الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الثالث : الاحجام بالاصداف

(الشريحة - الارتفاع - توازي محور الدوران)

الحجوم الدورانية (الاصداف)

الحالة الأولى: الدوران على محور الصادات (y)

ان حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $f(x) \geq 0$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a, x = b$ دورة كاملة حول محور الصادات بطريقة الاصداف هو

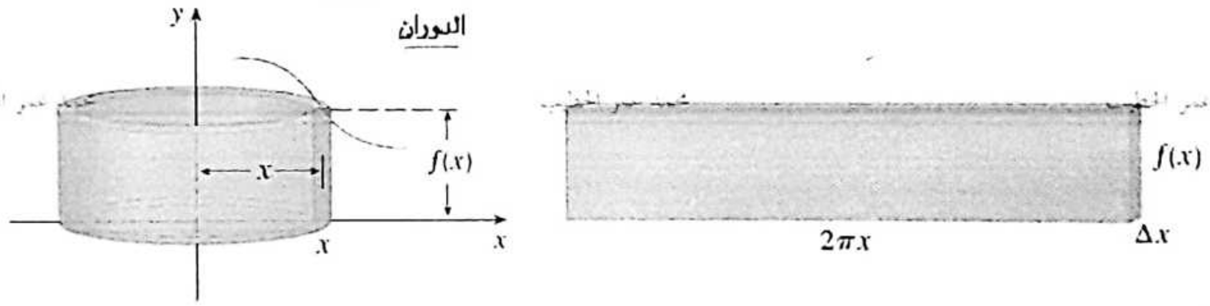
$V = 2\pi \int r h$ ⟨ dx , dy ⟩ قانون الاصداف

$$v = \int_a^b 2\pi\, x\, f(x)\, dx$$

r : نصف القطر — وهو بُعد الشريحة عن محمور محور الدوران

h : الارتفاع — هو البعد بين الدالتين

السماكة



ملاحظة

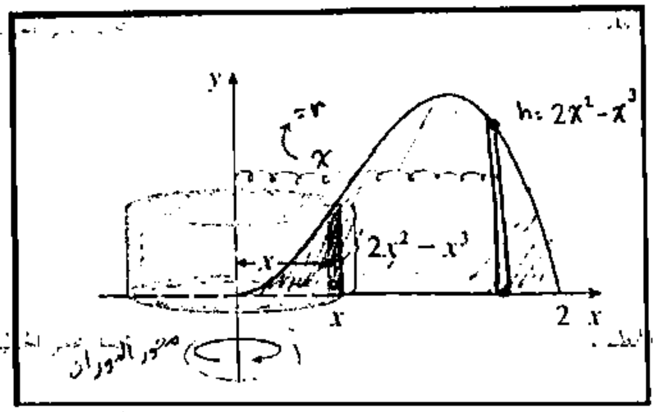
(1) اذا كان الدوران حول محور الصادات فان السماكة تكون من (x) وسيكون المكامل (dx)

(2) اذا كان الدوران حول محور السينات فان السماكة تكون من (y) وسيكون المكامل (dy)

(3) يكون نصف القطر هو البعد بين الشريحة ومحور الدوران

(4) يكون الارتفاع هو البعد بين الدالتين

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران



المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = 2x^2 - x^3$ والمستقيم $y = 0$

دورة كاملة حول محور الصادات طريقة الاسطوانات

$r = x$

$h = 2x^2 - x^3$

الاسطوانات

كم الشريحة // الدوران

كم الشريحة dx

$$v = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

$$V = 2\pi \int r\, h\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{2^4}{2} - \frac{2^5}{5} \right) - \left(\frac{0^4}{2} - \frac{0^5}{5} \right) \right]$$

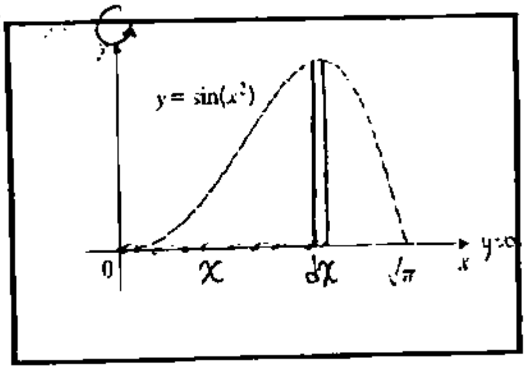
$$= \frac{16}{5}\pi$$

حاول ايجاد الحجم بطريقة الحلقات ....ماذا تلاحظ

$\boxed{\text{لا يمكن}}$

لان الشريحة تكون من الدالة لنفسها

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R



المحصورة بالمنحنى $y = \sin x^2$ والمستقيم $y = 0$

دورة كاملة حول محور الصادات بالاسطوانات

الاسطوانات

كم الشريحة // محور الدوران

كم الشريحة dx

بعد الشريحة عن محور الدوران $r = x$

البعد بين الدالتين $h = \sin(x^2) - 0$

$$V = 2\pi \int r\, h\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} x \sin u \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \pi \left[-\cos u \right]_0^{\pi}$$

$$= \pi \left[-\cos \pi - (-\cos 0) \right]$$

$$= 2\pi$$

تكامل بالتعويض

$u = x^2$

$du = 2x\, dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

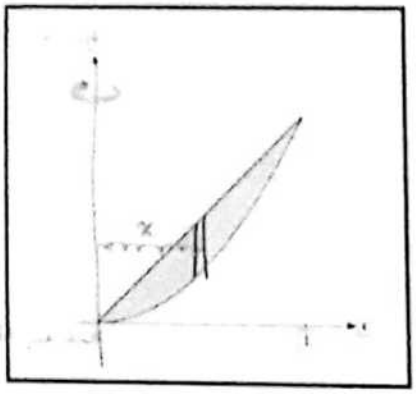
$x = 0 \to u = 0$

$x = \sqrt{\pi} \to u = \pi$

حاول ايجاد الحجم بطريقة الحلقات ....ماذا تلاحظ

$\boxed{\text{لا يمكن}}$

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة



بالمنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x$ دورة كاملة

حول محور الصادات بطريقة الاصداف

الاصداف
← الشريحة // محور الدوران
← الشريحة dx

$r = x$

$h = x - x^2$

$V = 2\pi \int r\, h\, dx$

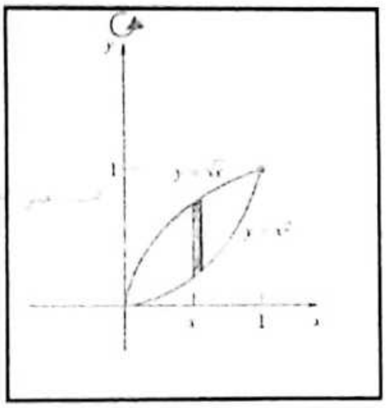
$= 2\pi \int_0^1 x\,(x - x^2)\, dx$

$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3\ dx$

$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$

$= 2\pi \left[\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} \right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{6}$

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى



$y = x^2$ والمنحنى $y = \sqrt{x}$ دورة كاملة حول محور الصادات

بطريقه الاصداف

$r = x$

$h = \sqrt{x} - x^2$

$V = 2\pi \int r\, h\, dx$

$= 2\pi \int_0^1 x\,(\sqrt{x} - x^2)\, dx$

$= 2\pi \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} - x^3\ dx$

$= 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$

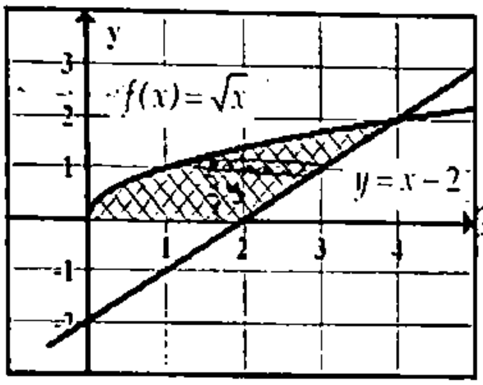
$= 2\pi \left[\left(\frac{2}{5}(1)^{5/2} - \frac{(1)^4}{4} \right) - \left(\frac{2}{5}(0)^{5/2} - \frac{(0)^4}{4} \right) \right]$

$= \frac{3}{10}\pi$

الحالة الثانية : الدوران حول محور السينات (x)

ان حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنيين f, g حيث $f(y) \ge g(y)$ والمستقيمين $y=c, y=d$ دورة كاملة حول محور السينات بطريقة الاصداف هو

$$v=\int_c^d 2\pi\, y\left[f(y)-g(y)\right]dy$$



اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالدالة $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $y=x-2$ والمستقيم $y=0$ دورة كاملة حول محور السينات بطريقة الاصداف

الاصداف
كم الشريحة // محور الدوران
كم المكامل / الشريحة dy

$r = y$

$h = (y+2)-(y^2)$

$V = 2\pi \int r\,h\,dy$

$= 2\pi \int_0^2 y\,(y+2-y^2)\,dy$

$= 2\pi \int_0^2 y^2+2y-y^3\,dy$

$= 2\pi \left[\frac{y^3}{3}+\frac{2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_0^2$

$= 2\pi\left[\left(\frac{2^3}{3}+2^2-\frac{2^4}{4}\right)-\left(\frac{0^3}{3}+0^2-\frac{0^4}{4}\right)\right]$

$= \frac{16}{3}\pi$

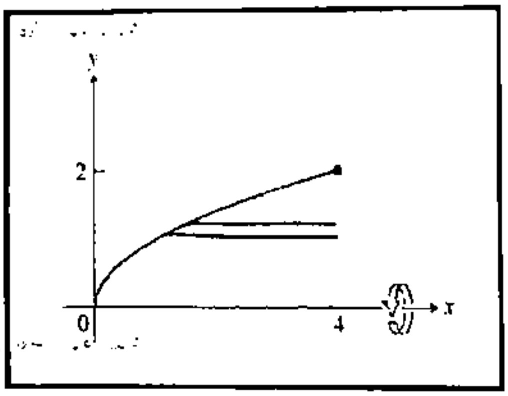
يمكن حل السؤال هذا بطريقة الحلقات ولكن نحتاج لتجزئة المساحة

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

$x = y^2$

بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $x=4$

ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات



بطريقة الاصداف

الصداف

كم الشريحة // محور الدوران

كم الشريحة dy

$r = y$

$h = (4) - (y^2)$

$$V = 2\pi \int r\, h\, dy$$

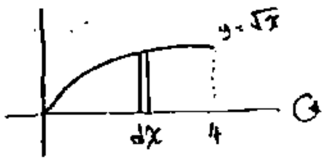
$$= 2\pi \int_0^2 y(4-y^2)\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 4y - y^3\, dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{4y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{4(2)^2}{2} - \frac{2^4}{4}\right) - \left(\frac{4(0)^2}{2} - \frac{0^4}{4}\right)\right]$$

$$= 8\pi$$



(2) حل السؤال السابق بطريقة الاقراص (الحلقات)

الحلقات

كم الشريحة ⊥ محور الدوران

كم الشريحة dx

$r_o = \sqrt{x} - 0$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\, dx$$

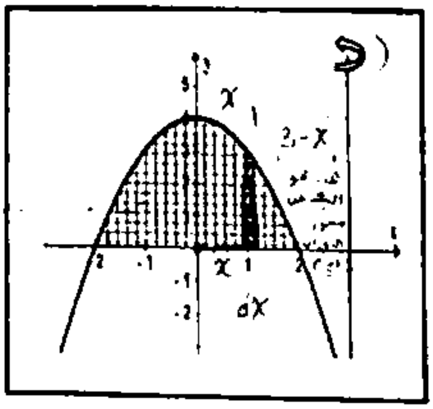
$$= \pi \int_0^4 x\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \pi \left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]$$

$$= 8\pi$$

الحالة الثالثة : الدوران حول محور يوازي محور السينات او يوازي محور الصادات



(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = 4 - x^2$ ومحور السينات

دورة كاملة حول محور المستقيم $x = 3$ بطريقة الاصداف

اصداف

الشريحة // محور الدوران

سمك الشريحة dx

البعد عن محور الدوران $r = 3 - x$

$h = 4 - x^2$

$$V = 2\pi \int r\, h\, dx$$

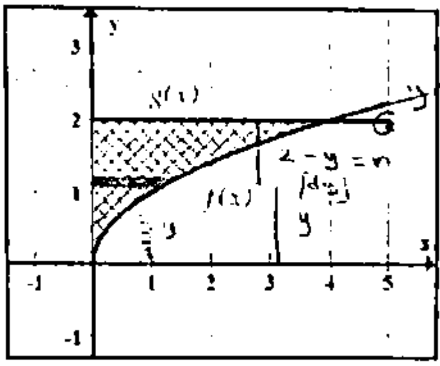
$$= 2\pi \int_{-2}^{2} (3-x)(4-x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} 12 - 3x^2 - 4x + x^3\, dx$$

$$= 2\pi \left[12x - \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{2}$$

$$= 2\pi \left[\left(12(2) - (2)^3 - 2(2)^2 + \frac{(2)^4}{4} \right) - \left(12(-2) - (-2)^3 - 2(-2)^2 - \frac{(-2)^4}{4} \right) \right]$$

$$= 64\pi$$



(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالتين

$y = \sqrt{x}$ و والمستقيم $y = 2$ ومحور الصادات على الفترة

$[0,4]$ دورة كاملة حول المستقيم $y = 2$ بطريقة الاصداف

اصداف

الشريحة // محور الدوران

سمك الشريحة dy

$r = 2 - y$

$h = (y^2) - (0)$

$$V = 2\pi \int r\, h\, dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{2} (2-y)(y^2)\, dy$$

$$= 2\pi \int_{0}^{2} 2y^2 - y^3\, dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{0}^{2}$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{2(2)^3}{3} - \frac{(2)^4}{4} \right) - \left(\frac{2(0)^3}{3} - \frac{(0)^4}{4} \right) \right] = \frac{8}{3}\pi$$

الطريقة الافضل (الاقراص والحلقات ام الاصداف)

ج- اذا ما حدد بالسؤال اي طريقة استخدم؟

خطوات ايجاد الحجوم الدورانية بالطريقة الافضل والاسهل

اذا كانت الحلقات او الاصداف ← الخيار الاول

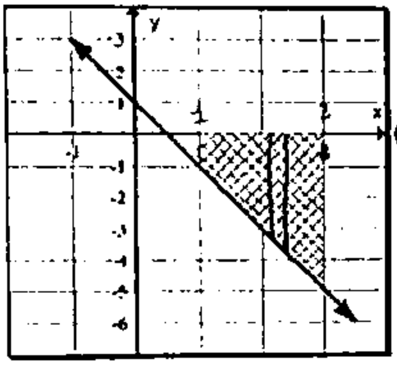
ارسم الدوال ← ظلل المنطقة ← حدد محور الدوران ← حدد المكامل dx ←

ارسم الشريحة ← حدد الطريقة (حلقات ام اصداف) حسب التوازي والتعامد ← اوجد

حدود التكامل (نقاط التقاطع) ← كامل ← عوض الحدود

كرر نفس الخطوات مع الخيار الثاني المكامل dy

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمستقيم $y=-2x+1$ ومحور السينات على الفترة $[1,3]$ دورة كاملة حول محور السينات



dx

الشريحة $\perp$ محور الدوران

∴ الطريقة : الحلقات

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_1^3 (2x-1)^2 \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{(2x-1)^3}{2(3)} \right]_1^3$$

$$= \pi \left[\frac{(2(3)-1)^3}{6} - \frac{(2(1)-1)^3}{6} \right]$$

$$= \frac{62}{3}\pi$$

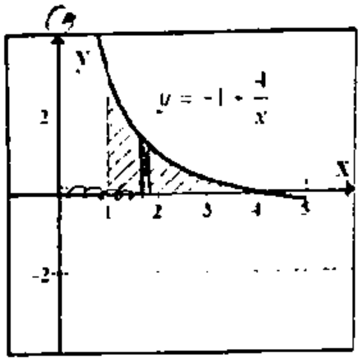
$r_o = (0) - (-2x+1)$

$= 2x - 1$

$r_i = 0$

* يمكن حل السؤال بالاصداف مع المكامل dy

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالدالة $y=-1+\dfrac{4}{x}$ ومحور السينات على الفترة $[1,3]$ دورة كاملة حول محور الصادات



dx

الشريحة // محور الدوران

∴ الطريقة : الاصداف

$$V = 2\pi \int r\, h \, dx$$

$$= 2\pi \int_1^3 x\left(-1+\frac{4}{x}\right) dx$$

الحدود مشان هيك هو محدد بالسؤال

$r = x$

$h = -1 + \dfrac{4}{x}$

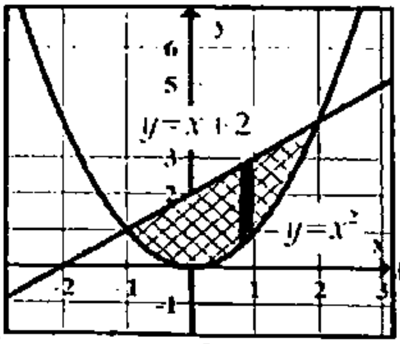
$$= 2\pi \int_1^3 -x + 4 \, dx$$

$$= 2\pi \left[-\frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^3$$

$$= 2\pi \left[\left(-\frac{(3)^2}{2} + 4(3)\right) - \left(-\frac{(1)^2}{2} + 4(1)\right) \right] = 8\pi$$

* r هو بعد الشريحة عن محور الدوران و ليس له علاقة بحدود التكامل و وين بيلشوا او بخلصوا؟

* يمكن حل السؤال بالحلقات مع المكامل dy



(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالة $y=x^2$ والمستقيم $y=x+2$

دورة كاملة حول محور السينات

الشريحة dx ⊥ محور الدوران

← الطريقة الحلقات.

$r_o = (x+2) - (0)$

$r_i = (x^2) - (0)$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

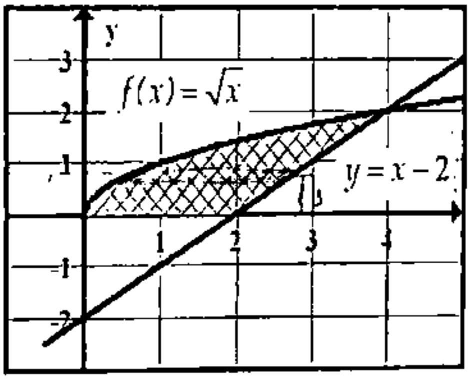
$$= \pi \int_{-1}^{2} (x+2)^2 - (x^2)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (x+2)^2 - x^4 \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{(x+2)^3}{(1)(3)} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{(2+2)^3}{3} - \frac{2^5}{5} \right) - \left(\frac{(-1+2)^3}{3} - \frac{(-1)^5}{5} \right) \right]$$

$$= \frac{72}{5} \pi$$



(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالة $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $y=x-2$ والمستقيم $y=0$

دورة كاملة حول محور السينات

الشريحة dy // محور الدوران

← الطريقة الاسطوانات

يفضل تكامل dy لانه اذا تم استخدام التكامل dx سوف نحتاج ان نجزئ المساحة.

$y=\sqrt{x} \rightarrow x=y^2$

$y=x-2 \rightarrow x=y+2$

$r=y$

$h=(y+2)-y^2$

$$V = 2\pi \int r\,h\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 y\,(y+2-y^2)\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 y^2 + 2y - y^3 \, dy$$

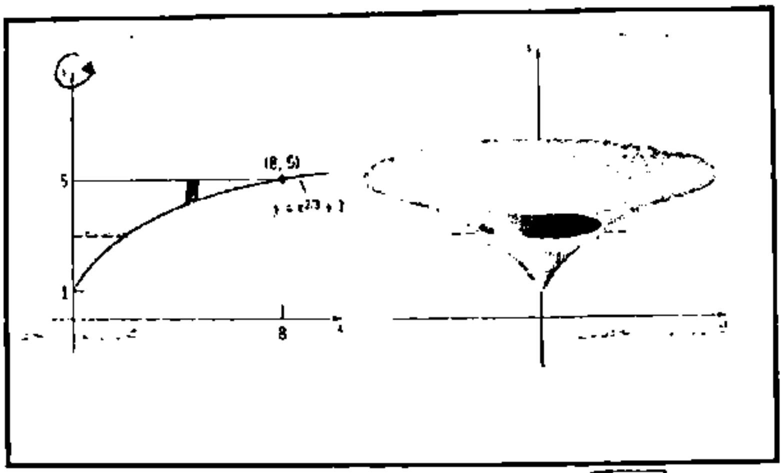
$$= 2\pi \left[\frac{y^3}{3} + \frac{2y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^2$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{(2)^3}{3} + (2)^2 - \frac{(2)^4}{4} \right) - \left(\frac{(0)^3}{3} + (0)^2 - \frac{(0)^4}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{16}{3} \pi$$

(1) اوجد حجم المجسم الناتج

عن دوران المنطقة R المحصورة



بالمنحنى $y = x^{\frac{2}{3}} + 1$ $\curvearrowleft$ $x = (y-1)^{3/2}$

والمستقيم $y = 5$ و المستقيم $x = 0$

حول محور الصادات دورة كاملة

* يمكن حل السؤال بالطريقتين

الطريقة 1

المتكامل dx

⇐ الصدفات

$r = x$

$h = (5) - (x^{2/3} + 1)$

$h = 4 - x^{2/3}$

$V = 2\pi \int r h \, dx$

$= 2\pi \int_0^8 x(4 - x^{2/3}) \, dx$

$= 2\pi \int_0^8 4x - x^{5/3} \, dx$

$= 2\pi \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{3}{8} x^{8/3} \right]_0^8$

$= 2\pi \left[\left(2(8)^2 - \frac{3}{8}(8)^{8/3} \right) - \left(2(0)^2 - \frac{3}{8}(0)^{8/3} \right) \right] = 64\pi$

OR

الطريقة 2

المتكامل dy

⇐ الحلقات/الاقراص

$r_o = (y-1)^{3/2}$

$r_i = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

$= \pi \int_1^5 \left[(y-1)^{3/2} \right]^2 - (0)^2 \, dy$

$= \pi \int_1^5 (y-1)^3 \, dy$

$= \pi \left[\frac{(y-1)^4}{(1)(4)} \right]_1^5$

$= \pi \left[\frac{(5-1)^4}{4} - \frac{(1-1)^4}{4} \right]$

$= 64\pi$

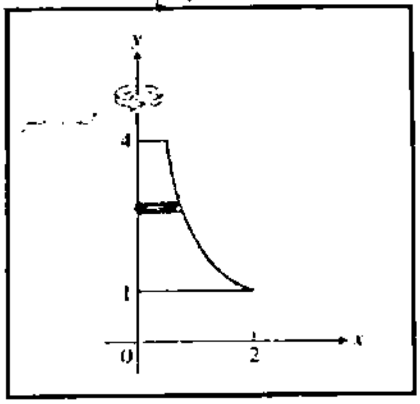
(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = \frac{2}{x}$ والمستقيم $y = 1$ و المستقيم $y = 4$

$y = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{y}$

ومحور الصادات

دورة كاملة حول محور الصادات



* استخدام متكامل dy افضل لانه اذا تم استخدام dx يجب القيام بالتجزئة.

الشريحة ⊥ محور الدوران

⇐ الطريقة: الحلقات

$r_o = \frac{2}{y}$

$r_i = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

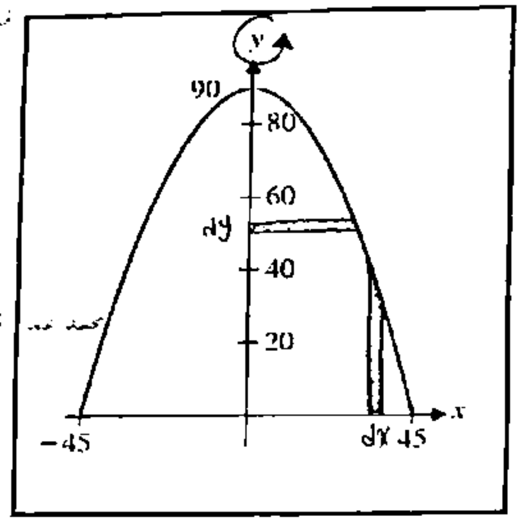
$= \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 - (0)^2 \, dy$

$= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} \, dy$

$= \pi \left[-\frac{4}{y} \right]_1^4$

$= \pi \left[-\frac{4}{4} - \left(-\frac{4}{1}\right) \right] = 3\pi$

(1) اذا كان شكل القبة يتكون من تدوير المنحنى



$$x = \pm\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)} \quad \leftarrow \quad y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$$

حول محور الصادات $\boxed{\text{نصف دورة}}$

(او نصف المنحنى دورة كاملة)

اوجد حجم هذه القبة

حل بالاقراص والاصداف

الطريقة 1

الاصداف (اسهل بهاي الحالة)

الشريحة dx // محور الدوران

$r = x$

$h = -\frac{2}{45}x^2 + 90$

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{45} x\left(-\frac{2}{45}x^2 + 90\right) dx$$

* ناخذ نصف المنحنى فقط (١٥ اعداد الاولى) ونضرب بـ 2 عشان التماثل ما منعملها هيك) لانه حدد بالسؤال انو المنحنى لف نص دورة ← يعني بدنا نصف المنحنى

$$= 2\pi \int_0^{45} -\frac{2}{45}x^3 + 90x \, dx$$

$$= 2\pi \left[-\frac{2}{45} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{90x^2}{2} \right]_0^{45}$$

$$= 2\pi \left[\left(-\frac{2}{180}(45)^4 + 45(45)^2\right) - \left(-\frac{2}{180}(0)^4 + 45(0)^2\right) \right]$$

$$= 91125\pi$$

الطريقة 2

الاقراص

الشريحة dy ⊥ محور الدوران

$r_o = +\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$

* بس بناخذ الجزء الموجب لان السؤال حدد انه بده اللف بس نص دورة ← بالتالي بدنا نصف منحنى فقط

$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^{90} \left(\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}\right)^2 - (0)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^{90} \frac{45}{2}(90-y) \, dy$$

$$= \frac{45\pi}{2} \int_0^{90} 90 - y \, dy$$

$$= \frac{45\pi}{2} \left[90y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{90}$$

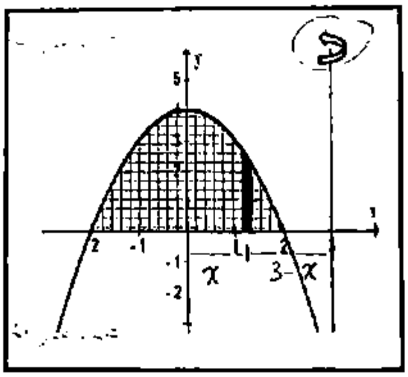
$$= \frac{45\pi}{2} \left[\left(90(90) - \frac{(90)^2}{2}\right) - \left(90(0) - \frac{(0)^2}{2}\right) \right]$$

$$= 91125\pi$$

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = 4 - x^2$ ومحور السينات

حول المستقيم $x = 3$ دورة كاملة



الاهداف افضل

الشريحة // محور الدوران

$r = 3 - x$

$h = (4 - x^2) - (0)$

$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} (3 - x)(4 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} 12 - 3x^2 - 4x + x^3\,dx$$

$$= 2\pi \left[12x - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - \frac{4x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{2}$$

$$= 2\pi \left[\left(12(2) - (2)^3 - 2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4} \right) - \left(12(-2) - (-2)^3 - 2(-2)^2 - \frac{(-2)^4}{4} \right) \right]$$

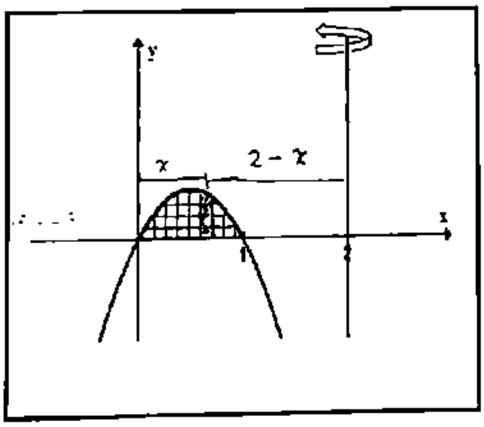
$$= 64\pi$$

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران

المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = x - x^2$

ومحور السينات

دورة كاملة حول محور المستقيم $x = 2$



الاهداف

الشريحة // محور الدوران

$r = 2 - x$

$h = (x - x^2) - (0)$

$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} (2 - x)(x - x^2)\,dx$$

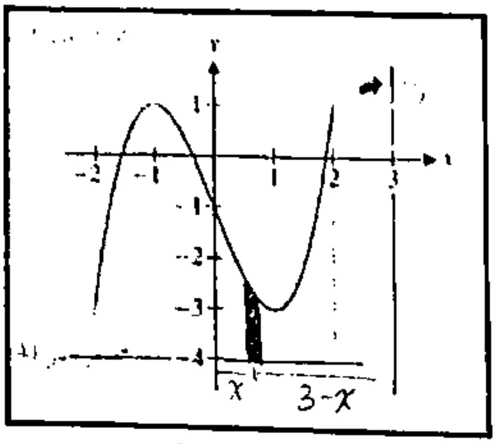
$$= 2\pi \int_{0}^{1} 2x - 2x^2 - x^2 + x^3\,dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} 2x - 3x^2 + x^3\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{x^4}{4} \right]_{0}^{1}$$

$$= 2\pi \left[\left((1)^2 - (1)^3 + \frac{(1)^4}{4} \right) - \left((0)^2 - (0)^3 + \frac{(0)^4}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$



(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران

المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = x^3 - 3x - 1$

والمستقيم $y = -4$ على الفترة $-2 \le x \le 2$

دورة كاملة حول محور المستقيم $x = 3$

الهداف

كم الشريحة // محور الدوران

$r = 3 - x$

$h = (x^3 - 3x - 1) - (-4)$

$= x^3 - 3x + 3$

$V = 2\pi \int r h \, dx$

$= 2\pi \int_{-2}^{2} (3-x)(x^3 - 3x + 3) \, dx$

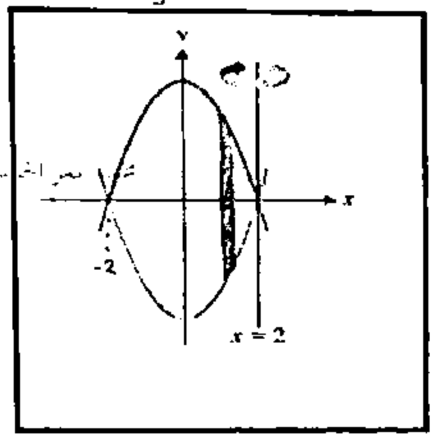
$= 2\pi \int_{-2}^{2} 3x^3 - 9x + 9 - x^4 + 3x^2 - 3x \, dx$

$= 2\pi \int_{-2}^{2} 3x^3 - 12x + 9 - x^4 + 3x^2$

$= 2\pi \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{12x^2}{2} + 9x - \frac{x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} \right]_{-2}^{2}$

$= 2\pi \left[\left(\frac{3(2)^4}{4} - 6(2)^2 + 9(2) - \frac{(2)^5}{5} + (2)^3 \right) - \left(\frac{3(-2)^4}{4} - 6(-2)^2 + 9(-2) - \frac{(-2)^5}{5} + (-2)^3 \right) \right]$

$= \frac{392}{5} \pi$



(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران

المنطقة R_1 المحصورة بالمنحنى $y = 4 - x^2$

والمنحنى $y = x^2 - 4$

دورة كاملة حول محور المستقيم $x = 2$

الاهداف

كم الشريحة // محور الدوران

$r = 2 - x$

$h = (4 - x^2) - (x^2 - 4)$

$= 8 - 2x^2$

$V = 2\pi \int r h \, dx$

$= 2\pi \int_{-2}^{2} (2-x)(8 - 2x^2) \, dx$

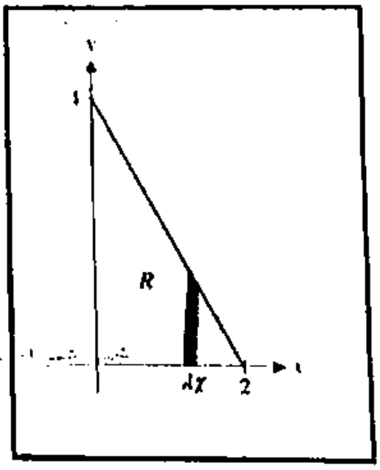
$= 2\pi \int_{-2}^{2} 16 - 4x^2 - 8x + 2x^3 \, dx$

$= 2\pi \left[16x - \frac{4x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + \frac{2x^4}{4} \right]_{-2}^{2}$

$= 2\pi \left[\left(16(2) - \frac{4(2)^3}{3} - 4(2)^2 + \frac{(2)^4}{2} \right) - \left(16(-2) - \frac{4(-2)^3}{3} - 4(-2)^2 + \frac{(-2)^4}{2} \right) \right]$

$= \frac{256}{3} \pi$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمستقيم $y=4-2x$ والمحورين دورة كاملة حول



(1) محور السينات

الشريحة ⊥ محور الدوران

← الحلقات

$r_o = (4-2x)-(0)$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$
$$= \pi \int_0^2 (4-2x)^2 - (0)^2 \, dx$$
$$= \pi \left[\frac{(4-2x)^3}{(-2)(3)} \right]_0^2$$
$$= \pi \left[\frac{(4-2(2))^3}{-6} - \frac{(4-2(0))^3}{-6} \right] = \frac{32}{3}\pi$$

(2) محور الصادات

الشريحة // محور الدوران

← الأسطوانات

$r = x$

$h = (4-2x)-(0)$

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 x(4-2x) \, dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 4x - 2x^2 \, dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = 2\pi \left[\left(2(2)^2 - \frac{2(2)^3}{3}\right) - \left(2(0)^2 - \frac{2(0)^3}{3}\right) \right]$$
$$= \frac{16}{3}\pi$$

(3) المستقيم $x=-1$

الشريحة // محور الدوران

← الأسطوانات

$r = x-(-1)$
$= x+1$
$h = (4-2x)-(0)$

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 (x+1)(4-2x) \, dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 4x - 2x^2 + 4 - 2x \, dx = 2\pi \int_0^2 2x - 2x^2 + 4 \, dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \frac{2x^3}{3} + 4x \right]_0^2 = 2\pi \left[\left((2)^2 - \frac{2(2)^3}{3} + 4(2)\right) - \left((0)^2 - \frac{2(0)^3}{3} + 4(0)\right) \right]$$
$$= \frac{40}{3}\pi$$

(4) المستقيم $y=-2$

الشريحة ⊥ محور الدوران

← الحلقات

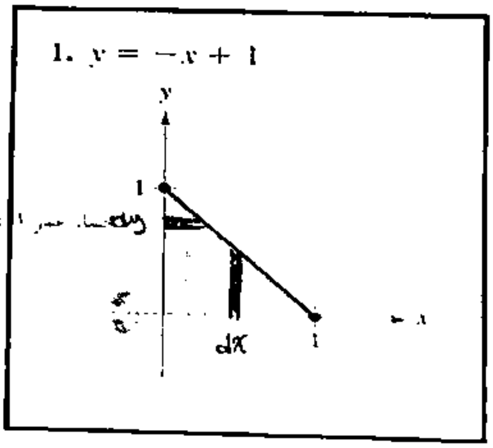
$r_o = (4-2x)-(-2)$
$= 6-2x$

$r_i = 0-(-2)$
$= 2$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$
$$= \pi \int_0^2 (6-2x)^2 - (2)^2 \, dx$$
$$= \pi \left[\frac{(6-2x)^3}{(-2)(3)} - 4x \right]_0^2$$
$$= \pi \left[\left(\frac{(6-2(2))^3}{-6} - 4(2) \right) - \left(\frac{(6-2(0))^3}{-6} - 4(0) \right) \right]$$
$$= \frac{80}{3}\pi$$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R حول المحور المحدد

1. $y = -x + 1$



$x \cdot 0$

الشريحة ⊥ محور الدوران

الحلقات

$r_o = (-x+1) - (0)$

$r_i = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^1 (-x+1) \, dx$

أو

الشريحة // محور الدوران

الأصداف

$y = -x+1$

$x = -y+1$

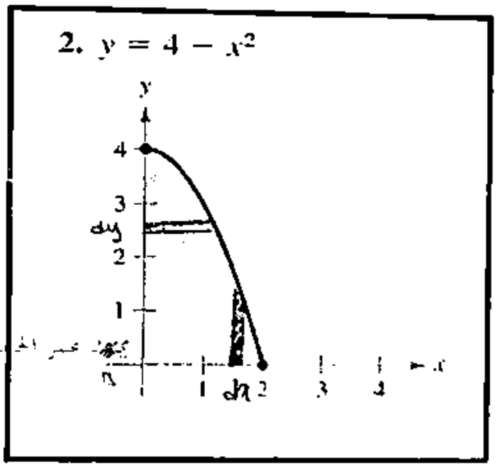
$r = y$

$h = (-y+1) - (0)$

$V = 2\pi \int r h \, dy$

$= 2\pi \int_0^1 y(-y+1) \, dy$

2. $y = 4 - x^2$



1 الحلقات (السهل)

$r_o = (4-x^2) - (0)$

$r_i = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^2 (4-x^2)^2 \, dx$

2 الأصداف (الصعب)

$y = 4 - x^2$

$x = \sqrt{4-y}$

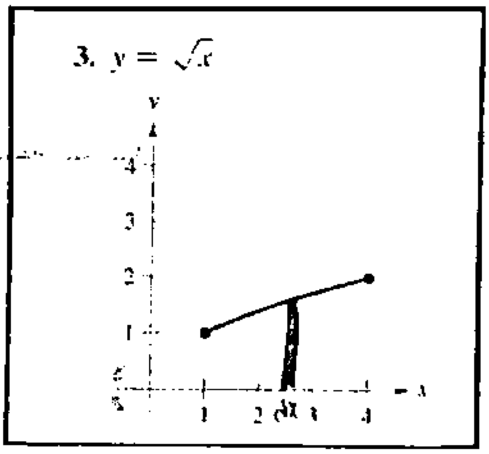
$r = y$

$h = (\sqrt{4-y}) - (0)$

$V = 2\pi \int r h \, dy$

$= 2\pi \int_0^4 y\sqrt{4-y} \, dy$

3. $y = \sqrt{x}$



1 الحلقات (السهل)

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

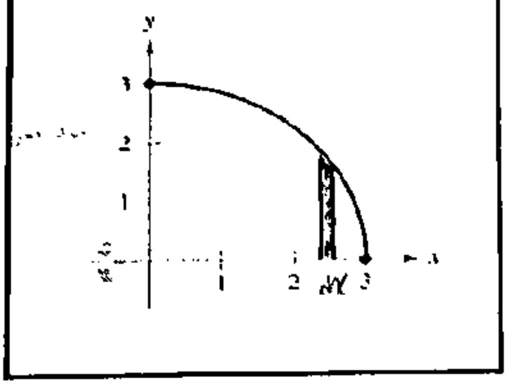
$= \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 \, dx$

$= \pi \int_1^4 x \, dx$

* الأصداف صعب لانه يحتاج الى تجزئة المساحة

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R حول المحور المحدد

4. $y = \sqrt{9 - x^2}$



الشريحة ⊥ محور الدوران

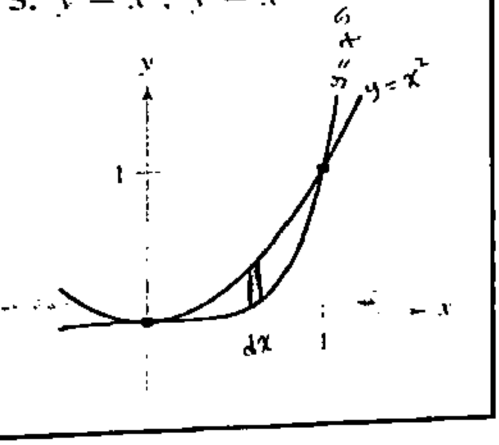
← حلقات

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx \qquad \begin{cases} r_o = (\sqrt{9-x^2}) - (0) \\ r_i = 0 \end{cases}$$

$$= \pi \int_0^3 (\sqrt{9-x^2})^2 - 0^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^3 9 - x^2 \, dx$$

5. $y = x^2, \; y = x^5$



الشريحة ⊥ محور الدوران

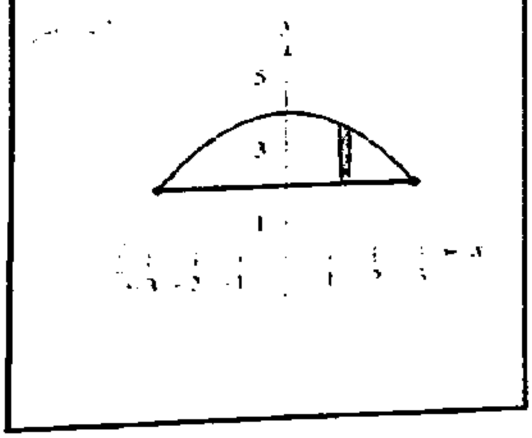
← حلقات

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx \qquad r_o = (x^2) - (0)$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2)^2 - (x^5)^2 \, dx \qquad r_i = (x^5) - (0)$$

$$= \pi \int_0^1 x^4 - x^{10} \, dx$$

6. $y = 2, \; y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$



الشريحة ⊥ محور الدوران

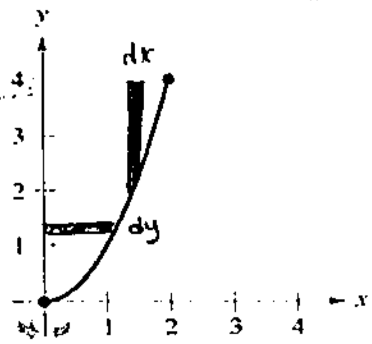
← حلقات

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{3} \left(4 - \frac{x^2}{4}\right)^2 - (2)^2 \, dx \qquad \begin{cases} r_o = \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) - (0) \\ r_i = (2) - (0) \end{cases}$$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R حول المحور المحدد

7. $y = x^2 \rightsquigarrow x = \sqrt{y}$



الشريحة // محور الدوران

الأصداف ⟸

$$V = 2\pi \int r\, h\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x(4 - x^2)\, dx$$

$r = x$

$h = (4) - (x^2)$

أو

الحلقات (اسهل)

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\, dy$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 - (0)^2\, dy$$

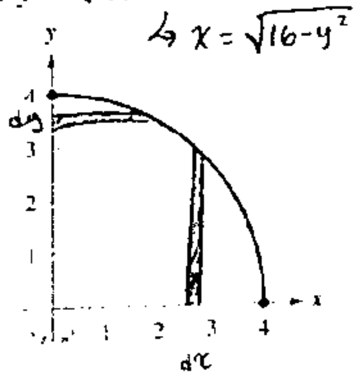
$$= \pi \int_0^4 y\, dy$$

$r_o = (\sqrt{y}) - (0)$

$r_i = 0$

8. $y = \sqrt{16 - x^2}$

$\rightsquigarrow x = \sqrt{16 - y^2}$



الشريحة // محور الدوران

الأصداف ⟸

$$V = 2\pi \int r\, h\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 x\left(\sqrt{16 - x^2}\right) dx$$

$r = x$

$h = \left(\sqrt{16 - x^2}\right) - (0)$

أو

الحلقات (اسهل)

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\, dy$$

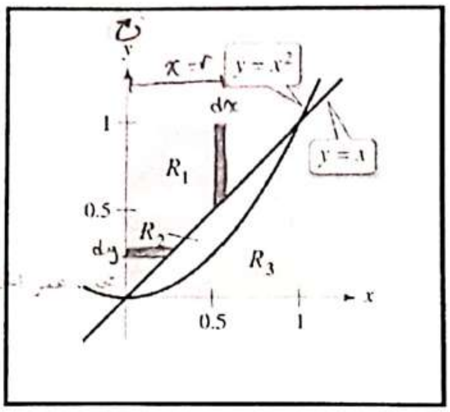
$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{16 - y^2})^2 - (0)^2\, dy$$

$$= \pi \int_0^4 16 - y^2\, dy$$

$r_o = (\sqrt{16 - y^2}) - (0)$

$r_i = 0$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة



(1) R_1 حول المحور $x = 0$

① الإصداف ← الشريحة dx // محور الدوران

$r = x$

$h = (1) - (x)$

$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x\,(1-x)\,dx$$

أو

② الحلقات ← الشريحة dy ⊥ محور الدوران

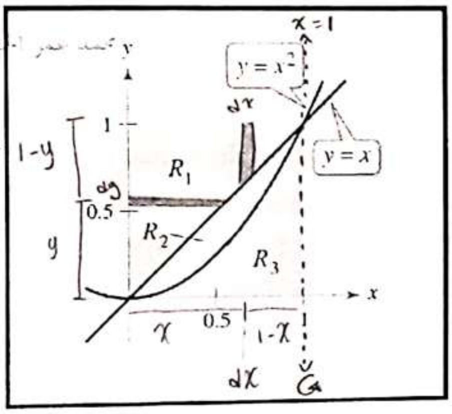
$r_o = (y) - (0)$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\,dy$$

$$= \pi \int_0^1 (y)^2 - (0)^2\,dy$$

$$= \pi \int_0^1 y^2\,dy$$



(2) R_1 حول المحور $x = 1$

① الإصداف

$r = 1 - x$

$h = (1) - (x)$

$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1-x)(1-x)\,dx$$

أو

② الحلقات

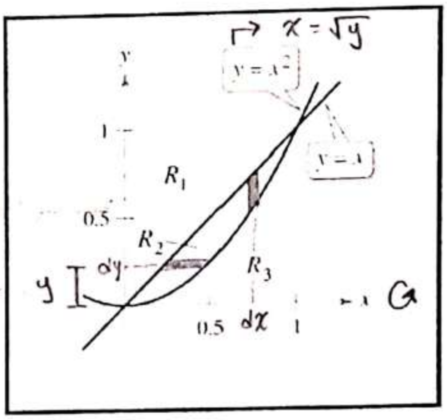
$r_o = (1) - (0)$

$r_i = (1) - (y)$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\,dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1)^2 - (1-y)^2\,dy$$

$$= \pi \int_0^1 1 - (1-y)^2\,dy$$



(3) R_2 حول المحور $y = 0$

① الحلقات

$r_o = (x) - (0)$

$r_i = (x^2) - (0)$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x)^2 - (x^2)^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^2 - x^4\,dx$$

أو

② الأقراص

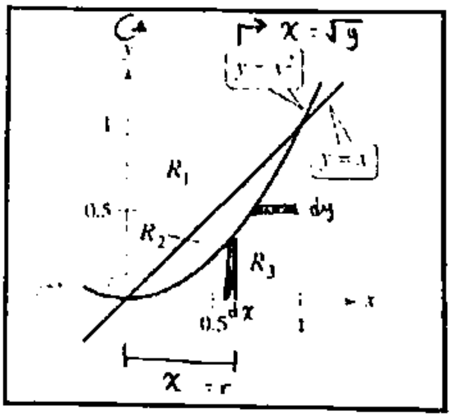
$r = y$

$h = (\sqrt{y}) - (y)$

$$V = 2\pi \int r\,h\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y\,(\sqrt{y} - y)\,dy$$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة



(1) R_3 حول المحور $x=0$

(1) الأصداف

$r = x$

$h = (x^2) - (0)$

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x(x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^3 \, dx$$

أو

(2) الحلقات

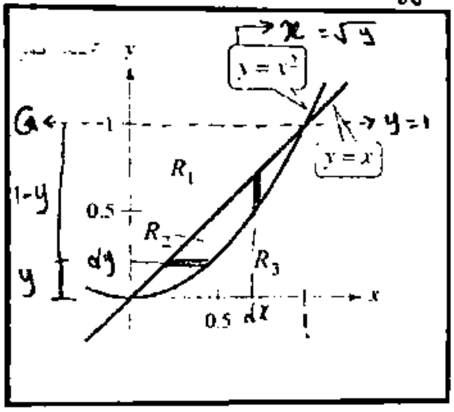
$r_o = (1) - 0$

$r_i = \sqrt{y} - 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1)^2 - (\sqrt{y})^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 1 - y \, dy$$



(2) R_2 حول المحور $y=1$

(1) الحلقات

$r_o = (1) - (x^2)$

$r_i = (1) - (x)$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (1-x^2)^2 - (1-x)^2 \, dx$$

أو

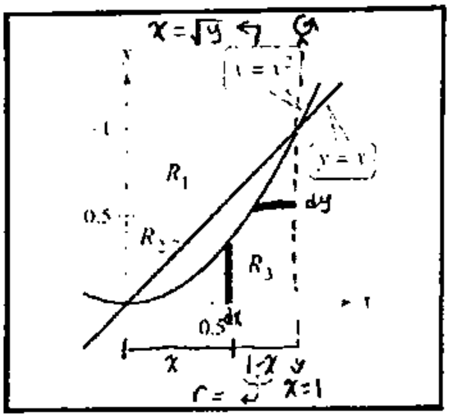
(2) الأصداف

$$V = 2\pi \int r h \, dy$$

$r = 1 - y$

$h = (\sqrt{y}) - (y)$

$$= 2\pi \int_0^1 (1-y)(\sqrt{y} - y)\, dy$$



(3) R_3 حول المحور $x=1$

(1) الأصداف

$r = 1 - x$

$h = (x^2) - (0)$

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1-x)(x^2)\, dx$$

أو

(2) الحلقات

$r_o = (1) - (\sqrt{y})$

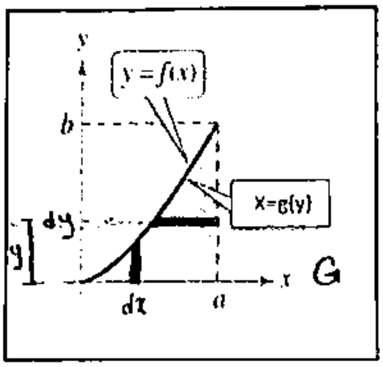
$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1-\sqrt{y})^2 - (0)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1-\sqrt{y})^2 \, dy$$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة بالطريقتين (اقراص وحلقات او اصداف)-



(1) حول المحور $y=0$

① الاقراص والحلقات

الشريحة ⊥ محور الدوران

$r_o = f(x) - 0$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^a [f(x)]^2 - [0]^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^a f^2(x) \, dx$$

② الاصداف

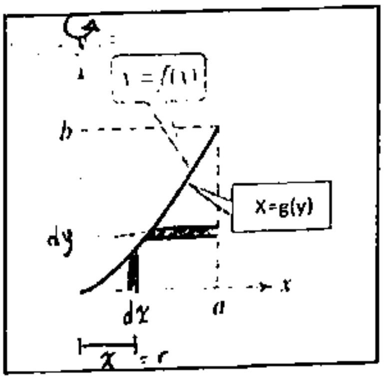
الشريحة // محور الدوران

$r = y$

$h = (a) - [g(y)]$

$$V = 2\pi \int r h \, dy$$

$$= 2\pi \int_0^b y [a - g(y)] \, dy$$



(2) حول المحور $x=0$

① الاصداف

الشريحة // محور الدوران

$r = x$

$h = [f(x)] - [0]$

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^a x \, f(x) \, dx$$

② الاقراص والحلقات

الشريحة ⊥ محور الدوران

$r_o = (a) - (0)$

$r_i = [g(y)] - [0]$

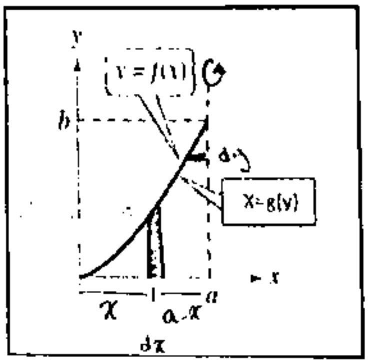
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^b (a)^2 - [g(y)]^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^b a^2 - g^2(y) \, dy$$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة بالطرقتين (اقراص وحلقات او اصداف)

(1) حول المحور $x = a$



$\boxed{1}$ الاقراص

$x = a$

الشريحة dx // محور الدوران

$$V = 2\pi \int r\, h\, dx \qquad r = a - x$$

$$h = f(x) - 0 = f(x)$$

$$= 2\pi \int_0^a (a - x)\, f(x)\, dx$$

$\boxed{2}$ الحلقات

$x = a$

الشريحة dy ⊥ محور الدوران

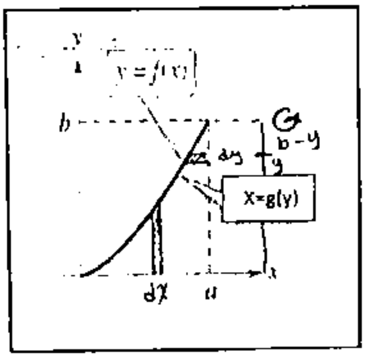
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\, dy$$

$r_o = a - g(y)$

$r_i = 0$

$$= \pi \int_0^b \left[a - g(y) \right]^2 dy$$

(2) حول المحور $y = b$



$\boxed{1}$ الحلقات

$y = b$

الشريحة dx ⊥ محور الدوران

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\, dx \qquad r_o = b - 0 = b$$

$$= \pi \int_0^a b^2 - \left[b - f(x) \right]^2 \qquad r_i = b - f(x)$$

$\boxed{2}$ الاقراص

$y = b$

الشريحة dy // محور الدوران

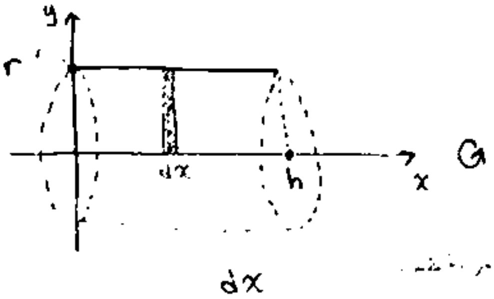
$$V = 2\pi \int r\, h\, dy$$

$r = b - y$

$h = a - g(x)$

$$= 2\pi \int_0^b (b - y)\,(a - g(y))\, dy$$

(1) اثبت ان حجم الاسطوانه الذي نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h هو $v = \pi r^2 h$



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^h (r)^2 - (0)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^h r^2 \, dx$$

* نصف القطر r ثابت ← يخرج من التكامل

$$= \pi r^2 \int_0^h 1 \, dx$$

$$= \pi r^2 (h - 0)$$

$$V = \pi r^2 h$$

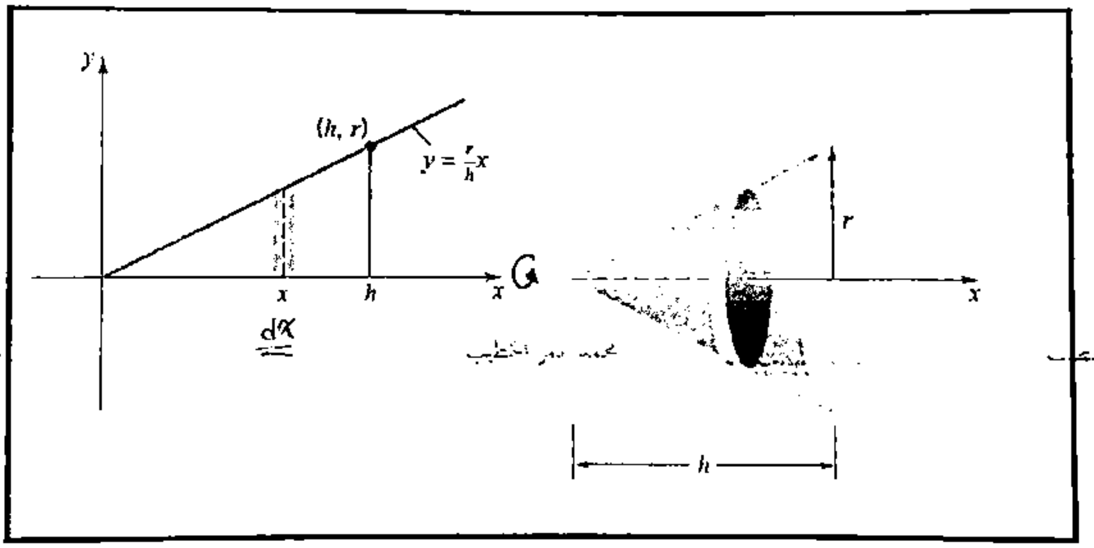
الشريحة $\perp$ محور الدوران

← الحلقات والاقراص

$r_o = r - 0$

$r_i = 0$

(2) اثبت ان حجم المخروط الذي نصف قطر قاعدتة r وارتفاعة h هو $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x\right)^2 - (0)^2 \, dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

الشريحة $\perp$ محور الدوران

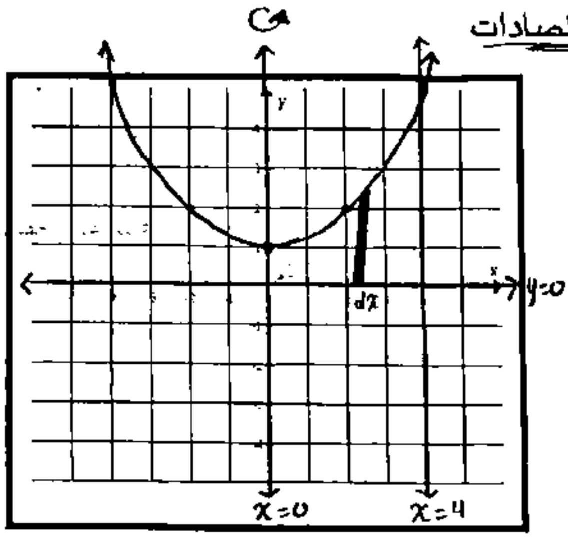
← الحلقات والاقراص

* قيمة $\left(\frac{r}{h}\right)$ قيمة ثابتة ← تخرج من التكامل.

$r_o = \left(\frac{r}{h} x\right) - (0)$

$r_i = 0$

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\frac{1}{4}x^2+1$ والمستقيم $x=0$ والمستقيم $x=4$ والمستقيم $y=0$ دورة كاملة حول محور الصادات



x	-4	-2	0	2	4
y	5	2	1	2	5

$y=\frac{1}{4}x^2+1$

الشريحة // محور الدوران

⟸ الاسطوانات

$r = x$

$h = (\frac{1}{4}x^2+1)-(0)$

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 x\left(\frac{1}{4}x^2+1\right) dx$$

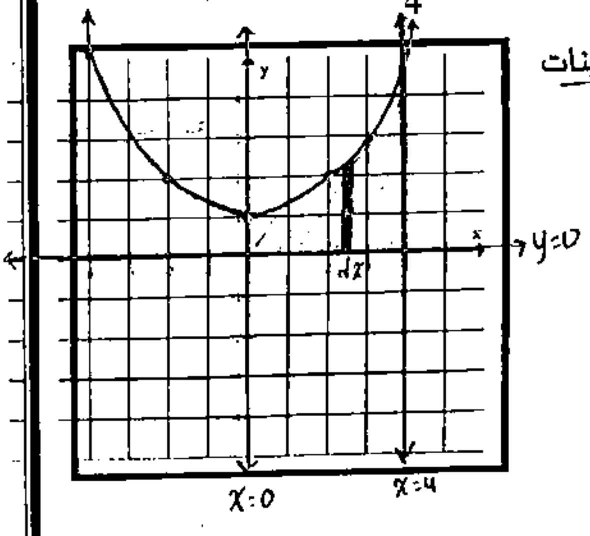
$$= 2\pi \int_0^4 \frac{1}{4}x^3 + x \, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{(4)^4}{16} + \frac{(4)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^4}{16} + \frac{(0)^2}{2}\right)\right]$$

$$= 48\pi$$

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\frac{1}{4}x^2+1$ والمستقيم $x=0$ والمستقيم $x=4$ والمستقيم $y=0$ دورة كاملة حول محور السينات



x	-4	-2	0	2	4
y	5	2	1	2	5

$y=\frac{1}{4}x^2+1$

الشريحة ⊥ محور الدوران

⟸ الحلقات و الاقراص

$r_o = (\frac{1}{4}x^2+1)-(0)$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2+1\right)^2 - (0)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2+1\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2}x^2 + 1 \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{16}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + x\right]_0^4$$

$$= \pi \left[\left(\frac{(4)^5}{80} + \frac{(4)^3}{6} + (4)\right) - \left(\frac{(0)^5}{80} + \frac{(0)^3}{6} + (0)\right)\right]$$

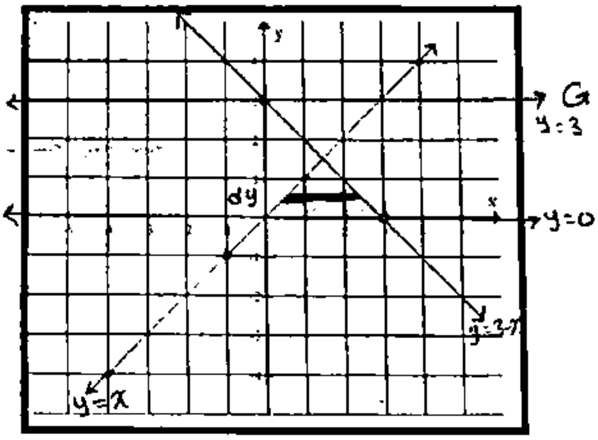
$$= \frac{412}{15}\pi$$

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة R بالمستقيم $y = 3 - x$ والمستقيم $y = x$

$\to x = 3 - y$

والمستقيم $y = 0$ دورة كاملة حول

(1) حول المستقيم $y = 3$



* الأفضل استخدام طريقة الإبدال

حتى نتجنب تجزئة المساحة

← الشريحة // محور الدوران

$$V = 2\pi \int r\,h\,dy \qquad r = y$$

$$h = (3-y) - (y) = 3 - 2y$$

$$= 2\pi \int_0^{3/2} y(3-2y)\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^{3/2} 3y - 2y^2\,dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{2y^3}{3}\right]_0^{3/2}$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{3(\frac{3}{2})^2}{2} - \frac{2(\frac{3}{2})^3}{3}\right) - \left(\frac{3(0)^2}{2} - \frac{2(0)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{9}{4}\pi$$

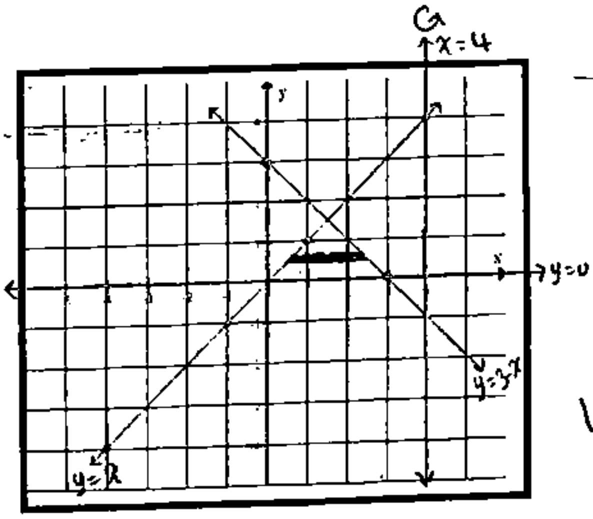
لإيجاد نقطة التقاطع نساوي المعادلتين

$$3 - y = y$$

$$3 - 2y = 0$$

$$y = 3/2$$

(2) حول المستقيم $x = 4$



* الأفضل استخدام طريقة الحلقات

حتى نتجنب تجزئة المساحة

← الشريحة ⊥ محور الدوران

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\,dy \qquad r_o = (4) - (y)$$

$$= \pi \int_0^{3/2} (4-y)^2 - (1+y)^2\,dy \qquad r_i = (4) - (3-y) = 1 + y$$

$$= \pi \int_0^{3/2} (16 - 8y + y^2) - (1 + 2y + y^2)\,dy$$

$$= \pi \int_0^{3/2} 15 - 10y\,dy$$

$$= \pi \left[15y - \frac{10y^2}{2}\right]_0^{3/2} = \pi\left[\left(15(\tfrac{3}{2}) - 5(\tfrac{3}{2})^2\right) - \left(15(0) - 5(0)^2\right)\right]$$

$$= \frac{45}{4}\pi$$

لإيجاد نقطة التقاطع نساوي المعادلتين

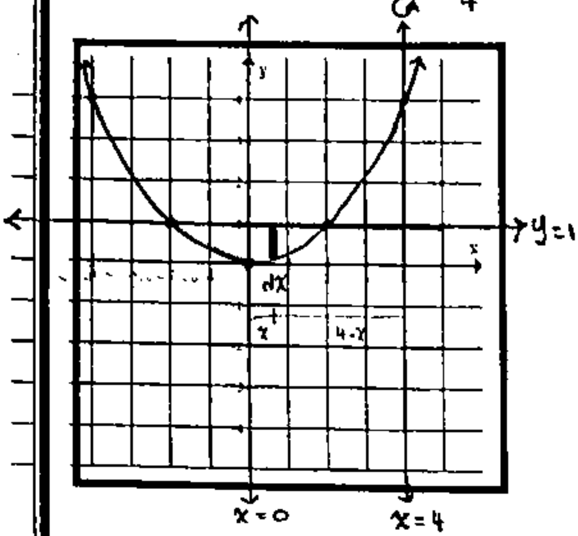
$$3 - y = y$$

$$3 - 2y = 0$$

$$y = 3/2$$

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y=1$

و محور الصادات دورة كاملة حول المستقيم $x=4$



x	-4	-2	0	2	4
y	4	1	0	1	4

$y=\frac{1}{4}x^2$

الشريحة // محور الدوران ⇐ الاسطوانات

$V=2\pi\int rh\,dx$ $\qquad r=4-x$

$=2\pi\int_0^1 (4-x)\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)dx$ $\qquad h=(1)-\left(\frac{1}{4}x^2\right)$

$=2\pi\int_0^1 4-x^2-x+\frac{1}{4}x^3\,dx$

$=2\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^1$

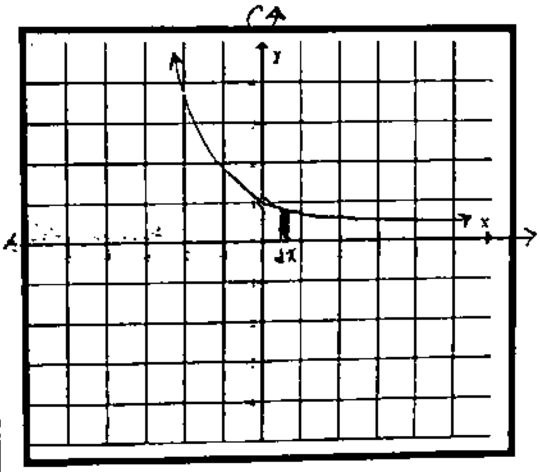
$=2\pi\left[\left(4(1)-\frac{(1)^3}{3}-\frac{(1)^2}{2}+\frac{(1)^4}{16}\right)-\left(4(0)-\frac{(0)^3}{3}-\frac{(0)^2}{2}+\frac{(0)^4}{16}\right)\right]$

$=\frac{155}{24}\pi$

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة R

بالمنحنى $y=e^{-x^2}$ والمستقيم $y=0$ على الفترة $[0,2]$

دورة كاملة حول الصادات



الشريحة // محور الدوران

⇐ الاسطوانات

$V=2\pi\int rh\,dx$ $\qquad r=x$

$=2\pi\int_0^2 x e^{-x^2}dx$ $\qquad h=(e^{-x^2})-(0)$

$=\cancel{2}\pi\cdot-\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^2 -2x e^{-x^2}dx$

$=-\pi\left[e^{-x^2}\right]_0^2 \quad =-\pi\left[e^{-(2)^2}-e^{-(0)^2}\right]$

$=-\frac{\pi}{e^4}-\pi$

يمثل كل من التكاملات التالية حجم مجسم ، ارسم المنطقة R وحدد محور الدوران الذي ينتج عنه المجسم ثم حول التكامل بدلالة y

(1) $\int_0^1 2\pi x(x-x^2)\,dx$

* الشريحة: dx
* الحجم بالاهداف
محور الدوران : y

$V = 2\pi \int r\,h\,dx$

$r = x \;;\; h = x - x^2$

الدالة الاولى : $y = x$ ، الدالة الثانية : $y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$

الشريحة dy $\perp$ محور الدوران y ← الحلقات

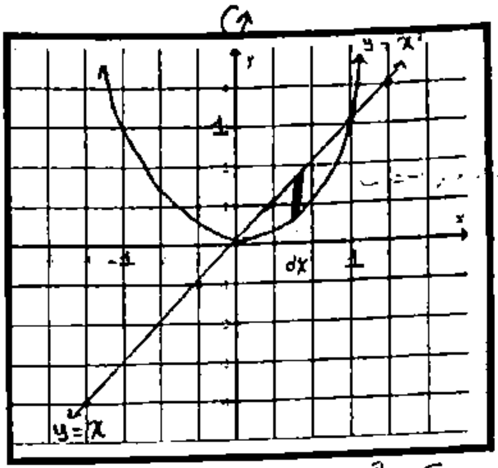
$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

$= \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 - (y)^2 \, dy$

$= \pi \int_0^1 y - y^2 \, dy$

$r_o = (\sqrt{y}) - (0)$

$r_i = (y) - (0)$



غيرت تدريج المستوى لكي تكون الرسمة اكثر وضوحاً

(2) $\int_0^1 \pi\left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right] dx$

* الشريحة/المكامل dx
* الحجم بالحلقات
محور الدوران x

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$r_o = \sqrt{x}$ ؛ $r_i = x^2$
الدالة الخارجية ؛ الدالة الداخلية

$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$ $\qquad$ $y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$

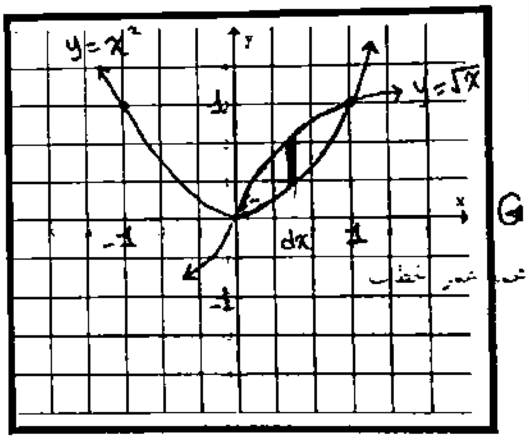
الشريحة dy // محور الدوران x ← الاهداف

$V = 2\pi \int r\,h\,dy$

$= 2\pi \int_0^1 y(\sqrt{y} - y^2)\,dy$

$r = y$

$h = (\sqrt{y}) - (y^2)$



(3) $\int_0^2 \pi(4-y^2)^2\,dy$

* الشريحة/المكامل dy
* الحجم بالحلقات
محور الدوران y

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

$r_o = 4 - y^2 \;;\; r_i = 4 - y^2 \rightarrow x = 4 - y^2$

$\rightarrow y = \pm\sqrt{4-x}$

الشريحة dx // محور الدوران y ← الاهداف

$V = 2\pi \int r\,h\,dx$

$= 2\pi \int_0^4 x\sqrt{4-x}\,dx$

$r = x$

$h = (\sqrt{4-x}) - (0)$