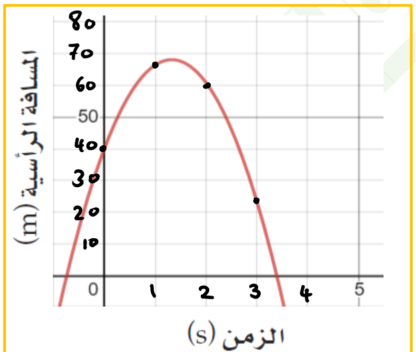
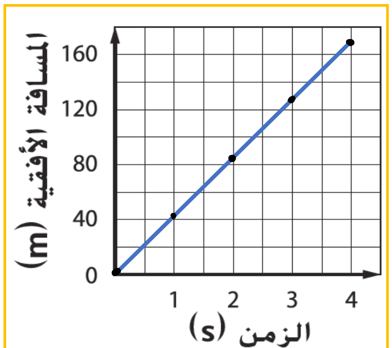
ورقة عمل الثاني عشر العام — 7-8 المعادلات الوسيطية

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا. 2- حل المعادلات المتصلة بحركة المقذوفات.

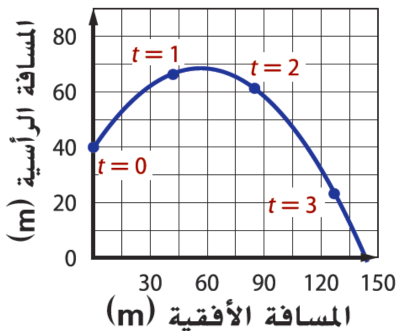
المنحنيات الثلاثة أدناه، يمثل كل منها ناحية مختلفة مما يحدث عندما يُقذف جسم في الهواء. يظهر الشكل 1 المسافة الرأسية كتابع للزمن. ويظهر الشكل 2 المسافة الأفقية كتابع للزمن، بينما يظهر الشكل 3 المسافة الرأسية للجسم كتابع لمسافته الأفقية.



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

تصف التمثيلات البيانية أعلاه ومعادلاتها جزءًا مما يحدث عند إطلاق قذيفة. ويمكننا استعمال المعادلات الوسيطية للتعبير عن موقع الجسم رأسيًا وأفقيًا. تمثّل المعادلات الآتية المنحنى المبين في الشكل 3:

زمن	مسافة أفقية	مسافة رأسية
t	x	y
0	0	40
1	42.4	66.4
2	84.9	60.9
3	127.3	23.3
4	169.7	-46.3

معادلة ديكارتية

$$y = -\frac{2}{225}x^2 + x + 40$$

معادلات وسيطية

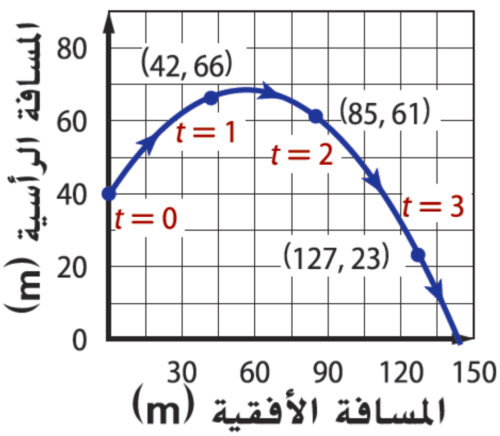
المركبة الأفقية $x = 30\sqrt{2}t$

المركبة الرأسية $y = -16t^2 + 30\sqrt{2}t + 40$

يمكن تحديد موقع الجسم عند زمن معين باستعمال المعادلات الوسيطية بحساب المركبتين الأفقية والرأسية للزمن t. ومثال ذلك عندما كان الزمن $t = 0$ فإن موقع الجسم يكون عند (0 , 40). يسمى t المتغير الوسيط.

يوضّح الشكل المجاور تمثيل المنحنى على الفترة الزمنية $0 \le t \le 4$.

يُسمّى تمثيل النقاط مع ترتيب زيادة قيم t ورسم مسار المنحنى في اتجاه معين اتجاه المنحنى، ويُشار إليه بأسهم على المنحنى.



مفهوم أساسي — المعادلات الوسيطية

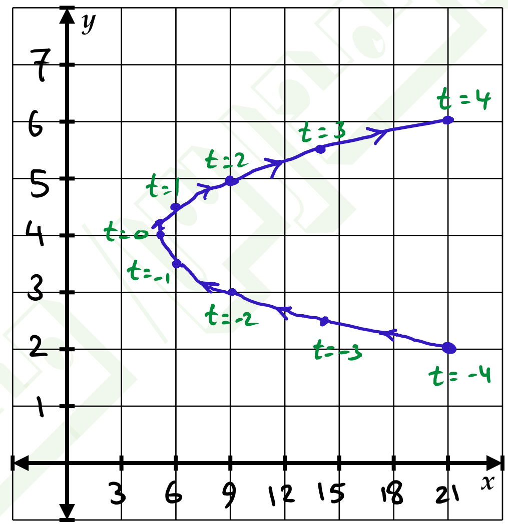
إذا كانت f و g دالتين متصلتين في المتغير t على الفترة I ، فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$ تمثل منحنى وسيطيًا. المعادلتان: $y = g(t)$ ، $x = f(t)$ هما معادلتان وسيطيتان لهذا المنحنى، حيث t المتغير الوسيط و I الفترة الوسيطية.

تمثيل منحنيات بدلالة معادلات وسيطية

مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي:

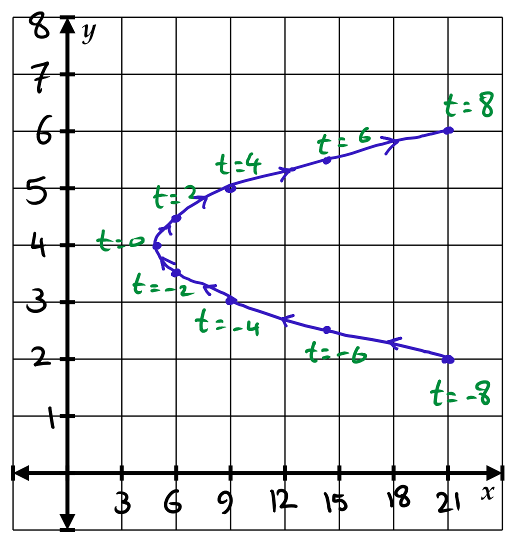
a. $x = t^2 + 5$ و $y = \frac{t}{2} + 4; -4 \le t \le 4$

t	x	y
-4	21	2
-3	14	2.5
-2	9	3
-1	6	3.5
0	5	4
1	6	4.5
2	9	5
3	14	5.5
4	21	6



b. $x = \frac{t^2}{4} + 5$ و $y = \frac{t}{4} + 4; -8 \le t \le 8$

t	x	y
-8	21	2
-6	14	2.5
-4	9	3
-2	6	3.5
0	5	4
2	6	4.5
4	9	5
6	14	5.5
8	21	6



عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلّام
050-2509447

كتابة معادلات وسيطية بالصورة الديكارتية

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = t^2 + 2$, $x = 3t - 1$ بالصورة الديكارتية.

من المعادلة الأولى $x = 3t - 1 \Rightarrow t = \frac{x+1}{3}$

نعوض t في المعادلة الثانية $\Rightarrow y = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 2$

$\Rightarrow y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2x}{9} + \frac{1}{9} + 2$

$\Rightarrow y = \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = 4t$, $x = t^2 - 5$ بالصورة الديكارتية.

من المعادلة الثانية $y = 4t \Rightarrow t = \frac{y}{4}$

نعوض في المعادلة الأولى $\Rightarrow x = \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 5$

$\Rightarrow x = \frac{y^2}{16} - 5$

مجال الصورة الديكارتية للمعادلة الوسيطية

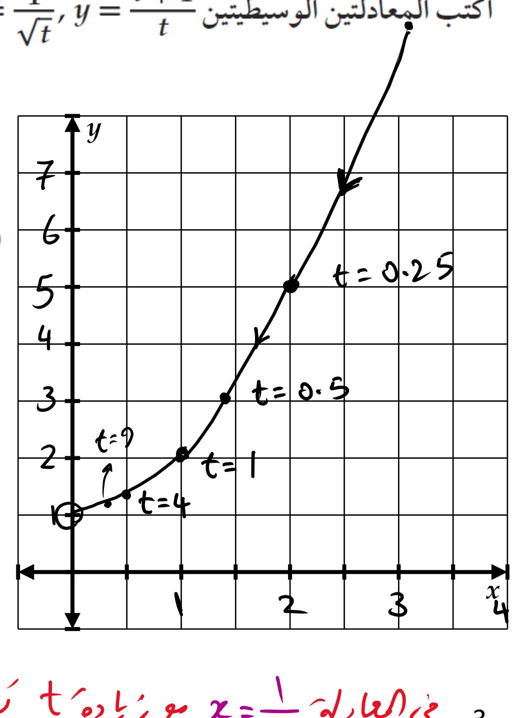
في حال عدم تحديد فترة الوسيط الخاص بــ t. تحدّد فترة الوسيط على أنها جميع قيم t التي تعطي قيمًا حقيقيةً لــ x و y.

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $y = \frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًا، وحدّد المجال.

من المعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x^2}$

نعوض في المعادلة الثانية

$y = \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{x^2}{x^2} \Rightarrow y = \frac{1 + x^2}{1} \Rightarrow y = x^2 + 1$



المنحنى معرّف فقط عند $t > 0$، وذلك لأن $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ معرفة فقط عند $t > 0$.

وكما يظهر في الشكل فإن مجال المعادلة الديكارتية يكون

هو $\{x \mid x \in R , x > 0\}$

t	0.25	0.5	1	4	9
x	2	$\sqrt{2}$	1	0.5	$\frac{1}{3}$
y	5	3	2	1.25	$\frac{10}{9}$

في المعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ مع زيادة t تقترب x من الصفر ولن تساوي الصفر

$x \geq 0$

اكتب $y = \frac{1}{t}, x = \sqrt{t+4}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًا، وحدِّد المجال.

t	-4	-2	-1	0.25	0.5	4	8	12	
x	0	1.4	1.7	2.06	2.1	2.8	3.5	4	
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	4	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	

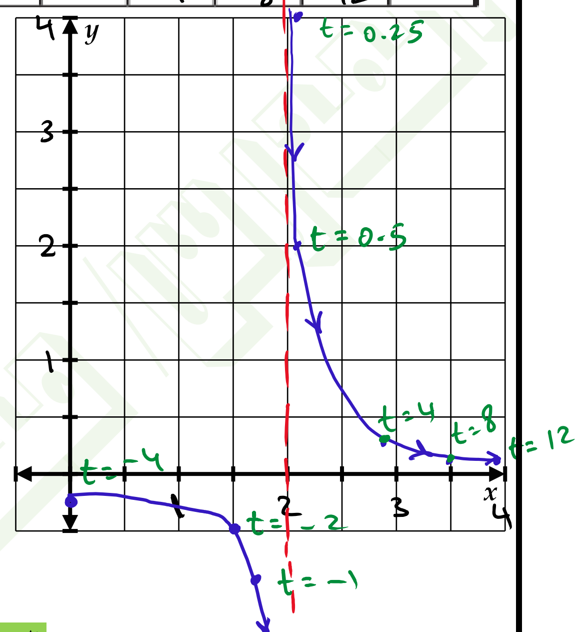
$y = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{y}$

تعويض $x = \sqrt{t+4}$

$x = \sqrt{\frac{1}{y} + 4}$

$x^2 = \frac{1}{y} + 4 \Rightarrow x^2 - 4 = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x^2 - 4}}$



مجال المعادلتين الوسيطتين x, y هو $t \geq -4 , t \neq 0$

مجال $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ هو $x \neq \mp 2$ (جبرًا) — ①

مدى الـ $x = \sqrt{t+4}$ هو $x \geq 0$ — ②

$\boxed{x \neq 2 , x \geq 0}$ ① ∩ ②

الصورة الديكارتية عندما يكون المتغير الوسيط زاوية (θ)

اكتب المعادلتين الوسيطتين $x = 2\cos\theta$ ①, $y = 4\sin\theta$ ② بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًا.

من ① $\rightarrow \cos\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{x^2}{4}$ — (I)

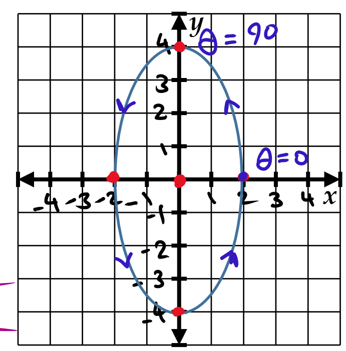
من ② $\rightarrow \sin\theta = \frac{y}{4} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{y^2}{16}$ — (II)

نجمع I , II $\Leftarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$

$\Rightarrow 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \longrightarrow$ قطع ناقص رأسي

مركزه $(0,0)$ ، $a = 4$ ، $b = 2$

θ	0	90
x	2	0
y	0	4



اكتب المعادلتين الوسيطتين $x = 3\sin\theta$ ①, $y = 8\cos\theta$ ② بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًا.

من ① $\rightarrow \sin\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{x^2}{9} \rightarrow$ I

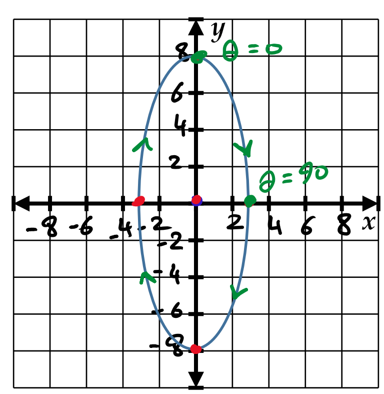
من ② $\rightarrow \cos\theta = \frac{y}{8} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{y^2}{64} \rightarrow$ II

$I + II \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64}$

$\Rightarrow 1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64}$

قطع ناقص رأسي ، مركزه $(0,0)$ / $a = 8$ / $b = 3$

θ	0	90
x	0	3
y	8	0



عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلّام
050-2509447

كتابة معادلة ديكارتية في الصورة الوسيطية

استخدم المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثِّلان المعادلة الديكارتية $y = x^2 - 4$.
ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه:

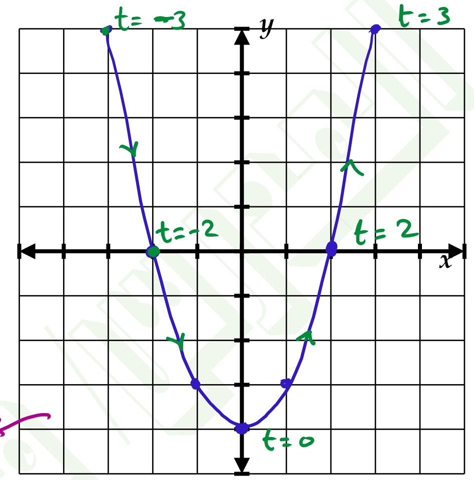
a. $t = x$

نعوض x في المعادلة y

$\Rightarrow y = (t)^2 - 4 \Rightarrow y = t^2 - 4$

إذاً المعادلتين الوسيطتين هما $x = t$ ① , $y = t^2 - 4$ ②

t	-3	-2	0	2	3
x	-3	-2	0	2	3
y	5	0	-4	0	5



السرعة $\boxed{6}$

من $x = -3 \leftarrow x = 3$

b. $t = 4x + 1$

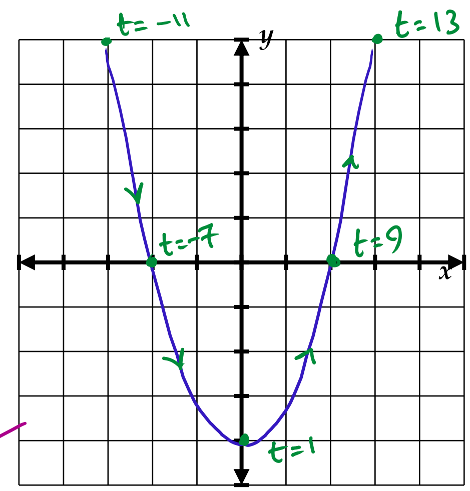
$x = \frac{t-1}{4}$

نعوض في $y \Rightarrow y = \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 - 4 \Rightarrow y = \frac{1}{16}(t^2 - 2t + 1) - 4$

$y = \frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{8}t - \frac{63}{16}$

$x = \frac{t-1}{4}$ ① , $y = \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$ ② المعادلتين الوسيطتين هما

t	-11	-7	1	9	13
x	-3	-2	0	2	3
y	5	0	-4	0	5



السرعة $\boxed{24}$

من $x = -3 \leftarrow x = 3$

c. $t = 1 - \frac{x}{4}$

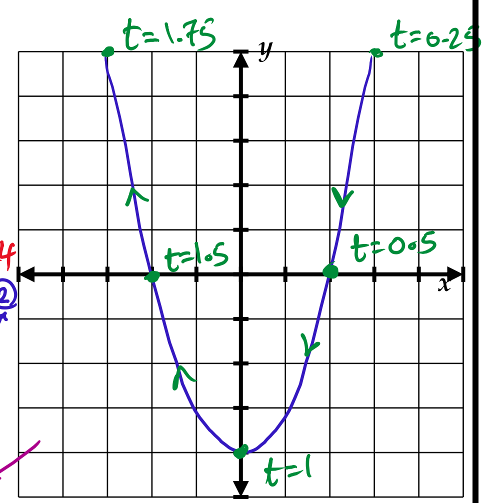
$\frac{x}{4} = 1 - t \Rightarrow x = 4 - 4t$ ①

نعوض $y = x^2 - 4$

$\Rightarrow y = (4 - 4t)^2 - 4 \Rightarrow y = 16 - 32t + 16t^2 - 4$

$\Rightarrow y = 16t^2 - 32t + 12$ ②

t	1.75	1.5	1	0.5	0.25
x	-3	-2	0	2	3
y	5	0	-4	0	5



السرعة $\boxed{1.5}$

من $x = 3 \leftarrow x = -3$

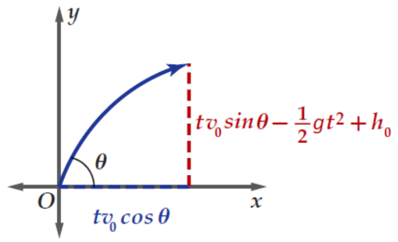
مفهوم أساسي — حركة المقذوفات

إذا قُذف جسم بسرعة متجهة ابتدائية v_0 بحيث يصنع زاوية غير قائمة θ مع الأفق، فإن:

المسافة الأفقية: $x = t v_0 \cos\theta$

المسافة الرأسية: $y = t v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، t الزمن، h_0 الارتفاع الابتدائي.

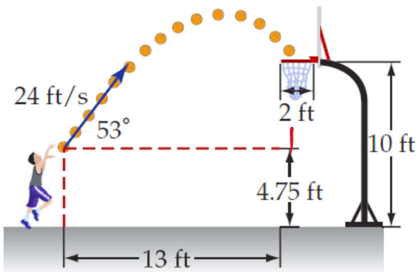


إرشادات للدراسة

ثابت الجاذبية الأرضية
يكون التسارع عند سطح الأرض بسبب جاذبيتها مساويًا 9.8 m/s² أو 32 ft/s². عند حل المسائل، تأكد من أنك تستعمل القيمة الصحيحة للجاذبية، بناءً على وحدات السرعة والمسافة المعطاة.

حركة المقذوفات

كرة سلة: تتدرب خديجة على الرميات الحرة في كرة السلة، فقذفت الكرة بسرعة ابتدائية مقدارها $24\ ft/s$ ، وبزاوية تميل °53 على الأفق. وكانت المسافة الأفقية بين يدها والحافة الأمامية لحلقة السلة هي $13\ ft$ ، وارتفاع حلقة السلة عن الأرض $10\ ft$ ، وقطر الحلقة $2\ ft$. إذا كان ارتفاع يدها عن الأرض $4.75\ ft$ ، فهل ستحرز خديجة نقاطًا من هذه الرمية؟



أولاً: نحسب الوقت الذي تصل فيه الكرة إلى ارتفاع السلة 10 ft ⟸ $y=10$

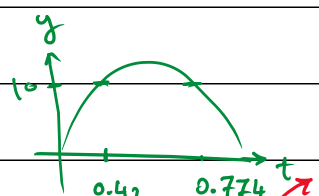
⟸ نعوض في y ⟸ $10 = t v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 + h_0$

$\Rightarrow 10 = t(24)\sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$

$\Rightarrow -16t^2 + 19.167t - 5.25 = 0$

$\Rightarrow t = \dfrac{-19.167 \pm \sqrt{19.167^2 - 4(-16)(-5.25)}}{2(-16)}$

$\Rightarrow t_1 = \boxed{0.42}\ s \quad , \quad t_2 = \boxed{0.774}\ s$



زمن الوصول لارتفاع 10 ft في اتجاه الطلوع ، زمن الوصول لارتفاع 10 ft في اتجاه النزول

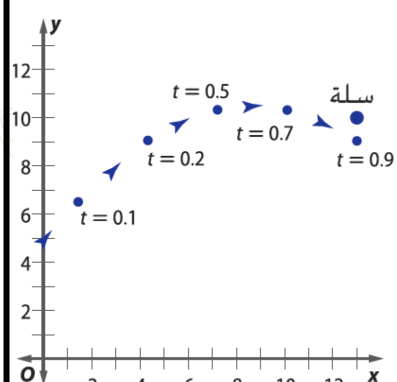
ثانيًا: نحسب المسافة الأفقية عند $t = 0.774$ بالتعويض في x

$\Rightarrow x = t v_0 \cos\theta \Rightarrow x = 0.774(24)\cos 53 = 11.179\ ft$

هذه المسافة قبل السلة لأنها أقل من 13 ft (بعد السلة الأفقي)

وبالتالي لن تدخل الكرة في السلة ولن تحرز خديجة نقاطًا من هذه الرمية.

التحقق يمكنك التأكد من حسابك عبر التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية وتحديد مسار الكرة بالنسبة للسلة.



t	x	y	t	x	y
0	0	4.75	0.5	7.22	10.33
0.1	1.44	6.51	0.6	8.67	10.49
0.2	2.89	7.94	0.7	10.11	10.32
0.3	4.33	9.06	0.8	11.55	9.84
0.4	5.78	9.86	0.9	13.00	9.04