عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلَّام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

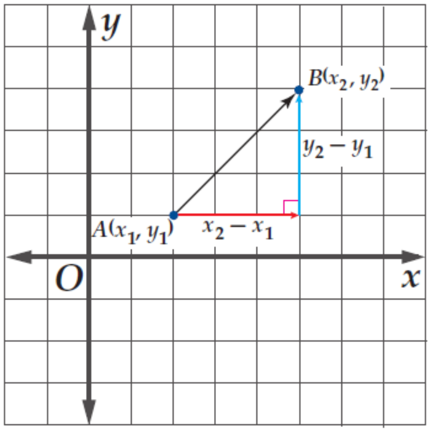
ورقة عمل الثاني عشر العام **8-2 المتجهات في المستوى الإحداثي**

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي. 2- كتابة المتجه باستخدام متجهي الوحدة.

مفهوم أساسي — الصورة المرَكَّبة للمتجه

الصورة المرَكَّبة لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$



التعبير عن المتجه بالصورة (المركبة)

أوجد الصورة (المركبة) لـ $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

$A(-2,-7)$, $B(6,1)$

$\overrightarrow{AB} = \langle 6-(-2), 1-(-7) \rangle$

$= \langle 8, 8 \rangle$

$A(0,8)$, $B(-9,-3$

$\overrightarrow{AB} = \langle -9-0, -3-8 \rangle$

$= \langle -9, -11 \rangle$

$A(-4,2)$, $B(3,-5)$

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

$= \langle 3-(-4), -5-2 \rangle$

$= \langle 7, -7 \rangle$

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن : $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

إيجاد طول (مقدار) متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$A(-2,-7)$, $B(6,1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(6-(-2))^2 + (1-(-7))^2}$

$= 8\sqrt{2} = \boxed{11.31}$

$A(0,8)$, $B(-9,-3)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(-9-0)^2 + (-3-8)^2}$

$= \sqrt{202} = \boxed{14.21}$

$A(-4,2)$, $B(3,-5)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(3-(-4))^2 + (-5-2)^2}$

$= 7\sqrt{2} = \boxed{9.9}$

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجه في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

العمليات على المتجهات

جد كلًّا مما يأتي للمتجهات $y = \langle 2, 5 \rangle , z = \langle -3, 0 \rangle , w = \langle -4, 1 \rangle$:

$w + y$

$= \langle -4, 1 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$

$= \langle -4 + 2 , 1 + 5 \rangle$

$= \langle -2 , 6 \rangle$

$z - 2y$

$= \langle -3, 0 \rangle - 2 \langle 2, 5 \rangle$

$= \langle -3, 0 \rangle - \langle 4, 10 \rangle$

$= \langle -3 - 4 , 0 - 10 \rangle = \langle -7, -10 \rangle$

$2w + 4y - z$

$= 2\langle -4, 1 \rangle + 4\langle 2, 5 \rangle - \langle -3, 0 \rangle$

$= \langle -8, 2 \rangle + \langle 8, 20 \rangle - \langle -3, 0 \rangle$

$= \langle -8 + 8 - (-3) , 2 + 20 - 0 \rangle = \langle 3, 22 \rangle$

متجهات الوحدة: يُسمّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$ ، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ ، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

العمليات على المتجهات

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

$\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$

$|v| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

$u = \frac{v}{|v|}$

$= \frac{\langle -2, 3 \rangle}{\sqrt{13}}$

$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}} , \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13} , \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

$\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

$|x| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = 4\sqrt{5}$

$u = \frac{x}{|x|}$

$= \frac{\langle -4, -8 \rangle}{4\sqrt{5}}$

$= \left\langle \frac{-4}{4\sqrt{5}} , \frac{-8}{4\sqrt{5}} \right\rangle$

$= \left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5} , \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

$\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

$|w| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$

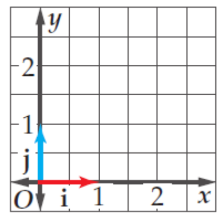
$u = \frac{w}{|w|}$

$= \frac{\langle 6, -2 \rangle}{2\sqrt{10}}$

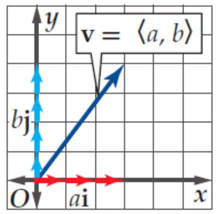
$= \left\langle \frac{6}{2\sqrt{10}} , -\frac{2}{2\sqrt{10}} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10} , -\frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$، $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.3



الشكل 1.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4
تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

$D(-6, 0), E(2, 5)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle 2-(-6)\ ,\ 5-0 \rangle$

$= \langle 8\ ,\ 5 \rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = 8i + 5j$

$D(-3, -8), E(-7, 1)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle -7-(-3)\ ,\ 1-(-8) \rangle$

$= \langle -4\ ,\ 9 \rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = -4i + 9j$

$D(-2, 3), E(4, 5)$

الصورة المركبة

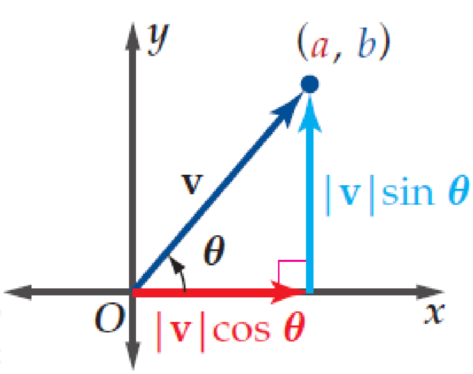
$\overrightarrow{DE} = \langle 4-(-2)\ ,\ 5-3 \rangle$

$= \langle 6\ ,\ 2 \rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = 6i + 2j$

يمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستخدام زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x. فمن الشكل يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصور:



الصورة ~~الإحداثية~~ المركبة	$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$
عوّض	$= \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta \rangle$
توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$	$= \lvert\mathbf{v}\rvert (\cos\theta)\mathbf{i} + \lvert\mathbf{v}\rvert (\sin\theta)\mathbf{j}$

عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلّام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

إيجاد الصورة (المركبة) لمتجه بمعلومية طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي

أوجد الصورة المركبة للمتجه v المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممّا يأتي:

$|\mathbf{v}| = 24,\ \theta = 210°$

$V = 24\cos 210\, i + 24 \sin 210\, j$

$= -12\sqrt{3}\, i - 12\, j$

$V = \langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle$

$|\mathbf{v}| = 8,\ \theta = 45°$

$V = 8 \cos 45\, i + 8 \sin 45$

$= 4\sqrt{2}\, i + 4\sqrt{2}\, j$

$V = \langle 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \rangle$

$= \langle 5.7, 5.7 \rangle$

طوله 10 ، وزاوية اتجاهه 120° مع الأفقي.

$V = 10 \cos 120\, i + 10 \sin 120\, j$

$= -5\, i + 5\sqrt{3}\, j$

$V = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$ الصورة المركبة

يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي بحل المعادلة المثلثية:

$$\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta} = \frac{b}{a}$$

زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

$-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ج ② ع

$\tan\theta = \left|\frac{2}{-6}\right| = \frac{2}{6}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{6}\right) = 18.4°$

في الربع الثاني

$\theta = 180 - 18.4$

$= 161.6°$

$\langle -3, -8 \rangle$ ج ③ ع

$\tan\theta = \left|\frac{-8}{-3}\right| = \frac{8}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = 69.4°$

الربع الثالث.

$\theta = 180 + 69.4$

$= 249.4°$

$\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$ ج ④ ع

$\tan\theta = \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{5}{4}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = 51.3°$

في الربع الرابع

$\theta = 360 - 51.3$

$= 308.7°$

$\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ ج ① ع

$\tan\theta = \left|\frac{b}{a}\right|$

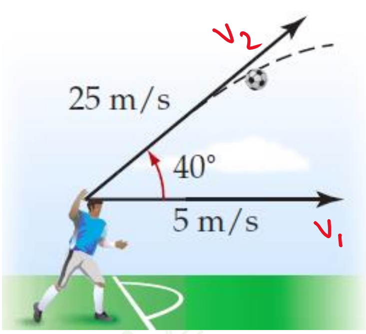
$\tan\theta = \frac{7}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$

$\theta = 66.8°$

تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



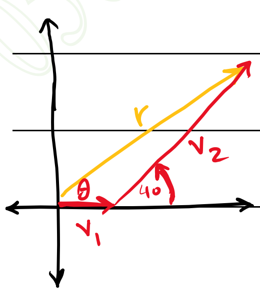
الركض للأمام $V_1 = \langle 5, 0 \rangle$

رمي الكرة $V_2 = \langle 25\cos 40, 25 \sin 40 \rangle = \langle 19.2, 16.1 \rangle$

المحصلة $r = V_1 + V_2$

$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle$

$= \langle 24.2, 16.1 \rangle$



مقدار السرعة $|r| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} =$

$= 29.1$ m/s

الاتجاه $\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{19.2} = 33.6°$

← السرعة 29.1 m/s في اتجاه 33.6° مع المركبة الأفقية.