ورقة عمل الثاني عشر العام 8-5 الضرب النقطي والضرب المتجهي في الفضاء

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1- إيجاد قيمة ناتج الضرب النقطي والزوايا بين متجهات في الفضاء.

2- إيجاد قيمة ناتج الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء واستخدامه في إيجاد المساحة والحجم.

مفهوم أساسي الضرب **النقطي** والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعرَّف الضرب **النقطي** للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

إيجاد الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب النقطي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

$\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$ $\quad u \cdot v = -7(5) + 3(17) + (-3)(5) = 1$ غير متعامدين

$\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$ $\quad u \cdot v = 3(4) + (-3)(7) + 3(3) = 0$ متعامدين

$\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$ $\quad u \cdot v = 3(5) + (-5)(7) + 4(5) = 0$ متعامدين

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

الزاوية بين متجهين في الفضاء

أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ إلى أقرب جزء من عشرة:

$\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$

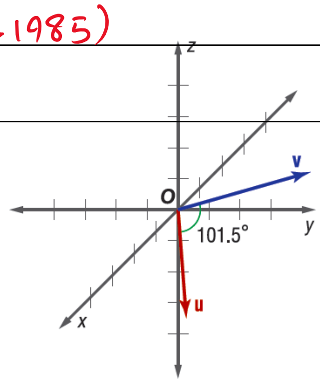
$\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$

$\cos\theta = \dfrac{3(-4) + 2(3) + (-1)(-2)}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2}}$

$\cos\theta = -0.1985$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}(-0.1985)$

$\boxed{\theta = 101.45^\circ}$



$\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

$\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$

$= \dfrac{-4(4) + 2(0) + 1(3)}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2}}$

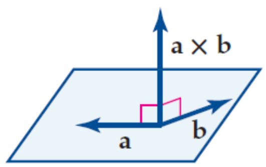
$\cos\theta = -0.56736$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}(-0.56736)$

$\boxed{\theta = 124.6^\circ}$

عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلّام
050-2509447

الضرب المتجهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب النقطي، فإن الضرب المتجهي لمتجهين a , b هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز a x b ، ويقرأ a cross b ، ويكون المتجه a x b عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين a , b



مفهوم أساسي — الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1

بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2

بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

إيجاد الضرب المتجهي لمتجهين في الفضاء

أوجد الضرب المتجهي للمتجهين u , v في كلٍّ مما يأتي، ثم بين أن $\underbrace{u \times v}_{W}$ يعامد كلًّا من u , v :

$\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & j \\ 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{matrix}$$

$= (-2i + -3j + 9k) - (6k + 3i + 3j)$

$= -5i - 6j + 3k$

$= \langle -5, -6, 3 \rangle = \boxed{W}$

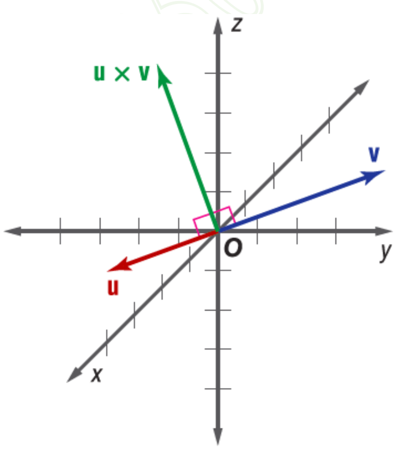
التأكد من الحل

$W \cdot V = 15 - 18 + 3 = 0$

$W \cdot U = -15 + 12 + 3 = 0$

W عمودي على V

W عمودي على U



$\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & j \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix}$$

$= (8i + (-5j) + 4k) - (10k - i + 16j)$

$= 9i - 21j - 6k$

$= \langle 9, -21, -6 \rangle = W$

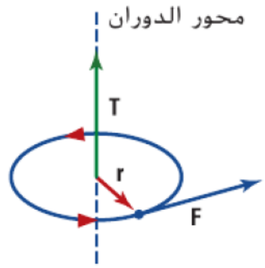
التأكد من الحل

$W \cdot V = 45 - 21 - 24 = 0$

$W \cdot u = 36 - 42 + 6 = 0$

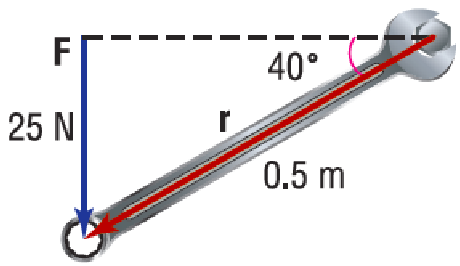
W عمودي على V

W عمودي على u



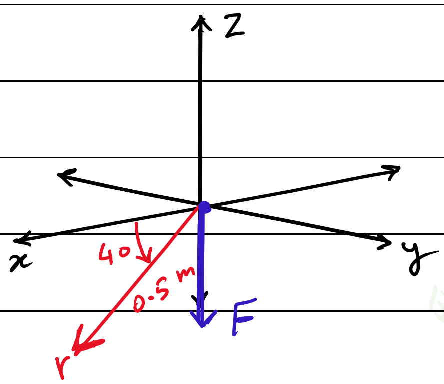
يمكنك استخدام ناتج الضرب المتجهي لإيجاد كمية المتجه المسمى **العزم**. ويقيس العزم مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره. يكون متجه العزم **T** عموديًا على المستوى الذي يحتوي على المسافة الموجهة **r** من محور الدوران إلى نقطة القوة المبذولة ونقطة القوة المبذولة **F** كما هو موضح. وبالتالي، متجه العزم يساوي $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ويقاس بالنيوتن متر $(N \cdot m)$.

العزم باستخدام الضرب المتجهي



إصلاح السيارات **يستخدم طارق مفتاح ربط الصواميل لإحكام صامولة العروة. ويبلغ طول مفتاح الربط الذي يستخدمه 50 cm أو 0.5 m. جـد مقدار واتجاه العزم على صامولة العروة إذا بذل قوة قدرها 25 N لأسفل لنهاية ذراع التوجيه عندما تكون 40° أسفل محور x الموجب كما هو موضح.**

نكتب المتجه r (مفتاح الربط) في الصورة المركبة .



$$r = \langle 0.5 \cos 40 , 0 , -0.5 \sin 40 \rangle$$
$$= \langle 0.383 , 0 , -0.321 \rangle$$

نكتب المتجه F في الصورة المركبة :- (القوة على نهاية المفتاح)

$$F = \langle 0 , 0 , -25 \rangle$$

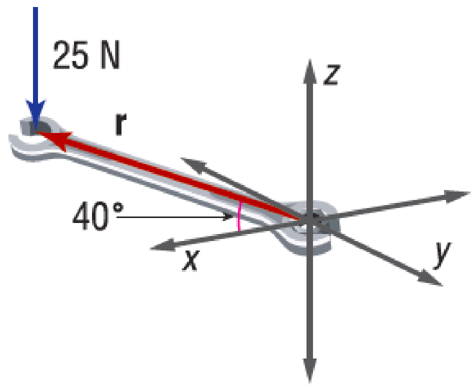
العزم $T = r \times F$

$$= \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0.383 & 0 & -0.321 \\ 0 & 0 & -25 \end{array} \right| \begin{array}{cc} i & j \\ 0.383 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$T = (0i + 0j + 0k) - (0k + 0i - 9.575j)$$
$$= 9.575j$$
$$= \langle 0 , 9.575 , 0 \rangle$$

مقدار العزم 9.575 N-m في اتجاه الجزء الموجب لمحور y

إصلاح السيارات جــد مقدار العزم إذا بذل طارق نفس مقدار القوة 25N على نهاية ذراع التوجيه لأسفل مباشر عندما يكوّن ذراع التوجيه زاوية $40°$ أعلى محور x الموجب كما هو موضح في الشكل.



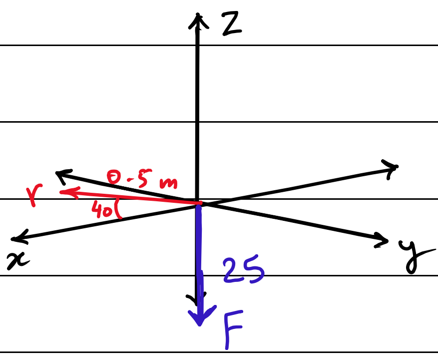
الصورة المركبة للمتجه r (مفتاح الربط)

$r = \langle 0.5\cos 40, 0, 0.5\sin 40 \rangle$

$= \langle 0.383, 0, 0.321 \rangle$

الصورة المركبة للمتجه F (القوة على نهاية المفتاح)

$F = \langle 0, 0, -25 \rangle$



العزم $(T) = r \times F$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.383 & 0 & 0.321 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 0.383 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

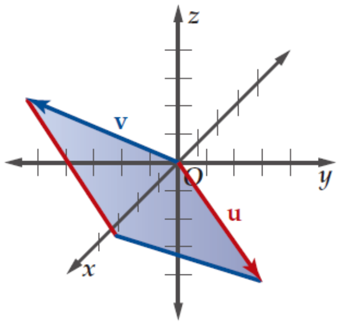
$= (0i + 0j + 0k) - (0k + 0i - 9.575j)$

$T = 9.575j$

$T = \langle 0, 9.575, 0 \rangle$

مقدار العزم $9.575\ N.m$ في اتجاه الجزء الموجب لمحور y

مقدار المتجه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ أو المقدار $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل .



مساحة متوازي أضلاع في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

$u = 2i + 4j - 3k \quad , v = i - 5j + 3k$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{matrix}$$

$$= (12i - 3j - 10k) - (4k + 15i + 6j)$$

$$= -3i - 9j - 14k$$

$$u \times v = \langle -3, -9, -14 \rangle$$

مساحة متوازي الأضلاع $= |u \times v| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$

$= \sqrt{286} \approx \boxed{16.9}$ وحدة مربعة

$u = -6i - 2j + 3k \quad , v = 4i + 3j + k$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

$$= (-2i + 12j - 18k) - (-8k + 9i - 6j)$$

$$u \times v = -11i + 18j - 10k$$

$$u \times v = \langle -11, 18, -10 \rangle$$

مساحة متوازي الأضلاع $= |u \times v| = \sqrt{(-11)^2 + (18)^2 + (-10)^2}$

$= \sqrt{545} \approx \boxed{23.3}$ وحدة مربعة

إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تُكَوِّن أحرفًا متجاورةً لمتوازي سطوح، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجه، كل وجه منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل المجاور، إن القيمة المطلقة للضرب النقطي لهذه المتجهات هو عدد يمثِّل حجم متوازي السطوح.

مفهوم أساسي الضرب النقطي الثلاثي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

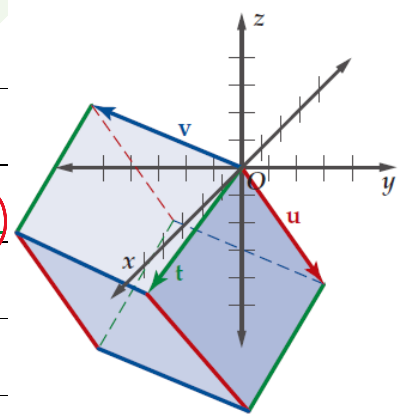
فإن الضرب **النقطي** الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي

$$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

حجم متوازي السطوح

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه t, u, v أحرف متجاورة في كلٍ مما يأتي:

$\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$



$$t\cdot(u\times v) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{matrix}$$

$= (48 + 6 + 20) - (-8 + 60 - 12)$

$= 74 - 40$

الحجم $= t\cdot(u\times v) = \boxed{34}$ وحدة مكعبة

$\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$t\cdot(u\times v) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 2 \\ -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

$= (0 + 24 + 90) - (40 + 0 - 12)$

$= 114 - 28$

الحجم $t\cdot(u\times v) = \boxed{86}$ وحدة مكعبة