تذكر قواعد التكامل غير المحدود:

1) $\int a \; dx = ax + c$: حيث a ثابت

2) $\int x^n \; dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$

تكاملات الدوال المثلثية:

اشتقاق ←

$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \; \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \; \cot x$

→ تكامل

تكاملات الدوال المثلثية العكسية:

اشتقاق ←

$\sin^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

→ تكامل

تكاملات الدوال اللوغاريتمية:

اشتقاق ←

$\ln\lvert f(x)\rvert + c$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$\ln\lvert x\rvert + c$	$\dfrac{1}{x}$

→ تكامل

تكاملات الدوال الأسية:

اشتقاق ←

$e^{f(x)} + c$	$f'(x) \; e^{f(x)}$
$e^x + c$	e^x

→ تكامل

أولًا: النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (الجزء 1)

النظرية 5.1 (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل، الجزء الأول)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و $F(x)$ هي أيّ دالة أصليّة لـ $f(x)$ ، فإنّ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{5.1}$$

تمارين صـ 366 :- استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

1. $\displaystyle\int_0^2 (2x - 3)\ dx$

....

....

....

5. $\displaystyle\int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right)\ dx$

....

....

....

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3 + 2x)\ dx$

....

....

....

7. $\displaystyle\int_0^1 (6e^{-3x} + 4)\ dx$

....

....

....

تمارين صـ 366 ـ: استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

11. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sec t\ \tan t\ dt$

13. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{t-3}{t}\,dt$

18. $\displaystyle\int_{0}^{t} (\sin^2 x + \cos^2 x)\ dx$

تمارين ص 367: ابحث عن كل الأخطاء.

51. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1-(1) = -2$ ... ...

52. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sec^2 x\ dx = [\tan x]_0^{\pi} = \tan\pi - \tan 0 = 0$ ... ...

ثانيًا: خواص التكامل المحدود

إذا كانت f و g قابلتين للتكامل على $[a,b]$ فإن:

1) تكامل الثابت: لأي عدد ثابت k يكون: $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

2) ترتيب التكامل: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) خاصية الصفر: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

4) الثابت المضروب: لأي عدد ثابت k يكون: $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

5) المجموع أو الفرق: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

6) خاصية الإضافة: لأي عدد ثابت c في $[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

تمارين صـ 356 :- أكتب كل تعبير في صورة تكامل منفرد

35. (a) $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$

....

36. (a) $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$ (b) $\int_{-1}^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

....

....

تمارين صـ 356 ـ: فرضًا أن $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ أوجد:

37. (a) $\displaystyle\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx$

38. (b) $\displaystyle\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]\,dx$

....

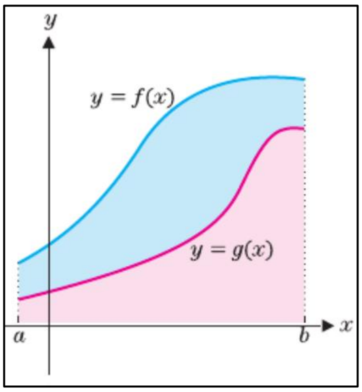
....

....

تابع خواص التكامل المحدود

7) خاصية السيادة: " الدالة الأكبر لها التكامل الأكبر"

على فرض أنّ $g(x) \le f(x)$ لكل $x \in [a, b]$ وأنّ f و g قابلتان للتكامل على $[a, b]$. إذًا، $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$



تمارين صـ 356 ـ:

41. (a) أثبت أن: $\sin(1) \le \int_1^2 x^2 \sin x\,dx \le 4$

....

....

....

....

....

....

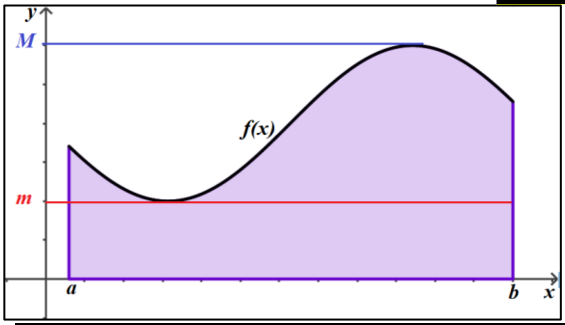
....

تابع خواص التكامل المحدود

8) خاصية العظمى والصغرى:

إذا كانت: M هي القيمة العظمى للدالة $f(x)$ في $[a,b]$
، m هي القيمة الصغرى للدالة $f(x)$ في $[a,b]$ فإن:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$



المثال 4.7 ص355: استخدم متباينة العظمى والصغرى لتقدير قيمة $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

M = ...

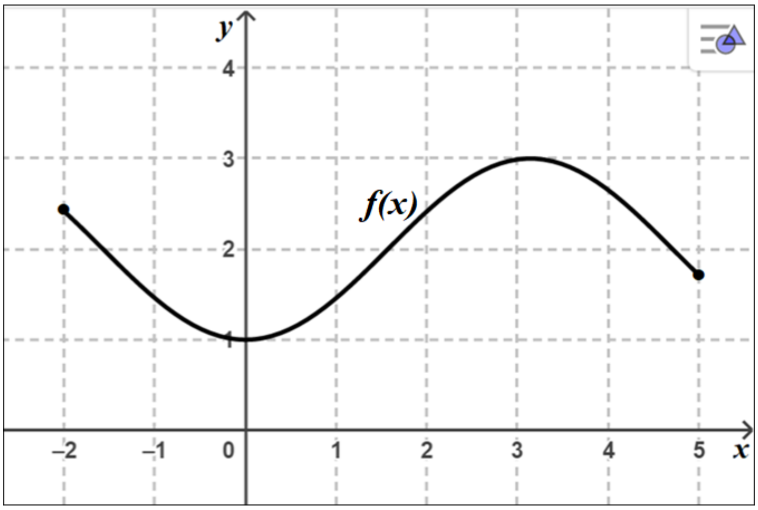
m = ...

....

....

الاختبارات المعيارية:

الشكل يمثل الدالة $f(x)$ المتصلة على $[-2,5]$، أيًا مما يلي صحيح عن الدالة $f(x)$:



A) $21 \le \int_{-2}^{5} f(x)\,dx \le 7$

B) $7 \le \int_{-2}^{5} f(x)\,dx \le 21$

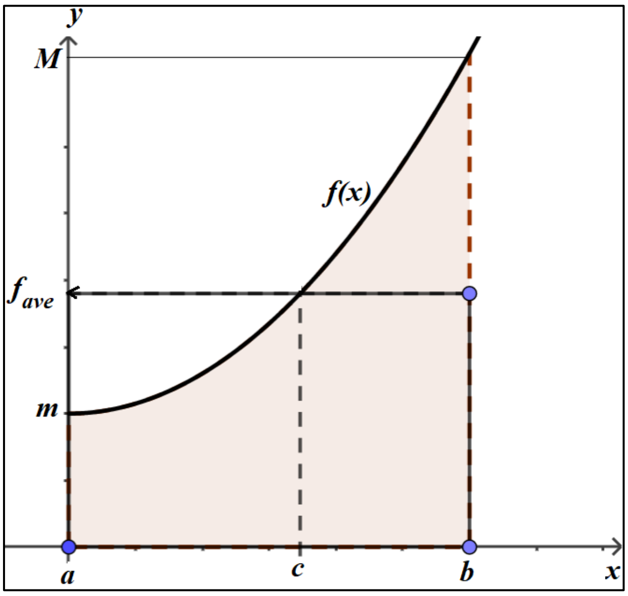
C) $-21 \le \int_{-2}^{5} f(x)\,dx \le -7$

D) $-7 \le \int_{-2}^{5} f(x)\,dx \le -21$

ثالثًا: نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات المحدودة

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ فإن متوسط قيمة f
في $[a,b]$ تقع بين قيمتي f الصغرى m والعظمى M
ويكون عندها:
المساحة بين منحنى f ومحور x
= مساحة المستطيل الذي قاعدته $[a,b]$ وارتفاعه $f(c)$

$$f(c)\ \cdot\ (b-a)=\int_a^b f(x)\ dx$$



$$\boxed{f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx}$$

ملاحظة:
القيمة المتوسطة للدالة f قد تحدث عند قيم متعددة لـ c حيث: $c\in(a,b)$

تمارين ص 367:

55. $f(x)=x^2-1 \qquad ,[1,3]$

a) جد القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة

b) جد قيمة c التي تتحقق عندها هذه القيمة المتوسطة

تمارين ص 367:

57. $f(x) = \cos x \qquad , \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) جد القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة

b) جد قيمة c التي تتحقق عندها هذه القيمة المتوسطة

تمارين ص 367:

58. $f(x) = e^{x} \qquad , [0, 2]$

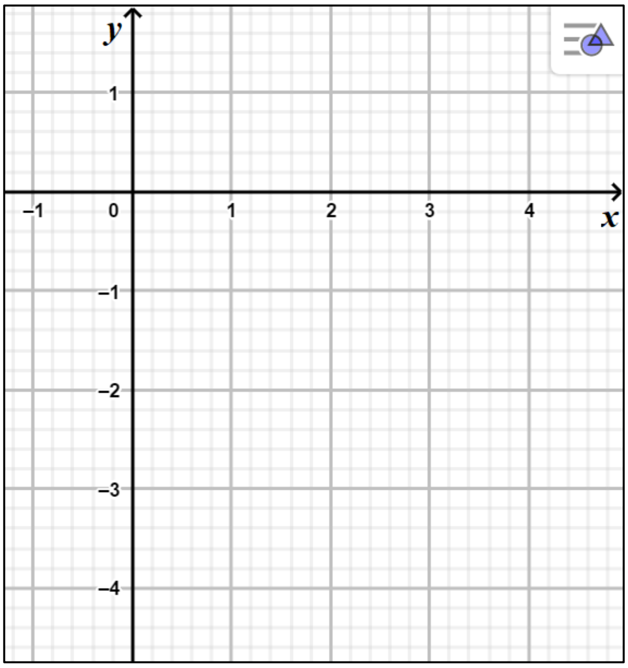
a) جد القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة

b) جد قيمة c التي تتحقق عندها هذه القيمة المتوسطة

رابعًا: المساحات باستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (الجزء 1)

تمارين ص 366: جد المساحة المعطاة.

20. المساحة تحت المحور x وفوق $y = x^2 - 4x$



رأس القطع: ....

التقاطعات مع محور x: ....

x					
y					

المساحة: ....

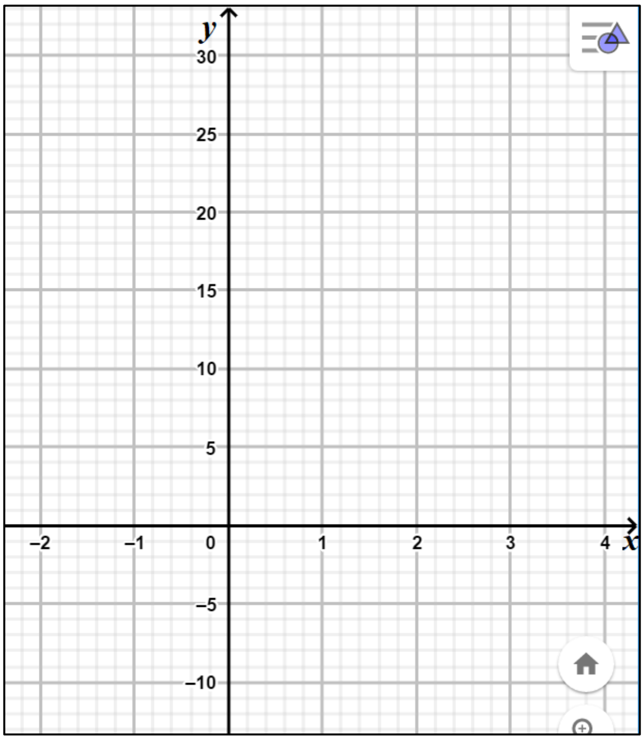
....

....

....

تمارين ص 366: جد المساحة المعطاة.

22. مساحة المنطقة المحدودة بين الدالة $y = x^3$ و $x = 3$ والمحور x



التقاطعات مع محور x: ....

x					
y					

المساحة: ....

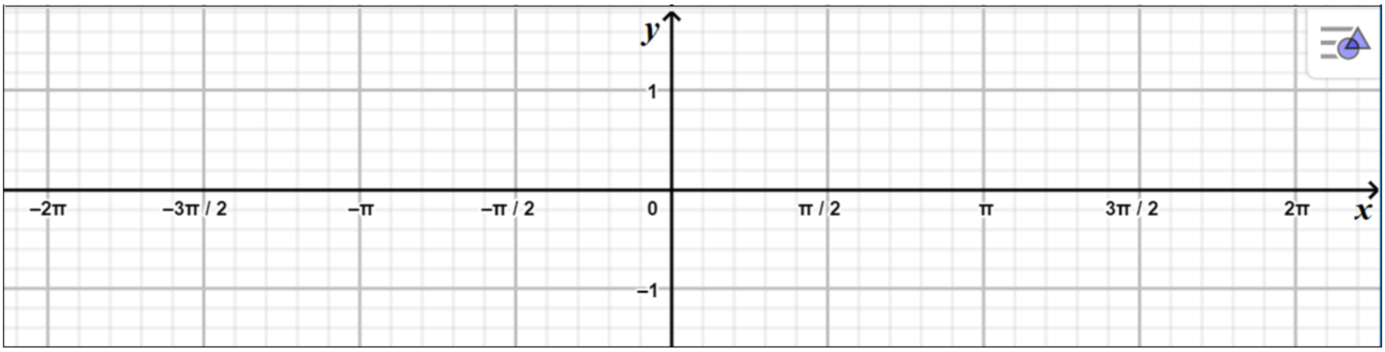
....

....

....

تمارين ص 366: جد المساحة المعطاة.

24. المساحة بين الدالة $y = \sin x$ والمحور x لكل $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4}$



المساحة: ....

....

....

....

خامسًا: النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (الجزء 2)

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل: الجزء (2)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

تمارين ص 366 ـ: جد المشتقة $f'(x)$

$$25)\ f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\,dt$$

....

$$28)\ f(x) = \int_x^2 \sec t\,dt$$

....

....

تفكير ناقد: أوجد

$$\frac{d}{dx}\int_{-2}^{5} (3t - 4)\,dt = \ldots\ldots\ldots$$

تمارين صـ 367 ـ: 40) أوجد معادلة المماس عند قيمة معطاة لـ x :

$$y = \int_{-1}^{x} \ln(t^2 + 2t + 2)\ dt \qquad , x = -1$$

نقطة التماس: عند $x = -1$

ميل المماس: عند $x = -1$

....

....

....

معادلة المماس: ....

....

....

....

تمارين صـ 367 ـ: 41) أوجد معادلة المماس عند قيمة معطاة لـ x :

$$y = \int_{2}^{x} \cos(\pi\, t^3)\ dt \qquad , x = 2$$

نقطة التماس: عند $x = 2$

ميل المماس: عند $x = 2$

....

....

....

معادلة المماس: ....

....

....

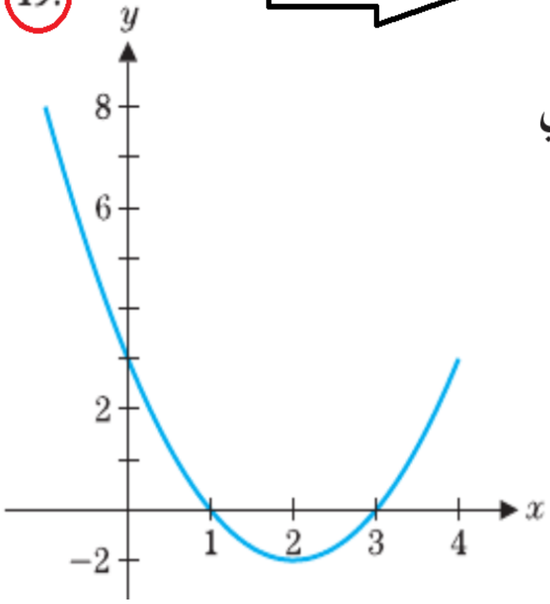
....

تمارين صـ 367 :-

في التمرينين 49 و50 ، استخدم التمثيل البياني لتنظيم $\int_0^1 f(x)\,dx$ و $\int_0^2 f(x)\,dx$ و $\int_0^3 f(x)\,dx$ بالترتيب، من الأصغر إلى الأكبر.

49.

الترتيب تصاعديًا ....و............................و............................



في ما يخص $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ، حدد الفترات التي تتزايد فيها g وحدد النقاط الحرجة لأجل g .

....

....

....

....

تمارين صـ 367 :-

.61 حدد كل القيم القصوى المحلية لـ $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\,dt$

....

....

....

....

....

....

....

....

ملحوظة 1: (قاعدة السلسلة)

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{u(x)} f(t)\,dt = f(u)\,.\,u'(x)$$

تمارين صـ 366 :- جد المشتقة $f'(x)$

$$27)\ f(x) = \int_{0}^{x^2} \left(e^{-t^2}+1\right) dt$$

....

....

تدريب: جد المشتقة $f'(x)$

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{0} \sin t^2\, dt$$

....

....

....

ملحوظة 2: (متغير في حدي التكامل)

تمارين صـ 366 :- جد المشتقة $f'(x)$

$$32)\ f(x) = \int_{3x}^{\sin x} \left(t^2+4\right) dt$$

....

....

....

....