الحجوم

المقطعية (التقطيع)

اولاً: مساحة المقطع معلوم $A(x)$

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

ثانياً: مساحة المقطع غير معلوم

(1) المقطع محدد بالتين $f(x) \ge g(x)$

(أ) مربع ، طول ضلعه s

$$s = f(x) - g(x)$$
$$A(x) = s^2$$

(ب) دائرة نصف قطرها r

$$r = \frac{f(x) - g(x)}{2}$$
$$A(x) = \pi r^2$$

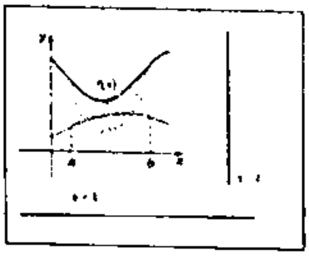
(ج) مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه l

$$l = f(x) - g(x)$$
$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

(2) المقطع محدد بشكل هندسي منتظم (مثل الهرم)

الدورانية

مهم



التكامل dx

الشريحة عمودية على محور الدوران

اقراص وحلقات

(1) الدوران حول محور السينات $y = 0$

$V = \pi \int_a^b r_o^2 - r_i^2 \quad dx$	$r_o = f(x)$ $r_i = g(x)$

(2) الدوران حول المحور $y = k$

$V = \pi \int_a^b r_o^2 - r_i^2 \, dx$	$r_o = f(x) - k$ $r_i = g(x) - k$

الشريحة توازي محور الدوران

اصداف

(1) الدوران حول محور الصادات $x = 0$

$V = 2\pi \int_a^b r\, h \quad dx$	$r = x$ $h = f(x) - g(x)$

(2) الدوران حول المحور $x = l$

$V = 2\pi \int_a^b r\, h \quad dx$	$r = l - x$ $h = f(x) - g(x)$

التكامل dy

الشريحة عمودية على محور الدوران

اقراص وحلقات

(1) الدوران حول محور الصادات $x = 0$

$V = \pi \int_c^d r_o^2 - r_i^2 \quad dy$	$r_o = f(y)$ $r_i = g(y)$

(2) الدوران حول المحور $x = l$

$V = \pi \int_c^d r_o^2 - r_i^2 \, dy$	$r_o = l - g(y)$ $r_i = l - f(y)$

الشريحة توازي محور الدوران

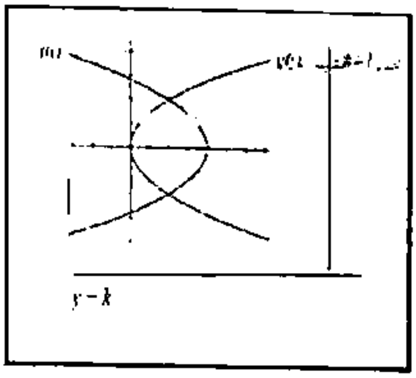
اصداف

(1) الدوران حول محور السينات $y = 0$

$V = 2\pi \int_c^d r\, h \quad dy$	$r = y$ $h = f(y) - g(y)$

(2) الدوران حول المحور $y = k$

$V = 2\pi \int_c^d r\, h \quad dy$	$r = y - k$ $h = f(y) - g(y)$



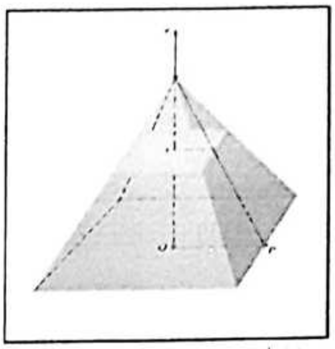
Scanned with CamScanner

اولاً : الحجوم باستخدام المقاطع العرضية (التقطيع او الشرائح)

الحالة الأولى : مساحة المقطع معلوم

اذا كانت مساحة المقطع العرضي لمجسم هي $A(x)$ حيث $a \le x \le b$ فان حجم المجسم يعطي بالتكامل

$$v = \int_a^b A(x)\, dx$$



(1) اوجد حجم المجسم الذي مقطعة العرضي $A(x) = 4x$ حيث $0 \le x \le 1$

$V = \int_0^1 A(x)\, dx$

$= \int_0^1 4x\, dx$

$= 2x^2 \Big]_0^1$

$= 2(1)^2 - 2(0)^2$

$= 2$ وحدة حجم

التكامل

التعويض بحدود التكامل

عوض في اول خطوة بالالة الحاسبة

(2) اوجد حجم المجسم الذي مقطعة العرضي $A(x) = x + 2$ حيث $-1 \le x \le 3$

$V = \int_{-1}^{3} A(x)\, dx$

$= \int_{-1}^{3} x + 2\ dx$

$= \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-1}^{3}$

$= \left[\frac{(3)^2}{2} + 2(3)\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right]$

$= 12$ وحدة حجم

(1) اوجد حجم المجسم الذي مقطعة العرضي $A(x)=\frac{3}{4}(4-x^2)$ حيث $-2\le x\le 2$

$$V = \int_{-2}^{2} A(x)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{2} \frac{3}{4}(4-x^2)\,dx$$
$$= \frac{3}{4}\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-2}^{2}$$
$$= \frac{3}{4}\left[\left(4(2)-\frac{(2)^3}{3}\right)-\left(4(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)\right]$$
$= 8$ وحدة حجم

(2) اوجد حجم المجسم الذي مقطعة العرضي $A(x)=10e^{0.01x}$ حيث $0\le x\le 10$

$$V = \int_{0}^{10} A(x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{10} 10e^{0.01x}\,dx$$
$$= \frac{10}{0.01}\int_{0}^{10} 0.01e^{0.01x}\,dx$$
$$= 1000e^{0.01x}\Big]_{0}^{10}$$
$$= \left[1000e^{0.01(10)}\right]-\left[1000e^{0.01(0)}\right]$$
$= 105.17$ وحدة حجم

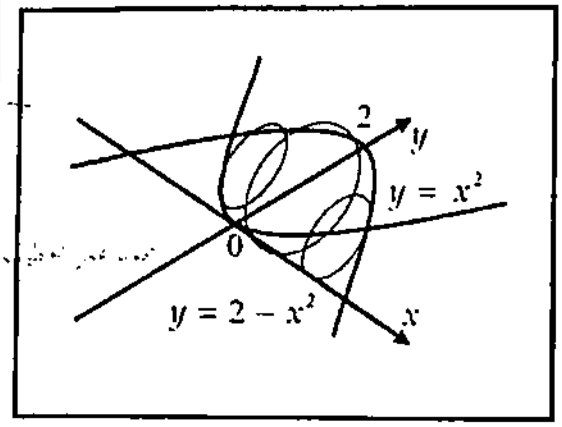
(3) اوجد حجم الهرم الذي مقطعة العرضي $A(z)=\frac{4}{25}(10-z)$ وارتفاعة 10 متر

$$V = \int_{0}^{10} A(x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{10} \frac{4}{25}(10-z)\,dz$$
$$= \frac{4}{25}\left(10z-\frac{z^2}{2}\right)\Big]_{0}^{10}$$
$$= \frac{4}{25}\left[\left(10(10)-\frac{(10)^2}{2}\right)-\left(10(0)-\frac{(0)^2}{2}\right)\right]$$
$= 8\ m^3$

الحالة الثانية: مساحة المقطع غير معلوم (محدود بدالتين)

اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$-1 \le x \le 1$ ، $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$



في الحالات التالية

$A = \pi r^2$

(أ) المقاطع عرضية دائرية متعامدة على محور x

$$r = \frac{f(x) - g(x)}{2} = \frac{2 - x^2 - x^2}{2} = 1 - x^2$$

$$A(x) = \pi r^2 = \pi(1 - x^2)^2$$

$$v = \int_a^b A(x)\,dx = \int \pi r^2\,dx$$

مساحة الدائرة

$$= \int_{-1}^{1} \pi(1 - x^2)^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi(1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left[\left((1) - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{(1)^5}{5}\right) - \left((-1) - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{16}{15}\pi$$

$A = S^2$

(ب) المقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور x

$$s = f(x) - g(x) = 2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2 = 2(1 - x^2)$$

$$A(x) = s^2 = 4(1 - x^2)^2$$

$$v = \int_a^b A(x)\,dx = \int s^2\,dx$$

مساحة مربع

$$= \int_{-1}^{1} 4(1 - x^2)^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 4(1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$

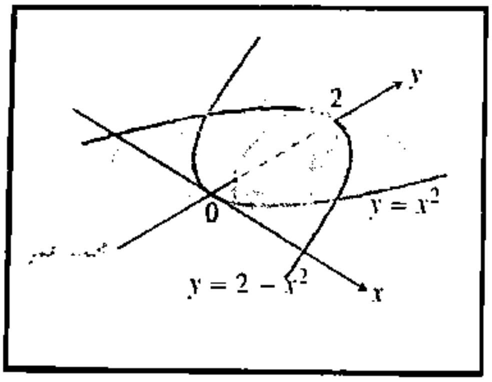
$$= 4\left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$= 4\left[\left((1) - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{(1)^5}{5}\right) - \left((-1) - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{64}{15}$$

اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ ، $-1 \le x \le 1$

في الحالات التالية



$\frac{1}{2}\pi r^2$

(أ) المقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على محور x

$$r = \frac{f(x) - g(x)}{2} = \frac{2 - x^2 - x^2}{2} = 1 - x^2$$

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi (1 - x^2)^2$$

نصف دائرة

$$v = \int_a^b A(x)\,dx = \int \frac{1}{2}\pi r^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\pi (1 - x^2)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\left((1) - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{(1)^5}{5}\right) - \left((-1) - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{8}{15}\pi$$

$A = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$

(ب) المقاطع عرضية مثلثة متساوية الاضلاع متعامدة على محور x

$$l = f(x) - g(x) = 2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2 = 2(1 - x^2)$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4(1 - x^2)^2$$

مثلث متساوي الاضلاع

$$v = \int_a^b A(x)\,dx = \int \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\,dx$$

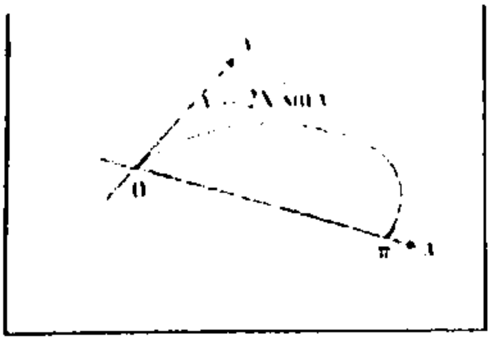
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} \times \cancel{4}(1 - x^2)^2 dx$$

$$= \sqrt{3}\int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \sqrt{3}\left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \sqrt{3}\left[\left((1) - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{(1)^5}{5}\right) - \left((-1) - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{15}$$



(1) اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة

بالدالتين $y=2\sqrt{\sin x}$ و $y=0$ ، $0\le x\le\pi$

والمقاطع العرضية هي مثلثات متساوية الاضلاع متعامدة

على محور x

$\ell = 2\sqrt{\sin x} - 0$

$\ell = 2\sqrt{\sin x}$

$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[2\sqrt{\sin x}\right]^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[4\sin x\right]$

$= \sqrt{3}\sin x$

$V = \int A(x)\,dx$

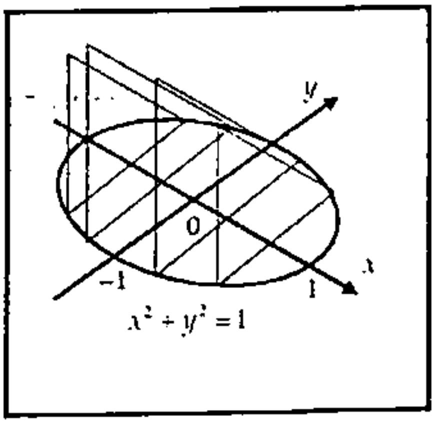
$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\,dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}(\cancel{4}\sin x)\,dx$

$= \int_0^{\pi} \sqrt{3}\sin x\,dx$

$= -\sqrt{3}\cos x\Big]_0^{\pi}$

$= \boxed{2\sqrt{3}}$



(2) اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة

بالدالتين $y=-\sqrt{1-x^2}$ و $y=\sqrt{1-x^2}$ ، $-1\le x\le 1$

والمقاطع العرضية هي مثلثات متساوية الاضلاع متعامدة

على محور x

$\ell = \left(\sqrt{1-x^2}\right) - \left(-\sqrt{1-x^2}\right)$

$\ell = 2\sqrt{1-x^2}$

$\ell^2 = 4(1-x^2)$

$V = \int A(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\,dx$

$= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}\left(\cancel{4}(1-x^2)\right)dx$

$= \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1-x^2)\,dx$

$= \sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$

$= \sqrt{3}\left[\left((1)-\frac{(1)^3}{3}\right) - \left((-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)\right]$

$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$

(1) اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y = e^{-2x}$ و $y = 0$ ، $0 \le x \le \ln 5$

والمقاطع العرضية هي هي مربعات متعامدة على محور x

$$S = (e^{-2x}) - (0)$$

$$= e^{-2x}$$

$$V = \int A(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 5} (e^{-2x})^2 dx$$

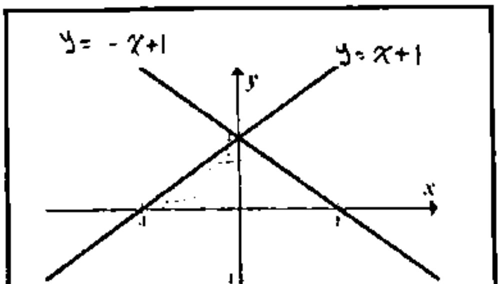
$$= \int_0^{\ln 5} e^{-4x}\, dx$$

$$= \frac{e^{-4x}}{-4} \Big]_0^{\ln 5}$$

$$= \left[\frac{e^{-4(\ln 5)}}{-4}\right] - \left[\frac{e^{-4(0)}}{-4}\right]$$

$$= \frac{156}{625}$$

(2) اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x + 1$ و $y = -x + 1$ ومحور السينات والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x



من التماثل

$$v = 2\int_{-1}^{0} A(x)\, dx = 2\int s^2\, dx$$

$$= 2\int_{-1}^{0} (x+1)^2\, dx \qquad \boxed{OR}$$

$$= 2\int_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1)\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0}$$

$$= 2\left[\left(\frac{(0)^3}{3} + (0)^2 + (0)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + (-1)\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$= 2\left[\frac{(x+1)^3}{1(3)}\right]_{-1}^{0}$$

$$= 2\left[\frac{(0+1)^3}{3} - \frac{(-1+1)^3}{3}\right]$$

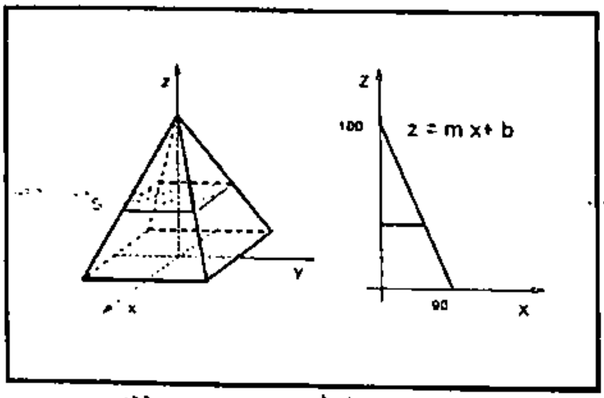
$$= 2/3$$

$$S = (x+1) - (0)$$

$$S^2 = (x+1)^2$$

ملاحظة :اذا كان السؤال اختيار من متعدد نستخدم قانون حجم الهرم وهو ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع

(1) اوجد حجم الهرم الذي قاعدتة مربعة الشكل وطول ضلع قاعدته 180 متر وارتفاعه 100 متر باستخدام التكامل



ملاحظة: يتشكل الهرم من تجميع مقاطع عرضية وهي مربعات في اتجاه المحور z لذلك يجب ان يكون المكامل dz ومساحة المقطع بدلالة z (الشرح على الصفحة المقابلة)

$$V = \int_0^{100} A(z)\, dz$$

المقطع باتجاه z لذلك لذلك يجب ان يكون التكامل dz

$$S = (2x)^2 = 4x^2$$

لكن يجب كتابة x بدلالة z من معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(90,0)$ و $(0,100)$

$$m = \frac{100-0}{0-90} = -\frac{10}{9}$$

$$z - 100 = -\frac{10}{9}(x - 0)$$

$$z - 100 = \frac{-10}{9}x$$

$$x = 90 - \frac{9}{10}z$$

$$= \int_0^{100} S^2\, dz$$

$$= \int_0^{100} (4x^2)\, dz$$

$$= \int_0^{100} 4\left(90 - \frac{9}{10}z\right)^2 dz$$

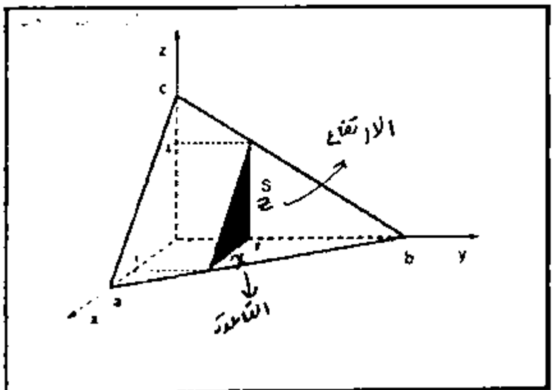
$$= 1080000$$

حل السؤال اذا بدك [هذا سؤال من خارج الكتاب على الاغلب مارح يجي عادي لو سقطت عليه]

(2) اثبت ان حجم المنشور المجاور هو

$$V = \frac{1}{6}abc$$

باستخدام التكامل



$$V = \int \underbrace{\tfrac{1}{2}\, x\, z}_{\text{مساحة المثلث}}\, dy$$

لان المقاطع العرضية (شكلها مثلث) مبنية فوق بعضها على محور y

$$A(y) = \frac{1}{2}x(y)z(y); \quad \overbrace{x(y) = -\frac{a}{b}y + a;}^{\text{جد العلاقة بين } y \text{ و } x} \quad \overbrace{z(y) = -\frac{c}{b}y + c.}^{\text{جد العلاقة بين } z \text{ و } y}$$

$$A(y) = \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{b}\right)(y-b)\left(-\frac{c}{b}\right)(y-b) = \frac{ac}{2b^2}(y-b)^2.$$

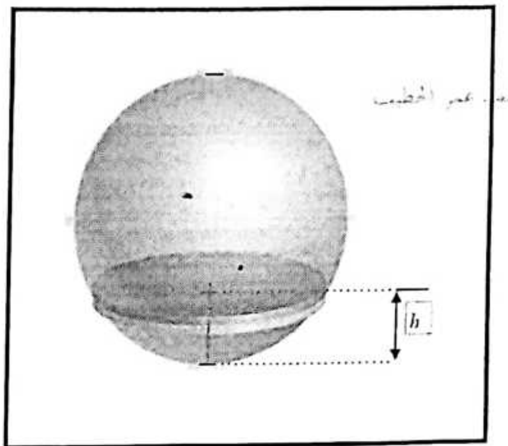
$$V = \frac{ac}{2b^2}\int_0^b (y-b)^2\, dy = \frac{ac}{2b^2}\left[\frac{(y-b)^3}{3}\Big|_0^b\right] \Rightarrow V = \frac{1}{6}abc.$$

درست السؤال] .

حلي السؤال ١٠١ بدل [هاد سؤال من خارج الكتاب مع اصعاب صعبة بدا يبقى مع حلابي يوما (

(1) اثبت ان حجم الماء في الخزان الكروي الذي نصف قطره $10m$ وارتفاعة h ،يعطى بالعلاقة

$$v(h) = 10\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$



مساحة المقطع عند اي ارتفاع هي

$$A(x) = \pi r^2$$

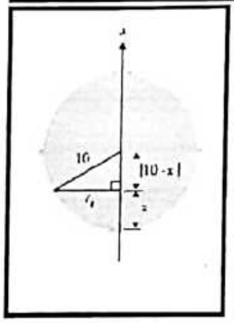
$$= \pi(20x - x^2)$$

$$v(h) = \int_0^h A(x)\, dx$$

$$\int_0^h \pi(20x - x^2)\, dx$$

$$\vdots$$

$$v(h) = 10\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$



من فيثاغورس

$$r^2 = 100 - (10 - x)^2$$

$$20x - x^2$$

هذه العلاقه بين نصف القطر والارتفاع عند اي مستوى

$\frac{dh}{dt} = ?$ $\qquad$ $\frac{dV}{dt} = 3$

(2) يتدفق الماء الى خزان كروي نصف قطره $10m$ بمعدل $3m^3 / \min$ ،اوجد معدل تغير ارتفاع الماء عندما يكون مستوى الماء عند نصف الخزان.

$$V = 10\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3$$

$$\frac{dV}{dt} = 20\pi h \cdot \frac{dh}{dt} - \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$3 = \pi(200 - 100)\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=10} = ??$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{100\pi} \ m/min.$$

ثانياً : الحجوم الدورانية : الاقراص (الحلقات) والاصداف

الحجوم الدورانية

الاقراص (الحلقات)	(الشريحة – الارتفاع –عمودية على محور الدوران)
الاصداف	(الشريحة –الارتفاع – توازي محور الدوران)

ملاحظة: عندما يكون حجم المجسم ناتج عن دوران مساحة المنطقة R المحصورة بدالة مع احد المحاور فاننا نستخدم **الاقراص** اما اذا كانت المساحة محصورة بدالتين فاننا نستخدم **الحلقات** .

الاقراص (الشريحة – الارتفاع –عمودي على محور الدوران)

ملاحظة (1) اذا كان الدوران حول محور السينات فان سمك القرص الدائري سيكون المكامل (dx)

(2) اذا كان الدوران حول محور الصادات فان سمك القرص الدائري سيكون المكامل (dy)

الحالة الأولى: الدوران حول محور السينات (x)

ان حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $f(x) \geq 0$ ومحور السينات والمستقيمين $x=a, x=b$ دورة كاملة حول محور السينات يعطى بالتكامل

$$v=\int_a^b A\,dx=$$

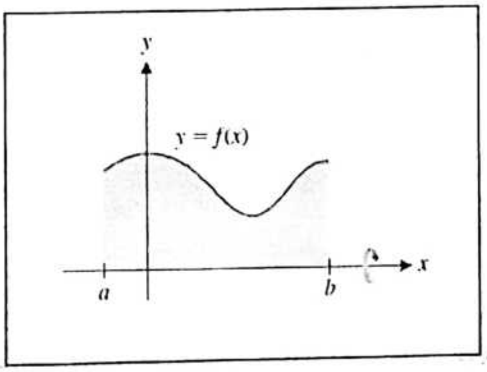
$$=\int_a^b \pi r^2\,dx$$

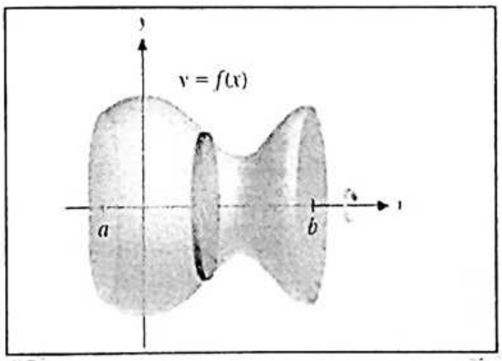
$$=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

مساحة القرص الدائري

$$A=\pi r^2=\pi y^2=\pi\left[f(x)\right]^2$$

سمك القرص الدائري dx





الحلقات (المجسمات المجوفة)

ان حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنيين $f(x), g(x)$ حيث $f(x) \ge g(x)$

ومحور السينات والمستقيمين $x = a , x = b$ دورة كاملة حول محور السينات يعطى بالتكامل

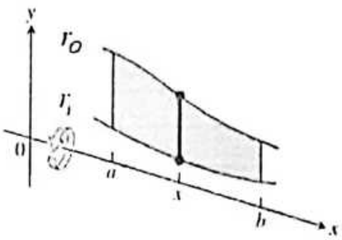
$$v = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx$$

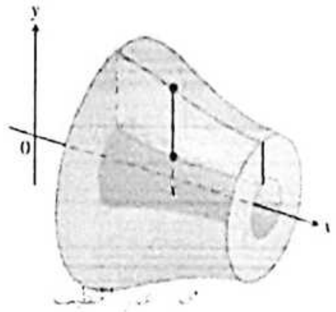
او

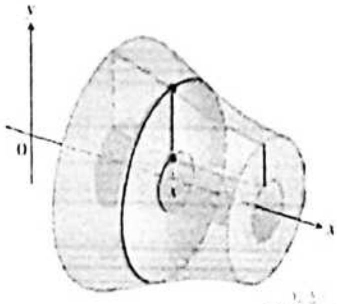
$$v = \pi \int_a^b (r_O{}^2 - r_I{}^2)\, dx$$

حيث r_O نصف قطر الدوران الخارجي (بعد الدالة الخارجية عن محور الدوران)

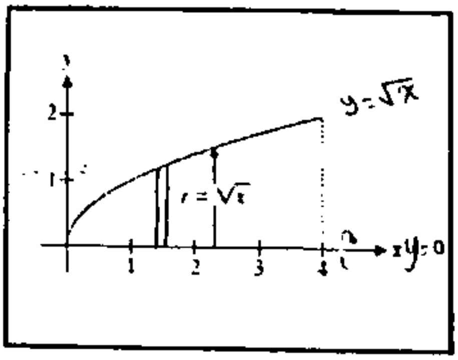
و r_I نصف قطر الدوران الداخلي (بعد الدالة الداخلية عن محور الدوران)

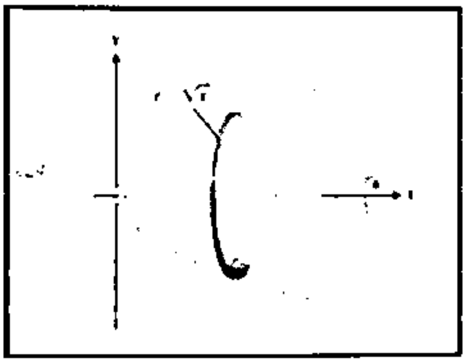






(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ دورة كاملة حول محور السينات بطريقة الحلقات / اقراص





الحلقات + محور الدوران (x) ← اجباري التكامل / الشريحة dx

ملاحظة مهمة قبل البدأ بالحل: لاحظ ان الشريحة (الارتفاع) تعامد محور الدوران ، فان حجم المجسم يكون بطريق الاقراص والمكامل (dx)

محور الدوران   الدالة الخارجية

$r_o=\sqrt{x}-0$ ← بُعد الدالة الخارجية عن محور الدوران

$r_i=0-0$ ← بُعد الدالة الداخلية عن محور الدوران

الدالة الداخلية بهاي الحالة تنطبق على محور الدوران

$$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2-(0)^2\,dx$$

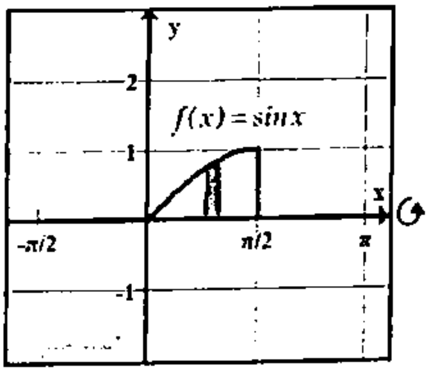
$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$=\pi\left[\frac{4^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right]$$

$$=8\pi$$

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالدالة $f(x)=\sin x$ ومحور السينات على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

دورة كاملة حول محور السينات بطريقة الحلقات



حلقات

الشريحة ⊥ محور الدوران

$r_o=\sin x-0$

$r_i=0$

$$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$$

$$=\pi\int\sin^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$$

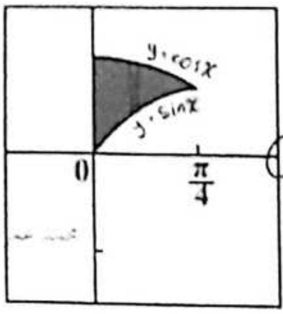
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

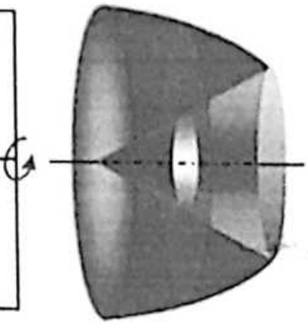
$$=\frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin(\pi)}{2}\right)-\left(0-\frac{\sin(0)}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0-0+0\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{4}$$

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالدالتين $y=\sin x$ و $y=\cos x$ ومحور الصادات على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$





دورة كاملة حول محور السينات
بطريقة الحلقات

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x - \sin^2 x \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin(0)}{2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$r_o = \cos x$

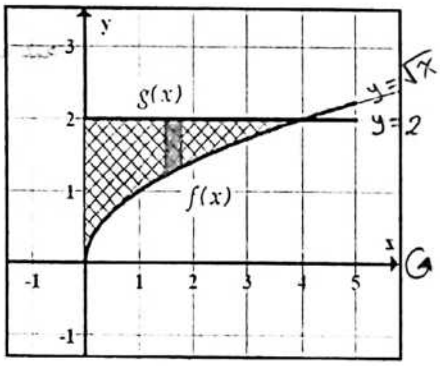
$r_i = \sin x$

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالتين $y=\sqrt{x}$ و والمستقيم $y=2$

ومحور الصادات على الفترة $[0,4]$

دورة كاملة حول محور السينات بطريقة الحلقات.



حلقات
كجهة الشريحة ⊥ محور الدوران
كـ الشريحة dx

$r_o = 2 - 0$

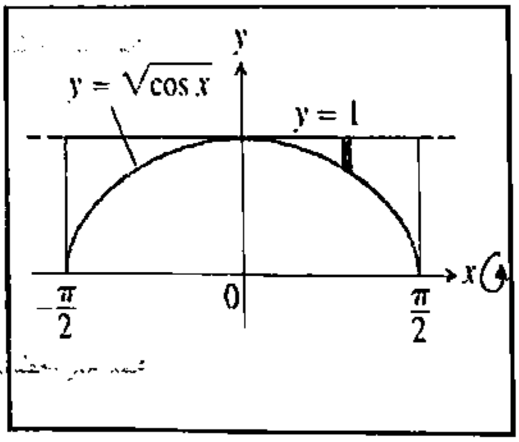
$r_i = \sqrt{x} - 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 4 - x \, dx$$

$$= \pi \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4$$

$$= \pi \left[\left(4(4) - \frac{(4)^2}{2}\right) - \left(4(0) - \frac{(0)^2}{2}\right) \right] = 8\pi$$



(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالة $y=\sqrt{\cos x}$ والمستقيم $y=1$

على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

دورة كاملة حول محور السينات بطريقة الحلقات/ أقراص.

حلقات

الشريحة ⊥ محور الدوران

التكامل dx

$r_o = 1$

$r_i = \sqrt{\cos x}$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos x \, dx$

أو

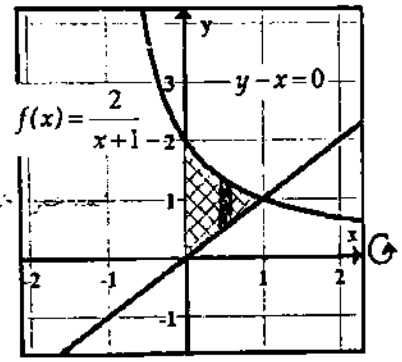
$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos x \, dx$ ، من التماثل

$= 2\pi \left[x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\pi \left[\left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) - (0 - \sin 0) \right]$

$= 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

$= \pi^2 - 2\pi \simeq 3.586$



(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالة $y=\frac{2}{x+1}$ والمستقيم $y=x$

ومحور الصادات على الفترة $[0,1]$ دورة كاملة حول محور السينات

بطريقة الحلقات

الحلقات

الشريحة ⊥ محور الدوران

العشريحة dx

$r_o = \frac{2}{x+1}$

$r_i = x$

$u = x+1$

$dx = du$

$x=1 \rightarrow u=2$

$x=0 \rightarrow u=1$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 - x^2 \, dx$

$= \pi \int_0^1 \frac{4}{(x+1)^2} \, dx - \pi \int_0^1 x^2 \, dx$

$= 4\pi \int_1^2 \frac{1}{u^2} \, du - \pi \int_0^1 x^2 \, dx$

$= 4\pi \left[-\frac{1}{u}\right]_1^2 - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= 4\pi \left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] - \pi\left[\frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right]$

$= 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{5\pi}{3}$

الحالة الثانية: الدوران حول محور الصادات (y)

ان حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $g(y) \ge 0$ ومحور الصادات والمستقمين $y = c, y = d$ دورة كاملة حول محور الصادات يعطى بالتكامل

$$v = \int_c^d A\ dx =$$

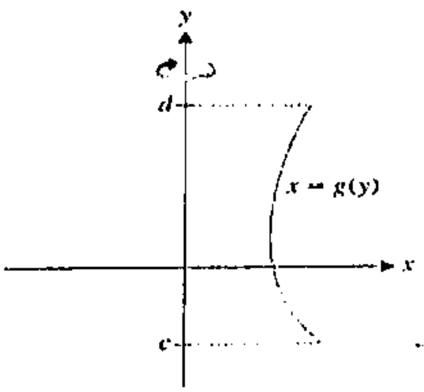
$$= \int_c^d \pi r^2\ dx$$

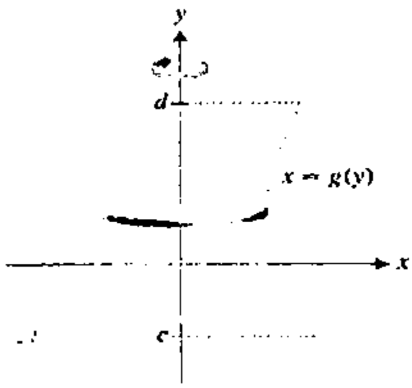
$$= \pi \int_c^d [g(y)]^2\ dy$$

مساحة القرص الدائري

$$A = \pi r^2 = \pi x^2 = \pi [g(y)]^2$$

سمك القرص الدائري dy





ان حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بمنحنى الدالتين $g(y)$ و $f(y)$ حيث $f(y) \ge g(y)$ والمستقمين $y = c, y = d$ دورة كاملة حول محور الصادات هو

$$v = \int_c^d A\ dx =$$

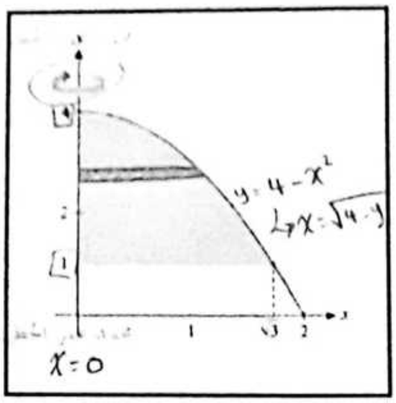
$$= \pi \int_c^d r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_c^d [f(y)]^2 - [g(y)]^2\ dy$$

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = 4 - x^2$ والمستقيم $x = 0$ والمستقيم و $y = 1$

دورة كاملة حول محور الصادات باكلقات



الحلقات

كم الشريحة ⊥ محور الدوران

كم الشريحة dy

$r_o = \sqrt{4-y} - 0$

$r_i = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

$= \pi \int_1^4 4 - y \, dy$

على المنطقة التظليل مهم

من محور y؟

$= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_1^4$

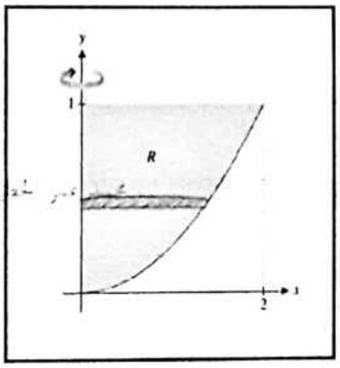
$= \pi \left[\left(4(4) - \frac{(4)^2}{2}\right) - \left(4(1) - \frac{(1)^2}{2}\right) \right]$

$= \frac{9}{2} \pi$

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y = 1$ و المستقيم $x = 0$

حول محور الصادات دورة كاملة باكلقات



$y = \frac{1}{4} x^2$

$4y = x^2$

$x = \sqrt{4y}$

الحلقات

كم الشريحة ⊥ محور الدوران

كم الشريحة dy

$r_o = \sqrt{4y}$

$r_i = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

$= \pi \int_0^1 4y \, dy$

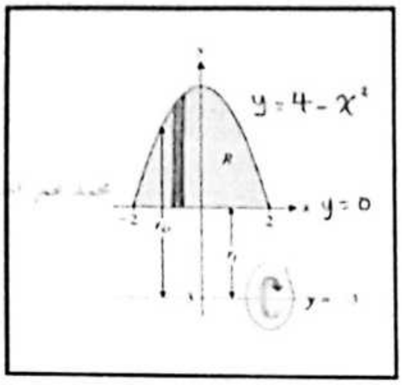
$= \pi \left[\frac{4y^2}{2} \right]_0^1$

$= \pi \left[2(1)^2 - 2(0)^2 \right]$

$= 2\pi$

الحالة الثالثة : الدوران حول مستقيم افقي او راسي

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=4-x^2$ ومحور السينات دورة كاملة حول المستقيم $y=-3$ بطريقة الحلقات



حلقات

← الشريحة ⊥ محور الدوران

← الشريحة dx

$r_o = \overbrace{4-x^2}^{\text{الدالة الخارجية}} - \overbrace{(-3)}^{\text{محور الدوران}}$

$= 7-x^2$

$r_i = \overbrace{0}^{\text{الدالة الداخلية}} - \overbrace{(-3)}^{\text{محور الدوران}}$

$= 3$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_{-2}^{2} (7-x^2)^2 - 3^2 \, dx$

$= \pi \int_{-2}^{2} (49-14x^2+x^4) - 9 \, dx$

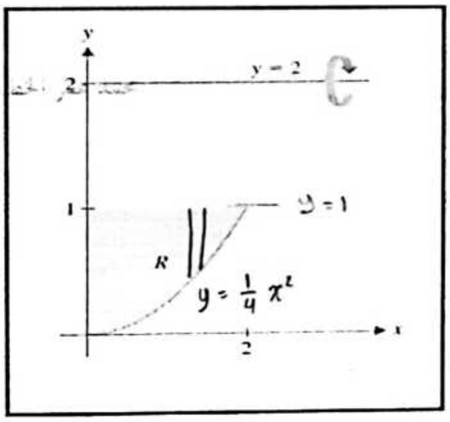
$= \pi \int_{-2}^{2} 40 - 14x^2 + x^4 \, dx$

$= \pi \left[40x - \frac{14x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{2}$

$= \pi \left[\left(40(2) - \frac{14(2)^3}{3} + \frac{(2)^5}{5}\right) - \left(40(-2) - \frac{14(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^5}{5}\right) \right]$

$= \frac{584}{5}\pi$

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y=1$ و محور الصادات دورة كاملة حول المستقيم $y=2$ بالحلقات



حلقات

← الشريحة ⊥ محور الدوران

← الشريحة dx

$r_o = \cancel{\frac{1}{4}x^2 - 2}$ خطأ

$= 2 - \frac{1}{4}x^2$ (لكي نضمن انها موجبة لانها مسافة وما بصير تكون سالبة)

← الدالة الخارجية هي الابعد عن محور الدوران

$r_i = 2 - 1 = 1$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^2 (2 - \frac{1}{4}x^2)^2 - 1 \, dx$

$= \pi \int_0^2 (4 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}) - 1 \, dx$

$= \pi \left[3x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{x^5}{5} \right]_0^2$

$= \pi \left[\left(3(2) - \frac{(2)^3}{6} + \frac{(2)^5}{80}\right) - \left(3(0) - \frac{(0)^3}{6} + \frac{(0)^5}{80}\right) \right]$

$= \frac{76}{15}\pi$