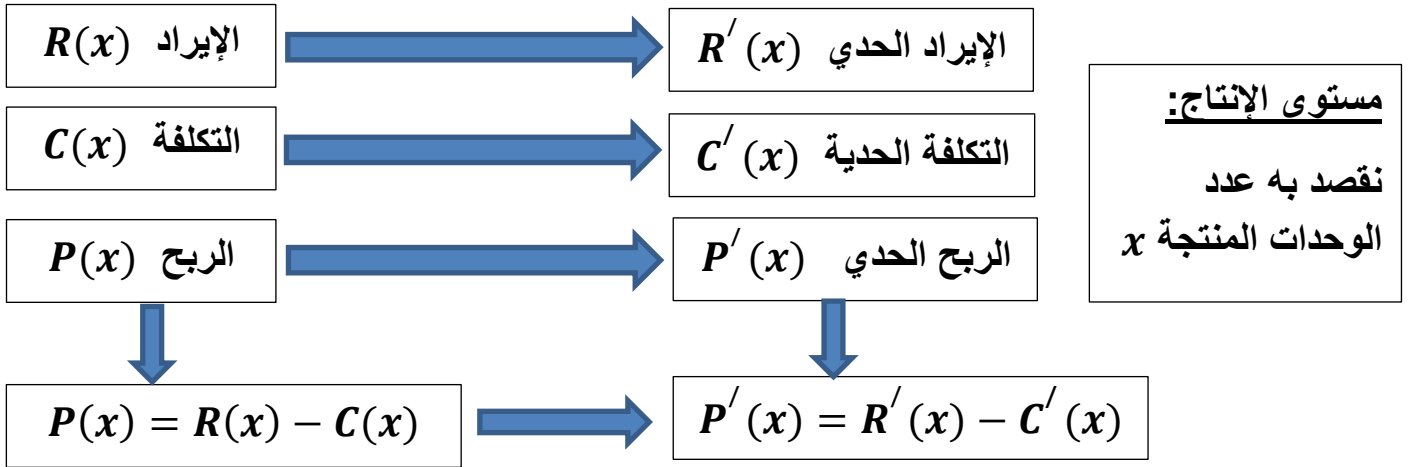




**مصطلحات ورموز:** في الاقتصاد يُستخدم المصطلح حديّة للإشارة إلى المعدل



**أولاً: التكلفة الحدية:** إذا كانت  $C(x)$  هي دالة التكلفة لعدد  $x$  منتج فإن:

- 1) دالة التكلفة الحدية هي  $C'(x)$
- 2) التكلفة الحدية عند  $x = n$  هي  $C'(n)$
- 3) التكلفة الفعلية للمنتج رقم  $n$  هي  $C(n) - C(n-1)$

**تمارين ص 313:**

2. إذا كانت تكلفة تصنيع  $x$  منتج هي  $C(x) = x^4 + 14x^2 + 60x + 35$   
أوجد دالة التكلفة الحدية

قارن بين التكلفة الحدية عند  $x = 50$  والتكلفة الفعلية للمنتج رقم 50

\* التكلفة الحدية عند  $x = 50$

\* التكلفة الفعلية للمنتج رقم 50

لاحظ أن التكلفة الفعلية للمنتج رقم 50 قريبة جدًا من التكلفة الحدية عند  $x = 50$



الرياضيات - 12 متقدم - ف2  
(9 - 4) معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

**ثانياً: القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة:** إذا كانت  $C(x)$  هي دالة التكلفة لعدد  $x$  منتج فلإيجاد مستوى الإنتاج  $x$  الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة:

$$(1) \text{ نوجد دالة متوسط التكلفة: } \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

(2) نوجد المشتقة الأولى  $\bar{C}'(x)$  والأعداد الحرجة في المجال  $x > 0$

(3) نستخدم اختبار المشتقة الأولى (إذا الأعداد الحرجة وحيدة) **أو** اختبار المشتقة الثانية (إذا الأعداد الحرجة وحيدة أو غير وحيدة)، لتحديد قيمة  $x$  التي تحدث عندها القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

**تمارين ص 313:** أوجد مستوى الإنتاج  $x$  الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

7.  $C(x) = 0.1x^2 + 3x + 2000$

(1) دالة متوسط التكلفة:

(2) المشتقة الأولى والأعداد الحرجة في المجال  $x > 0$ :

(3) اختبار المشتقة:



**ثالثاً: القيمة العظمى للربح:**

**تمارين ص 313:**

12. لتكن  $R(x)$  هي الإيرادات و  $C(x)$  هي تكلفة تصنيع  $x$  منتج.  
تُعرف الأرباح بأنها  $P(x) = R(x) - C(x)$ .

(a) بيّن انه عند قيمة  $x$  التي تحقق القيمة العظمى للأرباح،  
فان الإيرادات الحدية تساوي التكلفة الحدية.

(b) أوجد القيمة العظمى للأرباح إذا كانت

$$R(x) = 10x - 0.001x^2 \text{ دولار و } C(x) = 2x + 5000 \text{ دولار.}$$

\* أولاً: إيجاد مستوى الإنتاج  $x$  التي تحدث عنده القيمة العظمى للربح:

\* ثانياً: إيجاد القيمة العظمى للربح:



رابعاً: مرونة الطلب والتغير في الإيرادات: في معظم الحالات عندما يرتفع السعر لأي منتج يتناقص الطلب عليه.

فإذا كان  $f(p)$  هو طلب منتج بسعر  $p$  درهم فإن:

(1) مرونة الطلب هي:  $E = \frac{p}{f(p)} f'(p)$

(2) مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرناً هو:  $E < -1$

(3) الإيرادات هي:  $pf(p)$

### تمارين ص 313:

إذا كان  $f(p)$  هو طلب منتج بسعر  $p$  درهم:

13)  $f(p) = 200(30 - p)$

(a) أوجد مرونة الطلب.

$f'(p) = \dots\dots\dots$

$E = \frac{p}{f(p)} f'(p) = \dots\dots\dots$

(b) أوجد مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرناً :  $(E < -1)$

$E < -1$

و

$E$  لها مقارب رأسي

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

∴ مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرناً هو .....



**تمارين ص 313:**

إذا كان  $f(p)$  هو طلب منتج بسعر  $p$  درهم:

15)  $f(p) = 100p(20 - p)$

(a) أوجد مرونة الطلب.

$f'(p) = \dots\dots\dots$

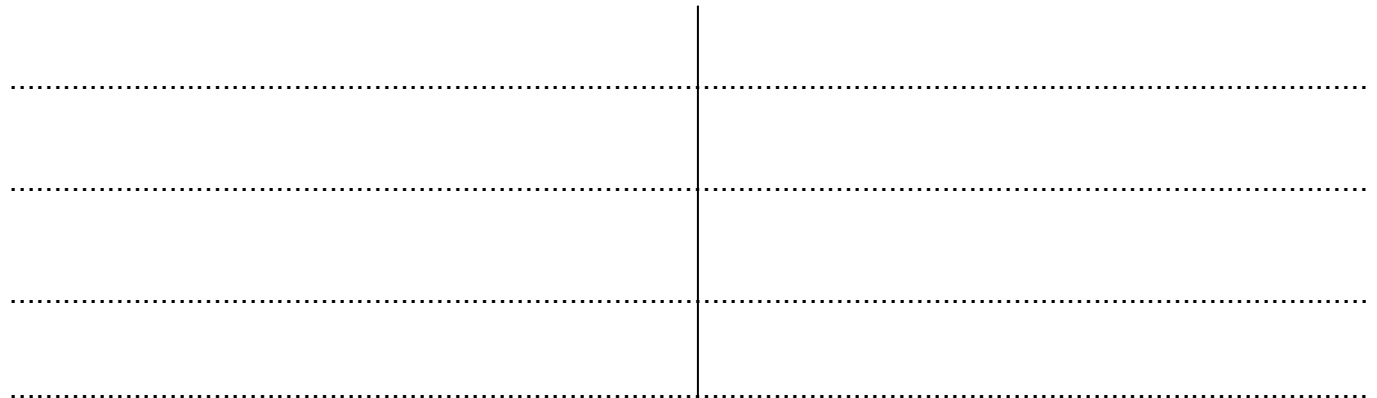
$E = \frac{p}{f(p)} f'(p) = \dots\dots\dots$

(b) أوجد مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرناً :  $(E < -1)$

$E < -1$

و

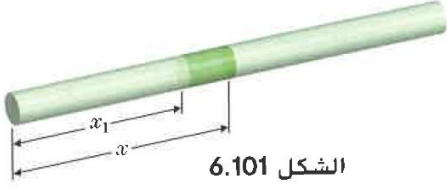
$E$  لها مقارب رأسي



∴ مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرناً هو .....

**خامساً: كثافة القضيب الرقيق:**

على فرض أن كثافة  $x$  متر الأولى من قضيب رقيق هي  $f(x)$  فإن الكثافة الخطية للقضيب عند  $x = x_1$  هي:  $\rho(x_1) = f'(x_1)$



الشكل 6.101  
قضيب رقيق

**مثال 9.6 كثافة القضيب الرقيق**

على فرض أن كثافة الأول  $x$  متر من القضيب الرقيق تعطى بالدالة  $f(x) = \sqrt{2x}$  فاحسب الكثافة الخطية عند  $x = 2$  وعند  $x = 8$ ، وقارن الكثافتين عند النقطتين.

**سادساً: نمذجة التيار في سلك:**

على فرض أن الشحنة في الدائرة الكهربائية هي  $Q(t)$  كولوم فإن التيار هو:  $Q'(t)$

**تمارين ص 314:**

34. على فرض أن الشحنة في الدارة الكهربائية  $Q(t) = e^t(3 \cos 2t + \sin 2t)$  كولوم. أوجد التيار



**سابعاً: نمذجة سرعة التفاعل الكيميائي:**

**تمارين ص 314:**

19) إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقاً للمعادلة  $x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$  أوجد التركيز  $x(t)$  الذي تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى.

\* إعادة كتابة الدالة

.....  
.....

\* المشتقة الأولى والأعداد الحرجة

.....  
.....  
.....

\* اختبار المشتقة الأولى

$f'(x)$	
$f(x)$	

.....  
.....

(b) أوجد حدود التركيز.

.....  
.....