الوحدة 2

الدوال والمعادلات الأسيّة

السابق

- قمتَ بتمثيل الدوال وتحويلات الدوال بيانيًا.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:
  - تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.
  - حلّ المعادلات والمتباينات الأسيّة.
  - حل المسائل التي تتضمن نموًا وتضاؤلاً أسيًا.

لماذا؟ ▲

- **العلوم** الرياضيات والعلوم علمان متلازمان. وسواءٌ أكنت تدرس الكيمياء أو علم الحياء أو علم المتحجرات أو علم الحيوان أو علم الإنسان، فإنك ستحتاج إلى مهاراتٍ رياضيةٍ قوية. وفي هذه الوحدة، سوف تتعلم الجوانب الرياضية للعلوم كالفيروسات الحاسوبية وتعداد الحشرات ونموّ الجرائيم والانقسام الخلوي وعلم الفلك والأعاصير والزلازل.

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

Chapter Sourced From: Exponential and Logarithmic Functions and Relations, from Integrated Math II Chapter 4, Lessons 1-2 © 2012 Exponents and Exponential Functions, from Integrated Math I Chapter 7, Lessons 5-8 © 2012

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد حل اختبار التمرين السريع أدناه للتحقق من المهارات المطلوبة لديك. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

تمرين سريع

بسّط. افترض أنه لا يوجد متغيرٌ يساوي صفرًا.

1. $a^4a^3a^5$
2. $(2xy^3z^2)^3$
3. $\dfrac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$
4. $\left(\dfrac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$
5. **الكثافة** كثافة جسم ما تساوي الكتلة مقسومة على الحجم. لدينا جسمٌ كتلته 7.5×10^3 g وحجمه 1.5×10^3 cm^3. ما هي كثافة الجسم؟

جد معكوس كلّ من الدّوال التالية. ثمّ مثل الدّالة ومعكوسها بيانيًا.

6. $f(x) = 2x + 5$
7. $f(x) = x - 3$
8. $f(x) = -4x$
9. $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$
10. $f(x) = \frac{x-1}{2}$
11. $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدّد ما إذا كان كل زوجٍ من الدوال التالية عبارة عن دالتين عكسيتين.

12. $f(x) = x - 6$, $g(x) = x + 6$
13. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 2x - 5$
14. **الطعام** يبلغ سعر قطعة البيتزا متوسطة الحجم بالجبن في مطعم بيتزا 12 AED إضافةً إلى 2 AED لكلّ طبقة إضافية. فإذا كانت $f(x) = 2x + 12$ تمثّل تكلفة البيتزا المتوسطة التي تضم عدد x من الطبقات، فجد $f^{-1}(x)$ واشرح معناها.

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط $\dfrac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$ وافترض أنّه لا يوجد متغير يساوي صفرًا.

$\dfrac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$

بسّط البسط باستخدام قوة القوة وبسّط المقام باستخدام قاعدة ناتج ضرب الأسس.

$= \dfrac{a^6b^2c^4}{a^6b^3c^8}$

بسّط باستخدام قاعدة ناتج قسمة الأسس.

$= \dfrac{1}{bc^4}$ or $b^{-1}c^{-4}$

مثال 2

جد معكوس $f(x) = 3x - 1$.

الخطوة 1 عوّض عن $f(x)$ بـ y في المعادلة الأصلية:
$f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$

الخطوة 2 بدّل بين x و y: $x = 3y - 1$.

الخطوة 3 حُلّ لإيجاد قيمة y.

$x = 3y - 1$ بالعكس

$x + 1 = 3y$ أضف 1 إلى كل طرف.

$\dfrac{x+1}{3} = y$ اقسم كل طرف على 3.

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = y$ بسّط.

الخطوة 4 عوّض عن y بـ $f^{-1}(x)$.

$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

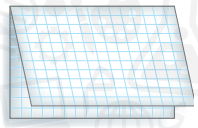
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

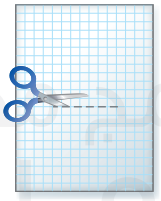
المطويات منظّم الدراسة

الدوال والعلاقات الأسيّة والجذرية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالدّوال الأسيّة. وابدأ بورقتي تمثيل بياني.

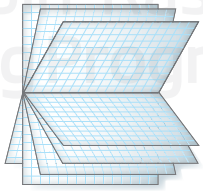


1 **اطوِ** الورقتين إلى نصفين بالعرض.

2 **على** الورقة الأولى، قصّ لمسافة 5 cm على طول الطية وعلى الجانبين.



3 **على** الورقة الثانية، قصّ منطقة المركز على طول الطية مع ترك مسافة 5 cm على الطرفين بدون قصّ.



4 **أدخل** الورقة الأولى من خلال الورقة الثانية وحاذِ بين الطيّتين، ثمّ سمّ الصفحات بأرقام الدروس.

المفردات الجديدة

الدالة الأسيّة	exponential function
النمو الأسي	exponential growth
خط تقارب	asymptote
عامل النمو	growth factor
التضاؤل الأسي	exponential decay
عامل التضاؤل	decay factor
المعادلة الأسيّة	exponential equation
المرابحة المركبة	compound interest
المتباينة الأسيّة	exponential inequality
مرافق	conjugate
معادلات جذرية	radical equations

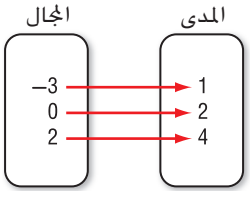
مراجعة المفردات

المجال مجموعة جميع إحداثيات x الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقة ما

الدالة علاقة يُقرن فيها كل عنصر من عناصر المجال مع عنصر واحد فقط من عناصر المدى

المدى مجموعة جميع إحداثيات y الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقةٍ ما

$\{(-3,1), (0, 2), (2, 4)\}$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2-1 الدوال الأسيّة

السابق
- وجدت قيمة التعابير العددية التي تتضمن أسسًا.

الحالي
1. تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.
2. تمثيل دوال النمو والتضاؤل بيانيا.

لماذا؟
- قد تبدو العناكب الذئبية مخيفة بأجسامها وسيقانها الكبيرة المشعرة، لكنها غير ضارة للبشر. يوضح التمثيل البياني مجموعة عناكب ذئبية تتزايد مع الوقت. لاحظ أن التمثيل البياني ليس خطيًا.

التمثيل البياني يمثل الدالة $y = 3(2)^x$. هذا مثال لدالة *أسيّة*.

المفردات الجديدة
- **الدالة الأسيّة** exponential function
- **دالة النمو الأسيّ** exponential growth function
- **دالة التضاؤل(الاضمحلال) الأسيّ** exponential decay function

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا

تُعتبر **الدالة الأسيّة** دالة مكتوبة على الصيغة $y = ab^x$. حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$. لاحظ أن الأساس ثابت والأس متغير. الدوال الأسيّة غير خطية.

المفهوم الأساسي الدالة الأسيّة

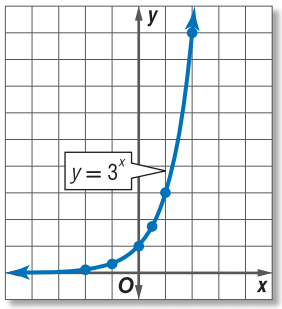
الشرح الدالة الأسيّة دالة يمكن كتابتها بالصيغة $y = ab^x$. حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.

أمثلة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = 4^x$ $y = 2(3)^x$

مثال 1 التمثيل بيانيًا باستخدام $a > 0, b > 1$

مثّل بيانيًا $y = 3^x$. جد التقاطع مع المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

x	3^x	y
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	≈ 1.73
1	3^1	3
2	3^2	9



يتقاطع التمثيل البياني مع المحور الرأسيّ y عند 1.
إذًا المقطع من المحور الرأسيّ y هو 1. المجال هو جميع الأعداد الحقيقية والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

لاحظ أن التمثيل البياني يقترب من المحور الأفقي x ولا توجد تقاطع مع المحور الأفقي x. التمثيل البياني متزايد على المجال كله.

تمرين موجّه

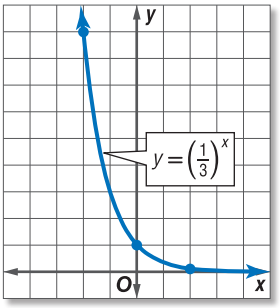
1. مثّل بيانيًا $y = 7^x$. جد التقاطع مع المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

الدوال بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a > 0, b > 1$، تُسمى **دوال النمو الأسيّ** وكلها لها نفس شكل التمثيل البياني كما في المثال 1. الدوال بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a > 0$ و $0 < b < 1$ تُسمى **دوال الاضمحلال الأسيّ** ولها أيضًا الشكل العام نفسه.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 التمثيل بيانيًا باستخدام $a > 0$ و $1 < b < 0$

مثّل بيانيًا $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. جد التقاطع مع المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.



x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$

المقطع من المحور الرأسيّ y هو 1. المجال هو جميع الأعداد الحقيقية والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. لاحظ أنه مع زيادة x، تتناقص قيم y بسرعة أقل.

نصيحة دراسية

$a < 0$ إذا كانت قيمة a أقل من 0. فسينعكس التمثيل البياني بالمحور الأفقي x.

تمرين موجّه

2. مثّل بيانيًا $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. جد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

يمكن تلخيص الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة كالتالي.

المفهوم الأساسي التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة

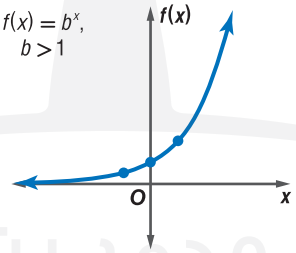
دوال النمو الأسيّ

المعادلة: $f(x) = ab^x,\ a > 0,\ b > 1$

المجال، المدى: جميع الأعداد الحقيقية؛ جميع الأعداد الحقيقية الموجبة

نقاط التقاطع: نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسيّ y، لا توجد نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: مع تزايد x، تتزايد $f(x)$؛ مع تناقص x، تقترب $f(x)$ من 0



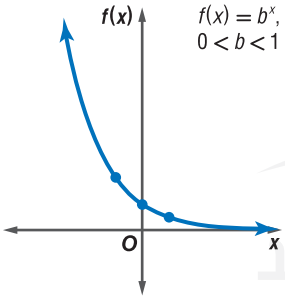
دوال الاضمحلال الأسيّ

المعادلة: $f(x) = ab^x,\ a > 0,\ 0 < b < 1$

المجال، المدى: جميع الأعداد الحقيقية؛ جميع الأعداد الحقيقية الموجبة

نقاط التقاطع: نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسيّ y، لا توجد نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: مع تزايد x، تقترب $f(x)$ من 0؛ مع تناقص x، تتزايد $f(x)$

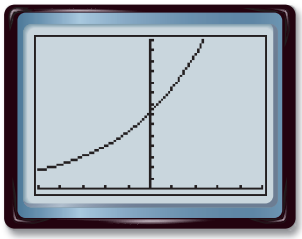


تحدث الدوال الأسيّة في الكثير من مواقف الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام الدوال الأسيّة في حل المسائل

الصودا **تمثل الدالة $C = 179(1.029)^t$ مقدار الصودا المستهلك في العالم، حيث C هي المقدار المستهلك بمليار الترات، t هي عدد السنوات منذ عام 2000.**

a. مثّل الدالة بيانيًا. ما قيم C ذات المعنى في سياق المسألة؟



[−50, 50] scl: 10 by [0, 350] scl: 25

بما أن t تمثل الزمن، $t > 0$. عندما تكون $t = 0$، يبلغ الاستهلاك 179 مليار لتر. ولهذا، ففي سياق هذه المسألة، $C > 179$ ذات معنى.

الربط بالحياة اليومية

الولايات المتحدة هي أكبر مستهلك للصودا في العالم. في أحد الأعوام مؤخرًا، كان استهلاك الولايات المتحدة يمثل ثلث إجمالي استهلاك العالم من الصودا.

المصدر: معهد وورلد وايد ووتش

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

برنامج محمد بن راشد للتعليم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

b. كم كان مقدار استهلاك الصودا في عام 2005؟

$C = 179(1.029)^t$ المعادلة الأصلية

$= 179(1.029)^5$ $t = 5$

≈ 206.5 استخدم حاسبة.

كان استهلاك العالم من الصودا في عام 2005 يبلغ 206.5 مليار لتر تقريبًا.

تمرين موجّه

3. علم الأحياء يتضاعف عدد نوع معين من البكتيريا كل 20 دقيقة. بدءًا بـ 10 خلايا في مزرعة، يمكن تمثيل العدد بالدالة $B = 10(2)^t$، حيث B هي عدد خلايا البكتيريا t هي الزمن بزيادات مقدارها 20 دقيقة. كم سيبلغ العدد بعد ساعتين؟

2 تحديد السلوك الأسيّ

تذكر مما سبق أن الدوال الخطية لها معدل تغير ثابت. ليس للدوال الأسيّة معدلات تغير ثابتة، لكن لها نسب ثابتة.

مثال 4 تحديد السلوك الأسيّ

حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. ولماذا؟

x	0	5	10	15	20	25
y	64	32	16	8	4	2

الطريقة 1 البحث عن نمط.

تقع قيم المجال على مسافات منتظمة تبلغ 5. ابحث عن عامل مشترك بين قيم المدى.

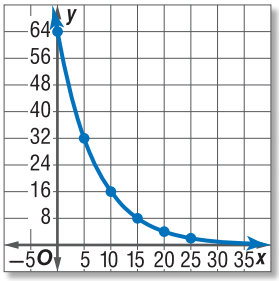
64 32 16 8 4 2

$\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

تختلف قيم المدى حسب العامل المشترك $\frac{1}{2}$.

بما أن قيم المجال تقع على مسافات منتظمة وتختلف قيم المدى حسب عامل مشترك موجب، فربما تكون البيانات أسيّة. قد تتضمن معادلتها $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

الطريقة 2 مثّل البيانات بيانيًا.



ارسم النقاط وصِلها بواسطة منحنى منتظم.
يوضح التمثيل البياني قيمة سريعة التناقص y مع زيادة x.
هذه سمة في السلوك الأسيّ يتراوح فيها الأساس بين 0 و 1.

تمرين موجّه

4. حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. اشرح السبب.

x	0	3	6	9	12	15
y	12	16	20	24	28	32

نصيحة في حل المسائل

وضع قائمة مرتبة

يفيد وضع قائمة مرتبة لقيم x وقيم y المقابلة لها في تمثيل الدالة بيانيًا. يمكن أن يساعدك هذا أيضًا في تحديد الأنماط في البيانات.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمثل التمثيل البياني لـــ $f(x) = b^x$ تمثيلاً بيانيًا أصليًا للدوال الأسيّة. ويمكن تطبيق نفس الأساليب المستخدَمة لتحويل التمثيلات البيانية للدوال الأخرى التي درستَها على التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال الأسيّة

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

h : الإزاحة الأفقية

تكون وحدات h جهة اليمين إذا كانت h موجبة

تكون وحدات $|h|$ جهة اليسار إذا كانت h سالبة

k : الإزاحة الرأسية

تكون وحدات k لأعلى إذا كانت k موجبة

تكون وحدات $|k|$ لأسفل إذا كانت k سالبة

a : الاتجاه والشكل

إذا كان $a < 0$، فسينعكس التمثيل البياني على المحور الأفقي x. إذا كان $|a| > 1$، فسيمتد التمثيل البياني رأسيًا. إذا كان $0 < |a| < 1$، فسيكون التمثيل البياني مضغوطًا رأسيًا.

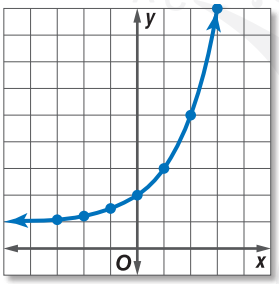
مثال 5 التمثيل البياني للتحويلات

مثِّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.

a. $y = 2^x + 1$

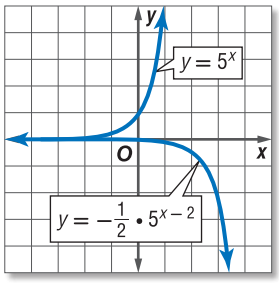
تمثل المعادلة إزاحة التمثيل البياني لـــ $y = 2^x$ وحدة لأعلى.

x	$y = 2^x + 1$
-3	$2^{-3} + 1 = 1.125$
-2	$2^{-2} + 1 = 1.25$
-1	$2^{-1} + 1 = 1.5$
0	$2^0 + 1 = 2$
1	$2^1 + 1 = 3$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$2^3 + 1 = 9$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}، المدى = $\{y \mid y > 1\}$

b. $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$



تمثل المعادلة تحويلاً للتمثيل البياني لـــ $y = 5^x$.

مثّل $y = 5^x$ بيانيًا وحوّل التمثيل البياني.

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني في المحور الأفقي x وينضغط رأسيًا.
- $h = 2$: تتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا تتم إزاحة التمثيل البياني رأسيًا.

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية} المدى = $\{y \mid y < 0\}$

تمرين موجّه

5A. $y = 2^{x+3} - 5$

5B. $y = 0.1(6)^x - 3$

نصيحة دراسية

الدقة تذكر أن السلوك الطرفي هو سلوك التمثيل البياني حيث تقترب x من اللا نهاية الموجبة أو اللا نهاية السالبة. في المثال 5a، عندما تقترب x من اللا نهاية، تقترب y من اللا نهاية. وفي المثال 5b، عندما تقترب x من اللانهاية، تقترب y من اللا نهاية السالبة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

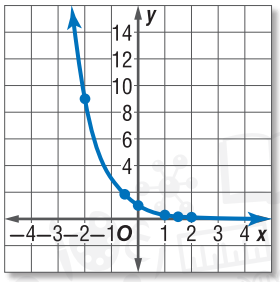
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 6 تمثيل دوال التضاؤل الأسي بيانيًا

مثِّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.

a. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{27}}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$



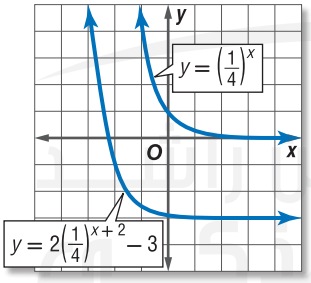
المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b. $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$

تمثل المعادلة تحويلاً للتمثيل البياني لـ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

افحص كل مَعلمة.

- $a = 2$: التمثيل البياني ممتد رأسيًا.
- $h = -2$: تتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: تتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.



المجال هو كل الأعداد الحقيقية، والمدى هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من -3.

تمرين موجّه

6A. $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

6B. $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

كما هو الحال بالنسبة للنمو الأسي، يمكنك أيضًا تمثيل التضاؤل الأسي بتناقص ثابت للنسبة المئوية على مدار فترات زمنية محددة باستخدام الدالة التالية.

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

يُطلق على أساس التعبير الأسي، $1 - r$، اسم **عامل التضاؤل**.

نصيحة دراسية

التضاؤل الأسي تأكد من عدم الخلط بين تغيير الأبعادالتمدد الذي تكون فيه $|a| > 1$ والتضاؤل الأسي، والذي تكون فيه $0 < b < 1$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **مثّل كل دالة بيانيًا. جد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.**

1. $y = 2^x$
2. $y = -5^x$
3. $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$
4. $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$
5. $f(x) = 6^x + 3$
6. $f(x) = 2 - 2^x$

مثال 3 7. **علم الأحياء** تمثل الدالة $f(t) = 100(1.05)^t$ نمو أعداد ذبابة الفاكهة، حيث $f(t)$ هي الذباب t هي الزمن بالأيام.

a. ما قيم المجال والمدى المعقولة في سياق هذا الموقف؟ اشرح.

b. بعد أسبوعين، كم يبلغ تقريبًا عدد الذباب في هذا التجمع؟

مثال 4 حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. اشرح لِمَ أو لِمَ لا.

8.

x	1	2	3	4	5	6
y	−4	−2	0	2	4	6

9.

x	2	4	6	8	10	12
y	1	4	16	64	256	1024

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.**

10. $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$
11. $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$
12. $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$
13. $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **مثّل كل دالة بيانيًا. جد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.**

14. $y = 2x\,8^x$
15. $y = 2x\left(\frac{1}{6}\right)^x$
16. $y = \left(\frac{1}{12}\right)^x$
17. $y = -3x\,9^x$
18. $y = -4x\,10^x$
19. $y = 3x\,11^x$
20. $y = 4^x + 3$
21. $y = \frac{1}{2}(2^x - 8)$
22. $y = 5(3^x) + 1$
23. $y = -2(3^x) + 5$

مثال 3 24. **استخدام النماذج** يزيد عدد البكتيريا في مزرعة وفقًا للنموذج $p = 300(2.7)^{0.02t}$. حيث t هي عدد الساعات t = 0 تقابل الساعة 9:00 صباحًا.

a. استخدم هذا النموذج لتقدير عدد البكتيريا الساعة 11 صباحًا

b. مثّل الدالة بيانيًا واذكر اسم نقطة التقاطع p. صف ما تمثله نقطة التقاطع p وصف مجال ومدى منطقيين لهذا الموقف.

مثال 4 **حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. اشرح السبب.**

25

x	−4	0	4	8	12
y	2	−4	8	−16	32

26.

x	−6	−3	0	3
y	5	10	15	20

27.

x	−8	−6	−4	−2
y	0.25	0.5	1	2

28.

x	20	30	40	50	60
y	1	0.4	0.16	0.064	0.0256

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

29. التصوير الفوتوغرافي تعمل منال على تكبير صورة لعمل ملصق للمدرسة. ستقوم بتكبير الصورة بنسبة 150% بشكل متكرر. تمثل الدالة $P = 1.5^x$ الحجم الجديد للصورة التي يجري تكبيرها، حيث x هي عدد التكبيرات. كم ضعفًا يبلغ حجم الصورة بعد 4 تكبيرات؟

30. المعرفة المالية أودع محمد AED 500 في حساب ادخار وبعد 8 سنوات، وصلت قيمة استثماره إلى AED 807.07. تمثل المعادلة $A = d(1.005)^{12t}$ قيمة استثمار محمد A بعد t سنوات بإيداع مبدئي يبلغ d.

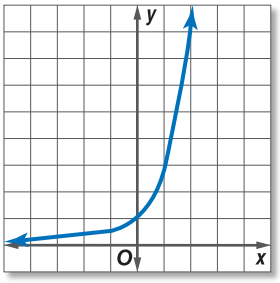
a. ماذا ستكون قيمة استثمار محمد إذا كان قد أودع AED 1000؟

b. ماذا ستكون قيمة استثمار محمد إذا كان قد أودع AED 250؟

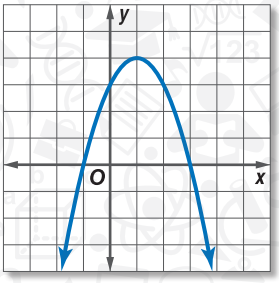
c. جد تفسير $d(1.005)^{12t}$ لتشرح كيفية تأثير مبلغ الإيداع الأصلي على قيمة استثمار محمد.

حدد كل دالة باعتبارها خطية، أو أسيّة، أو ليست أيًا منهما.

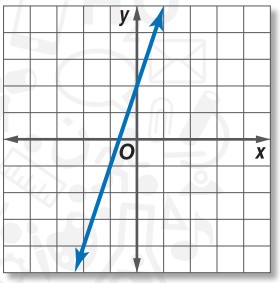
31.



32.



33.



34. $y = 4^x$

35. $y = 2x(x - 1)$

36. $5x + y = 8$

37. التخرج ارتفع عدد الخريجين في مدرسة عليا بعامل 1.055 كل عام منذ عام 2001 في عام 2001، تخرج 110 طلاب. تمثل الدالة $N = 110(1.055)^t$ عدد الطلاب N المتوقع أن يتخرجوا بعد t أعوام من 2001. كم عدد الطلاب الذين سيتخرجون في عام 2012؟

صف التمثيل البياني لكل معادلة كتحويل للتمثيل البياني $y = 2^x$.

38. $y = 2^x + 6$

39. $y = 3(2)^x$

40. $y = -\frac{1}{4}(2)^x$

41. $y = -3 + 2^x$

42. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

43. $y = -5(2)^x$

44. الغزلان يتضاعف عدد الغزلان في حديقة عامة كل عام. في عام 2000، كان هناك 25 غزالاً في الحديقة. تمثل الدالة $N = 25(2)^t$ عدد الغزلان N في الحديقة بعد t سنوات من عام 2000. ماذا سيكون عدد الغزلان في عام 2015؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. المثابرة اكتب دالة أسيّة يمر تمثيلها البياني بالنقطتين (0, 3) و (1, 6)

46. التبرير حدد ما إذا كان الرسم البياني $y = ab^x$، حيث $a \neq 0, b > 0$ و $b \neq 1$. يتقاطع أحيانًا، أو دائمًا، أو لا يتقاطع أبدًا مع نقطة التقاطع الأفقية x. اشرح استنتاجك.

47. مسألة غير محددة الإجابة جد دالة أسيّة تمثل موقفًا من الحياة اليومية ومثّل الدالة بيانيًا. حلل التمثيل البياني واشرح سبب تمثيل الموقف بدالة أسيّة وليس دالة خطية.

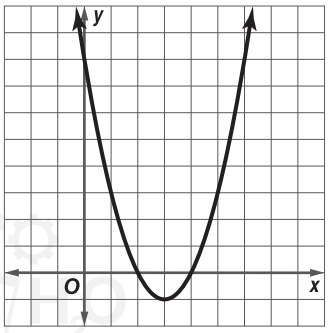
48. التبرير استخدم الجداول والتمثيلات البيانية للمقارنة والمقابلة بين الدالة الأسيّة $f(x) = ab^x + c$، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$، والدالة الخطية $g(x) = ax + c$. اذكر نقاط التقاطع، والفترات التي تكون فيها الدوال متزايدة أو متناقصة أو موجبة أو سالبة، والقيم العظمى والصغرى النسبية، والتناظر، والسلوك الطرفي.

49. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية تحديد ما إذا كانت مجموعة بيانات تعرض سلوكًا أسيًّا.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

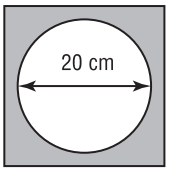
50. إجابة قصيرة ما التقاطع مع المحور الأفقي x في الدالة الممثلة بيانيًا أدناه؟



51. استثمر مازن AED 300 في حساب ادخار. تمثل المعادلة $A = 300(1.005)^{12t}$ المبلغ في حساب مازن A بعد t سنوات. ما المبلغ الذي سيكون في حساب مازن بعد 7 أعوام؟

A AED 25,326
B AED 456.11
C AED 385.01
D AED 301.52

52. الهندسة وضعت نورا قطعة ورق دائرية على صورة مربعة كما يظهر بالأدنى. إذا تمددت الصورة 4 cm خارج الدائرة من كل جانب، فما محيط الصورة المربعة؟



F 64 cm
G 80 cm
H 94 cm
J 112 cm

53. تقع النقطتان اللتان إحداثياتهما (−3, 0) و (2, 7) على المستقيم l. يحتوي المستقيم p على (−1, 3) وهو متعامد على المستقيم l. ما الإحداثي الأفقي x للنقطة التي يتقاطع عندها l مع p؟

A $\frac{1}{2}$
B $-\frac{2}{5}$
C $-\frac{1}{2}$
D -3

مراجعة شاملة

جد قيمة كل ناتج ضرب. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي بالصيغة القياسية.

54. $(1.9 \times 10^2)(4.7 \times 10^6)$

55. $(4.5 \times 10^{-3})(5.6 \times 10^4)$

56. $(3.8 \times 10^{-4})(6.4 \times 10^{-8})$

بسّط.

57. $\sqrt[3]{343}$

58. $\sqrt[6]{729}$

59. $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$

60. $729^{\frac{5}{6}}$

61. $216^{\frac{5}{3}}$

62. $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{2}}$

63. سباق الهدم عندما تصطدم سيارة بجسم، يُقاس التلف بأثر الاصطدام. بالنسبة لسيارة معينة، يتحدد أثر الاصطدام I بواسطة $I = 2v^2$. حيث تمثل v السرعة بالكيلومتر في الدقيقة. ما أثر الاصطدام إذا كانت سرعة السيارة تبلغ 4 km/min؟

استخدم طريقة الحذف في حل كل نظام تباينات.

64. $x + y = -3$
$x - y = 1$

65. $3a + b = 5$
$2a + b = 10$

66. $3x - 5y = 16$
$-3x + 2y = -10$

مراجعة المهارات

جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية حسابية.

67. 1, 3, 5, 7, …

68. −6, −4, −2, 0, …

69. 6.5, 9, 11.5, 14, …

70. 10, 3, −4, −11, …

71. $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \ldots$

72. $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

2-1 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

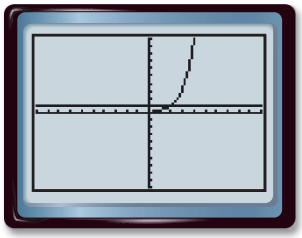
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسيّة من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول. وللقيام بذلك، سوف تكتب المعادلات في صيغة أنظمة معادلات.

النشاط 1

حُـلّ المعادلة: $3^{x-4} = \frac{1}{9}$.

الخطوة 1 مثّل كل طرف من المعادلة بيانيًا في صورة دالة منفصلة. أدخل 3^{x-4} باعتبارها **Y1**. تأكد من تضمين قوسين حول الأس.

أدخِل $\frac{1}{9}$ باعتبارها **Y2**. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا.

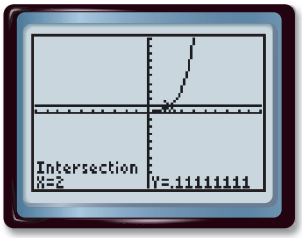


[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 2 استخدم خاصية **intersect**.

يمكنك استخدام خاصية **intersect** (**تقاطع**) من قائمة **CALC** (**احسب**) لتقريب الزوج المرتّب الخاص بالنقطة التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية.

تبين شاشة الحاسبة أن الإحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان هو 2. لذا، فإن حل المعادلة هو 2.



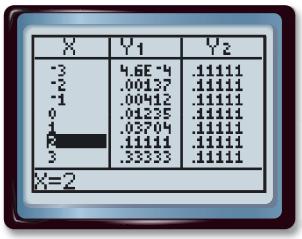
[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

يمكنك أيضًا استخدام خاصية **TABLE** (**الجدول**) لتحديد موقع النقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان.

يظهر الجدول قيم x وقيم y المتماثلة لكل تمثيل بياني. افحص الجدول للعثور على قيمة x التي تساويها قيم y في التمثيلات البيانية.

عند $x = 2$، تكون لكلتا الدالتين قيمة y تبلغ $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$. وبالتالي، فإن حل المعادلة هو 2.



تحقق عوّض بالعدد 2 عن x في المعادلة الأصلية

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ المعادلة الأصلية

$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ عوّض بالعدد 2 عن x.

$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ بسّط.

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓ تم التحقق من الحل.

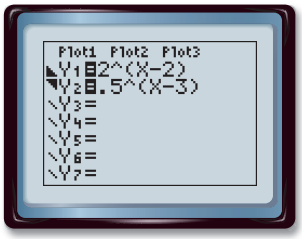
يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسيّة.

(يُتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النشاط 2 وصف

حُـلّ المتباينة: $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$.



الخطوة 1 أدخل المتباينات ذات الصلة.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

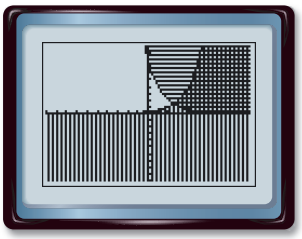
المتباينة الأولى هي $y \geq 2^{x-2}$ أو $y \leq 2^{x-2}$. وبما أن هذه المتباينة تتضمن علامة *أقل من أو يساوي*، فيجب أن تظلل أسفل المنحنى.

أدخل الحد أولاً ثم استخدم السهم ومفاتيح ENTER لاختيار أيقونة "التظليل أسفل".

المتباينة الثانية هي $y \geq 0.5^{x-3}$. ظلل فوق المنحنى لأن هذه المتباينة تحتوي على علامة *أكبر من أو يساوي*.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2 ^ (X,T,θ,n − 2) ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ .5 ^ (X,T,θ,n − 3)

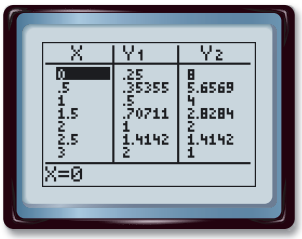


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 2 مثّل النظام بيانيًّا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. وباستخدام خاصية **intersect (تقاطع)**، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.



الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

تحقق باستخدام خاصية **TABLE (الجدول)**. وقم بإعداد الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي 0.5.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [TABLE] 2nd [TBLSET] 0 ENTER .5 ENTER

لاحظ أنه بالنسبة لقيم x التي تكون أكبر من $x = 2.5$. فإن **Y1 > Y2**. وهذا يؤكد أن حل المتباينة يكون $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين

حُـلّ كل معادلة أو متباينة.

1. $9^{x-1} = \frac{1}{81}$
2. $4^{x+3} = 2^{5x}$
3. $5^{x-1} = 2^{x}$
4. $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$
5. $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$
6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$
7. $16^{x-1} > 2^{2x+2}$
8. $3^{x} - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$
9. $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$
10. **الكتابة في الرياضيات** وضّح سبب عمل هذه التقنية الخاصة بتمثيل نظام معادلات أو متباينات بيانيًا على حل المعادلات والمتباينات الأسيّة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 2-2
تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية

السابق
- مثّلتَ الدوال الخطية والتربيعية والأسية بيانيًا.

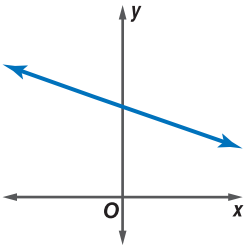
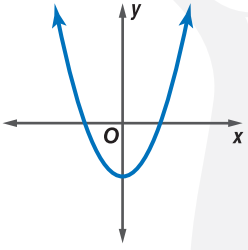
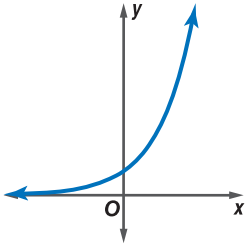
الحالي
1 تحديد الدوال الخطية والتربيعية والأسية من البيانات المعطاة.
2 كتابة معادلات تمثل بيانات.

لماذا؟
- يبيع فريق الجولف في كل سنة الحلوى لجمع المال للجمعيات الخيرية. ومن خلال معرفة نوع الدالة الذي يمثل مبيعات الحلوى، يمكنهم تحديد أفضل سعرٍ للحلوى.

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 تحديد الدوال
يمكنك استخدام الدوال الخطية والدوال التربيعية والدوال الأسيّة لتمثيل البيانات. فيما يلي قائمة بالصيغ العامة للمعادلات وتمثيل بياني لكل نوع من الدوال.

ملخص المفهوم الدوال الخطية وغير الخطية

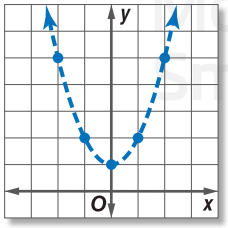
الدالة الخطية	الدالة التربيعية	الدالة الأسيّة
$y = mx + b$	$y = ax^2 + bx + c$	$y = ab^x$ حيث $b > 0$.
		

مثال 1 اختيار نموذجًا باستخدام تمثيل النماذج

مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية أم دالة تربيعية أم دالة أُسيّة.

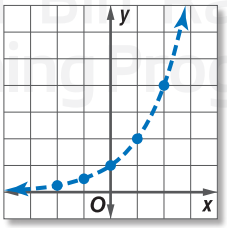
a. $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$

يظهر أن الأزواج المرتبة تمثل دالةً تربيعية.



b. $\left\{\left(-2, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 1), (1, 2), (2, 4)\right\}$

يظهر أن الأزواج المرتبة تمثل دالةً أسية.



تمرين موجّه

1A. $(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3)$

1B. $(-1, 0.25), (0, 1), (1, 4), (2, 16)$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

طريقة أخرى لتحديد يصِف أي نموذج يصف البيانات أفضل هو استخدام الأنماط. تُسمَّى فروق قيم y المتتالية *الفروق الأولى*. تُسمَّى فروق الفروق الأولى المتتالية *الفروق الثانية*.

- إذا كانت جميع فروق قيم y المتتابعة متساوية، فإن الدالة تمثل دالةً خطية.
- إذا كانت الفروق الثانية متساوية جميعًا، ولكن الفروق الأولى غير متساوية، فإن البيانات تمثل دالةً تربيعية.
- إذا كانت نسبة قيم y المتتالية متساويةً جميعًا، و $r \neq 1$، فإن البيانات تمثل دالةً أسيّة.

انتبه!

قبل أن تتحقق من الفروق المتتالية أو النِسب، تأكد من أن قيم x متزايدة بالمقدار نفسه.

مثال 2 اختيار نموذجًا باستخدام الفروق أو النسب

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.

a.

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−3	2	7	12

الفروق الأولى: $-8 \quad -3 \quad 2 \quad 7 \quad 12$ (الفروق: 5، 5، 5، 5)

بما أن الفوارق الأولى متساوية جميعها، فإن جدول القيم يمثل دالةً خطية.

b.

x	−1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	0.5

$8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 0.5$

الفروق الأولى: $-4 \quad -2 \quad -1 \quad -0.5$

الفروق الأولى ليست جميعها متساوية. إذًا، لا يمثل جدول القيم دالةً خطية. جد الفروق الثانية وقارن.

الفروق الأولى: $-4 \quad -2 \quad -1 \quad -0.5$

الفروق الثانية: $2 \quad 1 \quad 0.5$

الفروق الثانية ليست جميعها متساوية. إذًا، لا يمثل جدول القيم دالةً تربيعية. جد نِسب قيم y ثم قارن.

النِسب: $8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 0.5$ ($\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$، $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{0.5}{1}=\frac{1}{2}$)

نِسب قيم y المتتابعة متساوية. وبالتالي، يمكن تمثيل جدول القيم عن طريق دالةٍ أسية.

تمرين موجّه

2A.

x	−3	−2	−1	0	1
y	−3	−7	−9	−9	−7

2B.

x	−2	−1	0	1	2
y	−18	−13	−8	−3	2

2 كتابة المعادلات

عندما تجد النموذج الأفضل في وصف البيانات، فيمكنك كتابة معادلة للدالة. بالنسبة للدالة التربيعية في هذا الدرس، سيكون للمعادلة هذه الصيغة $y = ax^2$.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

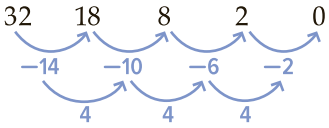
McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

مثال 3 كتابة معادلة

حدد نوع النموذج الأفضل في وصف البيانات. ثُمَّ اكتب معادلةً للدالة التي تمثل البيانات.

الخطوة 1 حدد أي نموذج يلائم البيانات.

x	-4	-3	-2	-1	0
y	32	18	8	2	0



الفروق الأولى:

الفروق الثانية:

بما أن الفروق الثانية متساوية، فإن الدالة التربيعية تمثل البيانات.

الخطوة 2 اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

المعادلة لها الصيغة التالية $y = ax^2$. جد قيمة a عن طريق اختيار زوجٍ واحد من الأزواج المرتبة. لنستخدم $(-1, 2)$.

$y = ax^2$ معادلة للدالة التربيعية

$2 = a(-1)^2$ $x = -1$ و $y = 2$

$2 = a$ المعادلة التي تمثل البيانات هي $y = 2x^2$

انتبه!

إيجاد a في المثال 3، لا يمكن استخدام النقطة $(0, 0)$ لإيجاد قيمة a. سيقع عليك تقسيم كل طرف على 0. ما يعطيك قيمةً غير محددة لـ a.

تمرين موجّه

3A.

x	−2	−1	0	1	2
y	11	7	3	−1	−5

3B.

x	−3	−2	−1	0	1
y	0.375	0.75	1.5	3	6

مثال 4 من الحياة اليومية كتابة معادلة لموقفٍ من الحياة اليومية

نادي الكتاب **يوضح الجدول عدد أعضاء نادي الكتاب لأربع سنوات متتالية. حدد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل البيانات. ثُمَّ اكتب دالةً تمثل البيانات.**

الاستيعاب يجب علينا إيجاد نموذجٍ للبيانات، وبعد ذلك نكتب دالةً.

الوقت (السنوات)	0	1	2	3	4
الأعضاء	5	10	20	40	80

الخطة إيجاد نموذجٍ باستخدام الفروق المتتالية أو النِسب. وبعد ذلك استخدام الصيغة العامة للمعادلة لكتابة دالة.

الحل النِسبة الثابتة هي 2. هذه قيمة القاعدة. تُمثِّل الدالة الأسيّة بالصيغة $y = ab^x$ البيانات.

$y = ab^x$ معادلة للدالة الأسية

$5 = a(2)^0$ $b = 2$ و $b = 2$

$5 = a$ الدالة التي تمثل البيانات هي $y = 5 \cdot 2^x$

تحقق استخدمتَ $(0, 5)$ لكتابة الدالة. تحقق أن كل زوجٍ مرتبٍ آخر يحقق المعادلة.

الربط بالحياة اليومية

أظهر استطلاع أجرته الجمعية الوطنية للتعليم أن 87% من جميع المراهقين المشاركين في الاستطلاع وجدوا أن القراءة باعثة على الاسترخاء، ورأى 85% أن القراءة مفيدة، ووجد 79% أن القراءة مثيرة.

المصدر: صحيفة *American Demographics*

تمرين موجّه

4. إعلانات يوضح الجدول تكلفة وضع إعلان في صحيفة. حدد النموذج الذي يصف البيانات بأفضل صورة واكتب دالة تُمثِّل البيانات.

عدد الخطوط	5	6	7	8
التكلفة الإجمالية (AED)	14.50	16.60	18.70	20.80

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطيةً أم دالةً تربيعية أم دالةً أُسّية.**

1. $(-2, 8), (-1, 5), (0, 2), (1, -1)$
2. $(-3, 7), (-2, 3), (-1, 1), (0, 1), (1, 3)$
3. $(-3, 8), (-2, 4), (-1, 2), (0, 1), (1, 0.5)$
4. $(0, 2), (1, 2.5), (2, 3), (3, 3.5)$

مثال 2 **ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.**

5.

x	0	1	2	3	4
y	5	8	17	32	53

6.

x	−3	−2	−1	0
y	−6.75	−7.5	−8.25	−9

7.

x	−1	0	1	2	3
y	3	6	12	24	48

8.

x	3	4	5	6	7
y	−1.5	0	2.5	6	10.5

مثال 3 **حدد نوع النموذج الأفضل في وصف البيانات. ثُمَّ اكتب معادلةً للدالة التي تمثل البيانات.**

9.

x	−1	0	1	2	3
y	1	3	9	27	81

10.

x	−5	−4	−3	−2	−1
y	125	80	45	20	5

11.

x	−3	−2	−1	0	1
y	1	1.5	2	2.5	3

12.

x	−1	0	1	2
y	−1.25	−1	−0.75	−0.5

مثال 4

13. **النباتات** يوضح الجدول ارتفاع أحد النباتات لأربعة أسابيع متتالية. حدد أي نوع من الدوال يُمثّل الارتفاع بأفضل صورة. ثُمَّ اكتب دالة تمثل البيانات.

الأسبوع	0	1	2	3	4
الطول (cm)	3	3.5	4	4.5	5

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطيةً أم دالةً تربيعية أم دالةً أُسّية.**

14. $(-1, 1), (0, -2), (1, -3), (2, -2), (3, 1)$
15. $(1, 2.75), (2, 2.5), (3, 2.25), (4, 2)$
16. $(-3, 0.25), (-2, 0.5), (-1, 1), (0, 2)$
17. $(-3, -11), (-2, -5), (-1, -3), (0, -5)$
18. $(-2, 6), (-1, 1), (0, -4), (1, -9)$
19. $(-1, 8), (0, 2), (1, 0.5), (2, 0.125)$

المثالان 2–3 **ابحث عن النمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات. ثُمَّ اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.**

20.

x	−3	−2	−1	0
y	−8.8	−8.6	−8.4	−8.2

21.

x	−2	−1	0	1	2
y	10	2.5	0	2.5	10

22.

x	−1	0	1	2	3
y	0.75	3	12	48	192

23.

x	−2	−1	0	1	2
y	0.008	0.04	0.2	1	5

24.

x	0	1	2	3	4
y	0	4.2	16.8	37.8	67.2

25.

x	−3	−2	−1	0	1
y	14.75	9.75	4.75	−0.25	−5.25

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 4

26. المواقع الإلكترونية تتبعت إحدى الشركات عدد زوار موقعها الإلكتروني على مدى 4 أيام. حدد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل عدد زوار الموقع فيما يتعلق بالوقت. ثُمَّ اكتب دالةً تمثل البيانات.

اليوم	0	1	2	3	4
الزوار (بالآلاف)	0	0.9	3.6	8.1	14.4

27 المكالمات تعتمد تكلفة المكالمة الدولية على طول المكالمة. ويوضح الجدول التكلفة حتى 6 دقائق.

طول المكالمة (بالدقيقة)	1	2	3	4	5	6
التكلفة (AED)	0.12	0.24	0.36	0.48	0.60	0.72

a. مثِّل البيانات بيانيًا وحدد أي نوع من الدوال يمثل البيانات بأفضل صورة.
b. اكتب معادلة للدالة التي تُمثِّل البيانات.
c. استخدم معادلتك لتحديد تكلفة مكالمة تستغرق 10 دقائق.

28. انخفاض القيمة تنخفض قيمة سيارةٍ ما بمرور الوقت. ويوضح الجدول قيمة السيارة خلال مدة من الزمن.

العام	0	1	2	3	4
القيمة (AED)	18.500	15,910	13,682.60	11,767.04	10,119.65

a. حدد أي نوع من الدوال هو الأفضل في تمثيل البيانات.
b. اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.
c. استخدم معادلتك لتحديد الثمن الذي تستحقه السيارة بعد 7 سنوات.

29. البكتيريا يقدر العلماء أن مزرعة بكتريا يبلغ تعدادها الأولي 12 سوف تتضاعف كل ساعة.
a. أنشئ جدولًا يوضح تعداد البكتريا في الأربع ساعات الأولى.
b. أي نوع من النماذج يمثل البيانات بأفضل صورة؟
c. اكتب دالة تُمثِّل البيانات.
d. كم سيصبح عدد البكتريا بعد 8 ساعات؟

30. الطباعة تتقاضى شركة طباعة الرسوم الموضحة لطباعة المنشورات الدعائية. اكتب دالةً تمثِّل إجمالي تكلفة المنشورات الدعائية، وحدد كم ستكون تكلفة 30 منشورًا دعائيًا.

الطباعة السريعة

رسوم الإعداد	25 درهمًا
المنشور الدعائي	15 فلسًا

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهاراتالتفكير العليا

31. تحدٍ اكتب دالةً بها فروق ثانية ثابتة، وفروق أولى غير ثابتة، وتقاطع مع المحور الرأسي y عند $y = -5$، وتحتوي على النقطة (2, 3).

32. الفرضيات ما نوع الدالة التي سيكون لها فروق ثالثة ثابتة ولكن ليس فروق ثانية ثابتة؟ اشرح.

33. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالةً خطية يكون لها فرق أول ثابت بمقدار 4.

34. البرهان اكتب فقرة برهان لتوضيح أن الدوال الخطية تنمو بفروق متساوية خلال فترات متساوية، وأن الدوال الأسية تنمو بعوامل متساوية خلال فترات متساوية. (*إرشاد:* افترض أن $y = ax$ تمثل دالةً خطية وافترض أن $y = a^x$ تمثل دالةً أسية.)

35. الكتابة في الرياضيات كيف يمكنك تحديد ما إذا كان يمكن تمثيل مجموعةٍ من البيانات عن طريقة دالةٍ خطية أو دالةٍ تربيعية أو دالةٍ أسيّة ؟

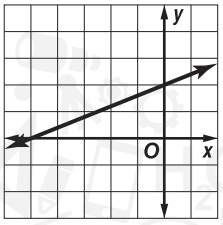
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

36. الإجابة القصيرة اكتب معادلة تمثل البيانات في الجدول.

x	0	1	2	3	4
y	3	6	12	24	48

37. ما معادلة المستقيم أدناه؟



A $y = \frac{2}{5}x + 2$

B $y = \frac{2}{5}x - 2$

C $y = \frac{5}{2}x + 2$

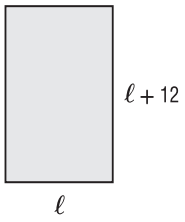
D $y = \frac{5}{2}x - 2$

38. تقع النقطة $(r, -4)$ على مستقيم بالمعادلة $2x + 3y = -8$. أوجِد قيمة r.

F -10 H 2

G 0 J 8

39. الهندسة تبلغ مساحة المستطيل $220\ m^2$. جد طول ℓ.



A 8 m

B 10 m

C 22 m

D 34 m

مراجعة شاملة

حُلّ كل معادلة بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف. وقرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر

40. $x^2 = 25$

41. $x^2 + 6x + 9 = 16$

42. $x^2 - 14x + 49 = 15$

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج يصف البيانات بأفضل طريقة.

43.

x	0	1	2	3	4
y	4	5	6	7	8

44.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	8	16	32

45.

x	-3	-2	-1	0	1
y	14	9	6	5	6

46.

x	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11

47. العلوم الفيزيائية تُطلَق قذيفة لأعلى من مستوى الأرض. ونحصل على ارتفاعها h بالأمتار بعد t ثوانٍ عن طريق $h = 96t - 16t^2$. جد قيمة (قيم) t عندما h تساوي 96 m.

مراجعة المهارات

جد قيمة كل تعبير إذا كان $y = -1$ و $x = -3$ و $z = 4$.

48. $|-4|$

49. $|2y + 1|$

50. $|4 - z|$

51. $\left|\frac{1}{2}x + 2\right|$

52. $|12 - 4z|$

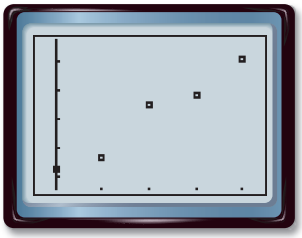
53. $|2y - 3| - 6$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

2-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
ملاءمة المنحنيات

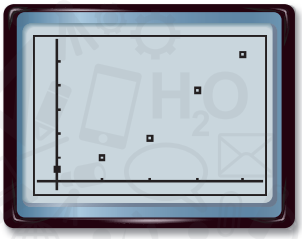
إذا كانت هناك زيادة أو نقص ثابت في قيم البيانات، فإن هناك توجهًا خطيًا. إذا كانت القيم متزايدة أو متناقصة بصورةٍ سريعةٍ أكثر، فقد يكون هناك اتجاه تربيعي أو أسي.

الاتجاه الخطي



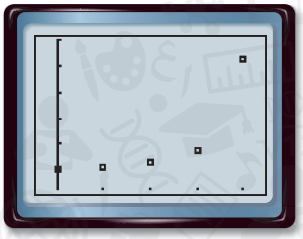
[0, 5] scl: 1 by [0, 6] scl: 1

الاتجاه التربيعي



[0, 5] scl: 1 by [0, 6] scl: 1

الاتجاه الأسي



[0, 5] scl: 1 by [0, 6] scl: 1

باستخدام حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد معادلة الانحدار المناسبة.

النشاط

مخطط الخطوط الجوية **يوضح الجدول المتوسط الشهري لعدد رحلات الطيران في كل عام من خلال مخطط الخطوط الجوية الذي أنشئ في عام 2000.**

العام	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
رحلات الطيران	17	20	24	28	33	38	44	50

الخطوة 1 رسم مخطط انتشار.

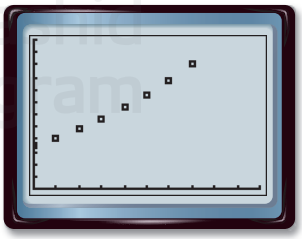
- أدخِل عدد السنوات منذ سنة 2000 في **L1** وعدد رحلات الطيران في **L2**.

خطوات العملية على الحاسبة: *مراجعة إدخال قائمة في الصفحة 255.*

- استخدم **STAT PLOT** لتمثيل مخطط الانتشار بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: *مراجعة المخططات الإحصائية في صفحة 256.*

استخدم ZOOM 9 للتمثيل البياني.



[0, 10] scl: 1 by [0, 60] scl: 5

من مخطط الانتشار يمكننا رؤية أن البيانات قد يكون لها إما اتجاه تربيعي أو اتجاه أسي.

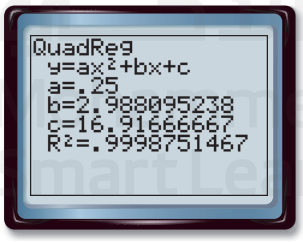
الخطوة 2 جد معادلة الانحدار.

سوف نتحقق من كلا الاتجاهين من خلال فحص معادلتي انحدارهما.

- اختر **DiagnosticOn** من زر **CATALOG**.
- حدد **QuadReg** في قائمة **STAT**.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ 5 ENTER ENTER

المعادلة بالصيغة $y = ax^2 + bx + c$.



المعادلة تقريبًا هي $y = 0.25x^2 + 3x + 17$.

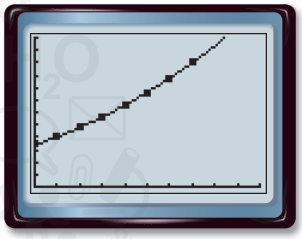
R^2 هو **معامل التحديد**. كلما كان R^2 أقرب إلى 1، كان التمثيل أفضل. من أجل الحصول على المعادلة الأسية اختر **ExpReg** في قائمة **STAT**. من أجل اختيار التمثيل التربيعي أو الأسي، اجعل كلاً منهما ملائمًا واستخدم التمثيل الذي يكون مع قيمة R^2 أقرب إلى 1.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الخطوة 3 مثِّل معادلة الانحدار التربيعية بيانيًا.

- انسخ المعادلة إلى قائمة Y= ومثِّل بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= VARS 5 ▶ ▶ 1 ZOOM 9

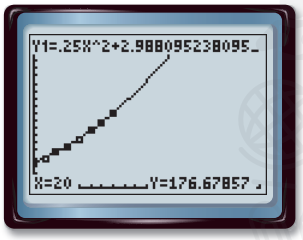


[0, 10] scl: 1 by [0, 60] scl: 5

الخطوة 4 توقع استخدام المعادلة.

إذا استمر هذا الاتجاه، فيمكننا التمثيل البياني الخاص بمعادلتنا لتوقع العدد الشهري للرحلات الجوية التي ستقوم بها شركة الطيران في سنة محددة. كي نتحقق من سنة 2020. أولاً، اضبط النافذة.

خطوات عملية على الحاسبة: 2nd CALC 1 في $x =$، أدخل 20 ENTER.



[0, 25] scl: 1 by [0, 200] scl: 5

سيكون هناك حوالي 177 رحلة جوية شهريًا إذا استمر هذا الاتجاه.

التمارين

أنشئ مخططًا لكل مجموعة من نقاط البيانات. حدد ما إذا كان ينبغي استخدام معادلة انحدار *خطية*، أو *تربيعية* أو *أسية*. اذكر معامل التحديد.

1.

x	y
1	30
2	40
3	50
4	55
5	50
6	40

2.

x	y
0.0	12.1
0.1	9.6
0.2	6.3
0.3	5.5
0.4	4.8
0.5	1.9

3.

x	y
0	1.1
2	3.3
4	2.9
6	5.6
8	11.9
10	19.8

4.

x	y
1	1.67
5	2.59
9	4.37
13	6.12
17	5.48
21	3.12

5. الخُبز أعَدت أماني كعكة وتنتظرها لتبرد حتى تزينها. يوضح الجدول درجة حرارة الكعكة كل 5 دقائق بعد أن أخرجتها أماني من الفرن.

الزمن (بالدقيقة)	درجة الحرارة (F°)
0	350
5	244
10	178
15	137
20	112
25	96
30	89

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات.

b. أي معادلة انحدار لها قيمة R^2 أقرب إلى 1؟ هل هذه هي أفضل معادلة تلائم سياق المسألة؟ اشرح استنتاجك.

c. جد معادلة الانحدار المناسبة، واذكر عامل التحديد. ما المجال والمدى؟

d. سوف تزين أماني الكعكة عندما تصل درجة حرارة الغرفة (70°F).ستخدم معادلة الانحدار لتوقع متى يمكنها تزيين كعكتها.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

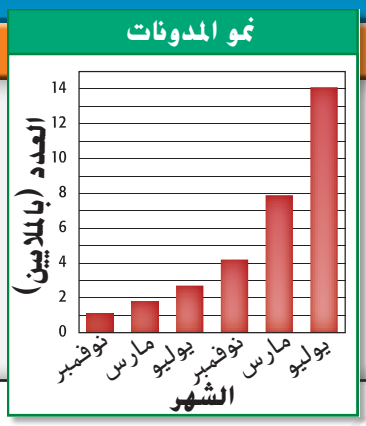
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2-3 النمو والاضمحلال (التضاؤل)

السابق
- لقد حلّلت الدوال الأسيّة.

الحالي
1. إيجاد حل المسائل التي تتضمن نموًا أسيًّا.
2. إيجاد حل المسائل التي تتضمن اضمحلالاً (تضاؤلاً) أسيًّا.

لماذا؟
- ازداد عدد المدونات الإلكترونية أو المدونات بمعدل شهري يبلغ 13.7% تقريبًا على مدار 21 شهرًا. يمكن تمثيل متوسط عدد المدونات في الشهر بـ $y = 1.1(1 + 0.137)^t$ أو $y = 1.1(1.137)^t$. حيث تمثل y إجمالي عدد المدونات بالملايين. و t هي عدد الأشهر منذ نوفمبر 2003.



المفردات الجديدة
- المرابحة المركبة compound interest

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

1 النمو الأسيّ
تكون معادلة عدد المدونات بالصيغة $y = a(1 + r)^t$. هذه هي المعادلة العامة للنمو الأسيّ.

المفهوم الأساسي معادلة النمو الأسيّ

$y = a(1 + r)^t$

- a هي المبلغ المبدئي.
- t هي الزمن.
- y هي المبلغ النهائي.
- r هي معدل التغير الذي يتم التعبير عنه ككسر عشري، $r > 0$.

مثال 1 من الحياة اليومية النمو الأسيّ

المسابقة تبدأ جوائز مسابقة إحدى المحطات الإذاعية ببطاقة هدايا بقيمة AED 100. في أحد الأيام، يتم الإعلان عن اسم. أمام الشخص 15 دقيقة ليتصل وإلا تتأجل الجائزة لليوم التالي وتزيد بنسبة 2.5%.

a. اكتب معادلة لتمثيل مبلغ بطاقة الهدايا بالدرهم بعد t من الأيام بدون فائزين.

$y = a(1 + r)^t$	معادلة النمو الأسيّ
$y = 100(1 + 0.025)^t$	$a = 100 = 2.5\%$ أو 0.025
$y = 100(1.025)^t$	بسّط.

في المعادلة $y = 100(1.025)^t$، تمثل y مبلغ بطاقة الهدايا، و t هي عدد الأيام منذ بدء المسابقة.

b. كم ستبلغ قيمة بطاقة الهدايا إذا لم يفز أحد بعد 10 أيام؟

$y = 100(1.025)^t$	معادلة مبلغ بطاقة الهدايا
$= 100(1.025)^{10}$	$t = 10$
≈ 128.01	استخدم حاسبة.

خلال 10 أيام، ستبلغ قيمة بطاقة الهدايا AED 128.01.

تمرين موجّه

1. **التعليم** ارتفعت تكاليف التعليم الجامعي بنسبة 5% كل عام منذ عام 2000. إذا كانت تكلفة التعليم في عام 2000 قد بلغت AED 10,850، فاكتب معادلة لمبلغ تكلفة التعليم بعد t سنوات من عام 2000. توقع تكلفة التعليم في هذه الكلية في عام 2015.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المرابحة المركبة هي المرابحة المتحصلة أو المدفوعة على كل من الاستثمار الأولي والمرابحة المتحصلة سابقًا. إنها أحد تطبيقات النمو الأسيّ.

المفهوم الأساسي معادلة للمرابحة المركبة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

- A هي المبلغ الحالي.
- P هي المبلغ الأساسي أو الأولي.
- r هي معدل المرابحة السنوية ويتم التعبير عنه ككسر عشري، $r > 0$.
- n هي عدد مرات تركيب المرابحة في كل عام هي الزمن بالسنوات.

مثال 2 من الحياة اليومية المرابحة المركبة

المالية **استثمر والدا هدى AED 14,000 بنسبة 6% في السنة مركبة شهريًا. ما المبلغ الذي سيكون في الحساب بعد 10 أعوام؟**

معادلة المرابحة المركبة

$P = 14{,}000$ $r = 6\%$ أو 0.06 $n = 12$ $t = 10$

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= 14{,}000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(10)}$$

بسّط.

$$= 14{,}000(1.005)^{120}$$

استخدم حاسبة.

$$\approx 25{,}471.55$$

سيكون هناك حوالي AED 25,471.55 في 10 سنوات.

تمرين موجّه

2. المالية حدّد مبلغ أحد الاستثمارات إذا تم استثمار AED 300 بمعدل مرابحة مركبة شهريًا يساوي 3.5% شهريًا لمدّة 22 عامًا.

مهنة من الحياة اليومية

المستشار المالي يقدم المستشارون الماليون المساعدة للناس في تخطيط مستقبلهم المالي. يتمتع المستشار المالي الجيد بمهارات حسابية ومهارات حل المسائل والتواصل. يفضل بشدة بالحصول على درجة البكالوريوس لكنها ليست مفروضة.

2 الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

في الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ، يتناقص المبلغ الأصلي بنسبة مئوية واحدة خلال مدةٍ زمنيةٍ محدّدة. يمكن استخدام أحد أشكال معادلة النمو كمعادلة عامة للاضمحلال الأسيّ.

المفهوم الأساسي معادلة الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

$$y = a(1 - r)^t$$

- a هي المبلغ المبدئي.
- t هي الزمن.
- r هي معدل الاضمحلال (التضاؤل) ويتم التعبير عنه ككسر عشري، $0 < r < 1$.
- y هي المبلغ النهائي.

نصيحة دراسية

النمو والاضمحلال (التضاؤل) بما أن r تُجمع مع 1. ستكون القيمة داخل القوسين أكبر من 1 في دوال النمو الأسيّ. في دوال الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ، ستقل هذه القيمة عن 1 بما أن r مطروحة من 1.

مثال 3 من الحياة اليومية الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

السباحة **عوامة طفل لحمام سباحة منفوخة تمامًا تفقد 6.6% من الهواء بداخلها كل يوم. كانت العوامة تحتوي في الأصل على 74000 cm^3 من الهواء.**

a. اكتب معادلة تمثل فقدان الهواء.

معادلة الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

$$y = a(1 - r)^t$$

$a = 74000$ $= 6.6\%$ أو 0.066

$$= 74000(1 - 0.066)^t$$

بسّط.

$$= 74000(0.934)^t$$

$y = 74000(0.934)^t$، حيث y هي الهواء في العوامة بالبوصة المكعبة بعد t أيام.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

ضع تقديرًا لكمية الهواء في العوامة بعد 7 أيام.

$y = 74000(0.934)^t$ معادلة فقدان الهواء

$= 74000(0.934)^7$ $t = 7$

≈ 45880 استخدم حاسبة.

سيبلغ مقدار الهواء في العوامة بعد 7 أيام $45880\ cm^3$ تقريبًا.

تمرين موجّه

3. **تعداد السكان** ظل تعداد سكان مقاطعة كامبل في ولاية كنتاكي يتناقص بمعدل متوسط يبلغ 0.3% تقريبًا في السنة. في عام 2000، بلغ سكانها 88,647. اكتب معادلة تمثل تعداد السكان منذ عام 2000. إذا استمر الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2010.

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **المرتب** حصلت السيدة هداية على وظيفة كمعلمة براتب أولي يبلغ AED 125000. وفقًا لعقدها، سوف تحصل على زيادة تبلغ 1.5% من مرتبها كل عام. كم سيبلغ مرتب السيدة هداية بعد 7 سنوات؟

مثال 2

2. **المال** استثمر يوسف AED 400 في حساب بنسبة مرابحة تبلغ 5.5% مركبة شهريًا. كم ستبلغ قيمة استثمار يوسف خلال 8 سنوات؟

مثال 3

3. **الالتحاق** في عام 2000، انضم 2200 طالب لمدرسة بولاريس الثانوية. كان الالتحاق ينخفض بنسبة 2% سنويًا.
   a. اكتب معادلة للالتحاق بمدرسة بولاريس الثانوية بعد t سنوات من عام 2000.
   b. إذا استمر هذا الاتجاه، فكم عدد الطلاب الذين سيلتحقون في عام 2015؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1

4. **العضويات** باعت صالة الألعاب الرياضية 550 عضوية في عام 2001. ومنذ ذلك الوقت، ارتفع عدد العضويات التي تم بيعها بنسبة 3% سنويًا.
   a. اكتب معادلة لعدد العضويات التي تم بيعها في صالة الألعاب الرياضية بعد t من السنوات من عام 2001.
   b. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع عدد العضويات التي ستبيعها الصالة في عام 2020.

5. **الحواسيب** ارتفع عدد الأشخاص الذين يمتلكون حواسيب بنسبة 23.2% سنويًا منذ عام 1990. إذا كان نصف مليون شخص يمتلكون حاسوبًا في 1990، فتوقع عدد الأشخاص الذين سيمتلكون حاسوبًا في عام 2015.

6. **العملات** اشترى ماجد قطعة نقد معدنية نادرة من تاجر مقابل AED 300. ارتفعت قيمة القطعة بنسبة 5% كل عام. حدد قيمة قطعة النقد المعدنية بعد 5 سنوات.

مثال 2

7. **الاستثمارات** استثمر محمود AED 6600 بنسبة مرابحة تبلغ 4.5% مركبة شهريًا. حدد قيمة استثماره بعد 4 سنوات.

8. **المرابحة المركبة** استثمرت نسرين AED 1200 بمعدل مرابحة يبلغ 5.75% مركبة كل ثلاثة أشهر. حدد قيمة استثمارها بعد 7 سنوات. حوالي AED 1789.54

9. **الدقة** تدخر نجلاء المال لرحلة إلى جزر البهاما تتكلف AED 1087.76. وضعت AED 550 في حساب ادخار يدفع مرابحة مركبة تبلغ 7.25% كل ثلاثة أشهر. هل سيكون لديها مال كافٍ في الحساب بعد 4 سنوات؟ اشرح.

مثال 3

10. **الاستثمارات** كان استثمار علي بمبلغ AED 4500 يخسر قيمته بمعدل 2.5% كل عام. كم ستبلغ قيمة استثماره خلال 5 سنوات؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

11. **تعداد السكان** في السنوات من 2010 إلى 2015، من المتوقع أن ينخفض تعداد سكان واشنطن العاصمة بمعدل 0.9% سنويًا تقريبًا. في عام 2010، كان تعداد السكان 530,000 تقريبًا. ما تعداد السكان المتوقع في واشنطن العاصمة في عام 2015؟

12. **السيارات** اشترى فارس سيارة مقابل AED 18,995. تنخفض قيمة السيارة بمعدل 18% سنويًا. بعد 6 سنوات، عرض فالح أن يشتري السيارة مقابل AED 4500. هل ينبغي أن يبيع فارس السيارة؟ اشرح.

13. **الإسكان** ارتفع سعر المنزل المتوسط في الولايات المتحدة بنسبة 1.4% في المتوسط في كل عام بين 2005 و2007. افترض أن هذا المعدل سيستمر.

a. اكتب معادلة لسعر المنزل المتوسط بعد t من السنوات عام 2007.

b. تنبأ بسعر المنزل المتوسط في عام 2018.

سعر المنزل المتوسط	
2005	AED 885,000
2006	AED 905,800
2007	AED 910,000

المصدر: مجلة الشؤون العقارية

14. **العناصر** عمر النصف للعنصر النشط إشعاعيًا هو الزمن الذي يستغرقه لكي يتحلل نصف كمية العنصر. عمر النصف للبلوتونيوم 241 هو 14.4 عامًا. يمكن تمثيل عدد الجرامات A المتبقية من البلوتونيوم 241 بعد t من السنوات بـ $A = p(0.5)^{\frac{t}{14.4}}$، حيث p هي الكمية الأصلية من العنصر.

a. كم يبقى من عينة وزنها 0.2 g بعد 72 سنة؟

b. كم يبقى من عينة وزنها 5.4 g بعد 1095 يومًا؟

15. **دمج الدوال** يسع حمام سباحة 77,600 L من الماء بحد أقصى. يتبخر الماء بمعدل 0.5% في الساعة. يحتوي حمام السباحة حاليًا على 71,900 L من الماء.

a. اكتب دالة أسيّة w(t) للتعبير عن مقدار الماء المتبقي في حمام السباحة بعد الزمن t حيث t هي عدد الساعات بعد أن وصل حمام السباحة إلى 71,900 L.

b. في نفس هذا الزمن، يتم تشغيل خرطوم لإعادة ملء حمام السباحة بمعدل 1,100 L/h. اكتب دالة p(t)، حيث t هي زمن تشغيل الخرطوم بالساعات، للتعبير عن مقدار الماء الذي يجري ضخه في حمام السباحة.

c. جد قيمة $C(t) = p(t) + w(t)$. ماذا تمثل هذه الدالة الجديدة؟

d. استخدم التمثيل البياني لـ C(t) لتحديد المدة المطلوبة لتشغيل الخرطوم لملء حمام السباحة حتى سعته القصوى.

مسائل مهارات التفكير العليا

16. **التبرير** حدد معدل النمو (كنسبة مئوية) لعدد سكان يزيد أربعة أضعاف كل عام. اشرح.

17. **الدقة** استثمر منصور AED 1200 في حساب بنسبة مرابحة تبلغ 8% مركبة شهريًا. استخدم حاسبة لتحديد المدة التقريبية التي سيحتاجها استثمار منصور للوصول إلى AED 2500

18. **التبرير** يتضاعف مقدار الماء في حاوية كل دقيقة. بعد 8 دقائق امتلأت الحاوية. بعد كم دقيقة امتلأت الحاوية إلى نصفها؟ اشرح.

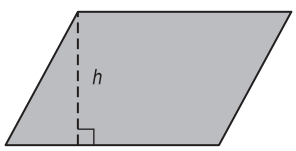
19. **الكتابة في الرياضيات** ما الذي ينبغي أن تراعيه عند استخدام النماذج الأسيّة لاتخاذ القرارات؟

20. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين قانون النمو الأسيّ وقانون الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

21. الهندسة تبلغ مساحة متوازي الأضلاع $35\ cm^2$. جد الارتفاع **h** لمتوازي الأضلاع.



A 3.5 cm **B** 4 cm
C 5 cm **D** 7 cm

22. أيهما أكبر من $64^{\frac{1}{3}}$؟

F 2^2 **G** $64^{\frac{1}{6}}$
H $64^{\frac{1}{2}}$ **J** 64^{-3}

23. اشترى عيسى سيارة مقابل AED 22,900. تنخفض قيمة السيارة بمعدل 16% سنويًا. أي من المعادلات التالية يمثل قيمة سيارة عيسى بعد 5 سنوات؟

A $A = 22{,}900(1.16)^5$
B $A = 22{,}900(0.16)^5$
C $A = 16(22{,}900)^5$
D $A = 22{,}900(0.84)^5$

24. إجابة شبكة تبلغ مساحة أحد الأسطح 4 m في 6. m. إذا كان عامل الطلاء يفرض AED 9.75 على المتر المربع شاملاً الضريبة، فكم ستبلغ تكلفة طلاء السطح بالدرهم؟

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًا. جد المقطع من المحور الرأسيّ *y* واذكر المجال والمدى.

25. $y = 3^x$ **26.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **27.** $y = 6^x$

جد قيمة كل ناتج ضرب. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة المعيارية.

28. $(4.2 \times 10^3)(3.1 \times 10^{10})$ **29.** $(6.02 \times 10^{23})(5 \times 10^{14-})$ **30.** $(7 \times 10^5)^2$

31. $(1.1 \times 10^{2(2-)}$ **32.** $(9.1 \times 10^{7-}10 \times 4.2)^{(2-)}$ **33.** $(3.14 \times 10^2)(6.1 \times 10^{3-})$

34. التخطيط لحدث لا تفرض إحدى القاعات رسم إيجار طالما يتم إنفاق AED 4000 على الأقل على الطعام. في حفلة التخرج تفرض القاعة AED 28.95 على الشخص للطعام.
كم عدد الأشخاص الذين يجب أن يحضروا حفلة التخرج لتجنب دفع رسم إيجار القاعة؟

حدد ما إذا كان التمثيلان البيانيان لكل زوجين من المعادلات *متوازيين* أو *متعامدين* أو *ليسا أيًا منهما*.

35. $y = -2x + 11$
$y + 2x = 23$

36. $3y = 2x + 14$
$-3x - 2y = 2$

37. $y = -5x$
$y = 5x - 18$

38. الأعمار يوضح الجدول الأعمار المكافئة للخيول والبشر. اكتب معادلة تربط العمر البشري بعمر الخيل وتجد عمر الخيل المكافئ لإنسان يبلغ عمره 16 عامًا.

عمر الخيل (x)	0	1	2	3	4	5
عمر الإنسان (y)	0	3	6	9	12	15

جد السعر الإجمالي لكل عنصر.

39. المظلة AED 14.00 ؛ الضريبة: 5.5%

40. الصندل AED 29.99 ؛ الضريبة: 5.75% AED 31.71

41. حقيبة الظهر AED 35.00؛ الضريبة: 7%

مراجعة المهارات

مثّل كل مجموعة من الأزواج المرتبة بيانيًا.

42. (3, 0), (0, 1), (−4, −6) **43.** (0, −2), (−1, −6), (3, 4) **44.** (2, 2), (−2, −3), (−3, −6)

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر الجبر
تحويل التعابير الأسيّة

يمكنك استخدام خواص الأسس النسبية في تحويل الدوال الأسيّة إلى صيغ أخرى لحل مسائل من الحياة اليومية.

النشاط كتابة التعابير الأسيّة المكافئة

تحاول نبيلة أن تختار بين خطتي حساب ادخار. تقدم الخطة A نسبة مرابحة شهرية مركبة تبلغ 0.25%، بينما تقدم الخطة B مرابحة مركبة سنويًا تبلغ 2.5%. أي الخطتين أفضل؟ اشرح.

للمقارنة بين الخطتين، يجب أن نقارن بين النسبتين بالتكرار المركب نفسه. من طرق عمل هذا المقارنة بين نسبتي المرابحة الشهريتين التقريبيتين في الخطتين، وتُسميان أيضًا *نسبة المرابحة* الشهرية الفعلية. بينما تستطيع استخدام قانون المرابحة المركبة لإيجاد هذه النسبة، يمكنك أيضًا استخدام خواص الأسس.

اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه نبيلة بعد t من السنوات من الخطة B. للتيسير، افترض أن المبلغ الأولي لاستثمار نبيلة هو 1 AED.

$y = a(1 + r)^t$	معادلة النمو الأسيّ
$A(t) = 1(1 + 0.025)^t$	$y = A(t)$, $a = 1$, $r = 2.5\%$ أو 0.025
$= 1.025^t$	بسّط.

اكتب الآن دالة تعادل $A(t)$ تمثل 12 تركيبًا في السنة، بقوة أسيّة تبلغ $12t$، بدلاً من 1 في السنة بقوة أسيّة تبلغ $1t$.

$A(t) = 1.025^{1t}$	الدالة الأصلية
$= 1.025^{\left(\frac{1}{12} \times 12\right)t}$	$1 = \frac{1}{12} \times 12$
$= \left(1.025^{\frac{1}{12}}\right)^{12t}$	رفع القوى
$\approx 1.0021^{12t}$	$(1.025)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.025}$ أو حوالي 1.0021

من هذه الدالة المكافئة، يمكننا تحديد أن النسبة الشهرية الفعلية في الخطة B تبلغ 0.0021 تقريبًا أو حوالي 0.21% في الشهر. تقل هذه النسبة عن نسبة المرابحة الشهرية 0.25% في الشهر التي تقدمها الخطة A. إذًا الخطة A هي الخطة الأفضل.

النموذج والتحليل

1. استخدم قانون المرابحة المركبة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لتحديد نسبة المرابحة الشهرية الفعلية للخطة B. كيف تقارن هذه النسبة بالنسبة المحسوبة باستخدام الأسلوب الوارد في النشاط بالأعلى؟
2. اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه نبيلة بعد t من الأشهر في الخطة A. ثم استخدم خواص الأسس لكتابة دالة تعادل $A(t)$ لتمثل المبلغ المكتسب بعد t من السنوات.
3. من التعبير الذي كتبته في التمرين 2، حدد نسبة المرابحة السنوية الفعلية حسب الخطة A. استخدم هذه النسبة لشرح السبب في أن الخطة A هي الخطة الأفضل.
4. افترض أن الخطة A عرضت نسبة مرابحة مركبة كل ثلاثة أشهر تبلغ 1.5%. استخدم خواص الأسس لشرح أيهما الخطة الأفضل.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسيّة

السابق	الحالي	لماذا؟
ربطت المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية.	1 تحديد المتتاليات الهندسية وإنشاؤها. 2 ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسيّة.	ترسل رسالة إلكترونية تسلسلية إلى صديق ليعيد إرسالها إلى خمسة أشخاص آخرين. يعيد كل من هؤلاء الأشخاص الخمسة الرسالة الإلكترونية إلى خمسة أشخاص آخرين. يشكّل عدد الرسائل الإلكترونية الجديدة متتالية هندسية.

المفردات الجديدة

متتالية هندسية
geometric sequence
نسبة مشتركة
common ratio

ممارسات في الرياضيات
حاول إيجاد البنية واستخدامها.

1 التعرف على المتتاليات الهندسية

ينشئ الشخص الأول 5 رسائل إلكترونية. إذا أرسل كل واحد من هؤلاء الأشخاص رسالة إلكترونية إلى 5 أشخاص آخرين، يتم إنشاء 25 رسالة إلكترونية. إذا أرسل كل واحد من الـ 25 شخصًا 5 رسائل إلكترونية، يتم إنشاء 125 رسالة إلكترونية. تسلسل الرسائل الإلكترونية الناشئة، 1, 5, 25, 125، ... يُعد مثالاً على **متتالية هندسية**.

في المتتالية الهندسية، الحد الأول ليس صفرًا وكل حد بعد الأول يتحدد بضرب الحد السابق في قيمة ثابتة غير الصفر r تُسمى **النسبة المشتركة**. يمكن إيجاد النسبة المشتركة عبر قسمة أي حدٍ على الحدّ السابق له.

مثال 1 تحديد المتتاليات الهندسية

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *حسابية*، أم *هندسية*، أم *ليست أيًا منهما*. اشرح.

a. 256, 128, 64, 32, ...

جد نسب الحدود المتتابعة.

256 ← 128 ← 64 ← 32

$\frac{128}{256} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

بما أن النسب ثابتة، فالمتتالية هندسية. النسبة المشتركة هي $\frac{1}{2}$.

b. 4, 9, 12, 18, ...

جد نسب الحدود المتتابعة.

4 ← 9 ← 12 ← 18

$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ $\quad \frac{12}{9} = 1\frac{1}{3}$ $\quad \frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$

النسب ليست ثابتة، إذًا فالمتتالية ليست هندسية.

جد الفروق في الحدود المتتابعة.

4 ← 9 ← 12 ← 18

$9 - 4 = 5$ $\quad 12 - 9 = 3$ $\quad 18 - 12 = 6$

لا يوجد فرق مشترك، إذًا فالمتتالية ليست حسابية. ولهذا، فالمتتالية ليست هندسية أو حسابية.

تمرين موجّه

1A. 1, 3, 9, 27, ... **1B.** −20, −15, −10, −5, ... **1C.** 2, 8, 14, 22, ...

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

بمجرد معرفة النسبة المشتركة، يمكن توليد المزيد من الحدود في متتالية. يمكن إعادة كتابة القانون بالصيغة $a_n = a_1 r^{n-1}$، حيث n عدد الحدود و r هي النسبة المشتركة.

مثال 2 إيجاد حدود المتتاليات الهندسية

جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

a. 1, −4, 16, −64, ...

الخطوة 1 جد النسبة المشتركة.

1 ← −4 ← 16 ← −64

$\frac{-4}{1} = -4$ ، $\frac{16}{-4} = -4$ ، $\frac{-64}{16} = -4$

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

−64 ← 256 ← −1024 ← 4096

×(−4) ، ×(−4) ، ×(−4)

الحدود الثلاثة التالية هي 256 و −1024 و 4096.

b. 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$ ...

الخطوة 1 جد النسبة المشتركة.

9 ← 3 ← 1 ← $\frac{1}{3}$

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

قيمة r هي $\frac{1}{3}$.

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

$\frac{1}{3}$ ← $\frac{1}{9}$ ← $\frac{1}{27}$ ← $\frac{1}{81}$

$\times\frac{1}{3}$ ، $\times\frac{1}{3}$ ، $\times\frac{1}{3}$

الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{27}$ و $\frac{1}{81}$.

تمرين موجّه

2A. −3, 15, −75, 375, ...

2B. 24, 36, 54, 81, ...

نصيحة دراسية

البناء إذا كانت حدود متتالية هندسية تتبدل من حدود موجبة إلى سالبة أو بالعكس، فالنسبة المشتركة سالبة.

الربط بتاريخ الرياضيات

توماس روبرت مالتوس (1766–1834) درس مالتوس أعداد السكان وكانت له آراء متشائمة في مستقبل سكان العالم. ذكر في أبحاثه أن: "السكان يتزايدون بنسبة هندسية، بينما تتزايد سبل المعيشة بنسبة حسابية."

2 المتتاليات والدول الهندسية

سيكون من المرهق التوصل إلى الحد n في متتالية هندسية إذا استخدمنا الطريقة المذكورة أعلاه. يوضح الجدول أدناه قاعدة لإيجاد الحد رقم n في متتالية هندسية.

الرتبة، n	1	2	3	4	...	n
الحد، a_n	a_1	$a_1 r$	$a_1 r^2$	$a_1 r^3$	...	$a_1 r^{n-1}$

لاحظ أن النسبة المشتركة بين الحدود هي r. يوضح الجدول أنه للوصول إلى الحد n، فإنك تضرب الحد الأول في النسبة المشتركة r مرفوعة إلى القوة $n - 1$. يمكن تعريف المتتالية الهندسية بدالة أسيّة تمثل فيها n المتغير المستقل، و a_n هي المتغير التابع و r هي الأساس. المجال هو أعداد الحدود.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي الحد n لمتتالية هندسية

يتحدد الحد النوني a_n لمتتالية هندسية حيث الحد الأول a_1 والنسبة المشتركة r بالقانون التالي، حيث n و a_1 هي أي عدد صحيح موجب و $r \neq 0$.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال 3 إيجاد الحد n لمتتالية هندسية

a. اكتب معادلة للحد n للمتتالية ... −6, 12, −24, 48, .

الحد الأول في المتتالية هو −6. إذًا $a_1 = -6$. جد الآن النسبة المشتركة.

−6 ، 12 ، −24 ، 48

النسبة المشتركة هي −2

$\frac{12}{-6} = -2$ ، $\frac{-24}{12} = -2$ ، $\frac{48}{-24} = -2$

$a_n = a_1 r^{n-1}$	قانون الحد رقم n
$a_n = -6(-2)^{n-1}$	$a_1 = -6$ و $r = 2$

b. جد الحد التاسع في هذه المتتالية.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	قانون الحد رقم n
$a_9 = -6(-2)^{9-1}$	للحد رقم n، $n = 9$.
$= -6(-2)^8$	بسّط.
$= -6(256)$	$(-2)^8 = 256$
$= -1536$	

تمرين موجّه

3. اكتب قاعدة الحد النوني a_n في المتتالية الهندسية ... 96, 48, 24, 12, . ثم جد الحد العاشر في المتتالية.

انتبه!

النسبة المشتركة السالبة

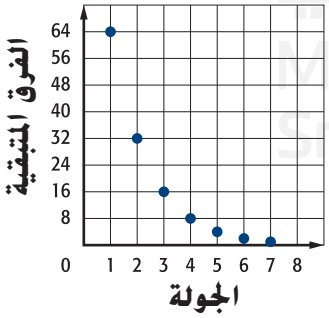
إذا كانت النسبة المشتركة سالبة، كما في المثال 3، فتأكد من إدراج النسبة المشتركة بين قوسين. $-2^8 \neq (-2)^8$

مثال 4 من الحياة اليومية تمثيل متتالية هندسية بيانيًا

كرة السلة تبدأ بطولة الاتحاد الوطني للرياضة الجامعية لكرة السلة للنساء بـ 64 فريقًا. في كل جولة، يتبقى نصف الفرق في المنافسة إلى أن يتبقى فريق واحد فقط. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتمثيل عدد الفرق المتبقية في كل جولة.

بالمقارنة بالجولات السابقة، يبقى نصف الفرق. إذًا $r = \frac{1}{2}$.

ولهذا، المتتالية الهندسية التي تمثل هذا الموقف هي 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. إذًا في الجولة الثانية، يتنافس 32 فريقًا. وفي الجولة الثالثة يتنافس 16 فريقًا وهكذا. استخدم هذه المعلومات لرسم تمثيل بياني.



تمرين موجّه

4. التنس سقطت كرة تنس من ارتفاع 12 m. ترتد الكرة في كل مرة حتى 80% من الارتفاع الذي سقطت منه. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتمثيل ارتفاع الكرة بعد كل ارتداد.

الربط بالحياة اليومية

جرت أول مسابقة لاتحاد الرياضات الجامعية الوطني لكرة السلة للنساء في عام 1982. فازت جامعة تينيسي بأكثر الألقاب الوطنية بتحقيقها 8 ألقاب حتى عام 2010.

المصدر: NCAA الرياضية

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *ليست أيًا منهما*. اشرح.**

1. 200, 40, 8, ... **2.** 2, 4, 16, ... **3.** −6, −3, 0, 3, ... **4.** 1, −1, 1, −1, ...

مثال 2 **جد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.**

5. 10, 20, 40, 80, ... **6.** 100, 50, 25, ... **7.** $4, -1, \frac{1}{4}, \ldots$ **8.** −7, 21, −63, ...

مثال 3 **اكتب صيغة للحد النوني *n* في كل متتالية هندسية وجد الحد المشار إليه.**

9. الحد الخامس في ... ,−96 ,−24 ,−6

10. الحد السابع في ... ,−25 ,5 ,−1

11. الحد العاشر في ... ,32 ,48 ,72

12. الحد التاسع في ... ,63 ,84 ,112

مثال 4 **13.** **التجربة** في تجربة في حصة لمادة الفيزياء، أسقطت لميس كرة من ارتفاع 16 m. يصل كل ارتداد إلى 70% من ارتفاع الارتداد السابق. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتمثيل ارتفاع الكرة بعد كل ارتداد.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *ليست أيًا منهما*. اشرح.**

14. 4, 1, 2, ... **15.** 10, 20, 30, 40, ... **16.** 4, 20, 100, ...

17. 212, 106, 53, ... **18.** −10, −8, −6, −4, ... **19.** 5, −10, 20, 40, ...

مثال 2 **جد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.**

20. 2, −10, 50, ... **21** 36, 12, 4, ... **22.** 4, 12, 36, ...

23. 400, 100, 25, ... **24.** −6, −42, −294, ... **25.** 1024, −128, 16, ...

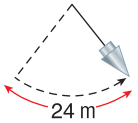
مثال 3 **26.** الحد الأول في متسلسلة هندسية هو 1، والنسبة المشتركة هي 9. ما الحد الثامن في المتتالية؟

27. الحد الأول في متسلسلة هندسية هو 2، والنسبة المشتركة هي 4. ما الحد الرابع عشر في المتتالية؟

28. ما الحد الخامس عشر في المتتالية الهندسية ... ,−81 ,27 ,−9؟

29. ما الحد العاشر في المتتالية الهندسية ... ,96 ,−24 ,6؟

مثال 4 **30.** **البندول** تظهر حركة الأرجحة الأولى لبندول. في كل حركة أرجحة تالية، يبلغ طول القوس 60% من طول حركة الأرجحة السابقة. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل طول القوس بعد كل حركة أرجحة.



31. جد الحد الثامن في متتالية هندسية بحيث تكون $a_3 = 81$ و $r = 3$.

32. **التبرير** في موقع خرائط عبر الإنترنت، يلاحظ السيد عدنان أنه عندما ينقر فوق نقطة على الخريطة، تقوم الخريطة بتكبير تلك النقطة. يزيد التكبير بنسبة 20% في كل مرة.

a. اكتب قاعدة الحد النوني a_n للمتتالية الهندسية يمثل التكبير في كل مستوى تكبير. (*إرشاد*: النسبة المشتركة ليست 0.2 فقط.)

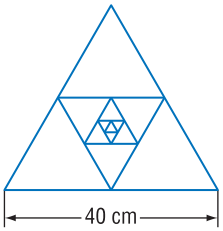
b. ما الحد الرابع في هذه المتتالية؟ ما الذي يمثله؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

33 المصروف عرض والدا ليلى عليها خيارين لتحصل على مصروفها على مدار 9 أسابيع خلال الصيف. يمكنها أن تحصل على AED 30 كل أسبوع أو AED 1 في الأسبوع الأول و AED 2 في الأسبوع الثاني و AED 4 في الأسبوع الثالث وهكذا.

a. هل يمثل الخيار الثاني متتالية هندسية؟ اشرح.

b. ما الخيار الذي ينبغي أن تختاره ليلى؟ اشرح.



34. مثلث سيربنسكي فكّر في المثلثات المتساوية الأضلاع المرسومة على اليسار. يبلغ محيط كل مثلث نصف محيط المثلث الأكبر التالي. فما محيط أصغر مثلث؟

35. إذا كان الحد الثاني في المتتالية الهندسية هو 3 والحد الثالث هو 1، فجد الحدين الأول والرابع في المتتالية.

36. إذا كان الحد الثالث في المتتالية الهندسية هو 12− والحد الرابع هو 24، فجد الحدين الأول والخامس في المتتالية.

37. الزلازل يُستخدم مقياس ريختر لقياس قوة الزلزال. يوضح الجدول الزيادة في مقدار القيم على مقياس ريختر.

رقم ريختر (x)	الزيادة في المقدار (y)	معدل التغير (الميل)
1	1	–
2	10	9
3	100	
4	1000	
5	10,000	

a. انسخ الجدول وأكمله. تذكر أن معدل التغير هو التغير في y مقسومًا على التغير في x.

b. ارسم الأزواج المرتبة (الزيادة في المقدار، رقم ريختر).

c. صِف التمثيل البياني الذي صنعته من بيانات مقياس ريختر. هل معدل التغير بين أي نقطتين واحد؟

d. اكتب معادلة أسيّة تمثل مقياس ريختر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

38. التحدي اكتب متتالية هندسية وحسابية. اشرح إجابتك.

39. التفكير النقدي يعمل إبراهيم وأحمد على التوصل إلى الحد التاسع في المتتالية الهندسية ... ,20− ,10 ,5− . فهل أيّ منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.

أحمد

$r = \frac{10}{-5}$ أو -2

$a_9 = -5 \times (-2)^{9-1}$

$= -5 \times -256$

$= 1280$

إبراهيم

$r = \frac{10}{-5}$ أو -2

$a_9 = -5\,(-2)^{9-1}$

$= -5(512)$

$= -2560$

40. التبرير اكتب متتالية أعداد تشكل نمطًا لكنها ليست حسابية ولا هندسية. اشرح النمط.

41. الكتابة في الرياضيات ما وجه الشبه بين التمثيلات البيانية للمتتاليات الهندسية والدوال الأسيّة؟ هل هي مختلفة؟

42. الكتابة في الرياضيات اذكر بإيجاز كيفية التوصل إلى حد معين في متتالية هندسية.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

43. جد الحد الحادي عشر في المتتالية الهندسية 3, −6, 12, −24, ...

A 6144 **C** 33
B 3072 **D** −6144

44. ما إجمالي مبلغ الاستثمار الظاهر في الجدول أدناه إذا كانت المرابحة مركبة شهريًا؟

الأولي	AED 500
طول مدة الاستثمار	4 سنوات
نسبة المرابحة السنوية	5.25%

F AED 613.56 **H** AED 616.56
G AED 616.00 **J** AED 718.75

45. إجابة قصيرة تملك أسماء مبلغ AED 6.50 بقطع نقد معدنية من فئات 25 فلسًا و 10 فلسات. إذا كانت لديها 35 قطعة إجمالاً، فكم عدد القطع التي لديها من كل فئة؟

46. ما مجال ومدى الدالة $y = 4(3^x) - 2$؟

A D = {كل الأعداد الحقيقية}، $R = \{y | y > -2\}$
B D = {كل الأعداد الحقيقية}، $R = \{y | y > 0\}$
C D = {كل الأعداد الصحيحة}، $R = \{y | y > -2\}$
D D = {كل الأعداد الصحيحة}، $R = \{y | y > 0\}$

مراجعة شاملة

جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

47. 2, 6, 18, 54, ...

48. −5, −10, −20, −40, ...

49. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

50. −3, 1.5, −0.75, 0.375, ...

51. 1, 0.6, 0.36, 0.216, ...

52. 4, 6, 9, 13.5, ...

مثّل كل دالة بيانيًا. جد التقاطع مع المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

53. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 5$

54. $y = 2(4)^x$

55. $y = \frac{1}{2}(3^x)$

56. التخطيط المساحي تنمو شجرة صنوبر أزرق بمقدار 15 cm كل سنة في المتوسط. التخطيط المساحي ينمو نبات الشوكران بمقدار 10 cm كل سنة في المتوسط. إذا كان طول الصنوبر الأزرق يبلغ 120 cm وطول الشوكران 180 cm. فاكتب نظام معادلات لتمثيل نموهما. جد الحل وفسره في سياق الموقف.

الشيك	المبلغ
750	AED 1300
751	AED 947

57. المال يفرض سيتي بنك حدًا أدنى للرصيد يبلغ AED 1500 للحفاظ على مجانية خدمات إصدار الشيكات. إذا كان السيد إسماعيل سيكتب شيكات بالمبالغ المدرجة في الجدول، فما المبلغ الذي ينبغي أن يبدأ به لكي يحصل على إصدار الشيكات مجانًا؟

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمستقيم باستخدام الميل المعطى والمقطع من المحور الرأسيّ y المعطاة.

58. الميل: 4، التقاطع مع المحور الرأسيّ y : 2

59. الميل: −3، التقاطع مع المحور الرأسيّ y: $-\frac{2}{3}$

60. الميل: $-\frac{1}{4}$ ، التقاطع مع المحور الرأسيّ y : −5

61. الميل: $-\frac{1}{2}$، التقاطع مع المحور الرأسيّ y: −9

62. الميل: $-\frac{2}{5}$، التقاطع مع المحور الرأسيّ y : $\frac{3}{4}$

63. الميل: −6، التقاطع مع المحور الرأسيّ y: −7

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب *هذه أبسط صورة*.

64. $3u + 10u$

65. $5a - 2 + 6a$

66. $6m^2 - 8m$

67. $4w^2 + w + 15w^2$

68. $13(5 + 4a)$

69. $(4t - 6)16$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح والتأليف © محفوظة حقوق الطبع

2-4 مختبر الجبر
متوسط معدل التغير في الدوال الأسيّة

أنت تعلم أن معدل التغير في الدالة الخطية ثابت بالنسبة لأي نقطتين على التمثيل البياني. معدل تغير دالة أسية ليس ثابتًا.

النشاط تقييم خطط الاستثمار

يملك علي 2000 *AED* لاستثمارها في إحدى خطتين. تقدم الخطة 1 زيادة على مبلغه الأولي تبلغ 75 *AED* كل عام، بينما تعرض الخطة 2 دفع مرابحة مركبة شهريًا تبلغ 3.6%. تتحدد قيمة الدرهم لكل استثمار بعد t أعوام بـ $A_1 = 2000 + 75t$ و $A_2 = 2000(1.003)^{12t}$، على الترتيب. استخدم قيم الدالة ومتوسط معدل التغير والتمثيلات البيانية للمعادلات لتفسير الخطط والمقارنة بينها.

الخطوة 1 انسخ الجدول أدناه واستكمله بإيجاد القيم المجهولة لكل من A_1 و A_2.

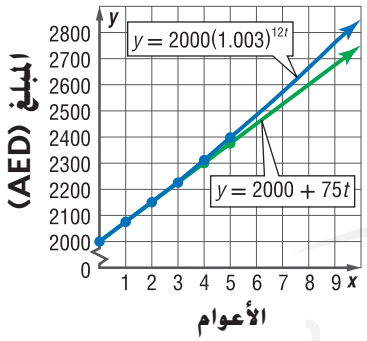
t	0	1	2	3	4	5
A_1						
A_2						

الخطوة 2 جد متوسط معدل التغير لكل خطة من $t = 0$ إلى 1، و $t = 3$ إلى 4، و $t = 0$ إلى 5.

الخطة 1: $\frac{2075 - 2000}{1 - 0}$ أو 75 $\frac{2300 - 2225}{4 - 3}$ أو 75 $\frac{2375 - 2000}{5 - 0}$ أو 75

الخطة 2: $\frac{2073.2 - 2000}{1 - 0}$ أو 73.2 $\frac{2309.27 - 2227.74}{4 - 3}$ أو حوالي 82 $\frac{2393.79 - 2000}{5 - 0}$ أو حوالي 79

الخطوة 3 مثّل بيانيًا الأزواج المرتبة لكل دالة. قم بالتوصيل بين كل مجموعة نقاط بمنحنى منتظم.



الخطوة 4 استخدم التمثيل البياني ومعدلات التغير للمقارنة بين الخطط. كلا التمثيلين البيانيين له معدل تغيير يبلغ في العام الأول حوالي 75 AED في السنة. من العام 3 إلى 4، تواصل الخطة 1 الزيادة بمعدل 75 AED في السنة، لكن الخطة 2 تنمو بمعدل يزيد على 81 AED في السنة. متوسط معدل التغيير على مدار أول خمسة أعوام في الخطة 1 يبلغ 75 AED في العام وللخطة 2 يزيد على 78 AED في العام. يشير هذا إلى أنه مع زيادة عدد الأعوام، ينمو الاستثمار في الخطة 2 بمعدل أسرع بشكل متزايد. يدعم هذا الفجوة المتزايدة بين تمثيليهما البيانيين.

تمارين

تنخفض قيمة أحد أجهزة الشركة مع الوقت بسبب الإستهلاك. تمثل الدالة $y = 16{,}000(0.985)^{2t}$ القيمة بعد t أعوام.

1. ما متوسط معدل التغيير على مدى أول خمس أعوام؟
2. ما متوسط معدل التغيير في القيمة من العام 5 إلى العام 10؟
3. ما الاستنتاج الخاص بالقيمة الذي يمكن أن تتوصل إليه بناء على متوسطات معدلات التغيير هذه؟
4. **الانتظام** انسخ الجدول واستكمله لـ $y = x^4$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

قارن متوسط معدل التغيير لـ $x = -3$ إلى 0 ولـ $x = 0$ إلى 3 وفسّر ذلك.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

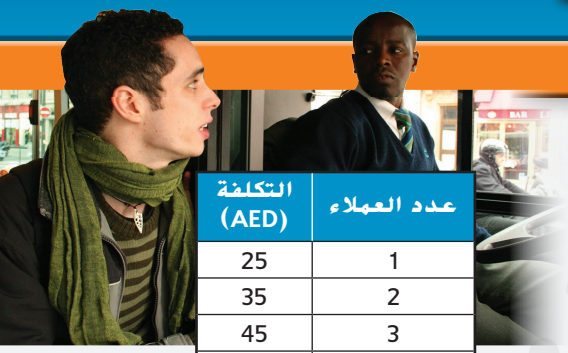
McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 2-5 الصيغ التكرارية

السابق:
- لقد كتبت صيغًا مباشرة للتعبير عن المتتاليات الحسابية والهندسية.

الحالي:
1. استخدام صيغًا تكرارية لإدراج الحدود في متتالية.
2. كتابة صيغة تكرارية للمتتاليات الحسابية والهندسية.

لماذا؟
- يتم نقل العملاء بحافلات مكوكية من منازلهم إلى المتاجر الاستهلاكية الكبرى للتسوق. تعتمد التكلفة الإجمالية للخدمة على العدد الإجمالي للعملاء. تظهر تكاليف أول ستة عملاء.



عدد العملاء	التكلفة (AED)
1	25
2	35
3	45
4	55
5	65
6	75

1 استخدام الصيغ التكرارية (الضمنية)

تسمح لك الصيغة الصريحة بإيجاد أي حد a_n في متتالية باستخدام صيغة مكتوبة بدلالة n. على سبيل المثال، يمكن استخدام $a_n = 2n$ لإيجاد الحد رقم خمسة في المتتالية $a_5 = 2(5)$ ...، 2, 4, 6, 8, أو 10.

تسمح لك **الصيغة التكرارية أو الضمنية** بإيجاد الحدّ رقم n في متتالية من خلال إجراء عملياتٍ على واحدٍ أو أكثر من الحدود السابقة. بما أن كل حد في المتتالية أعلاه أكبر بمقدار 2 عن الحد السابق له، يمكننا جمع 2 على الحد الرابع لإيجاد أن الحد الخامس يساوي 2 + 8 أو 10. ثم يمكننا كتابة صيغة تكرارية لـ a_n.

$$\begin{aligned} a_1 &= & &= 2 \\ a_2 &= a_1 + 2 = 2 + 2 &&= 4 \\ a_3 &= a_2 + 2 = 4 + 2 &&= 6 \\ a_4 &= a_3 + 2 = 6 + 2 &&= 8 \\ &\vdots & &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

الصيغة التكرارية للمتتالية أعلاه هي $a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + 2$. لـ $n \geq 2$ حيث n عدد صحيح. الحد المشار إليه بـ a_{n-1} يمثل الحد السابق مباشرة لـ a_n. لاحظ أن الحد الأول a_1 معطى وكذلك مجال n.

مثال 1 استخدام صيغة تكرارية

جد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = 7$ و $a_n = 3a_{n-1} - 12$، إذا كانت $n \geq 2$.

استخدم $a_1 = 7$ والصيغة التكرارية لإيجاد الحدود الأربعة التالية.

$a_2 = 3a_{2-1} - 12$ — $n = 2$ — بسّط. $a_1 = 7$
$= 3a_1 - 12$
$= 3(7) - 12 = 9$

$a_3 = 3a_{3-1} - 12$ — $n = 3$ — بسّط. $a_2 = 9$
$= 3a_2 - 12$
$= 3(9) - 12 = 15$

$a_4 = 3a_{4-1} - 12$ — $n = 4$ — بسّط. $a_3 = 15$
$= 3a_3 - 12$
$= 3(15) - 12 = 33$

$a_5 = 3a_{5-1} - 12$ — $n = 5$ — بسّط. $a_4 = 33$
$= 3a_4 - 12$
$= 3(33) - 12 = 87$

أول خمسة حدود هي 7 و9 و 15 و 33 و 87.

تمرين موجّه

1. جد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = -2$ و $a_n = (-3)\ a_{n-1} + 4$. إذا كانت $n \geq 2$.

المفردات الجديدة
صيغة تكرارية (ضمنية)
recursive formula

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 كتابة الصيغ التكرارية لكتابة صيغة تكرارية لمتتالية حسابية أو هندسية، استكمل الخطوات التالية.

المفهوم الأساسي كتابة الصيغ التكرارية

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية بإيجاد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.

الخطوة 2 اكتب صيغة تكرارية.

المتتاليات الحسابية $a_n = a_{n-1} + d$، حيث d هي الفرق المشترك

المتتاليات الهندسية $a_n = r \times a_{n-1}$، حيث r هي النسبة المشتركة

الخطوة 3 اذكر الحد الأول والمجال في n.

نصيحة دراسية

تعريف n للحد n في متتالية، يجب أن تكون قيمة n عددًا صحيحًا موجبًا. على الرغم من أنه يجب ذكر مجال n، سنفترض بدءًا من هذه النقطة أن n عدد صحيح.

مثال 2 كتابة الصيغ التكرارية

اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية مما يلي.

a. 17, 13, 9, 5, ...

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$13 - 17 = -4$ $\quad 9 - 13 = -4$ $\quad 5 - 9 = -4$

هناك فرق مشترك يبلغ -4. المتتالية حسابية.

الخطوة 2 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$a_n = a_{n-1} + d$ الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية

$a_n = a_{n-1} + (-4)$ $d = -4$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 17، و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 17,\ a_n = a_{n-1} - 4,\ n \geq 2$.

نصيحة دراسية

المجال يتحدد مجال n بالحدود المذكورة. بما أن الحد الأول مذكور بالفعل، فمن المنطقي أن يكون الحد الأول الذي ستسري عليه الصيغة هو الحد الثاني للمتتالية أو عندما تكون $n = 2$.

b. 6, 24, 96, 384, ...

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$24 - 6 = 18$ $\quad 96 - 24 = 72$ $\quad 384 - 96 = 288$

لا يوجد فرق مشترك. ابحث عن نسبة مشتركة بقسمة كل حد على الحد السابق له.

$\frac{24}{6} = 4$ $\quad \frac{96}{24} = 4$ $\quad \frac{384}{96} = 4$

هناك نسبة مشتركة تبلغ 4. المتتالية هندسية.

الخطوة 2 استخدم صيغة المتتالية الهندسية.

$a_n = r \times a_{n-1}$ الصيغة التكرارية للمتتالية الهندسية

$a_n = 4a_{n-1}$ $r = 4$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 6، و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 6,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2$.

تمرين موجّه

2A. 4, 10, 25, 62.5, ...

2B. 9, 36, 63, 90, ...

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكن تمثيل المتتالية بكل من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية.

مثال 3 كتابة صيغتين تكرارية وصريحة

التكلفة **ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن N هي عدد العملاء.**

a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

الخطوتان 1 و 2 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$35 - 25 = 10$ $\quad 45 - 35 = 10$ $\quad 55 - 45 = 10$

هناك فرق مشترك يبلغ 10. المتتالية حسابية.

الخطوة 3 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$a_n = a_{n-1} + d$ الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية

$a_n = a_{n-1} + 10$ $d = 10$

الخطوة 4 الحد الأول a_1 هو 25، و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 25,\ a_n = a_{n-1} + 10,\ n \geq 2$.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

الخطوة 1 الفرق المشترك هو 10.

الخطوة 2 استخدم صيغة الحد رقم n لمتتالية حسابية.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة للحد رقم n

$= 25 + (n-1)10$ $a_1 = 25$ و $d = 10$

$= 25 + 10n - 10$ خاصية التوزيع

$= 10n + 15$ بسّط.

الصيغة الصريحة للمتتالية هي $a_n = 10n + 15$.

تمرين موجّه

3. **المدخرات** يحقق المال الذي يملكه بدر في حسابه الادخاري ربحًا كل عام. لا يقوم بأي سحوبات أو إيداعات إضافية. يبلغ رصيد الحساب في بداية كل عام AED 10,000 و AED 10,300 و AED 10,609 و AED 10,927.27 وهكذا. اكتب صيغة تكرارية وصيغة صريحة للمتتالية.

مهنة من الحياة اليومية

النقل من المتوقع أن ينمو عدد الوظائف في مجال النقل بما يقرب من 1.1 مليون وظيفة بين عامي 2004 و 2014. تحدد مجالات معينة متطلبات تعليمية، وتشمل دبلومًا من مدرسة عليا وشكلاً من أشكال التدريب المتخصص.

المصدر: وزارة العمل في الولايات المتحدة

إذا كانت عدة حدود متتالية مطلوبة، فتكون الصيغة التكرارية مفيدة بينما إذا كان الحد رقم n في متتالية هو فقط المطلوب، فتكون الصيغة الصريحة مفيدة. ولهذا من المفيد أحيانًا التحول بين الصيغتين.

مثال 4 التنقل بين الصيغتين التكرارية والصريحة

a. اكتب صيغة تكرارية لـ $a_n = 6n + 3$.

$a_n = 6n + 3$ صيغة صريحة لمتتالية حسابية حيث $a_1 = 6(1) + 3$ و $d = 6$ أو 9. ولهذا فالصيغة التكرارية لـ a_n هي $a_1 = 9,\ a_n = a_{n-1} + 6,\ n \geq 2$.

b. اكتب صيغة صريحة لـ $a_1 = 120,\ a_n = 0.8a_{n-1},\ n \geq 2$.

$a_n = 0.8a_{n-1}$ صيغة تكرارية لمتتالية هندسية حيث $a_1 = 120$ و $r = 0.8$. ولهذا، فالصيغة الصريحة لـ a_n هي $a_n = 120(0.8)^{n-1}$.

تمرين موجّه

4A. اكتب صيغة تكرارية لـ $a_n = 4(3)^{n-1}$.

3a. اكتب صيغة صريحة لـ $a_1 = -16,\ a_n = a_{n-1} - 7,\ n \geq 2$.

نصيحة دراسية

المتتالية الهندسية تذكّر أن صيغة الحد n لمتتالية هندسية هي $a_n = a_1 r^{n-1}$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

التحقق من فهمك

مثال 1 **جد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.**

1. $a_1 = 16,\ a_n = a_{n-1} - 3,\ n \geq 2$

2. $a_1 = -5,\ a_n = 4a_{n-1} + 10,\ n \geq 2$

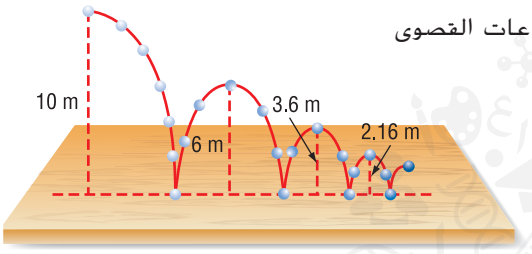
مثال 2 **اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية.**

3. 1, 6, 11, 16, ...

4. 4, 12, 36, 108, ...

مثال 3

5. الكرة سقطت كرة من ارتفاع 10 أمتار. موضح بالصورة الارتفاعات القصوى التي تصل إليها الكرة في أول ثلاثة ارتدادات.



a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

مثال 4 **لكل صيغة تكرارية، اكتب صيغة صريحة. لكل صيغة صريحة، اكتب صيغة تكرارية.**

6. $a_1 = 4,\ a_n = a_{n-1} + 16,\ n \geq 2$

7 $a_n = 5n + 8$

8. $a_n = 15(2)^{n-1}$

9. $a_1 = 22,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **جد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.**

10. $a_1 = 23,\ a_n = a_{n-1} + 7,\ n \geq 2$

11. $a_1 = 48,\ a_n = -0.5a_{n-1} + 8,\ n \geq 2$

12. $a_1 = 8,\ a_n = 2.5a_{n-1},\ n \geq 2$

13. $a_1 = 12,\ a_n = 3a_{n-1} - 21,\ n \geq 2$

14. $a_1 = 13,\ a_n = -2a_{n-1} - 3,\ n \geq 2$

15. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = a_{n-1} + \frac{3}{2},\ n \geq 2$

مثال 2 **اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية.**

16. 12, −1, −14, −27, ...

17. 27, 41, 55, 69, ...

18. 2, 11, 20, 29, ...

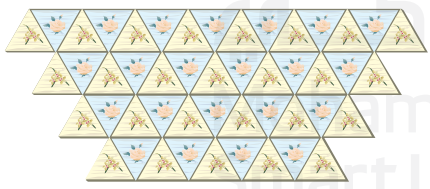
19. 100, 80, 64, 51.2, ...

20. 40, −60, 90, −135, ...

21. 81, 27, 9, 3, ...

مثال 3

22. وضع النماذج يبني مهندس تصميم معماري فناء من القرميد. يشمل جزء من الفناء نمطًا مكونًا من مثلثات. موضح بالصورة أول أربعة صفوف من النمط.



a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

مثال 4 **لكل صيغة تكرارية، اكتب صيغة صريحة. لكل صيغة صريحة، اكتب صيغة تكرارية.**

23. $a_n = 3(4)^{n-1}$

24. $a_1 = -2,\ a_n = a_{n-1} - 12,\ n \geq 2$

25. $a_1 = 38,\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1},\ n \geq 2$

26. $a_n = -7n + 52$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

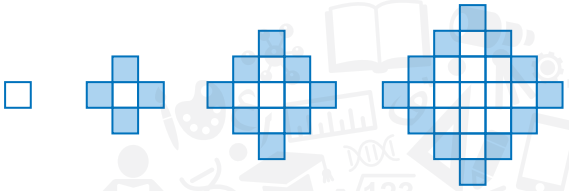
27. **الرسائل النصية** تلقت أماني رسالة نصية متسلسلة أعادت إرسالها إلى خمس من صديقاتها. أعادت كل واحدة من صديقاتها إرسال الرسالة النصية إلى خمس صديقات أخريات، وهكذا.

a. جد أول خمسة حدود في هذا التسلسل تمثل عدد الأشخاص الذين يتلقون الرسالة النصية في الجولة n.

b. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

c. إذا كانت أماني تمثل a_1، فجد a_8.

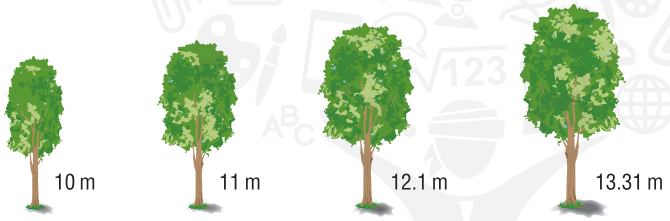
28. **الهندسة** فكّر في النمط أدناه. يزداد عدد المربعات الزرقاء وفقًا لنمط معين.



a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية التي تمثل عدد المربعات الزرقاء في كل شكل.

b. إذا كان المربع الأول يمثل a_1، فجد عدد المربعات الزرقاء في a_8.

29. **الأشجار** يتباطأ نمو نوع معين من الأشجار مع تقدم الشجرة في العمر. تظهر ارتفاعات الشجرة على مدار الأربع سنوات الماضية.



a. اكتب صيغة تكرارية لارتفاع الشجرة.

b. إذا استمر النمط، فما الطول الذي ستصل إليه الشجرة بعد عامين آخرين؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

30. **التمثيلات المتعددة** متتالية فيبوناتشي ليست حسابية أو هندسية ويمكن تعريفها بأنها صيغة تكرارية. الحدود الأولى هي ... 1, 1, 2, 3, 5, 8,

a. منطقيًا حدد العلاقة بين حدود المتتالية. ما الحدود الخمسة التالية في المتتالية؟

b. جبريًا اكتب صيغة للحد رقم n إذا كانت $a_1 = 1$ و $a_2 = 1$ و $n \geq 3$.

c. جبريًا جد الحد رقم 15.

d. تحليليًا اشرح السبب في أن متتالية فيبوناتشي ليست متتالية حسابية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **تحليل الخطأ** يعمل بلال وجاسم على حل مسألة رياضية تتضمن المتتالية ... 2, −2, 2, −2, 2, . يعتقد بلال أنه يمكن كتابة المتتالية بصيغة تكرارية. ويرى جاسم أنه يمكن كتابة المتتالية بصيغة صريحة. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح.

32. **التحدي** جد a_1 للمتتالية حيث $a_4 = 1104$ و $a_n = 4a_{n-1} + 16$.

33. **الفرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*. علل استنتاجك.

توجد صيغة تكرارية واحدة فقط لكل متتالية.

34. **التحدي** جد صيغة تكرارية لـ ... 4, 9, 19, 39, 79,

35. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الفرق بين الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

36. جد صيغةً تكراريةً للمتتالية ... 12, 24, 36, 48, .

A $a_1 = 12,\ a_n = 2a_{n-1},\ n \geq 2.$

B $a_1 = 12,\ a_n = 4a_{n-1} - 24,\ n \geq 2.$

C $a_1 = 12,\ a_n = a_{n-1} + 12,\ n \geq 2.$

D $a_1 = 12,\ a_n = 12a_{n-1} + 12,\ n \geq 2.$

37. الهندسة تبلغ مساحة أحد المستطيلات $36m^4n^6$ m^2. يبلغ طول المستطيل $6m^3n^3$ m. فما عرض المستطيل؟

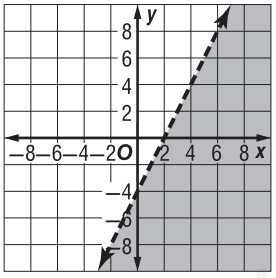
F $216m^7n^9$ m

G $6mn^3$ m

H $42m^7n^3$ m

J $30mn^3$ m

38. جد متباينة في التمثيل البياني المعروض.



A $y > 2x - 4$

B $y \geq 2x - 4$

C $y < 2x - 4$

D $y \leq 2x - 4$

39. اكتب معادلة للمستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2, -20)$ و $(4, 58)$.

F $y = 13x + 6$

G $y = 19x - 18$

H $y = 19x + 18$

J $y = 13x - 6$

مراجعة شاملة

جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

40. 675, 225, 75, ...

41. 16, −24, 36, ...

42. 6, 18, 54, ...

43. 512, −256, 128, ...

44. 125, 25, 5, ...

45. 12, 60, 300, ...

46. الاستثمار استثمر أحمد AED 2000 بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 5.75% شهريًا. ما المبلغ الذي سيكون مع أحمد بعد 5 سنوات؟

47. الجولات السياحية تسافر أسرة راشد وأسرة صالح معًا في رحلة لزيارة مصنع حلويات. موضح الجدول أدناه عدد الأشخاص في كل أسرة والتكلفة الإجمالية . جد أسعار دخول الشخص البالغ والأطفال.

الأسرة	عدد البالغين	عدد الأطفال	التكلفة الإجمالية
راشد	2	3	AED 58
صالح	2	1	AED 38

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية.

48. $y + 6 = -3(x + 2)$

49. $y - 12 = 4(x - 7)$

50. $y + 9 = 5(x - 3)$

51. $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 15)$

52. $y + 10 = \frac{2}{5}(x - 6)$

53. $y - 4 = -\frac{2}{7}(x + 1)$

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب هذه *أبسط صورة*.

54. $8x + 3y^2 + 7x - 2y$

55. $4(x - 16) + 6x$

56. $4n - 3m + 9m - n$

57. $6r^2 + 7r$

58. $-2(4g - 5h) - 6g$

59. $9x^2 - 7x + 16y^2$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

6-2 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

مختبر تقنية التمثيل البياني

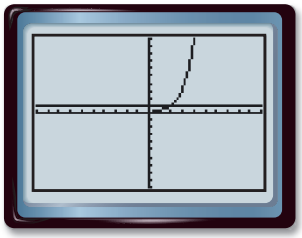
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسيّة من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول. وللقيام بذلك، سوف تكتب المعادلات في صيغة أنظمة معادلات.

النشاط 1

حُـلّ المعادلة: $3^{x-4} = \frac{1}{9}$.

الخطوة 1 مثّل كل طرف من المعادلة بيانيًا في صورة دالة منفصلة. أدخل 3^{x-4} باعتبارها **Y1**. تأكد من تضمين قوسين حول الأس.

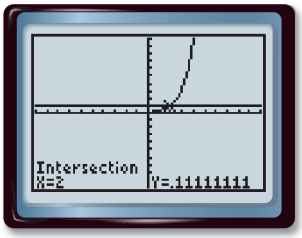
أدخِل $\frac{1}{9}$ باعتبارها **Y2**. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا.



[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 2 استخدم خاصية **intersect**.

يمكنك استخدام خاصية **intersect (تقاطع)** من قائمة **CALC (احسب)** لتقريب الزوج المرتّب الخاص بالنقطة التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية.

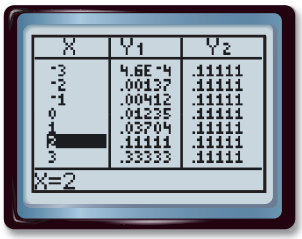


[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

تبين شاشة الحاسبة أن الإحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان هو 2. لذا، فإن حل المعادلة هو 2.

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

يمكنك أيضًا استخدام خاصية **TABLE (الجدول)** لتحديد موقع النقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان.



X	Y1	Y2
-3	4.6E-4	.11111
-2	.00137	.11111
-1	.00412	.11111
0	.01235	.11111
1	.03704	.11111
2	.11111	.11111
3	.33333	.11111

X=2

يظهر الجدول قيم x وقيم y المتماثلة لكل تمثيل بياني. افحص الجدول للعثور على قيمة x التي تساويها قيم y في التمثيلات البيانية.

عند $x = 2$، تكون لكلتا الدالتين قيمة y تبلغ $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$. وبالتالي، فإن حل المعادلة هو 2.

تحقق عوّض بالعدد 2 عن x في المعادلة الأصلية

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ المعادلة الأصلية

$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ عوّض بالعدد 2 عن x.

$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ بسّط.

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓ تم التحقق من الحل.

يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسيّة.

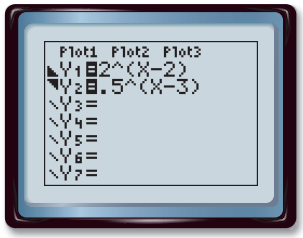
(يُتبع في الصفحة التالية)

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات الأسية تابع

النشاط 2 وصف

حُلّ $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$.



الخطوة 1 أدخل المتباينات ذات الصلة.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y \geq 2^{x-2}$ أو $y \leq 2^{x-2}$. وبما أن هذه المتباينة تتضمن علامة *أقل من أو يساوي*، فيجب أن تظلل أسفل المنحنى.

أدخل الحد أولاً ثم استخدم السهم ومفاتيح ENTER لاختيار أيقونة "التظليل أسفل".

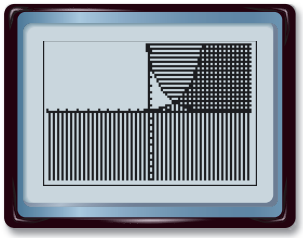
المتباينة الثانية هي $y \geq 0.5^{x-3}$. ظلل فوق المنحنى لأن هذه المتباينة تحتوي على علامة *أكبر من أو يساوي*.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2 ^ (

X,T,θ,n − 2) ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ▶

▶ .5 ^ (X,T,θ,n − 3)

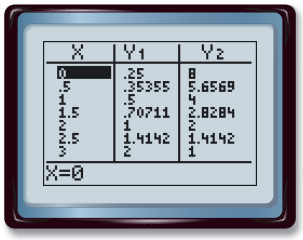


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 2 مثّل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. وباستخدام خاصية **intersect (تقاطع)**، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.



الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

تحقق باستخدام خاصية **TABLE (الجدول)**. وقم بإعداد الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي 0.5.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [TABLE] .5 ENTER ENTER 2nd [TBLSET] 0 ENTER

لاحظ أنه بالنسبة لقيم x التي تكون أكبر من 2.5 = x، فإن Y1 > Y2. وهذا يؤكد أن حل المتباينة يكون $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين

حُلّ كل معادلة أو متباينة.

1. $9^{x-1} = \frac{1}{81}$
2. $4^{x+3} = 2^{5x}$
3. $5^{x-1} = 2^{x}$
4. $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$
5. $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$
6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$
7. $16^{x-1} > 2^{2x+2}$
8. $3^{x} - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$
9. $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$
10. **الكتابة في الرياضيات** وضّح سبب عمل هذه التقنية الخاصة بتمثيل نظام معادلات أو متباينات بيانيًا على حل المعادلات والمتباينات الأسيّة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2-6 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

السابق:
- قمتَ بتمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.

الحالي:
1. حل المعادلات الأسيّة.
2. حل المتباينات الأسيّة.

لماذا؟
- تتجه العضوية بمواقع شبكات التواصل الاجتماعي إلى الزيادة بمعدلٍ أسي. ويمكن تمثيل نمو هذه العضوية على أحد المواقع من خلال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$. حيث x هو عدد الأعوام منذ 2004 و y هو عدد الأعضاء بالملايين.

يمكنك استخدام $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد كم سيكون عدد الأعضاء في عام ما محدد، أو لتحديد العام الذي بلغت فيه العضوية مستوًى معينًا.

المفردات الجديدة

المعادلة الأسيّة
exponential equation

المرابحة المركبة
compound interest

المتباينة الأسيّة
exponential inequality

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 إيجاد حل المعادلات الأسيّة

في **المعادلة الأسيّة**، تأتي المتغيرات على شكل أسس.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الدوال الأسيّة

الشرح افترض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. إذًا، $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x = y$.

مثال إذا كانت $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. إذا كانت $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

يمكن استخدام خاصية التساوي لحل المعادلات الأسيّة.

مثال 1 حل المعادلات الأسيّة

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	أعد كتابة 8 بالصيغة 2^3.
$2^x = 2^9$	قوة لقوة
$x = 9$	خاصية المساواة في الدوال الأسيّة

b. $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	أعد كتابة 9 بالصيغة 3^2.
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	قوة لقوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة في الدوال الأسيّة
$-2 = 2x$	اطرح $4x$ من كل طرف.
$-1 = x$	اقسم كل طرف على 2.

تمرين موجّه

1A. $4^{2n-1} = 64$

1B. $5^{5x} = 125^{x+2}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام المعلومات المتعلقة بالنمو أو التضاؤل لكتابة المعادلة الخاصة بدالة أسية.

مثال 2 من الحياة اليومية كتابة الدالة الأسيّة

العلوم **بدأت هدى تجربة بـــ 7500 خلية بكتيرية. وبعد 4 ساعات، أصبح هناك 23,000 خلية.**

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها في تمثيل عدد البكتيريا بعد x من الساعات إذا كان عدد البكتيريا يتغير بالمعدل نفسه.

في بداية التجربة، كان الوقت 0 ساعة وكان يوجد 7500 خلية بكتيرية. وبالتالي، تكون قيمة التقاطع مع المحور الرأسي y. وقيمة a هي 7500.

عندما يكون $x = 4$، يكون عدد الخلايا البكتيرية 23,000. عوّض عن هذه القيم في دالة أسية لتحديد قيمة b.

$y = ab^x$	دالة أسية
$23{,}000 = 7500 \cdot b^4$	عوّض عن x بـــ 4، وعن y بـــ 23,000، وعن a بـــ 7500.
$3.067 \approx b^4$	اقسم كل طرف على 7500.
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	احسب الجذر الرابع لكل طرف.
$1.323 \approx b$	استخدام الحاسبة.

المعادلة التي تمثل عدد البكتيريا هي $y \approx 7500(1.323)^x$.

b. كم عدد الخلايا البكتيرية التي يمكن توقعها في العينة بعد 12 ساعة؟

$y \approx 7500(1.323)^x$	تمثيل المعادلة
$\approx 7500(1.323)^{12}$	عوّض عن x بـــ 12.
$\approx 215{,}665$	استخدام آلة حاسبة.

سيكون هناك تقريبًا 215,665 خلية بكتيرية بعد 12 ساعة.

تمرين موجّه

2. إعادة التدوير قامت جهة تصنيع بتوزيع 3.2 ملايين علبة ألومنيوم في عام 2005.

A. وفي 2010، وزّعت هذه الجهة 420,000 علبة مُصنَّعة من العلب المُعاد تدويرها، والتي قامت بتوزيعها من قبل. وبافتراض أن معدل إعادة التدوير يستمر، اكتب معادلة لتمثيل توزيع العلب المُصنَّعة من الألومنيوم المُعاد تدويره كل عام.

B. كم عدد العُلب المُصنَّعة من الألومنيوم المُعاد تدويره الذي يمكن توقعه في عام 2050؟

مسائل من الحياة اليومية

في عام 2008، ساهم معدل إعادة تدوير المعادن في الولايات المتحدة البالغ 35% في الوقاية من انبعاث ما يقارب 25 مليون طن متري من الكربون في الهواء – الكمية المنبعثة سنويًا من 4.5 ملايين سيارة تقريبًا.

المصدر: وكالة الحماية البيئية

تُستخدم الدوال الأسيّة في الحالات التي تنطوي على مرابحة مركبة. **المرابحة المركبة** هي فائدة يتم دفعها على أساس رأس المال الأصلي للاستثمار بالإضافة إلى أي فوائد مكتسبة سابقًا.

المفهوم الأساسي المرابحة المركبة

يمكنك حساب المرابحة المركبة باستخدام الصيغة التالية.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث يمثل A المبلغ في الحساب بعد t من الأعوام، ويمثل P المبلغ الأصلي المستثمَر، ويمثل r نسبة المرابحة السنوية، ويمثل n عدد الفترات المركبة كل عام.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 المرابحة المركبة

يدفع حساب استثماري مرابحة سنوية مركبة بنسبة 4.2% شهريًا. فإذا تم استثمار مبلغ AED 2500 في هذا الحساب، فكم سيصبح الرصيد بعد 15 عامًا؟

افهم جد المبلغ الإجمالي في الحساب بعد 15 عامًا.

خطط استخدم قانون المرابحة المركبة.

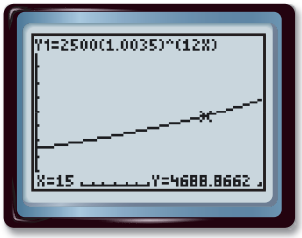
$P = 2500$. و $r = 0.042$. و $n = 12$. و $t = 15$

جد الحل

قانون المرابحة المركبة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$P = 2500, r = 0.042, n = 12, t = 15$ $= 2500\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$

استخدم حاسبة. ≈ 4688.87



[0, 20] scl: 1 by [0, 10,000] scl: 1000

تحقق مثّل المعادلة المقابلة بيانيًا $y = 2500(1.0035)^{12t}$. استخدم قيمة CALC: لإيجاد y عندما تكون $x = 15$.

قيمة y البالغة 4688.8662 قريبة جدًا من 4688.87. لذلك فالإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

3. جد رصيد الحساب بعد 20 عامًا إذا تم وضع AED 100 في حسابٍ يدفع مرابحة مركبة قدرها 1.2% مرتين في الشهر.

انتبه!
النسب المئوية تذكر أن تحويل جميع النسب المئوية إلى صيغة كسور عشرية، 2.4% تصبح 0.042.

2 حل المتباينات الأسيّة

المتباينة الأسيّة هي متباينة تتضمن مقادير أسية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في الدوال الأسيّة

الشرح لتكن $b > 1$. إذًا $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x > y$، و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x < y$.

مثال إذا كانت $2^x > 2^6$، فإن $x > 6$. وإذا كانت $x > 6$، فإن $2^x > 2^6$.

تنطبق هذه الخاصية أيضًا على ≥ و ≤.

مثال 4 حل المتباينات الأسيّة

حُلّ $16^{2x-3} < 8$.

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	أعد كتابة 16 بالصيغة 2^4 و 8 بالصيغة 2^3.
$2^{8x-12} < 2^3$	قوة لقوة
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين في الدوال الأسيّة
$8x < 15$	اجمع 12 إلى كل طرف.
$x < \frac{15}{8}$	اقسم كل طرف على 8.

تمرين موجّه

حُـلّ كل متباينة مما يلي.

4A. $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B. $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

التحقق من فهمك

مثال 1 **حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

1. $3^{5x} = 27^{2x-4}$

2. $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

3. $2^{6x} = 32^{x-2}$

4. $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

مثال 2 **5. العلوم** انقسام الخلية هو العملية التي تنقسم فيها الخلية إلى اثنتين. وتُعد *الإشريكية القولونية* واحدة من أسرع أنواع البكتيريا نموًا. ذلك أنه يمكنها أن تتكاثر بنفسها في 15 دقيقة.

a. اكتب دالة أسية لتمثيل عدد الخلايا c بعد عدد t من الدقائق.

b. إذا بدأت بخلية *إشريكية قولونية* واحدة، فكم سيكون عدد الخلايا خلال ساعة واحدة؟

مثال 3 **6.** تدفع شهادة إيداع مرابحة مركبة كل أسبوعين قدرها 2.25%. فإذا أودعتَ AED 500 في هذه الشهادة، فكم سيكون الرصيد بعد 6 أعوام؟

مثال 4 **حُـلّ كل من المتباينات التالية.**

7. $4^{2x+6} \le 64^{2x-4}$

8. $25^{y-3} \le \left(\frac{1}{125}\right)^{y+2}$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

9. $8^{4x+2} = 64$

10. $5^{x-6} = 125$

11 $81^{a+2} = 3^{3a+1}$

12. $256^{b+2} = 4^{2-2b}$

13. $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$

14. $8^{2y+4} = 16^{y+1}$

مثال 2 **15. تمثيل النماذج** في عام 2009، استلمت ريهام مبلغًا قدره AED 10,000 من جدتها. واستثمر والداها هذا المبلغ المالي كله، وبحلول عام 2021، سيكون هذا المبلغ قد نما ليصل إلى AED 16,960.

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لتمثيل المبلغ المالي y. واكتب الدالة بحيث يكون x هو عدد الأعوام منذ عام 2009.

b. افترض أن هذا المبلغ المالي استمر في النمو بنفس المعدل. فكم سيكون رصيد هذا الحساب في عام 2031؟

اكتب دالة أسيّة للتمثيل البياني الذي يمر بالنقاط المعطاة.

16. (0, 6.4) و (3, 100)

17. (0, 256) و (4, 81)

18. (0, 128) و (5, 371,293)

19. (0, 144) و (4, 21,609)

مثال 3 **20.** جد رصيد الحساب بعد 7 أعوام إذا تم إيداع مبلغ AED 700 في حساب يدفع مرابحة مركبة قدرها 4.3% شهريًا.

21. حدد كم سيكون المبلغ الموجود في حساب تقاعد بعد 20 عامًا إذا تم استثمار AED 5000 بنسبة مرابحة مركبة قدرها 6.05% أسبوعيًا.

22. يقدم حساب توفير مرابحة مركبةً قدرها 0.7% كل شهرين. وإذا تم إيداع مبلغ AED 110 في هذا الحساب، فكم سيكون الرصيد بعد 15 عامًا؟

23. يدفع حساب توفير جامعي مرابحة سنوية مركبة قدرها 13.2% كل نصف عام. فكم سيكون رصيد الحساب بعد 12 عامًا إذا تم إيداع مبلغ AED 21,000 بشكل أولي؟

مثال 4 **حُـلّ كل من المتباينات التالية.**

24. $625 \ge 5^{a+8}$

25. $10^{5b+2} > 1000$

26. $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$

27. $\left(\frac{1}{27}\right)^{2d-2} \le 81^{d+4}$

28. $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \ge \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

29. $\left(\frac{1}{36}\right)^{w+2} < \left(\frac{1}{216}\right)^{4w}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

30. العلوم تبلغ حرارة كوب من الشوكولاته الساخنة 90°C عند الزمن $t = 0$. وهذا الكوب مُحاط بهواء درجة حرارته ثابتة عند 20°C. فإذا تم تقليبه بانتظام، ستصبح حرارته بالدرجة المئوية بعد t من الدقائق $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a. جد درجة حرارة الشوكولاته الساخنة بعد 15 دقيقة.

b. جد درجة حرارة الشوكولاته الساخنة بعد 30 دقيقة.

c. درجة الحرارة المثالية للشرب هي 60°C. فهل سيكون كوب الشوكولاته الساخنة عند درجة الحرارة هذه أم أقل منها بعد 10 دقائق؟

31. الحيوانات تُظهر الدراسات أن أي حيوان سوف يدافع عن منطقته في حيز يُقدَّر بالأمتار المربعة يكون متناسبًا بشكل طردي مع قوة قدرها 1.31 من وزن الحيوان بالكيلوغرام.

a. إذا دافع قندس وزنه 45 kg عن مساحة قدرها $170\ m^2$، فاكتب معادلة تمثل المساحة a التي يتم الدفاع عنها بواسطة قندس وزنه w kg من.

b. يعتقد العلماء أنه منذ آلاف السنين، كان أسلاف القندس بطول 11 m وبوزن 430 kg. استخدم معادلتك لتحديد المساحة التي دافعت عنها تلك الحيوانات.

حُلّ كل من المعادلات التالية.

32. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

33. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$

34. $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$

35. $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$

36. $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

37. $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$

38. تمثيل النماذج في عام 1950، بلغ تعداد سكان العالم 2.556 مليار نسمة. وبحلول عام 1980، ازداد العدد إلى 4.458 مليارات نسمة.

a. اكتب دالة أسية بالصيغة $y = ab^x$ والتي يمكن استخدامها لتمثيل تعداد سكان العالم y بالمليارات للفترة من 1950 وحتى 1980. اكتب المعادلة بحيث يكون x هو عدد الأعوام منذ 1950. (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.)

b. افترض أن هذا التعداد استمر في النمو بهذا المعدل. قدّر التعداد في عام 2000.

c. في عام 2000، بلغ تعداد سكان العالم حوالي 6.08 مليارات نسمة. قارن تقديرك بالتعداد الفعلي للسكان.

d. استخدم المعادلة التي كتبتها في الجزء a لتقدير تعداد سكان العالم في العام 2020. ما مدى دقة هذا التقدير برأيك؟ اشرح استنتاجك.

39. الأشجار يتغير قطر الدائرة لقاعدة جذع شجرة بالسنتيمترات طرديًا مع $\frac{3}{2}$ قوة ارتفاعها بالأمتار.

a. يبلغ طول شجرة سكوية صغيرة 6 m، ويبلغ قطر قاعدتها 19.1 cm. استخدم هذه المعلومات لكتابة معادلة للقطر d الخاص بقاعدة شجرة السكوية إذا كان ارتفاعها يبلغ h من الأمتار.

b. يبلغ طول شجرة الجنرال شيرمان في حديقة سكويا الوطنية بكاليفورنيا حوالي 84 m. جد قطر قاعدة شجرة الشيرمان العامة.

40. المعرفة المالية لدى السيدة آمنة خطتان استثماريتان مختلفتان تتعلقان بالتقاعد لتختار واحدة من بينهما.

a. اكتب معادلتين للخيار A والخيار B بناءً على الحد الأدنى للإيداعات.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا لإظهار الأرصدة لكل خيار استثماري بعد عدد t من الأعوام.

c. اشرح ما إذا كان الخيار A أو الخيار B هو الخيار الأفضل للاستثمار.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

41. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف الزيادة السريعة لإحدى الدوال الأسيّة. تم قص ورقة كبيرة إلى نصفين، ووضعت إحدى القطعتين الناتجتين على القطعة الأخرى. بعد ذلك، تم قص القطعتين الموجودتين في هذه الكومة إلى نصفين ووضعت القطع الناتجة فوق بعضها البعض. افترض أنه تم تكرار هذا الإجراء عدة مرات.

a. **عمليًا** نفّذ هذا النشاط وقم بإحصاء عدد الأوراق في الكومة بعد القص أول مرة. كم سيكون عدد قُصاصات الورق في الكومة بعد ثاني عملية قص؟ وكم سيكون عدد قُصاصات الورق بعد ثالث مرة؟ وكم سيكون عدد قُصاصات الورق بعد رابع مرة؟

b. **جدوليًا سجّل نتائجك في جدول.**

c. **رمزيًا** استخدم النمط الموجود في الجدول لكتابة معادلة لعدد قُصاصات الورق في الكومة بعد عدد x من عمليات القصّ.

d. **تحليليًا** يبلغ سُمك ورقة عادية حوالي 0.003 in. اكتب معادلة للتعبير عن سُمك كومة من هذه الورقة بعد عدد x من عمليات القصّ.

e. **تحليليًا** كم سيكون سُمك كومة الورق بعد 30 قصة؟ .

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. **الكتابة في الرياضيات** في مسألة عن المرابحة المركبة، صف ماذا يحدث عندما تصبح الفترات المُركّبة أكثر تكرارًا، بينما يظل المبلغ الأصلي والوقت الكلي كما هما.

43. **تحليل الخطأ** يحل كل من آمنة وبدرية المعادلة $6^{x-3} > 36^{-x-1}$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

آمنة

$6^{x-3} > 36^{-x-1}$

$6^{x-3} > (6^2)^{-x-1}$

$6^{x-3} > 6^{-2x-2}$

$x - 3 > -2x - 2$

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$

بدرية

$x-3 > 36^{-x-1}6$

$x-3 > (6^2)^{-x-1}6$

$x-3 > 6^{-x+1}6$

$x - 3 > -x + 1$

$2x > 4$

$x > 2$

44. **تحدٍّ** حل لإيجاد x: $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$.

45. **مسألة غير محددة الإجابة** ما التغيير الذي قد يكون أكثر فائدةً لقرض مدته 5 أعوام بمرابحة مركبة نسبتها 8% شهريا: تقليل المدة إلى 4 أعوام أم تقليل نسبة المرابحة إلى 6.5%؟

46. **الفرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحةً أحيانًا أم *دائمًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

a. $2^x > -8^{20x}$ لجميع قيم x.

b. يتزايد التمثيل البياني لمعادلة نمو أسي.

c. يتزايد التمثيل البياني لمعادلة تضاؤل أسي.

47. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متباينةً أسية مع حل $x \leq 2$.

48. **البرهان** أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$.

49. **الكتابة في الرياضيات** إذا كانت لديك الكميتين الأولية والنهائية لمادة مشعة ما ومقدار الزمن الذي يمر، فكيف يمكّنك تحديد معدل زيادة أو انخفاض الكمية من أجل كتابة معادلة؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

50. $3 \times 10^{-4} =$

A 0.003
B 0.0003
C 0.00003
D 0.000003

51. أي مما يلي يمكن *ألا* يكون حلاً لـــ $5 - 3x < -3$

F 2.5
G 3
H 3.5
J 4

52. إجابة شبكية تتمثل الزوايا الثلاث لمثلث في $3x$ و $x + 10$ و $2x - 40$. جد قياس أصغر زاوية في المثلث.

53. SAT/ACT أي مما يلي يكون مساويًا لـــ $(x)(x)(x)(x)$ لجميع رموز x؟

A $x + 4$
B $4x$
C $2x^2$
D $4x^2$
E x^4

مراجعة شاملة

مثِّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 2-1)

54. $y = 2(3)^x$

55. $y = 5(2)^x$

56. $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

استخدم خاصية التوزيع لتحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل. (الدرس 4-1)

57. $4m^3n^2 + 16m^2n^3 - 8m^3n^4$

58. $12j^4k^4 + 36j^3k^2 - 3j^2k^5$

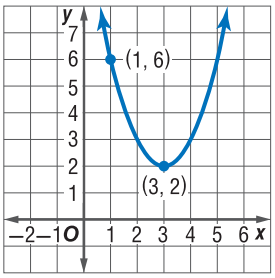
حلِّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

59. $x^2 - 4x + 3xy - 12y$

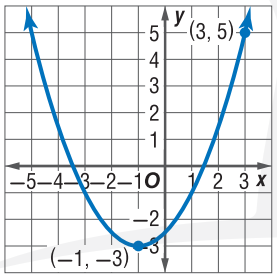
60. $4a - 10ab + 6b - 15b^2$

اكتب معادلةً بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ. (الدرس 7-1)

61.



62.



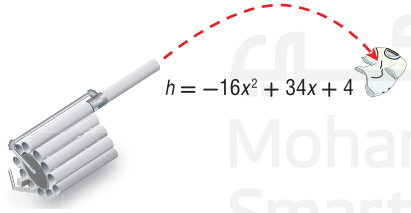
مثِّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى. (الدرس 2-1)

63. $f(x) = \frac{2}{3}(2^x)$

64. $f(x) = 4^x + 3$

65. $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

66. الجوائز تُستخدم آلة لإلقاء القمصان على الجمهور في مباريات لكرة السلة. (الدرس 7-1)



a. ما الارتفاع الأولي للقميص؟

b. إذا تم الإمساك بالقميص بعد ثانيتين، فماذا سيكون الارتفاع؟

مراجعة المهارات

جد $[g \circ h](x)$ **و** $[h \circ g](x)$.

66. $h(x) = 2x - 1$
$g(x) = 3x + 4$

67. $h(x) = x^2 + 2$
$g(x) = x - 3$

68. $h(x) = x^2 + 1$
$g(x) = -2x + 1$

69. $h(x) = -5x$
$g(x) = 3x - 5$

70. $h(x) = x^3$
$g(x) = x - 2$

71. $h(x) = x + 4$
$g(x) = |x|$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مختبر الجبر
تحويل التعابير الأسيّة

يمكنك استخدام خواص الأسس النسبية في تحويل الدوال الأسيّة إلى صيغ أخرى لحل مسائل من الحياة اليومية.

النشاط اكتب التعابير الأسيّة المكافئة

تحاول غاية أن تختار من بين خطتي حساب ادخار. وتقدم الخطة A نسبة مرابحة مركبة شهرية تبلغ 0.25%، بينما تقدم الخطة B نسبة مرابحة مركبة سنوية تبلغ 2.5%. فأي الخطتين الأفضل؟ اشرح.

من أجل المقارنة بين الخطتين، يجب أن نقارن النسبتين بالتكرار المركب نفسه. فالطريقة الأولى للقيام بهذا تتمثل في المقارنة بين نسبتي المرابحة الشهريتين التقريبيتين للخطتين، واللتين تُسميان أيضًا نسبة المرابحة الشهرية *الفعلية*. وعلى الرغم من أنه يمكنك استخدام قانون المرابحة المركبة لإيجاد هذه النسبة، فيمكنك أيضًا استخدام خواص الأسس.

اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه غاية بعد عدد t من السنوات من خلال الخطة B. وللتيسير، افترض أن المبلغ الأولي لاستثمار غاية هو 1 AED.

$y = a(1 + r)^t$ معادلة النمو الأسي

$A(t) = 1(1 + 0.025)^t$ $y = A(t)$ أو $a = 1$ أو $r = 2.5\%$ أو 0.025

$= 1.025^t$ بسّط.

الآن، اكتب دالة تعادل $A(t)$ تمثل 12 تركيبًا في السنة، بقوة أسيّة تبلغ $12t$، بدلاً من 1 في السنة، بقوة أسيّة تبلغ $1t$.

$A(t) = 1.025^{1t}$ الدالة الأصلية

$= 1.025^{\left(\frac{1}{12} \cdot 12\right)t}$ $1 = \frac{1}{12} \cdot 12$

$= \left(1.025^{\frac{1}{12}}\right)^{12t}$ قوة أسيّة لقوة أسيّة

$\approx 1.0021^{12t}$ $(1.025)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.025}$ أو حوالي 1.0021

من هذه الدالة المكافئة، يمكننا تحديد أن نسبة المرابحة الشهرية الفعلية حسب الخطة B تبلغ 0.0021 تقريبًا أو حوالي 0.21% في الشهر. حيث تقل هذه النسبة عن نسبة المرابحة الشهرية البالغة 0.25% في الشهر التي تقدمها الخطة A. إذًا، فإن الخطة A هي الخطة الأفضل.

التمثيل والتحليل

1. استخدم قانون المرابحة المركبة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لتحديد نسبة المرابحة الشهرية الفعلية للخطة B. ما وجه مقارنة هذه النسبة بالنسبة المحسوبة باستخدام الطريقة الواردة في النشاط أعلاه؟

2. اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه غاية بعد عدد t من الأشهر في الخطة A. ثم استخدم خواص الأسس لكتابة دالة تعادل $A(t)$ التي تمثل المبلغ المُكتسَب بعد عدد t من السنوات.

3. من التعبير الذي كتبته في التمرين 2، حدد نسبة المرابحة السنوية الفعلية حسب الخطة A. استخدم هذه النسبة لشرح السبب في كون الخطة A هي الخطة الأفضل.

4. افترض أن الخطة A عرضت نسبة مرابحة مركبة ربع سنوية تبلغ 1.5%. استخدم خواص الأسس لتوضيح أيهما الخطة الأفضل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

دليل الدراسة والمراجعة

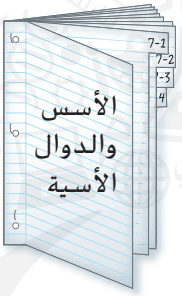
دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسيّة (الدرسان 5-8 و 6-8)

- معادلة النمو الأسيّ هي $y = a(1 + r)^t$، حيث $r > 0$. معادلة الاضمحلال الأسيّ هي $y = a(1 - r)^t$، حيث y. $0 < r < 1$ هي المبلغ النهائي، و a المبلغ الأولي، و r هي معدل التغيير و t هي الزمن بالأعوام.

مطويات منظّم الدراسة



تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

أحادية الحد monomial	نسبة مشتركة common ratio
الأس السالب negative exponent	المرابحة المركبة compound interest
الجذر النوني nth root n	ثابت constant
رتبة المقدار order of magnitude	الجذر التكعيبي cube root
الأس النسبي rational exponent	الاضمحلال الأسيّ exponential decay
صيغة تكرارية recursive formula	المعادلة الأسيّة exponential equation
الترميز العلمي scientific notation	الدالة الأسيّة exponential function
الأس الصفري zero exponent	النمو الأسيّ exponential growth
	متتالية هندسية geometric sequence

مراجعة المفردات

اختر أفضل كلمة أو مصطلح لإكمال كل جملة بالشكل الأمثل.

1. $7xy^4$ مثال على _____.
2. _____ من 95,234 هي 10^5.
3. 2 هي _____ لـ 8.
4. يمكن تمديد قواعد العمليات باستخدام الأسس لتنطبق على التعابير التي بها _____ مثل $7^{\frac{2}{3}}$.
5. العدد المكتوب بـ _____ يكون بالصيغة $a \times 10^n$، حيث $1 \le a < 10$ و n عدد صحيح.
6. $f(x) = 3^x$ مثال على _____.
7. $a_1 = 4$ و $a_n = 3a_{n-1} - 12$، إذا كانت $n \ge 2$، هي _____ للمتتابعة ... 4, −8, −20, −32,.
8. $2^{3x-1} = 16$ مثال على _____.
9. معادلة _____ هي $y = C(1 - r)^t$.
10. إذا كانت $a^n = b$ للعدد الصحيح الموجب n، فإن a هي _____ في b.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

2-1 الدوال الأسيّة

مثّل كل دالة بيانيًا. جد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

42. $y = 2^x$

43. $y = 3^x + 1$

44. $y = 4^x + 2$

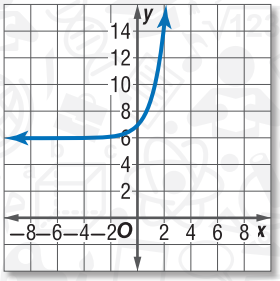
45. $y = 2^x - 3$

46. **علم الأحياء** يزداد عدد البكتيريا في طبق معملي وفقًا للنموذج $p = 550(2.7)^{0.008t}$، حيث t هي عدد الساعات و $t = 0$ تقابل الساعة 1:00 مساءً استخدم هذا النموذج لتقدير عدد البكتيريا في الطبق في الساعة 5:00 مساءً

مثال 1

مثّل بيانيًا $y = 3^x + 6$. جد نقطة التقاطع مع المحور الرأسيّ واذكر المجال والمدى.

x	$3^x + 6$	y
−3	$3^{-3} + 6$	6.04
−2	$3^{-2} + 6$	6.11
−1	$3^{-1} + 6$	6.33
0	$3^0 + 6$	7
1	$3^1 + 6$	9



نقطة التقاطع مع المحور الرأسيّ y هي $(0, 7)$. المجال هو كل الأعداد الحقيقية والمدى هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من 6.

2-2 تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات، ثُمّ اكتب معادلة للدالة التي تمثّل البيانات.

45.

x	0	1	2	3	4
y	0	3	12	27	48

46.

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	8	16

47.

x	0	1	2	3	4
y	0	-1	-4	-9	-16

مثال 2

حدّد النموذج الأفضل في وصف البيانات، ثُمّ اكتب معادلة للدالة التي تمثّل البيانات.

x	0	1	2	3	4
y	3	4	5	6	7

الخطوة 1

تمثّل البيانات دالة خطية.

الخطوة 2

الميل يساوي 1 والتقاطع مع المحور y هو 3، إذًا فالمعادلة هي $y = x + 3$.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2-3 النمو والاضمحلال (التضاؤل)

47. جد القيمة النهائية لمبلغ AED 2500 تم استثماره بنسبة مرابحة تبلغ 2% مركبة شهريًا لمدة 10 سنوات.

48. أجهزة الحاسوب يتعرض حاسوب علياء للإهلاك بمعدل 3% في السنة. اشترت الحاسوب مقابل AED 1200.

a. اكتب دالة لتمثيل هذا الموقف.

b. كم ستبلغ قيمة الحاسوب بعد 5 سنوات؟

مثال 3

جد القيمة النهائية لمبلغ AED 2000 تم استثماره بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 3% كل ثلاثة أشهر لمدة 8 سنوات.

معادلة المرابحة المركبة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$P = 2000$، $r = 0.03$، $n = 4$، و $t = 8$

$$= 2000\left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{4(8)}$$

استخدم حاسبة.

$$\approx \text{AED } 2540.22$$

2-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسيّة

جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

49. $-1, 1, -1, 1, \ldots$

50. $3, 9, 28, \ldots$

51. $256, 128, 64, \ldots$

اكتب معادلة للحد n في كل متتالية هندسية.

52. $-1, 1, -1, 1, \ldots$

53. $3, 9, 27, \ldots$

54. $256, 128, 64, \ldots$

55. الرياضة سقطت كرة سلة من ارتفاع 20 مترًا ثم ظلت ترتد إلى $\frac{1}{2}$ ارتفاعها بعد كل ارتداد. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل هذا الموقف.

مثال 4

جد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية الهندسية $2, 6, 18, \ldots$.

الخطوة 1 جد النسبة المشتركة. يبلغ كل عدد 3 أضعاف العدد السابق، إذًا $r = 3$.

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

$18 \times 3 = 54,\ 54 \times 3 = 162,\ 162 \times 3 = 486$

الحدود الثلاثة التالية هي 54 و 162 و 486.

مثال 5

اكتب معادلة الحد n للمتتالية الهندسية $-3, 12, -48, \ldots$.

النسبة المشتركة هي -4. إذًا $r = -4$.

قانون الحد n

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$a_1 = -3$ و $r = -4$

$$a_n = -3(-4)^{n-1}$$

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

2-5 الصيغ التكرارية

الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

56. $a_1 = 11,\ a_n = a_{n-1} - 4,\ n \geq 2$

57. $a_1 = 3,\ a_n = 2a_{n-1} + 6,\ n \geq 2$

اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية مما يلي.

58. 2, 7, 12, 17, ...

59. 32, 16, 8, 4, ...

60. 2, 5, 11, 23, ...

مثال 6

اكتب صيغة تكرارية للمتتالية ... 3, 1, −1, −3,.

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$1 - 3 = -2,\ -1 - 1 = -2,\ -3 - (-1) = -2$

هناك فرق مشترك يبلغ -2. المتتالية حسابية.

الخطوة 2 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

الصيغة التكرارية $a_n = a_{n-1} + d$

$d = -2$ $a_n = a_{n-1} + (-2)$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 3 و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية هي $a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} - 2,\ n \geq 2$.

2-6 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يلي.

12. $16^x = \frac{1}{64}$

13. $3^{4x} = 9^{3x+7}$

14. $64^{3n} = 8^{2n-3}$

15. $8^{3-3y} = 256^{4y}$

16. $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$

17. $27^{3x} \leq 9^{2x-1}$

18. **البكتيريا** بدأ عدد أحد أنواع البكتيريا بـ 5000 كائن بكتيري. وبعد 8 ساعات، بلغ عدد البكتيريا 28,000 في العينة.

a. اكتب دالة أسيّة يمكن استخدامها في تمثيل عدد البكتيريا بعد x من الساعات إذا كان عدد البكتيريا يتغير بالمعدل نفسه.

مثال 7

حُـلّ $4^{3x} = 32^{x-1}$ لإيجاد قيمة x.

$4^{3x} = 32^{x-1}$ المعادلة الأصلية

$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$ أعد كتابة المعادلة بحيث يكون للطرفين الأساس ذاته.

$2^{6x} = 2^{5x-5}$ قوة أسيّة لقوة أسيّة

$6x = 5x - 5$ خاصية التساوي في الأسس

$x = -5$ اطرح $5x$ من كل طرف.

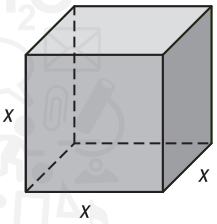
الحل يساوي -5.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

تدريب على الاختبار

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $(x^{2})(7x^{8})$
2. $(5a^{7}bc^{2})(-6a^{2}bc^{5})$
3. **الاختيار من متعدد** عبّر عن حجم الجسم الصلب بدالة أحادية الحد.



A x^{3} **C** $6x^{3}$

B $6x$ **D** x^{6}

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي 0.

4. $\frac{x^{6}y^{8}}{x^{2}}$
5. $\left(\frac{2a^{4}b^{3}}{c^{6}}\right)^{0}$
6. $\frac{2xy^{-7}}{8x}$

بسّط.

7. $\sqrt[3]{1000}$
8. $\sqrt[5]{3125}$
9. $1728^{\frac{1}{3}}$
10. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$
11. $27^{\frac{2}{3}}$
12. $10{,}000^{\frac{3}{4}}$
13. $27^{\frac{5}{3}}$
14. $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{3}{2}}$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

15. $12^{x} = 1728$
16. $7^{x-1} = 2401$
17. $9^{x-3} = 729$

عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.

18. 0.00021
19. 58,000

عبّر عن كل عدد بالصيغة القياسية.

20. 2.9×10^{-5}
21. 9.1×10^{6}

جد قيمة كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة. عبّر عن النتائج بالترميز العلمي.

22. $(2.5 \times 10^{3})(3 \times 10^{4})$
23. $\frac{8.8 \times 10^{2}}{4 \times 10^{-4}}$
24. **علم الفلك** يبلغ متوسط المسافة من كوكب عطارد إلى الشمس 57,910,000 km. عبّر عن هذه المسافة بالترميز العلمي.

مثّل كل دالة بيانيًا. جد المقطع من المحور الرأسيّ y، واذكر المجال والمدى.

25. $y = 2(5)^{x}$
26. $y = -3(11)^{x}$
27. $y = 3^{x} + 2$

جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

28. 2, −6, 18, ...
29. 1000, 500, 250, ...
30. 32, 8, 2, ...
31. **الاختيار من متعدد** استثمرت شيماء AED 500 في حساب بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 6.5% شهريًا. كم ستبلغ قيمة استثمار شيماء خلال 10 سنوات؟

F AED 600.00

G AED 938.57

H AED 956.09

J AED 957.02

32. **الاستثمارات** كان استثمار سها بمبلغ AED 3000 يخسر من قيمته بمعدل 3% كل عام. كم ستبلغ قيمة استثمارها خلال 6 سنوات؟

اكتب الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

33. $a_{1} = 18,\ a_{n} = a_{n-1} - 4,\ n \geq 2$
34. $a_{1} = -2,\ a_{n} = 4a_{n-1} + 5,\ n \geq 2$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الحاسبات العلمية وحاسبات التمثيل البياني أدوات قوية لحل المسائل.
هناك أوقات يمكن استخدام حاسبة فيها لإجراء الحسابات بشكل أسرع وأسهل، مثل الحسابات التي تتضمن أرقامًا كبيرة للغاية. إلا أن هناك أوقات من اللازم فيها استخدام حاسبة، مثل تقدير الأعداد غير النسبية.

إستراتيجيات استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الخطوة 1

تعرف على الوظائف المتعددة التي تقوم بها الحاسبة العلمية وحاسبة التمثيل البياني إلى جانب المواقف التي ينبغي استخدامها فيها:

- **الأسس** الترميز العلمي، الحسابات ذات الأعداد الكبيرة أو الصغيرة
- **π (Pi)** حل مسائل الدائرة، مثل المحيط والمساحة
- **الجذور التربيعية** المسافة على مستوى إحداثي، نظرية فيثاغورث
- **التمثيلات البيانية** تحليل ثنائيات البيانات في مخطط انتشار، تمثيل الدوال بيانيًا، إيجاد جذور المعادلات

الخطوة 2

استخدام الحاسبة العلمية أو حاسبة التمثيل البياني في حل المسألة.

- تذكر أن تعمل بكفاءة قدر الإمكان. قد يتم إجراء بعض الخطوات ذهنيًا أو باليد، بينما ينبغي استكمال خطوات أخرى باستخدام حاسبتك.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

تبلغ المسافة من الشمس إلى كوكب المشتري 7.786×10^{11} m تقريبًا. إذا كانت سرعة الضوء تبلغ 3×10^{8} m/s تقريبًا، فكم يستغرق الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري؟ قرّب إلى أقرب دقيقة.

A حوالي 43 min
B حوالي 51 min
C حوالي 1876 min
D حوالي 2595 min

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. حصلت على المسافة التقريبية بين الشمس وكوكب المشتري إلى جانب سرعة الضوء. كلا المقدارين مذكوران بترميز علمي. مطلوب منك أن تجد عدد الدقائق التي يستغرقها الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري. استخدم مسافة العلاقة = السرعة × الزمن لإيجاد المقدار.

$$d = r \times t$$

$$\frac{d}{r} = t$$

لإيجاد مقدار الزمن، اقسم المسافة على السرعة. لاحظ أن وحدات الزمن ستكون الثواني.

$$\frac{7.786 \times 10^{11}\ \text{m}}{3 \times 10^{8}\ \text{m/s}} = t \text{ ثانية}$$

استخدم حاسبة علمية للتوصل بسرعة إلى ناتج القسمة. في معظم الحاسبات العلمية، يُستخدم مفتاح EE لإدخال الأرقام بالترميز العلمي.

خطوات العملية على الحاسبة: (7.786 2nd [EE] 11) ÷ (3 2nd [EE] 8) ENTER

النتيجة هي 2595.33333333 ثانية. لتحويل هذا العدد إلى دقائق، استخدم حاسبتك لقسمة النتيجة على 60. يعطي هذا إجابة تبلغ حوالي 43.2555 دقيقة. الإجابة هي A.

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. منذ إنشاء موقع إلكتروني شهير على الإنترنت قبل 5 سنوات، تم بيع حوالي 2.504×10^{7} عنصر أو تداوله عليه. ما المتوسط اليومي لعدد العناصر التي يتم بيعها أو تداولها على مدار 5 سنوات؟

A حوالي 9640 عنصرًا في اليوم

B حوالي 13,720 عنصرًا في اليوم

C حوالي 1,025,000 عنصر في اليوم

D حوالي 5,008,000 عنصر في اليوم

2. أوجد قيمة $\sqrt{ab}$ إذا كانت $a = 121$ و $b = 23$.

F حوالي 5.26

G حوالي 9.90

H حوالي 12

J حوالي 52.75

3. يبلغ تعداد سكان الولايات المتحدة 3.034×10^{8} نسمة تقريبًا. تبلغ مساحة البلد $3.54\ \text{km}^2$ إلى $9.17\ \text{km}^2$ تقريبًا. ما متوسط *الكثافة السكانية* (عدد الأشخاص في الميل المربع) في الولايات المتحدة؟

A حوالي 136.3 شخص في km^2

B حوالي 30.2 شخص في km^2

C حوالي 94.3 شخص في km^2

D حوالي 33.1 شخص في km^2

4. تصنع غاية غطاء لطبلة الفرقة العسكرية. يبلغ قطر الطبلة 20 cm. ضع تقديرًا لمساحة سطح الطبلة الكبيرة.

F $31.41\ \text{cm}^2$

G $62.83\ \text{cm}^2$

H $78.54\ \text{cm}^2$

J $314.16\ \text{cm}^2$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

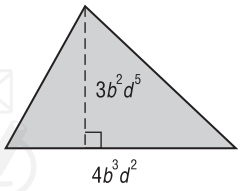
تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 2

اختيار من متعدد

اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. عبّر عن مساحة المثلث بالأدنى بدالة أحادية الحد.



A $12b^5d^7$

B $12b^6d^{10}$

C $6b^6d^{10}$

D $6b^5d^7$

2. حوّل التعبير التالي لأبسط صورة.

$$\left(\frac{2w^2z^5}{3y^4}\right)^3$$

F $\frac{2w^5z^8}{3y^7}$

G $\frac{8w^6z^{15}}{27y^{12}}$

H $\frac{8w^5z^8}{27y^7}$

J $\frac{2w^6z^{15}}{3y^{12}}$

3. ما معادلة المستقيم المتعامد على $y = \frac{3}{5}x - 3$؟

A $y = -\frac{5}{3}x + 2$

B $y = -\frac{3}{5}x + 2$

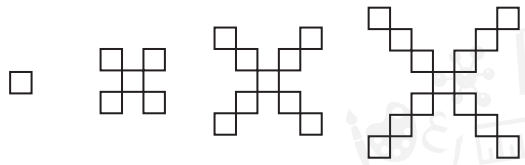
C $y = \frac{5}{3}x - 2$

D $y = \frac{3}{5}x - 2$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 استخدم قوانين الأسس لتحويل التعبير لأبسط صورة. تذكّر أنه لإيجاد القوة لقوة، اضرب الأسس.

4. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية التي تمثل عدد المربعات في كل شكل.



F $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} - 3, n \geq 1$

G $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1}, n \geq 2$

H $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2$

J $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} + 4, n \geq 2$

5. جد قيمة $(4.2 \times 10^6)(5.7 \times 10^8)$.

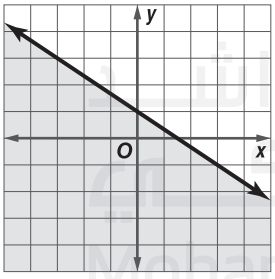
A 2.394×10^{15}

B 23.94×10^{14}

C 9.9×10^{14}

D 2.394×10^{48}

6. أي المتباينات تظهر في التمثيل البياني؟



F $y \leq -\frac{2}{3}x - 1$

G $y \leq -\frac{3}{4}x - 1$

H $y \leq -\frac{2}{3}x + 1$

J $y \leq -\frac{3}{4}x + 1$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

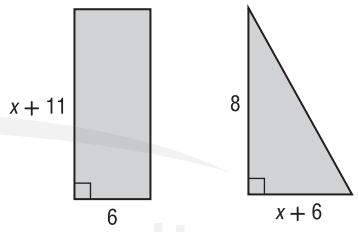
7. أنشأ سعيد موقع ويب لفريق الأولمبياد العلمي. يظهر العدد الإجمالي للزيارات التي تلقاها الموقع.

اليوم	إجمالي الزيارات	اليوم	إجمالي الزيارات
3	5	17	27
6	7	21	33
10	12	26	40
13	17	34	55

a. جد معادلة خط الانحدار.

b. توقع عدد الزيارات الإجمالي الذي سيكون الموقع الإلكتروني قد تلقاه بحلول اليوم 46.

8. جد قيمة x بحيث تكون الأشكال بمساحة واحدة.



9. ما حل نظام المعادلات التالي؟ اكتب الحل هنا.

$$\begin{cases} y = 6x - 1 \\ y = 6x + 4 \end{cases}$$

10. إجابة شبكية في مركز ألعاب عائلي، اشترت كل من عائلتي عامر وعبد الله رموز لعبة فيديو ورموز ملعب لضرب الكرة كما يظهر في الجدول.

الأسرة	عامر	عبد الله
عدد رموز لعبة الفيديو	25	30
عدد رموز ملعب ضرب الكرة	8	6
التكلفة الإجمالية	AED 26.50	AED 25.50

ما تكلفة رمز ملعب ضرب الكرة بالدرهم في مركز الألعاب العائلي؟

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

11. يعرض الجدول أدناه المسافات من الشمس إلى كوكب عطارد والأرض والمريخ وزحل. استخدم البيانات للإجابة عن كل سؤال.

الكوكب	المسافة من الشمس (بالكيلومتر)
عطارد	5.79×10^{7}
الأرض	1.50×10^{8}
المريخ	2.28×10^{8}
زحل	1.43×10^{9}

a. من بين الكواكب المدرجة، أيهم الأقرب إلى الشمس؟

b. كم ضعفًا يبلغ بُعد المريخ عن الشمس بالمقارنة بالأرض؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education