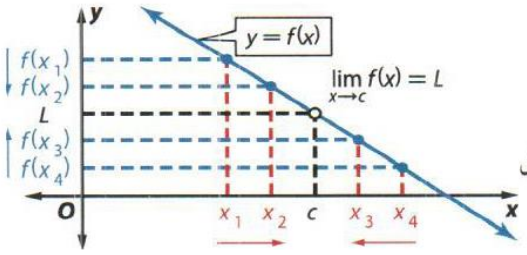
مكتب العين التعليمي
مدرسة العالمية الخاصة
الصف الحادي عشر متقدم

الاسم / .....
المادة / الرياضيات
التاريخ / / / 20 م

تقدير النهايات بيانيًا

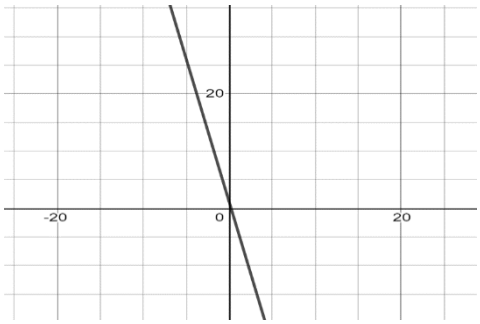
استيعاب مفهوم النهاية. تذكر أنه إذا كانت $f(x)$ تقترب من القيمة الفريدة L عندما يقترب x من c من طرف واحد، فإن النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c تكون عبارة عن L. وتُكتب على صورة $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

يُمكنك تطبيق هذا الوصف لتقدير نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من قيمة ثابتة لـ c أو $\lim_{x\to c} f(x)$ باستخدام تمثيل بياني أو إنشاء جدول بالقيم.



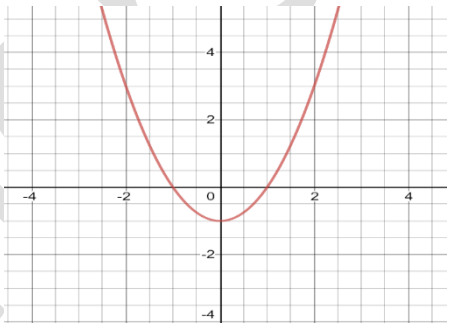
قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

1A. $\lim_{x\to -3} (1 - 5x)$



X	-3.01	-3.001	-3	-2.999	-2.99
y					

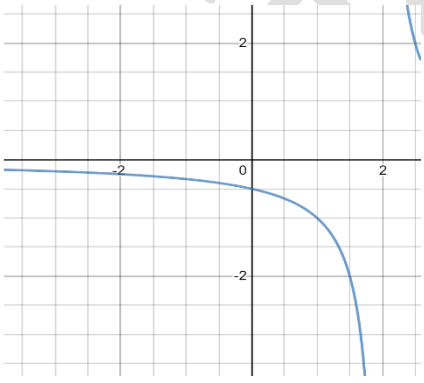
1B. $\lim_{x\to 1} (x^2 - 1)$



X	0. 99	0.999	1	1.001	1.01
y					

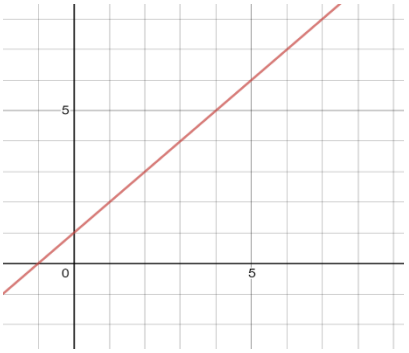
قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

2A. $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$



X	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99
y					

2B. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-4x-5}{x-5}$



X	0. 99	0.999	1	1.001	1.01
y					

مع تمنياتى بالنجاح والتوفيق أ / مجدي عبده

المفهوم الأساسي النهايات أحادية الطرف

نهاية من الجهة اليمنى

إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_2 عندما يقترب x من c من اليمين، فإن

$\lim_{x \to c^+} f(x) = L_2$ وتُقرأ

النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليمين تساوي L_2

نهاية من الجهة اليسرى

إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_1 عندما يقترب x من c من اليسار. فإن

$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1$ وتُقرأ

النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليسار تساوي L_1.

المفهوم الأساسي وجود نهاية عند نقطة

لا تكون نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c موجودة إلا إذا كان هناك نهايتان أحاديتا الطرف ومتساويتين. بمعنى أنه إذا كان

$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$ فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

قدر كلا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة :

3A. $\lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x), \lim_{x \to 1} f(x),$

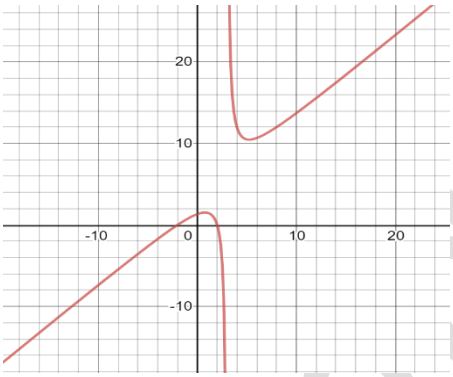
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{if } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

.....

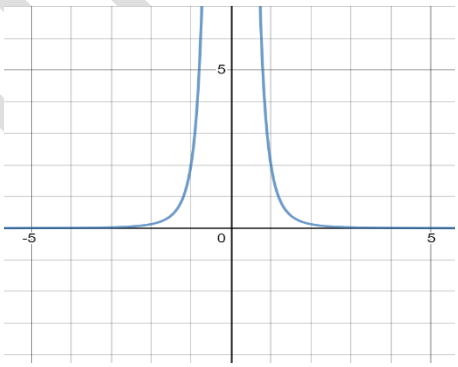
.....

.....

4A. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$



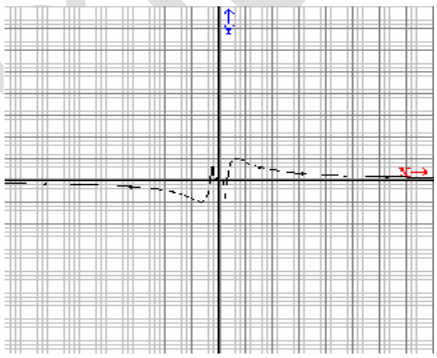
4B. $\lim_{x \to 0} -\frac{2}{x^4}$



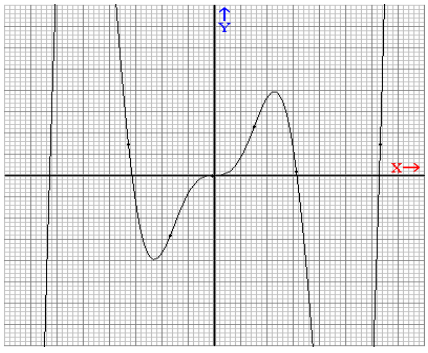
.....

.....

5A. $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$



5B. $\lim_{x \to 0} (x^2 \sin x)$



.....

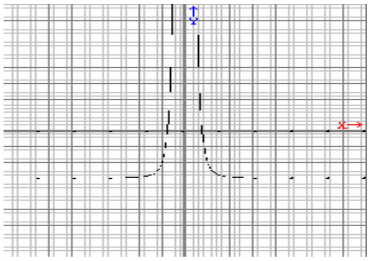
.....

المفهوم الأساسي النهايات عند اللانهاية

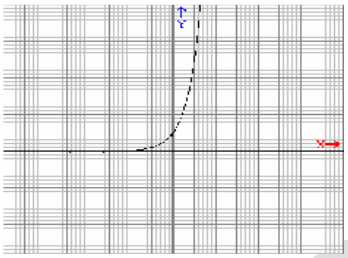
- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_1 حيث x تزداد، فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$. وتُقرأ نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من اللانهاية تساوي L_1.
- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_2 حيث x تقل، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$. وتُقرأ نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من اللانهاية السالبة تساوي L_2.

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

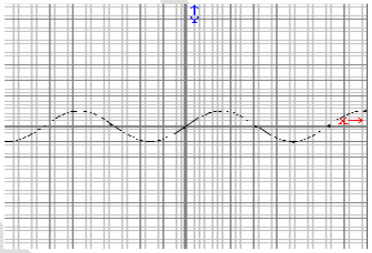
6A. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4} - 3\right)$



6B. $\lim_{x\to-\infty} e^x$



6C. $\lim_{x\to\infty} \sin x$



.....

.....

.....

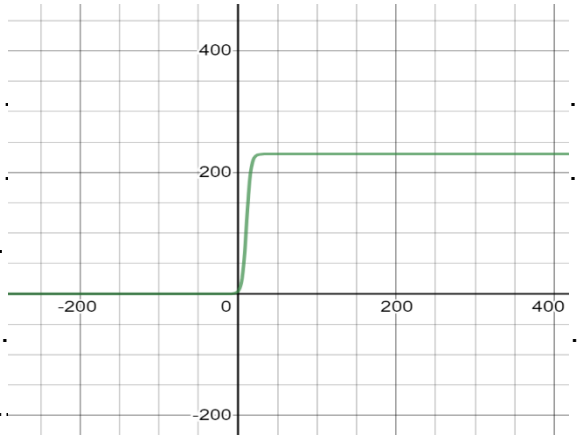
7A. الكهرباء يمكن تمثيل الفولت النموذجي V الذي توفره المنافذ الكهربية في الولايات المتحدة باستخدام الدالة $V(t) = 165 \sin 120\pi t$. حيث t هو الزمن بالثانية. قدّر $\lim_{t\to\infty} V(t)$، إن كانت موجودة وفسر النتيجة.

.....

.....

.....

7B. الأحياء يقف ذباب الفاكهة على زجاجة ربع لتر من الحليب وقطعة فاكهة ونبات الخميرة. ويمكن إيجاد تعداد ذباب الفاكهة بعد مرور t من الأيام باستخدام $P(t) = \frac{230}{1 + 56.5e^{-0.37t}}$. قدّر $\lim_{t\to\infty} P(t)$، إن كانت موجودة، وفسر النتيجة التي توصلت إليها.



.....

.....

.....

.....

.....

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق أ / مجدي عبده

إيجاد قيمة النهايات جبريًا

المفهوم الأساسي خواص النهايات

إذا كان k و c أعدادًا حقيقية، وn هو عدد صحيح موجب، و $\lim_{x\to c}$، و $\lim_{x\to c}$ موجودتان، فإن العبارة التالية صحيحة.

خاصية المجموع	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$
خاصية الفرق	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$
خاصية الضرب في كمية عددية	$\lim_{x\to c}[kf(x)]=k\lim_{x\to c}f(x)$
خاصية ناتج الضرب	$\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x)$
خاصية ناتج القسمة	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$ إذا كان $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$.
خاصية القوة	$\lim_{x\to c}[f(x)^n]=\left[\lim_{x\to c}f(x)\right]^n$
خاصية الجذر النوني	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c}f(x)}$ إذا كان $\lim_{x\to c}f(x)>0$ حيث n هو عدد زوجي.

استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية.

1A. $\lim_{x\to 2}(-x^3+4)$

1B. $\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2x^2-x-15}$

1C. $\lim_{x\to -1}\sqrt{x+3}$

.....

.....

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

2A. $\lim_{x\to 4}(x^3-3x^2-5x+7)$

2B. $\lim_{x\to -5}\frac{x+1}{x^2+3}$

2C. $\lim_{x\to -8}\sqrt{x+6}$

.....

.....

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

3A. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}$

3B. $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

4A. $\lim_{x\to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

4B. $\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

.....

.....

.....

.....

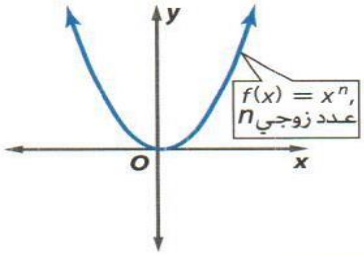
.....

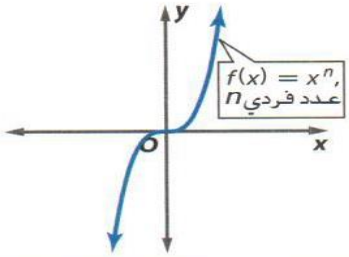
.....

.....

.....

المفهوم الأساسي نهايات دوال القوة عند اللانهاية





لأي عدد صحيح موجب n.

- $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عددًا فرديًا.

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

5A. $\lim_{x\to\infty} (-x^3 - 4x^2 + 9)$

5B. $\lim_{x\to-\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$

5C. $\lim_{x\to-\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5)$

.....

المفهوم الأساسي نهايات الدوال العكسية عند اللانهاية

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ بالنسبة لأي عدد صحيح موجب n.

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

6A. $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x-10}$

6B. $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7}{5x+1}$

6C. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. ثم أوجد نهاية المتتالية، إن وجدت.

7A. $a_n = \frac{4}{n^2+1}$

7B. $b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$

7C. $c_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$