عربي اختيار من متعدد

مع الحل التفصيلي

الوحدة السابعة

الأستاذ يحيى علي

0543234648

1) ناتج $\int \frac{1}{e^{-x}\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

a) $\sin^{-1}(e^x)+c$

b) $\ln(e^x)+c$

c) $\tan^{-1}(e^x)+c$

d) $\sqrt{e^x}+c$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^x$

$y=\left(\frac{3}{8}\right)^x$

$\ln y = x\ln\left(\frac{3}{8}\right)$

2) ناتج $\int x\sec^2 x\,dx$

a) $x\tan x+\ln|\cos x|+c$

b) $x\tan x-\ln|\cos x|+c$

c) $x\tan x+\tan x+c$

d) $\tan x+\ln|\cos x|+c$

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx \quad (3)$$

a) $-\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c$

b) $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$

c) $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c$

d) $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx \quad (4)$$

a) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

b) $2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

c) $4\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

d) $\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c$

(4 $\int \frac{4}{5+2x+x^2}\,dx$

a) $\frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c$

b) $\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

c) $2\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

d) $\frac{4}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c$

الحل :

$$\int \frac{4}{(x^2+2x+1)+4}\,dx$$

$$\int \frac{4}{(x+1)^2+4}\,dx = \int \frac{4\,dx}{4\left[1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]}$$

$$\frac{4}{4}\int \frac{2\cdot du}{1+u^2}$$

$$2\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

$u = \frac{x+1}{2}$

$du = \frac{dx}{2}$

(5

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$$

a) $2\sin^{-1}e^x + c$

b) $\sin^{-1}e^x + c$

c) $\frac{1}{2}\sin^{-1}e^x + c$

d) $\sin^{-1}e^{2x} + c$

الحل:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\,dx$$

$u = e^x$

$du = e^x dx$

$dx = \frac{du}{e^x}$

$$\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{du}{e^x} = \sin^{-1}u + c$$

$$= \sin^{-1}e^x + c$$

(6

$$\int x \ln x\,dx$$

a) $x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + c$

b) $x\ln x - x + c$

c) $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$

d) $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + c$

$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = dx/x \qquad v = x^2/2$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x^2/2\ln x - x^2/4 + c$$

(7 $\int \frac{4x+6}{4+3x+x^2}\,dx$

a) $\ln|x^2+3x+4|+c$

b) $2\ln|x^2+3x+4|+c$

c) $\frac{1}{2}\ln|x^2+3x+4|+c$

d) $2(x^2+3x+4|+c$

الحل :

$$\int \frac{2(2x+3)}{4+3x+x^2}\,dx$$

$$= 2\ln|4+3x+x^2|+c$$

لاحظ البسط مشتقة المقام
بعد اضافة 2 خارج التكامل

(8)

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

a) $-2\cos\sqrt{x}+c$ b) $\frac{-1}{2}\cos\sqrt{x}+c$

c) $-2\sin\sqrt{x}+c$ d) $2\cos\sqrt{x}+c$

الحل

$$u=\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$I=\int \frac{\sin u}{\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}\,du$$

$$=\int 2\sin u\,du = -2\cos\sqrt{x}+c$$

(9

$$\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$$

a) $x^5\tan^{-1}(x^3)+c$ b) $\ln(x+1)+c$

b) $\frac{7}{6}\frac{x6}{x+x7}+c$ d) $\frac{1}{6}\ln(1+x^6)+c$

الحل

$$I=\frac{1}{6}\int \frac{6x^5}{1+x^6}\,dx=\frac{1}{6}\ln|1+x^6|+c$$

(10)

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx$$

a) $2\ln x + c$

b) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$

c) $\ln x^2 + c$

d) $(\ln x)^2 + c$

الحل:

$u = \ln x^2$

$u = 2\ln x \Rightarrow du = \frac{2dx}{x}$

$$I = \int \frac{u}{x} \cdot \frac{x\, du}{2} = \int \frac{u}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x^2)^2}{4} + c$$

$$= \frac{(2\ln x)^2}{4} + c = (\ln x)^2 + c$$

$$\int e^{2\ln x}\, dx$$

a) $\frac{x^3}{3} + c$

b) $x^2 + c$

c) $\frac{x}{2} e^{2\ln x} + c$

d) $e^{\ln x^2} + c$

(11)

$\int e^{2\ln x}\, dx$

$\int e^{\ln x^2}\, dx$

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

$\int \tan 2x \, dx$ (12)

a) $\frac{1}{2}\cot 2x + c$ b) $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

c) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + c$ d) $-\cot x + c$

الحل:

$$\int \tan 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$$

$\int \sin^3 x \, dx$ (13)

a) $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c$ b) $\frac{\sin^4 x}{4} + c$

c) $-\frac{\cos^4 x}{4} + c$ d) $\frac{\cos^4 x}{4} - \cos x + c$

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx$$

$$-\int \sin x (1 - u^2) \frac{du}{\sin x} = -u + \frac{u^3}{3} + c \quad \begin{matrix} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{matrix}$$

$$-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

(14)

$$\int x e^{2x} dx$$

a) $\frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + c$

b) $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$

c) $2x e^{2x} - 4 e^{2x} + c$

d) $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + c$

x		e^{2x}
	$+$ ↘	$\frac{1}{2} e^{2x}$
1	$-$ ↘	$\frac{1}{4} e^{2x}$
0		

(15)

$$\int \tan x \sec^3 x \, dx$$

a) $\frac{1}{3} \tan^3 x + c$ b) $\frac{1}{4} \sec^4 x + c$

c) $\frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + c$ d) $\frac{1}{3} \sec^3 x + c$

$$I = \int \tan x \sec x \cdot \sec^2 x \, dx$$: الحل

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x \, dx$

$$= \int \tan x \sec x \cdot u^2 \cdot du$$

$$= \frac{u^3}{3} + c \rightarrow \frac{\sec^3 x}{3} + c$$

$$\int \frac{5}{\sqrt{16-x^2}}\,dx \qquad (1$$

a) $5\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+c$ b) $\frac{5}{4}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+c$

c) $5\sin^{-1}\left(\frac{x}{16}\right)+c$ d) $\sqrt{5}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+c$

الحل :

$$\int \frac{5}{\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}}\,dx$$

$$= \int \frac{5}{4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\,dx \qquad \begin{cases} u = \frac{x}{4} \\ 4\,du = dx \end{cases}$$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{4\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= 5\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+c$$

$\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$ (10)

a) $\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + c$

b) $\frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + c$

c) $\frac{1}{5}\tan^5 x + c$

d) $\frac{1}{6}\tan^6 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x \, dx$

$dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$I = \int u^4 \cdot \sec^2 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x} = \frac{1}{5}\tan^5 x + c$

$\int \frac{x-5}{x^2-1} dx = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ (11)

a) $3\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + c$

b) $\ln|x^2-1| + c$

c) $3\ln|x+1| - 2\ln|x-1| + c$

d) $2\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + c$

$x - 5 =$

$A(x+1)$

$+B(x-1)$

$A = -2, \quad x = 1$

$B = 3 \quad x = -1$

(12) حدد اي معادلة تفاضلية غير قابلة للفصل

من بين

a) $y' = (3x+1)\cos y$

b) $y' = (3x+y)\cos y$

c) $y' = (3y+1)\cos x$

d) $y' = 2x\cos y - xy^3$

13) اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بصيغة صريحة

$y' = (x^2+1)y$

a) $\ln|y| = \frac{x^3}{3} + x + c$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 + x + c$

c) $y = ce^{x^3/3} + x$

d) $y = \frac{x^3}{e^3} + x + c$

$\frac{y'}{y} = x^2+1$

$\frac{dy}{y} = (x^2+1)\,dx$

$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + x + c$

$y = e^{\frac{x^3}{3}+x} \cdot e^c$

$y = C$

(15) اوجد حل مسألة القيمة الابتدائية IVP

$$y' = \frac{4y}{x+3}, \quad y(-2) = 1$$

بصيغة صريحة

a) $y = e^{4}(x+3)^{4}$

b) $y = (x+3)^{1/4}$

c) $y = 4\ln|x+3|$

d) $y = (x+3)^{4}$

الحل:

$$\frac{dy}{y} = \frac{4}{x+3}$$

$$\ln|y| = 4\ln|x+3| + c$$

$$\ln|1| = 4\ln|-2+3| + c$$

$$0 = c$$

$$\ln|y| = 4\ln|x+3|, \quad y = (x+3)^{4}$$

(16) على فرض ان ستنبت بكتيري كتوي في البداية على 400 خلية وبعد ساعة واحدة تضاعف عدد افراد المجتمع الى 800 حدد عدد افراد المجتمع بعد 3 ساعات

a) 2400 b) 3200

c) 1600 d) 2800

$$y' = ky \Rightarrow y = Ae^{kt}$$

$$y(0) = 400 \Rightarrow A = 400$$

$$y(1) = 800 = 400e^{k} \Rightarrow 2 = e^{k}$$

$$k = \ln(2) \Rightarrow y = 400e^{(\ln 2)t}$$

$$y(3) = 400e^{(\ln 2)(3)}$$

$$= 400e^{\ln 8} = 400 \times 8$$

$$= 3200$$

(17) وضع وعاء ماء درجته 93 C في غرفة درجة حرارتها 21 C بعد دقيقة واحدة برد الماء حتى وصلت درجة الحرارة الى 82 فحتى تصل درجة الحرارة الى 49 C

a) 4 b) 6

c) 7 d) 10

الحل : $y'(t) = K[y(t) - T_\alpha]$

وحلها $y(t) = Ae^{Kt} + T_\alpha$

$y(t) = Ae^{Kt} + 21$

$y(0) = 93 \Rightarrow 93 = A + 21 \;,\; A = 72$

$y(1) = 82 = 72e^{K} + 21 \Rightarrow 61 = 72 \cdot e^{K}$

$\frac{61}{72} = e^{K} \Rightarrow K = \ln\left(\frac{61}{72}\right)$

$49 = 72\, e^{\ln\left(\frac{61}{72}\right)t}$ ← الآلة حاسبة

$t =$

18) على فرض ان قيمة احد الاصول 400000 درهم وتناقص باستمرار بنسبة سنوية ثابتة 40% اوجد قيمة الاصل لعد 5 سنوات لاقرب درهم

a) 327492

b) 54134

c) 268128

d) 240000

$$V(t) = A e^{-0.4t}$$

$$V(0) = 400{,}000 = A$$

$$V(t) = 400000\, e^{-0.4t}$$

$$V(5) = 400000\, e^{-0.4(5)} =$$

آلة حاسبة

(19) اوجد

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

$x = 2\tan\theta, \quad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$

$$\int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}}$$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{2\sqrt{\sec^2\theta}} = \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c$$