

## 9-2 الصور القطبية والديكارتية للمعادلات

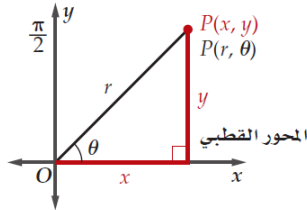
## ورقة عمل الثاني عشر العام

1- التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية. 2- تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

في هذا الدرس سوف أتعلم:

## تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

## مفهوم أساسي



إذا كان للنقطة  $P$  الإحداثيات القطبية  $(r, \theta)$ ، فإن الإحداثيات الديكارتية  $(x, y)$  للنقطة  $P$  هي:

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta$$

$$\text{أي أن } (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

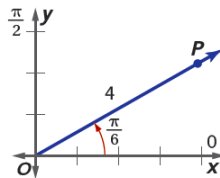
## تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

$$P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ &= 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & &= 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\sqrt{3} & &= 2 \\ &\approx 3.46 & & \end{aligned}$$

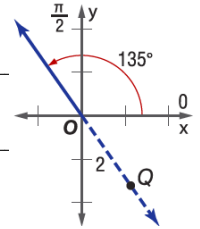
$$P(3.46, 2)$$



$$Q(-2, 135^\circ)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ &= -2 \cos 135^\circ & &= -2 \sin 135^\circ \\ &= \sqrt{2} & &= -\sqrt{2} \\ &\approx 1.4 & &\approx -1.4 \end{aligned}$$

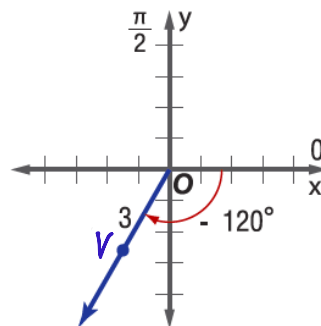
$$Q(1.4, -1.4)$$



$$V(3, -120^\circ)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ &= 3 \cos(-120^\circ) & &= 3 \sin(-120^\circ) \\ &= -1.5 & &= \frac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2.6 \end{aligned}$$

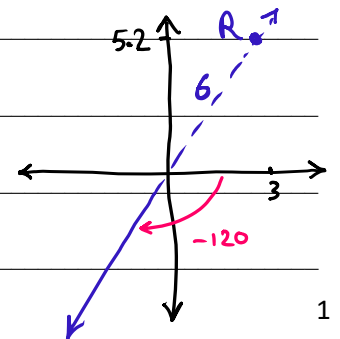
$$V(-1.5, -2.6)$$



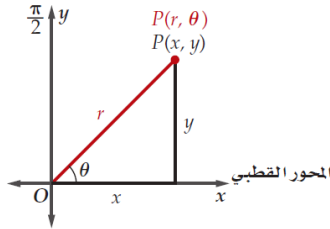
$$R(-6, -120^\circ)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ &= -6 \cos(-120^\circ) & &= -6 \sin(-120^\circ) \\ &= 3 & &= 3\sqrt{3} \approx 5.2 \end{aligned}$$

$$R(3, 5.2)$$



## مفهوم أساسي



إذا كان للنقطة  $P$  الإحداثيات الديكارتية  $(x, y)$ ، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة  $P$  هي  $(r, \theta)$  حيث:

$$x > 0 \text{ عندما } \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

وعندما  $x < 0$  فإن:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi$$

$$\text{أو } \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} + 180^\circ$$

وعندما  $x = 0$  فإن:  $\theta = \frac{\pi}{2}$  إذا كانت  $r = y$ ،  $y > 0$

أو  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  إذا كانت  $r = y$ ،  $y < 0$

## تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي:

$$S(1, -\sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$= 2$$

$$\tan \theta' = \left| \frac{y}{x} \right|$$

$$\theta = 360 - 60 = 300^\circ$$

$$\tan \theta' = \sqrt{3}$$

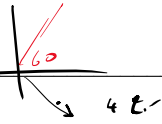
$$\theta = 300 - 360 = -60^\circ$$

$$\theta' = \tan^{-1} \sqrt{3}$$

$$S(2, 300^\circ) \text{ أو } S(2, -60^\circ)$$

$$\theta' = 60^\circ$$

$$S(-2, 120^\circ), S(-2, -240^\circ)$$



$$T(-3, 6)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$$

$$= 3\sqrt{5} \approx 6.71$$

$$\tan \theta' = \left| \frac{y}{x} \right|$$

$$\tan \theta' = \left| \frac{6}{-3} \right| = 2$$

$$\theta' = \tan^{-1} 2$$

$$\theta' = 63.4^\circ$$

النقطة في الربع 2

$$\theta = 180 - 63.4^\circ = 116.6^\circ$$

$$\theta = 116.6 - 360 = -243.4^\circ$$

$$T(6.71, 116.6^\circ) \text{ أو } T(6.71, -243.4^\circ)$$

$$T(-6.71, 296.6^\circ) \text{ أو } T(-6.71, -63.4^\circ)$$

$$V(8, 10)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + 10^2}$$

$$= 12.81$$

$$\tan \theta' = \left| \frac{10}{8} \right|$$

$$\theta' = \tan^{-1} \left( \frac{10}{8} \right)$$

$$\theta' = 51.3^\circ$$

النقطة في الربع 1

$$\theta = 51.3^\circ$$

$$V(12.81, 51.3^\circ) \text{ أو } V(-12.81, 231.3^\circ)$$

$$V(12.81, -308.7^\circ) \text{ أو } V(-12.81, -128.7^\circ)$$

$$W(-9, -4)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(-9)^2 + (-4)^2}$$

$$= 9.85$$

$$\tan \theta' = \left| \frac{-4}{-9} \right|$$

$$\theta' = \tan^{-1} \left( \frac{4}{9} \right)$$

$$\theta' = 24^\circ$$

النقطة في الربع 3

$$\theta = 180 + 24 = 204^\circ$$

$$W(9.85, 204^\circ) \text{ أو } W(-9.85, -156^\circ)$$

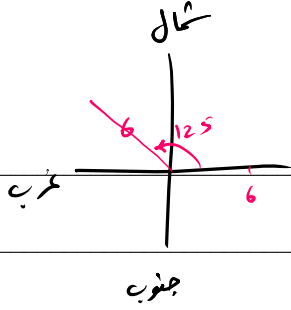
$$W(-9.85, 24^\circ) \text{ أو } W(-9.85, -336^\circ)$$

## من واقع الحياة: التحويل بين الإحداثيات

**صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد مثبت في قارب صيد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة  $(6, 125^\circ)$ .

(A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

(B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية  $(-2, 6)$ ، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟



$$x = r \cos \theta \Rightarrow x = 6 \cos 125 = -3.44 \quad (A)$$

$$y = r \sin \theta \Rightarrow y = 6 \sin 125 = 4.91$$

الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك  $(-3.44, 4.91)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \boxed{6.32} \quad (B)$$

$$\tan \theta' = \left| \frac{y}{x} \right| = 3$$

$$\theta' = \tan^{-1} 3$$

$$\theta' = 71.57^\circ$$

النقطة في الربع 2

$$\Rightarrow \theta = 180 - 71.57 = 108.43^\circ$$

مع أخذ الإحداثيات القطبية  $\leftarrow (6.32, 108.43^\circ)$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة؛ إذ نعوض عن  $x$  بـ  $r \cos \theta$  وعن  $y$  بـ  $r \sin \theta$ ، ثم نبسط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.

تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

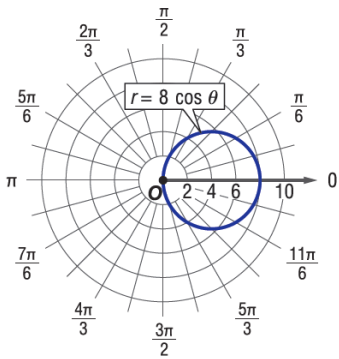
$$(r \cos \theta - 4)^2 + (r \sin \theta)^2 = 16$$

$$r^2 \cos^2 \theta - 8r \cos \theta + 16 + r^2 \sin^2 \theta = 16$$

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 8r \cos \theta = 16 - 16$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 8r \cos \theta = 0$$

$$r^2 (1) - 8r \cos \theta = 0 \quad \div r$$



$$r - 8 \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow r = 8 \cos \theta$$

$$y = x^2$$

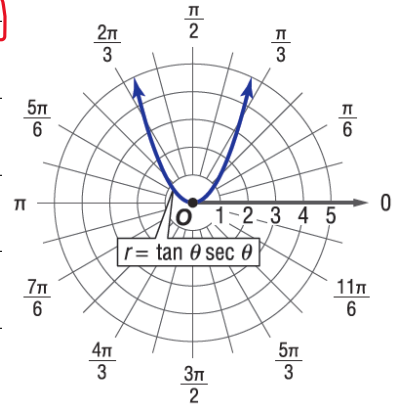
$$r \sin \theta = (r \cos \theta)^2$$

$$r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta \quad \div r$$

$$\sin \theta = r \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow r = \tan \theta \sec \theta$$



الرسم / قطع مكافئ

مركزه (0,0) فوقه

لأعلى

$$x^2 - y^2 = 1$$

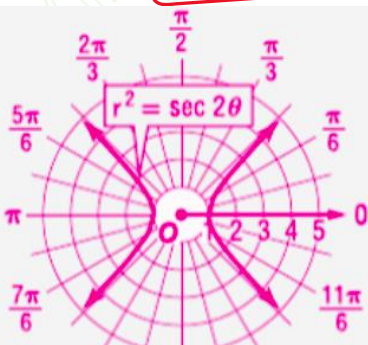
$$(r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2 = 1$$

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1$$

$$r^2 \cos 2\theta = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{\cos 2\theta}$$

$$\Rightarrow r^2 = \sec 2\theta$$



قطع زائد أفقي

مركزه (0,0)

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9$$

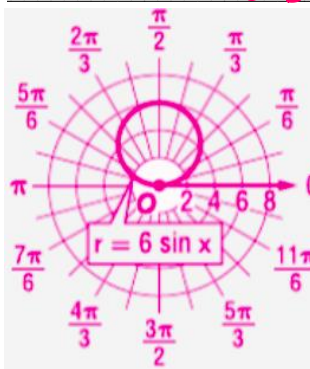
$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta - 3)^2 = 9$$

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 6r \sin \theta + 9 = 9$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 6r \sin \theta = 9 - 9$$

$$r^2 (1) - 6r \sin \theta = 0 \quad \div r$$

$$r - 6 \sin \theta = 0 \Rightarrow r = 6 \sin \theta$$



دائرة مركزها (0,3)

ونصف قطرها 3

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$$r^2 = x^2 + y^2, \tan \theta = \frac{y}{x}, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية:

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

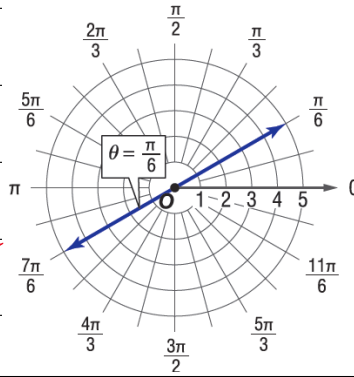
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله  $\frac{\sqrt{3}}{3}$



$$r = 7$$

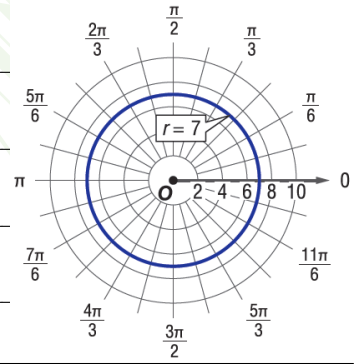
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 7^2$$

$$x^2 + y^2 = 49$$

دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها 7



$$r = -5 \sin \theta \quad \times r$$

$$r^2 = -5 r \sin \theta$$

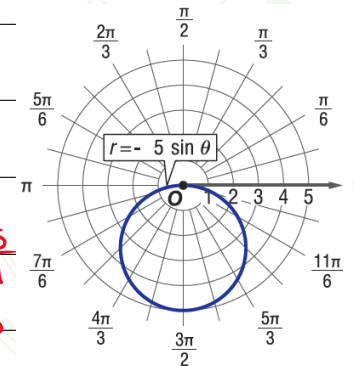
$$x^2 + y^2 = -5 y$$

$$x^2 + y^2 + 5 y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 5 y + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

دائرة مركزها  $(0, -\frac{5}{2})$  و  $r = \frac{5}{2}$



$$r = 3 \cos \theta \quad \times r$$

$$r^2 = 3 r \cos \theta$$

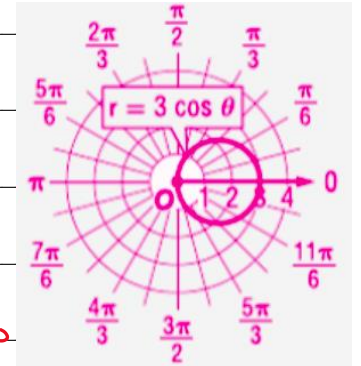
$$x^2 + y^2 = 3 x$$

$$x^2 - 3 x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 3 x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

دائرة مركزها  $(\frac{3}{2}, 0)$  و  $r = \frac{3}{2}$



$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

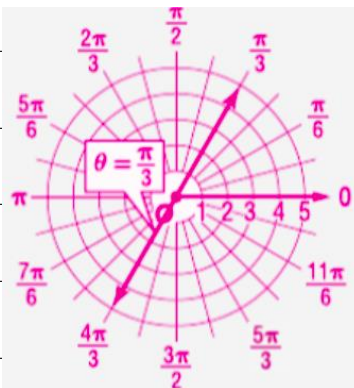
$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3} x$$

مستقيم يمر بنقطة الأصل

وميله  $\sqrt{3}$



$$r = -3$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = (-3)^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها 3

