

فيزياء الثاني عشر متقدم
الأجسام الجاسئة

www.almanahj.com

تفوق

اجتهد

ادرس

2018

MR: Mohamed atef

050 3136836

مركز الكتلة ومركز الثقل

هي نقطة علي الجسم تتركز فيها كتلة الجسم كله و تتركز عندها قوة الجاذبية التي تؤثر في الجسم كله

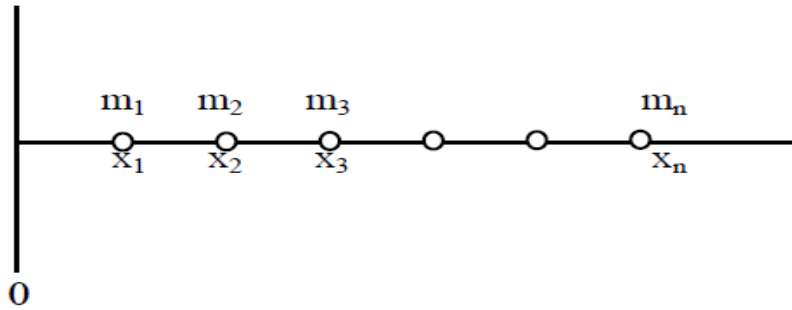
ملاحظة :- إذا كانت الكثافة الكتليه للجسم ثابتة فإن مركز الكتلة يكون في المركز الهندسي للجسم

مركز الكتلة لنظام يتألف من مجموعة من الجسيمات

افترض أن نظاما يتألف من عدد n من الجسيمات تقع جميعها على المحور x كما في الشكل (17). نعرّف مركز الكتلة لهذا النظام على المحور x (x_{cm}) كما يلي:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i \dots\dots\dots$$

www.almanahj.com (الشكل (17))



حيث x_i هو بعد الكتلة m_i عن نقطة الأصل و M هو مجموع الكتل جميعها.

ملاحظات :- 1- إذا كان الجسمان متماثلان (متساويان في الكتلة) يكون مركز الكتلة المشترك لهذا النظام يوجد في منتصف المسافة بين مركزي الكتلة

2- إذا كانت كتلة أحد الجسمين أكبر من الآخر يكون موقع مركز الكتلة أقرب لأكبر كتل

3- يتركز موقع مركز الكتلة علي الخط الواصل بين الجسمين

$$\sum m_i = M$$

أما إذا كانت الجسيمات موزعة على المحور y أو المحور z فنستطيع أن نكتب موقع مركز الكتلة كما يلي:

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \dots\dots\dots$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \dots\dots\dots$$

وبما أن يمكن تحديد نقطة في الفراغ بدلالة المتجه \vec{r} حيث أن:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

فإنه يمكن تحديد موقع مركز الكتلة بمتجه \vec{r}_{cm} كما يلي:

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_i m_i (x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k})$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \dots\dots\dots$$

والمثال التالي يوضح المقصود بالشرح السابق.

◀◀ مثال

حدد موقع مركز الكتلة لنظام يتألف من ثلاثة جسيمات نقطية موزعة في المستوى xy كما في الشكل (18).

الحل:

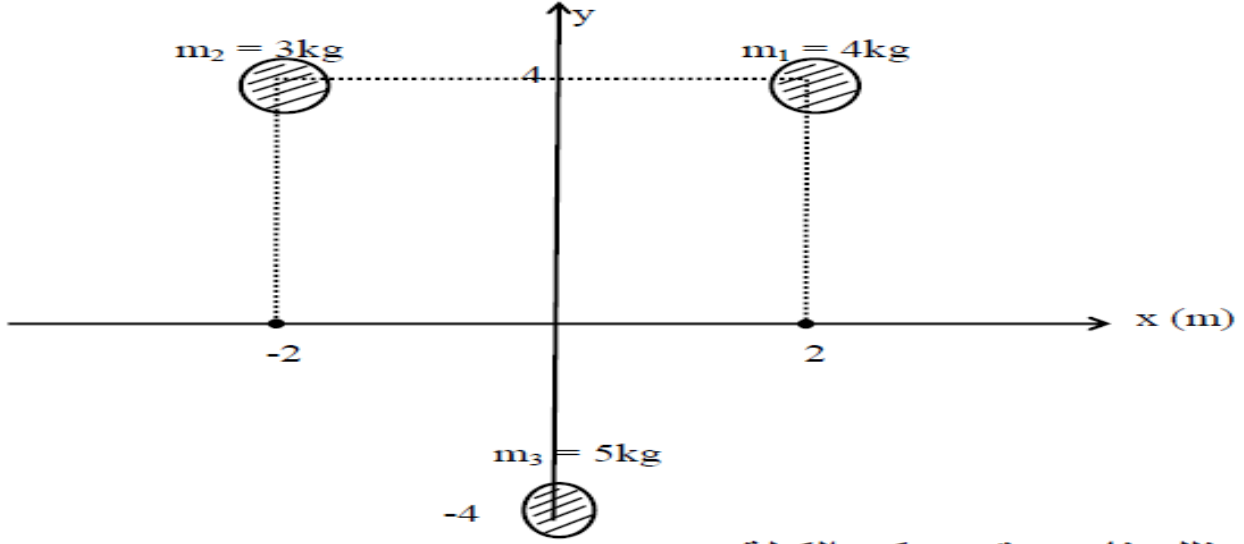
لتحديد مركز الكتلة نطبق العلاقات: 25 و 26

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{cm} = \frac{4(2) + 3(-2) + 5(0)}{4 + 3 + 5} = 0.17 \text{ m}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4(4) + 3(4) + 5(-4)}{4 + 3 + 5} = 0.67 \text{ m}$$

الشكل (18)



وبذلك فإن موقع مركز الكتلة هو:

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm} \hat{i} + y_{cm} \hat{j}$$

$$= (0.17 \hat{i} + 0.67 \hat{j}) \text{ m}$$

www.almanahj.com

تبلغ كتلة الأرض $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ ، وتبلغ كتلة القمر $7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$ ، ويدور القمر حول الأرض على مسافة تبعد $384,000 \text{ km}$ ، أي أن مركز القمر يبعد مسافة مقدارها $384,000 \text{ km}$ عن مركز الأرض. كما هو موضح في الشكل 8.3a.

المسألة

ما المسافة التي يبعدها مركز كتلة نظام الأرض والقمر عن مركز الأرض؟

$$X = \frac{x_E m_E + x_M m_M}{m_E + m_M}$$

$$X = \frac{x_M m_M}{m_E + m_M} = \frac{(384,000 \text{ km})(7.36 \times 10^{22} \text{ kg})}{5.97 \times 10^{24} \text{ kg} + 7.36 \times 10^{22} \text{ kg}} = 4676.418 \text{ km.}$$

يكون موقع مركز الكتلة نقطة ثابتة بالنسبة إلى الجسم أو نظام الأجسام ولا يعتمد على موقع النظام الإحداثي المستخدم لتوضيحه. عند تحريك مركز الكتلة بمقدار \vec{r}_0 وسينتج لنا

موضع مركز كتلة جديد. $R + R_0$ باستخدام المعادلة نجد أن

$$\vec{R} + \vec{R}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (\vec{r}_0 + \vec{r}_i) m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \vec{r}_0 + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i$$

لذا. فإن $\vec{R}_0 = \vec{r}_0$ ولا يتغير موقع مركز الكتلة بالنسبة إلى النظام.

كمية حركة مركز الكتلة

$$\vec{V} \equiv \frac{d}{dt} \vec{R} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i.$$

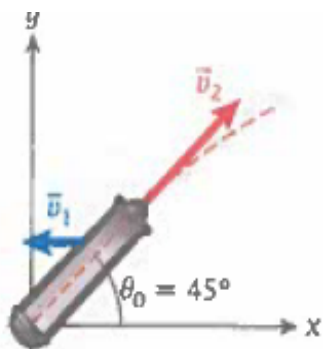
$$\vec{P} = M\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad \frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} (M\vec{V}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}_{\text{net}},$$

www.almanahj.com

الارتداد

عند إطلاق رصاصة من بندقية، فإن البندقية توتد؛ أي أنها تتحرك في الاتجاه المعاكس للاتجاه الذي أطلقت فيه الرصاصة. كما يتضح هذا المبدأ الفيزيائي نفسه عندما تكون جالساً في قارب ساكن وتلقي جسماً خارج القارب، حيث يتحرك القارب في الاتجاه المعاكس للاتجاه الذي ألقيت فيه الجسم. كما تشعر بالتأثير نفسه عندما تكون واقفاً على لوح نزلج ثم تلقي كرة (ثقيلة نوعاً ما). يُعرف تأثير الارتداد المعروف هذا بنتيجة القانون الثالث لنيوتن.



ارتداد المدفع

مسألة محلولة 8.2

أطلقت قذيفة مدفع كتلتها 13.7 kg نحو هدف يبعد 2.30 km عن مدفع كتلته 249.0 kg. وكان أقصى مدى للمدفع هو المسافة 2.30 km. كما كان الهدف والمدفع عند مستوى ارتفاع واحد. وكان المدفع مركباً على سطح أفقي.

المسألة

ما السرعة المتجهة التي سيرتد بها المدفع؟

www.almanahj.com

المسألة

ما مقدار القوة، F ، التي تؤثر في رجل إطفاء يحمل خرطوم إطفاء حريق يُخرج 360 L من الماء في الدقيقة بسرعة ابتدائية $v = 39.0 \text{ m/s}$ ، كما هو مبين في الشكل 8.6؟

لنقم أولاً بإيجاد الكتلة الكلية للماء الخارج في الدقيقة. نبلغ الكثافة الكتلية للماء في الدقيقة من خلال،
ولأن $\rho = 1000. \text{ kg/m}^3 = 1,000 \text{ kg/L}$ ، ولأن $\Delta V = 360 \text{ L}$ ، نحصل على الكتلة الكلية للماء الخارج

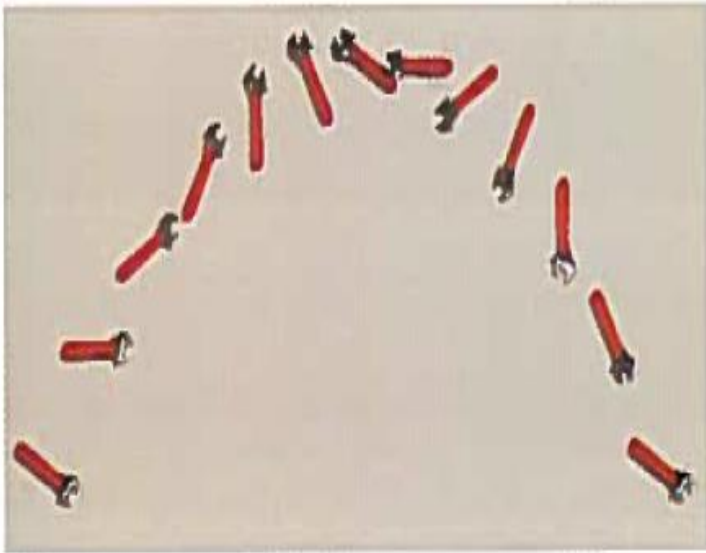
$$\Delta m = \Delta V \rho = (360. \text{ L})(1,000 \text{ kg/L}) = 360. \text{ kg}.$$

لذا، تكون كمية حركة الماء $\Delta p = v \Delta m$ ، ومن تعريف متوسط القوة، $F = \Delta p / \Delta t$ ، نجد أن

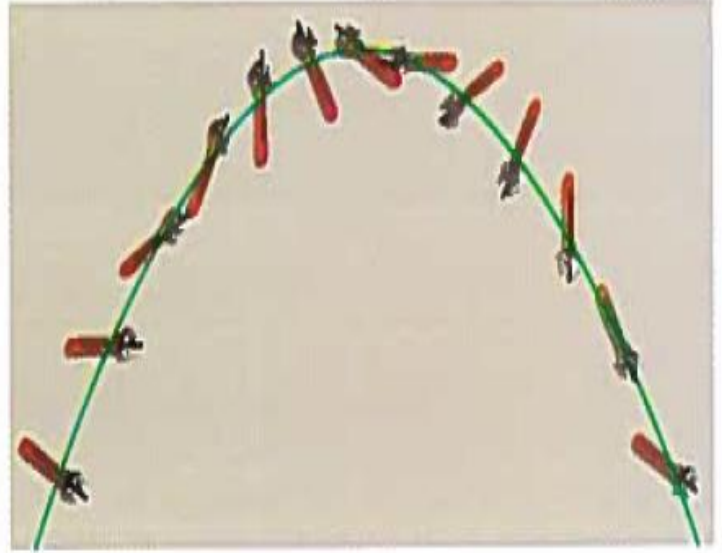
$$F = \frac{v \Delta m}{\Delta t} = \frac{(39.0 \text{ m/s})(360. \text{ kg})}{60 \text{ s}} = 234 \text{ N}.$$



الحركة العامة لمركز الكتلة



(a)



(b)

الشكل 8.8 (a) مجموعة من الصور اللفظية تأخذ عن الخطوات متعددة لطعام رطل لحظة القائه في الهواء. (b) مجموعة الصور نفسها في الجزء (a). لكن مع تراكب مسار القطع المكافئ لحركة مركز الكتلة.

8.39 • يمكن خرطوم إطفاء حريق قطره 4.00 cm رش الماء بسرعة متجهة مقدارها 10.0 m/s. لاستمرار تدفق الماء من الخرطوم بشكل أفقي، ما مقدار القوة الأفقية التي يجب أن يبذلها رجل الإطفاء على الخرطوم ليبقى ثابتاً؟

$$\frac{dV_w}{dt} = Av = \pi r^2 v.$$

With $\rho_w = m/V_w$, $\frac{dm}{dt} = \rho_w \frac{dV_w}{dt} = \rho_w \pi r^2 v$. Now, by Newton's third law, $\vec{F}_f = -\vec{F}_{\text{thrust}}$, so

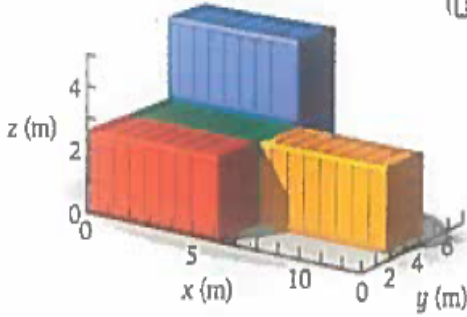
$$\vec{F}_f = \vec{v}_c \frac{dm}{dt} = \vec{v}_c \rho_w \pi r^2 v. \text{ Since } v_c \text{ is in fact } v, F_f = \rho_w \pi r^2 v^2.$$

$$F_f = \pi (1000 \text{ kg/m}^3) (0.0200 \text{ m})^2 (10.0 \text{ m/s})^2 = 125.7 \text{ N}$$

حاويات الشحن

مثال 8.1

تأتي حاويات الشحنات الكبيرة، التي يمكن نقلها بالشاحنات أو القطارات أو السفن، بأحجام قياسية. من أكثر الحاويات شيوعًا من حيث الحجم الحاوية التي مساحتها 20' وفقًا للمعيار الدولي ISO، والتي يبلغ طولها 6.1 m وعرضها 2.4 m وارتفاعها 2.6 m. ويُسمح بأن تكون كتلة هذه الحاوية (بما تحويه طبيعيًا) ما يصل إلى 30,400 kg.



الشكل 8.4 حاويات شحن مرتبة على ظهر سفينة حاويات.

المسألة

ترتكز حاويات الشحن الخمس الموضحة في الشكل 8.4 على سطح سفينة حاويات، وتبلغ كتلة كل حاوية 9,000 kg. باستثناء الحاوية الحمراء التي تبلغ كتلتها 18,000 kg. إذا افترضنا أن لكل حاوية مركز كتلة في مركزها الهندسي، فما إحداثي x وإحداثي y لمركز الكتلة المشترك بين الحاويات؟ استخدم النظام الإحداثي المبين في الشكل لتوضيح موقع مركز الكتلة هذا.

الحل

نحتاج إلى حساب المركبات الديكارتية الفردية لمركز الكتلة، لذا سنستخدم المعادلة 8.5. ويبدو أنه ليس ثمة طريقة مختصرة يمكننا استخدامها.

لنسمّ طول كل حاوية ℓ (6.1 m) وعرض كل حاوية w (2.4 m) وكتلة الحاوية الخضراء m_0 (9,000 kg). عندئذٍ تكون كتلة الحاوية الحمراء $2m_0$ وتكون كتلة كل الحاويات الأخرى هي m_0 . أولاً، نحتاج إلى حساب الكتلة المجمعة M . وفقًا للمعادلة 8.4، فإن

$$\begin{aligned} M &= m_{\text{red}} + m_{\text{green}} + m_{\text{orange}} + m_{\text{blue}} + m_{\text{purple}} \\ &= 2m_0 + m_0 + m_0 + m_0 + m_0 \\ &= 6m_0. \end{aligned}$$

بالنسبة إلى الإحداثي x لمركز الكتلة المشترك. نجد أنّ

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_{\text{red}}m_{\text{red}} + x_{\text{green}}m_{\text{green}} + x_{\text{orange}}m_{\text{orange}} + x_{\text{blue}}m_{\text{blue}} + x_{\text{purple}}m_{\text{purple}}}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\ell 2m_0 + \frac{1}{2}\ell m_0 + \frac{3}{2}\ell m_0 + \frac{1}{2}\ell m_0 + \frac{1}{2}\ell m_0}{6m_0} \\ &= \frac{\ell(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{6} \\ &= \frac{2}{3}\ell = 4.1 \text{ m}. \end{aligned}$$

في الخطوة الأخيرة، عوضنا بالقيمة 6.1 m عن ℓ . بالطريقة نفسها، يمكننا حساب الإحداثي y .

$$\begin{aligned} Y &= \frac{y_{\text{red}}m_{\text{red}} + y_{\text{green}}m_{\text{green}} + y_{\text{orange}}m_{\text{orange}} + y_{\text{blue}}m_{\text{blue}} + y_{\text{purple}}m_{\text{purple}}}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{2}w 2m_0 + \frac{3}{2}w m_0 + \frac{3}{2}w m_0 + \frac{5}{2}w m_0 + \frac{5}{2}w m_0}{6m_0} \\ &= \frac{w(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2})}{6} \\ &= \frac{3}{2}w = 3.6 \text{ m}. \end{aligned}$$

$$M \vec{v}_{cm} = \sum_i \vec{p}_i = p_1 + p_2 + \dots$$

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

كمية التحرك الخطي الكلي لمجموعة أجسام يساوي
حاصل ضرب مجموع الكتل بسرعة مركز كتلتها

$$\vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{p} = \sum_i p_i$$

أي أن محصلة القوى الخارجية (\vec{F}_{ext}) المؤثرة على النظام تساوي نسبة التغير
في كمية التحرك الخطي الكلي إلى الزمن.

◀ مثال

نظام يتكون من كتلتين، الكتل الأولى $m_1 = 2\text{kg}$ والكتلة الثانية $m_2 = 3\text{kg}$ ، إذا
كانت مواقعهما كدالة في الزمن هي:

$$\vec{r}_1 = 5t^2 \hat{i} - 10t \hat{j} \text{ m}, \quad \vec{r}_2 = 5\hat{i} - 5t^2 \hat{j} \text{ m}$$

www.almanahj.com

أحسب:

- أ. موضع مركز الكتلة. ب. سرعة مركز الكتلة. ج. تسارع مركز الكتلة.
د. محصلة القوى الخارجية.

الحل:

أ.
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{2(5t^2 \hat{i} - 10t \hat{j}) + 3(5\hat{i} - 5t^2 \hat{j})}{2 + 3} = ((2t^2 + 3)\hat{i} - (2t + 3t^2)) \hat{j} \text{ m}$$

ب.
$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = (4t \hat{i} - (6t + 2) \hat{j}) \text{ m/s}$$

ج. تسارع مركز الكتلة:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = (4\hat{i} - 6\hat{j}) \text{ m/s}^2$$

د.
$$\vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{cm} = (2 + 3)(4\hat{i} - 6\hat{j})$$

$$= (20\hat{i} - 30\hat{j}) \text{ N}$$

1. أوجد موضع مركز الكتلة لثلاث جسيمات نقطية $m_1 = 2\text{kg}$ ،
 $m_2 = 3\text{kg}$
 $m_3 = 5\text{kg}$ وإحداثياتها على الترتيب هي $(2, -1)$ ، $(-3, -2)$ ، $(1, 1)$.
2.

www.almanahj.com

مراجعة المفاهيم 8.1

في الحالة الموضحة في الشكل 8.2. ما
المقادير النسبية للكتلتين m_1 و m_2 ؟

$$m_1 < m_2 \text{ (a)}$$

$$m_1 > m_2 \text{ (b)}$$

$$m_1 = m_2 \text{ (c)}$$

(d) لا يمكن تحديد أي الكتلتين أكبر استناداً
إلى المعلومات المتوفرة في الشكل فقط.

مراجعة المفاهيم 8.2

زجاجة أسطوانية لتوابل السلطة
المصنوعة من الزيت والخل. نصفها
من الخل (بكتافة كتلية 1.01 g/cm^3)
والنصف الآخر من الزيت (بكتافة كتلية
 0.910 g/cm^3) موضوعة على طاولة.
في البداية، كان الزيت منفصلاً عن الخل.
حيث كان يطفو فوق الخل. فترجت
الزجاجة حتى اختلط الزيت بالخل تمامًا
ثم وضعت مرة أخرى على الطاولة.
ما مقدار تأثير ارتفاع مركز كتلة توابل
السلطة نتيجة للخلط؟

(a) أعلى.

(b) أقل.

(c) عند نفس الارتفاع.

(d) لا تتوفر معطيات كافية للإجابة عن
هذا السؤال.

مراجعة المفاهيم 8.3

يستخدم خرطوم إطفاء الحريق
في المثال 8.2 لرش رغوة لإطفاء الحرائق
(تبلغ كثافتها الكتلية نصف الكثافة
الكتلية للماء) بمعدل التدفق نفسه.
وهو 360 L/min . وبالسرع الابتدائية
نفسها. وهي 39.0 m/s . يكون مقدار
القوة المبذولة على رجل الإطفاء الذي
يحمل الخرطوم في هذه الحالة

(a) أربعة أضعاف القوة التي تم إيجادها
في المثال 8.2.

(b) ضعف القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

(c) مساوياً لمقدار القوة التي تم إيجادها
في المثال 8.2.

(d) نصف القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

(e) ربع القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

حركة الصاروخ

1- مبني علي فكرة **الارتداد** حيث يكتسب الصاروخ دفعه الأمامي بإخراج الوقود المستهلك من الجزء الخلفي وفقا لقانون حفظ كمية الحركة

2- التغير في **كمية الحركة** بسبب تغير **الكتلة**

3- بعد اطلاق القذيفة **تقل** كتلة الصاروخ بمقدار $m_0 - \Delta m$

ولا **يغير** إطلاق القذيفة من **كمية حركة مركز الكتلة** النظام (الصاروخ والقذيفة)

$$p_c = v_c \Delta m, \quad \text{كمية حركة القذيفة}$$

$$p_r = (m_0 - \Delta m) v_1, \quad \text{كمية حركة الصاروخ}$$

$$p_r + p_c = 0$$

$$(m_0 - \Delta m) v_1 + v_c \Delta m = 0.$$

$$\Delta v_n = - \frac{v_c \Delta m}{m_0 - n \Delta m} \quad \text{التغير في سرعة الصاروخ بعد إطلاق القذائف}$$

ومكذا. تكون معادلة إيجاد السرعة المتجهة للصاروخ بعد إطلاق عدد n من القذائف هي

$$v_n = v_{n-1} + \Delta v_n$$

مراجعة المفاهيم 8.4

إذا تضاعفت الحمولة الصافية لسفينة الغضاء الواردة في المثال 8.3 من 50,000 kg إلى 100,000 kg. فسكون السرعة النهائية التي تصل إليها سفينة الغضاء

(a) مساوية للسرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3.

(b) أقل قليلاً من السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3 لكن أكثر من نصفها.

(c) أعلى قليلاً من السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3.

(d) نصف السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3.

(e) أقل من نصف السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3.

$$\Delta v = - \frac{v_c \Delta m}{m} \quad ; \quad \frac{\Delta v}{\Delta m} = - \frac{v_c}{m} \quad ; \quad \frac{dv}{dm} = - \frac{v_c}{m}$$

$$v(m) = - v_c \int_{m_0}^m \frac{1}{m'} dm' = - v_c \ln m' \Big|_{m_0}^m = v_c \ln \left(\frac{m_0}{m} \right)$$

$$\ln(a/b) = \ln a - \ln b \quad ; \quad v_f = v_c \ln (m_0/m_f) \quad ; \quad v_i = v_c \ln (m_0/m_i)$$

الفرق بين السرعة النهائية والبتدائية للصاروخ

$$v_f - v_i = v_c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) - v_c \ln \left(\frac{m_0}{m_i} \right) = v_c \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right)$$



يتضمن أحد المشروعات المقترحة لإرسال رواد الفضاء إلى المريخ تجميع مركبة فضائية في مدار حول الأرض. بحيث لا تضطر المركبة الفضائية إلى التغلب على مقدار كبير من الجاذبية الأرضية عند إطلاقها. افترض أن الحمولة الصافية لهذه المركبة الفضائية تبلغ $50,000 \text{ kg}$. وتحمل $2,000,000 \text{ kg}$ من الوقود وتُخرج الوقود المستهلك بسرعة 23.5 km/s . (تنتج الأنواع الحالية من الوقود المستهلك الكيميائي للصواريخ سرعة قصوى تبلغ 5 km/s تقريبًا، لكن من المتوقع أن يُنتج الدفع الصاروخي الكهرومغناطيسي سرعة تبلغ 40 km/s تقريبًا).

المسألة

ما السرعة النهائية التي يمكن أن تصل إليها هذه المركبة الفضائية بالنسبة إلى سرعتها المتجهة الابتدائية في مدارها حول الأرض؟

$$v_f - v_i = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = (23.5 \text{ km/s}) \ln\left(\frac{2,050,000 \text{ kg}}{50,000 \text{ kg}}\right) = (23.5 \text{ km/s})(\ln 41) = 87.3 \text{ km/s}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

وإذا لم تؤثر أي قوة خارجية في الجسم ($\vec{F}_{\text{net}} = 0$)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v} \frac{dm}{dt} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = -\vec{v}_c \frac{dm}{dt}$$

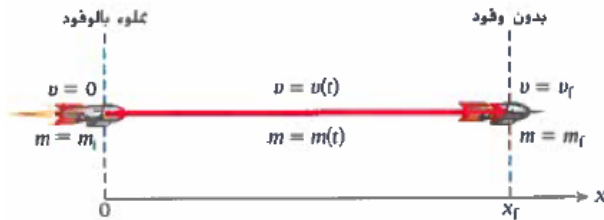
دفع الصاروخ وتُقاس بوحدة النيوتن لأنها قوة:

$$\vec{F}_{\text{thrust}} = -\vec{v}_c \frac{dm}{dt}$$

www.almanahj.com

المسألة

افترض أن الكتلة الابتدائية لمركبة فضائية هي $1,850,000 \text{ kg}$ وبدون الوقود المستهلك. تبلغ كتلة المركبة الفضائية $50,000 \text{ kg}$. وقد صُمم الصاروخ المشغل للمركبة الفضائية لإخراج الوقود المستهلك بسرعة 25 km/s بالنسبة إلى الصاروخ بمعدل ثابت يبلغ $15,000 \text{ kg/s}$. في البداية، كانت المركبة الفضائية في وضع سكون في الفضاء ثم تحركت في خط مستقيم. ما المسافة التي ستقطعها المركبة الفضائية قبل أن يستهلك صاروخها كمية الوقود المستهلك كلها وينوقف؟



- إن مركز الكتلة هو نقطة على الجسم تتركز فيها كتلة هذا الجسم كلها.
- يمكن تحديد مركز كتلة جسم ذي شكل عشوائي من خلال المعادلة $\bar{R} = \frac{1}{M} \int_V \bar{r} \rho(\bar{r}) dV$ حيث تكون الكثافة الكتلية للجسم $\rho = \frac{dm}{dV}$ ويمتد التكامل على حجم الجسم بالكامل V و M كتلته الكلية.
- عندما تكون الكثافة الكتلية منتظمة عبر الجسم بالكامل، بحيث $\rho = \frac{M}{V}$ ، فحينها يقع مركز الكتلة عند $\bar{R} = \frac{1}{V} \int_V \bar{r} dV$.
- إذا كان للجسم مستوى تماثل، فلا بد أن يقع مركز الكتلة في هذا المستوى.
- يمكن تحديد موقع مركز كتلة مجموعة من الأجسام من خلال حساب المتوسط الكتلي المرجح لمواقع مراكز كتل الأجسام.
$$\bar{R} = \frac{\bar{r}_1 m_1 + \bar{r}_2 m_2 + \dots + \bar{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i m_i.$$
- يمكن وصف حركة جسم صلب غير نقطي بحركة مركز كتلته.
- يمكن إيجاد السرعة المتجهة لمركز الكتلة بواسطة مشتقة متجه موضعه، $\bar{V} \equiv \frac{d}{dt} \bar{R}$.
- كمية حركة مركز كتلة مجموعة من الأجسام هو $\bar{P} = M\bar{V} = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i$ وتخضع كمية الحركة هذه للقانون الثاني لنيوتن، $\frac{d}{dt} \bar{P} = \frac{d}{dt} (M\bar{V}) = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{F}_{net}$.
- لا ينتج عن القوى الداخلية بين الأجسام محصلة قوى (فمحصلتها تكون صفراً لأنها دائماً تكون متساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه)، ومن ثم فإنها لا تغير كمية حركة مركز الكتلة.
- تُعدّ حركة الصاروخ مثلاً للحركة التي تتغير خلالها كتلة الجسم المتحرك. يمكن إيجاد معادلة حركة الصاروخ في الفضاء بين النجوم من خلال $\bar{F}_{thrust} = m\bar{a} = -\bar{v}_c \frac{dm}{dt}$ حيث \bar{v}_c هي السرعة المتجهة للوقود المستهلك بالنسبة إلى الصاروخ و $\frac{dm}{dt}$ هو معدل تغير الكتلة نتيجة لتدفق الوقود المستهلك.
- يمكن إيجاد سرعة الصاروخ كدالة لكتلته بواسطة المعادلة $v_f - v_i = v_c \ln(m_i / m_f)$ حيث يعبر الحرف f عن الكتلة والسرعة النهائية، ويعبر الحرف i عن الكتلة والسرعة الابتدائية.

أسئلة الاختيار من متعدد

- 8.2 عند انحلال نواة البزموت 208 وهي في وضع السكون، ينتج التالوم 204 وجسيم ألفا (نواة الهيليوم 4) الأعداد الكتلية للبزموت 208 والتالوم 204 والهيليوم 4 هي 208 و 204 و 4 على التوالي. (العدد الكتلي هو العدد الكلي للبروتونات والنيوترونات الموجودة في النواة). ستكون الطاقة الحركية لنواة التالوم (a) مساوية للطاقة الحركية لجسيم ألفا.
(b) أقل من الطاقة الحركية لجسيم ألفا.
(c) أكبر من الطاقة الحركية لجسيم ألفا.

8.4 تحركت ذبذبة مدفعية في مسار على شكل قطع مكافئ عند انفجارها في الجو وخطمت الذبذبة إلى شظايا كثيرة جداً. أي العبارات التالية صحيحة (حدد كل ما ينطبق)؟

- (a) ستزيد قوة الانفجار من كمية حركة النظام المتكون من الشظايا، ومن ثم لن تُحفظ كمية حركة الذبذبة أثناء الانفجار.
(b) قوة الانفجار قوة داخلية، ومن ثم لن تُغير كمية الحركة الكلية للنظام.
(c) سيستمر مركز كتلة النظام المتكون من الشظايا في التحرك في المسار الابتدائي على شكل قطع مكافئ حتى تلامس الشظية الأخيرة الأرض.
(d) سيستمر مركز كتلة النظام المتكون من الشظايا في التحرك في المسار الابتدائي على شكل قطع مكافئ حتى تلامس الشظية الأولى الأرض.
(e) سيكون لمركز كتلة النظام المتكون من الشظايا مسار يعتمد على عدد الشظايا وسرعاتها المتجهة بعد الانفجار مباشرة.

- 8.1 وقف رجل على جليد عديم الاحتكاك وألقى خشبة الكبد فاستدارت وعادت إليه. اختر العبارة الصحيحة:
(a) لأن كمية حركة النظام المتكون من الرجل والكبد تكون محفوظة، سيصل الرجل إلى وضع السكون مسكاً بالكبد عند الموضع نفسه الذي ألقى منه الكبد في البداية.
(b) من المستحيل أن يتمكن الرجل من إلقاء الكبد في هذه الحالة.
(c) من الممكن أن يتمكن الرجل من إلقاء الكبد، لكن لأنه يقف على جليد عديم الاحتكاك عند إلقاء الكبد، فلن يعود الكبد إليه مرة أخرى.
(d) لا تُحفظ كمية الحركة الكلية للنظام المتكون من الرجل والكبد، لذا فإن الرجل سينزلق إلى الورا عند إمساكه بالكبد عندما يعود إليه مرة أخرى.

- 8.3 جسمان كتلتاهما m_1 و m_2 يتحركان على طول المحور x في الاتجاه الموجب بالسرعتين v_1 و v_2 ، على التوالي، حيث v_1 أقل من v_2 ، تكون سرعة مركز كتلة هذا النظام المتكون من جسمين
(a) أقل من v_1 .
(b) مساوية لـ v_1 .
(c) مساوية لمتوسط السرعتين v_1 و v_2 .
(d) أكبر من v_1 وأقل من v_2 .
(e) أكبر من v_2 .

8.10 كتلتان نبطيتان واقعتان في المستوى نفسه. وتبلغ المسافة بين الكتلة 1 ومركز الكتلة 3.0 m، بينما تبلغ المسافة بين الكتلة 2 ومركز الكتلة 1.0 m. أوجد m_2/m_1 . نسبة الكتلة 1 إلى الكتلة 2.

- (a) 4/3 (c) 7/4 (e) 3/1
(b) 3/4 (d) 4/7 (f) 1/3

8.11 زجاجة أسطوانية لتوابل السلطة المصنوعة من الزيت والخل. يشغل اقل ثلث حجمها ($p = 10^3 \text{ g/cm}^3$) ويشغل الزيت الثلثين الآخرين ($p = 0.910 \text{ g/cm}^3$). موضوعة على طاولة في وضع السكون. في البداية، كان الزيت منفصلاً عن اخل. حيث كان بطعم فون اخل. فزجت الزجاجاة حتى اختلط الزيت باخل تماماً. ثم وُضعت مرة أخرى على الطاولة. ما مقدار تقيّر ارتفاع مركز كتلة توابل السلطة نتيجة للخلط؟

- (a) أعلى. (d) لا تتوفر معطيات كافية للإجابة عن هذا السؤال.
(b) أقل.
(c) عند الارتفاع نفسه.

8.13 يُستخدم خرطوم حديقة لملء دلو سعته 20 L خلال 1 min. وتبلغ سرعة تدفق الماء خارج الخرطوم 1.05 m/s. ما مقدار القوة المؤثرة في الشخص الذي يحمل الخرطوم؟

- (a) 0.35 N (c) 9.8 N (e) 21 N
(b) 2.1 N (d) 12 N

8.14 يُستخدم خرطوم حديقة لملء دلو سعته 20 L خلال 1 min. وتبلغ سرعة تدفق الماء خارج الخرطوم 2.35 m/s. وتؤثر القوة F في الشخص الذي يحمل الخرطوم. بينما يوجد خرطوم آخر يمكنه ملء الدلو نفسه خلال 2 min مع تدفق الماء خارج الخرطوم بالسرعة نفسها. سيكون مقدار القوة المؤثرة في الشخص الذي يحمل هذا الخرطوم هو

- (a) $4/F$ (c) F (e) $4F$
(b) $2/F$ (d) $2F$

8.15 افترض أنه تم إطلاق صاروخ في فراغ في الفضاء الخارجي. أي العبارات التالية صحيحة؟

- (a) لن ينتج الصاروخ أي دفع لانعدام مقاومة الهواء.
(b) سينتج الصاروخ في الفراغ الدفع نفسه الذي يمكن أن ينتجه في وجود الهواء.
(c) سينتج الصاروخ في الفراغ نصف مقدار الدفع الذي يمكن أن ينتجه في وجود الهواء.
(d) سينتج الصاروخ في الفراغ ضعف مقدار الدفع الذي يمكن أن ينتجه في وجود الهواء.

8.16 يقع مركز كتلة الشمس وكوكب المشتري

- (a) عند مركز الشمس تماماً.
(b) بالقرب من مركز الشمس.
(c) عند مركز كوكب المشتري تماماً.
(d) بالقرب من مركز كوكب المشتري.
(e) في منتصف المسافة بين الشمس وكوكب المشتري.

8.5 يسبح رائد فضاء كتلته 80 kg بعيداً عن مركبته الفضائية. ويبعد 15.0 m عن المركبة. ويوجد في حالة سكون بالنسبة إليها. وعندما حاول العودة إليها، ألقي جسمًا كتلته 500 g بسرعة 8.0 m/s في اتجاه معاكس لمكان وجود المركبة. ما مقدار الوقت الذي سيستغرقه رائد الفضاء للعودة إلى المركبة؟

- (a) 1 s (c) 20 s (e) 300 s
(b) 10 s (d) 200 s

8.6 وجدت نفسك، في وسط بحيرة، عالماً في طوف بجاء كتلته 300 kg (بها في ذلك كتلتك)، وليس معك أي شيء سوى مجموعة من كرات البولنج كتلتها 7 kg وكرات تنس كتلتها 55 g. باستخدام معرفتك لمهوم الدفع الصاروخي، قررت البدء في قذف الكرات من طوف النجاة لتتحرك في اتجاه الشاطئ. أي من العبارات التالية سيبتك من الوصول إلى الشاطئ بشكل أسرع؟

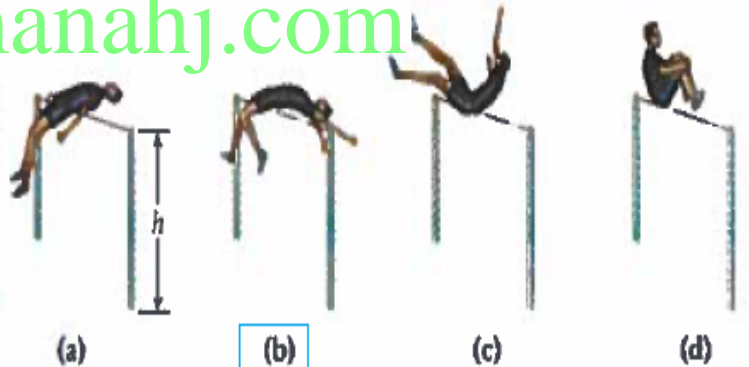
(a) قذف كرات التنس بسرعة 35 m/s بمعدل كرة تنس واحدة في الثانية.

(a) قذف كرات البولنج بسرعة 0.5 m/s بمعدل كرة بولنج واحدة كل 3 s

(c) قذف كرة تنس وكرة بولنج بشكل متزامن، حيث ستتحرك كرة التنس بسرعة 15 m/s وكرة البولنج بسرعة 0.3 m/s. وبمعدل كرة تنس واحدة وكرة بولنج واحدة كل 4 s

(d) لا تتوفر معطيات كافية لتحديد ذلك

8.7 نوضح الأشكال لاعب فتر عالٍ يستخدم أساليب مختلفة ليتمكن من تخطي العارضة. ما الأسلوب الذي سيتمكن اللاعب من تحقيق أعلى قفزة لتخطي العارضة؟



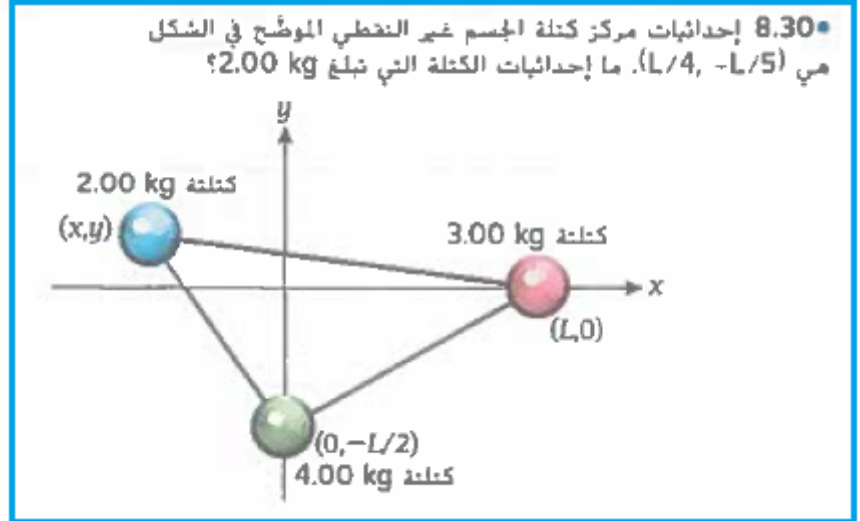
8.8 يقع مركز كتلة الجسم الصلب غير المنتظم دائماً

- (a) عند المركز الهندسي للجسم. (c) كلاهما.
(b) مكان ما داخل الجسم. (d) لا شيء مما سبق.

8.9 بقذف منجنيق موجود على أرض مستوية حجراً كتلته 3 kg مسافة أفقية مقدارها 100 m. وعند قذف حجر آخر كتلته 3 kg بالطريقة نفسها، تحطم الحجر في الهواء إلى قطعتين، إحداهما كتلتها 1 kg والأخرى كتلتها 2 kg. فسقطت كلتا

القطعتين على الأرض في الوقت نفسه. إذا سقطت القطعة التي كتلتها 1 kg على بعد 180 m من المنجنيق، فكم سبجد القطعة التي كتلتها 2 kg عن المنجنيق عند سقوطها على الأرض؟ تجاهل مقاومة الهواء.

- (a) 20 m (c) 100 m (e) 180 m
(b) 60 m (d) 120 m



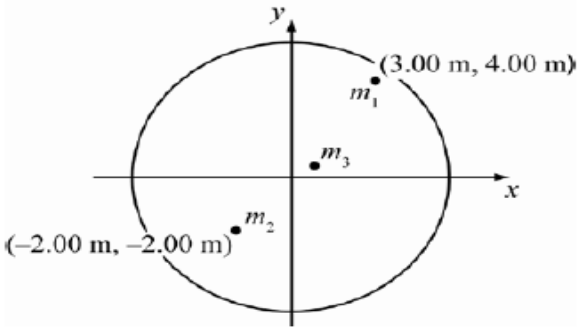
$$X = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad \text{and} \quad Y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n y_i m_i.$$

$$X = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{m_1} (X(m_1 + m_2 + m_3) - x_2 m_2 - x_3 m_3)$$

$$y_1 = \frac{1}{m_1} (Y(m_1 + m_2 + m_3) - y_2 m_2 - y_3 m_3).$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{2 \text{ kg}} \right) \left(\frac{L}{4} (2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} + 4 \text{ kg}) - L(3 \text{ kg}) - 0(4 \text{ kg}) \right) = -\frac{3}{8} L$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{2 \text{ kg}} \right) \left(-\frac{L}{5} (2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} + 4 \text{ kg}) - 0(3 \text{ kg}) - \left(-\frac{L}{2} \right) (4 \text{ kg}) \right) = -\frac{L}{10}$$



8.31 • بقف بهلوانات صفار في وضع سكون على منصة أفقية دائرية مرتكزة على حامل عند نقطة منتصفها. لذا من المفترض أن تقع نقطة الأصل للنظام الإحداثي الديكارتي ثنائي الأبعاد عند منتصف المنصة. وبقف بهلوان كتلته 30.0 kg عند $(4.00 \text{ m}, 3.00 \text{ m})$. بينما بقف بهلوان آخر كتلته 40.0 kg عند $(-2.00 \text{ m}, -2.00 \text{ m})$. بافتراض أن البهلوانات بقفون في وضع سكون في مواقعهم، فأين يجب أن بقف بهلوان كتلته 20.0 kg بحيث يكون مركز كتلة النظام المكون من البهلوانات الثلاثة عند نقطة الأصل وتكون المنصة متوازنة؟

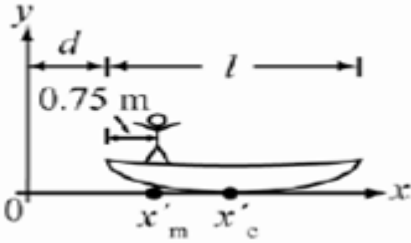
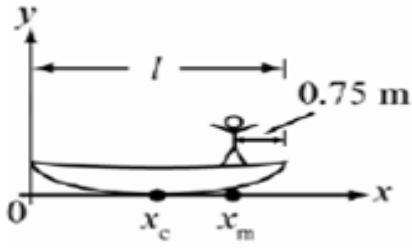
$$X = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad \text{and} \quad Y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n y_i m_i.$$

$$X = 0, \quad X = \frac{1}{M} (x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3) = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{(-x_1 m_1 - x_2 m_2)}{m_3}. \quad \text{Similarly, with } Y = 0,$$

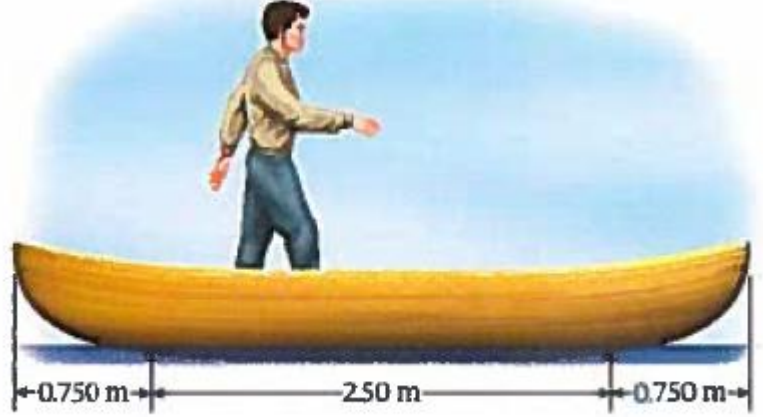
$$y_3 = \frac{(-y_1 m_1 - y_2 m_2)}{m_3}.$$

$$x_3 = \frac{-(3.00 \text{ m})(30.0 \text{ kg}) - (-2.00 \text{ m})(40.0 \text{ kg})}{20.0 \text{ kg}} = -0.500 \text{ m},$$

$$y_3 = \frac{-(-4.00 \text{ m})(30.0 \text{ kg}) - (-2.00 \text{ m})(40.0 \text{ kg})}{20.0 \text{ kg}} = -2.00 \text{ m} \quad \vec{r}_3 = (-0.500 \text{ m}, -2.00 \text{ m})$$



8.32 يدفع رجل كتلته 55.0 kg في زورق يطفو على سطح الماء كتلته 65.0 kg وطوله 4.00 m. فساد هذا الرجل من نقطة تبعد 0.750 m عن مؤخرة الزورق إلى نقطة تبعد 0.750 m عن مقدمة الزورق. إذا افترضنا أن الاحتكاك بين الزورق وسطح الماء ضئيل جداً، فما مقدار المسافة التي سيتحركها الزورق؟



The center of mass is $X = \frac{1}{M}(x_m m_m + x_c m_c)$. After moving,

$X = \frac{1}{M}(x'_m m_m + x'_c m_c) = \frac{1}{M}((x'_c + a)m_m + x'_c m_c)$. Since X does not change, the equations can be equated:

$$\frac{1}{M}((x'_c + a)m_m + x'_c m_c) = \frac{1}{M}(x_m m_m + x_c m_c)$$

This implies $x_m m_m + x_c m_c = x'_c m_m + x'_c m_c + a m_m \Rightarrow x'_c = \frac{x_m m_m + x_c m_c - a m_m}{m_m + m_c}$.

CALCULATE: $x'_c = \frac{(3.25 \text{ m})(55.0 \text{ kg}) + (2.00 \text{ m})(65.0 \text{ kg}) - (-1.25 \text{ m})(55.0 \text{ kg})}{55.0 \text{ kg} + 65.0 \text{ kg}} = 3.1458 \text{ m}$

Then $d = 3.1458 \text{ m} - 2.00 \text{ m} = 1.1458 \text{ m}$.

8.33 يدفع طفل شاحنة لعبة كتلتها 3.50 kg مباشرة نحو سيارة لعبة ثابتة كتلتها 2.00 kg بسرعة 4.00 m/s. فتعرض كل من السيارة والشاحنة لتصادم مرن.
(a) ما مقدار السرعة المنجبة لمركز كتلة النظام المكون من اللعبتين؟
(b) ما السرعتان المتجهتان للشاحنة والسيارة بالنسبة إلى مركز كتلة النظام المكون من اللعبتين قبل التصادم وبعده؟

(a) Substituting $\vec{v}_c = 0$ and $M = m_c + m_t$, $\vec{V} = \frac{1}{M}(m_c \vec{v}_c + m_t \vec{v}_t)$ becomes $\vec{V} = \frac{(m_t \vec{v}_t)}{(m_c + m_t)}$.

$$\vec{V} = \frac{(3.50 \text{ kg})(4.00 \hat{x} \text{ m/s})}{(3.50 \text{ kg} + 2.00 \text{ kg})} = 2.545 \hat{x} \text{ m/s}$$

(b) \vec{v}'_t and \vec{v}'_c before the collision are $\vec{v}'_t = \vec{v}_t - \vec{V}$ and $\vec{v}'_c = \vec{v}_c - \vec{V} = -\vec{V}$.

$$\vec{v}'_t = (4.00 \hat{x} \text{ m/s}) - (2.545 \hat{x} \text{ m/s}) = 1.4545 \hat{x} \text{ m/s}, \quad \vec{v}'_c = -2.545 \hat{x} \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{M}(x_m m_m + x_f m_f) = \frac{1}{M}(x'_m m_m + x'_f m_f)$$

$$x_m m_m + x_f m_f = \left(d + \frac{1}{2}l_m\right)m_m + \left(d + \frac{1}{2}l_f\right)m_f$$

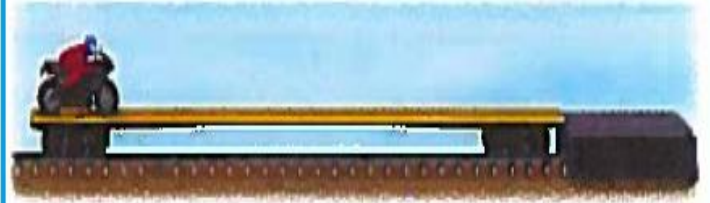
$$x_m m_m + x_f m_f = d(m_m + m_f) + \frac{1}{2}l_m m_m + \frac{1}{2}l_f m_f$$

$$d = \frac{\left(x_m - \frac{1}{2}l_m\right)m_m + \left(x_f - \frac{1}{2}l_f\right)m_f}{m_m + m_f}$$

$$x_m = l_f - \frac{l_m}{2} \text{ and } x_f = \frac{l_f}{2}, \text{ therefore } d = \frac{(l_f - l_m)m_m}{m_m + m_f}$$

$$d = \frac{(20.0 \text{ m} - 2.00 \text{ m})(350. \text{ kg})}{350. \text{ kg} + 1500. \text{ kg}} = 3.4054 \text{ m}$$

8.34 يعتبر سائق دراجة نارية مخاطر الانطلاق بالدراجة من أحد طرفي عربة قطار مسطحة، والنسارع نحو الطرف الآخر من العربة. ثم القفز من العربة إلى منصة. تبلغ كتلة السائق والدراجة معا 350 kg ويبلغ طولها 2.00 m. بينما تبلغ كتلة العربة 1500 kg ويبلغ طولها 20.0 m. افترض أن الاحتكاك بين عجلات العربة والقضبان ضئيل جدًا وأنه يمكن أن نطلق الدراجة بالسائق في الهواء مع وجود مقاومة هواء ضئيلة جدًا. وكانت العربة ملامسة للمنصة في البداية. إذا سألك منظمو العرض عن المسافة التي ستبدها العربة عن المنصة عندما يصل سائق الدراجة النارية المخاطر إلى الطرف الآخر من العربة، فماذا ستكون إجابتك؟



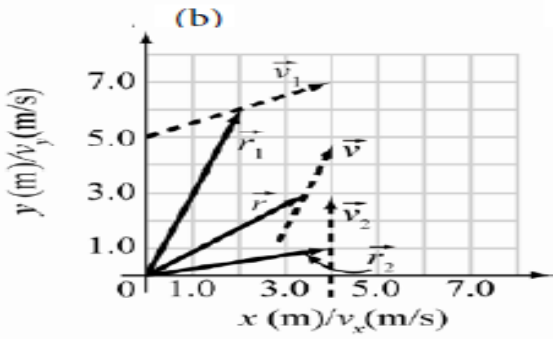
8.35 بدءًا من وضع السكون، يقف طالبان على زلاجتين كتلتاهما 10.0 kg غير مواجهتين لبعضهما على الجليد، وبشادان إلقاء كرة طيبة كتلتها 5.00 kg بينهما. تبلغ كتلة الطالب الذي على اليسار 50.0 kg ويمكنه إلقاء الكرة بسرعة نسبية مقدارها 10.0 m/s، بينما تبلغ كتلة الطالب الذي على اليمين 45.0 kg ويمكنه إلقاء الكرة بسرعة نسبية مقدارها 12.0 m/s. افترض انعدام الاحتكاك بين الجليد والزلاجتين وانعدام مقاومة هواء.

- (a) إذا ألقى الطالب الذي على اليسار الكرة بشكل أفقي إلى الطالب الذي على اليمين، فما سرعة تحرك الطالب الذي على اليسار نحو اليمين بعد إلقاء الكرة؟
(b) ما سرعة تحرك الطالب الذي على اليمين بعد التفاعل الكرة مباشرة؟
(c) إذا ألقى الطالب الذي على اليمين الكرة مرة أخرى إلى زميله. فما سرعة تحرك الطالب الذي على اليسار بعد التفاعل الكرة من زميله؟
(d) ما السرعة التي سيتحرك بها الطالب الذي على اليمين بعد إلقاء الكرة؟

8.37 يجري تحليل العديد من التصادمات النووية التي نتم دراستها في المختبرات في مناهل إسناد مخبري. إذا تحرك بروتون كتلته $1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ بسرعة مقدارها 70.0% من سرعة الضوء، C. واصطدم بنواة قصدير (^{116}Sn) كتلتها $1.9240 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$. فما سرعة مركز الكتلة بالنسبة إلى مناهل الإسناد المخبري؟ أوجد السرعة بدلالة سرعة الضوء C.

$$V = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i v_i \cdot V = \frac{1}{m_p + m_{sn}} (m_p v_p + m_{sn} v_{sn}) = \frac{m_p v_p}{m_p + m_{sn}}$$

$$V = \frac{(1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(0.700c)}{(1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) + (1.9240 \cdot 10^{-25} \text{ kg})} = 0.0060329c$$



8.38* يتكون نظام من جسمين. يقع الجسم الأول الذي كتلته 2.00 kg عند (6.00 m, 2.00 m) وتبلغ سرعته المتجهة (2.00 m/s, 4.00 m/s). بينما يقع الجسم الثاني الذي كتلته 3.00 kg عند (1.00 m, 4.00 m) وتبلغ سرعته المتجهة (4.00 m/s, 0).

(a) حدّد الموقع والسرعة المتجهة لمركز كتلة النظام.

(b) ارسم الموقع ومتجهات السرعة المتجهة لكل جسم على حدة ولمركز الكتلة.

$$X = \frac{1}{M}(x_1 m_1 + x_2 m_2) \text{ and } Y = \frac{1}{M}(y_1 m_1 + y_2 m_2).$$

$$V_x = \frac{1}{M}(v_{1x} m_1 + v_{2x} m_2) \text{ and } V_y = \frac{1}{M}(v_{1y} m_1 + v_{2y} m_2).$$

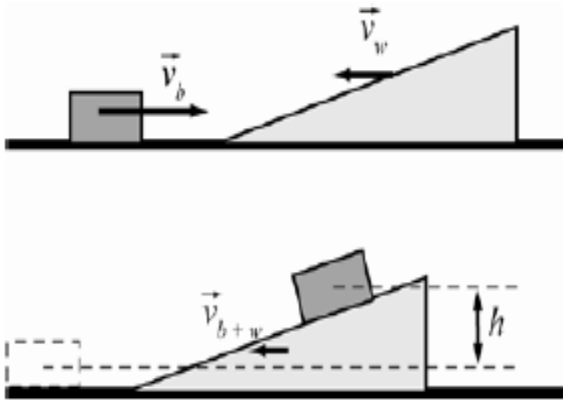
$$(a) X = \frac{1}{2.00 \text{ kg} + 3.00 \text{ kg}}((2.00 \text{ m})(2.00 \text{ kg}) + (4.00 \text{ m})(3.00 \text{ kg})) = 3.20 \text{ m}$$

$$Y = \frac{1}{2.00 \text{ kg} + 3.00 \text{ kg}}((6.00 \text{ m})(2.00 \text{ kg}) + (1.00 \text{ m})(3.00 \text{ kg})) = 3.00 \text{ m}$$

$$V_x = \frac{1}{2.00 \text{ kg} + 3.00 \text{ kg}}((4.00 \text{ m/s})(2.00 \text{ kg}) + 0(3.00 \text{ kg})) = 1.60 \text{ m/s}$$

$$V_y = \frac{1}{2.00 \text{ kg} + 3.00 \text{ kg}}((2.00 \text{ m/s})(2.00 \text{ kg}) + (4.00 \text{ m/s})(3.00 \text{ kg})) = 3.20 \text{ m/s}$$

www.almanahj.com



8.40** ينزلق قالب كتلته $m_b = 1.20 \text{ kg}$ نحو اليمين بسرعة مقدارها 2.50 m/s على سطح أفقي عديم الاحتكاك، كما هو موضح في الشكل "فاصطدم" بوزن كتلته m_w . يتحرك نحو اليسار بسرعة مقدارها 1.10 m/s. وكان الوزن ذا شكل يسمح بانزلاق القالب بسهولة على سطحه (عديم الاحتكاك) المصنوع من التفلون عند التقائهما. بالنسبة إلى السطح الأفقي، تحرك القالب والوزن بسرعة منجهة مشتركة v_{b+w} في اللحظة التي توقفت فيها القالب عن الانزلاق على سطح الوزن.

(a) إذا ارتفع مركز كتلة المكعب بمسافة $h = 0.370 \text{ m}$ ، فكم تبلغ كتلة الوزن؟

(b) ما المقصود بـ v_{b+w} ؟

8.41 من الخصائص المهمة لمحرك الصواريخ خاصية الدفع النوعي. المعروفة بالدفع الكلي (التكامل الزمني للدفع) لكل وحدة وزن أرضي للوقود/المؤكسد المستهلك. (يرجع استخدام الوزن، بدلاً من الكتلة، في هذا التعريف إلى أسباب تاريخية مجردة).
(a) إذا كان محرك صاروخ يعمل في فضاء شاسع بسرعة عادم من العوثة تبلغ v . فاحسب الدفع النوعي لهذا المحرك.
(b) تبلغ سرعة العادم العادية لنموذج محرك الصاروخ $v_{\text{toy}} = 800. \text{ m/s}$ وتبلغ سرعة عادم أفضل محركات الصواريخ الكيميائية حوالي $v_{\text{chem}} = 4.00 \text{ km/s}$. احسب قيم الدفع النوعي لهذه المحركات وقارن بينها.

$$J_{\text{spec}} = \frac{1}{m_{\text{expended}} g} \int_{m_0}^m -v dm = -\frac{v}{m_{\text{expended}} g} (m - m_0). \text{ Now, } m - m_0 = -m_{\text{expended}}, \text{ so } J_{\text{spec}} = \frac{v}{g}.$$

$$\therefore J_{\text{spec, toy}} = \frac{v_{\text{toy}}}{g} = \frac{800. \text{ m/s}}{(9.81 \text{ m/s}^2)} = 81.55 \text{ s}, \quad J_{\text{spec, chem}} = \frac{v_{\text{chem}}}{g} = \frac{4.00 \cdot 10^3 \text{ m/s}}{(9.81 \text{ m/s}^2)} = 407.75 \text{ s}$$

$$\frac{J_{\text{spec, toy}}}{J_{\text{spec, chem}}} = \frac{v_{\text{toy}}}{v_{\text{chem}}} = \frac{800. \text{ m/s}}{4.00 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 0.200$$

(a) $J_{\text{spec, toy}} = 81.6 \text{ s}$

(b) $J_{\text{spec, chem}} = 408 \text{ s}$ and $J_{\text{spec, toy}} = 0.200 J_{\text{spec, chem}}$.

www.almanahj.com

8.42* خرج رائد فضاء من محطة الفضاء الدولية للسير في الفضاء. وكان إجمالي كتلته شاملة كتلة بدلة الفضاء وكتلة كل معداته 115 kg . فحدث تسرب بسيط في نظام الدفع الخاص به. فتسرب 7.00 g من الغاز في كل ثانية في الفضاء بسرعة 800 m/s . وقد لاحظ التسرب بعد 6.00 s من بدايته. فما مقدار الحركة التي تحركها رائد الفضاء من موقعه الأصلي في الفضاء نتيجة لتسرب الغاز خلال هذا الوقت؟

$$v_i = 0, \quad v_f = v_c \ln(m_i / m_f), \text{ where } m_i = m \text{ and } m_f = m - \Delta m = m - \frac{dm}{dt} \Delta t. \text{ Then,}$$

$$v_f = v_c \ln \left(\frac{m}{m - \frac{dm}{dt} \Delta t} \right) \text{ and } \Delta x = \frac{1}{2} v_f \Delta t.$$

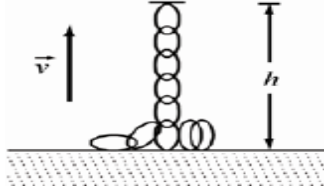
$$v_f = (800. \text{ m/s}) \ln \left(\frac{115 \text{ kg}}{115 \text{ kg} - (0.00700 \text{ kg/s})(6.00 \text{ s})} \right) = 0.29223 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} (0.29223 \text{ m/s})(6.00 \text{ s}) = 0.87669 \text{ m}$$

$$v_f = v_c \ln\left(\frac{m_p + m_f}{m_p}\right), \text{ and } \Delta t = \Delta x / v_f.$$

$$v_f = (5.600 \cdot 10^3 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{5190.0 \text{ kg} + 1.551 \cdot 10^5 \text{ kg}}{5190.0 \text{ kg}}\right) = 19209 \text{ m/s},$$

$$\Delta t = \frac{3.82 \cdot 10^8 \text{ m}}{19209 \text{ m/s}} = 19886 \text{ s}$$



8.43* تبلغ الحمولة الصافية لصاروخ في الفضاء الخارجي 5190.0 kg وبحمل 1551·10⁵ kg من الوقود. ويمكن أن يُخرج الصاروخ الوقود المستهلك بسرعة 5.600 km/s. افترض أن الصاروخ بدأ من وضع السكون ثم زادت سرعته إلى السرعة المتجهة النهائية ثم بدأ رحلته. فكم الوقت الذي استغرقه لتقطع مسافة 3.82·10⁸ km (المسافة بين الأرض والقمر تقريباً)؟

8.44** تم لف سلسلة منتظمة الشكل ذات كتلة 1.32 kg لكل متر على طاولة. وتم سحب أحد طرفيها لأعلى بمعدل سرعة ثابت 0.470 m/s. احسب القوة المحصلة المبذولة على السلسلة. (a) في حالة رفع جزء من السلسلة طوله 0.150 m عن الطاولة. ما مقدار القوة المبذولة على الطرف المرفوع؟

$$(a) F_{\text{net}} = v \frac{dm}{dt} = v \lambda \frac{dh}{dt} = v \lambda v = v^2 \lambda$$

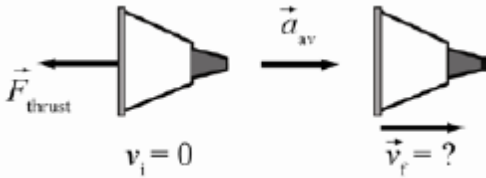
$$(b) F_{\text{net}} = F_{\text{applied}} - mg \Rightarrow F_{\text{applied}} = F_{\text{net}} + mg = v^2 \lambda + mg = v^2 \lambda + \lambda hg$$

CALCULATE:

$$(a) F_{\text{net}} = (0.470 \text{ m/s})^2 (1.32 \text{ kg/m}) = 0.2916 \text{ N}$$

$$(b) F_{\text{applied}} = 0.2916 \text{ N} + (1.32 \text{ kg/m})(0.150 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0.2916 \text{ N} + 1.942 \text{ N} = 2.234 \text{ N}$$

www.almanahj.com



8.45** أنتج محرك سفينة فضاء دفقا يبلغ 53.2 MN بسرعة متجهة للوقود المستهلك تبلغ 4.78 km/s.

(a) أوجد معدل خروج (dm/dt) الوقود المستهلك.
(b) إذا كانت الكتلة الابتدائية 2.12·10⁶ kg والكتلة النهائية 7.04·10⁴ kg، فأوجد السرعة النهائية لسفينة الفضاء (افتراض أن السرعة الابتدائية صفر وأن أي مجال للجاذبية صفر بحيث يمكن تجاهله).
(c) أوجد متوسط العجلة حتى الاحتراق (الوقت الذي يتدفق فيه الوقود، افتراض أن معدل تدفق الكتلة ثابت حتى هذا الوقت).

$$F_{\text{thrust}} = v_c \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{F_{\text{thrust}}}{v_c}. \quad (a) \frac{dm}{dt} = \frac{(53.2 \cdot 10^6 \text{ N})}{(4.78 \cdot 10^3 \text{ m/s})} = 11129.7 \text{ kg/s}$$

$$v_i = 0 \Rightarrow v_f = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \quad (b) v_f = (4.78 \cdot 10^3 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{2.12 \cdot 10^6 \text{ kg}}{7.04 \cdot 10^4 \text{ kg}}\right) = 1.6276 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta m}{dm/dt}, \quad a_{\text{av}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f}{\Delta m} \left(\frac{dm}{dt}\right) \quad (v_i = 0)$$

$$(c) a_{\text{av}} = \frac{(1.6276 \cdot 10^4 \text{ m/s})}{(2.12 \cdot 10^6 \text{ kg} - 7.04 \cdot 10^4 \text{ kg})} (11129.7 \text{ kg/s}) = 88.38 \text{ m/s}^2$$

8.46** انطلقت عربة على مسار هوائي عديم الاحتكاك بفعل تدفق الماء الخارج من آلة غسل تعمل بضغط الغاز مثبتة على العربة. ويوجد خزان ماء سعة 1.00 m^3 على العربة لتزويد آلة الغسل التي تعمل بالضغط بالماء. تبلغ كتلة العربة، التي تشمل كتلة المشغل الموجود عليها وكتلة آلة الغسل التي تعمل بالضغط ووقودها وكتلة خزان الماء الخارج، 400 kg . ويمكن توجيه المياه بتحويل الصمام إلى الخلف أو إلى الأمام. وفي كلا الاتجاهين، تُخرج آلة الغسل التي تعمل بالضغط 200 L من الماء في الدقيقة بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ 25.0 m/s .

(a) إذا بدأت العربة من وضع السكون. فكم الوقت المستغرق اللازم حتى يتحول الصمام من الخلف (دفع أمامي) إلى الأمام (دفع خلفي) لتعود العربة إلى وضع السكون؟

(b) كم تبلغ كتلة العربة في هذا الوقت وكم تبلغ سرعتها المتجهة؟ (تلميح: يُنضَل تجاهل انخفاض الكتلة الناتج عن الغاز المستهلك بواسطة آلة الغسل التي تعمل بضغط الغاز!)

(c) ما مقدار دفع هذا "الصاروخ"؟

(d) كم تبلغ عجلة العربة قبل تحويل الصمام مسافة؟

(a) Consider the first leg of the trip before the valve is switched:

$$v_2 - v_1 = v_c \ln(M_1 / M_2) \Rightarrow v_2 = v_c \ln(M_1 / M_2).$$

In the second leg, v_c changes direction, and the similar equation is

$$v_3 - v_2 = -v_c \ln(M_2 / M_3) \Rightarrow v_2 = v_c \ln(M_2 / M_3).$$

Then it must be that $\ln(M_2 / M_3) = \ln(M_2 / M_3)$, or $M_1 / M_2 = M_2 / M_3$. Then $M_2 = \sqrt{M_3 M_1}$. Now,

$$\frac{M_1 - M_2}{t_2} = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \Rightarrow t_2 = \frac{M_1 - M_2}{\rho \frac{dV}{dt}} = \frac{M_1 - \sqrt{M_3 M_1}}{\rho \frac{dV}{dt}}.$$

(b) From above, $M_2 = \sqrt{M_3 M_1}$, $v_2 = v_c \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$.

$$(c) \vec{F}_{\text{thrust}} = -\vec{v}_c \frac{dm}{dt} = -\vec{v}_c \rho \frac{dV}{dt}$$

$$(d) \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{\text{thrust}}}{M_2}$$

CALCULATE:

$$(a) t_2 = \frac{1400. \text{ kg} - \sqrt{(400. \text{ kg})(1400. \text{ kg})}}{(1000. \text{ kg/m}^3)(0.003333 \text{ m}^3/\text{s})} = 195.5 \text{ s}$$

$$(b) M_2 = \sqrt{(400. \text{ kg})(1400. \text{ kg})} = 748.33 \text{ kg}, \quad v_2 = (25.0 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{1400. \text{ kg}}{748.33 \text{ kg}}\right) = 15.66 \text{ m/s}$$

(c) Before the valve is switched, v_c is directed backward, i.e. $\vec{v}_c = -25.0 \text{ m/s}$. Then

$$\vec{F}_{\text{thrust}} = -(-25.0 \text{ m/s})(1000. \text{ kg/m}^3)(0.003333 \text{ m}^3/\text{s}) = 83.33 \text{ N forward. After the valve is switched, } \vec{F}_{\text{thrust}}$$

is directed backward, i.e. $\vec{F}_{\text{thrust}} = -83.33 \text{ N}$.

$$(d) \text{ Before the valve is switched, } \vec{a}_2 = \frac{83.33 \text{ N}}{748.33 \text{ kg}} = 0.111355 \text{ m/s}^2.$$