طول القوس

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق ،ومشتقتها متصلة على الفترة $[a,b]$ فان طول منحنى الدالة يعطى بالتكامل

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد طول منحنى الدالة $f(x)=\sqrt{3}\ x+1$ على الفترة $[0,5]$

$f(x)=\sqrt{3}\ x+1$

$f'(x)=\sqrt{3}$

$[f'(x)]^2=3$

$S=\int_0^5 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$

$=\int_0^5 \sqrt{1+3}\ dx$

$=\int_0^5 \sqrt{4}\ dx$

$=\int_0^5 2\ dx$

$=2x\Big]_0^5$

$=2(5)-2(0)$

$=10$ وحدات طول

(2) اوجد طول منحنى الدالة $f(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ على الفترة $[1,3]$

$f(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$

$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x-1)^{1/2}\ (1)$

$=\sqrt{x-1}$

$[f'(x)]^2=x-1$

$S=\int_1^3 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$

$=\int_1^3 \sqrt{\cancel{1}+x-\cancel{1}}\ dx$

$=\int_1^3 \sqrt{x}\ dx$

$=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_1^3$

$=\frac{2}{3}\left[(3)^{3/2}-(1)^{3/2}\right]$

$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3^3}-1\right)$

$=2.79$

$\simeq 2.8$

[illegible]

(1) اوجد طول منحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$ على الفترة $[0,1]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2x} - 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right]$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx$$

$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$ و بعدها طلعناها برا ثابت

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}\, dx$$

مربع كامل

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{(e^{x} + e^{-x})^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (e^{x} + e^{-x})\, dx = \frac{1}{2}\left[e^{x} - e^{-x}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[(e^{1} - e^{-1}) - (e^{0} - e^{0})\right]$$

$$\approx 1.175$$

(2) اوجد طول منحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ على الفترة $[1,3]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + f'(x)}\, dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}\right)}\, dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{\frac{4 + x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}}{4}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{4 + x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 x^2 + \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^3}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1}{1}\right)\right]$$

$$= \frac{14}{3}$$

* طريقة ثانية لحل سؤال (1) صفحة 57

$$\int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2 x}\ dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 x}\ dx$$

$$= \int_0^1 \cosh x\ dx$$

$$= \sinh x \Big]_0^1$$

$$= 1.175$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \cosh x$$

$$\hookrightarrow f'(x) = \sinh x$$

(1) اوجد طول منحنى الدالة $y = \ln \cos x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x}$$
$$= -\tan x$$
$$(y')^2 = \tan^2 x$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 x}\, dx$$

* لما نشيل الاس 2 مع الجذر لازم نحط المطلق

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sec x|\, dx$$

* تخلصنا من المطلق لان الفترة بالربع الاول بالتالي اكيد موجب

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\, dx$$

$$= \ln\left|\sec x + \tan x\right|\Big]_0^{\pi/4} = \ln\left|\left[\sec\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\sec(0) + \tan(0)\right]\right|$$
$$= 0.88$$

(2) اوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ ، حيث $f'(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ على الفترة $\left[\overset{2}{\cancel{0}}, 3\right]$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$$
$$[f'(x)]^2 = x^2 - 2x$$

$$S = \int_2^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$
$$= \int_2^3 \sqrt{1 + x^2 - 2x}\, dx$$
$$= \int_2^3 \sqrt{(x-1)^2}\, dx$$
$$= \int_2^3 |x - 1|\, dx$$

$-(x-1) \qquad 1 \qquad x-1$

$$= \int_2^3 x - 1\, dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_2^3$$
$$= \left[\frac{(3)^2}{2} - 3\right] - \left[\frac{(2)^2}{2} - 2\right]$$
$$= \frac{3}{2}$$

(1) اوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ ، حيث $f(x)=\int_3^x \sqrt{4t^2-1}\,dt$ على الفترة $[3,5]$

$f'(x)=\sqrt{4x^2-1}$

$[f'(x)]^2=4x^2-1$

$s=\int_3^5 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$=\int_3^5 \sqrt{1+4x^2\cancel{-1}}\,dx$

$=\int_3^5 \sqrt{4x^2}\,dx$

$=\int_3^5 2|x|\,dx$ مشان المطلق

$-x$ x

0

$=\int_3^5 2x\,dx$ الفترة موجبة بالتالي

$\left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^5 = x^2\Big|_3^5$

$=5^2-3^2$

$=16$

الفترة هون

(2) اوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(1,3)$ ، وطول منحناها يعطي بالتكامل $s=\int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$

بالمقارنة مع قانون طول المنحنى

$s=\int\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$[f'(x)]^2=\frac{1}{4x}$

$f'(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{4x}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)=\int \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$=\pm\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$=\pm\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2}+c\right]$

$f(x)=\pm\sqrt{x}+c$

الشرط

$f(1)=3$

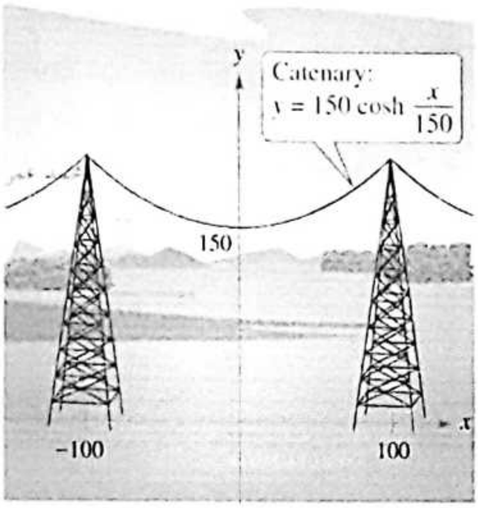
$\sqrt{1}+c=3$ $-\sqrt{1}+c=3$

$c=2$ $c=4$

$f(x)=\sqrt{x}+2$ $f(x)=-\sqrt{x}+4$

يمثل الشكل المجاور كابل كهربائي يمتد بين عموديين للكهرباء والمسافة بينهم $200\ m$

حيث تمثل المعادلة



$$y = 75(e^{x/150} + e^{-x/150}) = 150\cosh(\frac{x}{150})$$

مو مطالبين بها بـ السؤال ؟

ارتفاع الكابل عند اي مسافة x

اوجد طول الكابل الكهربائي بين العمودين

$$y = 150\cosh(\frac{x}{150})$$

$$y' = 150\sinh(\frac{x}{150})\cdot\frac{1}{150}$$

$$= \sinh(\frac{x}{150})$$

$$(y')^2 = \sinh^2(\frac{x}{150})$$

$$S = \int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

من التماثل ؟

$$S = 2\int_0^{100} \sqrt{1 + \sinh^2(\frac{x}{150})}\ dx$$

متطابقة

$$= 2\int_0^{100} \sqrt{\cosh^2(\frac{x}{150})}\ dx$$

$$= 2\int_0^{100} \cosh(\frac{x}{150})\ dx$$

$$= 2\left[\frac{\sinh(\frac{x}{150})}{\frac{1}{150}}\right]_0^{100}$$

$$= 300\left[\sinh(\frac{x}{150})\right]_0^{100}$$

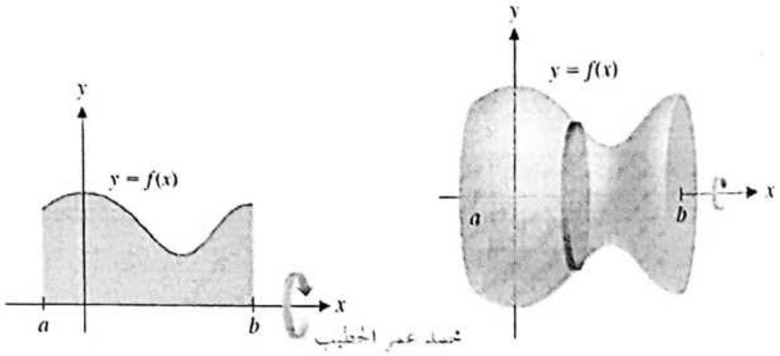
$$= 300\left[\sinh(\frac{100}{150}) - \sinh(\frac{0}{150})\right]$$

$$= 215.147$$

$$\simeq 215.15\ m$$

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق ،ومشتقتها متصلة على الفترة $[a,b]$ فان مساحة سطح المجسم الناتج عن دوران الدالة حول محور السينات يعطى بالتكامل

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\ dx$$



اوجد مساحة سطح الجسم المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ حول محور السينات على الفترة $[0,4]$

من الفصل الثاني ؟

عددياً باستخدام قاعدة سمبسون ($n=4$) محذوف (مو مطلوب منا) ؟

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$

$f'(x)=x$

$[f'(x)]^2=x^2$

* قاعدة لسمبسون :

$S_n=\frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$

$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$

∴ التجزئة

$\{0,1,2,3,4\}$

$$S=2\pi\int f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$$

$$=2\pi\int_0^4 \frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^2}\ dx$$

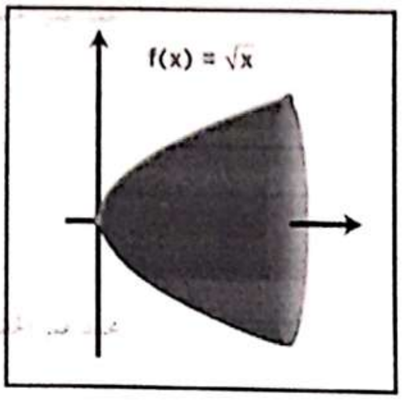
$$=\pi\int_0^4 x^2\sqrt{1+x^2}\ dx$$

$$=\pi\cdot\frac{4-0}{3(4)}\left[f(0)+4f(1)+2f(2)+4f(3)+f(4)\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[(0^2\cdot\sqrt{1+0^2})+4(1^2\cdot\sqrt{1+1^2})+2(2^2\cdot\sqrt{1+2^2})+4(3^2\cdot\sqrt{1+3^2})+(4^2\cdot\sqrt{1+4^2})\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[0+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+36\sqrt{10}+16\sqrt{17}\right]$$

$$=212.955$$



(1) اوجد مساحة سطح الجسم المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\sqrt{x}$

حول محور السينات على الفترة $[0,4]$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$[f'(x)]^2=\frac{1}{4x}$

$S=2\pi\int_0^4 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$=2\pi\int_0^4\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$

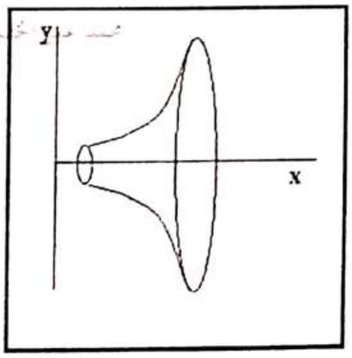
$=2\pi\int_0^4\sqrt{x\left(1+\frac{1}{4x}\right)}\,dx$

$=2\pi\int_0^4\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx$

$=2\pi\cdot\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\Big]_0^4$

$=\frac{4\pi}{3}\left[\left(4+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\left(0+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]$

$=36.17$



(2) اوجد مساحة سطح الجسم المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\frac{1}{9}x^3$

حول محور السينات على الفترة $[0,2]$

$S=2\pi\int_0^2 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$=2\pi\int_0^2\frac{1}{9}x^3\sqrt{1+\frac{1}{9}x^4}\,dx$

$=\frac{2\pi}{9}\int_1^{\frac{25}{9}}x^3\sqrt{u}\cdot\frac{9\,du}{4x^3}$

$=\frac{2\pi(9)}{9(4)}\int_1^{\frac{25}{9}}u^{\frac{1}{2}}\,du$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^{\frac{25}{9}}$

$=\frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{25}{9}\right)^{3/2}-(1)^{3/2}\right]$

$=3.8$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2$

$[f'(x)]^2=\frac{1}{9}x^4$

$u=1+\frac{1}{9}x^4$

$\frac{du}{dx}=\frac{4}{9}x^3$

$dx=\frac{9}{4x^3}\,du$

$x=0\rightarrow u=1$

$x=2\rightarrow u=\frac{25}{9}$

اكتب التكامل الذي يمثل مساحة سطح الجسم المتولد عن دوران الدالة f حول محور السينات على الفترة المعطى

(1) $y = \sin x \quad , [0, \pi]$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$[f'(x)]^2 = \cos^2 x$

$$S = 2\pi \int_0^\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

(2) $y = \ln x \quad , [1, 2]$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$[f'(x)]^2 = \frac{1}{x^2}$

$$S = 2\pi \int_1^2 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \ln x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

(3) $y = x^3 - 4x \quad , [-2, 0]$

$f(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$[f'(x)]^2 = (3x^2-4)^2$

$$S = 2\pi \int_{-2}^0 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^0 (x^3-4x)\sqrt{1+(3x^2-4)^2}\,dx$$

(4) $y = e^x \quad , [0, 1]$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$[f'(x)]^2 = e^{2x}$

$$S = 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$