«1»

الصف : الثاني عشر متقدم

الدرس : 7-3

طرائق تكامل الدوال المثلثية

نواتج التعلم :- معرفة الطالب ايجاد تكاملات دوال بصيغة $\sin^m(x)\cos^n(x)$

- معرفة الطالب إيجاد تكاملات دوال بصيغة $\sec^m(x)\cdot\tan^n(x)$
- معرفة إيجاد تكاملات مثلثية باستخدام التبديل $x=a\sin(y)$.
- معرفة إيجاد تكاملات مثلثية باستخدام التبديل $x=a\tan y$.

وايجاد تكاملات دوال مثلثية باستخدام التبديل $x=a\sec(y)$.

1. تكاملات بالصيغة $\int \sin^m(x)\cdot\cos^n(x)\,dx$

تمرين : جد التكامل $\int \sin^3(x)\cdot\cos(x)\,dx$

الحل:

$$\int \sin^3(x)\cdot\cos(x)\,dx =$$

نفرض $u=\sin(x)$ فيكون $du=\cos x\,dx$

$$\int \sin^3(x)\cdot\cos(x)\,dx = \int u^3\cdot du = \frac{u^{3+1}}{3+1}+c$$

$$= \frac{u^4}{4}+c = \frac{1}{4}(\sin^4 x)+c$$

تمرين : جد قيمة تكامل $\int \cos^2 x\cdot\sin^3 x\cdot dx$

الحل:

$$\int \cos^2 x\,\sin^3 x\,dx = \int \cos^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\sin x\,dx$$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$

$$= \int \cos^2 x\,(1-\cos^2 x)(\sin x\,dx)$$

$$= -\int \cos^2 x\,(1-\cos^2 x)(-\sin x\,dx)$$

نفرض $u=\cos x$ فيكون $du=-\sin x\,dx$

$$= -\int u^2(1-u^2)\,du = -\int(u^2-u^4)\,du = -\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+c$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+c$$

تمرين: جد قيمة $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos^5 x \, dx$

الحل: نكتب $\cos x$ بدلالة $\sin x$

$$\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos^4 x \cdot \cos x \, dx = \int \sqrt{\sin x} \, (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int \sqrt{\sin x} \, (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx = \int$$

نفرض $u = \sin x \Leftarrow du = \cos x \, dx$

$$= \int \sqrt{u} \, (1 - u^2)^2 \cdot du = \int u^{\frac{1}{2}} (1 - 2u^2 + u^4) \, du$$

$$= \int (u^{\frac{1}{2}} - 2u^{2+\frac{1}{2}} + u^{4+\frac{1}{2}}) \, du = \int (u^{\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{5}{2}} + u^{\frac{9}{2}}) \, du$$

$$= \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2 \cdot \frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + \frac{u^{\frac{9}{2}+1}}{\frac{9}{2}+1} + C = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{u^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} - \frac{4}{7} \cdot \sqrt{u^7} + \frac{2}{11} \sqrt{u^{11}} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} - \frac{4}{7} \sqrt{\sin^7 x} + \frac{2}{11} \sqrt{\sin^{11} x} + C$$

تمرين: جد قيمة $\int \sin^2 x \, dx$

الحل: نعلم أن $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

«3»

تمرين: جد قيمة $\int \cos^4 x\, dx$

الحل:

$$\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left[1+2\cos 2x+\cos^2(2x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}_2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

«2» ايجاد قيمة التكاملات بالصيغة: $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$

1. m عدد صحيح موجب فردي:

تمرين: جد قيمة $\int \tan^3 x \cdot \sec^3 x\, dx$

الحل: نكتب التكامل في الصورة

$$\int \tan^3 x \cdot \sec^3 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x (\sec x \tan x)\, dx$$

حسب متطابقة فيثاغورث $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$= \int (\sec^2 x - 1)(\sec^2 x)(\sec x \tan x)\, dx$$

نفرض $u = \sec x$ فنجد $du = \sec x \tan x\, dx$

$$= \int (u^2-1)u^2\, du = \int (u^4 - u^2)\, du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

«4»

2   n عدد صحيح زوجي موجب

تمرين: جد قيمة $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

الحل: بما أن $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$. لذلك نجعل $\sec^4 = \sec^2 \cdot \sec^2$

$$\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx \qquad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$= \int (\tan^2 x + \tan^4 x) \sec^2 x \, dx$$

نفرض $u = \tan x$ نجد $du = \sec^2 x \, dx$

$$= \int (u^2 + u^4) \, du = \frac{1}{3} u^2 + \frac{1}{5} u^5 + c$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c$$

3. m زوجي و n فردي .

يلزم في مثل هذه التكاملات تكاملات من الشكل $\int \sec x\, dx$.

تمرين : جد قيمة $\int \sec x \, dx$.

الحل: نضرب المكامل بالكسر $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ وهي نسبة تساوي (1) .

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \cdot dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

نفرض $u = \sec x + \tan x$ ومنه $du = \sec x \tan x + \sec^2 x$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

3. تكامل يتضمن $\sqrt{a^2 - x^2}$

تمرين : جد قيمة $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx$

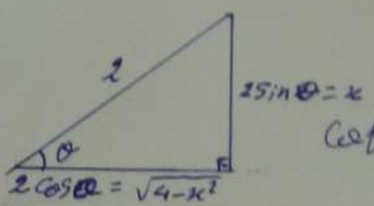
الحل: نفرض $x = 2\sin\theta$ بشرط $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ فيكون $dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$$\int \frac{2\cos\theta}{(2\sin\theta)^2\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}}\, d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta \cdot 2\sqrt{1-\sin^2\theta}}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta}}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{4\sin^2\theta \cdot \cos\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{4\sin^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\cot\theta + c$$

للرجوع الى المتغير x نتبع ما يلي .



في المثلث القائم : بما أن $x = 2\sin\theta \Leftarrow \frac{x}{2} = \sin\theta$

لذلك نسمي الوتر 2 . حسب فيثاغورث نجد أن $2\cos\theta = \sqrt{4-x^2}$ وبالتالي

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos\theta}{2\sin\theta} =$$

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

تكامل يتضمن $\sqrt{a^2+x^2}$:

36
P. 507 : جد قيمة $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$.

الحل : نفرض $x = 2\tan\theta$ بشرط $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

فنجد $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$

نعوض :

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \frac{2\sec^2\theta}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{2\sec^2\theta}{\sqrt{4(1+\tan^2\theta)}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\cancel{2}\sec^2\theta}{\cancel{2}\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{\sec\theta}}\,d\theta = \int \sec\theta\, d\theta =$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

بما أن $x = 2\tan\theta \Leftarrow \frac{x}{2} = \tan\theta$

ولدينا $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} \Leftarrow \sec\theta = \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

نعوض :

$$= \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

"7"

تكامل يتضمن $\sqrt{x^2-a^2}$:

31
P.507

. جد قيمة $\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx$ $\quad x \geq \frac{3}{2}$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{4(x^2-\frac{9}{4})}}{x}\,dx = \int \frac{2\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}}{x}\,dx$$

نفرض $x = \frac{3}{2}\sec\theta$ حيث :

$$x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\sec\theta \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \sec\theta \geq 1$$

وهذا يتحقق عندما $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$

$$dx = \frac{3}{2}\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$$

نعوض :

$$= \int \frac{2\sqrt{(\frac{3}{2}\sec\theta)^2 - \frac{9}{4}}}{\cancel{\frac{3}{2}\sec\theta}} \cdot \cancel{\frac{3}{2}\sec\theta} \cdot \tan\theta\,d\theta$$

$$= \int 2\sqrt{\frac{9}{4}\sec^2\theta - \frac{9}{4}} \cdot \tan\theta \cdot d\theta = \int 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\sec^2\theta - 1} \cdot \tan\theta\,d\theta$$

$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

$$= 3\int \sqrt{\tan^2\theta} \cdot \tan\theta\,d\theta = 3\int \tan\theta\,\tan\theta\,d\theta$$

$$= 3\int \tan^2\theta \cdot d\theta = 3\int (\sec^2\theta - 1)\,d\theta = 3(\tan\theta - \theta) + C$$

الرجوع الى المتغير x :

* $\tan\theta = \sqrt{\tan^2\theta} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{(\frac{2}{3}x)^2 - 1}$

* $x = \frac{3}{2}\sec\theta \Rightarrow \frac{2}{3}x = \sec\theta \Rightarrow \sec^{-1}(\frac{2}{3}x) = \sec^{-1}(\sec\theta)$

$\sec^{-1}(\frac{2}{3}x) = \theta$

نعوض :

$$= 3\left(\sqrt{(\frac{2}{3}x)^2 - 1} - \sec^{-1}(\frac{2}{3}x)\right) + C$$

8

$\frac{2}{P.507}$: جد تكامل $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x \, dx$

الحل:

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x \cdot \sin^4 x \, dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x) \sin^4 x \cdot \cos x \, dx = \int (\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x \, dx$$

نفرض $u = \sin x \Leftarrow du = \cos x \, dx$

$$= \int (u^4 - u^6) \, du = \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7 + c$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 (x) - \frac{1}{7} \sin^7 x + c$$

$\frac{13}{P.507}$. جد تكامل $\int \cot^2 x \cdot \csc^4 x \, dx$

الحل:

$$\int \cot^2 x \cdot \csc^4 x \, dx = \int \cot^2 x \cdot \csc^2 x \cdot \csc^2 x \, dx$$

$$= \int \cot^2 x (1 + \cot^2 x) \csc^2 x \, dx$$

$$= \int (\cot^2 x + \cot^4 x) \csc^2 x \, dx$$

نفرض $u = \cot x \Leftarrow du = -\csc^2 x \, dx$

$$= \int (u^2 - u^4) \, du = \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + c$$

$$= \frac{1}{3} \cot^3 u - \frac{1}{5} \cot^5 u + c$$