# Mathmatics U7

## 7.1: مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

## 7.1: Review of Formulas & Techiques.

"صيغ التكامل الأساسية"

| | |
|---|---|
| $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ ; $r \neq -1$ | $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$ ; for $x \neq 0$ |
| $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ | $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ |
| $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ | $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$ |
| $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$ | $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc + C$ |
| $\int e^x dx = e^x + C$ | $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$ |
| $\int \tan x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$ |
| $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$ | $\int \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C$ |

حل مثال 1.1 ص 486

$$\int \sin(ax)\, dx$$

ثابت خارج التكامل

$$\Rightarrow \int \frac{\sin(u)\, du}{a}$$

$u = ax$

$du = a\, dx$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{a}$

$$= \frac{1}{a} \int \sin(u)\, du$$

$$= \frac{1}{a} - \cos u + C$$

$$= -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

2

ملاحظة :- يمكن حفظ أن تكامل أي دالة مثلثية بشرط أن الزاوية تكون دالة خطية هو تكامل الدالة المثلثية في معامل المتغير $x$.

دالة خطية

$$* \int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$$

مثال :-

$$\int \cos(2x+1)\,dx = \frac{\sin(2x+1)}{2} + C$$

---

حل مثال 1.2 ص 487

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}\,dx \Rightarrow \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$

نخرجها كـ

نفرض $u$

$$u = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{a}\,dx$$

$$dx = a\,du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+u^2}\,a\,du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\cdot \tan^{-1} u + C$$

$$* \quad \text{الجواب} \Rightarrow \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{a} + C$$

3

ملاحظة :-

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$$

حيث أن $ax+b$ معادلة خطية ذات الدرجة الأولى حيث $a$ هو معامل $x$

مثال :-

$$\int (2x+1)^3 \, dx$$

$$= \frac{(2x+1)^4}{2 \cdot 4} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$$

---

حل مثال 1.3 ص 487

$$\int (x^2-5)^2 \, dx$$

نلاحظ أن الدالة داخل القوس من الدرجة الثانية فيجب فك القوس ثم تكاملها.

$$\Rightarrow \int (x^2-5)(x^2-5) \, dx$$

$$\Rightarrow \int (x^4 - 10x^2 + 25) \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 25x + C$$

الجواب

$$\int (x^2-5)^2 dx = \frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 25x + C$$

4

سؤال مهم "إكمال مربع".

حل مثال 1.4 ص 487

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx$$

ملاحظة:-
إكمال مربع = $(\frac{\text{معامل } x}{2})^2$
* شرط إكمال مربع أن يكون معامل $x^2$ موجب
$ax^2$ حيث $a>0$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5-(x^2-6x+9)--9}}\,dx$$

نأخذ سالب عامل مشترك.

$(\frac{-6}{2})^2=$

سالب من القانون وسالب خارج القوس

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{-5*-(x^2-6x+9)+9}}\,dx$$

MODE 5,3

$x=3$ $x=3$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{4(1-\frac{(x-3)^2}{4})}}\,dx$$

نأخذ 4 عامل مشترك.

نجذرها ونخرجها خارج التكامل.

ندخلها مع القوس الذي في الأعلى.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-3}{2})^2}}\,dx$$

$u=\frac{x-3}{2}$

$du=\frac{1}{2}dx$

$dx=2du$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,2\,du$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \Rightarrow = \sin^{-1}(u)+C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$$

5

## حل سؤال 1 ص 489

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

ax: حيث أن دالة خطية

---

## حل سؤال 2 ص 489

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$$

---

## حل سؤال 3 ص 489

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 \mp x^2}}\,dx \;,\; a>0$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{a\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx$$

$u = \frac{x}{a} \Rightarrow du = \frac{1}{a}dx \Rightarrow dx = a\,du$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{a\sqrt{1-u^2}}\,a\,du$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \sin^{-1}(u) + C$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

6 حل سؤال 6 ص 489

$$\int \sec 2t \cdot \tan 2t \, dt$$

$u = 2t$

$du = 2dt$

$dt = \frac{du}{2}$

$$\int \sec(u) \cdot \tan(u) \frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int \sec(u) \cdot \tan(u) \, du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sec(u) + C =$$

$$\frac{\sec(2t) + C}{2}$$

---

حل سؤال 7 ص 489

$$\int (x^2+4)^2 \, dx$$

$$= \int (x^4 + 8x^2 + 16) \, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{8}{3}x^3 + 16x + C$$

---

حل سؤال 9 ص 489

$$\int \frac{3}{16+x^2} dx = \int \frac{3}{16\left(1+\frac{x^2}{16}\right)} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{3}{16\left(1+\left(\frac{x}{4}\right)^2\right)} dx \Rightarrow \frac{3}{16} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2} dx$$

$u = \frac{x}{4}$

$du = \frac{1}{4} dx$

$dx = 4du$

$$\Rightarrow \frac{3}{16} \int \frac{1}{1+(u)^2} \cdot 4 \, du$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{3\tan^{-1}(u)}{4} + C$$

Substitute

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

7

حل سؤال 11 ص 489

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{3-(2x+x^2+1)+1}}\,dx$$

$2 \to \left(\frac{2}{2}\right)^2 =$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{(x+1)^2}{4}\right)}}\,dx$$

نأخذ 4 كعامل مشترك

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}\,dx$$

ندخل الأرجحة إلى القوس الذي بالأعلى.

$$u = \frac{x+1}{2}$$

$$du = \frac{1}{2}dx$$

$$dx = 2du$$

Substitute

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,2du$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(u) + C$$

#

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

8

حل سؤال 14 ص 489

$$\int \frac{4x+4}{5+2x+x^2}\,dx$$

البسط مشتقة للمقام ⇐ الجواب ln|المقام|

$$\int \frac{2(2x+4)}{5+2x+x^2}\,dx \Rightarrow 2\ln|5+2x+x^2|+C$$

---

حل سؤال 15 ص 489

$$\int \frac{4t}{5+2t+t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{4t+4-4}{5+2t+t^2}\,dt \Rightarrow \int \frac{4t+4}{5+2t+t^2}\,dt - \int \frac{4}{5+2t+t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{2(2t+2)}{5+2t+t^2}\,dt - \int \frac{4}{(t^2+2t+1)+4}\,dt$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{2t+2}{5+2t+t^2}\,dt - \int \frac{1}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}\,dt \qquad u=\frac{t+1}{2}$$

* الجواب $\Rightarrow 2\ln|5+2t+t^2| - 2\tan^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)+C$

---

حل سؤال 21 ص 489

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad u=\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow du=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx=2\sqrt{x}\,du$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin u}{\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}\,du \Rightarrow \int 2\sin u\,du$$

$$\Rightarrow -2\cos u+C \Rightarrow -2\cos\sqrt{x}+C$$

9

$$\int \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2}\cdot dx$$

حل سؤال 22 ص 489

$$u=\frac{1}{x} \Rightarrow du=-\frac{1}{x^2}$$

$$dx=-x^2\,du$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos(u)}{x^2}\cdot -x^2\cdot du$$

$$\Rightarrow -\int \cos(u)\,du \Rightarrow -\sin(u)+C$$

$$\Rightarrow -\sin(\frac{1}{x})+C$$

---

حل سؤال 23 ص 489

$$\int_0^{\pi} \cos x\cdot e^{\sin x}\cdot dx$$

$$\Rightarrow e^{\sin x}\Big]_0^{\pi} = e^{\sin\pi}-e^{\sin(0)} = 0$$

---

حل سؤال 27 ص 489

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx \Rightarrow \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,dx$$

$$u=x^3 \Rightarrow dx=\frac{du}{3x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{1+u^2}\cdot\frac{du}{3x^2} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\tan^{-1}(u)+C \Rightarrow \frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+C$$

---

حل سؤال 28 ص 489

$$\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$$

نضرب بـ 6 ونقسم عليها ليكون البسط مشتقة للمقام.

$$\int \frac{6x^5}{6(1+x^6)}\,dx \Rightarrow \frac{1}{6}\int \frac{6x^5}{(1+x^6)}\,dx$$

البسط مشتقة للمقام.

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\ln|1+x^6|+C$$

ln| المقام |+C

10

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$$

حل سؤال 30 ص 489

$e^{2x} = (e^x)^2$ ملاحظة

$$\Rightarrow \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\,dx$$

$u = e^x$

$du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

$$\Rightarrow \int \frac{1\,e^x}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{e^x} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

Substitute

$$\Rightarrow \sin^{-1}(u) + C \Rightarrow \sin^{-1}(e^x) + C$$

---

حل سؤال 33 ص 489

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

---

حل سؤال 34 ص 489

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\cdot dx$$

$$\Rightarrow \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{x})}\cdot dx$$

$u = 1+\sqrt{x}$

$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2x^{\frac{1}{2}}\,du$

$$\Rightarrow \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{u} \cdot 2x^{\frac{1}{2}}\,du \Rightarrow 2\int \frac{1}{u}\,du$$

$$\Rightarrow 2\ln|u| + C \Rightarrow 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

11

حل سؤال 35 ص 489

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\ln x^2}{x}\,dx$$

من خواص ln

$$\Rightarrow 2\int_{-2}^{-1} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$u = \ln x$

$dx = x\,du$

نعوض حدود التكامل في فرض u

$$\Rightarrow 2\int_{\ln|2|}^{0} \frac{u}{x}\cdot x\cdot du$$

$$\Rightarrow 2\int_{\ln(2)}^{0} u\cdot du$$

نعكس حدود التكامل

$$\Rightarrow -2\left[\frac{u^2}{2}\right]_{0}^{\ln 2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow (\ln(2))^2 = 0.48$$

مهم جداً جداً

* ملاحظة عند إجراء التكامل بالتعويض لتكامل محدود يجب تغيير حدود التكامل

---

حل سؤال 36 ص 489

$$\int_1^3 e^{2\ln x}\,dx$$

من خواص ln

$$\Rightarrow \int_1^3 e^{\ln x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 = \frac{26}{3}$$

---

حل سؤال 37 ص 489

$$\int_3^4 x\cdot\sqrt{x-3}\,dx$$

$u = x-3 \Rightarrow du = dx \quad x = u+3$

$u^* = x-3 = 4-3$

$u = 3-3 = 0$

$$x\cdot\sqrt{u}\cdot du \Rightarrow \int_0^1 (u+3)\sqrt{u}\,du$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{1}{2}}\,du = 2.4$$

12

حل سؤال 39 ص 489

$$\int_1^4 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \Rightarrow \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^4 = \boxed{\frac{72}{5}}$$

---

حل سؤال خارجي 1

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \boxed{\sec^{-1}x + C}$$

---

حل سؤال خارجي 2

$$\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{x^2+1}\,dx \qquad u = \tan^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow dx = (1+x^2)\,du$$

$$\Rightarrow \int \frac{u^2}{x^2+1}(1+x^2)\,du \Rightarrow \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3 + C$$

---

حل سؤال خارجي 3

$$\int 15x^2(x^3+1)^4\,dx \qquad \boxed{u = x^3+1} \Rightarrow du = 3x^2\,dx$$

$$\boxed{dx = \frac{du}{3x^2}}$$

$$\int 15x^2(u)^4\,\frac{du}{3x^2} \Rightarrow \int 5u^4\,du$$

$$\Rightarrow u^5 + C \Rightarrow \boxed{(x^3+1)^5 + C}$$

13

حل سؤال خارجي 4

$$\int \cos^6 x \sin x \, dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$\Rightarrow \int \sin x \cdot u^6 \cdot \frac{du}{-\sin x} \Rightarrow -\int u^6 \, du$$

$$-\frac{1}{7} u^7 + C \Rightarrow -\frac{1}{7} (\cos x)^7 + C$$

---

حل سؤال خارجي 5

$$\int 4e^{x^2 + \ln x} \, dx$$

$$\Rightarrow \int 4 e^{x^2} \cdot e^{\ln x} \, dx \Rightarrow \int 4x \cdot e^{x^2} \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int 2x e^{x^2} \, dx \Rightarrow 2e^{x^2} + C$$

---

حل سؤال خارجي 6

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$$

متطابقة فيثاغورس

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \cdot (\cos^2 x \cdot \cos x) \, dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2((1 - \sin^2 x) \cdot \cos x) \, dx$$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int u^2 ((1 - u^2) \cdot \cos x) \cdot \frac{du}{\cos x} \Rightarrow \int u^2 (1 - u^2) \, du$$

$$\Rightarrow \int u^2 - u^4 \, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$