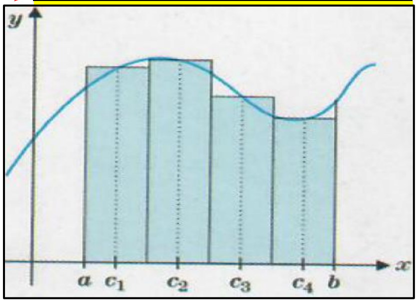
الرياضيات ـ 12 متقدم - ف2

(7 - 5) التكامل العددي

التكاملات $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$, $\int_0^2 \cos x^2 \; dx$ وغيرها العديد من التكاملات المحدودة لا يمكن حسابها بشكل دقيق باستخدام قواعد وطرق التكامل.... يأتي التكامل العددي ليوجد قيم تقريبية لمثل هذه التكاملات.

أولاً: قاعدة نقطة المنتصف: إحدى طرق التقريب بالمستطيلات في مجاميع ريمان



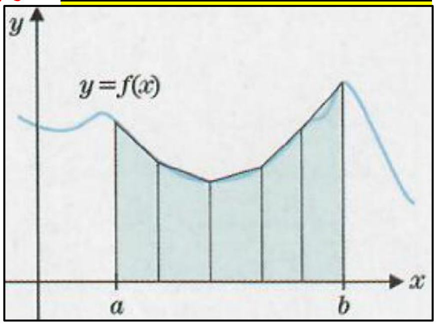
$$\int_a^b f(x)\; dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left[f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\;\dots\dots\dots+f(c_{n-1})+f(c_n)\right]$$

حيث c_i هي نقطة منتصف الفترة الجزئية $[x_{i-1},x_i]$

$c_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ لـ $i=1,2,\dots\dots,n$

ثانياً: قاعدة شبه المنحرف: طريقة أشباه المنحرفات

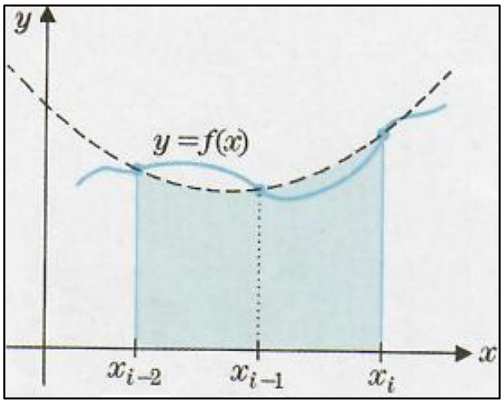


$$\int_a^b f(x)\; dx$$

$$\approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\;\dots\dots\dots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

لاحظ أن: عدد الحدود داخل القوس $n+1$

ثالثاً: قاعدة سمبسون: طريقة ربط كل ثلاث نقاط متتالية بقطع مكافئ



$$\int_a^b f(x)\; dx$$

$$\approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\;\dots\dots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

لاحظ أن: عدد الحدود داخل القوس $n+1$

أوجه الشبه والاختلاف بين طرق التكامل العددي

	نقطة المنتصف $M_n(f)$ Midpoint Rule	أشباه المنحرفات $T_n(f)$ Trapezoidal Rule	سيمبسون $S_n(f)$ Simpson's Rule
التجزئة المنتظمة عرض كل فترة جزئية	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$
الارتفاعات	المنتصفات $f(c_i)$ من $i = 1$ إلى $i = n$	بداية ونهاية كل فترة جزئية $f(x_i)$ من $i = 0$ إلى $i = n$	بداية ونهاية كل فترة جزئية $f(x_i)$ من $i = 0$ إلى $i = n$
المعامل المضروب في القوس	$\frac{b-a}{n}$	$\frac{b-a}{2n}$	$\frac{b-a}{3n}$
عدد الحدود داخل القوس	n	$n+1$	$n+1$
معاملات الحدود داخل القوس	جميعها = 1	معامل الحد الأول = 1 معامل الحد الأخير = 1 ومعاملات الحدود بينهما 2 , 2 , 2 , ….. , 2	معامل الحد الأول = 1 معامل الحد الأخير = 1 ومعاملات الحدود بينهما 4,2,4,……….,4,2,4
عدد فترات التجزئة المنتظمة n	n عدد زوجي أو فردي	n عدد زوجي أو فردي	n عدد زوجي

ملحوظة (1):
حيث إن قاعدة سيمبسون تحسب قيمة المساحة التقريبية تحت القطوع المكافئة. بالتالي فإن قاعدة سيمبسون تُعطي القيم الدقيقة للتكاملات لأي كثيرة حدود من الدرجة 3 أو أصغر.

ملحوظة (2):
قاعدة سيمبسون تتطلب عددًا زوجيًا n من الفترات الجزئية. يُعني ذلك أننا سنحتاج إلى تعديل المسألة:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	4	3.4	3.6	3	2.6	2.4

لأن عدد الفترات الجزئية 5 (عدد فردي). سنضيف فترة باستخدام $n = 6$ واضافة قيمة دالة صفرية لتصبح المسألة:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$f(x)$	4	3.4	3.6	3	2.6	2.4	0

تمارين صـ 389 -: أوجد قيم تقريبات نقطة المنتصف وقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون حيث n = 4:

$$2)\ \int_0^2 (x^2+1)\ dx$$

$f(x) = \dots\dots$, $[a,b] = \dots\dots\dots$, $n = \cdots$, $\Delta x = \dots\dots\dots$

أولاً: قاعدة نقطة المنتصف:

$$\approx \frac{b-a}{n}\left[f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\ \dots\dots\dots + f(c_{n-1})+f(c_n)\right]$$

$C_1 = \dots\dots\dots$
$C_2 = \dots\dots\dots$
$C_3 = \dots\dots\dots$
$C_4 = \dots\dots\dots$

....

....

....

ثانيًا: قاعدة شبه المنحرف:

$$\approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ \dots\dots\dots\dots + 2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$x_0 = \dots\dots$
$x_1 = \dots\dots$
$x_2 = \dots\dots$
$x_3 = \dots\dots$
$x_4 = \dots\dots$

....

....

....

ثالثًا: قاعدة سمبسون:

$$\approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ \dots\dots + 4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$x_0 = \dots\dots$
$x_1 = \dots\dots$
$x_2 = \dots\dots$
$x_3 = \dots\dots$
$x_4 = \dots\dots$

....

....

....

تمارين صـ 389 :- أوجد قيم تقريبات نقطة المنتصف وقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون حيث n = 4 وحدد إذا كان كل تقريب صغير للغاية أم كبير للغاية.

6) $\ln 8 = \int_1^8 \frac{1}{x}\,dx$

$f(x) = \dots\dots\dots \quad ,[a,b] = \dots\dots\dots \quad ,n = \cdots \quad ,\Delta x = \dots\dots\dots\dots$

أولاً: قاعدة نقطة المنتصف:

$\approx \frac{b-a}{n}\left[f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + \dots\dots\dots + f(c_{n-1}) + f(c_n)\right]$

$C_1 = \dots\dots\dots$

$C_2 = \dots\dots\dots$

$C_3 = \dots\dots\dots$

$C_4 = \dots\dots\dots$

....

....

....

ثانيًا: قاعدة شبه المنحرف:

$\approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots\dots\dots\dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$

$x_0 = \dots\dots\dots$

$x_1 = \dots\dots\dots$

$x_2 = \dots\dots\dots$

$x_3 = \dots\dots\dots$

$x_4 = \dots\dots\dots$

....

....

....

ثالثًا: قاعدة سمبسون:

$\approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots\dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$

$x_0 = \dots\dots\dots$

$x_1 = \dots\dots\dots$

$x_2 = \dots\dots\dots$

$x_3 = \dots\dots\dots$

$x_4 = \dots\dots\dots$

....

....

....

تمارين صـ 390 :- (51) الجدول يُعطي السرعة المتجهة m/s لجسم في أزمنة مختلفة بالثواني استخدم البيانات لتقدير المسافة المجتازة:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v(t)$	40	42	40	44	48	50	46	46	42	44	40	42	42

قاعدة سمبسون:

$[a,b] =$ ……… $, n = \cdots$ $, \Delta t =$ ………………..…

$$\int_0^{12} v(t)\ dt$$

$$\approx \frac{b-a}{3n}[v(t_0) + 4v(t_1) + 2v(t_2) + 4v(t_3) + \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots + 4v(t_{n-1}) + v(t_n)]$$

....

....

....

....

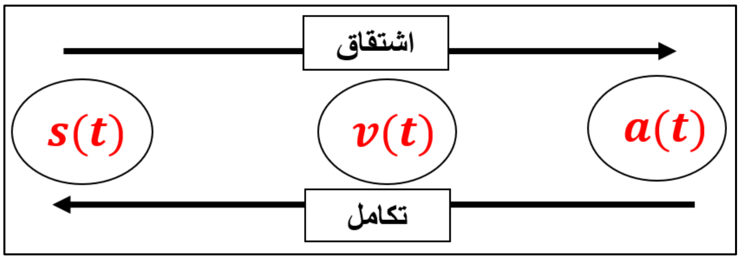
....

....

....

....

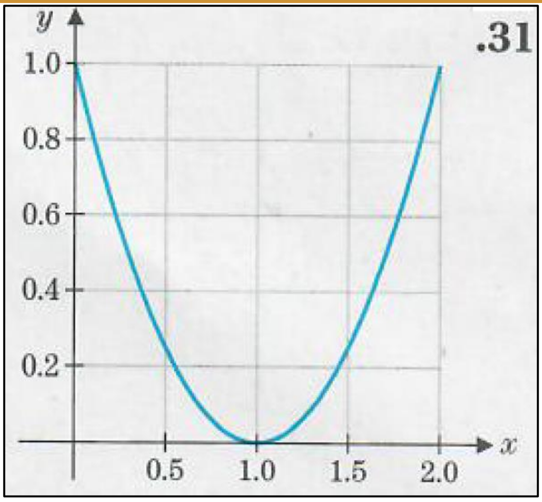
تذكر أن:



تمارين صـ 389 :- أوجد قيم تقريبات نقطة المنتصف وقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون حيث n = 4

$$\int_0^2 f(x)\, dx$$

.31



$[a,b] = \dots\dots\dots \quad , n = \cdots \quad , \Delta x = \dots\dots\dots\dots..\dots\dots$

أولاً: قاعدة نقطة المنتصف:

$$\approx \frac{b-a}{n}[f(\dots\dots) + f(\dots\dots) + f(\dots\dots) + f(\dots\dots)]$$

$C_1 = \dots\dots\dots$

$C_2 = \dots\dots\dots$

$C_3 = \dots\dots\dots$

$C_4 = \dots\dots\dots$

....

....

ثانيًا: قاعدة شبه المنحرف:

$$\approx \frac{b-a}{2n}[f(\dots\dots) + 2f(\dots\dots) + 2f(\dots\dots) + 2f(\dots\dots) + f(\dots\dots)]$$

$x_0 = \dots\dots\dots$

$x_1 = \dots\dots\dots$

$x_2 = \dots\dots\dots$

$x_3 = \dots\dots\dots$

$x_4 = \dots\dots\dots$

....

....

....

ثالثًا: قاعدة سمبسون:

$$\approx \frac{b-a}{3n}[f(\dots\dots) + 4f(\dots\dots) + 2f(\dots\dots) + 4f(\dots\dots) + f(\dots\dots)]$$

$x_0 = \dots\dots\dots$

$x_1 = \dots\dots\dots$

$x_2 = \dots\dots\dots$

$x_3 = \dots\dots\dots$

$x_4 = \dots\dots\dots$

....

....

....