Mathmatics U6

6.7 Probability. — 6.7 الإحتمال .

PDF ≡ Probability density Function — دالة الكثافة الإحتمالية

1. $f(x)$ ≡ دالة احتمال
2. x ≡ متغير عشوائي

لكل $a \leq x \leq b$ نكون $f(x) \geq 0$

$f(x)$ ++++

* لا تكون دالة الكثافة الإحتمالية سالبة دائماً.

* $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ الإحتمال الكلي 1.

شروط

ملاحظة:
$1\,ft = 12\,in$

ملاحظة:
الإحتمال ≡ مساحة

مثال 7.1 ص 475

اثبت أن $f(x) = 3x^2$ تعرف pdf على الفترة $[0,1]$ (a, b).

$$\int_0^1 3x^2\,dx \stackrel{?}{=} 1$$

$$\Rightarrow x^3 \Big]_0^1 = 1$$

الدالة تمثل pdf

$\int_a^b f(x)\,dx = 1$

#

2

حل سؤال 2 ص 478

$[0,2]$ $\quad f(x) = \frac{3}{8}x^2$

* الدالة موجبة
$f(x) \geq 0$

$$\int_0^2 \frac{3}{8}x^2\,dx = 1$$

تمثل دالة Pdf لأن تكاملها على الفترة يساوي 1

حل سؤال 6 ص 478

$[0, \ln 4]$ $\quad f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

* الدالة موجبة
$f(x) \geq 0$

$$\int_0^{\ln 4} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg]_0^{\ln 4}$$

$$\Rightarrow -2e^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^{\ln 4} = 1$$

Pdf

حل مثال 7.2 ص 475

$$f(x) = \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}$$

Pdf

أوجد الإحتمال بين 5ft 8in و 5ft 9in

التحويل إلى in: $5 \times 12 + 8 = 68$ in

$5\text{ft } 9\text{in} = 69\text{in}$

$$P(68 \leq x \leq 69) = \int_{68}^{69} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}\,dx$$

$$P(68 \leq x \leq 69) \approx 0.15542$$

3

حل مثال 7.3 ص 475

$f(x) = 4e^{-4x}$ ← العمر الافتراضي بالأحوام

أوجد احتمال أن يدوم المصباح مدة 3 أشهر أو أقل

$\frac{1}{4}$ عام ← 0

$$P\left(0 \le x \le \frac{1}{4}\right) = \int_{0}^{1/4} 4e^{-4x}\,dx = 0.63212$$

حل سؤال 13 ص 478

بين $5ft\ 10in$ (×12 + 10) و $6ft \times 12$

$= 70$ $\quad = 72$

$$P(70 \le x \le 72) = \int_{70}^{72} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}\,dx$$

$$P(70 \le x \le 72) = 0.157$$

حل سؤال 15 ص 478

بين $7ft \times 12$ و $10ft \times 12$

$= 84\ inch$ $\quad = 120\ inch$

$$P(84 \le x \le 120) = \int_{84}^{120} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}\,dx$$

$$P(84 \le x \le 120) = 7.76 * 10^{-11}$$

4

حل مثال 7.4 ص 476

$f(x) = ce^{-3x}$ Pdf

$[0,1]$

$c = ??$

$$1 = \int_0^1 ce^{-3x}\,dx$$

$$1 = c\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}\Big]_0^1$$

يمكن إيجاد قيمة الثابت بالآلة Shift solve

$$\Rightarrow c = \frac{3}{1-e^{-3}} = 3.1572$$

حل سؤال 8 ص 478

Pdf $f(x) = cx + x^2$

$[0,1]$

$$1 = \int_0^1 (cx + x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{c}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{4}{3}$$

حل سؤال 10 ص 478

Pdf $f(x) = 2ce^{-cx}$

$[0,2]$

$$1 = \int_0^2 2ce^{-cx}\,dx$$

$$1 = 2 - 2e^{-2c}$$

$$c = \frac{1}{2}\ln(2) = 0.3465$$

---

* يمكن حساب الثابت c باستخدام Shift Solve والتعويض بـ y بدلاً من الثابت c

5

Pdf $f(x) = 6e^{-6x}$ حيث x بالأعوام

س 17 ص 478 : يدوم عمر المصباح لفترة أصغر من 3 أشهر

3 أشهر ← $\frac{1}{4}$ عام

0 ← أصغر

$$P(0 \leq x \leq \tfrac{1}{4}) = \int_0^{1/4} 6e^{-6x}\,dx = \boxed{0.7768}$$

س 18 ص 478 : يدوم المصباح لفترة أصغر من 6 أشهر.

6 أشهر ← $\frac{1}{2}$ عام

0 ← أصغر

$$P(0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}) = \int_0^{1/2} 6e^{-6x}\,dx = \boxed{0.95}$$

س 19 ص 478 : يدوم عمر المصباح لمدة تتراوح بين عام أو عامين.

عام ← 1

عامين ← 2

$$P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 6e^{-6x}\,dx = \boxed{0.00247}$$

س 20 ص 478 : // // // // // // // //

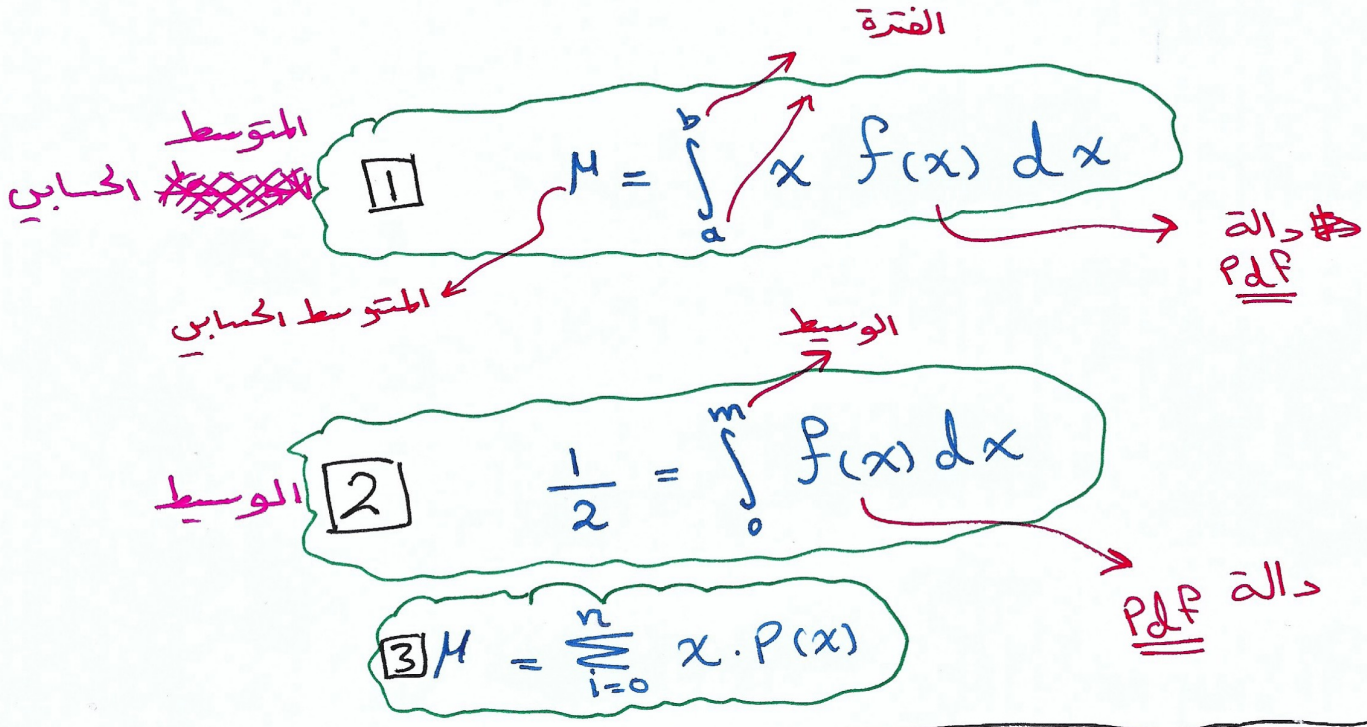
3 أعوام ← 3

10 أعوام ← 10

$$P(3 \leq x \leq 10) = \int_3^{10} (6e^{-6x})\,dx \simeq \boxed{1.5 \times 10^{-8}}$$

#

6



حل مثال 7.5 ص 477

$$K = \frac{1}{2}\ln(2) \qquad f(x) = \ln(2)\, e^{-Kx} \qquad [0, 2]$$

a) أوجد المتوسط الحسابي

$$\mu = \int_a^b x f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \ln(2)\, e^{-\frac{1}{2}\ln(2)x}\, dx$$

$$\mu = 0.88539 \text{ days}$$

b) أوجد نسبة أعمار فوق المتوسط $\equiv P(0 \le x \le \mu)$

$$P(0 \le x \le \mu) = \int_0^{0.88539} f(x)\, dx = \int_0^{0.88539} \ln(2)\, e^{-\frac{1}{2}\ln(2)x}$$

$$P(0 \le x \le 0.88539) = 0.5284$$

$$\approx 53\%$$

7

[C] أوجد الوسيط

$$0.5 = \int_0^m f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^m \ln(2)\, e^{-\frac{1}{2}\ln(2)x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \ln(2)\left[-\frac{2}{\ln(2)}\, e^{-\frac{1}{2}\ln(2)x} \right]_0^m$$

$$\frac{1}{2} = -2e^{-\frac{1}{2}\ln(2)m} + 2$$

الوسيط $\Rightarrow$ $m = 0.83$

حل سؤال 25 من 478

$f(x) = 3x^2$ $[0,1]$

[a] المتوسط الحسابي

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot (3x^2)\,dx$$

$$\mu = 0.75$$

[b] الوسيط

$$\frac{1}{2} = \int_0^m f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^m 3x^2\,dx = \frac{1}{2}$$

$$m = 0.793$$

الوسيط

8

حل سؤال 27 ص 478

$$f(x) = \frac{4/\pi}{1+x^2} \qquad [0,1]$$

a) المتوسط الحسابي

$$\mu = \frac{\pi}{4}\int_0^1 (x)\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\boxed{\mu = 0.272}$$

b) الوسيط

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi}\int_0^m \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi}\left[\tan^{-1}x\right]_0^m \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi}(\tan^{-1}(m))$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 0.414}$$

حل سؤال 28 ص 478

$$f(x) = \frac{2/\pi}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [0,1]$$

a) المتوسط الحسابي

$$\mu = \int_0^1 (x)\frac{2/\pi}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \boxed{0.6366}$$

b) الوسيط

$$0.5 = \int_0^m f(x)\,dx \Rightarrow 0.5 = \int_0^m \frac{2/\pi}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$0.5 = \frac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}(m) - \sin^{-1}(0)\right]$$

$$\boxed{m = 0.7071}$$

9

حل سؤال خارجي (1)

$f(x) = ax^2 + bx + 1$

$a = ??$ $b = ??$

$[0, 1]$

$\mu = \frac{2}{3}$

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

$$\frac{2}{3} = \int_0^1 x \cdot (ax^2 + bx + 1)\, dx$$

$$\frac{2}{3} = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{3a + 4b = 2}$$

المعادلة 1

PdF

$$\int_a^b f(x)\, dx = 1 \Rightarrow 1 = \int_0^1 (ax^2 + bx + 1)\, dx$$

$$1 = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + x\Big]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0$$

$$\boxed{2a + 3b = 0}$$ ← المعادلة 2

* بحل المعادلتين 1 و 2 ينتج

الناتج $\Rightarrow a = 6$ و $b = -4$

10 حل سؤال خارجي (2)

$f(x) = 2ax + b$

الوسيط = 1 $a=??, b=??$ على الفترة $[0,3]$

$$\int_0^3 (2ax+b)\,dx = 1 \longrightarrow \text{pdf من}$$

$$\frac{2ax^2}{2} + bx \Big]_0^3 = 1$$

$$9a + 3b = 1 \Rightarrow (1) \text{ المعادلة}$$

من الوسيط

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 (2ax+b)\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2ax^2}{2} + bx \Big]_0$$

$$(2) \text{ المعادلة} \Rightarrow \frac{1}{2} = a + b$$

نعوضها في المعادلة (1)

$$a = \frac{1}{2} - b \Rightarrow 9\left(\frac{1}{2} - b\right) + 3b = 1$$

$$4.5 - 9.5b + 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{7}{12}$$

نعوضها في أحد المعادلتين

الجواب # $\boxed{a = -\frac{1}{12}}$ و $\boxed{b = \frac{7}{12}}$

II

حل سؤال خارجي (3)

	x_1	x_2	x_3	x_4
X	0	1	2	3
$P(X)$	0.027	0.189	0.441	0.343
	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	$P(x_4)$

إذا كان احتمال ان يسجل لاعب كرة سلة هدف هو 0.7 اذا تم تعريف المتغير العشوائي بأنه عدد الأهداف المسجلة عند رمي 3 رميات.

1 أوجد احتمال أن يسجل اللاعب هدفين أو ثلاث أهداف.

اتحاد

$$P(2 \cup 3) = P(2 \le X \le 3) = (P_{x=2}) + (P_{x=3})$$

$$= 0.441 + 0.343 = \boxed{0.784}$$

2 أوجد احتمال أن يسجل اللاعب هدفين على الأكثر.

هدفين أو أقل

$$P(X \le 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$$

$$= 0.027 + 0.189 + 0.441 = \boxed{0.657}$$

3 أوجد احتمال أن يسجل اللاعب هدف على الأقل.

هدف أو أكثر

$$P(x \ge 1) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \boxed{0.973}$$

4 أوجد المتوسط الحسابي لعدد الأهداف المسجلة عند رمي 3 مرات

$$\mu = \sum_{i=0}^{3} x \cdot P(x) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + x_3 P(x_3) + x_4 P(x_4)$$

$$\mu = 0(0.027) + 1(0.189) + 2(0.441) + 3(0.343)$$

$$\mu = 2.1$$

المتوسط الحسابي

#