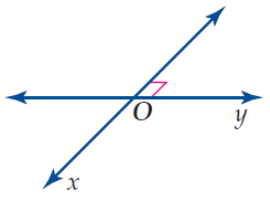
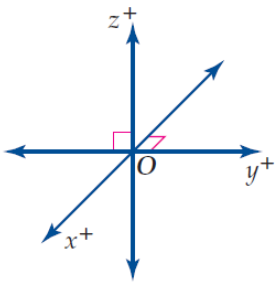
ورقة عمل الثاني عشر العام — 8-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

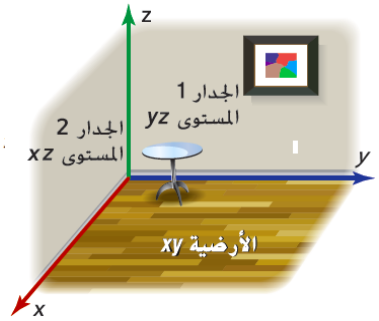
في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تحديد النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. 2- التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا وإجراء العمليات عليها.



الشكل 1.4.1



الشكل 1.4.2



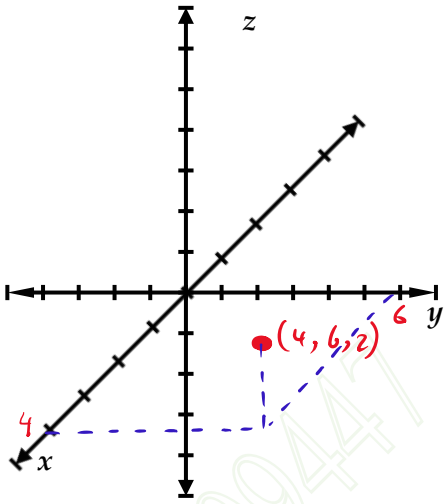
الشكل 1.4.3

تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى $x\,y$ ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z .

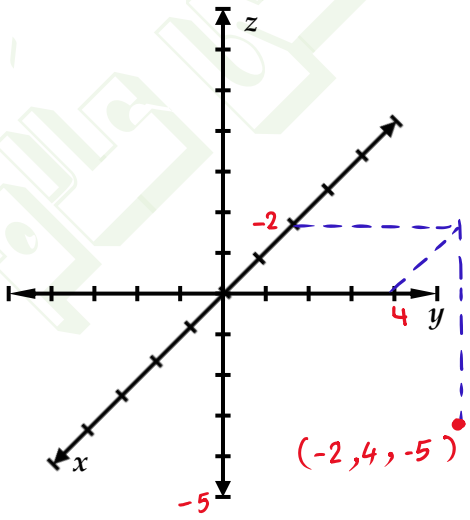
تعيين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

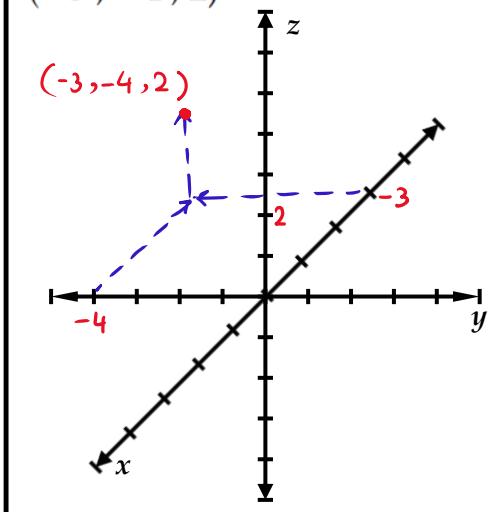
(4 , 6 , 2)



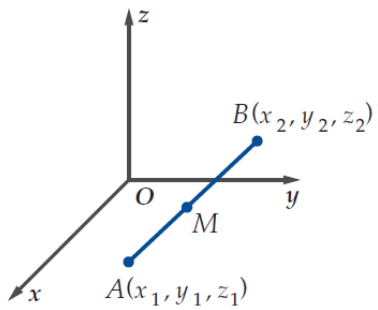
(−2 , 4 , −5)



(−3 , −4 , 2)



مفهوم أساسي — صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء



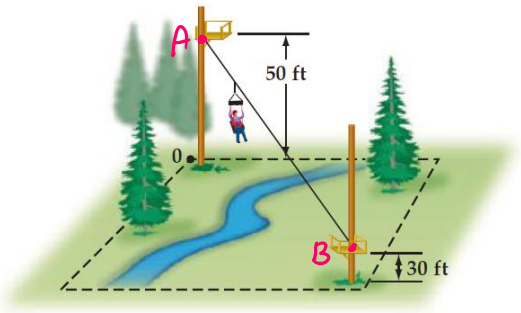
تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء



رحلة : تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: (10, 12, 50) , (70, 92 , 30)، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدمٍ.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

a) $AB = \sqrt{(70-10)^2 + (92-12)^2 + (30-50)^2} = 20\sqrt{26} = 102$ ft تقريباً

b) منتصف $AB = \left(\frac{70+10}{2}, \frac{92+12}{2}, \frac{30+50}{2}\right) = (40, 52, 40)$

الطائرات تتطلب لوائح السلامة أن تكون الطائرات على بعد 0.8 km على الأقل عند وجودها في السماء. تطير طائرتان أعلى دبي بالإحداثيات (90, 45, 9000) و (135, −75, 8400)، حيث يتم قياس الإحداثيات بالأمتار.

A. هل الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة؟ اشرح.

B. إذا تم إطلاق ألعاب نارية وانفجرت بين الطائرتين مباشرة، فما إحداثيات نقطة انفجار الألعاب النارية؟

A) المسافة بين الطائرتين $= \sqrt{(135-90)^2 + (-75-45)^2 + (8400-9000)^2} = 613.5$ m

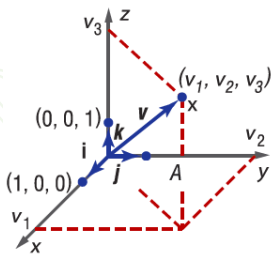
المسافة بين الطائرتين $613.5 \text{ m} \Rightarrow 0.6135 \text{ km}$

الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة لأن المسافة بينهما أقل من 0.8 km .

B) نقطة منتصف الطائرتين $= \left(\frac{135+90}{2}, \frac{-75+45}{2}, \frac{8400+9000}{2}\right)$

$= (112.5, -15, 8700)$

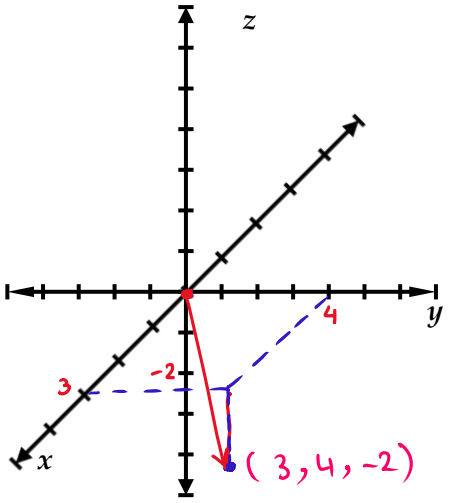
المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$، كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$، كما في الشكل 1.4.4 ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



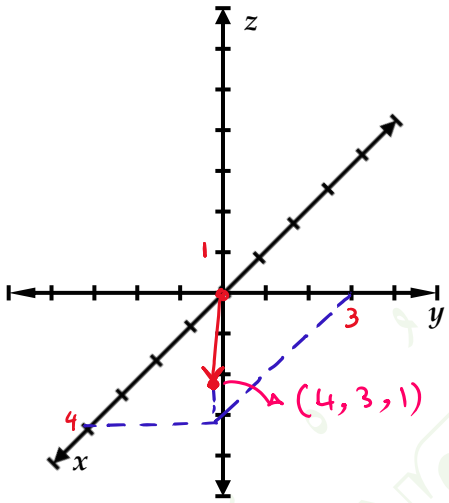
تعيين متجه في الفضاء

مثل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

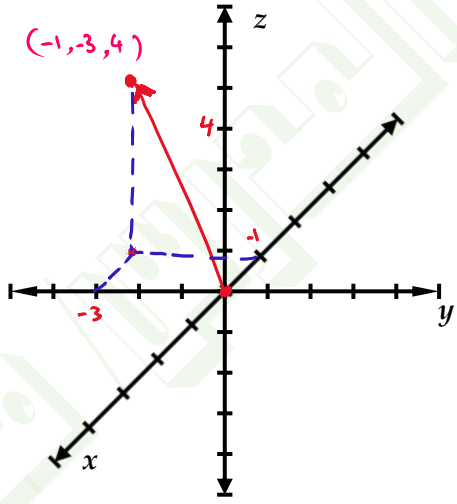
$\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$



$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$



$\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$



التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا

جد الصورة المركبة وطول $\overline{AB}$ (مقدار) المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overline{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

$A(-4,-2,1)$, $B(3,6,-6)$

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$

$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1 \rangle$

$= \langle 7, 8, -7 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2}$

$= 9\sqrt{2} = 12.7$

$u = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\langle 7,8,-7 \rangle}{9\sqrt{2}}$

$= \left\langle \dfrac{7}{9\sqrt{2}} , \dfrac{8}{9\sqrt{2}} , \dfrac{-7}{9\sqrt{2}} \right\rangle$

$= \left\langle \dfrac{7\sqrt{2}}{18} , \dfrac{4\sqrt{2}}{9} , -\dfrac{7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$

$A(-2,-5,-5)$, $B(-1,4,-2)$

$\overrightarrow{AB} = \langle -1-(-2), 4-(-5), -2-(-5) \rangle$

$= \langle 1, 9, 3 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 9^2 + 3^2}$

$= \sqrt{91} = 9.5$

$u = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\langle 1, 9, 3 \rangle}{\sqrt{91}}$

$= \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{91}} , \dfrac{9}{\sqrt{91}} , \dfrac{3}{\sqrt{91}} \right\rangle$

$= \left\langle \dfrac{\sqrt{91}}{91} , \dfrac{9\sqrt{91}}{91} , \dfrac{3\sqrt{91}}{\sqrt{91}} \right\rangle$

$A(-1,4,6)$, $B(3,3,8)$

$\overrightarrow{AB} = \langle 3-(-1), 3-4, 8-6 \rangle$

$= \langle 4, -1, 2 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{21} = 4.6$

$u = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\langle 4, -1, 2 \rangle}{\sqrt{21}}$

$= \left\langle \dfrac{4}{\sqrt{21}} , -\dfrac{1}{\sqrt{21}} , \dfrac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$

$= \left\langle \dfrac{4\sqrt{21}}{21} , -\dfrac{\sqrt{21}}{21} , \dfrac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle$

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًّا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

(a $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$4y + 2z = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$

$= \langle 4(3) + 2(-2), 4(-6) + 2(0), 4(2) + 2(5) \rangle$

$= \langle 8, -24, 18 \rangle$

(b $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$2w - z - 3y = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$

$= \langle 2(-1) - (-2) + 3(3), 2(4) - 0 + 3(-6), 2(-4) - 5 + 3(2) \rangle$

$= \langle 9, -10, -7 \rangle$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

(a $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$

$4w - 8z = 4\langle -1, 4, -4 \rangle - 8\langle -2, 0, 5 \rangle$

$= \langle 4(-1) - 8(-2), 4(4) - 8(0), 4(-4) - 8(5) \rangle$

$= \langle 12, 16, -56 \rangle$

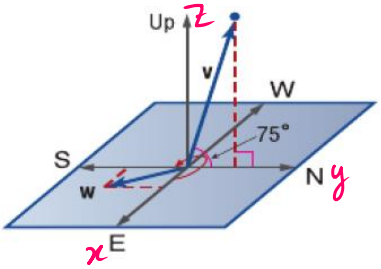
(b $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

$3y + 3z - 6w = 3\langle 3, -6, 2 \rangle + 3\langle -2, 0, 5 \rangle - 6\langle -1, 4, -4 \rangle$

$= \langle 3(3) + 3(-2) - 6(-1), 3(-6) + 3(0) - 6(4), 3(2) + 3(5) - 6(-4) \rangle$

$= \langle 9, -42, 45 \rangle$

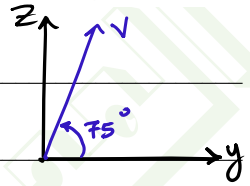
استخدام المتجهات في الفضاء



الصواريخ بعد انطلاق صاروخ نموذجي متجه نحو الشمال بزاوية صعود 75° بالنسبة إلى المركبة الأفقية بسرعة 320 km/h. فإذا هبت الرياح من الاتجاه الشمالي الغربي بسرعة 8 km/h، جد متجهًا يعبر عن سرعة الصاروخ الناتجة بالنسبة إلى نقطة الانطلاق.

$V = \langle 0, 320\cos 75, 320\sin 75 \rangle$

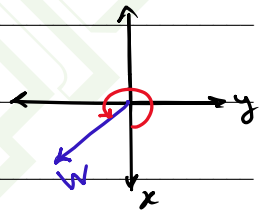
$V = \langle 0, 82.8, 309.1 \rangle$



اتجاه الرياح مع محور x الموجب = 315°

$\Rightarrow W = \langle 8\cos 315, 8\sin 315, 0 \rangle$

$W = \langle 5.7, -5.7, 0 \rangle$

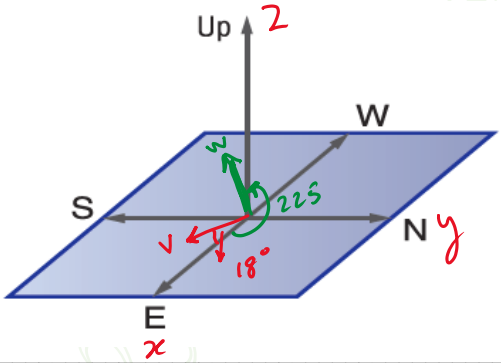


متجه الصاروخ بعد تأثير الرياح بالنسبة لنقطة الانطلاق $= V + W$

$= \langle 0, 82.8, 309.1 \rangle + \langle 5.7, -5.7, 0 \rangle$

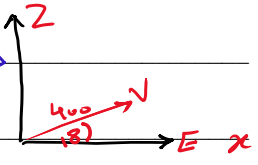
$= \langle 5.7, 77.1, 309.1 \rangle$

الطيران بعد إقلاع طائرة، تتجه شرقًا وتستمر في الارتفاع بزاوية 18° بالنسبة للمركبة الأفقية. تبلغ سرعة طيرانها 400 km/h. إذا كانت الرياح تهب من الشمال الشرقي بسرعة 16 km/h، فجد المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة الناتجة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. وافترض أن i يتجه نحو الشرق و j يتجه نحو الشمال و k يتجه لأعلى.



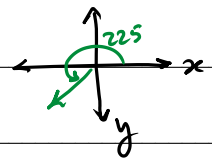
$V = \langle 400\cos 18, 0, 400\sin 18 \rangle$

$V = \langle 380.4, 0, 123.6 \rangle$



$W = \langle 16\cos 225, 16\sin 225, 0 \rangle$

$W = \langle -11.3, -11.3, 0 \rangle$



متجه السرعة الناتجة للطائرة $= V + W$

$= \langle 380.4, 0, 123.6 \rangle + \langle -11.3, -11.3, 0 \rangle$

$= \langle 369.1, -11.3, 123.6 \rangle$