7.2 :- Integration by parts.   7.2 :- التكامل بالأجزاء.

قانون التكامل بالأجزاء. $\boxed{1}$

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

خطوات التكامل بالأجزاء :-

فرض u ← الباقي يكون dv ← إشتقاق u ← تكامل dv

← نطبق قانون التكامل بالأجزاء.

* ملاحظة: يمكن أن يتطلب منا السؤال إلى إجراء تكامل بالأجزاء أكثر من مرة "مرتين أو ثلاث أو أكثر".

حل مثال 2.1 من 492

$$\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} \Rightarrow \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \quad \text{اشتقاق} \qquad \text{تكامل} \quad \begin{array}{l} dv = \sin x\, dx \\ v = -\cos x \end{array}$$

نطبق بالقانون

$$\int u \cdot dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x \cdot \sin x\, dx = x \cdot -\cos x - \int -\cos x\, dx$$

$$\Rightarrow -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

2

حل سؤال خارجي 1 .

$$\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x\, dx}_{dv}$$

$u = x$ اشتقاق $du = dx$

$dv = e^x dx$ تكامل $v = e^x$

القانون $\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$

نطبق على القانون للتكامل بالأجزاء

$$\Rightarrow \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx$$

$$\Rightarrow = x \cdot e^x - e^x + C$$

حل سؤال خارجي 2 .

$$\int \underbrace{(x-3)}_{u}\, \underbrace{e^{x-3}\, dx}_{dv}$$

$u = x-3$

$du = dx$

$dv = e^{x-3} dx$

$v = e^{x-3}$

القانون $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$\int (x-3)\, e^{x-3} dx = (x-3)(e^{x-3}) - \int e^{x-3} dx$$

$$\Rightarrow = (x-3)\, e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

$$= xe^{x-3} - 3e^{x-3} - e^{x-3} + C = xe^{x-3} - 4e^{x-3} + C$$

مثال 2.3 ص 493

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv}$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$dv = 1\, dx$

$v = x$

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$\Rightarrow \int \ln x\, dx = \ln(x) \cdot x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx$$

$$\Rightarrow = x \ln(x) - x + C$$

$\boxed{3}$

حل سؤال الخارجي $\underline{4}$

$$\int \underbrace{\ln(x+1)}_{u} \underbrace{dx}_{dv}$$

$u = \ln(x+1)$ | $dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1} dx$ | $v = x$

القانون $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v\, du$

$$\Rightarrow \int \ln(x+1) dx = \ln(x+1) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x+1} dx$$

يمكن استخدام التكامل بالتعويض $u = x+1$

$\Rightarrow dx = du$

$\Rightarrow$

$$\int \frac{u-1}{u} du$$

$$\Rightarrow \int \frac{u}{u} - \frac{1}{u} du$$

$$\boxed{\Rightarrow x - \ln|x+1|}$$

$$\Rightarrow = x \ln x - x - \ln|x+1| + C$$

الجواب

حل سؤال $\underline{2}$ من الكتاب ص $\underline{496}$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin 4x\, dx}_{dv}$$

$u = x$ | $dv = \sin 4x \cdot dx$

$du = dx$ | $v = -\frac{1}{4} \cos 4x$

القانون $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$\Rightarrow = x \cdot -\frac{1}{4} \cos 4x - \int -\frac{1}{4} \cos 4x\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} x \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + C$$

4

حل سؤال 3 ص 496

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}\, dx}_{dv} \longrightarrow \quad u = x \quad du = dx \quad dv = e^{2x} dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

القانون $\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$

$$\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \Rightarrow \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

حل سؤال 4 ص 496

$$\int x \cdot \underbrace{\ln x}_{u}\, dx \quad (x\, dx \to dv)$$

$u = \ln x$ ↑ اشتقاق $du = \frac{1}{x} dx$

تكامل ↓ $dv = x\, dx$ $\quad V = \frac{x^2}{2}$

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$\Rightarrow \int x \cdot \ln x\, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \frac{dx}{\cancel{x}}$$

$$\Rightarrow = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx \Rightarrow \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4} x^2 + C$$

حل سؤال 5 ص 496

$$\int x^2 \underbrace{\ln(x)}_{u}\, dx \quad (x^2\, dx \to dv) \longrightarrow \quad u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \quad dv = x^2 dx \quad V = \frac{x^3}{3}$$

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$\int x^2 \ln(x)\, dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3} \frac{dx}{\cancel{x}}$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

5

حل سؤال خارجي 5

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x \cdot dx}_{dv} \longrightarrow u = x^2 \quad dv = \cos x\, dx$$

$du = 2x\,dx \quad v = \sin x$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v\, du \Rightarrow = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x\, dx$$

$$= x^2 \cdot \sin x - 2\int \sin x \cdot x\, dx$$

نلاحظ أنه لا يمكن إجراء التكامل إلى بالأجزاء لذلك يجب أن نكامل هذا الجزء بالأجزاء مرة اخرى

1

$$\Rightarrow = x^2 \cdot \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C$$

$u = x \quad dv = \sin x\, dx$

$du = dx \quad v = -\cos x$

$$\int x \cdot \sin x = x \cdot -\cos x - \int -\cos x\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{-x\cos x + \sin x}$$

الجواب

$$\Rightarrow x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

2

\#

التكامل الجدولي

اذا كان التكامل يحتوي على حدين احدهما يمكن ايصال المشتقة إلى صفر نستخدم التكامل الجدولي عوضاً عن التعويض للسهولة

مثال :- $\int x^3 \cdot \cos x\, dx$

الإشارات

نشتق		نكامل
x^3	$+$	$\cos x$
$3x^2$	$-$	$\sin x$
$6x$	$+$	$-\cos x$
6	$-$	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x\sin x - 6\cos x + C$$

الجواب

\#

$\boxed{6}$ $\int x . \sin x \, dx$

مثال على التكامل الجدولي :-

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{+} & \sin x \\ 1 & \xrightarrow{-} & -\cos x \\ 0 & & -\sin x \end{array} \Rightarrow -x\cos x + \sin x + C$$

الناتج #

حل سؤال خارجي :-

$$\int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\sin x \, dx}_{dv}$$

$\boxed{1}$ $u = e^x$ $dv = \sin x \, dx$

$du = e^x dx$ $V = -\cos x$

المعادلة $\boxed{1}$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}$$

نكامل بالأجزاء مرة اخرى

$\boxed{2}$ $u = e^x$ $dv = \cos x dx$

$du = e^x dx$ $V = \sin x$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

المعادلة $\boxed{2}$

نلاحظ أن هذا الجزء هو نفس السؤال المطلوب لذلك نعوض المعادلة 2 في المعادلة 1

نعوض المعادلة $\boxed{2}$ في $\boxed{1}$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}$$

ننقلة للطرف الثاني بعكس الإشارة

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

نقسم الطرفين على 2

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$$

الجواب #

$\boxed{7}$

حل سؤال 41 ص 497 :-

$$\int \underbrace{\cos^{-1}x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv}$$

$u = \cos^{-1}x \quad dv = dx$

$du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad v = x$

$$\Rightarrow = x\cos^{-1}x + \int x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow x\cos^{-1}x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

تكامل بالتعويض

$w = 1 - x^2$

$dw = -2x\,dx$

$dx = \frac{dw}{-2x}$

$$\Rightarrow x\cos^{-1}x + \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{w}}\,\frac{dw}{-2\cancel{x}}$$

$$\Rightarrow x\cos^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{w}}\,dw \Rightarrow x\cos^{-1}x - w^{\frac{1}{2}}$$

الجواب #
$$\Rightarrow x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$$

حل سؤال 42 ص 497 :-

$$\int \underbrace{\tan^{-1}x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv}$$

$u = \tan^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$dv = dx \Rightarrow \boxed{v = x}$

$$\int \tan^{-1}(x)\,dx = x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

نضرب بـ 2 ونقسم ع 2 ليكون البسط مشتقة للمقام

$$\Rightarrow x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

الجواب

#
$$\Rightarrow x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

8

حل سؤال 43 ص 497

$$\int \sin\sqrt{x}\, dx \qquad u=\sqrt{x} \qquad du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

الحل يكون بالتعويض ثم أجزاء.

تكامل بالتعويض

جذر الـ x وهو نفس الفرض.

$$\Rightarrow \int \sin(u)\cdot 2\sqrt{x}\, du \Rightarrow 2\int u\sin(u)\, du$$

والآن نكامل هذا المقدار بالتجزيء أو بالجدولي

تكامل جدولي

u	$+$	$\sin u$
1	$-$	$-\cos u$
0		$-\sin u$

$$\Rightarrow -u\cos u+\sin u$$

$$\Rightarrow 2(-u\cos u+\sin u)$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$$

حل التكامل #

حل سؤال 44 ص 497

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\boxed{u=\sqrt{x}} \Rightarrow du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{dx=2\sqrt{x}\, du}$$

تكامل بالتعويض ثم بالتجزيء.

$$\Rightarrow \int e^{u}\cdot 2\sqrt{x}\, du \Rightarrow 2\int ue^{u}\cdot du$$

تكامل جدولي

u	$+$	e^u
1	$-$	e^u
0		e^u

$$\Rightarrow ue^u-e^u$$

$$\Rightarrow 2(ue^u-e^u)+C$$

الحل #

$$\Rightarrow 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$$

9

حل سؤال 45 ص 497

$$\int \sin(\ln x)\, dx$$

$\boxed{u = \ln x}$

$du = \frac{dx}{x}$

$\boxed{dx = x \cdot du}$

تكامل بالتعويض ثم بالأجزاء

$u = \ln x$

$e^u = \cancel{e}^{\ln x}$

$\boxed{x = e^u}$

$$\Rightarrow \int \sin(u)\, x\, du$$

$$\Rightarrow \int \sin(u) \cdot e^u\, du$$

تكملة الحل هو سؤال خارجي 6 في الملخص في صفحة 6

حل سؤال خارجي 7 ص إذا كانت $\int_1^4 f(x)\,dx = 12$ و $f(1) = 3$ و $f(4) = -8$. أوجد قيمة

$$\int_1^4 \underbrace{(2x+3)}_{u}\, \underbrace{f'(x)\,dx}_{dv} = ??$$

$u = 2x+3$

$du = 2dx$

$dv = f'(x)\,dx$

$v = f(x)$

$$\int_1^4 (2x+3) f'(x)\,dx = (2x+3) f(x) \Big]_1^4 - \int_1^4 f(x)\, 2\, dx$$

$$= 11(f(4)) - 5(f(1)) - 2(12)$$

$$= 11 \times -8 - 5 \times 3 - 24$$

$$\boxed{= -127}$$

الناتج #