



شرح فيديو لهذه الملزمة على هذا الرابط

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLbW6dI9ExcD2jhopCti9R1yeMIPuZoD->

اضغط على عنوان كل درس لمشاهدة الشرح بالفيديو



ملزمة

الرياضيات

الفصل الدراسي الثالث

2020-2021

الحادي عشر العام

إعداد مدرس الرياضيات أ. مصطفى أسامة علّام

allaaam@yahoo.com



الوحدة 10

التحويلات الهندسية والتناظر

الاسم:-----

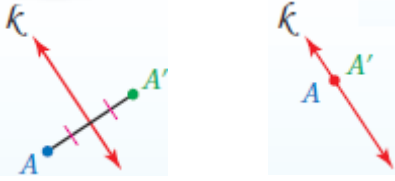


10-1 الانعكاس

ورقة عمل الحادي عشر العام

1- رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس. 2- رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي.

نواجح التعلّم

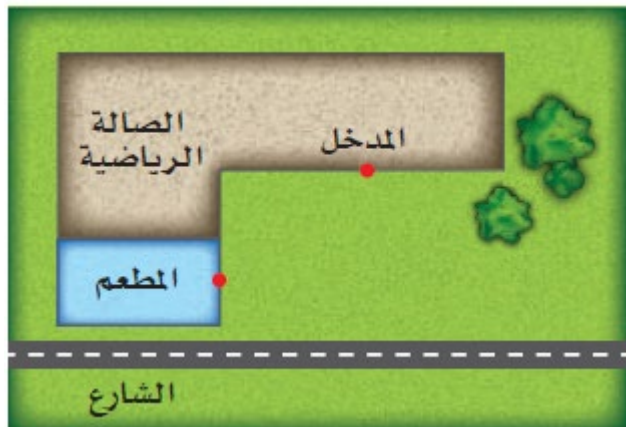
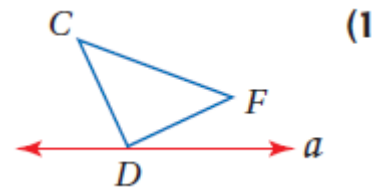
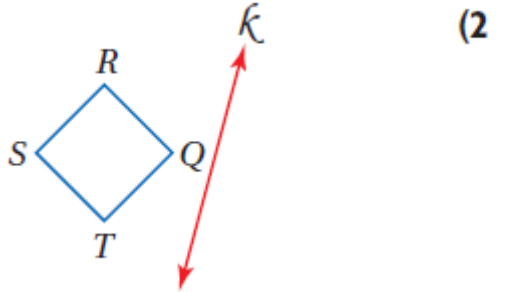
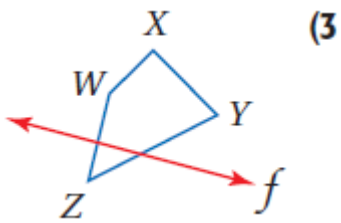
الانعكاس هو تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيم يسمى **محور الانعكاس**، بحيث يكون بعد النقطة وبعد صورتها عن محور الانعكاس متساويين.

• إذا كانت النقطة واقعة على محور الانعكاس، فإن صورتها هي النقطة نفسها.

• إذا كانت النقطة غير واقعة على محور الانعكاس، يكون محور الانعكاس هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة وصورتها.

الانعكاس حول المستقيم $y = x$	الانعكاس حول المحور y	الانعكاس حول المحور x
$(x, y) \rightarrow (y, x)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

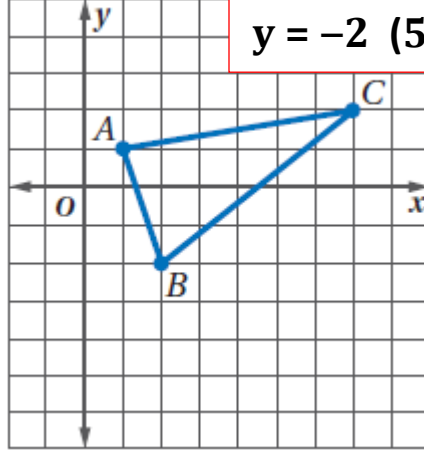
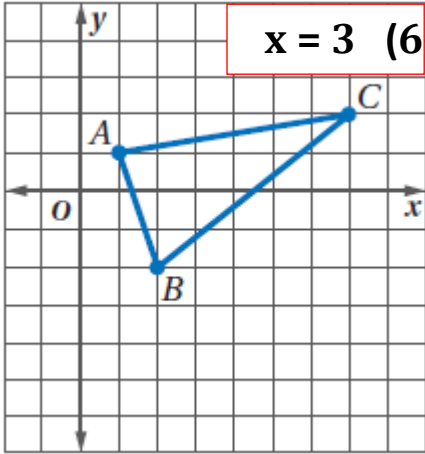
ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى:

4) **مباريات:** ينتظر ماجد في المطعم صديقاً سيأتيه بتذكرة لحضور مباراة في

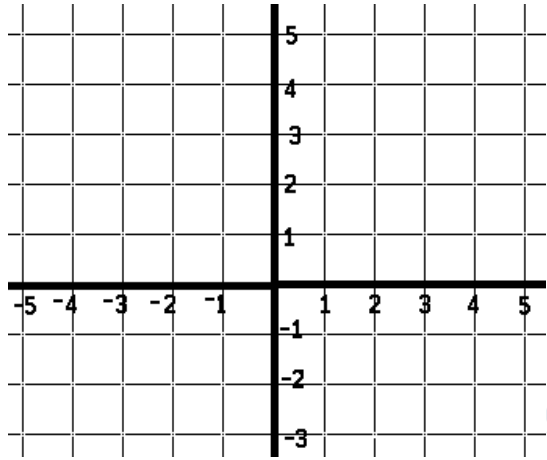
الصالة الرياضية. في أي موقع على الشارع، يجب أن يوقف صديقه

سيارته، حتى تكون المسافة التي يسيرها ماجد من المطعم إلى السيارة ثم

إلى مدخل الصالة الرياضية أقل ما يمكن؟ ارسم شكلاً يوضح إجابتك.

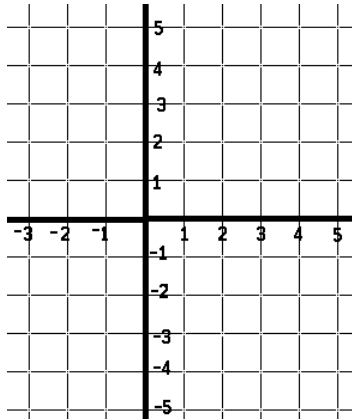


مِثْل بَيَايَا صَوْرَةِ $\triangle ABC$ الْمَبِينِ جَائِبًا
بِالْانْعِكَاسِ حَوْلِ الْمُسْتَقِيمِ الْمَعْطَى فِي كُلِّ
مِنِ السُّؤَالَيْنِ 5، 6.



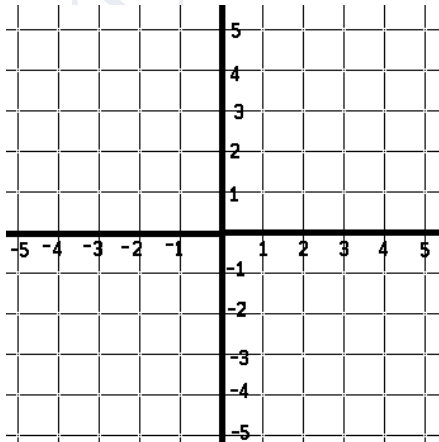
مِثْلِ كُلِّ شَكْلِ مِمَّا يَأْتِي، ثُمَّ ارْسِمِ صَوْرَتَهُ بِالْانْعِكَاسِ الْمَحْدَدِ.

(7) $\triangle XYZ$ الَّذِي إِحْدَاثِيَّاتُ رُؤُوسِهِ هِيَ: $X(0,4)$ ،
 $Y(-3,4)$ ، $Z(-4,-1)$ بِالْانْعِكَاسِ حَوْلِ الْحُورِ y .



(8) $\square RST$ الَّذِي إِحْدَاثِيَّاتُ رُؤُوسِهِ هِيَ: $Q(-1,4)$ ،

$R(4,4)$ ، $S(3,1)$ ، $T(-2,1)$ بِالْانْعِكَاسِ حَوْلِ الْحُورِ x .



(9) الشَّكْلِ الرَّبَاعِيِّ الَّذِي إِحْدَاثِيَّاتُ رُؤُوسِهِ هِيَ: $J(-3,1)$

$K(-1,3)$ ، $L(1,3)$ ، $M(-3,-1)$ بِالْانْعِكَاسِ حَوْلِ

الْمُسْتَقِيمِ $y = x$.

الاسم:-----



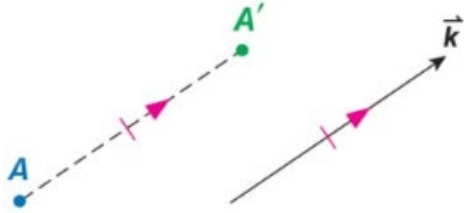
10-2 الإزاحة

ورقة عمل الحادي عشر العام

1- رسم الصورة الناتجة عن الإزاحة. 2- رسم الصورة الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.

نواتج التعلّم

الإزاحة: هي تحويل هندسي ينقل الشكل من موقع إلى آخر من دون تدويره. حيث يتم نقل جميع نقاط الشكل المسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه. ويمكن التعبير عن الإزاحة (الانسحاب) لكل نقطة من الشكل بقطعة مستقيمة طولها يساوي AA' حيث إن A' هي صورة النقطة A الناتجة عن الإزاحة (الانسحاب).



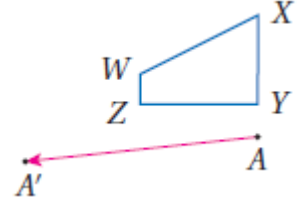
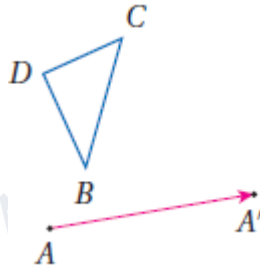
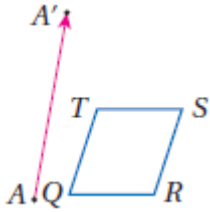
النقطة A' هي إزاحة للنقطة A على طول متجه الإزاحة \vec{k} .

الإزاحة هي دالة تربط كل نقطة بصورتها على طول متجه يدعى متجه الإزاحة بحيث:

- يكون لكل قطعة مستقيمة تربط نقطة بصورتها طول المتجه نفسه.
- تكون هذه القطعة المستقيمة موازية للمتجه أيضًا.

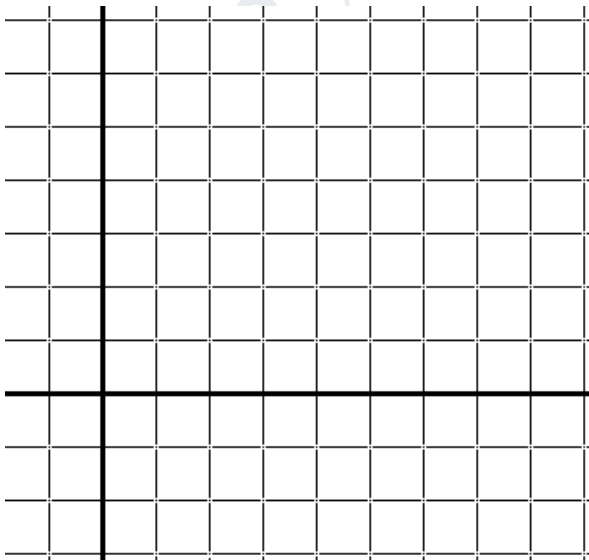
الإزاحة في المستوى الإحداثي: إذا رمزنا للإزاحة الأفقية بالرمز a ، وللإزاحة الرأسية b ، فإنه يمكن التعبير عن هذه الإزاحة بالقاعدة: $(x,y) \rightarrow (x+a, y+b)$

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلِّ ممَّا يأتي:



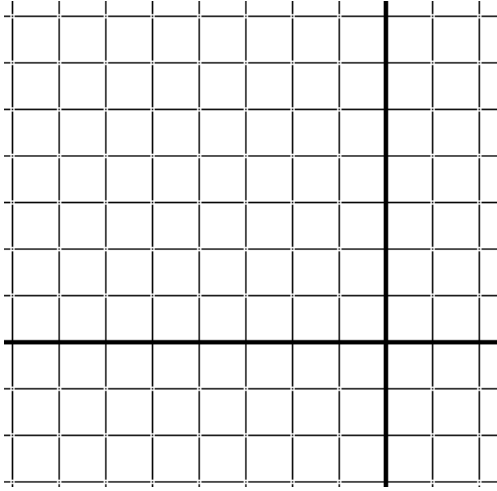
مثل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلِّ ممَّا يأتي بيانيًا:

شبه المنحرف JKLM ذو الرؤوس $J(2,4)$, $K(1,1)$, $L(5,1)$, $M(4,4)$; $(7,1)$

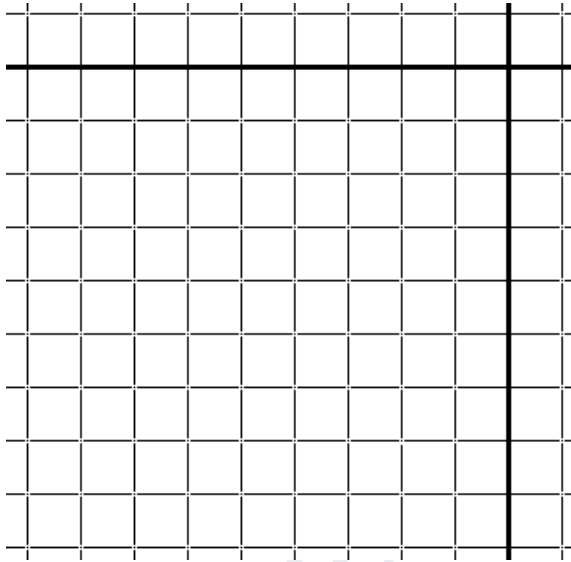




المثلث $\triangle DFG$ ذو الرؤوس $D(-8,8)$, $F(-10,4)$, $G(-7,6)$; $\langle 5,-2 \rangle$



متوازي الأضلاع WXYZ ذو الرؤوس $W(-6,-5)$, $X(-2,-5)$, $Y(-1,-8)$, $Z(-5,-8)$; $\langle -1,4 \rangle$

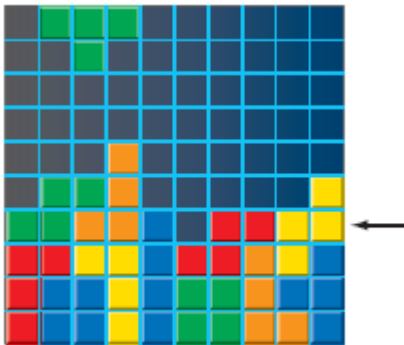


ألعاب فيديو: إن هدف اللعبة المجاورة هو تحريك القطع الملونة إلى اليمين أو اليسار، عندما

تنزل من أعلى الشاشة لملء كل صف دون ترك فراغاتٍ فيه. إذا كان الموقع الابتدائي للقطعة

في أعلى الشاشة ، فأكب قاعدة (رمز الدالة) لوصف الإزاحة التي تملأ الصف

المشار إليه بالسهم.



الاسم:-----

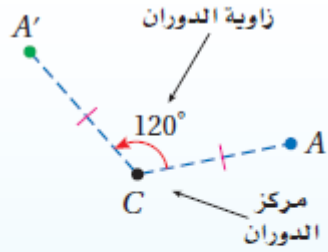


10-3 الدوران

ورقة عمل الحادي عشر العام

1- رسم الصورة الناتجة عن الدوران مستخدمًا المنقلة. 2- رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي.

نواتج التعلّم



الدوران يحرك كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة وفي اتجاه محدد حول نقطة ثابتة تسمى مركز الدوران.

• إذا كانت النقطة هي مركز الدوران، فإن صورتها هي النقطة نفسها.

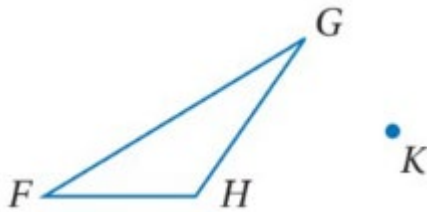
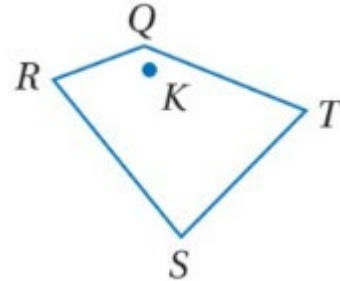
• إذا كانت النقطة غير مركز الدوران، فإن النقطة الأصلية وصورتها تبعدان المسافة نفسها عن مركز الدوران، والزاوية المتشكلة من النقطة ومركز الدوران والصورة تسمى زاوية الدوران.

A' هي صورة A الناتجة عن دوران بزاوية 120° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة C .

الدوران في المستوى الإحداثي:

زاوية الدوران 270° زاوية الدوران 180° زاوية الدوران 90° $(x,y) \rightarrow (y,-x)$ $(x,y) \rightarrow (-x,-y)$ $(x,y) \rightarrow (-y, x)$

استخدم منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كل من السؤالين التاليين:

 45°  120° 

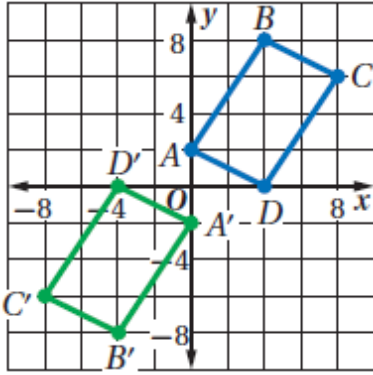
إحداثيات رؤوس المثلث DFG هي : $F(2,8)$, $D(-2,6)$

$G(2,3)$ ، مثل بيانيًا المثلث وصورته الناتجة عن دوران بزاوية

270° حول نقطة الأصل.



اختيار من متعدد: الشكل المجاور بين الشكل الرباعي ABCD وصورته A'B'C'D' الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل. ما قياس زاوية الدوران؟



- A) 90°
C) 270°

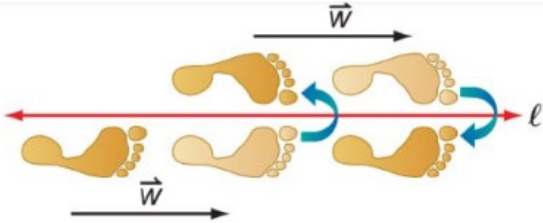
- B) 180°
D) 360°

نواتج التعلم

1- رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين أحدهما هو الانعكاس.

2- رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين وحول مستقيمين متقاطعين.

عند إجراء تحويل هندسي على شكل ما، ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته، فإن التحويل الهندسي الذي ينقل الشكل الأصلي إلى الصورة النهائية هو تركيب لتحويلين هندسيين، ويسمى **تحويلًا هندسيًا مركبًا**.



الانعكاس الانزلاقي: هو تحويل هندسي مركب ينتج عن

إزاحة يليها انعكاس في خطٍ مستقيم موازٍ لمتجه الإزاحة.

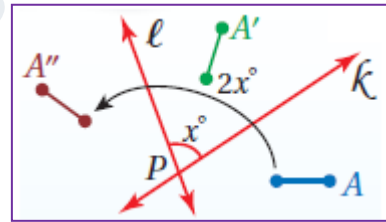
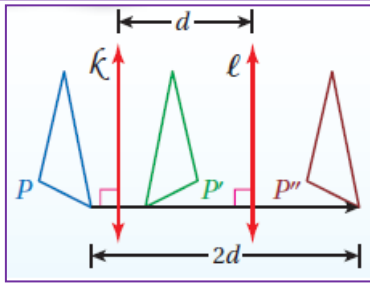
نظرية 14-1 تركيب تحويلي تطابق (أو أكثر) هو تحويل تطابق أيضًا.

نظرية 14-2 يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين بأنه إزاحة، ويكون:

- اتجاهها عموديًا على كلي من المستقيمين. • مقدارها مثلي المسافة بين المستقيمين المتوازيين.

نظرية 14-3 يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين بأنه دوران، ويكون:

- مركزه هو نقطة تقاطع المستقيمين. • قياس زاويته مثلي قياس الزاوية التي يشكلها المستقيمان.

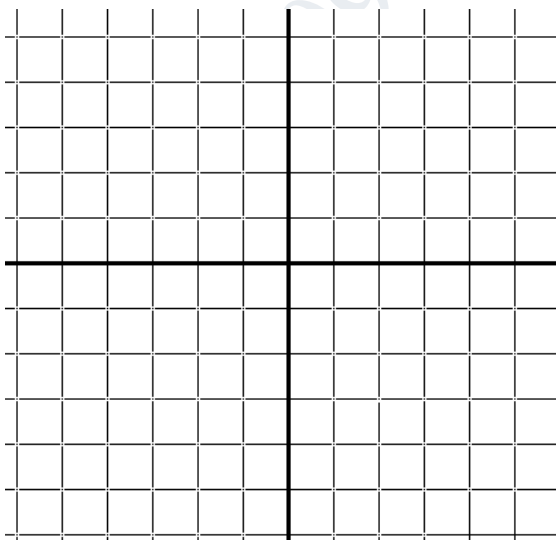


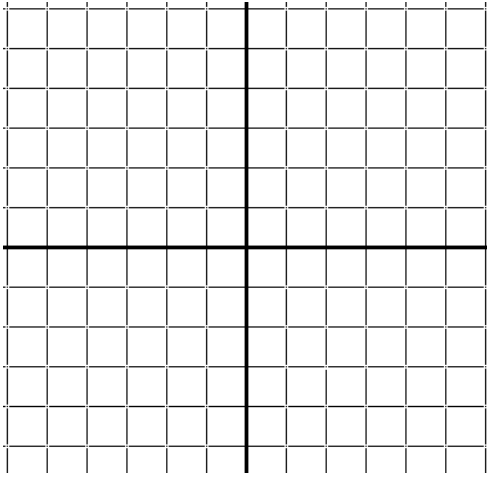
إحداثيات رؤوس المثلث CDE هي : $C(-5,-1)$, $D(-2,-5)$, $E(-1,-1)$ ، مثل بيانيًا المثلث وصورته الناتجة عن

الانعكاس الانزلاقي المحدد:

إزاحة: على طول $\langle 4,0 \rangle$

انعكاس: بالنسبة للمحور الأفقي x .



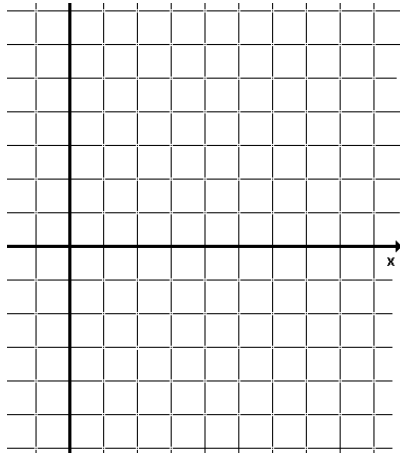


إزاحة: على طول $\langle 0,6 \rangle$

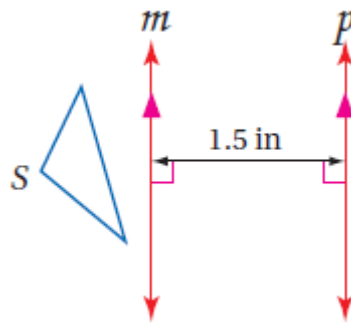
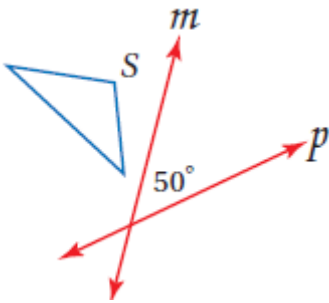
انعكاس: بالنسبة للمحور الرأسي لا.

إحداثيات طرفي \overline{JK} هما $J(2,5)$, $K(6,5)$ ، مثل بيانياً \overline{JK} وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x ،

ثم دوران بزاوية 90° حول نقطة الأصل:



ارسم صورة الشكل S الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ثم حول المستقيم p ، ثم صف تحويلًا هندسيًا واحدًا ينقل S إلى S'' .



أنماط البلاط: صنع راشد نمطاً من بلاطٍ على شكل مثلث متطابق الضلعين، صف التحويل

الهندسي المركب الذي يمكن استخدامه لتكوين هذا النمط.

الاسم:-----



10-5 التناظر

ورقة عمل الحادي عشر العام

نواتج التعلم

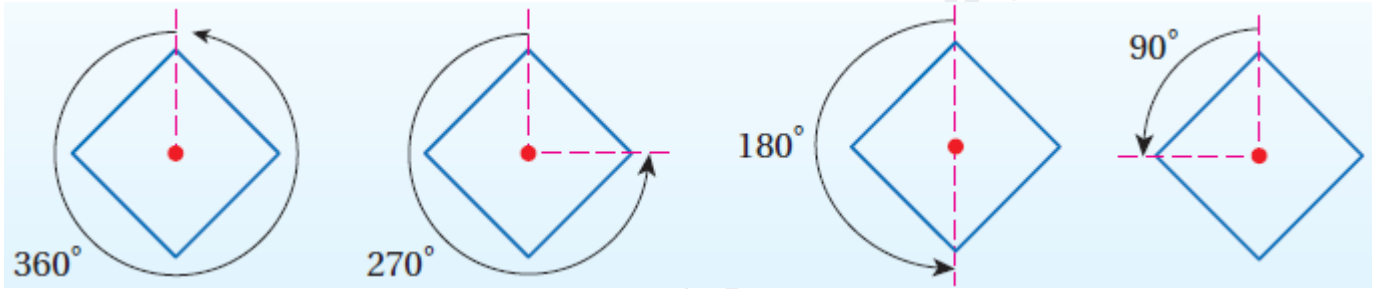
- 1- تحديد محاور التناظر والتناظر الدوراني للأشكال ثنائية الأبعاد.
- 2- تحديد مستويات التناظر والتناظر الدوراني للأشكال ثلاثية الأبعاد.

يكون الشكل الثنائي الأبعاد متناظرًا حول محور، إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس حول مستقيم ما هي الشكل نفسه، ويسمى هذا المستقيم محور التناظر.



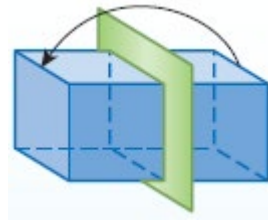
يكون للشكل ثنائي الأبعاد تناظر دوراني إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بين 0° و 360° حول مركزه هي الشكل نفسه، ويسمى مركز الدوران في هذه الحالة مركز التناظر.

يطلق على عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء دورانه من 0° إلى 360° اسم رتبة التناظر، أما (مقدار التناظر) (زاوية التناظر الدوراني) فهي قياس أصغر زاوية يدورها الشكل حتى ينطبق على نفسه، وقياس هذه الزاوية يساوي [مقدار التناظر = $360^\circ \div$ رتبة التناظر].

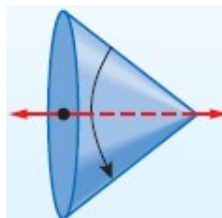


التناظر في الأشكال الثلاثية الأبعاد

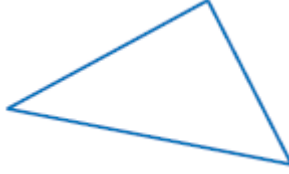
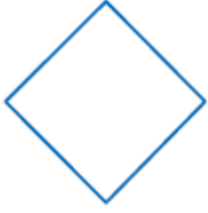
يكون الشكل الثلاثي الأبعاد متناظرًا حول مستوى، إذا كان صورة انعكاسه حول المستوى هي الشكل نفسه، ويسمى هذا المستوى بمستوى التناظر.



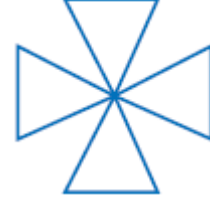
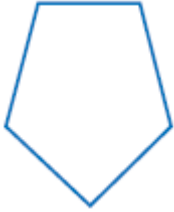
يكون للشكل الثلاثي الأبعاد تناظر محوري، إذا أمكن تدويره حول هذا المحور بزاوية بين 0° و 360° ؛ ليصبح كما كان في وضعه الأصلي.



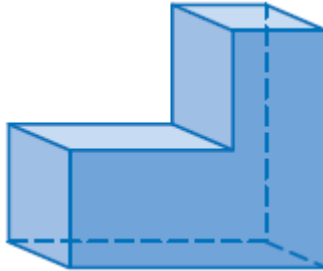
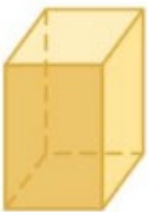
بين ما إذا كان للشكل محور تناظر أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التناظر جميعها، وحدد عددها في كل ما يأتي:

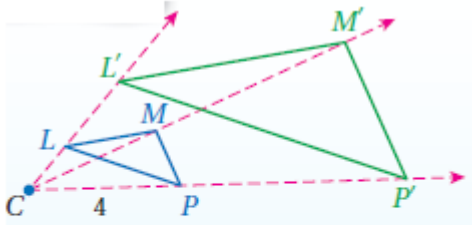


بين ما إذا كان للشكل تناظر دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعين مركز التناظر، وحدد رتبته ومقداره في كل ما يأتي:



بين ما إذا كان الشكل المجاور متناظرًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

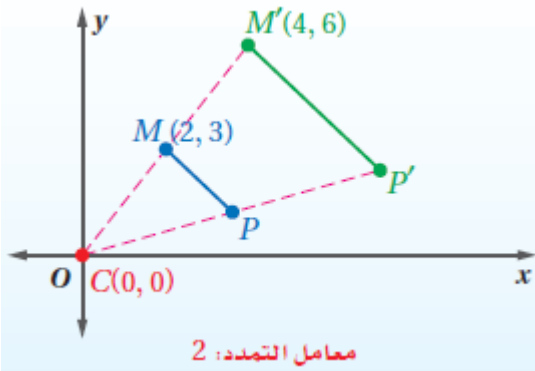


ورقة عمل الحادي عشر العام 10-6 عمليات تغيير الأبعاد (التمدد) YouTube^{AE} الاسم: -----1- رسم الصورة الناتجة عن التمدد باستخدام المسطرة. 2- رسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي. **نواتج التعلّم**

$$| \text{---} 4 (2.5) = 10 \text{---} |$$

$\triangle LMP'$ هو صورة $\triangle LMP$ الناتجة

عن التمدد الذي مركزه C ومعامله 2.5



معامل التمدد: 2

التمدد هو تحويل هندسي يغيّر الشكل أو يصغره بنسبة محدّدة هي نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر لها في الشكل الأصلي. وتسمى هذه النسبة **معامل مقياس التمدد**. ولأن الصورة الناتجة عن التمدد تشبه الشكل الأصلي، فإن التمدد نوع من أنواع **تحويلات التشابه**. ويتم تحديد التمدد بمعرفة مركز التمدد ومعامله.

التمدد الذي مركزه C ومعامله هو العدد الموجب k ، حيث $k \neq 1$ ينقل النقطة P في شكل ما إلى صورتها P' ، بحيث:

• إذا انطبقت النقطة P على مركز التمدد C ، فإن صورتها هي النقطة P نفسها.

• إذا لم تنطبق النقطة P على مركز التمدد C ، فإن صورتها P' تقع على \vec{CP} ويكون $CP' = k(CP)$

التمدد في المستوى الإحداثي

لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، اضرب الإحداثيين x, y لكل نقطة في الشكل الأصلي في معامل مقياس التمدد k .

استخدم مسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة M ومعامله العدد k المحدد في كل من السؤالين التاليين:

$$k = 2 \quad (2)$$

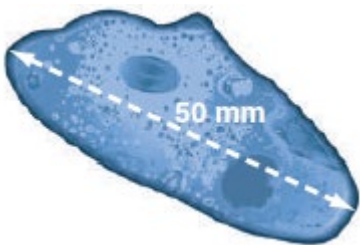
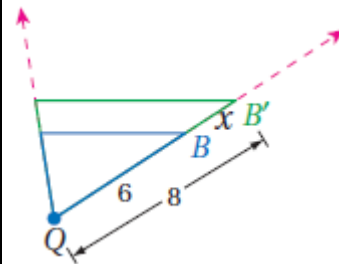


$$k = \frac{1}{4} \quad (1)$$



(4) أحياء: طول مخلوق حيّ دقيق وحيد الخلية 200 ميكرون، ويظهر طوله تحت المجهر 50 mm، إذا كان 1000 ميكرون = 1 mm، فما قوة التكبير (معامل مقياس التمدد) المستخدمة؟ وضح إجابتك.

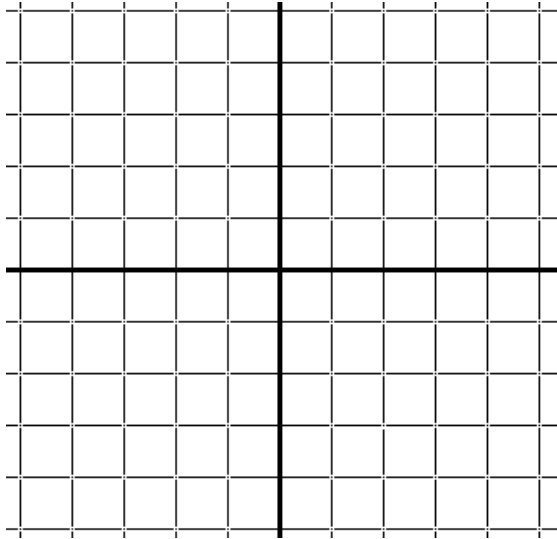
(3) حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل B إلى الشكل B' تكبيراً أم تصغيراً، ثم أوجد معامل وقيمة x .



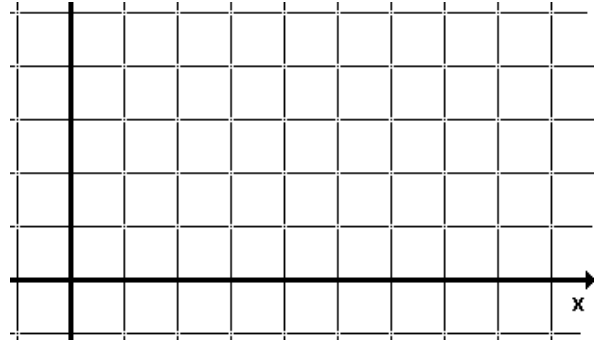


مثل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانياً، ثم مثل صورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍ من الأسئلة التالية:

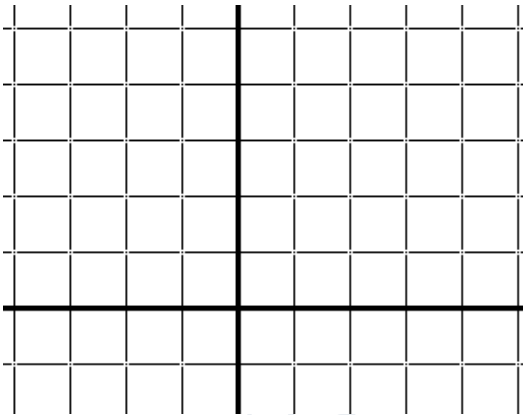
$$k = \frac{1}{2} ; Q(-4, 4), R(-4, -4), S(4, -4), T(4, 4) \quad (6)$$



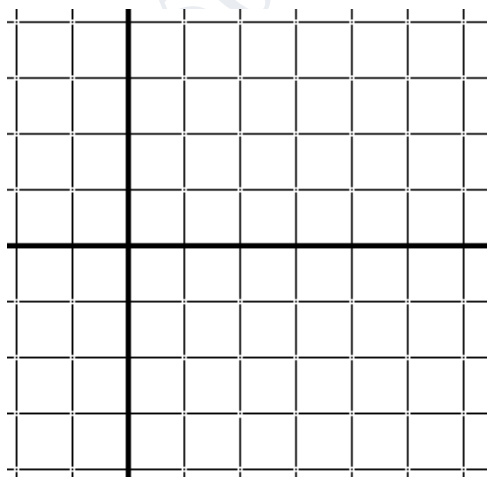
$$k = 1.5 ; W(0, 0), X(6, 6), Y(6, 0) \quad (5)$$



$$k = 2 ; A(-1, 4), B(2, 4), C(3, 2), D(-2, 2) \quad (7)$$



$$k = \frac{3}{4} ; J(-2, 0), K(2, 4), L(8, 0), M(2, -4) \quad (8)$$





الوحدة 11

الدوال المثلثية

ورقة عمل الحادي عشر العام 11-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة YouTube AE الاسم: _____

1- إيجاد قيم النسب المثلثية للزاويا الحادة.

نواتج التعلم

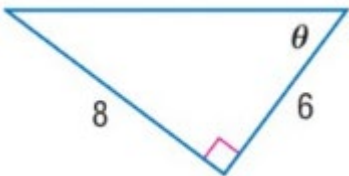
2- استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع المثلثات القائمة وقياسات زواياها.

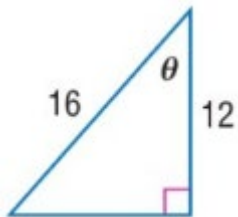
النظائر الضربية للنسب المثلثية

جبرياً	بالكلمات
$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\text{وتر}}{\text{مُقابل}}$	قاطع تمام الزاوية θ (csc θ) Cosecant هو النظير الضربي للنسبة sin.
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}$	قاطع تمام الزاوية θ (sec θ) Secant هو النظير الضربي للنسبة cos.
$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$	ظل تمام الزاوية θ (cot θ) Cotangent هو النظير الضربي للنسبة tan.

النسب المثلثية

جبرياً	بالكلمات
$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$	جيب الزاوية θ Sine θ هو نسبة طول الضلع المقابل لهذه الزاوية إلى طول الوتر.
$\cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$	جيب تمام الزاوية θ Cosine θ هو نسبة طول الضلع المجاور لهذه الزاوية إلى طول الوتر.
$\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$	ظل الزاوية θ Tangent θ هو نسبة طول الضلع المقابل لهذه الزاوية إلى طول الضلع المجاور لها.

أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ .



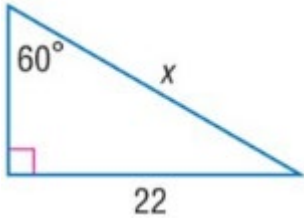


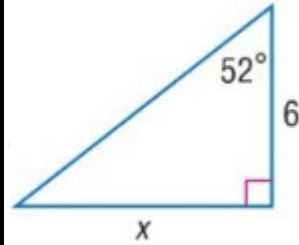
في مثلث قائم، تكون $\angle A$ حادة. أوجد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.

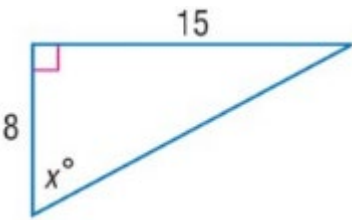
$$\cos A = \frac{4}{7}$$

$$\tan A = \frac{20}{21}$$

استخدم نسبة مثلثية لإيجاد قيمة x . قَرِّبْ إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.







أوجد قيمة x . قَرِّبْ إلى أقرب جزء من عشرة.



الاستنتاج المنطقي وجد عمر شجرتين أمام بعضهما مباشرة على كل جانب من الوادي. عندما تحرك مسافة 100 متر من الشجرة على جانبه (بشكل مواز مع حافة الوادي)، تشكلت زاوية قياسها 70° بالشجرة على جانبه والشجرة على الجانب الآخر. أوجد المسافة عبر الوادي.

السلام زاوية الارتفاع الموصي بها للسلم المستخدم في مكافحة الحريق هي 75° . ما الارتفاع الذي يصل إليه سلم طوله 21 متراً على مبنى إذا تم استخدام زاوية الارتفاع الموصي بها؟ قَرِّبْ إلى أقرب جزء من عشرة.

الاسم: _____



11-2 الزوايا وقياس الزوايا

ورقة عمل الحادي عشر العام

1- رسم الزوايا في الوضع القياسي وإيجادها.

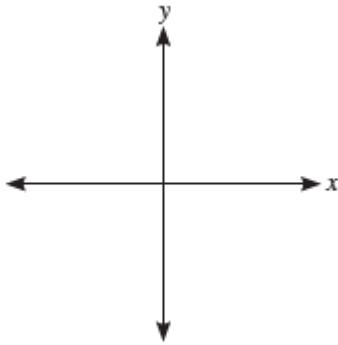
نواتج التعلم

2- تحويل قياس زاوية من الدرجة إلى الراديان والعكس.

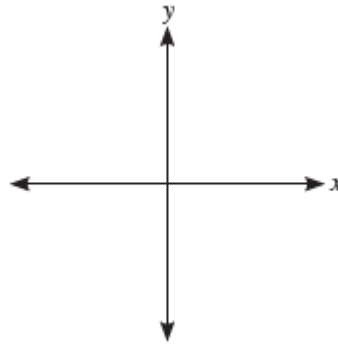
تكون الزاوية في الوضع القياسي **Standard Position** عندما يكون رأسها عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، ويقع ضلع الابتدء **Initial Side** لها على الجزء الموجب من المحور x . يسمّى الضلع الذي دار للزاوية **ضلع الانتهاء Terminal Side**.

ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المُعطى.

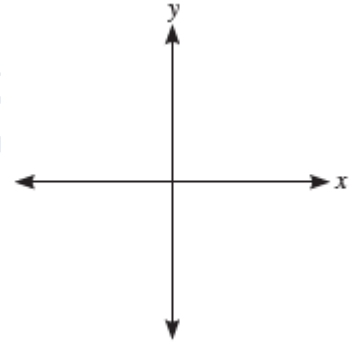
140°



-60°



390°



الزوايا المتشاركة في ضلع الانتهاء **Coterminal Angles** هناك عدد غير منته من الزوايا المتشاركة في ضلع الانتهاء. لتحديد قياس زاوية متشاركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى قياسها θ ، أضيف أو أطرح مضاعفًا من مضاعفات 360° أي قياس الدورة الكاملة فيكون: $\theta + n(360^\circ)$ حيث n عدد صحيح.

أوجد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.

25°

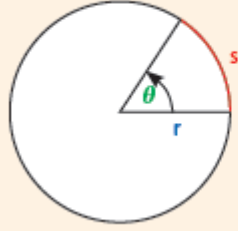
-100°

 $\frac{\pi}{4}$

225°

-40°

قانون طول القوس

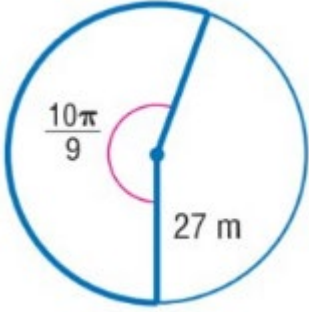


لحساب طول القوس s الذي تحدده زاوية مركزية قياسها θ راديان، في دائرة نصف قطرها r ، أستخدم القانون.

$$s = r\theta$$

الاستنتاج صنع لاعب تنس دورة بيده تحركت على امتداد مسار قوس. إذا كان نصف قطر دائرة القوس هو 1.2 متر وزاوية الدوران هي 100° ، فما طول القوس؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

أوجد طول كل قوس. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



الاسم:-----



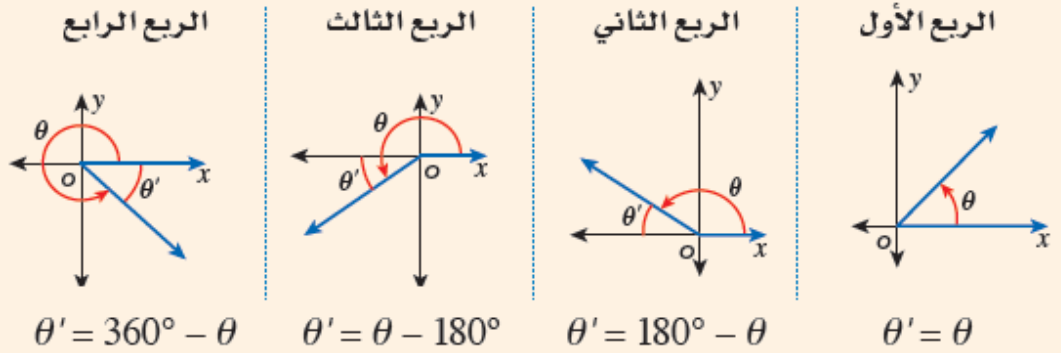
11-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

ورقة عمل الحادي عشر العام

نواجح التعلّم

1- إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا العامة. 2- إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام زوايا المرجع.

الزوايا المرجعية

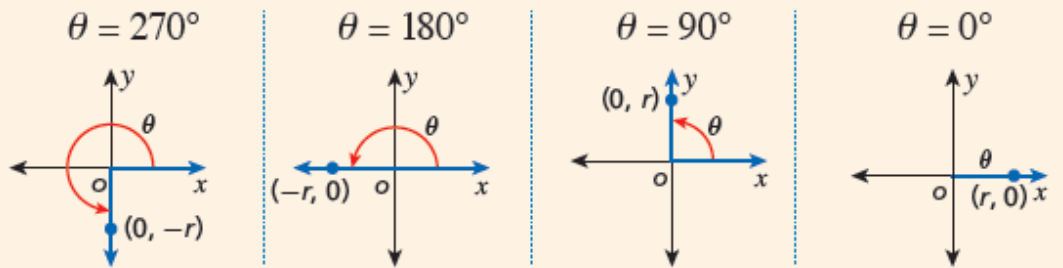


النسب المثلثية

إذا كانت P نقطة على ضلع الانتهاء لزاوية θ في الوضع القياسي وكان $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ فإن:

الجيب	جيب التمام	الظل
$\sin \theta = \frac{y}{r}$	$\cos \theta = \frac{x}{r}$	$\tan \theta = \frac{y}{x}$

الزوايا الربعية



قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة

sine	cosine	Tangent
$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45^\circ = 1$

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	1	0
90°	+1	0	غير معرف
180°	0	-1	0
270°	-1	0	غير معرف
360°	0	1	0

الربع الثاني	$\sin \theta : +$	$\cos \theta : +$	الربع الأول
الربع الثالث	$\sin \theta : -$	$\cos \theta : +$	الربع الرابع
	$\tan \theta : +$	$\tan \theta : -$	



ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ .

(1, 2)

(-8, -15)

(0, -4)

ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية المرجع لها.

300°

115°

 $-\frac{3\pi}{4}$

<hr/>	<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>	<hr/>

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

 $\sin \frac{3\pi}{4}$

sec 120°

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

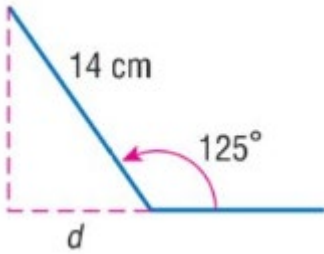


$$\tan \frac{5\pi}{3}$$

$$\sin 300^\circ$$

الترفيه فتحت ميساء مشغل DVD المحمول بحيث يصنع زاوية 125° . ويبلغ طول الشاشة 14 سنتيمتراً.

a. أعد تصميم الرسم التخطيطي بحيث تكون الزاوية في وضع قياسي على المستوى الإحداثي.



b. أوجد زاوية المرجع، ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة إلى الجدار d التي يمكن وضع مشغل DVD عندها.

c. استخدم النسبة لإيجاد المسافة. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

1- إيجاد مساحة مثلث باستخدام ضلعين وزاوية محصورة. 2- استخدام قانون الـ sine في حل المثلثات.

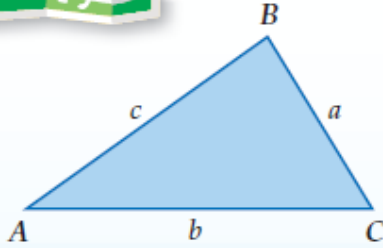
نواتج التعلم

أضف إلى

مطوبتك

مساحة المثلث

مفهوم أساسي



التعبير اللفظي: مساحة المثلث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

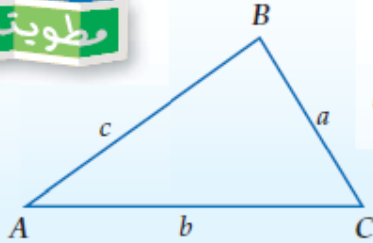
$$\text{الرموز: } k = \frac{1}{2} ab \sin C \quad k = \frac{1}{2} ac \sin B \quad k = \frac{1}{2} bc \sin A$$

أضف إلى

مطوبتك

قانون الجيوب

مفهوم أساسي



إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

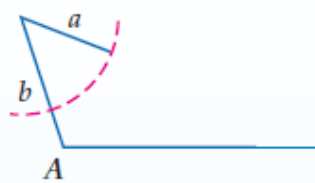
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

أضف إلى

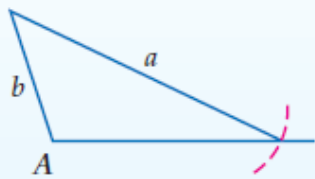
مطوبتك

المثلثات الممكنة في حالة (SSA)

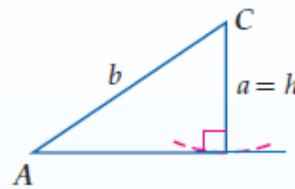
مفهوم أساسي

افتراض مثلثًا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$ $\angle A$ قائمة أو منفرجة

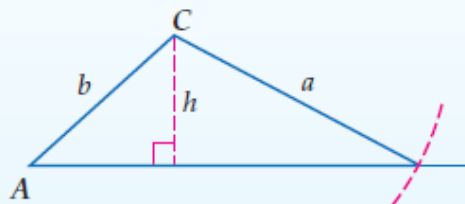
$a \leq b$
لا يوجد حل



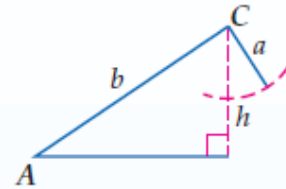
$a > b$
حل واحد

 $\angle A$ حادة

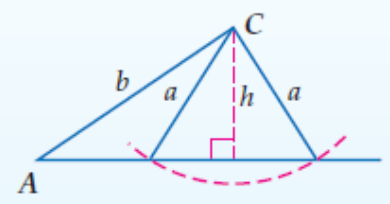
$a = h$
حل واحد



$a \geq b$
حل واحد

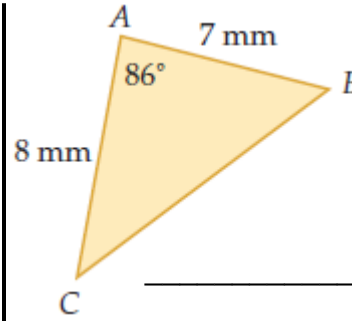
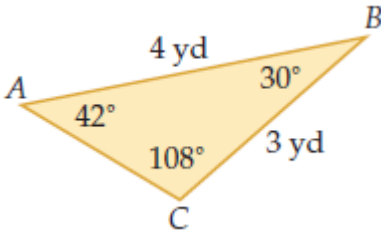


$a < h$
لا يوجد حل



$h < a < b$
حلان

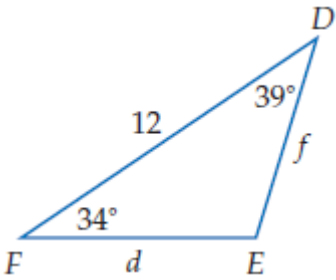
أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلِّ ممَّا يأتي، مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.



$A = 40^\circ, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

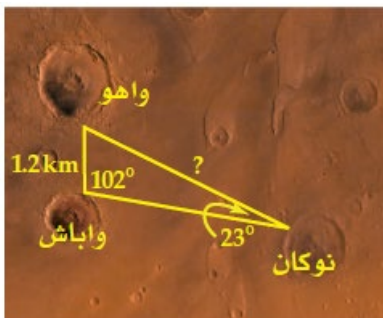
$B = 103^\circ, a = 20 \text{ in}, c = 18 \text{ in}$

حلِّ كلِّ مثلث مما يأتي، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:



$G = 80^\circ, H = 40^\circ, g = 14$ في $\triangle FGH$ الذي فيه:

فضاء: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين فوهة واهو وفوهة نوكان.





حدد إن كان للمثلث ABC في كلِّ ممَّا يأتي حلٌّ واحد، أم حلَّان، أم ليس له حلٌّ. أوجد الحلول، مقرَّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

$$A = 95^\circ, a = 19, b = 12$$

$$A = 60^\circ, a = 15, b = 24$$

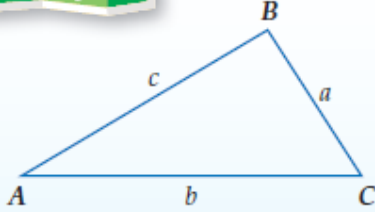
$$A = 34^\circ, a = 8, b = 13$$

مفهوم أساسي

قانون جيب التمام

أضف إلى

مطوبتك



إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ملخص المفهوم

حلّ المثلثات غير القائمة الزاوية

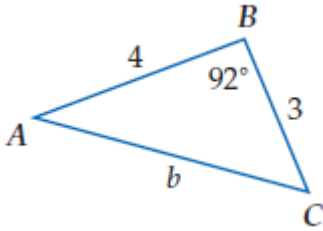
أضف إلى

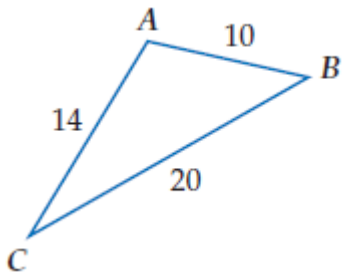
مطوبتك

إذا أعطيت	فابدأ الحلّ باستعمال
قياسا زاويتين وطول أيّ ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيب التمام

كرة قدم: في إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بُعد 20 m من لاعب الجناح الأيمن. ودار لاعب خط الوسط بزاوية قياسها 40° ، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بُعد 16 m منه. ما المسافة بين لاعبي الجناحين؟

حل كل مثلث مما يأتي مقرَّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

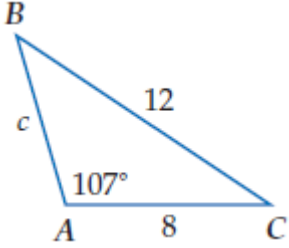


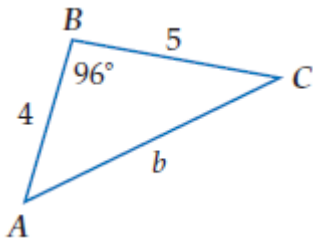


$a = 5, b = 8, c = 12$



حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحلّ كلّ مثلث ممّا يأتي، ثم حلّ المثلث مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.





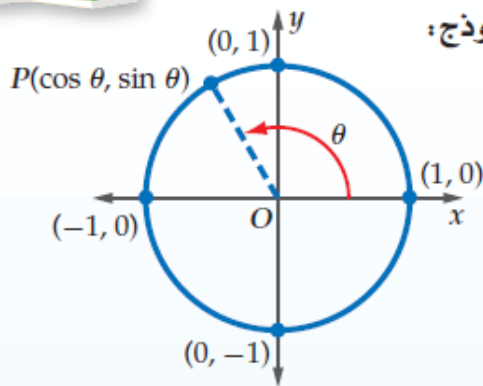
الدوال الدائرية: دائرة الوحدة هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

مفهوم أساسي

دوال في دائرة الوحدة

أضف إلى

مطوبتك



النموذج:

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ

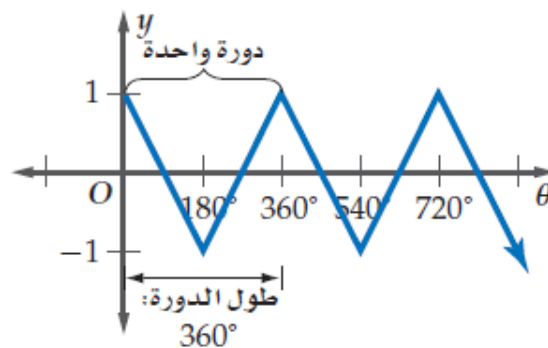
المرسومة في الوضع القياسي

دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$,فإن: $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$ الرموز: $P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$ مثال: إذا كانت: $\theta = 120^\circ$ فإن: $P(x, y) = P(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$

كلٌّ من $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$ دالة بالنسبة إلى θ . وتُسمّى كلٌّ منهما **دالة دائرية**؛ لأن تعريف كلٍّ منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

الدوال الدورية: في **الدوال الدورية** يكون شكل الدالة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويُسمّى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمّى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة** كما هو مبين في التمثيل البياني للدالة أدناه.

θ	y
0°	1
180°	-1
360°	1
540°	-1
720°	1

تتكرر الدورة كل 360° 

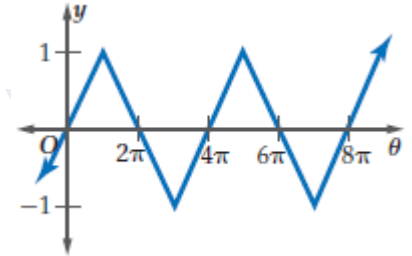
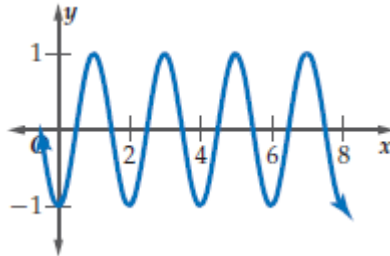
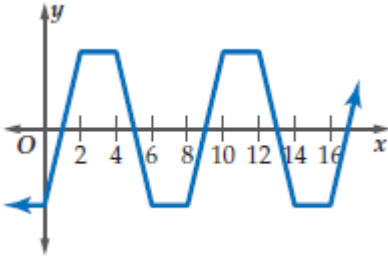
بما أن طول الدورة لكلٍّ من الدالتين هو 360° ، فإن قيم كلٍّ من الدالتين تتكرّر كلّ 360° .
لذلك فإن $\sin(x + 360^\circ) = \sin x$, $\cos(x + 360^\circ) = \cos x$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P ، فأوجد كلاً من $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ في كلِّ ممَّا يأتي:

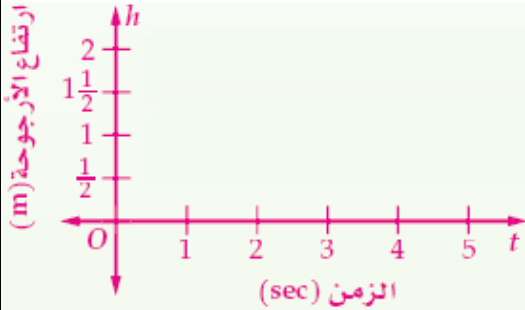
$$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$$

أوجد طول الدورة لكلِّ من الدالتين الآتيتين:



أرجوحة: إذا مثل ارتفاع أرجوحة دالة دورية في الزمن، بحيث تصل الأرجوحة إلى أقصى ارتفاع لها وهو 2 m، ثم تعود إياباً لتصل 2 m مرة أخرى مروراً بأقل ارتفاع لها وهو $\frac{1}{2}$ m، مستغرقة زمناً قدره ثانية واحدة بين أقل ارتفاع وأقصى ارتفاع، فأجب عما يأتي:



(a) ما الزمن الذي تستغرقه حركة الأرجوحة ذهاباً وإياباً بدءاً بأقصى ارتفاع وانتهاءً إليه؟

(b) مثل بيانياً ارتفاع الأرجوحة h باعتبارها دالة في الزمن t .

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالة مثلثية ممَّا يأتي:

$$\sin \frac{13\pi}{6}$$

$$\sin (-60^\circ)$$

$$\cos 540^\circ$$

2- وصف دوال مثلثية أخرى وتمثيلها بيانياً.

1- وصف دوال الجيب وجيب التمام والظل وتمثيلها بيانياً.

نواتج التعلّم

مفهوم أساسي		دالتا الجيب وجيب التمام	أضف إلى مطوبتك
$y = \cos \theta$	$y = \sin \theta$	الدالة المولدة (الأم)	
		التمثيل البياني	
مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية	المجال	
$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	المدى	
1	1	السعة	
360°	360°	طول الدورة (الفترة)	

سعة منحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

التمثيل البياني للدوال المثلثية في صورتها العامة: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$

سعتها $|a|$ ، وطول دورتها (فترتها) $\frac{360^\circ}{|b|}$.

والقيمة العظمى هي $y = |a|$ ، والقيمة الصغرى هي $y = -|a|$.

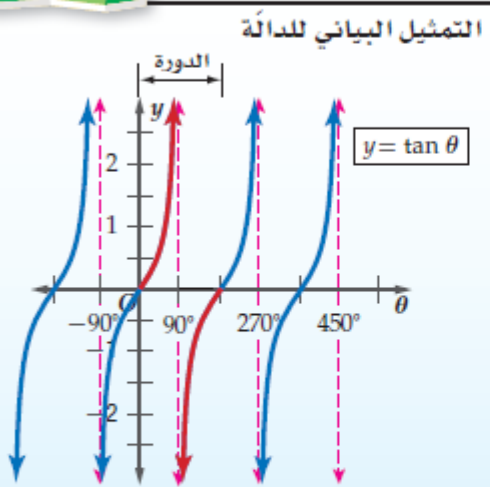
نقاط تقاطع كل منهما مع المحور θ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

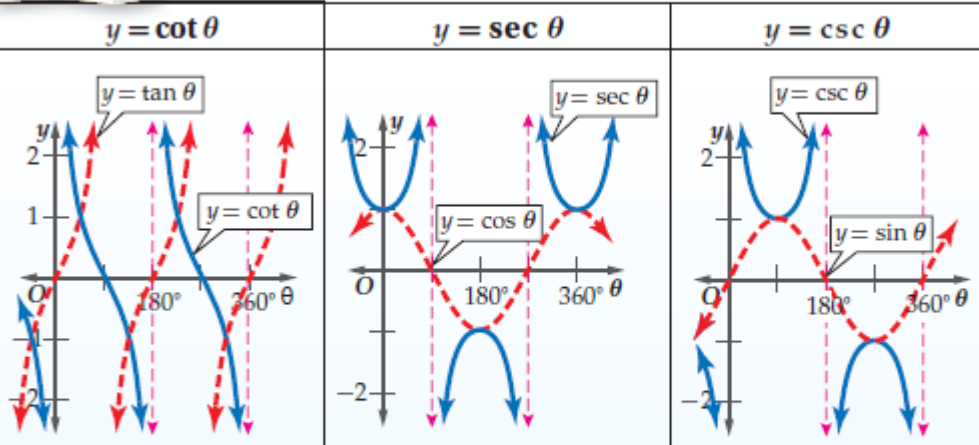
يتم وصف موجات الصوت عادة باستعمال **التردد**، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن.

ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلاً إذا كان طول الدورة

للدالة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.

مفهوم أساسي		دالة الظل	
اضف إلى مطوبتك	التمثيل البياني للدالة	$y = \tan \theta$	الدالة المولدة (الأم)
		$\{\theta \mid \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$	المجال
		مجموعة الأعداد الحقيقية	المدى
		غير معرفة	السعة
		180°	طول الدورة

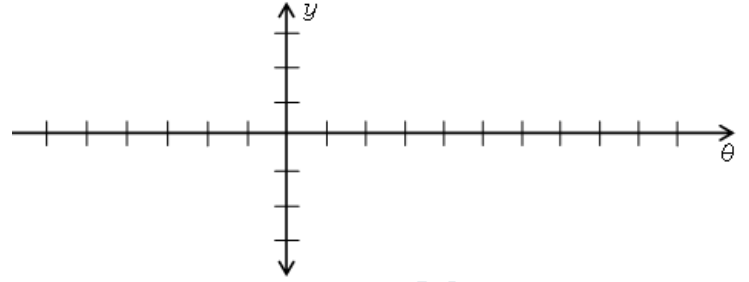
طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \tan b\theta$ يساوي $\frac{180^\circ}{|b|}$ ، ولا يوجد سعة لهذه الدالة. وخطوط التقارب الرأسية لها تكون عند المضاعفات الفردية للعدد $\left(\frac{180^\circ}{|b|} \cdot \frac{1}{2}\right)$

مفهوم أساسي		دوال قاطع التمام والقاطع وظل التمام			
اضف إلى مطوبتك	التمثيل البياني	$y = \cot \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \csc \theta$	الدالة المولدة (الأم)
		$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	المجال
		مجموعة الأعداد الحقيقية	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	المدى
		غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة	السعة
		180°	360°	360°	طول الدورة

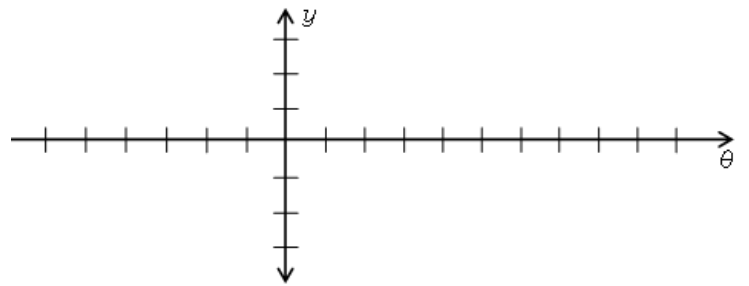


أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانياً:

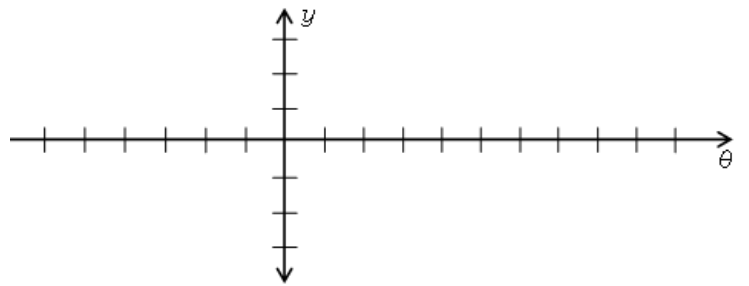
$$y = 4 \sin \theta$$



$$y = \sin 3\theta$$

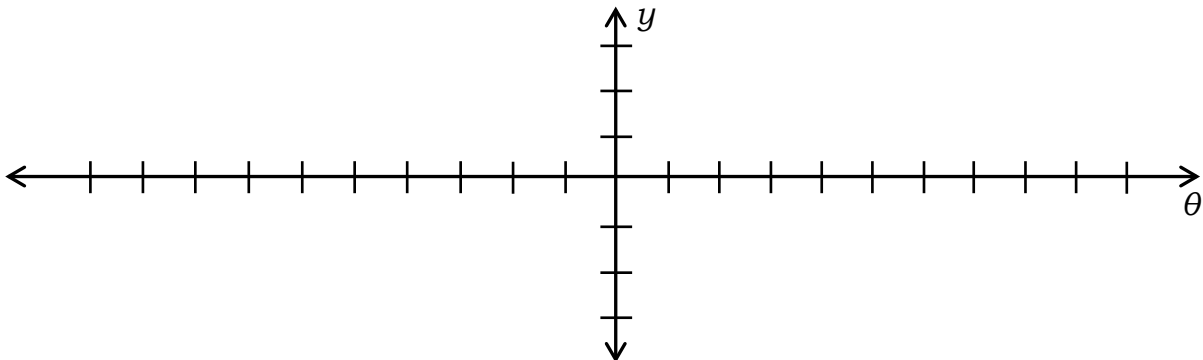


$$y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$$



عناكب: عندما تسقط حشرة ما في شبكة العنكبوت، فإن الشبكة تهتز بتردد يبلغ 14 هيرتز.

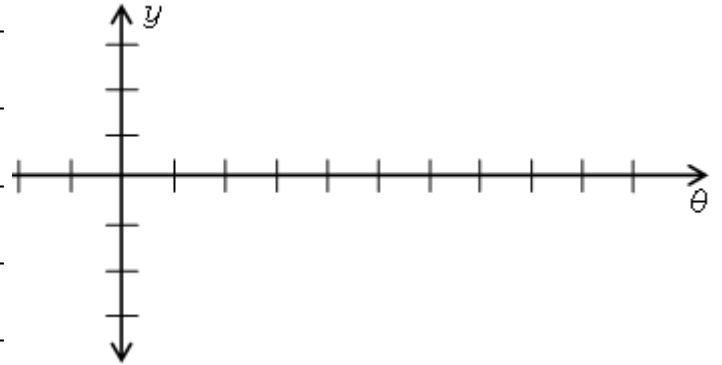
- (a) أوجد طول دورة الدالة.
- (b) افرض أن سعة الدالة وحدة واحدة. واكتب دالة جيب تمثل اهتزازات الشبكة y كدالة في الزمن t ، ومثلها بيانياً.



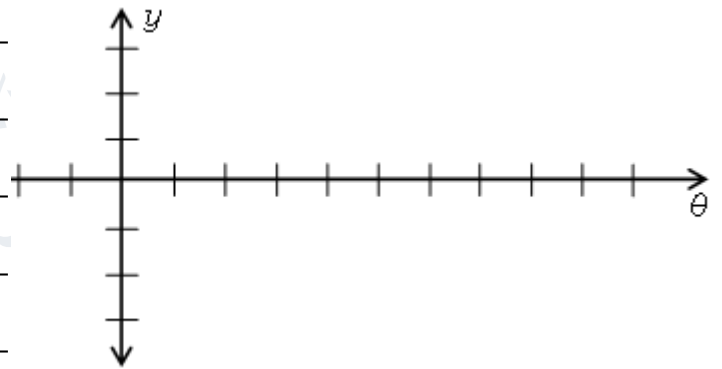


أوجد طول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانياً:

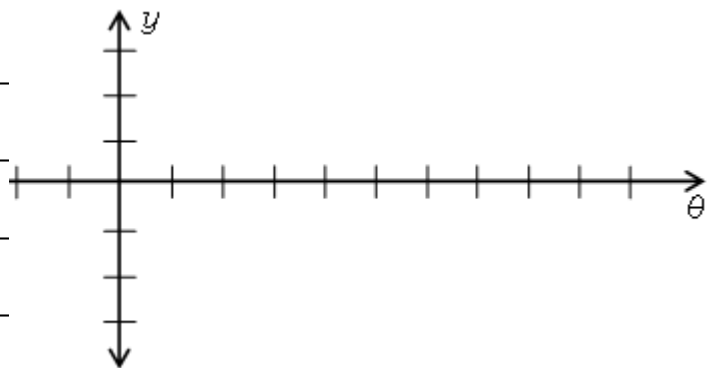
$$y = 3 \tan \theta$$



$$y = 2 \csc \theta$$



$$y = \cot 2\theta$$



ورقة عمل الحادي عشر العام 11-8 إزاحة التمثيلات البيانية للنسب المثلثية YouTube AE

1- تمثيل الإزاحة الأفقية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية وإيجاد إزاحات الطور.

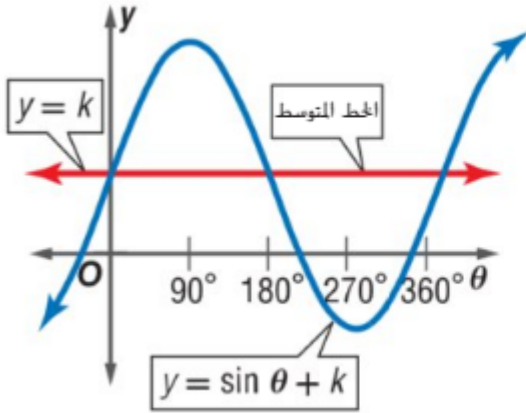
2- تمثيل الإزاحة الرأسية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

نواتج التعلم

تُسمى الإزاحة الأفقية للدالة الدورية باسم **إزاحة الطور**.

إزاحة الطور للدوال $y = a \sin b(\theta - h)$ و $y = a \cos b(\theta - h)$ و $y = a \tan b(\theta - h)$ هي h . حيث $b > 0$.
 إذا كان $h > 0$ فإن الإزاحة تكون h وحدات إلى اليمين.
 إذا كان $h < 0$ فإن الإزاحة تكون $|h|$ وحدات إلى اليسار.

الإزاحة الرأسية الإزاحة الرأسية للدوال $y = a \sin b\theta + k$ و $y = a \cos b\theta + k$ و $y = a \tan b\theta + k$ هي k .
 إذا كانت $k > 0$ فإن الإزاحة تكون عدد k من الوحدات لأعلى.
 إذا كانت $k < 0$ فإن الإزاحة تكون عدد $|k|$ من الوحدات لأسفل.



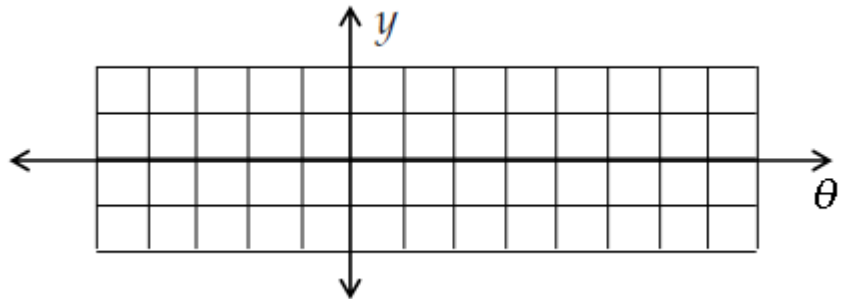
عند إزاحة دالة مثلثية رأسياً عدد k من الوحدات، يكون المستقيم $y = k$ المحور الأفقي الجديد الذي يتحرك التمثيل البياني حوله. ويسمى هذا المستقيم **الخط المتوسط**.

$$y = a \sin b(\theta - h) + k$$

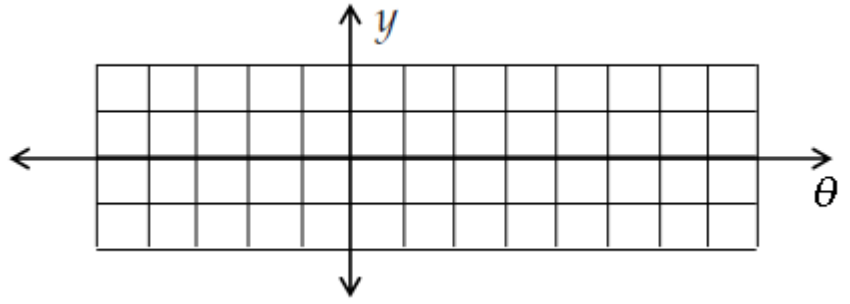
السعة a ↓ الفترة b ↓
 ↑ ↑
 الإزاحة الرأسية إزاحة الطور

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مَثِّلِ الدالة بيانياً.

$$y = \sin(\theta - 180^\circ)$$

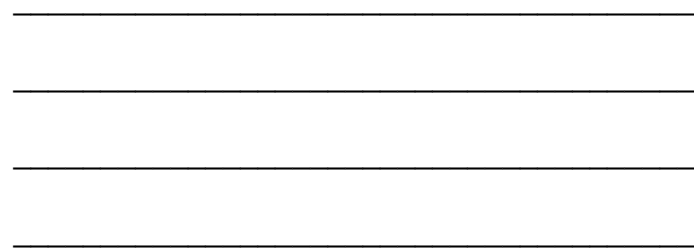


$$y = \frac{1}{2} \cos (\theta + 90^\circ)$$

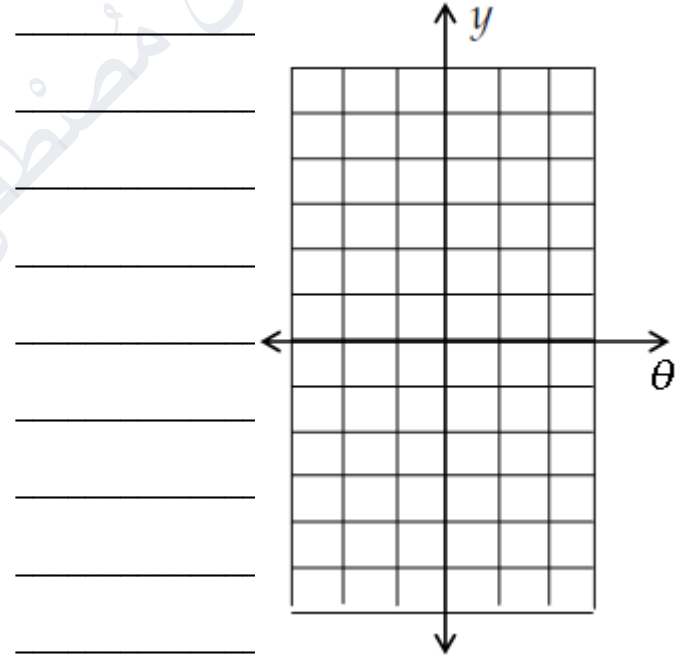


اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط لكل دالة. ثم مثل الدالة بيانياً.

$$y = \sin \theta - 2$$

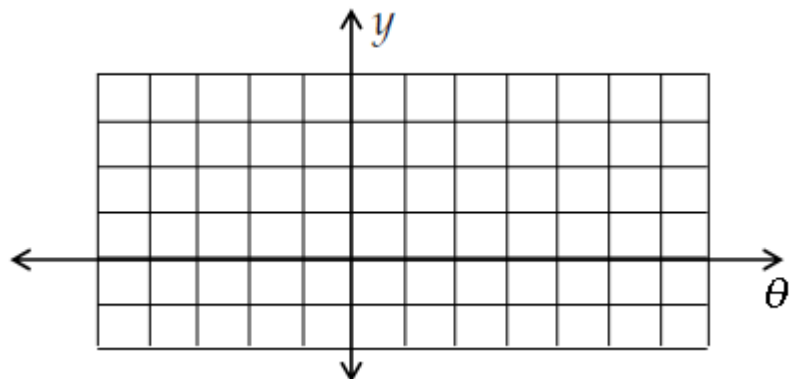


$$y = \frac{1}{2} \tan \theta + 1$$

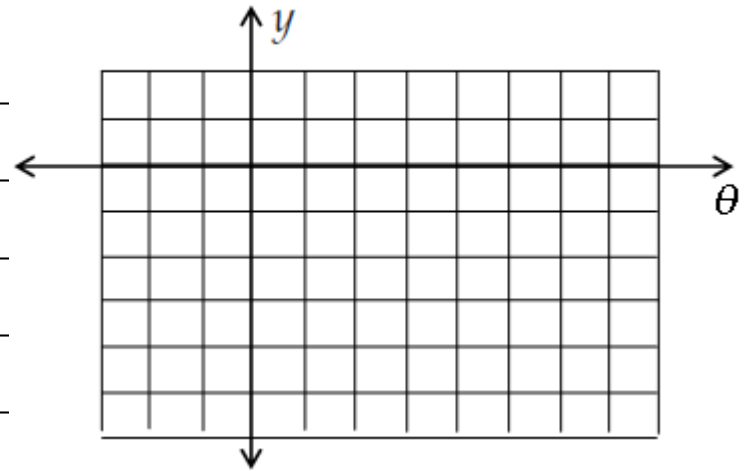


الانتظام اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثل الدالة بيانياً.

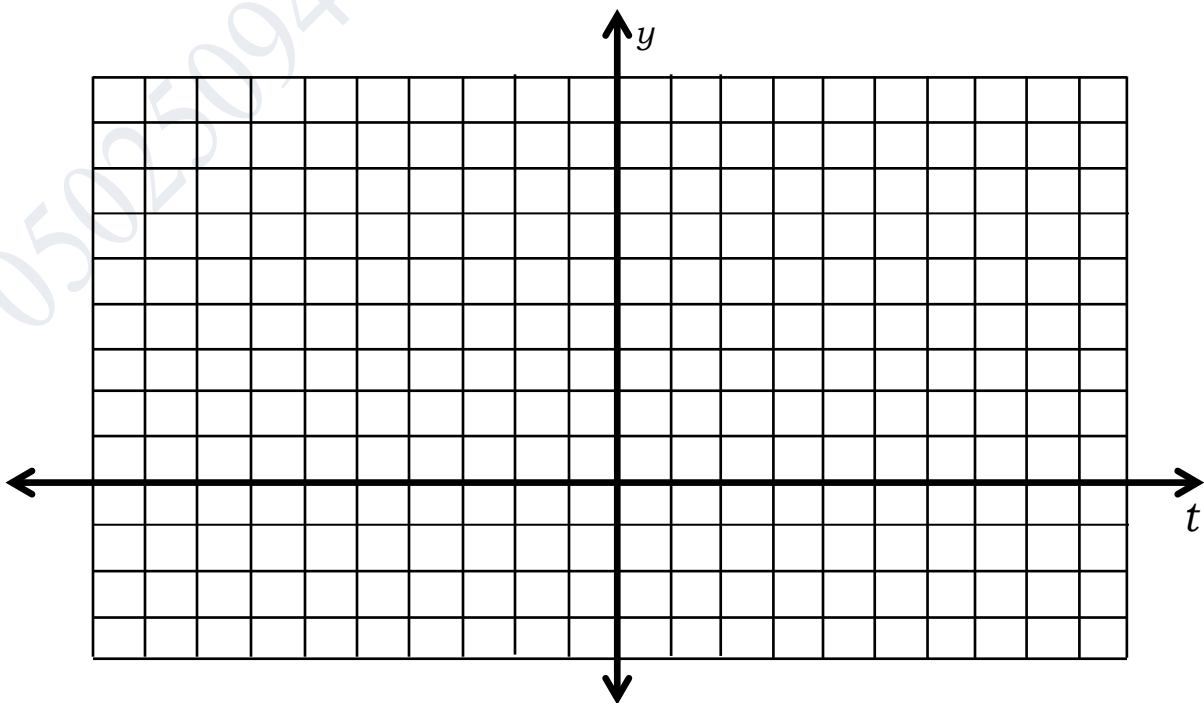
$$y = 2 \sin (\theta + 45^\circ) + 1$$



$$y = \cos 3(\theta - \pi) - 4$$



تدريب عند ممارسة نشاط جسدي متوسط، يتراوح ضغط الدم عند الإنسان ما بين قيمة عظمى قدرها 130 وقيمة صغرى قدرها 90. ومعدل ضربات قلب الإنسان يساوي 90 ضربة في الدقيقة. اكتب معادلة sine التي تمثل ضغط دم الإنسان P في زمن t ثانية. ثم مثل الدالة بيانيًا.



2- حل معادلات باستخدام الدوال المثلثية العكسية.

1- إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية.

نواتج التعلّم

أضف إلى مطوبتك	الدوال المثلثية العكسية			مفهوم أساسي
نموذج	المدى	المجال	الرموز	الدالة العكسية
	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \leq y \leq 90^\circ$	$-1 \leq x \leq 1$	$y = \text{Sin}^{-1} x$	دالة الجيب العكسية $y = \text{Arcsin } x$
	$0 \leq y \leq \pi$ $0^\circ \leq y \leq 180^\circ$	$-1 \leq x \leq 1$	$y = \text{Cos}^{-1} x$	دالة جيب التمام العكسية $y = \text{Arccos } x$
	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ < y < 90^\circ$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$y = \text{Tan}^{-1} x$	دالة الظل العكسية $y = \text{Arctan } x$

إرشادات للدراسة تذكر أنه عند حسابك قيمة معكوس الدالة المثلثية، فإن الناتج هو قياس زاوية.

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$$\text{Sin}^{-1} \frac{1}{2}$$

$$\text{Tan}^{-1} (-\sqrt{3})$$

$$\text{Cos}^{-1} (-1)$$

أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

$$\cos \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right)$$

$$\tan (\cos^{-1} 1)$$

$$\sin \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

اختيار من متعدد: إذا كان $\sin \theta = 0.422$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريباً يساوي:

65° D

48° C

42° B

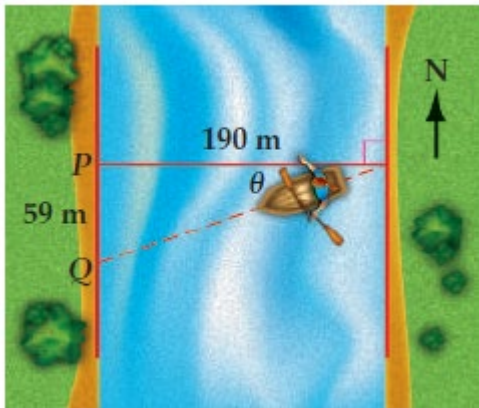
25° A

حلّ كلًا من المعادلات الآتية مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

$$\cos \theta = 0.9$$

$$\sin \theta = -0.46$$

$$\tan \theta = 2.1$$



قوارب: يسير قارب في اتجاه الغرب؛ ليقطع نهرًا عرضه 190 m، فيصل إلى النقطة Q التي تبعد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P؛ بسبب التيار. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي أزاح التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي، ثم أوجد قياس هذه الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة.



الوحدة 12

المتطابقات والمعادلات المثلثية



1- استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.

نواتج التعلم

2- استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المتطابقات المثلثية الأساسية

مفهوم أساسي

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

المتطابقات النسبية:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

متطابقات الزاويتين

المتتامتين:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

متطابقات فيثاغورس:

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

متطابقات الدوال الزوجية

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

والدوال الفردية:

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

(متطابقات الزوايا السالبة)

Find the exact value of each expression

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

$$0^\circ < \theta < 90^\circ, \cot \theta = 2, \text{ إذا كان } \tan \theta$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ, \sin \theta = \frac{4}{5}, \text{ إذا كان } \cos \theta$$

$270^\circ < \theta < 360^\circ$ ، $\cos \theta = \frac{5}{13}$ إذا كان $\sin \theta$

$180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\cot \theta = \frac{1}{4}$ إذا كان $\csc \theta$

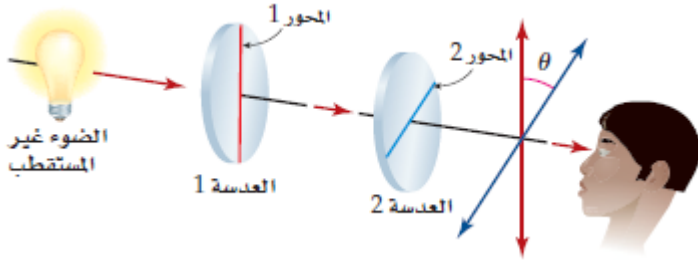
Simplify each expression.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\tan \theta \cos^2 \theta$$

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$$

$$\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$$



بصريّات: عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء

المرار بهذه العدسة سيقبل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث

يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن

شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة

$$I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$$

حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى

المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين.

(a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos \theta$

(b) استعمال الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المرار بالعدسة

الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة

الثانية يصنع زاوية قياسها 30° مع محور العدسة الأولى.



- 1- إثبات صحة المتطابقات المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
2- إثبات صحة المتطابقات المثلثية بتحويل كلاً من طرفيها إلى العبارة نفسها.

نواتج التعلم

الدقة: أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:

$$\cot \theta + \tan \theta = \frac{\sec^2 \theta}{\tan \theta}$$

$$\cos^2 \theta = (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$$

$$\sin \theta = \frac{\sec \theta}{\tan \theta + \cot \theta}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\tan^2 \theta = (\sec \theta + 1)(\sec \theta - 1)$$

$$\tan^2 \theta \csc^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

الاختيار من متعدد: ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتشكيل متطابقة فيها $\frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta}$ ؟

A) $\sin^2 \theta$

B) $\cos^2 \theta$

C) $\tan^2 \theta$

D) $\csc^2 \theta$



- 1- إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق.
2- إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق.

نواتج التعلم

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي:

$\cos 105^\circ$

$\cos 165^\circ$

$\tan 195^\circ$

$\sin(-30^\circ)$

$\sin 135^\circ$

$\csc \frac{5\pi}{12}$

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمتير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2 \sin(120^\circ t)$
(a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

(b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين من الزوايا الخاصة؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.



أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$$

$$\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$$



1- إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات ضعف الزاوية.

نواتج التعلّم

2- إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات نصف الزاوية.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin 2\theta, \cos 2\theta$.

$$\sin \theta = \frac{1}{4}; 0^\circ < \theta < 90^\circ$$



$$\cos \theta = \frac{3}{5}; 270^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$\tan \theta = -\frac{8}{15}; 90^\circ < \theta < 180^\circ$$



أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير:

$$\sin \frac{\pi}{8}$$

$$\cos 15^\circ$$

كرة قدم : ركل لاعب كرة قدم الكرة بزاوية قياسها 37° مع سطح الأرض ، وبسرعة ابتدائية متجهة 52 ft/s . إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 32 ft/s^2 ، و v تمثل السرعة الابتدائية المتجهة.



(a) بسط الصيغة مستخدماً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

(b) ما المسافة d التي تقطعها الكرة باستخدام الصيغة المبسطة ؟

أثبت صحة كلاً من المتطابقات التالية:

$$\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$



-2 تمييز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

-1 حل المعادلات المثلثية.

نواتج التعلم

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

$$\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 = 0 \quad ; \quad 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

$$\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad ; \quad 0^\circ \leq \theta \leq 240^\circ$$

$$2 \cos^2 \theta = 1$$

حل كل معادلة مما يلي ، لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان:

$$\tan^2 \theta + 2 \tan \theta + 1 = 0$$



$$\cos 2\theta - \sin^2 \theta + 2 = 0$$

حل كل معادلة مما يلي لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات:

$$\cos \theta - 2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$$

حل كلا من المعادلات التالية:

$$\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$$