومية التبسيط باستخدام متطابقات ضعف الزاوية

النافورة راجع بداية الدرس. جـــد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$ المعادلة الأصلية

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$ بســـط البسط والمقام.

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g} \cdot \frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$ بسط.

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ بسط.

$$= \frac{1}{4}\tan\theta$$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

الربط بالحياة اليومية

نافورة حديقة سيتي هول بارك في نيويورك تقع في قلب مانهاتن أمام دار البلدية.

المصدر: Fodor's

تمرين موجّه

جـــد قيمة كل مما يلي.

4A. $\sin 135°$

4B. $\cos\frac{7\pi}{8}$

تذكر أنه يمكنك استخدام متطابقتي المجموع والفرق لإثبات المتطابقات. ويمكن أيضا استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها لإثبات المتطابقات.

مثال 5 إثبات المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$ المتطابقة الأصلية

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب البسط والمقام في $\sin\theta$.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب الطرف الأيمن في 1.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$ اضرب.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$$ بسط.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$$ ✓ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$; $2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

تمرين موجّه

5. أثبت صحة المتطابقة $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

الأمثلة 3-1 **الدقة** جـــد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$.

1. $\sin \theta = \frac{1}{4}$; $0° < \theta < 90°$
2. $\sin \theta = \frac{4}{5}$; $90° < \theta < 180°$
3. $\cos \theta = -\frac{5}{13}$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
4. $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $270° < \theta < 360°$
5. $\tan \theta = -\frac{8}{15}$; $90° < \theta < 180°$
6. $\tan \theta = \frac{5}{12}$; $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

7. $\sin \frac{\pi}{8}$
8. $\cos 15°$

مثال 4

9. **كرة القدم** يركل لاعب كرةً بزاوية قياسها $37°$ مع الأرض وسرعة متجهة أولية قيمتها 16 m/s تعطى المسافة d التي تقطعها الكرة في الهواء دون أن يعترضها أي عائق بالمعادلة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. في هذه الصيغة، g هي التسارع بفعل الجاذبية الأرضية ويساوي 10 m/s^2 و v هي السرعة المتجهة الأولية.

a. بسط هذه الصيغة باستخدام متطابقة زاوية مضاعفة.

b. باستخدام الصيغة المبسطة، ما المسافة التي ستقطعها هذه الكرة؟

مثال 5 أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

10. $\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$
11. $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

التدريب وحل المسائل

الأمثلة 3-1 جـــد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$.

12. $\sin \theta = \frac{2}{3}$; $90° < \theta < 180°$
13. $\sin \theta = -\frac{15}{17}$; $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
14. $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
15. $\cos \theta = \frac{1}{5}$; $270° < \theta < 360°$
16. $\tan \theta = \frac{4}{3}$; $180° < \theta < 270°$
17. $\tan \theta = -2$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

18. $\sin 75°$
19. $\sin \frac{3\pi}{8}$
20. $\cos \frac{7\pi}{12}$
21. $\tan 165°$
22. $\tan \frac{5\pi}{12}$
23. $\tan 22.5°$

24. **الجغرافيا** إن إسقاط مركاتور للكرة الأرضية هو طريقةٌ للإسقاط تزداد فيها المسافة بين خطوط العرض بزيادة بعدها عن خط الاستواء. ويحسب موقع نقطةٍ في هذا الإسقاط باستخدام التعبير $\tan\left(45° + \frac{L}{2}\right)$، حيث L هو خط عرض هذه النقطة.

a. اكتب التعبير التالي بدلالة الدالة المثلثية لـ L.

b. خط عرض مدينة تالاهاسي في فلوريدا بالولايات المتحدة الأمريكية هو $30°$ شمالاً. جـــد قيمة التعبير إذا كانت $L = 30°$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4

25. **الإلكترونيات** تأمل دارة تيار متردد تتألف من منبعٍ للقدرة ومقاومة. فإذا كانت شدة التيار I_0 في الدارة عند الزمن t تساوي $I_0 \sin t\theta$، إذًا فإن القدرة التي تصل إلى المقاومة تساوي $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$. حيث R هي قيمة المقاومة. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

مثال 5

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي::

26. $\tan 2\theta = \dfrac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

27. $1 + \dfrac{1}{2} \sin 2\theta = \dfrac{\sec \theta + \sin \theta}{\sec \theta}$

28. $\sin \dfrac{\theta}{2} \cos \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin \theta}{2}$

29. $\tan \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

30. كرة القدم افترض أن حارس مرمى يركل كرةً بثبات بسرعة متجهة أولية قدرها 30 m/s أثبت أن المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة في الهواء ستبقى هي نفسها عندما تكون $\theta = 45° + A$ كما هي عندما $\theta = 45° - A$. استخدم الصيغة المعطاة في التدريب 9.

جـــد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.

31. $\cos \theta = \dfrac{4}{5}$; $0° < \theta < 90°$

32. $\sin \theta = \dfrac{1}{3}$; $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

33. $\tan \theta = -3$; $90° < \theta < 180°$

34. $\sec \theta = -\dfrac{4}{3}$; $90° < \theta < 180°$

35. $\csc \theta = -\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

36. $\cot \theta = \dfrac{3}{2}$; $180° < \theta < 270°$

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

37. التفكير النقدي تحسب بثينة وبدرية القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

انظر .

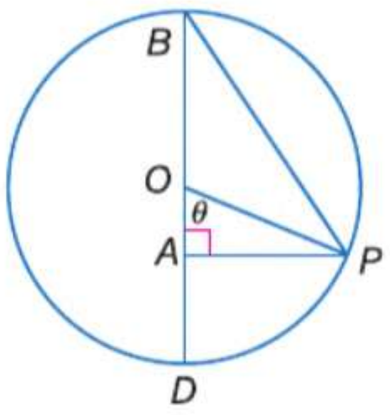
بثينة

$$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$\sin (45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

بدرية

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$
$$\sin \frac{30}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$$
$$= 0.5$$

38. التحدي الدائرة O هي دائرة وحدة. استعن بالشكل لإثبات أن $\tan \dfrac{1}{2}\theta = \dfrac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.



39. الكتابة في الرياضيات اكتب موضوعا قصيرًا عن الشروط التي يمكنك بموجبها استخدام كلٍ من المتطابقات الثلاث للزاوية $\cos 2\theta$.

40. البرهان استخدم صيغة $\sin (A + B)$ لاشتقاق صيغة $\sin 2\theta$. واستخدم صيغة $\cos (A + B)$ لاشتقاق صيغة $\cos 2\theta$.

41. التبرير اشتق متطابقات نصف الزاوية من متطابقات ضعفها.

42. مسألة غير محددة الإجابة افترض أن لاعب جولف يضرب الكرة بثبات بحيث تغادر القاعدة بسرعة متجهة أولية قدرها 35 m/s وأن $d = \dfrac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. اشرح السبب في بلوغ المسافة القصوى عندما تكون $\theta = 45°$.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

تدريب على الاختبار المعياري

43. الإجابة القصيرة الزاويتان C و D متكاملتان. قياس الزاوية C يساوي سبعة أمثال قياس الزاوية D.
جـــد قياس الزاوية D بالدرجات.

44. SAT/ACT لدى الآنسة منى قائمةٌ بالرواتب السنوية للعاملين في دائرتها. فأي مقياس للبيانات يصف قيمة الدخل الوسطى للرواتب؟

A المتوسط
B الوسيط
C المنوال
D المدى
E الانحراف المعياري

45. حدّد مجال الدالة التالية ومداها:
$f(x) = |4x + 1| - 8$.

F $D = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}, R = \{y \mid y \geq -8\}$
G $D = \{$كل الأعداد الحقيقية$\}, R = \{y \mid y \geq -8\}$
H $D = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\},$
$R = \{$كل الأعداد الحقيقية$\}$
J $D = \{$كل الأعداد الحقيقية$\}.$
$R = \{$كل الأعداد الحقيقية$\}$

46. الهندسة يرصف جمال ممرًا حجريًا حول بركة ماءٍ دائرية. ولديه ما يكفي من الأحجار لعمل ممر يبلغ 144 m طولاً. فإذا استهلك جميع الأحجار لإحاطة البركة، فما نصف قطر البركة؟

A $\frac{12}{\pi}$ m
B $\frac{72}{\pi}$ m
C 72π m
D 144π m

مراجعة شاملة

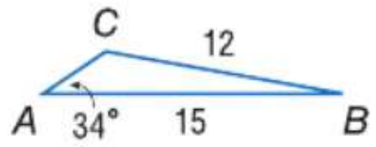
جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 3-12)

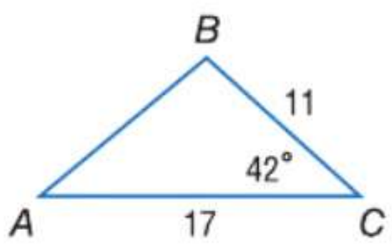
47. $\sin 135°$
48. $\cos 105°$
49. $\sin 285°$
50. $\cos(-30°)$
51. $\sin(-240°)$
52. $\cos(-120°)$

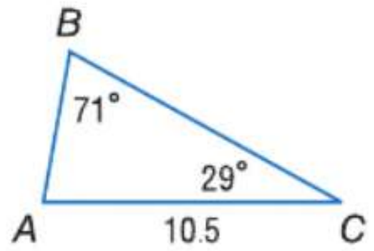
أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:. (الدرس 2-12)

53. $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$
54. $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1 - \cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ كل مثلث عبر الشروع بقانون *sine* أو قانون *cosine*. ثمّ حلّ كل مثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 4-12)

55.


56.


57.


مراجعة المهارات

حُـلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

58. $x^2 + 5x - 24 = 0$
59. $x^2 - 3x - 28 = 0$
60. $x^2 - 4x = 21$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الاستكشاف

12-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات المثلثية

يتركب التمثيل البياني للدالة المثلثية من نقاط تمثل جميع القيم التي تحقق الدالة. ولحل معادلة مثلثية، فإن عليك حساب جميع قيم المتغير التي تحقق المعادلة. ويمكنك استخدام حاسبة للتمثيل البياني لحل المعادلات المثلثية عبر التمثيل البياني لكل طرف من المعادلة في صورة دالةٍ ومن ثم تحديد نقاط التقاطع.

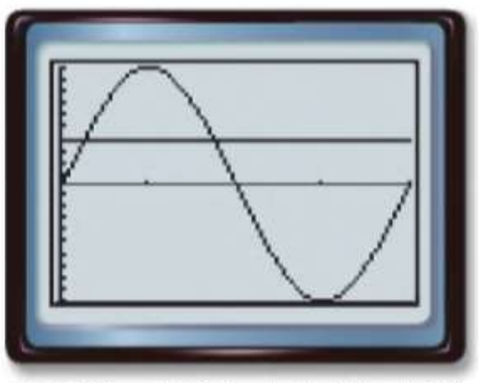
ممارسات في الرياضيات

استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 الحلول الحقيقية

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحلّ $\sin x = 0.4$ إذا كانت $0° \le x < 360°$.

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المرتبطتين ومثّلهما بيانيًا. وأعد كتابة المعادلة في صورة معادلتين $Y1 = \sin x$ و $Y2 = 0.4$. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا. نظرًا إلى أن الفترة بالدرجات، فاضبط حاسبتك على نمط الدرجات.


[0, 360] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.1

خطوات العملية على الحاسبة: ENTER ▶ ▼ ▼ MODE

) X,T,θ,n SIN Y=

GRAPH ENTER 0.4 ENTER

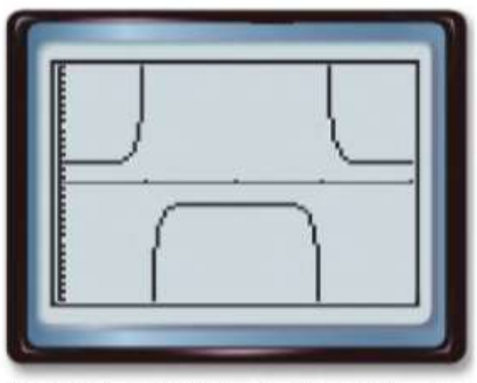
الخطوة 2 تقريب الحلول. بناءً على التمثيل البياني، يمكنك أن ترى أن هناك نقطتي تقاطع ضمن الفترة $0° \le x < 360°$. استخدم خاصية **CALC** لتحديد قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

الحلان هما $x \approx 23.57°$ و $x \approx 156.4°$.

النشاط 2 عدم وجود حلول حقيقية

استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ إذا كانت $0° \le x < 360°$.

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المرتبطتين ومثلهما بيانيًا. المعادلتان المرتبطتان اللتان يتعين تمثيلهما بيانيًا هما $y_1 = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x$ و $y_2 = 0$.


[0, 360] scl: 90 by [−15, 15] scl: 1

خطوات العملية على الحاسبة: COS x^2) X,T,θ,n TAN Y=

X,T,θ,n) 3 +) X,T,θ,n

ENTER 0 ENTER)

الخطوة 2 لا تتقاطع هاتان الدالتان.

ولذلك ليس للدالة $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ أي حلول حقيقية.

التمارين

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحل كلٍ من المعادلات التالية عند قيم x المحددة.

1. $\sin x = 0.7; 0° \le x < 360°$
2. $\tan x = \cos x; 0° \le x < 360°$
3. $3 \cos x + 4 = 0.5; 0° \le x < 360°$
4. $0.25 \cos x = 3.4; -720° \le x < 720°$
5. $\sin 2x = \sin x; 0° \le x < 360°$
6. $\sin 2x - 3 \sin x = 0$ إذا كانت $-360° \le x < 360°$

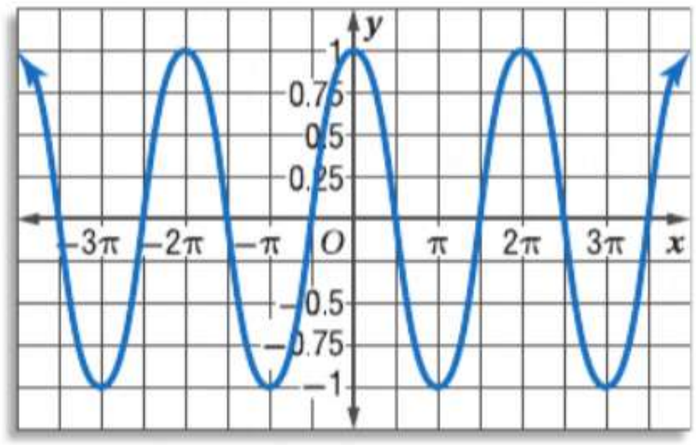
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 2 عدد لا نهائي من الحلول

حُـلّ $\cos \theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

$$\cos \theta + 1 = 0$$
$$\cos \theta = -1$$

انظر إلى التمثيل البياني لـ $y = \cos \theta$ لإيجاد حلول $\cos \theta = -1$.



الحلول هي π و 3π و 5π وما إلى ذلك $-\pi$ و -3π و -5π وما إلى ذلك. الحل الوحيد الذي يقع في الفترة 0 راديان إلى 2π راديان هو π. فترة دالة cosine هي 2π راديان. إذًا فيمكن كتابة الحلول في الصورة $\pi + 2k\pi$. حيث k عدد صحيح.

نصيحة دراسية

التعبير عن الحلول في صيغة مضاعفات إن التعبير $\pi + 2k\pi$ يتضمن 3π ومضاعفاته، ولذلك فليس من الضرورة إدراجهما بصورة منفصلة.

تمرين موجّه

2A. حلّ $\cos 2\theta + \cos \theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

2B. حلّ $2 \sin \theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

غالبًا ما تستخدم المعادلات المثلثية لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية حل المعادلات المثلثية

حدائق الملاهي **راجع بداية الدرس. كم سيستغرق الوقت بعد تشغيل الأرجوحة الدوارة حتى يبلغ مقعدك ارتفاع 31 m فوق سطح الأرض؟**

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20 \cos 3\pi t$	عوض عن h بـ 31.
$10 = -20 \cos 3\pi t$	اطرح 21 من كل طرف.
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كل طرف على -20.
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	جد معكوس cosine.
$\frac{2\pi}{3} = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} = 3\pi t$	معكوس cosine $-\frac{1}{2}$ هو $\frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$.
$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$	k هو أي عدد صحيح.
$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ $\quad \frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$	اقسم كل طرف على 3π.

يحصل على القيمة الموجبة الصغرى لـ t عبر جعل $k = 0$ في التعبير الأول.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ من الدقيقة أو حوالي 13 s.

تمرين موجّه

3. كم من الزمن يستغرق الأمر كي يبلغ مقعدك ارتفاع 41 m فوق الأرض بعد تشغيل الأرجوحة؟

McGraw-Hill Education مؤسسة للصالح © محفوظة والتأليف الطبع حقوق

2 الحلول الدخيلة بعض الدوال المثلثية ليس لها حل. على سبيل المثال، ليس للدالة $\cos \theta = 4$ حل لأن قيم $\cos \theta$ تقع بين -1 و 1 متضمنًا هذين العددين. لذا، تكون مجموعة حلول $\cos \theta = 4$ خالية.

مثال 4 تحديد ما إذا كان هناك حل

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$ إذا كانت $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$ — المعادلة الأصلية

$(\sin \theta - 2)(2 \sin \theta + 1) = 0$ — عامل

$\sin \theta - 2 = 0$ أو $2 \sin \theta + 1 = 0$ — خاصية ناتج الضرب الصفري

$\sin \theta = 2$ — هذا ليس حلاً بما أن جميع قيم $\sin \theta$ تقع بين -1 و 1، مشتملاً على القيمتين الطرفيتين.

$2 \sin \theta = -1$

$\sin \theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$

الحلول هي $\frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$.

التحقق

$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$

$2 \sin^2 \left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3 \sin \left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

$2 \sin \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$

$2 \sin^2 \left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3 \sin \left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓

b. $\sin \theta = 1 + \cos \theta$ إذا كانت $0° \leq \theta < 360°$

$\sin \theta = 1 + \cos \theta$ — المعادلة الأصلية

$\sin^2 \theta = (1 + \cos \theta)^2$ — تربيع كل طرف.

$1 - \cos^2 \theta = 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$ — $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$0 = 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta$ — ضع الطرف الأيسر مساويًا لـ 0.

$0 = 2 \cos \theta (1 + \cos \theta)$ — عامل

$2 \cos \theta = 0$ أو $1 + \cos \theta = 0$ — خاصية ناتج الضرب الصفري

$\cos \theta = 0$

$\theta = 90° = 270°$

$\cos \theta = -1$

$\theta = 180$

التحقق

$\sin \theta = 1 + \cos \theta$

$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180°$

$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$

$0 = 0$ ✓

$\sin \theta = 1 + \cos \theta$

$\sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$

$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$

$1 = 1$ ✓

$\sin \theta = 1 + \cos \theta$

$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$

$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$

$-1 \neq 1$ ✗

الحلان هما $90°$ و $180°$.

تمرين موجّه

4A. $\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = 4$

4B. $\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta$

إذا لم تكن المعادلة قابلةً للحل بسهولةٍ باستخدام تحليل العوامل، حاول إعادة كتابة التعبير باستخدام المتطابقات المثلثية. ولكن استخدام المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع، قد يعطي حلولاً دخيلة. إذًا فمن الضروري التحقق من حلك باستخدام المعادلة الأصلية.

نصيحة في حل المسائل

الانتظام ابحث عن الأنماط في حلولك. وابحث عن أزواج من الحلول التي يساوي الفرق بينها π أو 2π بالتحديد واكتب حلولك بأبسط نمط ممكن.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات

حُـلّ $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$	المعادلة الأصلية
$2(1 + \tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$	خاصية التوزيع
$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$	بوضع طرف واحد مساويًا للصفر 0.
$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$	عامل
$\tan^2\theta - 3 = 0$ أو $\tan^2\theta + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\tan^2\theta = 3$	$\tan^2\theta = -1$
$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$	لا يعطي هذا الجزء أي حلولٍ نظرًا إلى أن $\tan^2\theta$ ليست سالبةً على الإطلاق.

$\theta = 60° + 180°k$ و $\theta = -60° + 180°k$. حيث k أي عددٍ صحيح. الحلان هما $60° + 180°k$ و $-60° + 180°k$.

نصيحة دراسية

حل المعادلات المثلثية تذكر أن *حل معادلة مثلثية* يعني الحلّ لإيجاد جميع قيم المتغير.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

5A. $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B. $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

التحقق من فهمك

مثال 1 الانتظام حُلّ كل معادلة مما يلي إذا كانت $0° \le \theta \le 360°$.

1. $2\sin\theta + 1 = 0$

2. $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$

3. $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

4. $2\cos\theta = 1$

5. $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\sin 2\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7 $\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta$

8. $\sin\theta + \cos\theta = 1$

مثال 2 حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان.

9. $4\sin^2\theta - 1 = 0$

10. $2\cos^2\theta = 1$

11. $\cos 2\theta \sin\theta = 1$

12. $\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{2}$

13. $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

14. $\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجة.

15. $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

16. $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

17. $2\sin^2\theta - 1 = 0$

18. $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

19. $\cos 2\theta \sin\theta = 1$

20. $\sin\theta\tan\theta - \tan\theta = 0$

مثال 3

21. الضوء يمكن تقدير عدد ساعات النهار d في هارتفورد، كونيتيكت، باستخدام المعادلة $d = 3\sin\dfrac{2\pi}{365}t + 12$. حيث t هو عدد الأيام بعد 21 مارس.

a. ما الأيام التي يكون عدد ساعات النهار خلالها في هارتفورد $10\frac{1}{2}$ ساعات بالتحديد؟

b. باستخدام النتائج في الجزء a، اذكر ما أيام السنة التي فيها على الأقل $10\frac{1}{2}$ ساعات في النهار. واشرح كيف عرفت ذلك.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المثالان 5-4 حُـلّ كلا من المعادلات التالية.

22. $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$

23. $\tan^2 \theta + 2 \tan \theta + 1 = 0$

24. $\cos^2 \theta + 3 \cos \theta = -2$

25. $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$

26. $\tan \theta = 1$

27. $\cos 8\theta = 1$

28. $\sin \theta + 1 = \cos 2\theta$

29. $2 \cos^2 \theta = \cos \theta$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 حُـلّ كل معادلة مما يلي عند الفترة المعطاة.

30. $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}; 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

31. $2 \sin^2 \theta = 1; 90^\circ < \theta < 270^\circ$

32. $\sin 2\theta - \cos \theta = 0; 0 \le \theta \le 2\pi$

33. $3 \sin^2 \theta = \cos^2 \theta; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

34. $2 \sin \theta + \sqrt{3} = 0; 180^\circ < \theta < 360^\circ$

35. $4 \sin^2 \theta - 1 = 0; 180^\circ < \theta < 360^\circ$

مثال 2 حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان.

36. $\cos 2\theta + 3 \cos \theta = 1$

37. $2 \sin^2 \theta = \cos \theta + 1$

38. $\cos^2 \theta - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cos \theta$

39. $3 \cos \theta - \cos \theta = 2$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجة.

40. $\sin \theta - \cos \theta = 0$

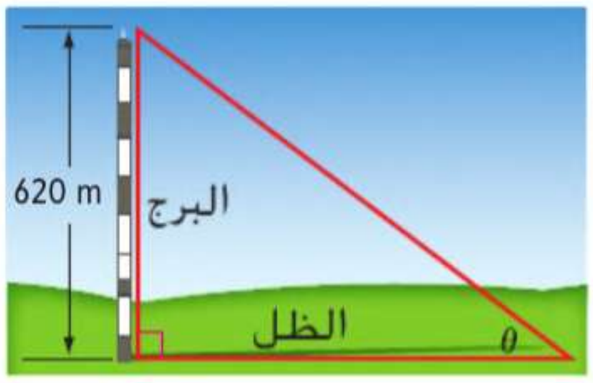
41. $\tan \theta - \sin \theta = 0$

42. $\sin^2 \theta = 2 \sin \theta + 3$

43. $4 \sin^2 \theta = 4 \sin \theta - 1$

مثال 3

44. الإلكترونيات من أعلى الأبنية في العالم أحد أبراج النقل التلفزيوني بالقرب من فارغو في داكوتا الشمالية بالولايات المتحدة. وارتفاعه 620 m. فما قياس الزاوية θ إذا كان طول ظل البرج 1.6 km؟



المثالان 5-4 حُـلّ كل من المعادلات التالية.

45. $2 \sin^2 \theta = 3 \sin \theta + 2$

46. $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta = 3$

47. $\sin^2 \theta + \cos 2\theta = \cos \theta$

48. $2 \cos^2 \theta = -\cos \theta$

49. التبرير المنطقي نظرًا إلى المدّ والجزر في المحيط، يتغير عمق y نهر التايمز في لندن، بالأمتار، مع دالة sine لـ x التي تمثل الساعة في اليوم. وفي يوم محدد، كانت تلك الدالة تساوي $y = 3 \sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$ تقابل 12:00 منتصف الليل، 1:00 صباحا، 2:00 صباحا، .... 12:00 منتصف ليل الليلة التالية.

a. ما العمق الأقصى لنهر التايمز في ذلك اليوم؟

b. في أي وقت حدث ذلك العمق الأقصى؟

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

50. $(\cos \theta)(\sin 2\theta) - 2 \sin \theta + 2 = 0$

51. $2 \sin^2 \theta + (\sqrt{2} - 1) \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

52. $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

53. $1 - \sin^2 \theta - \cos \theta = \frac{3}{4}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

54. $2 \sin \theta = \sin 2\theta$

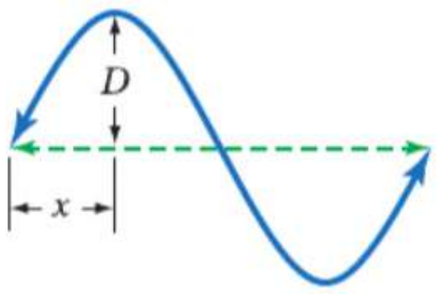
55. $\cos \theta \tan \theta - 2 \cos^2 \theta = -1$

56. الماس حسب قانون سنيل، $n_1 \sin i = n_2 \sin r$. حيث n_1 هي قرينة انكسار الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 هي قرينة انكسار الوسط الذي يدخله الضوء، و i هو قياس زاوية الورود بالدرجات، و r هو قياس زاوية الانكسار بالدرجات.

a. تساوي قرينة انكسار الماس 2.42، وتساوي قرينة انكسار الهواء 1.00. فإذا أصابت حزمة من الضوء قطعة من الماس بزاوية تساوي 35°، فما زاوية الانكسار؟

b. اشرح كيف يمكن لخبير الأحجار الكريمة استخدام قانون سنيل لتحديد ما إذا كانت قطعةٌ من الألماس أصلية.

57. المثابرة يمكن تمثيل موجةٍ في وتر جيتارٍ باستخدام المعادلة $D = 0.5 \sin (6.5x) \sin (2500t)$. وفيها D هي الإزاحة بالملّيمتر عند الموضع x ملّيمترًا بالنسبة للطرف الأيسر من الوتر عند الزمن t ثانية. جـــد أول زمن موجب يكون فيه للنقطة الواقعة على بعد 0.5 m من الطرف الأيسر إزاحةٌ مسافتها 0.01 mm.



58. التمثيلات المتعددة تأمل المتباينة المثلثية $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$.

a. جدوليًا أنشئ جدول قيم حيث $0° \leq \theta \leq 360°$. ما قيم θ التي تجعل $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$؟

b. بيانيًا مثّل $y = \sin \theta$ و $y = \frac{1}{2}$ بيانيًا على التمثيل البياني نفسه حيث $0° \leq \theta \leq 360°$. ما قيم θ التي يكون عندها التمثيل البياني لـــ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـــ $y = \frac{1}{2}$؟

c. تحليليًا بناءً على إجاباتك عن الجزأين a و b، حلّ $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ لإيجاد كل قيم θ.

d. جبريا حلّ كل متباينة مما يلي إذا كانت $0 \leq \theta \leq 360°$. ثم حلّ كلاً منها لإيجاد كل قيم θ.

i. $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $2 \sin \theta \leq \sqrt{3}$

iii. $-\sin \theta \geq 0$

iv. $\cos \theta - 1 < -\frac{1}{2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

مسائل مهارات التفكير العليا

59. التحدي حلّ $\sin 2x < \sin x$ حيث $0 \leq x \leq 2\pi$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

60. التبرير قارن ووبيّن الفرق بين حلّ المعادلات المثلثية بحلّ المعادلات الخطية والتربيعية. ما التقنيات المتماثلة؟ وما التقنيات المختلفة؟ وكم عدد الحلول التي تتوقعها؟

61. الكتابة في الرياضيات لماذا يكون للمعادلات المثلثية عدد لا نهائي من الحلول في أغلب الأحيان؟

62. مسألة غير محددة الإجابة اكتب مثالاً لمعادلةٍ مثلثيةٍ يكون لها حلان بالضبط إذا كانت $0° \leq \theta \leq 360°$.

63. التحدي كم عدد الحلول التي تتوقعها ضمن الفترة $0° \leq \theta \leq 360°$ لـــ $a \sin (b\theta + c) = d$. إذا كان $a \neq 0$ و b عددًا صحيحا موجبًا؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

64. الإجابة الموسعة حصل بلال على AED 2500 بمثابة مكافأة لتخرّجه. وقد أودع المبلغ في حساب للتوفير كانت نسبة المرابحة فيه 5.5% في العام.

a. فكم أصبح في حساب التوفير بعد 5 سنوات إذا لم يقم بأيّ إيداعات أو سحوبات إضافية؟

b. بعد كم عامٍ سيكون المبلغ المودعُ في حسابه قد تضاعف؟

65. الاحتمال جـــد احتمال الحصول على العدد 3 ثلاث مرات متتالية إذا رُمي مكعب أعداد ثلاث مرات.

A $\frac{1}{216}$ **C** $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{36}$ **D** $\frac{1}{4}$

66. استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-2)$ للدالة أدناه.

$$f(x) = x^4 + 10x^2 + x + 8$$

F 62 **H** 30

G 38 **J** 8

67. SAT/ACT يستمرّ نمط النقاط المبين أدناه إلى ما لا نهاية، بحيث تضاف نقاط إضافيةٌ في كل خطوة.

ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتحديد عدد النقاط في الخطوة رقم n؟

A $2n$ **D** $2(n + 2)$

B $n(n + 2)$ **E** $2(n + 1)$

C $n(n + 1)$

مراجعة شاملة

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 4-12)

68. $\cos 165°$

69. $\sin 22\frac{1}{2}°$

70. $\sin \frac{7\pi}{8}$

71. $\cos \frac{7\pi}{12}$

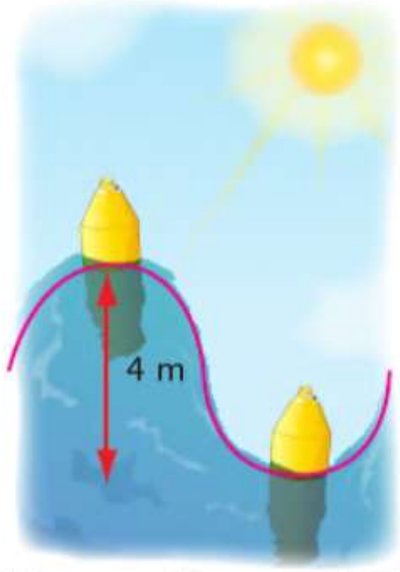
أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:. (الدرس 2-12)

72. $\sin (270° - \theta) = -\cos \theta$

73. $\cos (90° + \theta) = -\sin \theta$

74. $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

75. $\sin (90° - \theta) = \cos \theta$



76. السلامة في الماء ترتفع عوّامةٌ في الميناء وتنخفض مع حركة الأمواج. تساوي المسافة بين النقطة العليا والسفلى 4 m. وتتحرك العوامة من نقطتها العليا إلى نقطتها الدنيا وعودةً إلى نقطتها العليا كل 10 s.

a. اكتب معادلةً لتمثيل حركة العوّامة. وافترض أنها في وضع التوازن عند $t = 0$ وأنها في طريقها إلى الأعلى من مستوى الماء الطبيعي.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح ارتفاع العوّامة بدلالة الزمن.

c. ما ارتفاع العوّامة بعد 12 s؟

جـــد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلةٍ حسابيةٍ مما يلي.

77. $a_1 = 17, a_n = 197, S_n = 2247$

78. $a_1 = -13, a_n = 427, S_n = 18{,}423$

79. $n = 31, a_n = 78, S_n = 1023$

80. $n = 19, a_n = 103, S_n = 1102$

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة نسبيّة بيانيًا.

81. $f(x) = \frac{1}{(x + 3)^2}$

82. $f(x) = \frac{x + 4}{x - 1}$

83. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$

McGraw-Hill Education مؤسسة © محفوظة لصالح حقوق الطبع والتأليف

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 5-12 و 2-12 و 1-12)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقات بين الدوال المثلثية.
- يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط المعادلات والتعابير المثلثية وإثباتها وحلّها.

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3-12)

- بالنسبة لجميع قيم A و B:

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها (الدرس 4-12)

- متطابقات أضعاف:

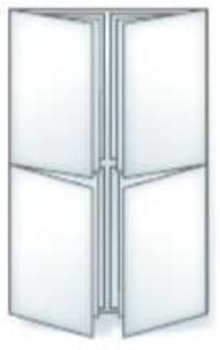
$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- متطابقات نصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$
$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$
$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

متطابقة الزاويتين المتتامتين	cofunction identity
متطابقة الزاوية السالبة	negative angle identity
متطابقة فيثاغورس	Pythagorean identity
متطابقة ناتج القسمة	quotient identity
متطابقة عكسية	reciprocal identity
معادلة مثلثية	trigonometric equation
متطابقة مثلثية	trigonometric identity

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.

1. يمكن استخدام _____ لإيجاد sine 75° و Cosine إذا كان sine 90° و cosine 15° معروفين.
2. المتطابقتان $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ هما مثالان على _____.
3. _____ هي معادلةٌ تضم متطابقات مثلثية، وهي صحيحةٌ لجميع القيم التي تكون فيها جميع التعابير في المعادلة معرّفة.
4. يمكن استخدام _____ لإيجاد sin 60° باستخدام الزاوية 30° بمثابة مرجع.
5. تكون _____ صحيحةً فقط عند قيم محددة للمتغير.
6. يمكن استخدام صيغة _____ لإيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.
7. المتطابقتان $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ و $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ هما مثالان على _____.
8. يمكن استخدام _____ لإيجاد sine 120° أو Cosine إذا كان sine 90° و cosine 30° معروفين.
9. $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ هي مثال على _____.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة درس بدرس

12-1 المتطابقات المثلثية

جـــد قيمة كل تعبير مما يلي.

10. $\sin \theta$، إذا كانت $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $270° < \theta < 360°$

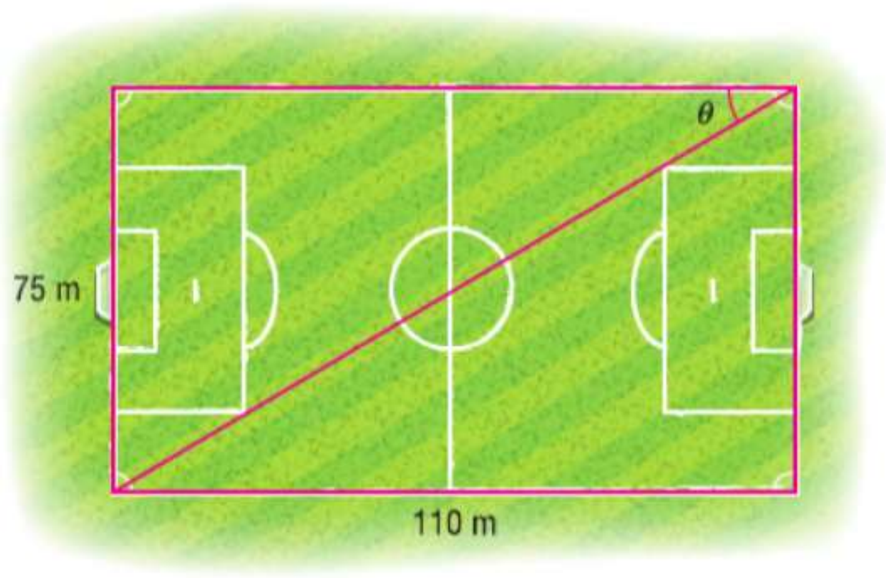
11. $\sec \theta$، إذا كانت $\cot \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90° < \theta < 180°$

12. $\tan \theta$، إذا كانت $\cot \theta = 2$ و $0° < \theta < 90°$

13. $\cos \theta$، إذا كانت $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ و $180° < \theta < 270°$

14. $\csc \theta$، إذا كانت $\cot \theta = -\frac{4}{5}$ and $270° < \theta < 360°$

15. كرة القدم في مباريات كرة القدم الدولية، بعدا أرض الملعب هما 110 m في 75 m. جـــد $\sin \theta$.



بسط كل تعبير.

16. $1 - \tan \theta \sin \theta \cos \theta$

17. $\tan \theta \csc \theta$

18. $\sin \theta + \cos \theta \cot \theta$

19. $\cos \theta (1 + \tan^2 \theta)$

مثال 1

جـــد $\sin \theta$ إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{4}$ و $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	متطابقة مثلثية
$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$	اطرح $\cos^2 \theta$ من كل طرف.
$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$	عوض عن $\frac{3}{4}$ بـ $\cos \theta$.
$\sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{16}$	تربيع $\frac{3}{4}$.
$\sin^2 \theta = \frac{7}{16}$	اطرح.
$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$	جـــد الجذر التربيعي لكلٍ من الطرفين.

نظرًا إلى أن الزاوية θ تقع في الربع الأول، فإن $\sin \theta$ موجبة.

وبالتالي، $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسط $\cos \theta \sec \theta \cot \theta$.

$$\cos \theta \sec \theta \cot \theta = \cos \theta \left(\frac{1}{\cos \theta}\right)\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)$$
$$= \cot \theta$$

12-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

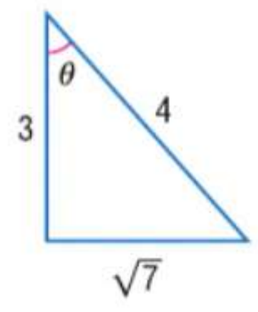
أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

20. $\tan \theta \cos \theta + \cot \theta \sin \theta = \sin \theta + \cos \theta$

21. $\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \sin \theta + \cos \theta$

22. $\sec^2 \theta - 1 = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$

23. الهندسة يستخدم المثلث القائم الموضح على اليسار في صناعة نوع من الألحفة. استخدم قياسات أضلاع المثلث لتثبت أن $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$.



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} = \cot \theta + \csc \theta$

$\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} \stackrel{?}{=} \cot \theta + \csc \theta$	المتطابقة الأصلية
$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \stackrel{?}{=} \cot \theta + \csc \theta$	بســـط.
$\cot \theta + \csc \theta = \cot \theta + \csc \theta$ ✓	بســـط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

جـــد القيمة الدقيقة لكل من النسب الآتية:.

24. $\cos(-135°)$ **25.** $\cos 15°$

26. $\sin 210°$ **27.** $\sin 105°$

28. $\tan 75°$ **29.** $\cos 105°$

أثبت صحة كلا من المتطابقات.

30. $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$

31. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

32. $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

جـــد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

استخدم $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$$\begin{aligned}\sin 75° &= \sin(30° + 45°)\\ &= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

12-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

جـــد القيم الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$، و $\cos\frac{\theta}{2}$ لكلٍ مما يلي.

33. $\cos\theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

34. $\sin\theta = -\frac{1}{4}; 180° < \theta < 270°$

35. $\cos\theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36. البيسبول الملعب الداخلي للعبة البيسبول هو عبارة عن مربع طول ضلعه 27 m.

a. جـــد طول القطر.

b. اكتب النسبة الخاصة بـ $\sin 45°$ باستخدام أطوال ملعب البيسبول الداخلي.

c. استخدم الصيغة $\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$ لإثبات صحة النسبة التي كتبتها في الجزء b.

مثال 5

جـــد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ و θ تقع في الربع الثاني.

$$\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} && \text{متطابقة نصف الزاوية}\\ &= \pm\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} && \cos\theta = -\frac{3}{5}\\ &= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} && \text{اطرح.}\\ &= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} && \text{اقسم.}\\ &= \pm\frac{2\sqrt{5}}{5} && \text{بسط.}\end{aligned}$$

بما أن الزاوية θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

12-5 حل المعادلات المثلثية

جـــد جميع حلول لكل معادلة مما يلي بالفترة المعطاة.

37. $2\cos\theta - 1 = 0; 0° \le \theta < 360°$

38. $4\cos^2\theta - 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

39. $\sin 2\theta + \cos\theta = 0; 0° \le \theta < 360°$

40. $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3; 0° \le \theta < 360°$

41. $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

مثال 6

جـــد جميع حلول $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$.

$$\begin{aligned}&\sin 2\theta - \cos\theta = 0 && \text{المتطابقة الأصلية}\\ &2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0 && \text{متطابقة ضعف الزاوية}\\ &\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0 && \text{بالتحليل إلى العوامل.}\end{aligned}$$

$\cos\theta = 0$ أو $2\sin\theta - 1 = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\sin\theta = \frac{1}{2}; \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

12 تدريب على الاختبار

1. **الاختيار من متعدد** ما التعبير الذي يكافئ $\sin\theta + \cos\theta$ $\cot\theta$؟

A $\cot\theta$ C $\sec\theta$

B $\tan\theta$ D $\csc\theta$

2. أثبت صحة المتطابقة $\sin(60° + \theta) = \sin(30° - \theta)$.

3. أثبت صحة المتطابقة $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ وكانت $90° < \theta < 180°$؟

F $\frac{5}{3}$

G $\frac{\sqrt{34}}{8}$

H $-\frac{4}{5}$

J $\frac{4}{5}$

جـــد قيمة كل تعبير مما يلي.

5. $\cot\theta$، إذا كانت $\sec\theta = \frac{4}{3}$؛ $270° < \theta < 360°$

6. $\tan\theta$، إذا كانت $\cos\theta = -\frac{1}{2}$؛ $90° < \theta < 180°$

7. $\sec\theta$، إذا كانت $\csc\theta = -2$؛ $180° < \theta < 270°$

8. $\cot\theta$، إذا كانت $\csc\theta = -\frac{5}{3}$؛ $270° < \theta < 360°$

9. $\sec\theta$، إذا كانت $\sin\theta = \frac{1}{2}$؛ $0° \le \theta < 90°$

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

10. $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

11. $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

12. $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta\sec^2\theta$

13. $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

14. $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \csc\theta + \cot\theta$

15. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\pi}{8}$؟

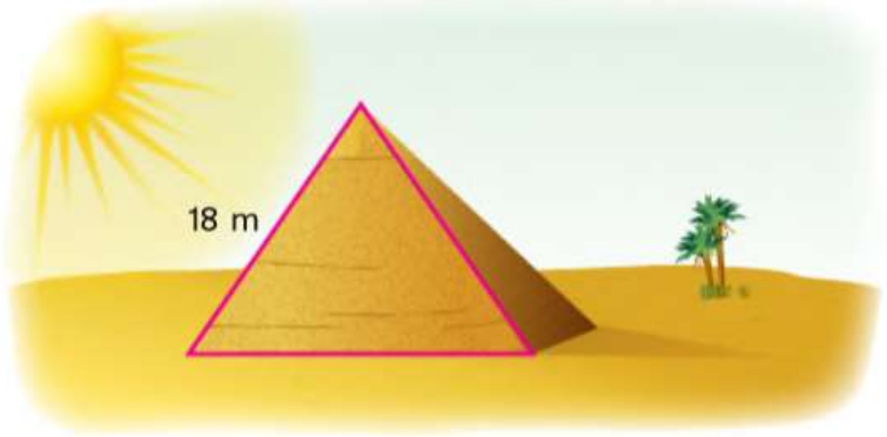
A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

B $\sqrt{2} - 1$

C $1 - \sqrt{2}$

D $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

16. **التاريخ** يعتقد بعض الباحثين أن بنّائي أهرامات مصر القديمة، كهرم خوفو الأكبر، لربما حاولوا بناء أوجه الأهرامات على هيئة مثلثات متساوية الأضلاع. ولكنهم اضطروا بعد ذلك إلى تغييرها إلى أشكالٍ أخرى. افترض أنّ هرما يشيّد بحيث يكون وجهه مثلثًا متساوي الأضلاع وطول ضلعه 18 m.



a. جـــد ارتفاع المثلث متساوي الأضلاع.

b. استخدم الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ وقياسات المثلث متساوي الأضلاع وارتفاعه لإثبات أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$. جـــد القيم الدقيقة.

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

17. $\cos(-225°)$

18. $\sin 480°$

19. $\cos 75°$

20. $\sin 165°$

21. **الصواريخ** يطلق نموذج صاروخ بسرعةٍ متجهة ابتدائية تساوي 20 m في الثانية. ويمكن إيجاد مدى المقذوف باستخدام الصيغة $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$، حيث يمثل R المدى، ويمثل v السرعة المتجهة الابتدائي، ويمثل g تسارع الجاذبية الأرضية أو 9.8 m في الثانية تربيع، وتمثل θ زاوية الإطلاق . فما الزاوية المطلوبة لكي يبلغ مدى الصاروخ 25 m؟

حُـلّ كل معادلة مما يلي لكلّ قيم θ إذا كانت θ بالراديان.

22. $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

23. $2\sin 3\theta - 1 = 0$

حُـلّ كل معادلة مما يلي بالفترة $0° \le \theta \le 360°$ إذا كانت θ بالدرجات.

24. $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

25. $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحضير للاختبارات المعيارية

تحويل التعابير لأبسط صورة

تطلب منك بعض الأسئلة الاختيارية استخدام خواص الجبر لتبسيط التعابير. اتّبع الخطوات المبينة أدناه لمساعدتك في الإعداد لحلّ هذه الأنواع من المعادلات.

إستراتيجيات لتبسيط التعابير

الخطوة 1

ادرس التعابير التي يطلب منك تبسيطها.

اسأل نفسك:

- هل هناك أية عملياتٍ رياضيةٍ يمكنني تطبيقها للمساعدة في تبسيط التعبير؟
- هل هناك أية قوانين أو متطابقات يمكنني تطبيقها للمساعدة في تبسيط التعبير؟

الخطوة 2

حل المسألة وتحقق من حلولك.

- استخدم ترتيب العمليات.
- جمع الحدود وحلّل إلى العوامل حسب الاقتضاء.
- طبّق القوانين والمتطابقات.

الخطوة 3

تحقق من حلّك إذا سمح الوقت.

- راجع الخطوات التي اتّبعتها في حلّك للتحقق من أنك أجبت عن السؤال بصورةٍ تامةٍ ودقيقة.
- يمكنك أحيانا عند الحاجة استخدام حاسبتك العلمية لمساعدتك في التحقق من حلّك. جـــد قيمة التعبير الأصلي وإجابتك من أجل قيمةٍ ما وتحقق من أنهما متماثلان.

مثال على الاختبار المعياري

حل المسألة أدناه. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة.

بسط التعبير المثلثي الموضح أدناه عبر كتابته بدلالة $\sin \theta$. واكتب الحل هنا للحصول على درجةٍ كاملة.

$$\frac{\cos \theta}{\sec \theta + \tan \theta}$$

معايير رصد الدرجات	
المعايير	**النقاط**
درجة كاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة خاطئة ولكن التفسير صحيح.	1
بدون درجات: إما أن الإجابة غير مكتوبة أو غير منطقية.	0

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

اقرأ عبارة المسألة بعناية. لديك تعبيرٌ مثلثيٌ وعليك تبسيطه عبر كتابته بدلالة $\sin \theta$. حيث يجب أن تتضمن إجابتك النهائية فقط أعدادًا وحدودًا تضم $\sin \theta$. اكتب الحل هنا للحصول على درجةٍ كاملة.

مثال على إجابة من نقطتين:

استخدم متطابقات مثلثيةً لتبسيط التعبير.

$$\frac{\cos \theta}{\sec \theta + \tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

تعريف $\sec \theta$ و $\tan \theta$

$$= \frac{\cos \theta}{\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}}$$

بسـط المقام.

$$= \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta}$$

بسـط الكسر المركب.

$$= \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta}$$

متطابقة فيثاغورس

$$= \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{1 + \sin \theta}$$

عامل

$$= 1 - \sin \theta$$

بسـط.

التعبير المبسط هو $1 - \sin \theta$.

تم بوضوح ذكر الخطوات والحسابات والتبرير. وقد وصل الطالب أيضا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

التمارين

حُـلّ كل مسألة. اكتب الحل هنا. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة في بداية الدرس.

1. بسط التعبير $\frac{\sec \theta}{\cot \theta + \tan \theta}$ بكتابته بدلالة $\sin \theta$.

2. ما ناتج $\frac{10a^{-3}}{29b^4} \div \frac{5a^{-5}}{16b^{-7}}$؟

3. اكتب $\frac{y+1}{y-1} + \frac{y+2}{y-2} + \frac{y}{y^2 - 3y + 2}$ في أبسط صورة.

4. بسّط $\frac{\cot^2 \theta - \csc^2 \theta}{\tan^2 \theta - \sec^2 \theta}$ بكتابته في صورة ثابت.

5. اضرب $(2i)(6 - i)(4 + 3i + -5)$.

6. بسط $(\cot \theta + 1)^2 - 2 \cot \theta$ بكتابته بدلالة $\csc \theta$.

7. عبّر عن $\frac{4 - \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}$ في أبسط صورة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

12 تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 12

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. يمكن تمثيل الربح p الذي يحققه متجر حصة للقمصان في اليوم الواحد باستخدام المتباينة $10t + 200 < p < 15t + 250$. حيث يمثل t عدد القمصان المبيعة. فإذا باع المتجر 45 قميصا يوم الجمعة، فأيٌّ مما يلي يمثل مبلغا منطقيًا لما حققه المتجر من مكسب؟

A AED 200 **B** AED 625 **C** AED 850 **D** AED 950

2. استخدم متطابقةً الفرق بين زاويتين لإيجاد القيمة الدقيقة لـ cos 75°.

F $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ **H** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

G $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ **J** $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

3. استخدم الجدول لتحديد التعبير الذي يمثل بشكل أفضل قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم فيه n ضلعا بالدرجات.

المضلع	عدد الأضلاع	قياس الزاوية
مثلث	3	60
رباعي الأضلاع	4	90
خماسي أضلاع	5	108
سداسي أضلاع	6	120
سباعي الأضلاع	7	128.5
ثماني الأضلاع	8	135

A $(180 + n) \div n$

B $\frac{180}{n}$

C $[180(n - 2)] \div n$

D $30(n - 1)$

4. أي مما يلي يصف التمثيلين البيانيين لـ $y = 3x - 5$ و $4y = 12x + 16$؟

F للمستقيمين نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y نفسها.

G للمستقيمين نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x نفسها.

H المستقيمان متعامدان.

J المستقيمان متوازيان.

5. كيف يمكنك التعبير عن $\cos \theta \csc \theta \cot \theta$ بدلالة $\sin \theta$؟

A $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$ **C** $\frac{\sin^2 \theta}{2}$

B $\frac{1 + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$ **D** $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta}$

6. تبلغ مساحة مستطيلٍ $25a^4 - 16b^2$. فما العاملان اللذان يمكن أن يمثلا الطول مضروبًا في العرض؟

F $(5a^2 + 4b)(5a^2 + 4b)$ **H** $(5a - 4b)(5a - 4b)$

G $(5a^2 + 4b)(5a^2 - 4b)$ **J** $(5a + 4b)(5a - 4b)$

7. ما مجال $f(x) = \sqrt{5x - 3}$؟

A $\left\{x \middle| x > \frac{3}{5}\right\}$ **C** $\left\{x \middle| x \geq \frac{3}{5}\right\}$

B $\left\{x \middle| x > -\frac{3}{5}\right\}$ **D** $\left\{x \middle| x \geq -\frac{3}{5}\right\}$

نصيحة عند حل الاختبار

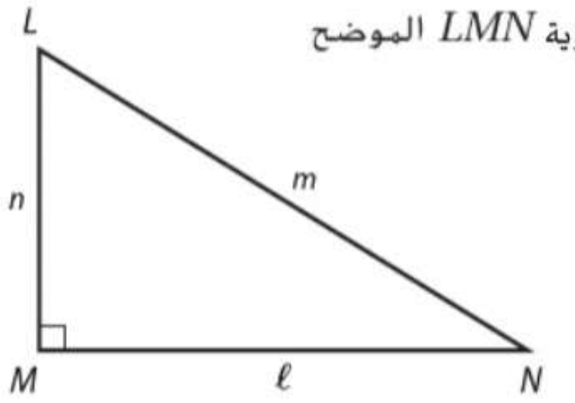
السؤال 2 يمكنك التحقق من إجابتك باستخدام حاسبةٍ علمية. جد cos 75° وقارنه بقيمة إجابتك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

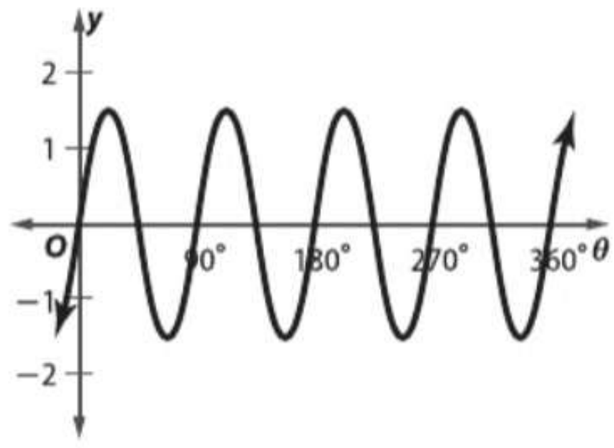
8. استخدم المثلث قائم الزاوية LMN الموضح على اليسار لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$.



9. الإجابة الشبكية حلّ المعادلة المثلثية أدناه في الفترة من 0 إلى 2π. وقرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئة عند الحاجة.

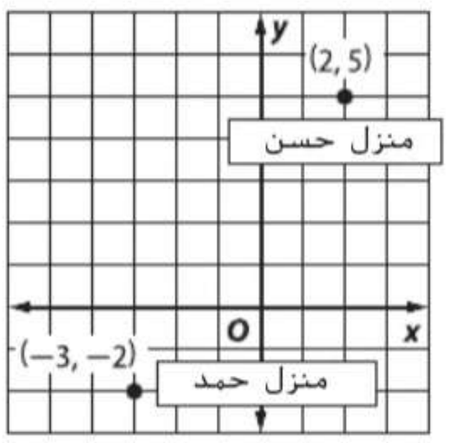
$$3 \cos \frac{t}{3} = 2$$

10. حدّد سعة الدالة الممثلة بيانيًا أدناه وفترتها. ثم اكتب معادلةً للدالة.



11. الإجابة الشبكية A

عند وضع شبكة إحداثية فوق خريطة، نجد أن منزل حمد يقع عند النقطة $(-3, -2)$، ويقع منزل حسن عند النقطة $(2, 5)$. يمثّل ضلع كل مربع مجموعة سكنية واحدة. فما المسافة التقريبية بين منزل حمد ومنزل حسن؟



الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

12. يبلغ راتب منى السنوي AED 50,000. وتحصل على زيادة في الراتب بنسبة 6% كل عام.

a. كم سيصبح راتبها في غضون أربعة أعوام مقربًا إلى أقرب درهم؟

b. كم سيصبح راتبها في غضون عشر سنوات مقربًا إلى أقرب درهم؟

13. الأقراص المدمجة أشار استطلاعٌ جرى مؤخرًا إلى أن 91% من طلاب المدارس الثانوية لا يشترون أقراصا مدمجة. وقد اختير 8 طلاب عشوائيًا.

a. حدّد الاحتمالات المرافقة لعدد الطلاب الذين لا يشترون أقراصا مدمجةً عبر حساب التوزيع الاحتمالي.

b. ما احتمال أن يكون 7 من أصل 8 طلاب على الأقل لا يشترون أقراصا مدمجة؟

c. كم عدد الطلاب الذين تتوقع أنهم يشترون أقراصا مدمجة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

Chapter sourced from: EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math III © 2012 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الرموز

الجبر

$\neq$	لا يساوي
$\approx$	تقريبًا يساوي
$\sim$	يشابه
$>, \geq$	أكبر من، أكبر من أو يساوي
$<, \leq$	أصغر من، أصغر من أو يساوي
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لـ a
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a
$a : b$	نسبة a إلى b
(x, y)	زوج مرتّب
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتب)
i	الوحدة التخيلية
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية
∞	ما لا نهاية
$-\infty$	سالب ما لا نهاية
$[\,]$	تتضمن الأطراف
$(\,)$	لا تتضمن الأطراف
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي لـ x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لـ x
ω	أوميجا، السرعة الزاويّة
α	ألفا، قياس الزاوية
β	بيتا، قياس الزاوية
γ	جاما، قياس الزاوية
θ	ثيتا، قياس الزاوية
λ	لامدا، طول الموجة
ϕ	فاي، قياس الزاوية
$\mathbf{a}$	متجه a
$\lvert\mathbf{a}\rvert$	طول المتجه a

المجموعات والمنطق

$\in$	ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$	المجموعة الخالية
$\sim p$	نفي p، ليس p
$p \wedge q$	ربط p و q
$p \vee q$	فصل p أو q
$p \longrightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q
$p \longleftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا q

الهندسة

$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث
$^\circ$	درجة
π	باي pi
$\measuredangle$	درجات
$m\angle A$	قياس $\angle A$
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع من النقطة A الى النقطة B
AB	قياس $\overline{AB}$، المسافة بين A و B
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	متعامد على
$\triangle$	مثلث
$\square$	متوازي أضلاع
n-gon	مضلع عدد أضلاعه n
$\vec{a}$	متجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار متجه من A إلى B
A'	صورة الصورة الأصلية A
$\rightarrow$	موضوع على
$\odot A$	دائرة مركزها A
$\overset{\frown}{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A وB
$\overset{\frown}{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A وC
$m\overset{\frown}{AB}$	قياس درجة القوس AB

حساب المثلثات

$\sin x$	جيب الزاوية x
$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\tan x$	ظل الزاوية x
$\sin^{-1} x$	Arcsin x
$\cos^{-1} x$	Arccos x
$\tan^{-1} x$	Arctan x

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

□lb□ 💋□👇□💋2000 💋=💋□T□ 💋□👇□💋1	□g□ 💋□□□□📼💋1000 💋=💋□kg□
□oz□ 💋😋🍴🦜□□16 💋=💋□👇□💋1	□mg□ 💋□□□□🚃🐯🌙🌙⚾💋1(
	□□□□📼□🌙🐯🍸💋1000 💋=💋□t
😋🌙🍸🛥️🟢□□💋□□□□🟢□	
□pt□ 💋😠🐯🐟🙂👴💋2 💋=💋□□□□🍸💋1	
□c□ 💋□□🍸💋2 💋=💋😠👴🐟🙂👴💋1	
😋🌙□🙂□💋🔫□🙂🍴🦜□□8 💋=💋□□🍸💋1	
□qt□ 💋□🙂👴□□💋4 💋=💋□gal□ 💋□□🟢🙂📼💋1	□mL□ 💋□🍸🌙🐯🌙⚾💋100(
□fl oz□ 💋😋🌙□🙂🔫💋😋🍴🦜□□128 💋=💋□□🟢🙂📼💋1	□🍸🟢💋1000 💋=💋□kL□
□yd□ 💋□□□□🙂🐟💋1760 💋=💋□mi□ 💋□🐯⚾💋1	□m□ 💋□🍸⚾💋1000 💋=💋□km
□ft□⚾🛥️□💋5280 💋=💋□🐯⚾💋1	□cm□ 💋□🍸🌄🐯🍸👴🔫💋
□□□🍸💋3 💋=💋□□□□🐟🙂💋1	□mm□ 💋□🍸🌄🐯🌙🌙⚾💋1
□in□ 💋😋□□👴💋12 💋=💋□□🍸💋1	
😋□□👴💋36 💋=💋□□□□🐟🙂💋1	
🍺❗😋□□🟢□💋□□🟢🛥️🚃□	
□□□□□□□□□□□□□□□□	
□□□□□□□□□□□□□□□□	
□□□□□□□□□□□□□□□

العمليات والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a. يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b. $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c. $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c. $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$، يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$. إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (<)*	لأي أعداد a و b و c.إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (<)*	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (<)*	لأي أعداد a و b و c. 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b. إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b كلاهما 0.

* تنطبق هذه الخواص كذلك على $>$ و $\geq$ و $\leq$.

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	**الضرب في كمية عددية**	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	**الضرب**	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	**مربع فرق**	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	**ناتج ضرب مجموع وفرق**	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$ $= a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	**خاصية الأس الثابت**	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	**تغيير الأساس**	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الصيغ والمفاهيم الجبرية

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

المرابحة المركبة	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	النمو أو الاضمحلال الأسيّ	$N = N_0(1 + r)^t$
النمو المركب المستمر	$A = Pe^{rt}$	النمو أو الاضمحلال الأسيّ المستمر	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية القوة	$\log_b x^p = p \log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية تغيير الاساس	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني لمتتالية هندسية	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	$S = \frac{a_1}{1 - r}, \lvert r \rvert < 1$	صيغة أويلر	$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$	المتسلسلة الأسيّة	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
نظرية ذات الحدين	$(a + b)^n = {}_nC_0\, a^nb^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0b^n$		
متسلسلة القوة للجيب وجيب وجيب التمام	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$		

المتجهات

الجمع في المستوى	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	الجمع في الفضاء	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	الطرح في الفضاء	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	الضرب القياسي في الفضاء	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب النقطي في الفضاء	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	مسقط u على v	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	الضرب القياسي لثلاثة متجهات	$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطوع المخروطيّة

قطع مكافئ	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ أو $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	**دائرة**	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ أو $x^2 + y^2 = r^2$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	**قطع زائد**	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الدوران المحوري للقطوع المخروطيّة	$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ و $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$		

المعادلات الوسيطيّة

الموقع العمودي	$y = tv_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$	**المسافة الأفقية**	$x = tv_0\cos\theta$

الاعداد المُركبة

صيغة الضرب	$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$	**صيغة القسمة**	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$	**نظرية ديموافر**	$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$	**المسافة على خط الأعداد**	$d = \lvert a-b\rvert$
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$	**طول القوس**	$\ell = \frac{x}{360}\cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف في المستوى الاحداثي	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	**نقطة المنتصف على خط الأعداد**	$M = \frac{a+b}{2}$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$	**نظرية فيثاغورس**	$a^2 + b^2 = c^2$

المحيط

مربع	$P = 4s$	**مستطيل**	$P = 2\ell + 2w$	**دائرة**	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	**هرم**	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	**مخروط**	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	**مخروط**	$S = \pi r\ell + \pi r^2$	**إسطوانة**	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$	**كرة**	$S = 4\pi r^2$	**مكعب**	$S = 6s^2$

الحجم

منشور	$V = Bh$	**مخروط**	$V = \frac{1}{3}\pi r^2h^2$	**إسطوانة**	$V = \pi r^2h$
هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$	**كرة**	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	**مكعب**	$V = s^3$
متوازي مستطيلات	$V = \ell wh$				

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

الدوال والمتطابقات المثلثية

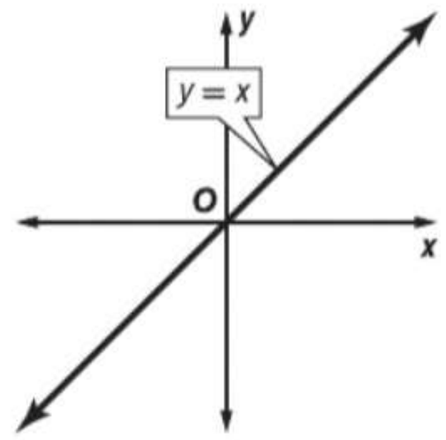
الدوال المثلثية			
النسب المثلثية	$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$	$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$	$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
	$\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta}$	$\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
قانون جيوب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	**صيغة هيرون**	$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
السرعة الخطية	$v = \frac{s}{t}$	**السرعة الزاويّة**	$\omega = \frac{\theta}{t}$
المتطابقات المثلثية			
متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$
	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقات المتممات	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الفردي والزوجي	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$		$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$		$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
	$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$		$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	
متطابقات تخفيض الأس	$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
متطابقات نصف الزاوية	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$	
	$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$		$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
	$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$		$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$		$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$		$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

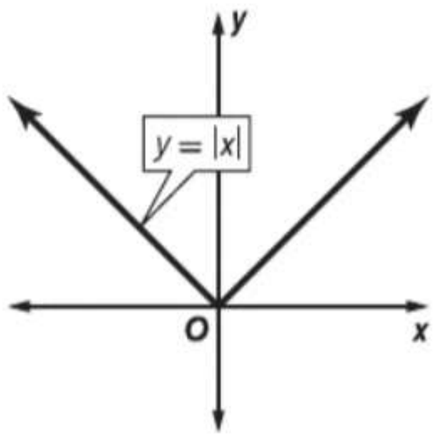
الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

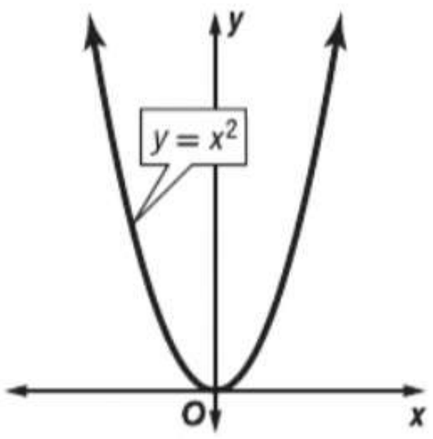
الدوال الخطية



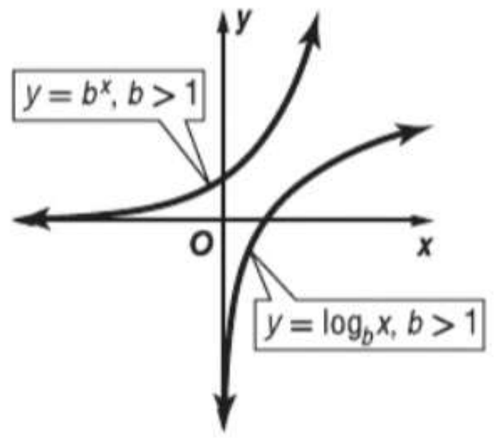
دوال القيمة المطلقة



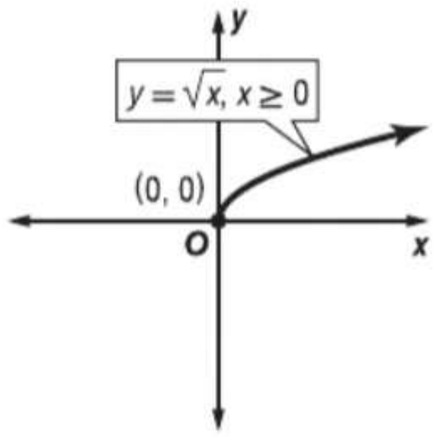
الدوال التربيعية



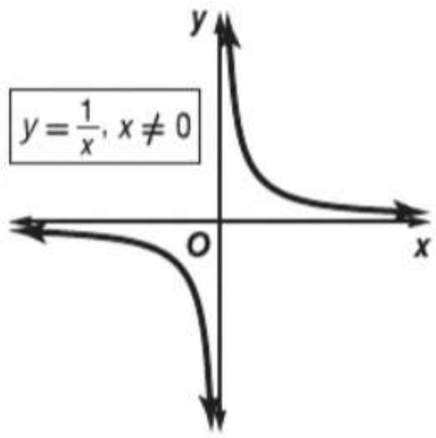
الدوال الأسية واللوغاريتمية



دوال الجذر التربيعي



الدوال العكسية والنسبية



العمليات الحسابية على الدوال

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**الضرب**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

نهاية مجموع دالتين	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	**نهاية طرح دالتين**	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
نهاية قسمة دالتين	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$.	**نهاية دالة مرفوعة لأس**	$\lim_{x\to c}[f(x)^n] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
السرعة	اللحظيّة $v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t}{h}$ المتوسطة $v_{avg} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	**نهاية الجذر النوني لدالة**	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$. إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ و n عدد زوجي

التفاضل

قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$	**المجموع أو الفرق**	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
قاعدة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	**قاعدة القسمة**	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكامل

التكامل غير المحدود	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	**النظرية الاساسيّة في التفاضل والتكامل**	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الصيغ والمفاهيم الاحصائية

قيمة z لمتوسط العينة	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	قيمة z	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}}$ or $z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	خاصية ذات الحدين	$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة، في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E$ or $\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$. درجات الحرية: $n - 2$	معامل الارتباط	$r = \frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

Glossary/القاموس

English	العربية
A	
absolute value A number's distance from zero on the number line, represented by $\lvert x \rvert$.	**قيمة مطلقة** بُعد العدد عن نقطة الصفر على خط الأعداد، ويُرمز لها بالرمز $\lvert x \rvert$.
absolute value function A function written as $f(x) = \lvert x \rvert$, where $f(x) = \begin{cases} x \text{ if } x > 0 \\ 0 \text{ if } x = 0 \\ -x \text{ if } x < 0 \end{cases}$, for all values of x.	**دالة القيمة المطلقة** دالة تُكتب هكذا، $f(x) = \lvert x \rvert$ حيث $f(x) = \begin{cases} x \text{ if } x > 0 \\ 0 \text{ if } x = 0 \\ -x \text{ if } x < 0 \end{cases}$، لكل قيم x.
algebraic expression An expression that contains at least one variable.	**تعبير جبري** تعبير يحتوي على متغير واحد على الأقل.
alternative hypothesis Mutually exclusive to the null hypothesis. It is stated as an inequality using $\neq$, $<$, $\leq$, $>$, or $\geq$.	**فرضية بديلة** متنافية مع فرضية العدم. ويتم التعبير عنها كمتباينة باستخدام $\neq$ أو $>$ أو $\geq$ أو $<$ أو $\leq$.
altitude 1. In a prism or cylinder, a segment perpendicular to the bases with an endpoint in each plane. 2. In a pyramid or cone, the segment that has the vertex as one endpoint and is perpendicular to the base.	**الارتفاع** 1. في المنشور أو الأسطوانة، يكون الارتفاع هو الجزء العمودي على القواعد ذات نقطة نهاية في كل **مستوى**. 2. في الهرم أو المخروط، يكون الارتفاع هو الجزء الذي يتضمن الرأس بوصفها نقطة نهاية واحدة ويكون عموديًا على القاعدة.
amplitude For functions in the form $y = a \sin b\theta$ or $y = a \cos b\theta$, the amplitude is $\lvert a \rvert$.	**سعة** بالنسبة إلى الدوال في شكل $y = a \sin b\theta$ أو $y = a \cos b\theta$، تكون السعة هي $\lvert a \rvert$.
angle of depression The angle between a horizontal line and the line of sight from the observer to an object at a lower level.	**زاوية الانخفاض** الزاوية الواقعة بين خط أفقي وخط الرؤية من نقطة الملاحظة إلى جسمٍ ما عند مستوى أقل.
angle of elevation The angle between a horizontal line and the line of sight from the observer to an object at a higher level.	**زاوية الارتفاع** الزاوية الواقعة بين خط أفقي وخط الرؤية من نقطة الملاحظة إلى جسمٍ ما عند مستوى أعلى.
angle of rotation The angle through which a preimage is rotated to form the image.	**زاوية الدوران المحوري** الزاوية التي تدور الصورة الأصلية بمقدارها لتكون الصورة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Arccosine The inverse of $y = \cos x$, written as $x = \text{Arccos } y$.

قوس جيب تمام الزاوية المعكوس $y = \cos x$، يُكتب $x = \text{Arccos } y$.

Arcsine The inverse of $y = \sin x$, written as $x = \text{Arcsin } y$.

قوس جيب الزاوية المعكوس $y = \sin x$، يكتب $x = \text{Arcsin } y$.

Arctangent The inverse of $y = \tan x$ written as $x = \text{Arctan } y$.

قوس ظل الزاوية المعكوس $y = \tan x$ يُكتب $x = \text{Arctan } y$.

arithmetic mean The terms between any two nonconsecutive terms of an arithmetic sequence.

وسط حسابي الحدود بين أي حدين غير متتابعين في متتالية حسابية.

arithmetic sequence A sequence in which each term after the first is found by adding a constant, the common difference d, to the previous term.

متتالية حسابية متتابعة ينتج كل حد يلي الحد الأول منها عن طريق إضافة مقدار ثابت ، الفرق المشترك d، إلى الحد السابق.

arithmetic series The indicated sum of the terms of an arithmetic sequence.

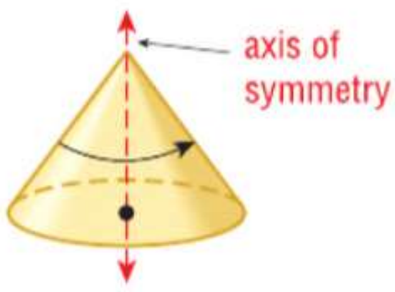
متتسلسلة حسابية المجموع الذي يشير إلى حدود متتالية حسابية.

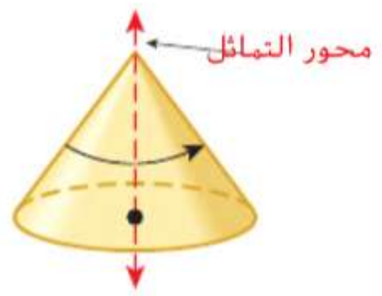
axis 1. In a cylinder, the segment with endpoints that are the centers of the base. 2. In a cone, the segment with endpoints that are the vertex and the center of the base.

محور 1. في الأسطوانة، يكون المحور هو الجزء الذي له نقاط نهاية تمثل مراكز القواعد. 2. في المخروط، يكون المحور هو الجزء الذي له نقاط نهاية تمثل رأس القاعدة ومركزها.

axis symmetry Symmetry in a three-dimensional figure that occurs if the figure can be mapped onto itself by a rotation between 0° and 360° in a line.

تماثل المحور يحدث التماثل في شكل ثلاثي الأبعاد إذا كان من الممكن أن يبدو الشكل كما هو بعد تدويره بمقدار معين يتراوح من 0 – 360 درجة.

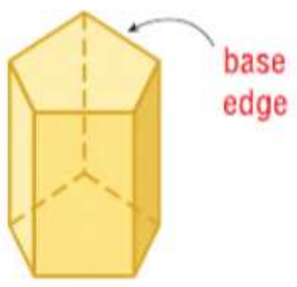


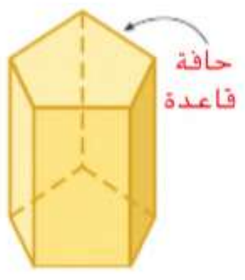


B

base edges The intersection of the lateral faces and bases in a solid figure.

حواف القاعدة تقاطع القواعد والأوجه الجانبية في مجسم ما.





McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

bias An error that results in a misrepresentation of members of a population.

تحيز خطأ ينتج عنه سوء تمثيل أفراد المجتمع الإحصائي.

binomial distribution A distribution that shows the probabilities of the outcomes of a binomial experiment.

توزيع ذو حدين توزيع يعرض احتمالات نتائج تجربة ذات حدين.

binomial experiment An experiment in which there are exactly two possible outcomes for each trial, a fixed number of independent trials, and the probabilities for each trial are the same.

تجربة ذات حدين تجربة يوجد بها نتيجتان محتملتان تمامًا لكل تجريب ورقم ثابت للتجريبات المستقلة وتكون الاحتمالات واحدة لكل تجريب.

Binomial theorem If n is a nonnegative integer, then $(a + b)^n = 1a^nb^0 + \frac{n}{1}a^{n-1}b^1 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots + 1a^0b^n$.

مبرهنة ذات حدين إذا كان n عددًا صحيحا غير سالب، فمن ثم

$$(a + b)^n = 1a^nb^0 + \frac{n}{1}a^{n-1}b^1 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots + 1a^0b^n$$

bivariate data Data consisting of pairs of values.

بيانات ذات متغيرين بيانات تتكون من أزواج من القيم.

boundary A line or curve that separates the coordinate plane into two regions.

حد الخط أو المنحنى الذي يقسم المستوى الإحداثي إلى منطقتين.

bounded A region is bounded when the graph of a system of constraints is a polygonal region.

محدود منطقة تُحدَّد عندما يكون التمثيل البياني لنظام القيود منطقة مضلعة.

box-and-whisker plot A diagram that divides a set of data into four parts using the median and quartiles. A box is drawn around the quartile values and whiskers extend from each quartile to the extreme data points.

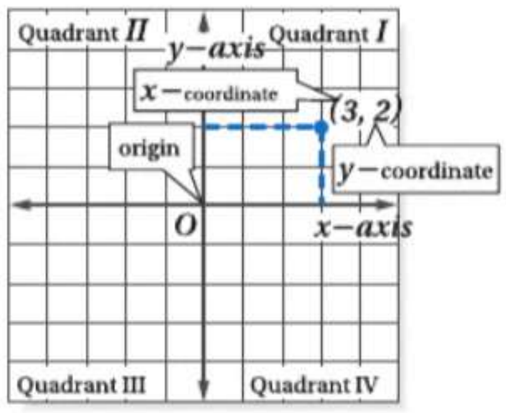
مخطط الصندوق ذو العارضين مخطط بياني يقسم مجموعة من البيانات إلى أربعة أجزاء باستخدام الوسيط والأرباع. ويرسم الصندوق حول قيم الربع ويمتد العارضان من كل ربع إلى أقصى نقاط للبيانات.

break-even point The point at which the income equals the cost.

نقطة التعادل النقطة التي يتساوى عندها الدخل مع التكلفة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Cartesian coordinate plane A plane divided into four quadrants by the intersection of the x-axis and the y-axis at the origin.



census A survey in which every member of the population is polled.

center of a circle The point from which all points on a circle are equidistant.

center of a hyperbola The midpoint of the segment whose endpoints are the foci.

center of an ellipse The point at which the major axis and minor axis of an ellipse intersect.

center of dilation The center point from which dilations are performed.

center of rotation A fixed point around which shapes move in a circular motion to a new position.

center of symmetry See point of symmetry.

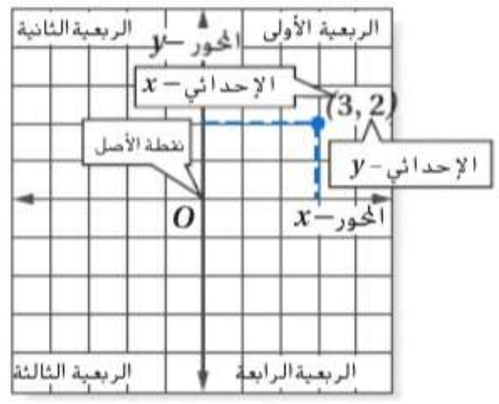
central angle An angle with a vertex at the center of the circle and sides that are radii.

Change of Base Formula For all positive numbers a, b, and n, where $a \neq 1$ and $b \neq 1$,

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}.$$

chord For a given sphere, a segment with endpoints that are on the sphere.

مستوى إحداثي ديكارتي مستوى ينقسم إلى أربعة أرباع عن طريق تقاطع المحور السيني والمحور الصادي عند نقطة الأصل.



تعداد دراسة مسحية يتم فيها استطلاع رأي كل فرد في المجتمع الإحصائي.

مركز الدائرة النقطة التي تكون جميع النقاط التي تخرج منها على الدائرة متساوية في المسافة.

مركز القطع الزائد نقطة منتصف القطعة التي تُعد نقاط نهايتها هي البؤرتان.

مركز القطع الناقص النقطة التي يتقاطع عندها المحور الأكبر والمحور الأصغر لقطع ناقص.

مركز تغيير الأبعاد نقطة المركز التي يتم تغيير الأبعاد بمقياس منها.

مركز الدوران المحوري نقطة ثابتة تتحرك حولها الأشكال بطريقة دائرية إلى موقع جديد.

مركز التماثل انظر نقطة التماثل.

زاوية مركزية زاوية ذات رأس عند مركز الدائرة والأضلاع التي تعد أنصاف أقطار.

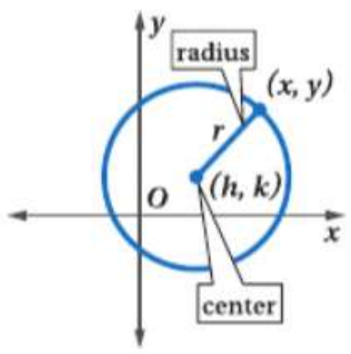
تغيير القاعدة الأساسية بالنسبة إلى جميع الأعداد الموجبة a وb وn، حيث $a \neq 1$ و$b \neq 1$،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}.$$

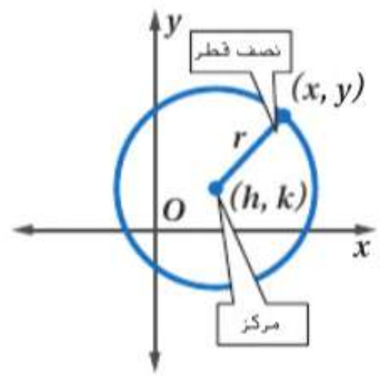
وتر بالنسبة إلى كرة معينة، يكون الوتر هو القطعة ذات نقاط النهاية التي توجد على الكرة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

circle The set of all points in a plane that are equidistant from a given point in the plane, called the center.



دائرة مجموعة النقاط، في مستوى معين، التي تكون متساوية الأبعاد من نقطة معلومة في المستوى، تُسمى المركز.



circular function A function defined using a unit circle.

دالة دائرية دالة محددة باستخدام دائرة وحدة.

co-vertices
ellipse—The endpoints of the minor axis.
hyperbola—The endpoints of the conjugate axis.

رؤوس مرافقة
القطع الناقص — نقاط نهاية المحور الأصغر.
قطع زائد— نقاط نهاية المحور المرافق.

coefficient matrix A matrix that contains only the coefficients of a system of equations.

مصفوفة المعاملات مصفوفة تحتوي فقط على معاملات نظام المعادلات.

combination An arrangement of objects in which order is not important.

تركيب ترتيب الأجسام بطريقة لا يكون الترتيب مهمًا فيها.

common difference The difference between the successive terms of an arithmetic sequence.

فرق مشترك الفرق بين الحدود المتتالية للتسلسل الحسابي.

common logarithms Logarithms that use 10 as the base.

لوغاريتمات عادية اللوغاريتمات التي تستخدم الأساس 10.

common ratio The ratio of successive terms of a geometric sequence.

نسبة مشتركة نسبة الحدود المتتالية للتسلسل الهندسي.

complex fraction A rational expression whose numerator and/or denominator contains a rational expression.

كسر مجمع تعبير نسبي يحتوي بسطه و/أو مقامه على تعبير نسبي.

composition of functions A function is performed, and then a second function is performed on the result of the first function. The composition of f and g is denoted by $f \circ g$, and $[f \circ g](x) = f[g(x)]$.

تركيب الدوال إنشاء دالة ما ثم إنشاء دالة ثانية بناءً على نتيجة الدالة الأولى. يتم الإشارة إلى تركيب f وg كما يلي $f\ g$ و$f[g(x]$. $[(f\ g](x) = f$].

composition of reflections Successive reflections in parallel lines.

تركيب الانعكاسات الانعكاسات المتتالية في خطوط موازية.

composition of transformations The resulting transformation when a transformation is applied to a figure and then another transformation is applied to its image.

تركيب التحويلات التحويل الناتج عند تطبيق تحويل على شكل ما ثم تطبيق تحويل آخر على صورة هذا الشكل.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

compound event Two or more simple events.

حدث مركب حدث مكون من حدثين بسيطين أو أكثر.

compound inequality Two inequalities joined by the word and or or.

متباينة مركبة متباينتان متصلتان بالكلمتين "و" أو "أو".

conditional probability The probability of an event occurring given that another event has already occurred.

احتمال شرطي احتمال وقوع حادثة بشرط وقوع حادثة أخرى بالفعل.

confidence interval An estimate of a population parameter stated as a range with a specific degree of certainty.

فترة الثقة تقدير معلمة المجتمع الإحصائي المحدد كمدى مع درجة محددة من اليقين.

conic section Any figure that can be obtained by slicing a double cone.

قطع مخروطي أي شكل يمكن الحصول عليه عن طريق تقسيم مخروط مزدوج إلى أجزاء.

conjugate axis The segment of length $2b$ units that is perpendicular to the transverse axis at the center.

محور مرافق القطعة المستقيمة المارة بـ $2b$، والتي تكون عمودية على المحور القاطع عند المركز.

conjugates Binomials of the form $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ and $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$, where a, b, c, and d are rational numbers.

مرافقات ثنائيات الحد للشكل $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ ، حيث a وb و c و d أعداد نسبية.

consistent A system of equations that has at least one ordered pair that satisfies both equations.

متوافق نظام من معادلتين لديه زوج مرتب واحد على الأقل يحقق كلتا المعادلتين.

constant difference The absolute value of the difference between the distances from any point on the hyperbola to the foci of the hyperbola.

فرق ثابت القيمة المطلقة للفرق بين المسافات من أي نقطة على القطع الزائد إلى بؤرتي القطع الزائد.

constant function A linear function of the form $f(x) = b$.

دالة ثابتة دالة خطية للشكل $f(x) = b$.

constant matrix A matrix that contains the constants of a system.

مصفوفة ثابتة مصفوفة تحتوي على ثوابت النظام.

constant of variation The constant k used with direct or inverse variation.

ثابت التغير الثابت k المستخدم مع التنوع المباشر أو المقلوب.

constant sum The sum of the distances from the foci to any point on the ellipse.

مجموع ثابت إجمالي المسافات من البؤرتين إلى أي نقطة على القطع الناقص.

constraints Conditions given to variables, often expressed as linear inequalities.

قيود الشروط المفروضة على المتغيرات والتي غالبًا ما يتم التعبير عنها باسم المتباينات الخطية.

continuous random variable The numerical outcome of a random event that can take on any value.

متغير عشوائي متصل النتيجة العددية لحادثة عشوائية يمكن أن تأخذ أي قيمة.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

continuous relation A relation that can be graphed with a line or smooth curve.

دالة متصلة علاقة يمكن تمثيلها بيانيًا بخط أو منحنى منتظم.

corner view The view from a corner of a three-dimensional figure, also called the isometric view.

عرض الزاوية العرض من إحدى زوايا شكل ثلاثي الأبعاد ويسمى أيضا العرض المتساوي المقاييس.

correlation coefficient A measure that shows how well data are modeled by a linear equation.

معامل الارتباط القياس الذي يوضح مدى جودة نمذجة البيانات عن طريق معادلة خطية.

cosecant For any angle, with measure α, a point $P(x, y)$ on its terminal side, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\csc \alpha = \frac{r}{y}$.

قاطع التمام بالنسبة إلى أي زاوية، بقياس α، تكون النقطة $P(x, y)$ على جانبه الطرفي، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\csc \alpha = \frac{r}{y}$.

cosine For any angle, with measure α, a point $P(x, y)$ on its terminal side, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$.

جيب التمام فيما يتعلق بأي زاوية، بقياس α، a تكون النقطة $P(x, y)$ على جانبه الطرفي، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\cos \alpha = \frac{x}{r}$.

cotangent For any angle, with measure α, a point $P(x, y)$ on its terminal side, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cot \alpha = \frac{x}{y}$

ظل التمام فيما يتعلق بأي زاوية، بقياس α، تكون النقطة $P(x, y)$ على جانبه الطرفي، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\cot \alpha = \frac{x}{y}$.

coterminal angles Two angles in standard position that have the same terminal side.

زوايا مشتركة النهاية زاويتان في موقع قياسي لديهما نفس الجانب الطرفي.

co-vertices **ellipse**—The endpoints of the minor axis.
hyperbola—The endpoints of the conjugate axis.

رؤوس مرافقة **القطع الناقص** — نقاط نهاية المحور الأصغر.
قطع زائد— نقاط نهاية المحور المرافق.

Cramer's Rule A method that uses determinants to solve a system of linear equations.

قاعدة كرامر طريقة تستخدم المحددات لحل نظام المعادلات الخطية.

critical region The range of values that suggests a significant enough difference to reject the null hypothesis.

منطقة حرجة مجموعة القيم التي تشير إلى فرق هائل وكاف لرفض فرضية العدم.

cross products In the proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, where $b \neq 0$

ضروب تقاطعية في التناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0$

and $d \neq 0$, the cross products are ad and bc. The proportion is true if and only if the cross products are equal.

و $d \neq 0$، وتكون الضروب التقاطعية هي ad وbc. ويكون التناسب صحيحا فقط في حالة تساوي الضرب التقاطعي.

cross section The intersection of a solid and a plane.

المقطع العرضي تقاطع مجسم مع مستوى.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

cycle One complete pattern of a periodic function.

دائرة نموذج واحد مكتمل لدالة دورية.

D

degree of a polynomial The greatest degree of any term in the polynomial.

درجة كثيرة الحدود أكبر درجة لأي من الحدود في كثيرة الحدود.

dependent A system of equations that has an infinite number of solutions.

نظام غير مستقل نظام معادلات يمتلك عددًا لا نهائيًا من الحلول.

dependent events Events in which the outcome of one event affects the outcome of another event.

حوادث غير مستقلة حوادث تؤثر نتيجة إحداها على نتيجة الأخرى.

dependent variable The other variable in a function, usually y, whose values depend on x.

متغير تابع المتغير الآخر في دالة ما، عادة ما تكون y، تعتمد قيمها على x.

depressed polynomial The quotient when a polynomial is divided by one of its binomial factors.

كثيرة الحدود المنخفضة حاصل القسمة عندما يتم قسمة كثيرة الحدود عن طريق أحد عواملها ذات الحدين.

descriptive statistics The branch of statistics that focuses on collecting, summarizing, and displaying data.

إحصاءات وصفية أحد فروع الإحصاء يركز على جمع البيانات وتلخيصها وعرضها.

determinant A square array of numbers or variables enclosed between two parallel lines.

محدد مصفوفة مربعة من الأعداد أو المتغيرات المرفقة بين خطين موازيين.

diagonal rule A method for finding the determinant of a third-order matrix.

قاعدة قطرية طريقة لإيجاد محدد مصفوفة ذي رتبة ثالثة.

diameter In a sphere, a segment that contains the center of the sphere, and has endpoints that are on the sphere.

قطر في الكرة، هو القطعة التي تتضمن مركز الكرة ولديها نقاط نهاية على الكرة.

dilation 1. A transformation in which a geometric figure is enlarged or reduced. 2. A transformation that enlarges or reduces the original figure proportionally. A dilation with center C and positive scale factor k, $k \neq 1$, is a function that maps a point P in a figure to its image such that

- if point P and C coincide, then the image and preimage are the same point, or
- if point P is not the center of dilation, then P' lies on $\overrightarrow{CP}$ and $CP' = k(CP)$.

If $k < 0$, P' is the point on the ray opposite $\overrightarrow{CP}$ such that $CP' = |k|(CP)$.

تغيير الأبعاد بمقياس 1. تحويل يتم فيه تكبير الشكل الهندسي أو اختزاله. 2. تحويل يكبر الشكل الأصلي أو يختزله بشكل متناسب. تغيير الأبعاد بمقياس عند المركز C ومعامل المقياس الإيجابي k, $k \neq 1$، هو الدالة التي ترسم النقطة P في شكل ما على صورتها بحيث

- إذا تطابقت النقطتان P وC، تكون كل من الصورة والصورة الأصلية نفس النقطة
- أو إذا لم تكن النقطة P هي مركز تغيير الأبعاد، إذن P' تقع على $\overrightarrow{CP}$ و$CP' = k(CP)$.

إذا كانت $k < 0$ وP' هي النقطة التي توجد على الشعاع المقابل $\overrightarrow{CP}$ بحيث $CP' = |k|(CP)$.

dimensional analysis Performing operations with units.

تحليل بُعدي القيام بالعمليات باستخدام الوحدات.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

dimensions of a matrix The number of rows, m, and the number of columns, n, of the matrix written as $m \times n$.

أبعاد المصفوفة عدد الصفوف m وعدد الأعمدة n للمصفوفة المكتوبة بالصورة $m \times n$.

directrix See parabola.

دليل انظر القطع المكافئ.

direct variation y varies directly as x if there is some nonzero constant k such that $y = kx$. k is called the constant of variation.

تغير مباشر تتغير y مباشرة مثل x إذا كان هناك ثابت k غير صفري، بحيث تكون $y = kx$. k تسمى ثابت التغير.

discrete random variable The numerical outcome of a random event that takes on countable values.

متغير عشوائي منفصل النتيجة العددية لحادثة عشوائية يمكن أن تأخذ قيمًا معدودة.

discrete relation A relation in which the domain is a set of individual points.

علاقة منفصلة العلاقة التي يكون فيها النطاق عبارة عن مجموعة من النقاط الفردية.

Distance Formula The distance between two points with coordinates (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is given by

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

صيغة المسافة المسافة بين نقطتين لهما الإحداثيات (x_1, y_1) و(x_2, y_2) يتم إعطاؤها

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

domain The set of all x-coordinates of the ordered pairs of a relation.

مجال مجموعة تضم كل إحداثيات x للأزواج المرتبة للعلاقة.

dot plot Two sets of data plotted as ordered pairs in a coordinate plane.

رسم بياني بالنقاط مجموعتان من البيانات الممثلة بالنقاط كأزواج مرتبة في مستوى إحداثي.

E

e The irrational number 2.71828.... e is the base of the natural logarithms.

e عدد غير نسبي e ....2.71828 أساس اللوغاريتمات الطبيعية.

element Each value in a matrix.

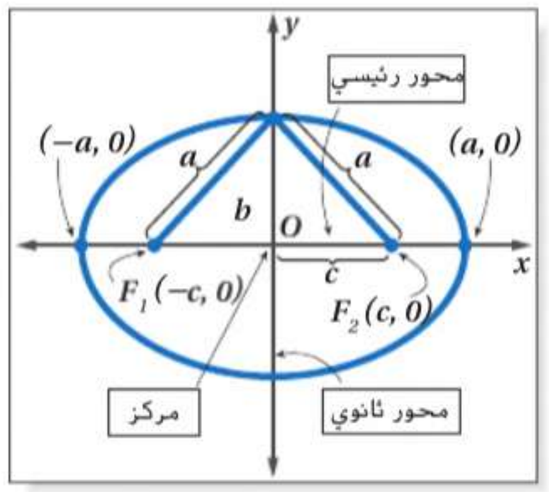
عنصر كل قيمة في المصفوفة.

elimination method Eliminate one of the variables in a system of equations by adding or subtracting the equations.

طريقة الحذف طريقة يتم فيها حذف أحد المتغيرات في نظام المعادلات عن طريق جمع المعادلات أو طرحها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ellipse The set of all points in a plane such that the sum of the distances from two given points in the plane, called foci, is constant.



empty set The solution set for an equation that has no solution, symbolized by { } or ∅.

end behavior The behavior of the graph as x approaches positive infinity ($+\infty$) or negative infinity ($-\infty$).

enlargement An image that is larger that the original figure.

equation A mathematical sentence stating that two mathematical expressions are equal.

event One or more outcomes of a trial.

expected value 1. The expected value of a discrete random variable is the weighted average of the values of the variable. 2. Also mathematical expectation, is the average value of a random variable that one expects after repeating an experiment or simulation an infinite number of times.

experiment Something that is intentionally done to people, animals, or objects, and then the response is observed.

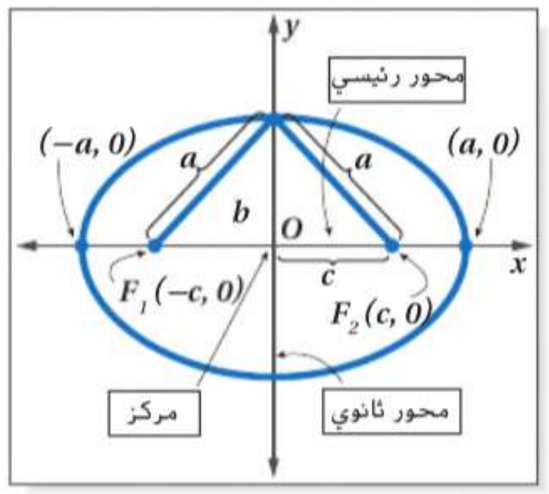
experimental probability What is estimated from observed simulations or experiments.

experimental probability distribution A distribution of probabilities estimated from experiments.

extended ratios Ratios that are used to compare three or more quantities.

extraneous solution A number that does not satisfy the original equation.

قطع ناقص مجموعة تضم كل النقاط في مستوى ما بحيث يكون مجموع المسافات المحددة من نقطتين ثابتتين في المستوى، تسمى البؤرتان، ثابتًا.



مجموعة خالية مجموعة الحلول لمعادلة ما ليس لها حل ويرمز لها بالرمز { } أو ∅.

سلوك طرفي سلوك التمثيل البياني عندما تقترب x من اللانهاية الموجبة ($+\infty$) أو اللانهاية السالبة($-\infty$).

تكبير الصورة الأكبر من الشكل الأصلي.

معادلة عبارة مؤلفة من رموز رياضية، تنص على مساواة تعبيرين رياضيين.

حدث نتيجة أو أكثر من نتائج التجريب.

قيمة متوقعة 1. القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي منفصل هي المتوسط الحسابي المرجح لقيم المتغير. 2. تعرف القيمة المتوقعة أيضا باسم التوقع الرياضي وهو متوسط القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي عقب تكرار تجربة أو محاكاة عدد لانهائي من المرات.

تجربة شيء ما يتم القيام به عن قصد للأفراد أو الحيوانات أو الأجسام وبعد ذلك يتم ملاحظة الاستجابة التي تنجم عن ذلك.

احتمال تجريبي ما يتم تقديره من عمليات المحاكاة أو التجارب التي تمت ملاحظتها.

توزيع الاحتمال التجريبي توزيع الاحتمالات المقدرة من التجارب.

نسب ممتدة النسب المستخدمة لمقارنة ثلاث كميات أو أكثر.

حل خارجي عدد لا يحقق المعادلة الأصلية.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

extrema The maximum and minimum values of a function.

قيم قصوى القيم العظمى والصغرى لدالة ما.

extremes In $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, the numbers a and d.

طرفا التناسب في $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، هما العددان a وd.

F

Factor theorem The binomial $x - r$ is a factor of the polynomial $P(x)$ if and only if $P(r) = 0$.

نظرية العامل ذات الحدين $x - r$ هي عامل دالة كثيرة الحدود $P(x)$ فقط إذا كانت $P(r) = 0$.

family of graphs A group of graphs that displays one or more similar characteristics.

مجموعة المخططات مجموعة من التمثيلات البيانية التي تعرض سمة مشابهة واحدة أو أكثر.

feasible region The intersection of the graphs in a system of constraints.

منطقة الحلول المحتملة تقاطع التمثيلات البيانية في نظام القيود.

finite sequence A sequence containing a limited number of terms.

متتالية متناهية متتالية تحتوي على عددٍ محدودٍ من الحدود.

five-number summary The three quartiles and the maximum and minimum values in a set of data.

ملخص من خمسة أعداد ثلاثة ربيعيات والقيم القصوى والدنيا في مجموعة بيانات.

foci

ellipse—The two fixed points from which the sum of the distances from a set of all points in a plane is constant.

hyperbola—The two fixed points from which the difference of the distances from a set of all points in a plane is constant.

بؤر

القطع الناقص – النقطتان الثابتتان اللتان يكون فيهما مجموع المسافات من مجموعة تضم كل النقاط في المستوى ثابتا.

القطع الزائد – النقطتان الثابتتان اللتان يكون فيهما فرق المسافات من مجموعة تضم كل النقاط في المستوى ثابتًا.

focus See parabola, ellipse, hyperbola.

بؤرة راجع القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.

FOIL method The product of two binomials is the sum of the products of *F* the *first* terms, O the *outer* terms, I the *inner* terms, and L the *last* terms.

طريقة فويل حاصل ضرب ذواتي الحدين هو مجموع حاصل ضرب *F* الحدود الأولى وO الحدود الخارجية وI الحدود الداخلية وL الحدود الأخيرة.

formula A mathematical sentence that expresses the relationship between certain quantities.

صيغة عبارة رياضية توضح العلاقة بين كميات معينة.

frequency The number of cycles in a given unit of time.

تردد عدد الدورات في وحدة زمنية معينة.

function A relation in which each element of the domain is paired with exactly one element in the range.

دالة علاقة يقترن فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد آخر في المدى.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

function notation An equation of y in terms of x can be rewritten so that $y = f(x)$. For example, $y = 2x + 1$ can be written as $f(x) = 2x + 1$.

ترميز الدالة معادلة y في صورة x يمكن إعادة كتابتها بحيث $y = f(x)$. على سبيل المثال، $y = 2x + 1$ يمكن أن تُكتب في الصورة $f(x) = 2x + 1$.

G

general form An equation of a parabola in the form $y = ax^2 + bx + c$.

صورة عامة معادلة قطع مكافئ تأخذ الصورة $y = ax^2 + bx + c$.

geometric mean The terms between any two nonsuccessive terms of a geometric sequence.

متوسط هندسي الحدود بين أي حدين غير متتاليين في متتالية هندسية.

geometric sequence A sequence in which each term after the first is found by multiplying the previous term by a constant r, called the common ratio.

متتالية هندسية متتالية يتم فيها إيجاد كل حد بعد الحد الأول عن طريق ضرب الحد السابق في عدد ثابت r، ويُسمى النسبة المشتركة.

geometric series The sum of the terms of a geometric sequence.

متسلسلة هندسية مجموع الحدود للمتتالية الهندسية.

glide reflection The composition of a translation followed by a reflection in a line parallel to the translation vector.

انعكاس انحداري تركيب من الانسحاب متبوعا بانعكاس في خط مستقيم موازٍ لمتجه الانسحاب.

greatest integer function A step function, written as $f(x) = [\![x]\!]$, where $f(x)$ is the greatest integer less than or equal to x.

دالة أكبر عدد صحيح دالة درجية تُكتب بالصورة $f(x) = [\![x]\!]$، حيث $f(x)$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

H

histogram A histogram uses bars to display numerical data that have been organized into equal intervals.

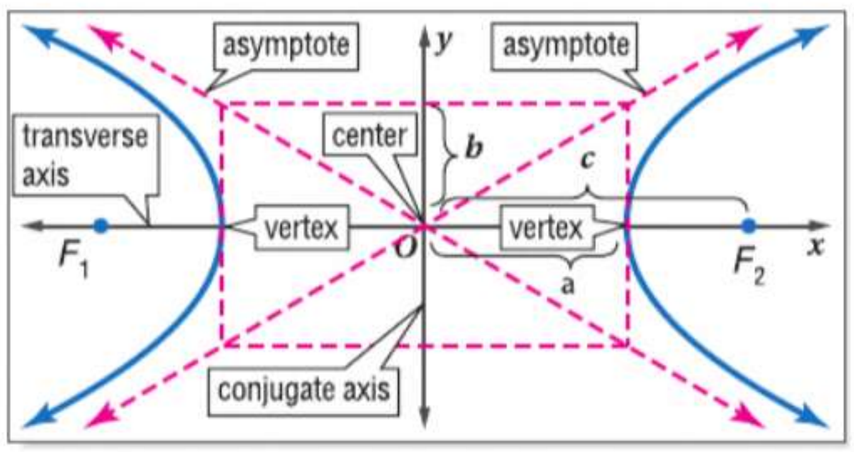
مدرج تكراري مدرج تكراري تُستخدم فيه الأعمدة لعرض بيانات عددية منظمة إلى فئات متساوية.

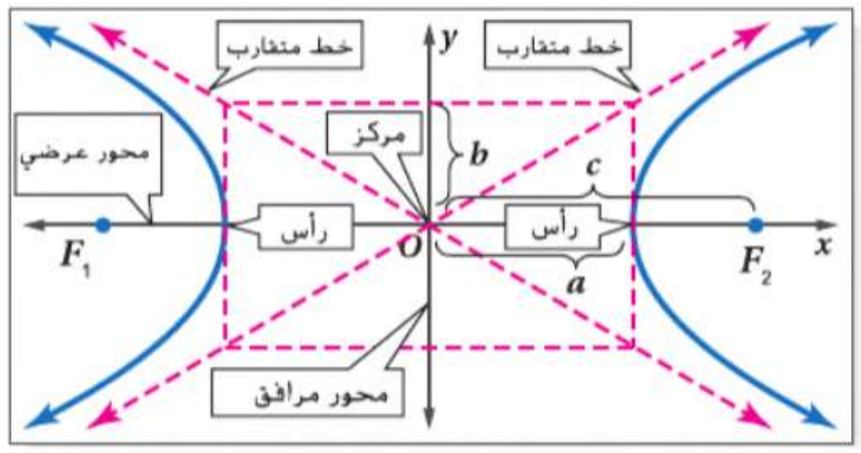
horizontal asymptote A horizontal line which a graph approaches.

خط مقارب أفقي هو خط أفقي يقترب منه الرسم البياني.

hyperbola The set of all points in the plane such that the absolute value of the difference of the distances from two given points in the plane, called foci, is constant.

قطع زائد مجموعة من كل النقاط في المستوى بحيث تكون القيمة المطلقة لفرق المسافات من نقطتين معينتين في المستوى ثابتة، وتُسمى الطول البؤري.





McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

hypothesis test A test used to assess a specific claim about the mean.

اختبار الفرضية اختبار يُستخدم لتقييم مطالبة معينة حول المتوسط الحسابي.

identity An equation in which the left side is equal to the right side for all values.

معادلة متطابقة معادلة يكون فيها الجانب الأيسر مساويًا للجانب الأيمن لجميع القيم.

identity function The function $I(x) = x$.

دالة محايدة الدالة $I(x) = x$.

identity matrix A square matrix that, when multiplied by another matrix, equals that same matrix. If A is any $n \times n$ matrix and I is the $n \times n$ identity matrix, then $A \cdot I = A$ and $I \cdot A = A$.

مصفوفة متطابقة مصفوفة مربعة عندما يتم ضربها في مصفوفة أخرى، فإنها تساوي المصفوفة نفسها. إذا كان A هو المصفوفة $n \times n$، و I هو المصفوفة المتطابقة $n \times n$، إذن $A \cdot I = A$ و $I \cdot A = A$.

inconsistent A system of equations with no ordered pair that satisfy both equations.

غير متوافق نظام من معادلتين ليس بهما زوج مرتب يحقق كلتا المعادلتين.

independent A system of equations with exactly one solution.

معادلة مستقلة نظام معادلات له حل واحد فقط.

independent events Events in which the outcome of one event does not affect the outcome of another event.

حوادث مستقلة حوادث لا تؤثر نتيجة إحداها على نتيجة الأخرى.

independent variable In a function, the variable, usually x, whose values make up the domain.

متغير مستقل في الدالة، هو المتغير الذي تشكل قيمُه المجال، وعادة ما يُرمز إليه بالرمز x.

index In nth roots, the value of n in the symbol $\sqrt[n]{\ }$. Indicates to what root the value under the radicand is being taken.

مؤشر في الجذر n، قيمة العدد n في الرمز $\sqrt[n]{\ }$. يشير إلى الجذر الذي تؤخذ إليه القيمة الموجودة أسفل المجذور.

induction hypothesis The assumption that a statement is true for some positive integer k, where $k \geq n$.

فرضية الاستقراء الفرضية التي تنص على أن العبارة تكون صحيحة للعدد الصحيح الموجب k، حيث $k \geq n$.

inferential statistics Statistics like predictions and hypothesis testing are used to draw conclusions about a population by using a sample.

إحصاء استقرائي توقعات تشبه الإحصائيات واختبار الفرضيات تُستخدم لاستخلاص النتائج حول مجتمع إحصائي باستخدام عينة.

infinite sequence A sequence that continues without end.

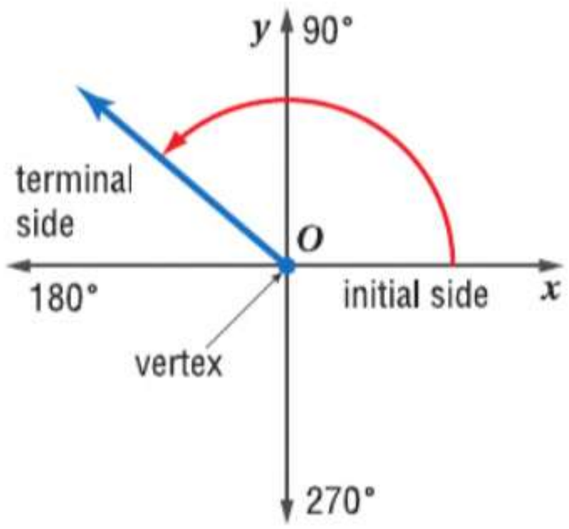
متتالية لا نهائية المتتالية التي لا نهاية لها.

infinity Without bound, or continues without end.

اللانهاية بدون حد أو لا متناهية.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

initial side The fixed ray of an angle.



integer $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

interquartile range (IQR) The range of the middle half of a set of data. It is the difference between the upper quartile and the lower quartile.

intersection The graph of a compound inequality containing and.

interval notation A way to describe the solution set of an inequality.

inverse function Two functions f and g are inverse functions if and only if both of their compositions are the identity function.

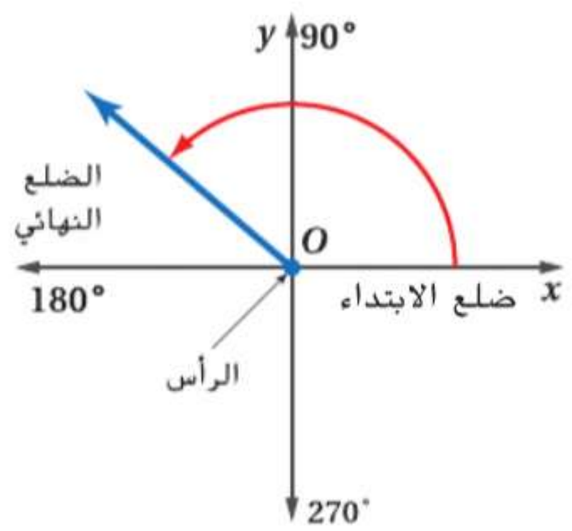
inverse matrices Two $n \times n$ matrices are inverses of each other if their product is the identity matrix.

inverse of a trigonometric function The arccosine, arcsine, and arctangent relations.

inverse relation Two relations are inverse relations if and only if whenever one relation contains the element (a, b) the other relation contains the element (b, a).

irrational number A real number that is not rational. The decimal form neither terminates nor repeats.

ضلع الابتداء الشعاع الثابت للزاوية.



عدد صحيح $\{\ldots, -3، -2، -1، 0، 1، 2، 3، \ldots\}$

مدى رُبيعي (IQR) مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات. وهو الفرق بين الرُبع الأعلى والرُبع الأدنى.

تقاطع الرسم البياني لمتباينة مركبة الذي يحتوي على و.

ترميز الفترات طريقة لوصف مجموعة حل إحدى المتباينات.

دالة عكسية تصبح الدالتان f وg دالتين عكسيتين فقط إذا كان كل من تركيبيهما دالة متطابقة.

مصفوفات عكسية تكون مصفوفتا $n \times n$ معكوستين لبعضهما البعض إذا كان حاصل ضربهما مصفوفة متطابقة.

معكوس دالة حساب المثلثات علاقات قوس جيب تمام الزاوية وقوس جيب الزاوية وقوس ظل الزاوية.

علاقة عكسية تكون العلاقتان عكسيتين فقط إذا كانت إحداهما تحتوي على العنصر (a, b) والأخرى تحتوي على العنصر (b, a).

عدد نسبي عدد حقيقي غير نسبي. لا ينتُج عن الكسر العشري أعداد منتهية أو دورية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

isometric view Corner views of three-dimensional objects on two-dimensional paper.

عرض متساوي القياس عرض الأجسام ثلاثية الأبعاد من الزوايا على ورقة ثنائية الأبعاد.

L

lateral area For prisms, cylinders, and cones, the area of the faces of the figure not including the bases.

مساحة جانبية للمناشير والأسطوانات والمخروطات، هي مساحة أوجه الشكل باستثناء القواعد.

lateral edges 1. In a prism, the intersection of two adjacent lateral faces. 2. In a pyramid, lateral edges are the edges of the lateral faces that join the vertex to vertices of the base.

حافة جانبية 1. في المنشور، تقاطع وجهين جانبيين متجاورين. 2. في الهرم، الحواف الجانبية هي حواف الأوجه الجانبية التي تربط الرأس برؤوس القاعدة.

lateral faces 1. In a prism, the faces that are not bases. 2. In a pyramid, faces that intersect at the vertex.

وجوه جانبية 1. في المنشور، الأوجه التي لا تمثل قاعدة. 2. في الهرم، الأوجه التي تتقاطع عند الرأس.

latus rectum The line segment through the focus of a parabola and perpendicular to the axis of symmetry.

وتر بؤري عمودي هو الوتر المار ببؤرة القطع المكافئ والمتعامد على محور التناظر.

law of cosines Let $\triangle ABC$ be any triangle with a, b, and c representing the measures of sides, and opposite angles with measures A, B, and C, respectively. Then the following equations are true.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

قانون جيب التمام بافتراض أن $\triangle ABC$ مثلث حيث تمثل a وb وc قياسات الأضلاع والزوايا المقابلة قياساتها A وB وC على التوالي. إذن، المعادلات التالية صحيحة.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

law of large numbers 1. The variation in a data set decreases as the sample size increases. 2. Law that states that as the number of trials of a random process increases, the average value will approach the expected value.

قانون الأعداد الكبيرة 1.. يقل التغير في مجموعة البيانات كلما زاد حجم العينة. 2. هو القانون الذي ينص على أنه كلما ازداد عدد محاولات تجريب عملية عشوائية، اقتربت قيمة المتوسط من القيمة المتوقعة.

law of sines Let $\triangle ABC$ be any triangle with a, b, and c representing the measures of sides opposite angles with measurements A, B, and C, respectively. Then $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

قانون جيب الزاوية بافتراض أن Let $\triangle ABC$ مثلث به a، b، وc تمثل الزوايا المقابلة للأضلاع وقياساتها A، B، وC، على التوالي. إذن، $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

leading coefficient The coefficient of the term with the highest degree.

معامل رئيسي معامل الحد ذو أعلى درجة.

like radical expressions Two radical expressions in which both the radicands and indices are alike.

تعبيرات جذرية متشابهة التعبيران الجذريان اللذان يكون فيهما كل من المجذورات والمؤشرات متشابهة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

line of fit A line that closely approximates a set of data.

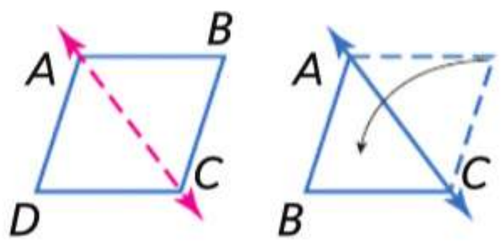
خط المواءمة خط مستقيم يمثل تقريبًا دقيقًا لمجموعة البيانات.

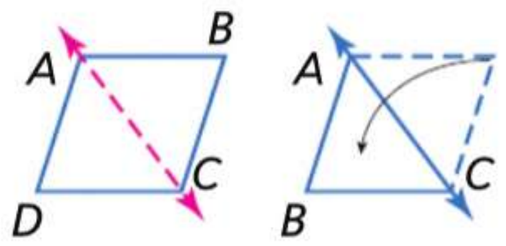
line of reflection **1.** The line over which a reflection flips a figure. **2.** A line in which each point on the preimage and its corresponding point on the image are the same distance from this line.

خط الانعكاس 1. الخط المستقيم الذي فوقه يحوّل الانعكاس شكلا ما إلى صورته المنعكسة. 2. الخط الذي تكون فيه كل نقطة على الصورة الأصلية والنقطة المقابلة لها على الصورة على نفس المسافة من هذا الخط.

line of symmetry A line that can be drawn through a plane figure so that the figure on one side is the reflection image of the figure on the opposite side.

خط التناظر الخط الذي يمكن رسمه عبر شكل المستوى بحيث يمثل الشكل في أحد الجانبين صورة منعكسة للشكل في الجانب المقابل.





linear correlation coefficient A value that shows how close data points are to a line.

معامل الارتباط الخطي القيمة التي توضح مدى قرب نقاط البيانات من الخط.

linear equation An equation that has no operations other than addition, subtraction, and multiplication of a variable by a constant.

معادلة خطية معادلة لا تتضمن عمليات سوى جمع وطرح وضرب متغير في عدد ثابت.

linear function A function whose ordered pairs satisfy a linear equation.

دالة خطية الدالة التي تحقق أزواجها المرتبة معادلة خطية.

linear inequality An inequality that describes a half-plane with a boundary that is a straight line.

متباينة خطية متباينة تحدد نصف المستوى بحد يكون عبارة عن خط مستقيم.

linear programming The process of finding the maximum or minimum values of a function for a region defined by inequalities.

برمجة خطية عملية إيجاد القيم القصوى أو الدنيا للدالة لمنطقة محددة على المتباينات.

linear relation A relation that has straight line graphs.

علاقة خطية العلاقة التي تحتوي على رسومات بيانية خطية.

Location Principle Suppose $y = f(x)$ represents a polynomial function and a and b are two numbers such that $f(a) < 0$ and $f(b) > 0$. Then the function has at least one real zero between a and b.

مبدأ الموقع بافتراض أن $y = f(x)$ تمثل دالة كثيرة الحدود وa وb عددان بحيث $f(a) < 0$ و$f(b) > 0$. إذن يكون للدالة صفر حقيقي واحد على الأقل بين a وb.

logarithm In the function $x = b^y$, y is called the logarithm, base b, of x. Usually written as $y = \log_b x$ and is read "y equals log base b of x."

لوغاريتم في الدالة $x = b^y$، تسمى y اللوغاريتم، وb هي الأساس، لـ x. وعادة ما تُكتب بالصورة $y = \log_b x$ وتُقرأ "y تساوي لوغاريتم أساس b لـ x."

logarithmic equation An equation that contains one or more logarithms.

معادلة لوغاريتمية المعادلة التي تحتوي على لوغاريتم واحد أو أكثر.

McGraw-Hill Education مؤسسة للصالح حقوق الطبع والتأليف © محفوظة

logarithmic function The function $y = \log_b x$, where $b > 0$ and $b \neq 1$, which is the inverse of the exponential function $y = b^x$.

دالة لوغاريتمية الدالة $y = \log_b x$؛ حيث $b > 0$ و$b \neq 1$، وهو معكوس الدالة الأسية $y = b^x$.

logarithmic inequality An inequality that contains one or more logarithms.

متباينة لوغاريتمية هي متباينة تحتوي على لوغاريتم واحد أو أكثر.

logistic growth model A growth model that represents growth that has a limiting factor. Logistic models are the most accurate models for representing population growth.

نموذج النمو المنطقي نموذج نمو يمثل النمو الذي له عامل محدد. تُعتبر النماذج المنطقية أكثر النماذج دقة في تمثيل نمو المجتمع الإحصائي.

lower quartile The median of the lower half of a set of data, indicated by LQ.

الربع الأدنى وسيط النصف السفلي لمجموعة بيانات، ويشار إليه بالرمز LQ.

M

magnitude of symmetry The smallest angle through which a figure can be rotated so that it maps onto itself.

مقدار التناظر هو أصغر زاوية يمكن من خلالها تدوير الشكل حول محوره بحيث يمكن تخطيطه على نفسه.

major axis The longer of the two line segments that form the axes of symmetry of an ellipse.

محور أكبر أطول القطعتين المستقيمتين اللتين تشكلان محاور تناظر القطع الناقص.

mapping How each member of the domain is paired with each member of the range.

تخطيط يُقصد به كيفية اقتران كل عنصر في المجال بعنصر آخر في المدى.

margin of error The limit on the difference between how a sample responds and how the total population would respond.

هامش الخطأ حد الفرق بين مدى استجابة عينة ما ومدى استجابة الجماعة الإحصائية ككل.

mathematical induction A method of proof used to prove statements about positive integers.

استقراء رياضي طريقة برهنة تُستخدم لإثبات صحة أو خطأ العبارات الخاصة بالأعداد الصحيحة الموجبة.

matrix equation A matrix form used to represent a system of equations.

معادلة مصفوفة شكل من أشكال المصفوفات يُستخدم لتمثيل نظام معادلات.

maximum error of estimate The maximum difference between the estimate of the population mean and its actual value.

الحد الأقصى لخطأ التقديرات أقصى فرق بين تقدير متوسط الجماعة الإحصائية وقيمتها الحقيقية.

mean The sum of the values in a set of data divided by the total number of values in the set.

متوسط حسابي مجموع القيم في مجموعة البيانات المقسومة على إجمالي عدد القيم فيها.

means In $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ the numbers b and c.

وسط حسابي في $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، العددان b وc.

measure of central tendency A number that represents the center or middle of a set of data.

مقاييس النزعة المركزية العدد الذي يمثل مركز أو منتصف مجموعة البيانات.

measure of variation A representation of how spread out or scattered a set of data is.

مقياس التغيير تمثيل لمدى توزيع أو انتشار مجموعة البيانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

median The middle value or the mean of the middle values in a set of data when the data are arranged in numerical order.

وسيط القيمة الوسطى أو متوسط القيم الوسطى في مجموعة البيانات عند ترتيب البيانات ترتيبًا عدديًا.

midline A horizontal axis used as the reference line about which the graph of a periodic function oscillates.

مستقيم متوسط هو محور أفقي يُستخدم كخط مرجعي يتذبذب حوله الرسم البياني للدالة الدورية.

midsegment of triangle A segment with endpoints that are the midpoints of two sides of a triangle.

منصف ساقي المثلث هو القطعة التي لها نقطتا نهاية تمثلان نقطتي منتصف لضلعي المثلث.

minor axis The shorter of the two line segments that form the axes of symmetry of an ellipse.

محور أصغر أقصر القطعتين المستقيمتين اللتين تشكلان محاور تناظر القطع الناقص.

mode The value or values that appear most often in a set of data.

منوال هو القيمة أو القيم الأكثر تكرارًا في مجموعة من البيانات.

mutually exclusive Two events that cannot occur at the same time.

منفصلة حدثان لا يمكن أن يحدثا في الوقت نفسه.

N

***n*th root** For any real numbers a and b, and any positive integer n, if $a^n = b$, then a is an nth root of b.

جذر نوني nth بالنسبة إلى العددين الحقيقيين a وb، وأي عدد صحيح موجب n، بما أن العدد $a^n = b$، إذن a يساوي الجذر النوني nth للعدد b.

natural base, e An irrational number approximately equal to 2.71828... .

أساس طبيعي، e عدد غير نسبي يساوي تقريبًا 2.71828... .

natural base exponential function An exponential function with base e, $y = e^x$.

الدالة الأسية للأساس الطبيعي دالة أسية تحتوي على الأساس e، حيث $y = e^x$.

natural logarithm Logarithms with base e, written $\ln x$.

لوغاريتم طبيعي هو لوغاريتم يحتوي على الأساس e، وتتم كتابته في x.

natural number {1, 2, 3, 4, 5, ...}

عدد طبيعي {1، 2، 3، 4، 5، ...}

negative correlation When the values in a scatter plot are closely linked in a negative manner.

ارتباط سالب يحدث عندما تكون القيم في الرسم البياني المفرق مرتبطة ارتباطا وثيقًا بطريقة سالبة.

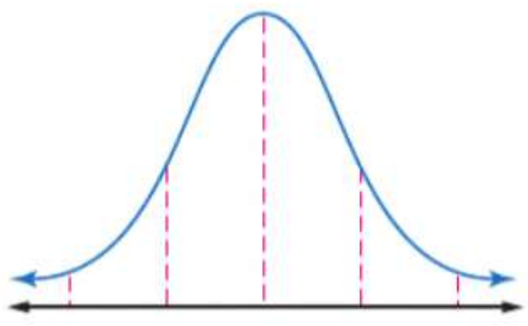
negative exponent For any real number $a \neq 0$ and any integer n, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ and $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

أس سلبي بالنسبة إلى أي عدد $a \neq 0$ وأي عدد صحيح $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ و $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

McGraw-Hill Education مؤسسة للطبع والتأليف © محفوظة لصالح حقوق

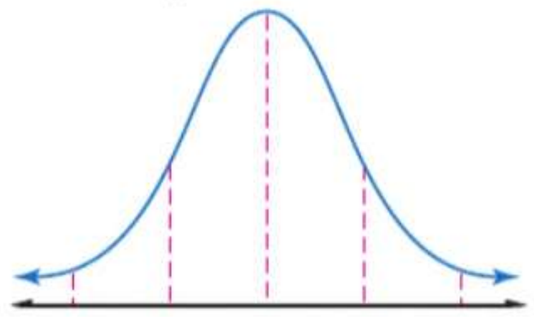
normal distribution A continuous, symmetric, bell-shaped distribution of a random variable.

Normal Distribution



توزيع طبيعي توزيع لمتغير عشوائي، ويكون هذا التوزيع متواصلًا ومتماثلا وعلى شكل جرس.

توزيع طبيعي



null hypothesis A specific hypothesis to be tested. It is expressed as an equality and is considered true until evidence indicates otherwise.

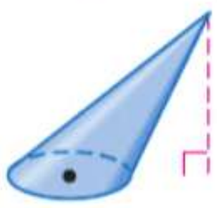
فرضية العدم فرضية معينة يتم اختبارها. ويتم التعبير عنها في صورة معادلة متساوية وتُعتبر صحيحة حتى تشير الأدلة إلى خلاف ذلك.

O

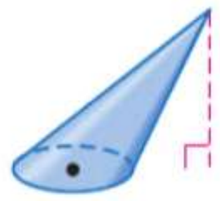
oblique asymptote An asymptote that is neither horizontal nor vertical and is sometimes called a slant asymptote.

خطأ مقارب مائل خط مقارب لا يكون أفقيًا ولا رأسيًا ويسمى أحيانًا الخط المقارب المنحرف.

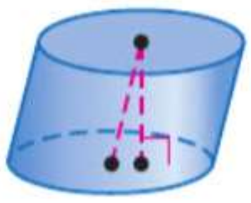
oblique cone A cone that is not a right cone.



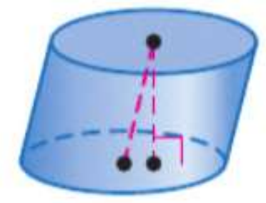
مخروط مائل المخروط الذي لا يكون قائمًا.



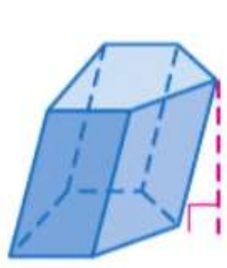
oblique cylinder A cylinder that is not a right cylinder.



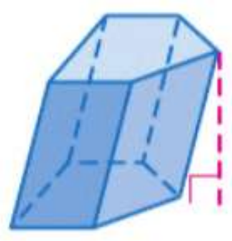
أسطوانة مائلة الأسطوانة التي لا تكون قائمة.



oblique prism A prism in which the lateral edges are not perpendicular to the bases.



منشور مائل المنشور الذي لا تكون حوافه الجانبية عمودية على قاعدتيه.



oblique solid A solid with base(s) that are not perpendicular to the edges connecting the two bases or vertex.

مجسم مائل المجسم الذي لا تكون قاعدته (قاعدتاه) عمودية على الحواف التي تصل بين القاعدتين أو الرأس.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

observational study Individuals are observed and no attempt is made to influence the results.

دراسة وصفية يتم فيها ملاحظة الأفراد ولا توجد أي محاولة للتأثير على النتائج.

odds A ratio that compares the number of ways an event can occur to the number of ways that it cannot occur.

فرص نسبة تقارن عدد طرق وقوع حدث ما بعدد طرق عدم وقوعه.

one-to-one function 1. A function where each element of the range is paired with exactly one element of the domain 2. A function whose inverse is a function.

دالة واحد إلى واحد 1. دالة يقترن فيها كل عنصر في المدى بعنصر واحد آخر في المجال 2. دالة يكون معكوسها بمثابة دالة.

onto function Each element of the range corresponds to an element of the domain.

دالة شاملة يتطابق كل عنصر في المدى مع عنصر في المجال.

open sentence A mathematical sentence containing one or more variables.

جملة مفتوحة جملة رياضية تحتوي على متغير واحد أو أكثر.

optimize To seek the optimal price or amount that is desired to minimize costs or maximize profits.

البحث عن أفضل الحلول البحث عن السعر الأمثل أو الكمية المثلى المطلوبة لتقليل التكلفة إلى أدنى حد أو زيادة الأرباح إلى أقصى حد.

Order of Operations
Step 1 Evaluate expressions inside grouping symbols.
Step 2 Evaluate all powers.
Step 3 Do all multiplications and/or divisions from left to right.
Step 4 Do all additions and subtractions from left to right.

ترتيب العمليات
الخطوة 1 إيجاد قيمة التعبيرات داخل رموز المجموعات.
الخطوة 2 إيجاد قيمة جميع الأسس.
الخطوة 3 القيام بجميع عمليات الضرب و/أو القسمة من اليسار إلى اليمين.
الخطوة 4 القيام بجميع عمليات الجمع والطرح من اليسار إلى اليمين.

order of symmetry The number of times a figure can map onto itself as it rotates from 0° to 360°.

ترتيب التناظر عدد مرات تخطيط الشكل على نفسه حيث يدور الشكل من صفر إلى 360 درجة.

ordered triple 1. The coordinates of a point in space 2. The solution of a system of equations in three variables x, y, and z.

مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر 1. إحداثيات نقطة ما في الفراغ 2. حل نظام المعادلات بثلاثة متغيرات x و y و z.

outcome The results of a probability experiment or an event.

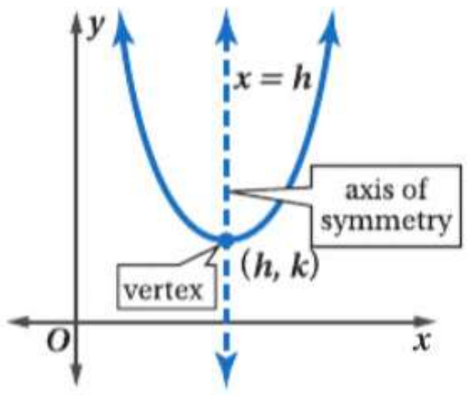
نتيجة محصلات تجربة احتمال أو حدث.

outlier A data point that does not appear to belong to the rest of the set.

قيمة متطرفة نقطة بيانات لا تنتمي إلى بقية المجموعة.

McGraw-Hill Education مؤسسة ماكجرو هيل للتعليم © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

parabola The graph of a quadratic function. The set of all points in a plane that are the same distance from a given point, called the focus, and a given line, called the directrix.



parallel lines Nonvertical coplanar lines with the same slope.

parameter A measure that describes a characteristic of a population.

parent function The simplest, most general function in a family of functions.

parent graph The simplest of graphs in a family.

partial sum The sum of the first n terms of a series.

Pascal's triangle A triangular array of numbers such that the $(n + 1)$th row is the coefficient of the terms of the expansion $(x + y)^n$ for $n = 0, 1, 2 \ldots$

period The least possible value of a for which $f(x) = f(x + a)$.

periodic function **1.** A function with y-values that repeat at regular intervals. **2.** A function is called periodic if there is a number a such that $f(x) = f(x + a)$ for all x in the domain of the function.

permutation An arrangement of objects in which order is important.

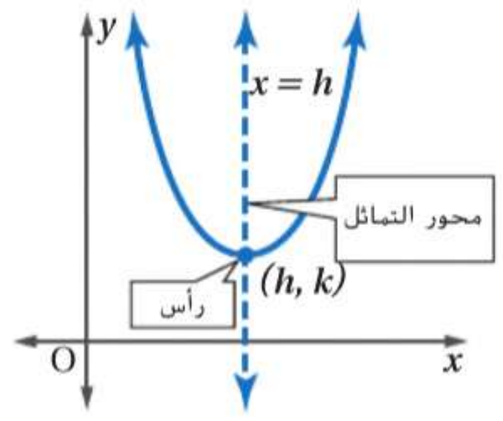
perpendicular lines In a plane, any two oblique lines, the product of whose slopes is -1.

phase shift A horizontal translation of a trigonometric function.

piecewise-defined function A function that is written using two or more expressions.

piecewise-linear function A function in which the equation for each interval is linear.

قطع مكافئ الرسم البياني للدالة الربعية. مجموع كل النقاط في سطح ما وتقع على مسافة واحدة من نقطة معينة، تُسمى البؤرة، وخط معين، يسمى الدليل.



خطوط متوازية خطوط غير عمودية واقعة في مستوى واحد ومتماثلة في الميل.

معلمة مقياس يوضح خاصية المجتمع الإحصائي.

دالة أصلية الدالة الأبسط والأعم في مجموعة الدوال.

رسم بياني أصلي الرسم البياني الأبسط في مجموعة ما.

مجموع جزئي مجموع الفترات الأولى للعدد n في المتسلسلة.

مثلث باسكال مصفوفة من الأعداد على شكل مثلث بحيث يمثل صف العدد $(n + 1)$th معامل حدود التمديد $(x + y)^n$ لـ $n = 0, 1, 2 \ldots$ r

دورة أقل قيمة ممكنة للعدد a يكون فيها $f(x) = f(x + a)$.

دالة دورية 1. دالة تحتوي على قيم y التي تتكرر على فترات منتظمة. 2. تُسمى الدالة دالة دورية إذا كان هناك عدد a بحيث يكون $f(x) = f(x + a)$ لجميع x في مجال الدالة.

تبديل ترتيب الأشياء التي يكون الترتيب فيها مهمًا.

خطوط متعامدة أي خطين مائلين في المستوى، حاصل ضرب ميلهما يساوي -1.

إزاحة الطور حركة أفقية لدالة مثلثية.

دالة متعددة التعريف دالة تُكتب باستخدام تعبيرين أو أكثر.

دالة خطية متعددة التعريف دالة تكون فيها المعادلة خطية لكل فترة.

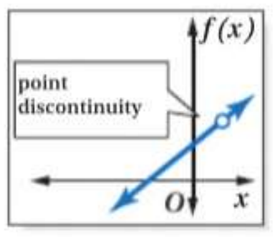
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

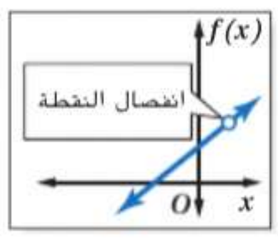
plane symmetry Symmetry in a three-dimensional figure that occurs if the figure can be mapped onto itself by a reflection in a plane.

تماثل المستوى تماثل يحدث في أي شكل ثلاثي الأبعاد إذا أمكن تخطيط الشكل على نفسه بالانعكاس في أي مستوى.

point discontinuity If the original function is undefined for $x = a$ but the related rational expression of the function in simplest form is defined for $x = a$, then there is a hole in the graph at $x = a$.

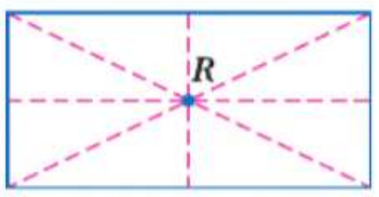
انفصال النقطة إذا كانت الدالة الأصلية غير محددة لـ $x = a$ وكان التعبير النسبي المرتبط للدالة التي في أبسط صورة محددًا لـ $x = a$، فعندئذٍ تكون هناك فجوة في الرسم البياني في $x = a$.



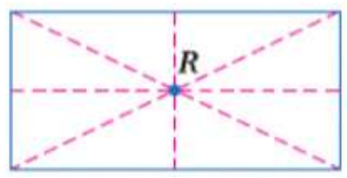


point of symmetry A figure that can be mapped onto itself by a rotation of 180°.

نقطة التماثل شكل يمكن تخطيطه على نفسه بالدوران المحوري بزاوية 180 درجة.



R is a point of symmetry.



R هي نقطة التماثل

point-slope form An equation in the form $y - y_1 = m(x - x_1)$ where (x_1, y_1) are the coordinates of a point on the line and m is the slope of the line.

صيغة الميل والنقطة معادلة في الصورة $y - y_1 = m(x - x_1)$، حيث يكون (x_1, y_1) الإحداثيين لأي نقطة على الخط وm هو الميل على الخط..

polynomial function A function that is represented by a polynomial equation.

دالة كثيرة الحدود دالة تمثل بمعادلة كثيرة الحدود.

polynomial identity A polynomial equation that is true for any values that are substituted for the variables.

معادلة كثيرة الحدود معادلة كثيرة الحدود تكون حقيقية لأي قيمة من القيم التي تحل محل المتغيرات.

polynomial in one variable $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, where the coefficients $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ represent real numbers, and a_n is not zero and n is a nonnegative integer.

كثيرة الحدود بمتغير واحد $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، حيث تمثل المعاملات $a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أعدادًا حقيقية، ولا تكون a_n صفرًا وتمثل n عددًا صحيحا غير سالب.

population An entire group of living things or objects.

مجتمع إحصائي مجموعة كاملة من الأشياء أو الأجسام.

positive correlation When the values in a scatter plot are closely linked in a positive manner.

ارتباط موجب يحدث عندما ترتبط القيم في التمثيل البياني بالنقاط المبعثرة ارتباطا وثيقًا بطريقة موجبة.

prime polynomial A polynomial that cannot be factored.

كثيرة الحدود الأولية دالة كثيرة الحدود لا يمكن تحليلها.

principal root The nonnegative root.

جذر أساسي الجذر غير السالب.

McGraw-Hill Education مؤسسة ماكجرو هيل للتعليم والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

principal values The values in the restricted domains of trigonometric functions.

قيم أساسية القيم الموجودة في المجالات المقصورة على دوال المثلثات.

principle of superposition Two figures are congruent if and only if there is a rigid motion or a series of rigid motions that maps one figure exactly onto the other.

مبدأ التراكب تطابق شكلين في حالة وجود حركة غير مرنة أو سلسلة من الحركات غير المرنة التي تخطط شكلاً واحدًا على الآخر بالضبط.

probability A measure of the chance that a given event will occur.

احتمال قياس الفرصة التي تشير إلى أن هناك حدثًا محددًا سيقع.

probability distribution A function that maps the sample space to the probabilities of the outcomes in the sample space for a particular random variable.

توزيع الاحتمال دالة تعيّن فضاء العينة إلى احتمالات النواتج في فضاء العينة بالنسبة إلى متغير عشوائي معين.

probability model A mathematical model used to match a random phenomenon.

نموذج الاحتمال نموذج رياضي يُستخدم في تطابق ظاهرة عشوائية.

proportion An equation of the form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ that states that two ratios are equal.

تناسب معادلة تأخذ الصورة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ وتنص على وجود نسبتين متساويتين.

Q

quadrantal angle An angle in standard position whose terminal side coincides with one of the axes.

زاوية ربعية زاوية تقع في موقع قياسي يتطابق ضلعها الطرفي مع أحد المحاور.

quadrants The four areas of a Cartesian coordinate plane.

أرباع المساحات الأربع لمستوى إحداثي ديكارتي.

quadratic form For any numbers a, b, and c, except for $a = 0$, an equation that can be written in the form $u^2 + u + c = 0$, where u is some expression in x.

صيغة تربيعية بالنسبة إلى أي أعداد a وb و c باستثناء a = 0، وهي معادلة يمكن كتابتها بالصيغة التالية $u^2 + u + c = 0$، حيث تمثل u بعض التعبيرات في x.

quadratic function A function described by the equation $f(x) = ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$.

دالة تربيعية دالة توضحها المعادلة التالية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$.

quartic function A fourth-degree function.

دالة رباعية دالة من الدرجة الرابعة.

quartiles The values that divide a set of data into four equal parts.

رُبيعيات إحصائية القيم التي تقسم مجموعة من البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.

quintic function A fifth-degree function.

دالة خماسية دالة من الدرجة الخامسة.

R

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

radian The measure of an angle θ in standard position whose rays intercept an arc of length 1 unit on the unit circle.

قياس دائري (راديان) قياس زاوية θ في الموقع القياسي الذي يتقاطع فيه شعاعا الزاوية مع قوس طول الوحدة 1 على دائرة الوحدة.

radical equation An equation with radicals that have variables in the radicands.

معادلة جذرية معادلة ذات جذور تحتوي على متغيرات في المجذورات.

radical function A function that contains the root of a variable.

دالة جذرية دالة تحتوي على جذر متغير ما.

radical inequality An inequality that has a variable in the radicand.

متباينة جذرية متباينة تحتوي على متغير في المجذور.

radical sign In nth roots, the symbol $\sqrt[n]{\ }$.

علامة الجذر في جذور العدد n، يُمثل الرمز $\sqrt[n]{\ }$.

radicand In nth roots, the value inside in the symbol $\sqrt[n]{\ }$. Indicates the value that is being taken to the nth root.

مجذور في جذور العدد n، تمثل القيمة الداخلية في الرمز $\sqrt[n]{\ }$. تشير إلى القيمة التي تؤخذ إلى جذر العدد n.

radius **1.** Any segment whose endpoints are the center and a point on the circle. **2.** In a sphere, any segment with endpoints that are the center and a point on the sphere.

نصف القطر 1. أي قطعة مستقيمة تمثل نقاط النهاية بها المنتصف ونقطة على الدائرة. 2. هو أي قطعة في الكرة لها نقطتي نهاية إحداهما مركز الكرة والأخرى نقطة على الكرة.

random sample A sample in which every member of the population has an equal chance of being selected.

عينة عشوائية عينة يكون لكل فرد من المجتمع الإحصائي فيها فرصة متساوية للاختيار.

random variable **1.** The outcome of a random process that has a numerical value. **2.** A variable that can assume a set of values, each with fixed probabilities.

متغير عشوائي 1. نتيجة لعملية عشوائية لها قيمة عددية. 2. متغير يمكنه افتراض مجموعة من القيم، وتكون كل قيمة ذات احتمالات ثابتة.

range **1.** The set of all y-coordinates of a relation. **2.** The difference between the greatest and least values in a set of data.

مدى 1. المجموعة التي تضم كل إحداثيات **محور الصادات** لعلاقة ما. 2. الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة في مجموعة بيانات.

rate of change How much a quantity changes on average, relative to the change in another quantity, over time.

معدل التغير معدل تغير كمية ما في المتوسط مقارنة بالتغير في كمية أخرى بمرور الوقت.

rate of continuous decay The rate at which something decays continuously. Represented by a constant k in the exponential decay function $f(x) = ae^{-kt}$, where a is the initial value, and t is time in years.

معدل التضاؤل المتواصل المعدل الذي يتضاءل عنده شيء ما باستمرار. يمثله الثابت k في دالة التضاؤل الأسية $f(x) = ae^{-kt}$. حيث a القيمة الأولية، وt الوقت بالسنوات.

rate of continuous growth The rate at which something grows continuously. The value of k in the exponential growth function, $f(x) = ae^{kt}$.

معدل النمو المتواصل معدل نمو شيء ما باستمرار. القيمة k في دالة النمو الأسية، $f(x) = ae^{kt}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

ratio A comparison of two quantities using division.

نسبة مقارنة كميتين باستخدام القسمة.

rational equation Any equation that contains one or more rational expressions.

متباينة نسبية أي معادلة تحتوي على واحد أو أكثر من التعبيرات النسبية.

rational exponent For any nonzero real number b, and any integers m and n, with $n > 1$, $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m$, except when $b < 0$ and n is even.

أس نسبي بالنسبة إلى أي عدد حقيقي غير صفري b، و أي أعداد صحيحة m وn، مع $n > 1, b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m$، باستثناء عندما تكون $b < 0$ وn صفرية.

rational expression A ratio of two polynomial expressions.

تعبير نسبي نسبة اثنتين من التعبيرات كثيرة الحدود.

rational function An equation of the form $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$, where $P(x)$ and $q(x)$ are polynomial functions, and $q(x) \neq 0$.

دالة نسبية معادلة بالصيغة التالية $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$، حيث تُعد $P(x)$ و$q(x)$ دوال كثيرة الحدود و$q(x) \neq 0$.

rational inequality Any inequality that contains one or more rational expressions.

متباينة نسبية أي متباينة تحتوي على واحد أو أكثر من التعبيرات النسبية.

rational number Any number $\frac{m}{n}$, where m and n are integers and n is not zero. The decimal form is either a terminating or repeating decimal.

عدد نسبي أي عدد $\frac{m}{n}$. حيث m و n عددان نسبيان و n ليس صفرًا. تكون الصيغة العشرية إما عددًا عشريًا منتهيًا أو عددًا عشريًا دوريًا.

Rational Zero Theorem Helps you choose some possible zeros of a polynomial function to test.

نظرية الصفر النسبي تساعد على اختيار بعض الأصفار الممكنة لدالة كثيرة الحدود لاختبارها.

rationalizing the denominator To eliminate radicals from a denominator or fractions from a radicand.

تخليص المقام من الجذور أو انطاق المقام لإخراج الجذور من المقام أو الكسور من المجذور.

real numbers All numbers used in everyday life; the set of all rational and irrational numbers.

أعداد حقيقية جميع الأعداد المستخدمة في الحياة اليومية؛ أي المجموعة التي تضم كل الأعداد النسبية وغير النسبية.

reciprocal function **1.** A function of the form $f(x) = \frac{1}{a(x)}$, where $a(x)$ is a linear function and $a(x) \neq 0$. **2.** Trigonometric functions that are reciprocals of each other.

دالة عكسية 1. دالة تأخذ الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث تكون $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$. 2. الدوال المثلثية التي تتبادل مع بعضها البعض.

reduction An image that is smaller than the original figure.

اختزال صورة تكون أصغر من الشكل الأصلي.

reference angle The acute angle formed by the terminal side of an angle in standard position and the x-axis.

زاوية الاستناد الزاوية الحادة المكونة بواسطة الضلع الطرفي لزاوية ما في موقع قياسي والمحور x.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

reflection **1.** A transformation in which every point of a figure is mapped to a corresponding image across a line of symmetry. **2.** A transformation representing the flip of a figure over a point, line or plane. A reflection in a line is a function that maps a point to its image such that

- if the point is on the line, then the image and preimage are the same point, or
- if the point is not on the line, the line is the perpendicular bisector of the segment joining the two points.

انعكاس 1. تحويل يتم تعيين كل نقطة بالشكل فيه إلى صورة مقابلة عبر خط التناظر. 2. تحويل يمثل قلب الشكل على نقطة أو خط أو مستوى. الانعكاس في خط ما عبارة عن دالة تخطط نقطة ما إلى صورتها بحيث

- إذا كانت النقطة على الخط، فإن الصورة والصورة الأصلية تكونان على النقطة الأصلية،
- أو إذا لم تكن النقطة على الخط، فسيكون الخط منصفًا عموديًا للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين.

regular pyramid A pyramid with a base that is a regular polygon.

هرم منتظم هرم تكون قاعدته على شكل مضلع منتظم.

regular tessellation A tessellation formed by only one type of regular polygon.

اصطفاف المضلعات المنتظم اصطفاف كوّنه نوع واحد فقط من المضلعات المنتظمة.

relation A set of ordered pairs.

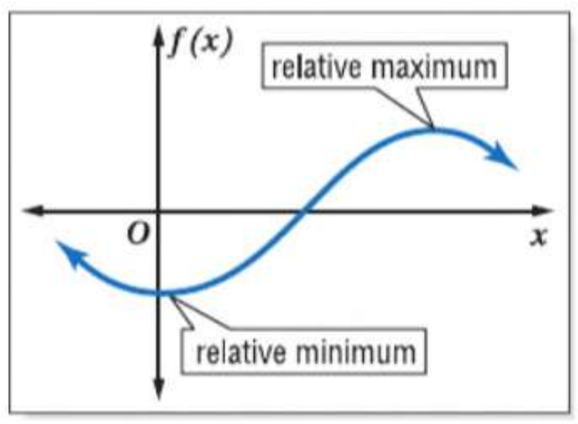
علاقة مجموعة من الأزواج المرتبة.

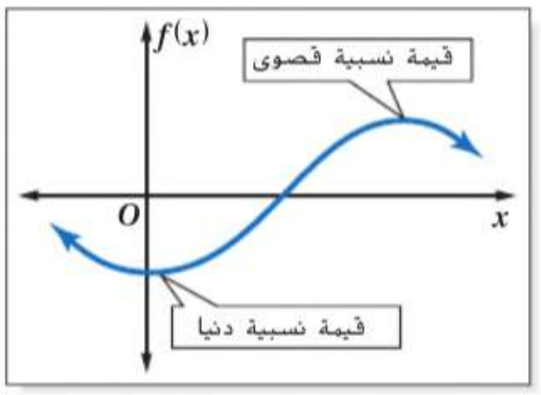
relative frequency The ratio of the number of observations in a category to the total number of observations.

تكرار نسبي نسبة عدد الملاحظات في فئة ما إلى إجمالي عدد الملاحظات.

relative maximum A point on the graph of a function where no other nearby points have a greater y-coordinate.

قيمة نسبية قصوى نقطة على الرسم البياني لدالة ما حيث لا تكون هناك نقاط أخرى بالقرب منها أكبر من الإحداثي الصادي.





relative minimum A point on the graph of a function where no other nearby points have a lesser y-coordinate.

قيمة نسبية دنيا نقطة على الرسم البياني لدالة ما حيث لا تكون هناك نقاط أخرى بالقرب منها أقل من الإحداثي الصادي.

right cone A cone with an axis that is also an altitude.

مخروط قائم مخروط له محور يمثل أيضا ارتفاعا عموديًا.

right cylinder A cylinder with an axis that is also an altitude.

أسطوانة قائمة أسطوانة لها محور يمثل أيضا ارتفاعا عموديًا.

McGraw-Hill Education مؤسسة للصالح © محفوظة والتأليف الطبع حقوق

right prism A prism with lateral edges that are also altitudes.

منشور قائم منشور له حواف جانبية تمثل أيضا ارتفاعات عمودية.

right solid A solid with base(s) that are perpendicular to the edges connecting them or connecting the base and the vertex of the solid.

مجسم قائم مجسم له قاعدة (قواعد) عمودية على الحواف المتصلة بها أو المتصلة بالقاعدة ورأس المجسم.

rotation A transformation that turns every point of a preimage through a specified angle and direction about a fixed point, called the center of rotation. A rotation about a fixed point through an angle of $x°$ is a function that maps a point to its image such that

- if the point is the center of rotation, then the image and preimage are the same point, or
- if the point is not the center of rotation, then the image and preimage are the same distance from the center of rotation and the measure of the angle of rotation formed by the preimage, center of rotation, and image points is x.

دوران محوري تحويل يدير كل نقطة في الصورة الأصلية بزاوية محددة واتجاه نحو نقطة ثابتة تُسمى مركز الدوران المحوري. دوران محوري حول نقطة ثابتة بزاوية x° هو دالة تخطط نقطة إلى صورتها بحيث

- إذا كانت النقطة هي مركز الدوران المحوري، فإن الصورة والصورة الأصلية تكونان نفس النقطة،
- أو إذا لم تكن النقطة هي مركز الدوران المحوري، فعندئذٍ ستكون الصورة والصورة الأصلية على المسافة نفسها من مركز الدوران المحوري وقياس زاوية الدوران المحوري التي كونتها الصورة الأصلية ومركز الدوران المحوري ونقاط الصورة هي x.

rotational symmetry If a figure can be rotated less than 360° about a point so that the image and the preimage are indistinguishable, the figure has rotational symmetry.

تماثل دوراني إذا أمكن تدوير الشكل بأقل من زاوية 360 درجة حول نقطة ما بحيث لا يمكن التمييز بين الصورة والصورة الأصلية، فسيكون للشكل تماثل دوراني.

row matrix A matrix that has only one row.

مصفوفة الصف مصفوفة تحتوي على صف واحد فقط.

S

sample A part of a population.

عينة جزء من المجتمع الإحصائي.

sample space The set of all possible outcomes of an experiment.

فضاء العينة مجموعة من النتائج المحتملة لتجربة ما.

scale factor of dilation The ratio of a length on an image to a corresponding length on the preimage.

معامل مقياس تغيير الأبعاد نسبة الطول في صورة ما إلى الطول المقابل في الصورة الأصلية.

secant For any angle, with measure α, a point $P(x, y)$ on its terminal side, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\sec \alpha = \frac{r}{x}$.

قاطع في أي زاوية، بالقياس α، نقطة $P(x, y)$ على ضلعها الطرفي، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$،

$\sec \alpha = \frac{r}{x}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

second-order determinant The determinant of a 2×2 matrix.

محدد من الرتبة الثانية محدد المصفوفة 2×2.

semi-regular tessellation A uniform tessellation formed using two or more regular polygons.

اصطفاف المضلعات شبه المنتظم اصطفاف مضلعات موحد يتكون باستخدام مضلعين منتظمين أو أكثر.

sequence A list of numbers in a particular order.

متتالية قائمة الأعداد بترتيب معين.

series The sum of the terms of a sequence.

متسلسلة مجموع الفترات في متتالية ما.

set-builder notation The expression of the solution set of an inequality, for example $\{x \mid x > 9\}$.

ترميز بناء مجموعة الحل تعبير مجموعة الحل لمتباينة ما، على سبيل المثال $\{x \mid x > 9\}$.

sigma notation For any sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$, the sum of the first k terms may be written $\sum_{n=1}^{k} a_n$, which is read "the summation from $n = 1$ to k of a_n." Thus, $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$, where k is an integer value.

رمز سيجما في أي متتالية $a_1, a_2, a_3, \ldots$، يمكن كتابة مجموع k الفترات الأولى $\sum_{n=1}^{k} a_n$، ويقرأ "صيغة الجمع من $n = 1$ إلى k من a_n." بالتالي، $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$، حيث يمثل k قيمة عدد صحيح.

similarity transformation When a figure and its transformation image are similar.

تحويل تشابهي عندما يكون الشكل وصورة تحويله متشابهين.

simple event One event.

حدث بسيط حدث واحد.

simplify To rewrite an expression without parentheses or negative exponents.

تبسيط إعادة صياغة تعبير ما بدون أقواس أو أسس سالبة.

simulation **1.** The use of a probability experiment to mimic a real-life situation. **2.** A probability model used to recreate a situation again and again so the likelihood of various outcomes can be estimated.

محاكاة 1. استخدام تجربة الاحتمال لمحاكاة موقف من واقع الحياة. 2. نموذج الاحتمال المستخدم في إعادة صياغة موقف ما يتكرر مرة بعد مرة بحيث يمكن تقدير احتمالية النتائج المختلفة.

sine For any angle, with measure α, a point $P(x, y)$ on its terminal side, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin \alpha = \frac{y}{r}$.

جيب الزاوية في أي زاوية، ذات القياس α، a نقطة $P(x, y)$ على ضلعها الطرفي، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\sin \alpha = \frac{y}{r}$.

slant height The height of the lateral side of a pyramid or cone.

ارتفاع جانبي ارتفاع الضلع الجانبي لهرم أو مخروط.

slope The ratio of the change in y-coordinates to the change in x-coordinates.

ميل نسبة التغير في الإحداثيات الصادية إلى التغير في الإحداثيات السينية.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

slope-intercept form The equation of a line in the form $y = mx + b$, where m is the slope and b is the y-intercept.

صيغة الميل والمقطع معادلة مستقيم في الصورة $y = mx + b$، حيث m هو الميل وb هو الجزء المقطوع من محور الصادات.

solid of revolution A three-dimensional figure obtained by rotating a plane figure about a line.

مجسم الدوران شكل ثلاثي الأبعاد نحصل عليه بدوران شكل مستو حول خط ما.

solution A replacement for the variable in an open sentence that results in a true sentence.

حل بديل عن المتغير في جملة مفتوحة ينتج عنه جملة صحيحة.

solving a right triangle The process of finding the measures of all of the sides and angles of a right triangle.

حل مثلث قائم الزاوية عملية إيجاد قياسات جميع أضلاع المثلث قائم الزاوية وزواياه.

solving a triangle Using given measures to find all unknown side lengths and angle measures of a triangle.

حل المثلث استخدام القياسات المعطاة لإيجاد جميع أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا غير المعروفة لمثلث ما.

square matrix A matrix with the same number of rows and columns.

مصفوفة تربيعية مصفوفة تحتوي على العدد نفسه من الصفوف والأعمدة.

square root function A function that contains a square root of a variable.

دالة الجذر التربيعي دالة تحتوي على الجذر التربيعي لمتغير ما.

square root inequality An inequality involving the square root of a variable expression.

متباينة الجذر التربيعي متباينة تتضمن الجذر التربيعي لتعبير متغير.

standard deviation The square root of the variance.

انحراف معياري الجذر التربيعي للتباين.

standard form **1.** A linear equation written in the form $Ax + By = C$, where A, B, and C are integers whose greatest common factor is 1, $A \geq 0$, and A and B are not both zero. **2.** A quadratic equation written in the form $ax^2 + bx + c = 0$, where a, b, and c are integers, and $a \neq 0$.

صورة قياسية **1.** معادلة خطية مكتوبة في الصورة $Ax + By = C$، حيث A وB وC أعداد صحيحة عاملها المشترك الأكبر هو 1 **أكبر من أو يساوي** 0 وA وB ليسا صفرين. **2.** تُكتب المعادلة التربيعية في الصورة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث a وb وc أعداد صحيحة، و$a \neq 0$.

standard normal distribution A normal distribution with a mean of 0 and a standard deviation of 1.

توزيع طبيعي معياري توزيع طبيعي باستخدام متوسط حسابي يساوي 0 وانحراف معياري يساوي 1.

standard position An angle positioned so that its vertex is at the origin and its initial side is along the positive x-axis.

موقع قياسي زاوية محدد موقعها بحيث يكون رأسها في الأصل وضلعها الابتدائي على امتداد المحور السيني الموجب.

statistic A measure that describes a characteristic of a sample.

إحصاء مقياس يوضح خاصية عينة ما.

McGraw-Hill Education مؤسسة © محفوظة لصالح والتأليف الطبع حقوق

statistical inference Use information from a sample to draw conclusions about a population.

استدلال إحصائي استخدام المعلومات المستقاة من العينة للتوصل إلى استنتاجات عن مجتمع إحصائي.

step function A function whose graph is a series of line segments.

دالة درجية دالة يمثل الرسم البياني بها مجموعة من القطع المستقيمة.

substitution method A method of solving a system of equations in which one equation is solved for one variable in terms of the other.

طريقة التعويض طريقة لحل نظام من المعادلات يتم فيه حل معادلة واحدة لمتغير واحد فيما يخص الآخر.

survey Used to collect information about a population.

دراسة استقصائية تستخدم في جمع معلومات عن مجتمع إحصائي.

symmetry A figure has symmetry if there exists a rigid motion—reflection, translation, rotation, or glide reflection—that maps the figure onto itself.

تماثل يحتوي أحد الأشكال على تماثل في حالة وجود حركة قوية – انعكاس أو انسحاب أو دوران محوري أو انعكاس انحداري – تتطابق مع الشكل نفسه.

synthetic division A method used to divide a polynomial by a binomial.

قسمة تركيبية طريقة تستخدم لقسمة دالة كثير الحدود على دالة ذات حدين.

synthetic substitution The use of synthetic division to evaluate a function.

تعويض تركيبي استخدام القسمة التركيبية لتقيم دالة معينة.

system of equations A set of equations with the same variables.

نظام المعادلات مجموعة المعادلات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

system of inequalities A set of inequalities with the same variables.

نظام المتباينات مجموعة المتباينات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

T

tangent 1. A line that intersects a circle at exactly one point. 2. For any angle, with measure α, tan α a point $P(x, y)$ on its terminal side, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \alpha = \frac{y}{x}$. 3. A line that intersects a sphere in exactly one point.

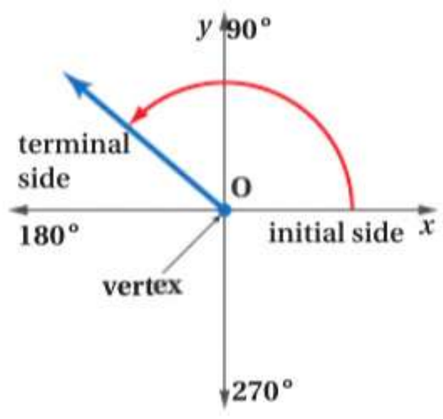
مماس 1. خط يتقاطع مع دائرة عند نقطة واحدة بالضبط. 2. ظل الزاوية α بالنسبة إلى أي زاوية ذات قياس α، النقطة $P(x, y)$ على ضلعها النهائي، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\alpha = \frac{y}{x}$. 3 التماس خط يتقاطع مع كرة في نقطة واحدة بالضبط.

term 1. The monomials that make up a polynomial.
2. Each number in a sequence or series.

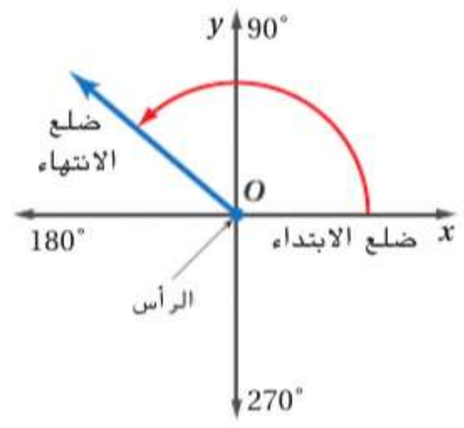
حد 1. أحاديات الحد التي تشكل دالة كثيرة الحدود. 2. كل عدد في تسلسل أو سلسلة.

McGraw-Hill Education مؤسسة للصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

terminal side
A ray of an angle that rotates about the center.



ضلع الانتهاء
شعاع زاوية يدور حول المركز.



tessellation A pattern that covers a plane by transforming the same figure or set of figures so that there are no overlapping or empty spaces.

تغطية بالفسيفساء نمط ما يغطي المستوى من خلال تحويل نفس الشكل أو مجموعة الأشكال بحيث لا يوجد تداخل أو مساحات فارغة.

theoretical probability What should occur in a probability experiment.

احتمال نظري ما ينبغي أن يحدث في تجربة احتمالية معينة.

theoretical probability distribution A distribution of probabilities based on what is expected to happen.

توزيع الاحتمال النظري توزيع الاحتمالات القائمة على ما يتوقع أن يحدث.

third-order determinant Determinant of a 3×3 matrix.

محدد ذو رتبة ثالثة محدد مصفوفة 3×3.

topographic map A representation of a three-dimensional surface on a flat piece of paper.

خريطة طبوغرافية تمثيل لسطح ثلاثي الأبعاد على قطعة ورقية مستوية.

transformation In a plane, a mapping for which each point has exactly one image point and each image point has exactly one preimage point.

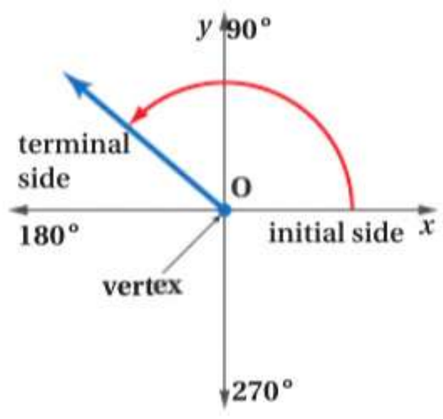
تحويل يشير التحويل في أحد المستويات إلى التخطيط الذي تحتوي كل نقطة فيه على نقطة صورة واحدة بالضبط وتحتوي كل نقطة صورة على نقطة صورة أصلية واحدة بالضبط.

translation **1.** A figure is moved from one location to another on the coordinate plane without changing its size, shape, or orientation. **2.** A transformation that moves a figure the same distance in the same direction. A translation is a function that maps each point to its image along a vector such that each segment joining a point and its image has the same length as the vector, and this segment is also parallel to the vector.

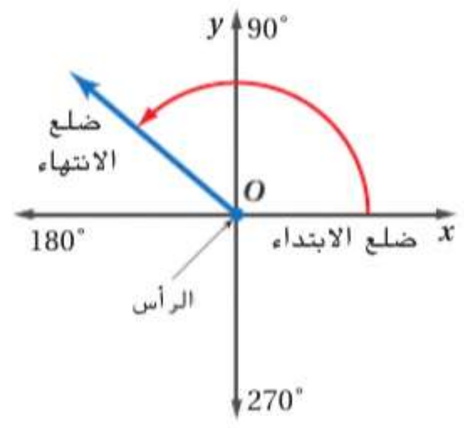
انسحاب 1. شكل يتم تحريكه من موقع إلى آخر على المستوى الإحداثي دون تغيير حجمه أو شكله أو اتجاهه. 2. تحويل يحرك الشكل في نفس البعد وفي نفس الاتجاه. الانسحاب دالة تربط كل نقطة بصورتها على متجه ما بحيث تكون كل قطعة متصلة بنقطة وتكون صورة هذه النقطة بنفس طول المتجه، وتكون هذه القطعة أيضا موازية للمتجه.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

terminal side
A ray of an angle that rotates about the center.



ضلع الانتهاء
شعاع زاوية يدور حول المركز.



tessellation A pattern that covers a plane by transforming the same figure or set of figures so that there are no overlapping or empty spaces.

تغطية بالفسيفساء نمط ما يغطي المستوى من خلال تحويل نفس الشكل أو مجموعة الأشكال بحيث لا يوجد تداخل أو مساحات فارغة.

theoretical probability What should occur in a probability experiment.

احتمال نظري ما ينبغي أن يحدث في تجربة احتمالية معينة.

theoretical probability distribution A distribution of probabilities based on what is expected to happen.

توزيع الاحتمال النظري توزيع الاحتمالات القائمة على ما يتوقع أن يحدث.

third-order determinant Determinant of a 3×3 matrix.

محدد ذو رتبة ثالثة محدد مصفوفة 3×3.

topographic map A representation of a three-dimensional surface on a flat piece of paper.

خريطة طبوغرافية تمثيل لسطح ثلاثي الأبعاد على قطعة ورقية مستوية.

transformation In a plane, a mapping for which each point has exactly one image point and each image point has exactly one preimage point.

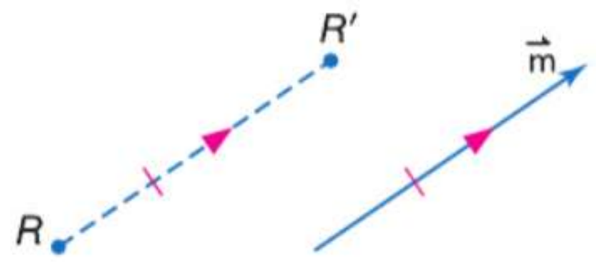
تحويل يشير التحويل في أحد المستويات إلى التخطيط الذي تحتوي كل نقطة فيه على نقطة صورة واحدة بالضبط وتحتوي كل نقطة صورة على نقطة صورة أصلية واحدة بالضبط.

translation **1.** A figure is moved from one location to another on the coordinate plane without changing its size, shape, or orientation. **2.** A transformation that moves a figure the same distance in the same direction. A translation is a function that maps each point to its image along a vector such that each segment joining a point and its image has the same length as the vector, and this segment is also parallel to the vector.

انسحاب 1. شكل يتم تحريكه من موقع إلى آخر على المستوى الإحداثي دون تغيير حجمه أو شكله أو اتجاهه. 2. تحويل يحرك الشكل في نفس البعد وفي نفس الاتجاه. الانسحاب دالة تربط كل نقطة بصورتها على متجه ما بحيث تكون كل قطعة متصلة بنقطة وتكون صورة هذه النقطة بنفس طول المتجه، وتكون هذه القطعة أيضا موازية للمتجه.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

translation vector The vector in which a translation maps each point to its image.



Point R', is a translation of point R along translation vector m.

transverse axis The segment of length 2a whose endpoints are the vertices of a hyperbola.

tree diagram A diagram that shows all possible outcomes of an event.

trigonometric equation An equation containing at least one trigonometric function that is true for some but not all values of the variable.

trigonometric functions For any angle, with measure α, a point $P(x, y)$ on its terminal side,

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, the trigonometric functions of α are as follows.

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \qquad \sin \alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} \qquad \csc \alpha = \frac{r}{y} \qquad \sec \alpha = \frac{r}{x}$$

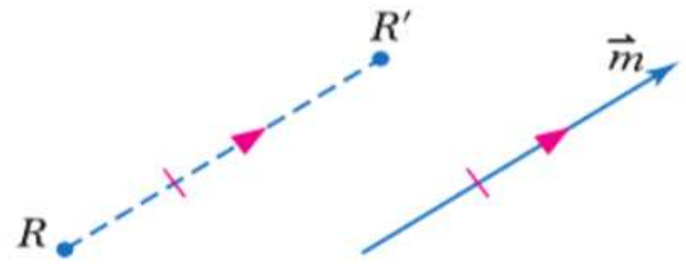
trigonometric identity An equation involving a trigonometric function that is true for all values of the variable for which the function is defined.

trigonometric ratio Compares the side lengths of a right triangle.

trigonometry The study of the relationships between the angles and sides of a right triangle.

turning point Point at which a graph turns. The location of relative maxima or minima.

متجه الانسحاب المتجه الذي يربط فيه الانسحاب كل نقطة بصورتها.



النقطة R' هي انسحاب للنقطة R على امتداد محور الانسحاب m

محور مستعرض قطعة الطول 2a التي تكون نقاط نهايتها هي رؤوس القطع الزائد.

مخطط الشجرة مخطط يعرض جميع النتائج المحتملة لحادث ما.

معادلة مثلثية معادلة تحتوي على دالة مثلثية واحدة على الأقل والتي تكون ذات قيمة حقيقية لبعض قيم المتغير وليس كلها.

دوال مثلثية لأي زاوية ذات قياس α، نقطة $P(x, y)$ على ضلعها النهائي، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، وفيما يلي الدوال المثلثية لـ α.

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \qquad \sin \alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} \qquad \csc \alpha = \frac{r}{y} \qquad \sec \alpha = \frac{r}{x}$$

متطابق مثلثي معادلة تتضمن دالة مثلثية ذات قيمة حقيقية لجميع قيم المتغير الذي تم تحديد الدالة له.

نسبة مثلثية تقارن أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية.

حساب المثلثات دراسة العلاقات بين زوايا مثلث قائم الزاوية وأضلاعه.

نقطة الدوران نقطة يدور عندها رسم بياني. موقع الحد الأقصى أو الأدنى النسبي.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح مؤسسة © محفوظة لصالح والتأليف الطبع حقوق

U

unbounded A system of inequalities that forms a region that is open.

غير محدود نظام المتباينات الذي يشكل منطقة مفتوحة.

uniform probability model An experiment for which all outcomes are equally likely.

نموذج الاحتمال المنتظم تجربة من المرجح أن تتساوى فيها كل النتائج.

uniform tessellations Tessellations containing the same arrangement of shapes and angles at each vertex.

تغطيات بالفسيفساء المنتظمة التغطيات بالفسيفساء التي تحتوي على نفس ترتيب الأشكال والزوايا عند كل رأس.

union The graph of a compound inequality containing or.

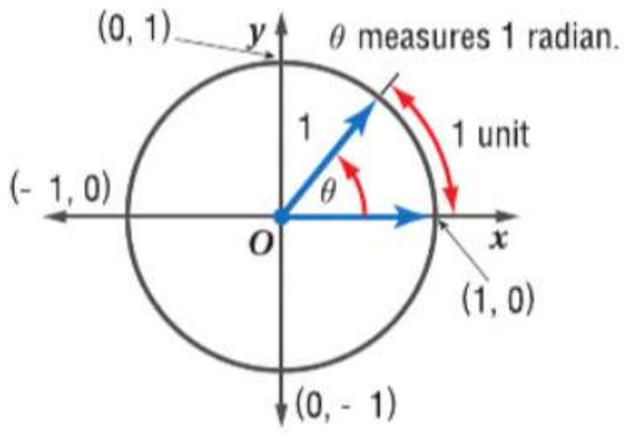
ربط التمثيل البياني الذي يحتوي على متباينة مركبة.

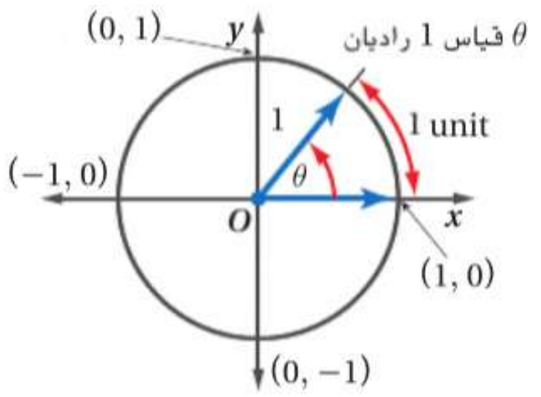
unit analysis The process of including unit measurement when computing.

تحليل الوحدة العملية التي تتضمن وحدات القياس عند الحساب.

unit circle A circle of radius 1 unit whose center is at the origin of a coordinate system.

دائرة الوحدة دائرة نصف قطرها يساوي 1 ويكون مركزها عند نقطة أصل النظام الإحداثي.





univariate data Data with one variable.

بيانات أحادية المتغير بيانات تتكون من متغير واحد.

V

variable 1. A characteristic of a population that can assume different values called *data*. 2. A symbol, usually a letter, used to represent an unknown quantity.

متغير 1. إحدى سمات المجتمع الإحصائي تحمل قيمًا مختلفة يطلق عليها بيانات. 2. رمز يستخدم لتمثيل كمية غير معروفة وعادة ما يكون حرفا.

variable matrix A matrix that only contains the variables of a system of equations.

مصفوفة المتغيرات مصفوفة تحتوي فقط على متغيرات نظام المعادلات.

variance The mean of the squares of the deviations from the arithmetic mean.

تباين متوسط مربعات الانحرافات من المتوسط الحسابي.

vertex 1. Any of the points of intersection of the graphs of the constraints that determine a feasible region.
2. The point at which the axis of symmetry intersects a parabola. 3. The point on each branch nearest the center of a hyperbola.

رأس 1. أي من نقاط تقاطع التمثيلات البيانية للقيود التي تحدد منطقة الحلول العملية.
2. النقطة التي عندها يتقاطع محور التماثل مع القطع المكافئ. 3. النقطة التي توجد على أقرب فرع لمركز القطع الزائد.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

vertical asymptote If the related rational expression of a function is written in simplest form and is undefined for $x = a$, then $x = a$ is a vertical asymptote.

خط مقارب رأسي في حالة كتابة التعبير النسبي ذات الصلة بدالة معينة في أبسط صوره ويكون غير محدد لـ $x = a$، فمن ثم يصبح $x = a$ هو الخط المقارب الرأسي.

vertical line test If no vertical line intersects a graph in more than one point, then the graph represents a function.

اختبار المستقيم الرأسي في حالة عدم تقاطع خط رأسي مع تمثيل بياني في أكثر من نقطة واحدة، إذا يمثل التمثيل البياني دالة معينة.

vertical shift When graphs of trigonometric functions are translated vertically.

إزاحة رأسية في حالة انسحاب التمثيلات البيانية للدوال المثلثية رأسيًا.

vertices **ellipse**—The endpoints of the major axis. **hyperbola**—The endpoints of the transverse axis.

رؤوس القطع الناقص—نقاط نهاية المحور الأكبر. **القطع الزائد**— نقاط نهاية المحور المستعرض.

W

weight The value assigned to an edge in a vertex-edge graph.

وزن القيمة المحددة لحافة ما في الرسم البياني لحافة الرأس.

weight of a path The sum of the weights of the edges along a path.

وزن المسار إجمالي أوزان الحواف على المسار.

weighted average A method for finding the mean of a set of numbers in which some elements of the set carry more importance, or weight, than others.

متوسط حسابي مرجح طريقة لإيجاد متوسط مجموعة الأعداد التي تحمل فيها بعض عناصر المجموعة قيمة أو وزن أكبر مقارنة بغيرها.

weighted vertex-edge graphs A collection of nodes connected by edges in which each edge has an assigned value.

رسوم بيانية مرجحة لحواف الرأس مجموعة العقد المرتبطة بالحواف والتي تمتلك فيها كل حافة قيمة محددة.

whole numbers {0, 1, 2, 3, 4, ...}

أعداد صحيحة {... ،4 ،3 ،2 ،1 ،0}

X

***x*-intercept** The x-coordinate of the point at which a graph crosses the x-axis.

تقاطع مع المحور السيني الإحداثي السيني للنقطة التي يتعارض عندها الرسم البياني مع المحور السيني.

Y

***y*-intercept** The y-coordinate of the point at which a graph crosses the y-axis.

تقاطع مع المحور الصادي الإحداثي الصادي للنقطة التي يتعارض عندها الرسم البياني مع المحور الصادي.

Z

z-value The number of standard deviations that a given data value is from the mean.

قيمة z عدد الانحرافات المعيارية التي تحصل عليها قيمة بيانات محددة من المتوسط الحسابي.

McGraw-Hill Education مؤسسة للطبع والتأليف © محفوظة لصالح حقوق

نسخة الطلاب

شكر وتقدير

Photo: iii [no credit required]; **ix** Gulfimages/Alamy Stock Photo; **vii** Frankris/Shutterstock, Nonwarit Pruetisirirot/123RF; **viii** Roine Magnusson/Photodisc/Getty Images; **x** Luboslav Tiles/Shutterstock.com; **xi** Etabeta1/Alamy; **xii** ©Purestock/SuperStock; **xiii** Purestock/SuperStock; **xiv** I. Rozenbaum & F. Cirou/PhotoAlto; **xv** Zurijeta/Shutterstock.com; **xvi** J. Castro/Flickr/Getty Images; **xvii** (t)Dennis Welsh/UpperCut Images/Getty Images; **xviii** ZouZou/Shutterstock.com; **574** J. Castro/Flickr/Getty Images; **577** Ivan Kuzmin/Shutterstock.com; **578** George Doyle & Ciaran Griffin/Superstock; **586** Redsnapper/Alamy Images; **588** Aceshot1/Shutterstock.com; **593** (t)Ed-Imaging, (b)Ed-Imaging; **594** Ingram Publishing/age fotostock; **600** M.E. Young/USGS; **605** Fotosearch RF/Glow Images; **608** Martin Child/Photodisc/Getty Images; **617** (tl)Image Source, (tr)©68/Brian Hagiwara/Brand X Pictures/PunchStock, (bl)Stockbyte/age fotostock, (bc)Ingram Publishing/SuperStock, (br)Siede Preis/Getty Images; **618** (bl)JupiterImages/Thinkstock/Alamy Images, (bc) Del Boy/Shutterstock, (br)Tamara Kulikova/Shutterstock; **619** (tl)D. Hurst/Alamy Images, (tc)Comstock Images/Alamy, (tr)David Lee/Shutterstock.com, (cr)Comstock Images/Alamy Stock Photo, (b)Lasha/Shutterstock.com; **620** Hisham F. Ibrahim/Getty Images; **624** McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education; **625** McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education; **628** Mark Dierker/McGraw-Hill Education; **642** Zurijeta/Shutterstock; **644** Dennis Welsh/UpperCut Images/Getty Images; **648** Dejan Gileski/Shutterstock.com; **652** Kotsovolos Panagiotis/Shutterstock.com; **657** Nick Koudis/Getty Images; **658** 2xSamara.com/Shutterstock.com; **665** Alexey Stiop/Shutterstock.com; **668** Salajean/Shutterstock.com; **672** JPL/NASA; **676** (t)Ffooter/Shutterstock.com, (b)JPL/NASA; **680** IT Stock Free/Alamy Images; **683** Tamara Kulikova/Shutterstock; **689** Fredrick Kippe/Alamy; **697** Chris Willig; **706** Anders Brownworth/Shutterstock.com; **711** Africa Studio/Shutterstock.com; **724** McGraw-Hill Education; **728** ZouZou/Shutterstock.com; **731** Africa Studio/Shutterstock.com; **738** LoanaB/Shutterstock.com; **750** Lindaks/Shutterstock.com; **751** Steve Allen/Brand X/CORBIS; **752** JGI/Blend Images/Getty Images; **759** Hans-jürgen Hermann/Age Fotostock; **770** ZouZou/Shutterstock.com;

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم

اقتراح - استفسار - شكوى

80051115 | 04-2176855 | ccc.moe@moe.gov.ae | www.moe.gov.ae

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم. لايسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو جزء منه أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات، أو نقله بأي شكل من الأشكال، من دون إذن مسبق من الناشر.