الوحدة 1

# دوال القوة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

## السابق

في **الوحدة السابقة**، حللت الدوال وتمثيلاتها البيانية وحددت هل كانت توجد دوال عكسية أم لا.

## الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:

- رسم نموذج لبيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.
- استخدام نظريتي الباقي والعامل.
- إيجاد الأصفار الحقيقية والمركبة للدوال كثيرة الحدود.
- تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بيانيًا.
- حل المتباينات كثيرة الحدود والنسبية.

## لماذا؟ ▲

**الهندسة المعمارية** تستخدم الدوال كثيرة الحدود غالبًا عند تصميم هيكل جديد أو بنائه. يستخدم المهندسون المعماريون الدوال لتحديد وزن المواد وقوتها وتحليل التكاليف وتقدير مدى تدهور المواد وتحديد القوى العاملة المطلوبة.

**قراءة مسبقة** اقرأ الدروس الواردة في الوحدة 1 قراءة جيدة. واستخدم ما تعرفه بالفعل عن الدوال من أجل وضع توقع للغرض المرجو من هذه الوحدة.

# الاستعداد للوحدة

**اكتشاف مدى الاستعداد** لديك خياران للتحقق من المهارات المطلوبة.

## 1 خيار الكتاب المدرسي

أجب على أسئلة التمرين السريع أدناه.

### تمرين سريع

**حلل فيما يلي الدوال كثيرة الحدود إلى العوامل.**

1. $x^2 + x - 20$
2. $x^2 + 5x - 24$
3. $2x^2 - 17x + 21$
4. $3x^2 - 5x - 12$
5. $12x^2 + 13x - 35$
6. $8x^2 - 42x + 27$

7. **الهندسة** يمكن تمثيل مساحة المربع بواسطة $16x^2 + 56x + 49$. حدد التعبير الذي يُمثل عرض المربع.

**استخدم جدولًا لتمثيل كل دالة فيما يلي.**

8. $f(x) = \frac{1}{2}x$
9. $f(x) = -2$
10. $f(x) = x^2 + 3$
11. $f(x) = -x^2 + x - 6$
12. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$
13. $f(x) = 3x^2 - x - 2$

14. **أجهزة التلفاز** تُقدر إحدى المجلات المهتمة بالأجهزة الإلكترونية أنه يمكن تمثيل إجمالي أجهزة تلفاز البلازما المبيعة في جميع أنحاء العالم بواسطة $f(t) = 2t + 0.5t^2$ حيث يمثل $t$ عدد الأيام بعد تاريخ الإصدار. مثّل هذه الدالة بيانيًا للمعادلة التالية $0 \le t \le 40$

**اكتب كل مجموعة من الأعداد باستخدام رمز المجموعة ورمز الفترة، إن أمكن.** (الدرس 1-1)

15. $x \le 6$
16. $\{-2, -1, 0, ...\}$
17. $-2 < x < 9$
18. $1 < x \le 4$
19. $x < -4$ أو $x > 5$
20. $x < -1$ أو $x \ge 7$

21. **العاب** في أحد متاجر الألعاب، تتراوح أسعار كل الأقراص المدمجة بين AED 9.99 و AED 19.99 أكتب الأسعار باستخدام رمز المجموعة ورمز الفترة.

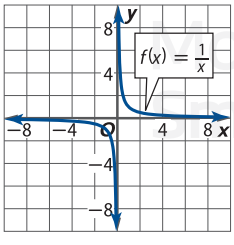
## مفردات جديدة

power function دالة القوة
monomial function الدالة أحادية الحد
radical function الدالة الجذرية
extraneous solutions الحلول الدخيلة
polynomial function الدالة كثيرة الحدود
leading coefficient معامل الحد الأكبر
leading-term test اختبار الحد الرئيس
quartic function دالة من الدرجة الرابعة
quadratic form الصورة التربيعية
repeated zero الصفر المتكرر
lower bound الحد الأدنى
upper bound الحد الأعلى
rational function الدالة النسبية
asymptotes خطوط التقارب
vertical asymptote خط التقارب الرأسي
horizontal asymptote خط التقارب الأفقي
polynomial inequality المتباينة كثيرة الحدود
sign chart مخطط الإشارات
rational inequality المتباينة النسبية

## مراجعة المفردات

**المترافقات المركبة (complex conjugates)** مجموعة ثنائية من الأعداد المركبة في الصورتين $a + bi$ و $a - bi$

**الدوال المقلوبة (reciprocal functions)** دوال في الصورة $f(x) = \frac{a}{x}$



# الدرس 1-1 دوال القوة والدوال الجذرية

**السابق**

- قمت بتحليل الدوال الرئيسة ومجموعاتها من التمثيل البياني. (الدرس 1-5)

**الحالي**

1. تمثيل دوال القوة بيانيًا وتحليلها.
2. تمثيل الدوال الجذرية بيانيًا وتحليلها.

**لماذا؟**

- تستخدم الجسور المعلقة لمد الجسور لمسافات طويلة من خلال تعليق السطح الرئيس للجسر باستخدام الكابلات الفولاذية. تمثل دالة قطر الكابل التي يمكن تمثيلها بدالة أسيّة مقدار الوزن الذي يمكن أن يتحمله الكابل الفولاذي.

**مفردات جديدة**

**دالة القوة**
power function
**الدالة أحادية الحد**
monomial function
**الدالة الجذرية**
radical function
**الحل الدخيل**
extraneous solution

## 1 دوال القوة

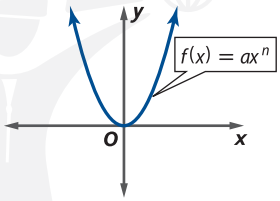
درست سابقًا العديد من الدوال الرئيسة التي يمكن تصنيفها كدوال قوة. **دالة القوة** هي أي دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^n$، حيث $a$ و $n$ عددان حقيقيان ثابتان غير الصفر.

ودالة القوة عبارة عن نوع من الدوال أحادية الحد أيضًا. **والدالة أحادية الحد** هي أي دالة يمكن كتابتها بصيغة $f(x) = a$ أو $f(x) = ax^n$، حيث $a$ و $n$ عددان حقيقيان ثابتان غير الصفر.

### المفهوم الأساسي الدوال أحادية الحد

لنفترض أن $f$ دالة قوة بحيث $f(x) = ax^n$، حيث $n$ عدد صحيح موجب.

**$n$ عدد زوجي، $a$ عدد موجب**




**المجال:** $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $[0, \infty)$

**التقاطع مع المحورين $x$ و $y$:** 0

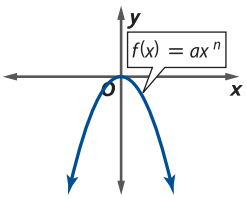
**الاتصال:** متصلة على $x \in \mathbb{R}$

**التناظر:** المحور الرأسي $y$ **القيمة الصغرى:** 0

**متناقصة:** $(-\infty, 0)$ **متزايدة:** $(0, \infty)$

**السلوك الطرفي:** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

**$n$ عدد زوجي، $a$ عدد سالب**




**المجال:** $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $(-\infty, 0]$

**التقاطع مع المحورين $x$ و $y$:** 0

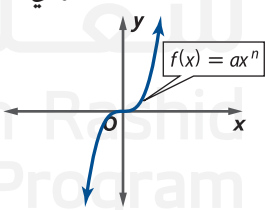
**الاتصال:** متصلة على $x \in \mathbb{R}$

**التناظر:** المحور الرأسي $y$ **القيمة العظمى:** 0

**متناقصة:** $(0, \infty)$ **متزايدة:** $(-\infty, 0)$

**السلوك الطرفي:** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

**$n$ عدد فردي، $a$ عدد موجب**




**المجال والمدى:** $(-\infty, \infty)$

**التقاطع مع المحورين $x$ و $y$:** 0

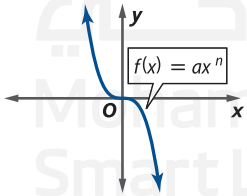
**الاتصال:** متصلة في $(-\infty, \infty)$

**التناظر:** نقطة الأصل

**القيم القصوى:** لا يوجد **تزايد:** $(-\infty, \infty)$

**السلوك الطرفي:** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

**$n$ عدد فردي، $a$ عدد سالب**




**المجال والمدى:** $(-\infty, \infty)$

**التقاطع مع المحورين $x$ و $y$:** 0

**الاتصال:** متصلة على $x \in \mathbb{R}$

**التناظر:** نقطة الأصل

**القيم القصوى:** لا يوجد **تناقص:** $(-\infty, \infty)$

**السلوك الطرفي:** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

تكون الدوال أحادية الحد ذات الدرجة الزوجية زوجية أيضًا إذا كان $f(-x) = f(x)$. وبالمثل، تكون الدوال أحادية الحد ذات الدرجة الفردية فردية أيضًا، أو $f(-x) = -f(x)$

**مراجعة المفردات**

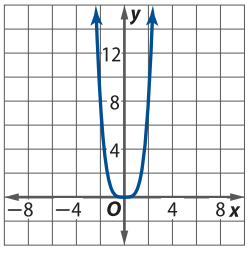
**درجة أحادية الحد (Degree of a Monomial)** هي مجموع أسس متغيرات الدالة أحادية الحد.

## مثال 1 تحليل الدوال أحادية الحد

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.**

جد قيمة الدالة لعدة قيم $x$ في مجالها. ثم استخدم منحنيًا سلسًا لتوصيل كل من هذه النقاط لإكمال التمثيل البياني.

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 40.5 | 8 | 0.5 | 0 | 0.5 | 8 | 40.5 |




المجال: $(-\infty, \infty)$ المدى: $[0, \infty)$

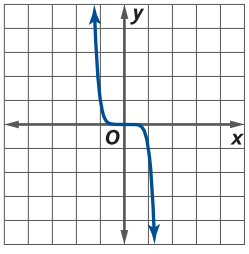
التقاطع حول المحور $y$ : 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

الإتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

تناقص: $(-\infty, 0)$ تزايد: $(0, \infty)$

b. $f(x) = -x^7$




| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,187 | 128 | 1 | 0 | −1 | −128 | −2,187 |

المجال: $(-\infty, \infty)$ المدى: $(-\infty, \infty)$

التناظر حول النقطة : $(0,0)$

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

الاتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

تناقص: $(-\infty, \infty)$

**تمرين موجّه**

1A. $f(x) = 3x^6$

1B. $f(x) = -\frac{2}{3}x^5$

**مراجعة المفردات**

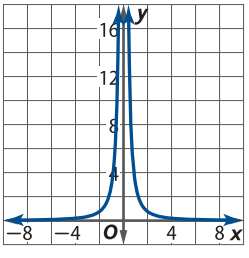
**دوال المقلوب (Reciprocal Functions)** تُكتَب الدوال المقلوبة بالصيغة $f(x) = \frac{a}{x}$

تذكّر أن $f(x) = \frac{1}{x}$ أو $x^{-1}$ غير معرفة عندما $x = 0$. وبالمثل، $f(x) = x^{-2}$ و $f(x) = x^{-3}$ ليس لهما تعريف عند $x = 0$ ونظرًا لأن دالة القوة يمكن أن تكون غير معرفة عندما تكون $n < 0$، فسوف تحتوي التمثيلات البيانية لهذه الدوال على انفصالات.

## مثال 2 الدوال ذات الأسس السالبة

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.**

a. $f(x) = 3x^{-2}$




| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0.\overline{3}$ | 0.75 | 3 | غير محدد | 3 | 0.75 | $0.\overline{3}$ |

المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المدى: $(0, \infty)$

**نقاط التقاطع، لا توجد**

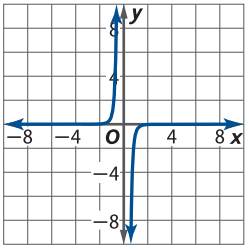
**السلوك الطرفي:** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = 0$

متزايدة: $(-\infty, 0)$؛ متناقصة: $(0, \infty)$

b. $f(x) = -\frac{3}{4}x^{-5}$

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.0031 | 0.0234 | 0.75 | غير محدد | −0.75 | −0.0234 | −0.0031 |




المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المدى: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

نقاط التقاطع، لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

الاتصال: انفصال لا نهائي عند $x = 0$

متزايدة: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

**تمرين موجّه**

2A. $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-4}$

2B. $f(x) = 4x^{-3}$

**مراجعة المفردات**

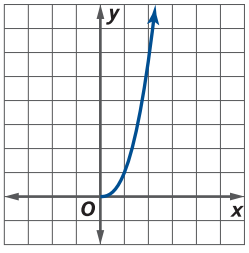
**الأسس النسبية (Rational Exponents)** هي أسس تُكتب على هيئة كسور في أبسط صورة. (الدرس 0-4)

تذكر أن $x^{\frac{1}{n}}$ تشير إلى الجذر النوني للعدد $x$، و $x^{\frac{p}{n}}$، حيث $\frac{p}{n}$ في أبسط صورة، تشير إلى الجذر النوني $n$ لـ $x^p$ بما أن $n$ عدد صحيح زوجي، إذن، يجب قصر المجال على القيم غير السالبة.

## مثال 3 الأسس النسبية

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.**

a. $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$




| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 5.657 | 15.588 | 32 | 55.902 | 88.182 |

المجال: $[0, \infty)$ المدى: $[0, \infty)$

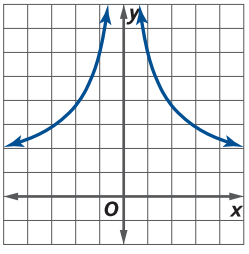
**تقاطع المحورين** $x$ و $y$: 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة في $[0, \infty)$

متزايدة: $(0, \infty)$

b. $f(x) = 6x^{-\frac{2}{3}}$




| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.884 | 3.780 | 6 | غير محدد | 6 | 3.780 | 2.884 |

**المجال:** $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المدى: $(0, \infty)$

نقاط التقاطع، لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = 0$

متزايدة: $(-\infty, 0)$؛ متناقصة: $(0, \infty)$

**تمرين موجّه**

3A. $f(x) = 2x^{\frac{3}{4}}$

3B. $f(x) = 10x^{\frac{5}{3}}$

## مثال 4 الانحدار الأسي

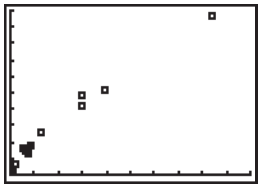
**علم الأحياء** **تمثل البيانات التالية معدل الأيض أثناء الراحة $R$ بالكيلو كالوري في اليوم الواحد للكتلة $m$ بالكيلوجرامات للعديد من الحيوانات.**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 0.3 | 0.4 | 0.7 | 0.8 | 0.85 | 2.4 | 2.6 | 5.5 | 6.4 | 6 |
| $R$ | 28 | 35 | 54 | 66 | 46 | 135 | 143 | 331 | 293 | 292 |
| $m$ | 7 | 7.9 | 8.41 | 8.5 | 13 | 29.3 | 29.8 | 39.5 | 83.6 | |
| $R$ | 265 | 327 | 346 | 363 | 520 | 956 | 839 | 1,036 | 1,948 | |

**المصدر:** *مجلة الجمعية الأمريكية للأنثروبولوجي*

**a. صمم مخطط انتشار للبيانات.**

يتضح أن مخطط انتشار يتشابه مع دالة الجذر التربيعي، وهي دالة أسيّة. لذلك، اختبر نموذج انحدار أسيًا.

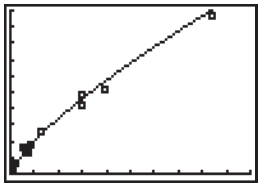


[0, 100] scl: 10 by [0, 2000] scl: 200

**b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قرّب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط.**

باستخدام أداة PwrReg على حاسبة التمثيل البياني وتقريب كل معامل إلى أقرب ألف ينتج $f(x) = 69.582x^{0.759}$. معامل الارتباط $r$ للبيانات، 0.995. يشير إلى أن الانحدار الأسي قد يُظهر البيانات بشكل دقيق.

يمكننا رسم الانحدار الكامل (الذي لم يتم تقريبه) من خلال إرساله إلى القائمة Y=. في القائمة Y= ، اختر معادلة الانحدار عن طريق إدخال VARS ، و الإحصاءات، و EQ. مثّل هذه الدالة بيانيًا ومخطط الانتشار في نفس نافذة العرض. ويبدو أن الدالة متناسبة مع البيانات جيدًا.



[0, 100] scl: 10 by [0, 2000] scl: 200

**c. استخدم المعادلة للتنبؤ بمعدل الأيض في وقت الراحة لحيوان يبلغ وزنه 60 كيلوجرامًا.**

استخدم ميزة CALC على الآلة الحاسبة لإيجاد $f(60)$. قيمة $f(60)$ تساوي 1,554 تقريبًا. إذًا، معدل الأيض في وقت الراحة لحيوان وزنه 60 كيلوجرامًا يساوي 1,554 كيلو كالوري تقريبًا.

### تمرين موجّه

4. **السيارات** يوضح الجدول مسافة الكبح مقدرة بالأقدام، في عدة سرعات تقدر بالميل في الساعة، لسيارة محددة تسير على طريق يابس ممهد جيدًا.

| السرعة | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المسافة | 4.2 | 16.7 | 37.6 | 66.9 | 104.5 | 150.5 | 204.9 |

**A.** صمم مخطط انتشار للبيانات.

**B.** حدد دالة أسيّة لتمثيل للبيانات.

**C.** تنبأ بمسافة الكبح لسيارة تسير بسرعة قدرها 80 كيلومترًا في الساعة.

### الربط بالحياة اليومية

السعر الحراري هو وحدة قياس الطاقة ويعادل مقدار الحرارة اللازم لرفع درجة حرارة كيلو جرام واحد من الماء بمقدار درجة مئوية واحدة. السعر الحراري الواحد يكافئ 4.1868 كيلوجول. تحتوي التفاحة المتوسطة على 60 سعرًا حراريًا.

**المصدر:** موسوعة الغذاء والتغذية

### نصيحة دراسية

**نموذج الانحدار** ستنتج الدالة كثيرة الحدود ذات العوامل التي تم تقريبها تقديرات مختلفة عن القيم المحسوبة باستخدام معادلة الانحدار التي لم يتم تقريبها. من الآن فصاعدًا، يمكنك افتراض أنه عندما يُطلب منك استخدام نموذج لتقدير قيمة، فإنك ستستخدم معادلة الانحدار التي لم يتم تقريبها.

## 2 الدوال الجذرية

تعبير ذو أسس نسبية يمكن كتابته بصيغة جذرية.

| صيغة أسيّة | | صيغة جذرية |
|---|---|---|
| $x^{\frac{p}{n}}$ | = | $\sqrt[n]{x^p}$ |

تمثل دوال القوة ذات الأسس النسبية القاعدة الأساسية للدوال الجذرية. **الدالة الجذرية** هي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$ ، حيث $n$ و $p$ عددان صحيحان موجبان أكبر من العدد 1 وليس لهما أي عوامل مشتركة. وفيما يلي بعض الأمثلة على الدوال الجذرية.

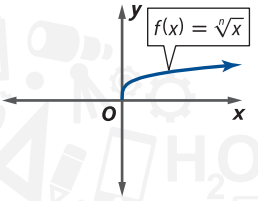
$f(x) = 3\sqrt{5x^3}$ $\qquad$ $f(x) = -5\sqrt[3]{x^4 + 3x^2 - 1}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt[4]{x + 12} + \frac{1}{2}x - 7$

ومن المهم أيضًا فهم خصائص التمثيل البياني للدوال الجذرية.

## المفهوم الأساسي الدوال الجذرية

لنفترض أن $f$ دالة جذرية $f(x) = \sqrt[n]{x}$ حيث $n$ عدد صحيح موجب.

**$n$ عدد زوجي**




**المجال والمدى:** $[0, \infty)$

**تقاطع المحورين $x$ و $y$:** 0

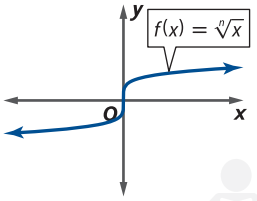
**الاتصال:** متصلة في $[0, \infty)$

**التناظر:** لا يوجد **متزايدة:** $(0, \infty)$

**القيم القصوى:** القيمة الصغرى المطلقة عند $(0, 0)$

**السلوك الطرفي:** $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

**$n$ عدد فردي**




**المجال والمدى:** $(-\infty, \infty)$

**تقاطع المحورين $x$ و $y$:** 0

**الاتصال:** متصلة في $(-\infty, \infty)$

**التناظر:** نقطة الأصل **متزايدة:** $(-\infty, \infty)$

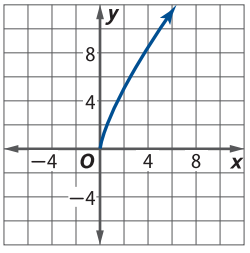
**القيم القصوى:** لا توجد

**السلوك الطرفي:** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

## مثال 5 التمثيل البياني للدوال الجذرية

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.**

a. $f(x) = 2\sqrt[4]{5x^3}$




| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 2.99 | 5.03 | 6.82 | 8.46 | 10 |

المجال والمدى: $[0, \infty)$

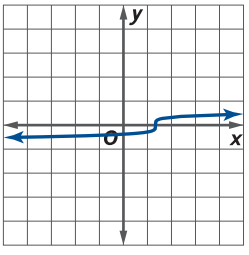
تقاطع المحورين $x$ و $y$: 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة في $[0, \infty)$

متزايدة: $(0, \infty)$

b. $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt[5]{6x - 8}$




| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -0.48 | -0.46 | -0.42 | -0.38 | -0.29 | 0.33 | 0.40 |

المجال والمدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحور الأفقي $x$: $\frac{4}{3}$ التقاطع مع المحور الرأسي $y$: حوالي $-0.38$

**السلوك الطرفي:** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

**الاتصال:** متصلة في $(-\infty, \infty)$

**متزايدة:** $(-\infty, \infty)$

**انتبه!**

**الدوال الجذرية** تذكر أنه إذا كان $n$ عددًا زوجيًا، فستكون هناك قيود على المجال والمدى.

### تمرين موجّه

**5A.** $f(x) = -\sqrt[3]{12x^2 - 5}$

**5B.** $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2x^3 - 16}$

كما هو الحال مع الدوال الجذرية، المعادلة الجذرية هي أي معادلة يكون فيها المتغير متضمنًا في المجذور. لحل معادلة جذرية، اعزل أولاً التعبير الجذري. ثم ارفع كل طرف من طرفي المعادلة إلى أُس يساوي دليل الجذر للتخلص من الجذر.

ينتج أحيانًا عن رفع كل طرف من طرفي المعادلة إلى أس **حلولاً دخيلة**، أو حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية. من المهم التحقق من أن الحلول ليست دخيلة.

## مثال 6 حل المعادلات الجذرية

**حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

**a.** $2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$

| | |
|---|---|
| $2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$ | المعادلة الأصلية |
| $2x + 2 = \sqrt{100 - 12x}$ | اعزل الجذر. |
| $4x^2 + 8x + 4 = 100 - 12x$ | قم بتربيع كل طرف من طرفي المعادلة للتخلص من الجذر. |
| $4x^2 + 20x - 96 = 0$ | اطرح 12x - 100 من كل طرف. |
| $4(x^2 + 5x - 24) = 0$ | حلل. |
| $4(x + 8)(x - 3) = 0$ | حلل. |
| $x - 3 = 0 \quad = \quad x + 8 = 0$ | خاصية الناتج الصفري |
| $x = 3 \qquad x = -8$ | حل. |

تحقق $x = 3$

$2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$

$6 \stackrel{?}{=} \sqrt{100 - 12(3)} - 2$

$6 \stackrel{?}{=} \sqrt{64} - 2$

$6 = 6$ ✔

تحقق $x = -8$

$2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$

$-16 \stackrel{?}{=} \sqrt{100 - 12(-8)} - 2$

$-16 \stackrel{?}{=} \sqrt{196} - 2$

$-16 \neq 12$ ✘

ثبت صحة أحد الحلول بينما الآخر لم تثبت صحته. إذًا، الحل هو 3.

**b.** $\sqrt[3]{(x - 5)^2} + 14 = 50$

| | |
|---|---|
| $\sqrt[3]{(x - 5)^2} + 14 = 50$ | المعادلة الأصلية |
| $\sqrt[3]{(x - 5)^2} = 36$ | اعزل الجذر. |
| $(x - 5)^2 = 46{,}656$ | ارفع طرفي المعادلة إلى الأس 3. (الدليل هو 3.) |
| $x - 5 = \pm 216$ | خذ الجذر التربيعي لكل طرف. |
| $x = 211$ أو $-221$ | اجمع 5 إلى كل طرف. |

التحقق من الحلين في المعادلة الأصلية يؤكد أنهما صحيحان.

**c.** $\sqrt{x - 2} = 5 - \sqrt{15 - x}$

| | |
|---|---|
| $\sqrt{x - 2} = 5 - \sqrt{15 - x}$ | المعادلة الأصلية |
| $x - 2 = 25 - 10\sqrt{15 - x} + (15 - x)$ | قم بتربيع كل طرف. |
| $2x - 42 = -10\sqrt{15 - x}$ | اعزل الجذر. |
| $4x^2 - 168x + 1764 = 100(15 - x)$ | قم بتربيع كل طرف. |
| $4x^2 - 168x + 1764 = 1500 - 100x$ | استخدم خاصية التوزيع |
| $4x^2 - 68x + 264 = 0$ | اجمع الحدود المتشابهة. |
| $4(x^2 - 17x + 66) = 0$ | حلل. |
| $4(x - 6)(x - 11) = 0$ | حلل. |
| $x - 11 = 0 \quad = \quad x - 6 = 0$ | خاصية الناتج الصفري |
| $x = 11 \qquad x = 6$ | حل. |

التحقق من الحلول في المعادلة الأصلية يؤكد أن الحلين صحيحان.

### تمرين موجّه

**6A.** $3x = 3 + \sqrt{18x - 18}$

**6B.** $\sqrt[3]{4x + 8} + 3 = 7$

**6C.** $\sqrt{x + 7} = 3 + \sqrt{2 - x}$

**نصيحة دراسية**

**العوامل المشتركة** تذكر أنه يمكنك في بعض الأحيان تحليل المضاعف المشترك قبل استخدام أي طريقة من طرق التحليل الأخرى.

**انتبه!**

**تربيع التعابير الجذرية** انتبه أكثر عند تربيع $5 - \sqrt{15 - x}$ ففي حين أنه يتشابه مع طريقة "فويل" باستخدام التعابير ذات الحدين، إلا أن هناك بعض الاختلافات بينهما. تأكد من تقدير كل الحدود.

## تمارين

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها.** (المثالان 1 و 2)

1. $f(x) = 5x^2$
2. $g(x) = 8x^5$
3. $h(x) = -x^3$
4. $f(x) = -4x^4$
5. $g(x) = \frac{1}{3}x^9$
6. $f(x) = \frac{5}{8}x^8$
7. $f(x) = -\frac{1}{2}x^7$
8. $g(x) = -\frac{1}{4}x^6$
9. $f(x) = 2x^{-4}$
10. $h(x) = -3x^{-7}$
11. $f(x) = -8x^{-5}$
12. $g(x) = 7x^{-2}$
13. $f(x) = -\frac{2}{5}x^{-9}$
14. $h(x) = \frac{1}{6}x^{-6}$
15. $h(x) = \frac{3}{4}x^{-3}$
16. $f(x) = -\frac{7}{10}x^{-8}$

17. **الهندسة** يتم إيجاد حجم الكرة باستخدام المعادلة $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$، حيث $r$ هو نصف القطر. (مثال 1)
   a. حدد مجال الدالة ومداها.
   b. مثّل الدالة بيانيًا.

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك النهائي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها.** (مثال 3)

18. $f(x) = 8x^{\frac{1}{4}}$
19. $f(x) = -6x^{\frac{1}{5}}$
20. $g(x) = -\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{3}}$
21. $f(x) = 10x^{-\frac{1}{6}}$
22. $g(x) = -3x^{\frac{5}{8}}$
23. $h(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{5}}$
24. $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$
25. $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$
26. $h(x) = 7x^{\frac{5}{3}}$
27. $h(x) = -4x^{\frac{7}{4}}$
28. $h(x) = -5x^{-\frac{3}{2}}$
29. $h(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{8}{5}}$

**أكمل كلًا من الخطوات التالية.**

a. **صمم مخطط انتشار للبيانات.**
b. **حدد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.**
c. **احسب قيمة كل نموذج عند $x = 30$.** (المثال 4)

30.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 22 |
| 3 | 85 |
| 4 | 190 |
| 5 | 370 |
| 6 | 650 |
| 7 | 1,000 |
| 8 | 1,500 |

31.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 32 |
| 3 | 360 |
| 4 | 2,000 |
| 5 | 7,800 |
| 6 | 25,000 |
| 7 | 60,000 |
| 8 | 130,000 |

32. **الغطس من المرتفعات** في رياضة الغطس من المرتفعات، يؤدي المتنافسون ثلاث غطسات من ارتفاع يبلغ 28 m. يمنح الحكام الغطاسين مجموعة نقاط تبدأ من 0 إلى 10 نقاط حسب درجة صعوبة الغطسة والقفزة والوضعيات والدخول في الماء. يوضح الجدول سرعة الغطاس في مسافات متعددة أثناء الغطس. (المثال 4)

| السرعة (m/s) | المسافة (m) |
|---|---|
| 8.85 | 4 |
| 12.52 | 8 |
| 15.34 | 12 |
| 17.71 | 16 |
| 19.80 | 20 |
| 21.69 | 24 |
| 23.43 | 28 |

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.
b. حدد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.
c. استخدم الدالة للتنبؤ بالسرعة التي سيدخل بها الغطاس إلى الماء بعد القفز من على ارتفاع يبلغ 30 m.

33. **الطقس** درجة حرارة تبريد الرياح هي درجة الحرارة الظاهرة التي نشعر بها على الجسم المكشوف مع أخذ تأثير الرياح في الاعتبار. يوضح الجدول درجة حرارة تبريد الرياح الناتجة عن انطلاق الرياح بسرعات متعددة عندما تكون درجة الحرارة الفعلية 10 °C (مثال 4)

| الهواء البارد (°C) | السرعة القصوى (km/h) |
|---|---|
| 9.02 | 5 |
| 7.8 | 10 |
| 7.03 | 15 |
| 6.45 | 20 |
| 5.98 | 25 |
| 5.58 | 30 |
| 5.24 | 35 |
| 4.94 | 40 |

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.
b. حدد دالة أسيّة لعمل نموذج للبيانات.
c. استخدم الدالة للتنبؤ بدرجة حرارة تبريد الرياح عندما تصل سرعة الهواء إلى 65 km/h.

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها.** (المثال 5)

34. $f(x) = 3\sqrt{6 + 3x}$
35. $g(x) = -2\sqrt[5]{1024 + 8x}$
36. $f(x) = -\frac{3}{8}\sqrt[6]{16x + 48} - 3$
37. $h(x) = 4 + \sqrt{7x - 12}$
38. $g(x) = \sqrt{(1 - 4x)^3} - 16$
39. $f(x) = -\sqrt[3]{(25x - 7)^2} - 49$
40. $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{27 - 2x} - 8$
41. $g(x) = \sqrt{22 - x} - \sqrt{3x - 3}$

42. **ميكانيكا الموائع** يمكن تمثيل سرعة تدفق المياه عبر خرطوم له فوهة باستخدام $V(P) = 12.1\sqrt{P}$، حيث $V$ تمثل السرعة بالقدم في الثانية و $P$ تمثل قوة الضغط بالرطل لكل بوصة مربعة. (المثال 5)
   a. مثّل بيانيًا السرعة عبر فوهة الخرطوم في صورة دالة ضغط.
   b. وضح المجال والمدى والسلوك الطرفي واتصال الدالة وحدد ما إذا كان تزايدًا أم تناقصًا.

43. **العلوم الزراعية** يُقدر صافي الطاقة $NE_m$ اللازمة للحفاظ على وزن جسم الماشية، بالميجا كالوري في اليوم، بهذه القاعدة $NE_m = 0.077\sqrt[4]{m^3}$ ، حيث $m$ تمثل كتلة وزن الحيوان بالكيلو جرام. وكل ميجا كالوري واحد يعادل مليون سعر حراري. (المثال 6)

a. جد صافي الطاقة اللازمة في اليوم الواحد للحفاظ على وزن ثور يصل إلى 400 كيلوجرام.

b. إذا تم توفير 0.96 ميجا كالوري من الطاقة لكل 1 kg من الحبوب الكاملة، فما مقدار الحبوب التي يحتاجها ثور وزنه 400 kg يوميًا للحفاظ على وزن الجسم؟

**حُلّ كل من المعادلات التالية.** (مثال 6)

44. $4 = \sqrt{-6-2x} + \sqrt{31-3x}$

45. $0.5x = \sqrt{4-3x} + 2$

46. $-3 = \sqrt{22-x} - \sqrt{3x-3}$

47. $\sqrt{(2x-5)^3} - 10 = 17$

48. $\sqrt[4]{(4x+164)^3} + 36 = 100$

49. $x = \sqrt{2x-4} + 2$

50. $7 + \sqrt{(-36-5x)^5} = 250$

51. $x = 5 + \sqrt{x+1}$

52. $\sqrt{6x-11} + 4 = \sqrt{12x+1}$

53. $\sqrt{4x-40} = -20$

54. $\sqrt{x+2} - 1 = \sqrt{-2-2x}$

55. $7 + \sqrt[5]{1054-3x} = 11$

**حدد ما إذا كانت كل دالة أحادية الحد بشرط أن يكون $a$ و $b$ عددين صحيحين موجبين. اشرح استنتاجك.**

56. $y = \frac{5}{b}x^{4a}$

57. $G(x) = -2ax^4$

58. $F(b) = 3ab^{5x}$

59. $y = \frac{7}{3}t^{ab}$

60. $H(t) = \frac{1}{ab}t^{\frac{4b}{2}}$

61. $y = 4abx^{-2}$

62. **علم الكيمياء** يمكن استخدام الدالة $r = R_0(A)^{\frac{1}{3}}$ لتقريب نصف القطر النووي للعنصر بناءً على كتلته الجزيئية، حيث تمثل $r$ طول نصف القطر بالمتر و $R_0$ ثابت (حوالي $1.2 \times 10^{-15}$ m)، و $A$ تمثل الكتلة الجزيئية.

| العنصر | الكتلة الجزيئية |
|---|---|
| الكربون (C) | 12.0 |
| الهيليوم (H) | 4.0 |
| اليود (I) | 126.9 |
| الرصاص (Pb) | 207.2 |
| الصوديوم (Na) | ؟ |
| الكبريت (S) | 32.1 |

a. إذا كان نصف القطر النووي لعنصر الصوديوم يبلغ حوالي $3.412 \times 10^{-15}$ m، فما كتلته الجزيئية؟

b. نصف القطر التقريبي للعنصر يساوي $6.030 \times 10^{-15}$ m. عرّف العنصر.

c. نسبة الكتلة الجزيئية لعنصرين هي 27:8. فما نسبة أنصاف القطر النووي؟

**حُلّ كل من المتباينات فيما يلي.**

63. $\sqrt[5]{1040+8x} \geq 4$

64. $\sqrt[13]{41-7x} \geq -1$

65. $(1-4x)^{\frac{3}{2}} \geq 125$

66. $\sqrt{6+3x} \leq 9$

67. $(19-4x)^{\frac{5}{3}} - 12 \leq -13$

68. $(2x-68)^{\frac{2}{3}} \geq 64$

69. **الكيمياء** ينص قانون بويل على أن ضغط الغاز، عند درجة حرارة ثابتة، يتناسب عكسيًا مع حجمه. تم عرض نتائج التجربة التي أجريت لاستكشاف قانون بويل.

| الضغط (ضغط جوي) | الحجم (L) |
|---|---|
| 3.65 | 1.0 |
| 2.41 | 1.5 |
| 1.79 | 2.0 |
| 1.46 | 2.5 |
| 1.21 | 3.0 |
| 1.02 | 3.5 |
| 0.92 | 4.0 |

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

b. حدد دالة أسيّة لتمثيل الضغط $P$ كدالة حجم $v$.

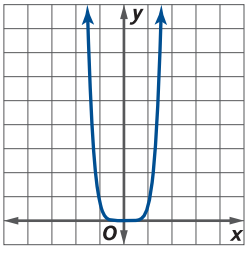
c. بناءً على المعلومات الواردة في عبارة المسألة، هل الدالة التي حددتها في الجزء b منطقية؟ اشرح.

d. استخدم النموذج للتنبؤ بضغط الغاز إذا كان حجمه 3.25 L.

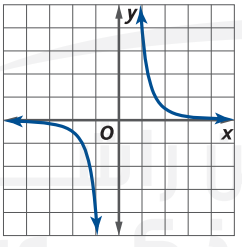
e. استخدم النموذج للتنبؤ بضغط الغاز إذا كان حجمه 6 L.

**طابق التمثيل البياني بالدالة المناسبة، دون استخدام الآلة الحاسبة.**

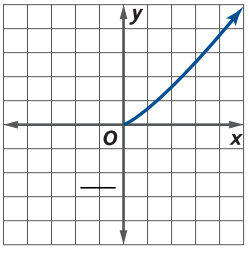
70.



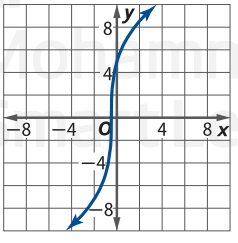

71.




72.




73.




a. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3x^5}$

b. $g(x) = \frac{2}{3}x^6$

c. $h(x) = 4x^{-3}$

d. $p(x) = 5\sqrt[3]{2x+1}$

74. **الكهرباء** يمكن حساب الجهد الذي يستهلكه أي جهاز كهربي، مثل مشغل DVD، باستخدام $V = \sqrt{PR}$ ، حيث $V$ تمثل الجهد ويقاس بالفولت، $P$ تمثل القدرة الكهربائية وتقاس بالوات، و $R$ تمثل المقاومة وتقاس بالأوم. يمكن استخدام المعادلة $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$ لحساب التيار، حيث $I$ تمثل التيار بالأمبير.

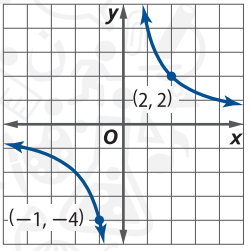
a. إذا كان المصباح يستهلك 120 فولت ولديه مقاومة مقدارها 11 أوم، فما مقدار الطاقة التي يستهلكها المصباح؟

b. إذا كان مشغل DVD يعمل بتيار مقداره 10 أمبيرات ويستهلك من الطاقة 1,200 وات، فما مقدار مقاومة مشغل DVD؟

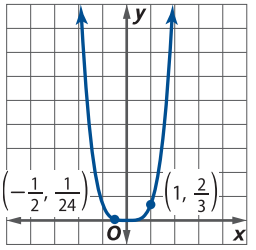
c. يعبر قانون أوم عن الجهد الكهربي بدلالة شدة التيار والمقاومة. استخدم المعادلة المعطاة أعلاه لكتابة قانون أوم باستخدام الجهد والمقاومة وشدة التيار.

**استخدم النقاط المذكورة لتحديد دالة القوة الموضحة بالتمثيل البياني.**

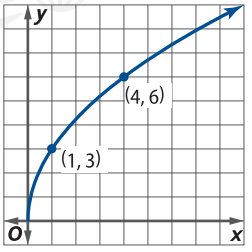
75.



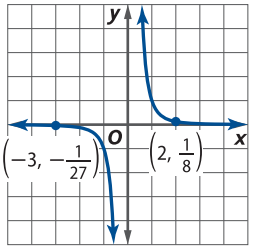

76.



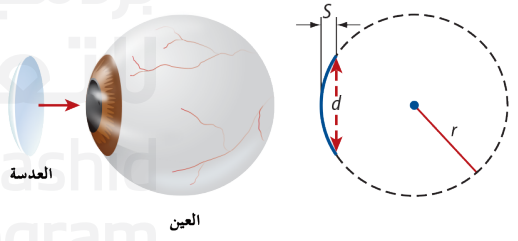

77.




78.




79. **البصريات** تتيح العدسة اللاصقة ذات العمق المناسب الملاءمة الجيدة ونفاذ الأكسجين. يمكن حساب عمق العدسة باستخدام المعادلة $S = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$، حيث $S$ يمثل العمق و $r$ يمثل نصف قطر التكور، و $d$ يمثل القطر، وجميع الوحدات بالملليمتر.




a. إذا كان عمق العدسة اللاصقة 1.15 mm ونصف قطر التكور 7.50 ميلليمترات، فما قطر العدسة اللاصقة؟

b. إذا زاد عمق العدسة اللاصقة بمقدار 0.1 mm وقطر العدسة يساوي 8.2 mm، فما نصف قطر التكور المطلوب؟

c. إذا كان نصف قطر التكور يبقى ثابتًا، فهل يزيد عمق العدسة اللاصقة أم ينقص إذا زاد القطر؟

80. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تبحث في متوسط معدلات التغير لدوال القوة.

a. **التمثيل البياني** بالنسبة إلى دوال القوة التي تُكتب بالصيغة $f(x) = x^n$، مثّل بيانيًا دالة لقيمتي $n$ حيث إن $n = 1$ و $0 < n < 1$، وقيمتي $n$ حيث إن $n > 1$

b. **العرض الجدولي** انسخ الجدول وأكمله، باستخدام تمثيلات بيانية من الجزء **a** لتحليل متوسط معدلات التغير للدوال حيث $x$ تقترب من اللانهاية.
صف هذا المعدل بأنه *متزايد*، أو *ثابت*، أو *متناقص*.

| $n$ | $f(x)$ | متوسط معدل التغيير حيث $x \to \infty$ |
|---|---|---|
| $0 < n < 1$ | | |
| | | |
| $n = 1$ | | |
| $n > 1$ | | |
| | | |

c. **العرض الكلامي** ضع فرضية حول متوسط معدل التغير لدالة القوة حيث $x$ تقترب من اللانهاية في الفترات $0 < n < 1$ و $n = 1$ و $n > 1$

## مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

81. **تحدٍ** وضح أن $\sqrt{\frac{8^n \cdot 2^7}{4^{-n}}} = 2^{2n+3}\sqrt{2^{n+1}}$

82. **الاستنتاج** افرض أن $y = 2^x$

a. صف قيمة $y$ إذا كان $x < 0$

b. صف قيمة $y$ إذا كان $0 < x < 1$

c. صف قيمة $y$ إذا كان $x > 1$

d. اكتب فرضية حول العلاقة بين قيمة الأساس وقيمة الأس إذا كان الأس أكبر من أو أصغر من 1. برر إجابتك.

83. **ما قبل الكتابة** مشروعك الرئيس هو أن تشرح لطالب في السنة الأولى من المرحلة الثانوية أربع جلسات حول دوال القوة والدوال الجذرية. ضع خطة للكتابة تتناول فيها الهدف والقارئ والفكرة الرئيسة والتسلسل المنطقي والإطار الزمني لإكمال العمل.

84. **الاستنتاج** بافتراض أن $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$، حيث $a$ و $b$ عددان صحيحان ليس لهما عامل مشترك، حدد ما إذا كانت كل عبارة *صواب* أم *خطأ*. اشرح.

a. بما أن قيمة $b$ زوجية وقيمة $a$ فردية، إذن، فالدالة غير معرفة بالنسبة إلى $x < 0$.

b. بما أن قيمة $a$ زوجية وقيمة $b$ فردية، إذن، فالدالة غير معرفة بالنسبة إلى $x < 0$.

c. بما أن قيمة $a$ تساوي 1، إذن، فالدالة معرّفة لجميع $x$.

85. **الاستنتاج** ضع في اعتبارك أن $f(x) = x^{\frac{1}{n}} + 5$. كيف تتوقع أن يتغير التمثيل البياني للدالة بزيادة $n$ إذا كان $n$ عددًا فرديًا وأكبر من أو يساوي 3؟

86. **الكتابة في الرياضيات** استخدم الكلمات والتمثيلات البيانية والجداول والمعادلات لتوضيح العلاقة بين دوال القوة والدوال الجذرية.

## مراجعة شاملة

**87.** **الأمور المالية** إذا قمت بإيداع مبلغ قدره AED 1,000 بمعدل فائدة سنوية مركبة $r$، إذًا، يُحسب رصيد الحساب بعد 3 أعوام بالمعادلة $B(r) = 1000(1 + r)^3$، حيث تُكتب $r$ في صورة كسر عشري.

**a.** جد معدل لمعدل الفائدة $r$ اللازمة لتحقيق رصيد $B$ في الحساب بعد 3 أعوام.

**b.** ما معدل الفائدة الذي يحقق رصيد AED 1,100 بعد 3 أعوام؟

**جد $(f \cdot g)(x)$، $(f - g)(x)$، $(f + g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$ و $g(x)$. حدد مجال كل دالة جديدة.**

**88.** $f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = x + 9$

**89.** $f(x) = \frac{x}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 1$

**90.** $f(x) = \frac{3}{x-7}$
$g(x) = x^2 + 5x$

**استخدم التمثيل البياني $f(x)$ لتمثيل $|f(x)| = g(x)$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًا.**

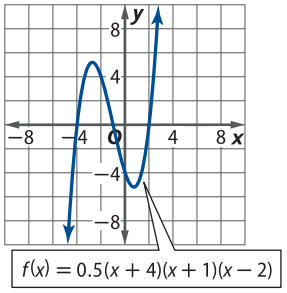
**91.** $f(x) = -4x + 2$

**92.** $f(x) = \sqrt{x+3} - 6$

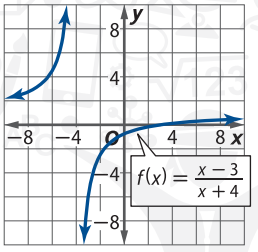
**93.** $f(x) = x^2 - 3x - 10$

**استخدام التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات لأقرب 0.5 وحدة في الدالة المتزايدة أو المتناقصة أو الثابتة. ادعم إجابتك بالأرقام.**

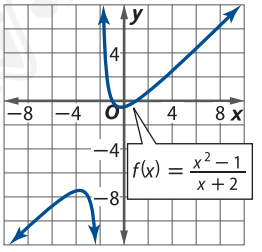
**94.**




**95.**




**96.**




**بسّط.**

**97.** $\dfrac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{2}i}$

**98.** $\dfrac{2 - \sqrt{2}i}{3 + \sqrt{6}i}$

**99.** $\dfrac{(1 + i)^2}{(-3 + 2i)^2}$

## مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

**100. اختبارا SAT/ACT** إذا كان $m$ و $n$ عددين موجبين، فأي مما يلي يكافئ $\dfrac{2m\sqrt{18n}}{m\sqrt{2}}$؟

A $3m\sqrt{n}$
B $6m\sqrt{n}$
C $4\sqrt{n}$
D $6\sqrt{n}$
E $8\sqrt{n}$

**101. مراجعة** إذا كانت $f(x, y) = x^2y^3$ و $f(a, b) = 10$. فما قيمة $f(2a \cdot 2b)$؟

F 50
G 100
H 160
J 320
K 640

**102. مراجعة** يختلف عدد الدقائق $m$ الذي يستغرقه $c$ من الأطفال لتناول $p$ قطع من البيتزا طرديًا حسب عدد قطع البيتزا وعكسيًا حسب عدد الأطفال. إذا كان 5 أطفال يستغرقون 30 دقيقة لتناول 10 قطع من البيتزا، فكم عدد الدقائق التي يستغرقها 15 طفلًا لتناول 50 قطعة من البيتزا؟

A 30
B 40
C 50
D 60

**103.** بما أن $\sqrt[3]{5m + 2} = 3$، إذًا، $m =$؟

F 3
G 4
H 5
J 6

الاستكشاف 1-2

# مختبر تقنية التمثيل البياني
# سلوك التمثيلات البيانية

**الهدف:**

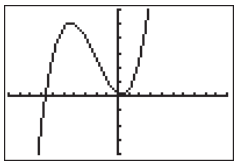
- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا وتحليل سلوكها.

حلّلت السلوك الطرفي للدوال من خلال إنشاء جدول قيم وتمثيله بيانيًا. فيما يتعلق *بالدالة كثيرة الحدود*، يمكن تحديد سلوك التمثيل البياني من خلال تحليل حدود معينة من الدالة.

## النشاط التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود

**ارسم كل تمثيل بياني وحدد السلوك الطرفي للدالة.**

a. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x + 2$



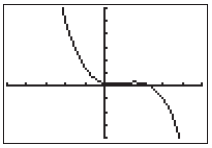
-10, 10] scl: 1 by [-40, 60] scl: 10

استخدم جدول القيم لرسم التمثيل البياني.

| $x$ | −10 | −5 | −2 | 0 | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −358 | 47 | 26 | 2 | 26 | 257 | 1,562 |

في التمثيل البياني لـ $f(x)$، يتضح أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

b. $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 4x + 2$

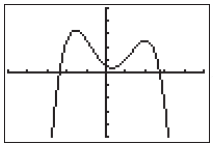


[-5, 5] scl: 1 by [-40, 60] scl: 10

| $x$ | −8 | −5 | −2 | 0 | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 1,442 | 422 | 50 | 2 | 2 | −118 | −670 |

في التمثيل البياني لـ $g(x)$، يتضح أن $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$

c. $h(x) = -x^4 + x^3 + 6x^2 - 4x + 2$



[-5, 5] scl: 1 by [-20, 20] scl: 4

| $x$ | −8 | −5 | −2 | 0 | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | −4,190 | −578 | 10 | 2 | 10 | −368 | −3,230 |

في التمثيل البياني لـ $h(x)$، يتضح أن $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$

**نصيحة دراسية**

**جدول القيم** تأكد من استخدام نقاط كافية للحصول على الشكل الإجمالي للتمثيل البياني.

## حلل النتائج

1. انظر إلى حدود كل دالة أعلاه. ما الاختلافات التي تلاحظها؟
2. ما مدى تأثير هذه الاختلافات على السلوك الطرفي للرسم البياني لكل دالة؟
3. ضع نمطًا لكل نوع من أنواع السلوك الطرفي المحتمل للدالة كثيرة الحدود.
4. اعرض مثالاً للدالة كثيرة الحدود بتمثيل بياني يقترب من اللانهاية الموجبة عندما تقترب $x$ من اللانهاية الموجبة واللانهاية السالبة.

## تمارين

**صف السلوك الطرفي لكل دالة دون إنشاء جدول قيم أو تصميم تمثيل بياني.**

5. $f(x) = -2x^3 + 4x$
6. $f(x) = 5x^4 + 3$
7. $f(x) = -x^5 + 2x - 4$
8. $g(x) = 6x^6 - 2x^2 + 10x$
9. $g(x) = 3x - 4x^4$
10. $h(x) = 6x^2 - 3x^3 - 2x^6$

# الدرس 1-2 الدوال كثيرة الحدود

**السابق**

- لقد قمت بتحليل التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال.

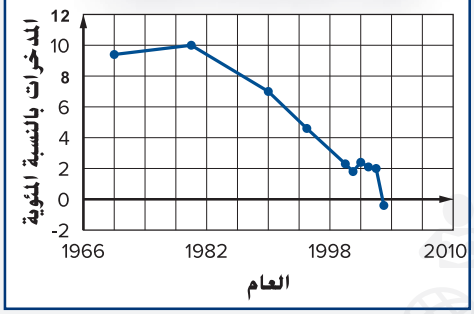
**الحالي**

1. تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.
2. تمثيل بيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

**لماذا؟**

- يوضح التمثيل البياني باستخدام مخطط التشتت إجمالي المدخرات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية. يمكن في كثير من الأحيان تمثيل بيانات القيم القصوى النسبية المتعددة بشكل أفضل باستخدام الدالة كثيرة الحدود.

**المدخرات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح**




## مفردات جديدة

الدالة كثيرة الحدود
polynomial function
دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n$
polynomial function of degree $n$
معامل الحد الرئيس
leading coefficient
اختبار الحد الرئيس
leading-term test
دالة من الدرجة الرابعة
quartic function
نقطة دوران
turning point
صيغة تربيعية
quadratic form
صفر متكرر
repeated zero
التكرار multiplicity

## 1 التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود

في الدرس 1-1، تعلمت الخصائص الأساسية للدوال أحادية الحد. الدوال أحادية الحد هي أكثر دالة أساسية في الدوال كثيرة الحدود. ويشكل إيجاد قيم المجموع والفرق للدوال أحادية الحد أنواعًا أخرى من **الدوال كثيرة الحدود**.

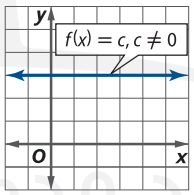
لنفرض أن $n$ عدد صحيح غير سالب وأن $a_n$، $a_{n-1}$، $a2$، ...، $a_1$، $a_0$ أعداد حقيقية حيث $a_n \neq 0$. إذًا الدالة التي تمثلها الصيغة التالية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

تُسمى **دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n$**. يُعد **معامل الحد الرئيس** في الدالة كثيرة الحدود معامل المتغير ذا الأس الأكبر. معامل الحد الرئيس للدالة $f(x)$ هو $a_n$

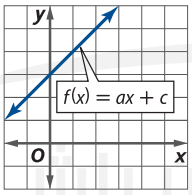
أنت بالفعل على دراية بالدوال كثيرة الحدود التالية.

**الدوال الثابتة**



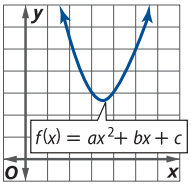

الدرجة: 0

**الدوال الخطية**




الدرجة: 1

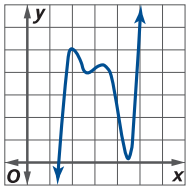
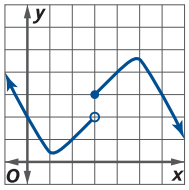
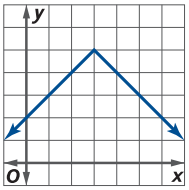
**الدوال التربيعية**




الدرجة: 2

الدالة الصفرية هي دالة ثابتة بدون درجة. وتوضح التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود خصائص معينة.

**التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود**

| مثال | أمثلة خارجة عن التعريف |
|---|---|
|  |   |
| الدوال كثيرة الحدود محددة ومتصلة لجميع الأعداد الحقيقية وبها منحنيات سلسة دورانية. | لا يحتوي التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود على فواصل أو فراغات أو فجوات أو زوايا حادة. |

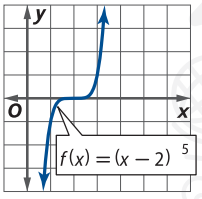
تذكّر أن التمثيل البياني للدوال أحادية الحد غير الثابتة من الدرجة الزوجية يشبه التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$. في حين يشبه التمثيل البياني للدوال أحادية الحد من الدرجة الفردية التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3$ ويمكنك استخدام الأشكال والخصائص الأساسية للدوال أحادية الحد من الدرجة الزوجية والفردية وما تعلمته عن عمليات التحويل من أجل التحويل إلى التمثيل البياني للدوال أحادية الحد.

## مثال 1 التحويلات البيانية للدوال أحادية الحد

**ارسم تمثيلاً بيانيًا لكل دالة فيما يلي.**

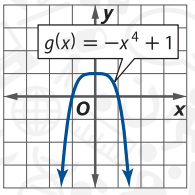
**a.** $f(x) = (x - 2)^5$

بما أن هذه الدالة من الدرجة الفردية، إذًا يشبه تمثيلها البياني التمثيل البياني للدالة $y = x^3$ التمثيل البياني للدالة $f(x) = (x - 2)^5$ و هو التمثيل البياني للدالة $y = x^5$ بعد إزاحتها لليمين بمقدار وحدتين.




**b.** $g(x) = -x^4 + 1$

بما أن هذه الدالة من الدرجة الزوجية، إذًا يشبه تمثيلها البياني التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ ويعد التمثيل البياني للدالة $g(x) = -x^4 + 1$ و هو التمثيل البياني للدالة $y = x^4$ المنعكسة في المحور الأفقي $x$ بعد إزاحتها لأعلى بمقدار وحدة واحدة.




**تمرين موجّه**

**1A.** $f(x) = 4 - x^3$

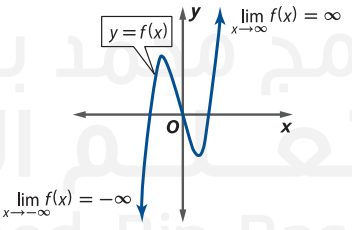
**1B.** $g(x) = (x + 7)^4$

تعلمت أن السلوك الطرفي للدالة يوضح كيف يكون سلوك الدالة أو كيف تتغير رأسيًا أو أفقيًا عند أي طرف في التمثيل البياني لها. بما أن $x \to -\infty$ و $x \to \infty$، إذًا السلوك الطرفي لأي دالة كثيرة الحدود يحدده الحد الرئيس لها. يستخدم **اختبار الحد الرئيس** قيمة الدرجة ومعامل هذا الحد لتحديد السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود.

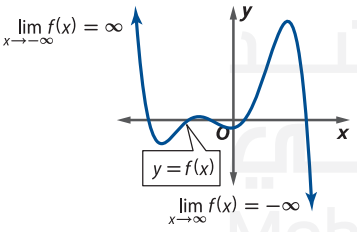
## المفهوم الأساسي اختبار الحد الرئيس للسلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود

يمكن وصف السلوك الطرفي لأي دالة كثيرة حدود غير ثابتة $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ بإحدى الطرق الأربع التالية، كما هو محدد بالدرجة $n$ للدالة كثيرة الحدود ومعامل الحد الرئيس لها $a_n$.

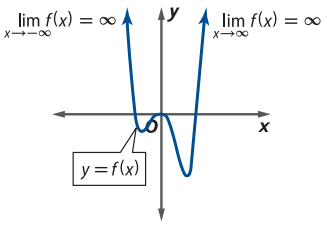
**$n$ عدد فردي، $a_n$ عدد موجب**



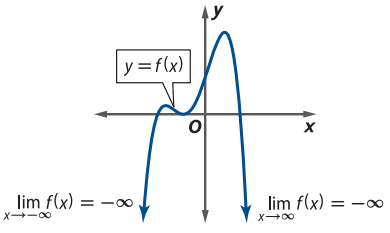

**$n$ عدد فردي، $a_n$ عدد سالب**




**$n$ عدد زوجي، $a_n$ عدد موجب**



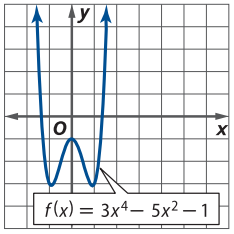

**$n$ عدد زوجي، $a_n$ عدد سالب**



## مثال 2 تطبيق اختبار الحد الرئيس

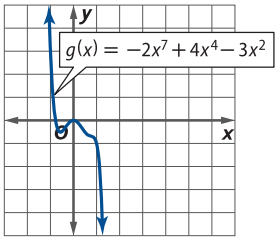
**وضّح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس.**

**a.** $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$



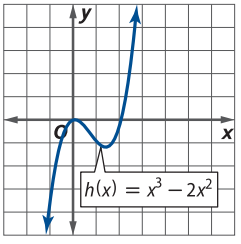

الدالة من الدرجة 4 ومعامل الحد الرئيس يساوي 3. بما أن الدرجة زوجية ومعامل الحد الرئيس موجب، إذًا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

**b.** $g(x) = -3x^2 - 2x^7 + 4x^4$




اكتب بصيغة قياسية $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 3x^2$ والدالة هنا من الدرجة 7 ومعامل الحد الرئيس يساوي $-2$. بما أن الدرجة فردية ومعامل الحد الرئيس سالب، إذًا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

**c.** $h(x) = x^3 - 2x^2$




الدالة من الدرجة 3 ومعامل الحد الرئيس يساوي 1. بما أن الدرجة فردية ومعامل الحد الرئيس موجب، إذًا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

**تمرين موجّه**

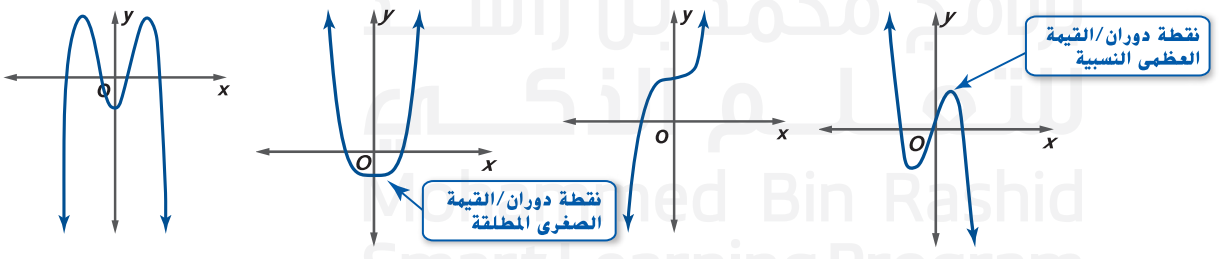
**2A.** $g(x) = 4x^5 - 8x^3 + 20$

**2B.** $h(x) = -2x^6 + 11x^4 + 2x^2$

**انتبه!**

**الصيغة القياسية** ليس بالضرورة أن يكون الحد الرئيس للدالة كثيرة الحدود هو الحد الأول فيها. ومع ذلك، يكون الحد الرئيس هو الحد الأول *دائمًا* في الدالة كثيرة الحدود عند كتابة الدالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية. تذكّر أن الدالة كثيرة الحدود تُكتب بالصيغة القياسية إذا كانت حدودها مكتوبة بالترتيب التنازلي للأسس.

فكّر في الأشكال التالية لمجموعة صغيرة من الدوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة النموذجية أو الدوال التكعيبية أو الدوال كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة أو **دالة من الدرجة الرابعة** الموضحة.




**الدوال التكعيبية النموذجية** **دالة من الدرجة الرابعة النموذجية**

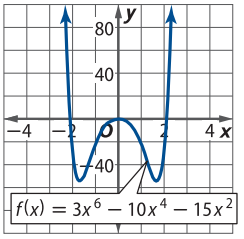
لاحظ عدد نقاط التقاطع مع المحور الأفقي $x$ في كل تمثيل بياني. بما أن التقاطع مع المحور الأفقي $x$ يوافق صفرًا حقيقيًا من الدالة، إذًا يمكنك أن تعرف أن الدوال التكعيبية تحتوي على 3 أصفار على الأكثر وأن الدوال من الدرجة الرابعة تحتوي على 4 أصفار على الأكثر.

**نقاط الدوران أو نقاط التحول** توضح مكان تغير التمثيل البياني للدالة من التزايد إلى التناقص والعكس. يتم تحديد القيمتين العظمى والصغرى أيضًا على نقاط الدوران. لاحظ أن الدوال التكعيبية تحتوي على نقطتي دوران على الأكثر وأن الدوال من الدرجة الرابعة تحتوي على 3 نقاط دوران على الأكثر. يمكن تعميم هذه الملاحظات كما يلي وتوضيح أنها صحيحة لأي دالة كثيرة الحدود.

## المفهوم الأساسي الأصفار ونقاط الدوران للدوال كثيرة الحدود

تحتوي الدالة كثيرة الحدود $f$ من الدرجة $n \geq 1$ على $n$ من الأصفار الحقيقية المختلفة على أكثر تقدير وعلى $n - 1$ من نقاط الدوران على أكثر تقدير.

**مثال** لنفرض أن $f(x) = 3x^6 - 10x^4 - 15x^2$. فالدالة $f$ تحتوي على 6 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و 5 نقاط دوران على الأكثر. يوضح التمثيل البياني للدالة $f$ أن الدالة تحتوي على 3 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران.




**نصيحة دراسية**

**المراجعة** تذكّر أن التقاطع مع المحور الأفقي $x$ في التمثيل البياني للدالة يُسمى أصفار الدالة. يُطلق على حلول المعادلة المطابقة جذور المعادلة.

تذكّر أنه إذا كانت الدالة $f$ كثيرة الحدود وأن $c$ هي نقطة التقاطع مع المحور الأفقي $x$ للتمثيل البياني للدالة $f$، فيمكن أن تقول إن:

- $c$ صفر من أصفار الدالة $f$.
- $x = c$ حل للمعادلة $f(x) = 0$
- $(x - c)$ عامل من عوامل الدالة كثيرة الحدود $f(x)$

يمكنك إيجاد أصفار بعض الدوال كثيرة الحدود باستخدام أساليب التحليل ذاتها التي استخدمتها لحل المعادلات التربيعية.

## المثال 3 أصفار الدوال كثيرة الحدود

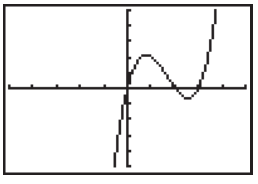
**اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.**

بما أن المعادلة من الدرجة 3، إذًا تحتوي الدالة $f$ على 3 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و 1−3 أو نقطتي دوران على أكثر تقدير. لإيجاد الأصفار الحقيقية، جد حل المعادلة ذات الصلة $f(x) = 0$ بالتحليل إلى العوامل.

| | |
|---|---|
| افرض أن $f(x)$ تساوي 0 | $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ |
| أخرج x كعامل مشترك. | $x(x^2 - 5x + 6) = 0$ |
| حلل إلى العوامل. | $x(x - 2)(x - 3) = 0$ |

إذًا، تحتوي الدالة $f$ على ثلاثة أصفار مختلفة 0 و 2 و 3. يتوافق هذا مع الدالة التكعيبية التي تحتوي على 3 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر.

**التحقق** يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لرسم $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ والتأكيد على هذه الأصفار.
بالإضافة إلى ذلك، يمكنك أن تعرف أن التمثيل البياني يحتوي على نقطتي دوران، وهذا يتوافق مع الدوال التكعيبية التي تحتوي على نقطتي دوران على الأكثر.



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

### تمرين موجّه

**اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.**

**3A.** $f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x$

**3B.** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$

في بعض الحالات، يمكن تحليل الدالة كثيرة الحدود إلى عواملها باستخدام الأساليب التربيعية إذا كانت لها صيغة تربيعية.

**نصيحة دراسية**

**المراجعة** لمراجعة أساليب حل المعادلات التربيعية، راجع دروس سابقة.

## المفهوم الأساسي الصيغة التربيعية

**الكلمات** يُكتب تعبير الدالة كثيرة الحدود في $x$ **بالصيغة التربيعية** إذا كتب بالصيغة $au^2 + bu + c$ لأي أعداد $a$ و $b$ و $c$ و $a \neq 0$ بحيث يكون $u$ تعبيرًا في $x$.

**الرموز** تُكتب $x^4 - 5x^2 - 14$ بالصيغة التربيعية لأن التعبير يمكن كتابته بالصيغة التالية $(x^2)^2 - 5(x^2) - 14$.
بما أن $u = x^2$، إذًا يصبح التعبير $u^2 - 5u - 14$.

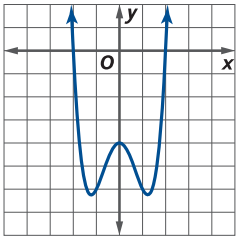
## مثال 4 أصفار الدالة كثيرة الحدود بالصيغة التربيعية

**اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة $g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.**

بما أن الدالة من الدرجة 4، إذًا $g$ تحتوي على 4 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و $-1$، $-4$ أو 3 نقاط دوران على الأكثر. تُكتب هذه الدالة بالصيغة التربيعية لأن $x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2)^2 - 3(x^2) - 4$ لنفرض أن $u = x^2$

| | |
|---|---|
| افرض أن $g(x)$ تساوي 0 | $(x^2)^2 - 3(x^2) - 4 = 0$ |
| عوّض عن $u$ بقيمة $x^2$ | $u^2 - 3u - 4 = 0$ |
| حلل التعبير التربيعي إلى العوامل | $(u + 1)(u - 4) = 0$ |
| عوّض عن $u$ بقيمة $x^2$ | $(x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$ |
| حلل إلى العوامل | $(x^2 + 1)(x + 2)(x - 2) = 0$ |
| خاصية الناتج الصفري | $x^2 + 1 = 0 \quad = \quad x + 2 = 0 \quad = \quad x - 2 = 0$ |
| جد حل $x$ | $x = \pm\sqrt{-1} \qquad x = -2 \qquad x = 2$ |

بما أن ناتج $\pm\sqrt{-1}$ ليس أصفارًا حقيقية، إذًا تحتوي $g$ على صفرين حقيقيين مختلفين، $-2$ و 2. يتوافق ذلك مع الدالة التربيعية. يؤكد ذلك التمثيل البياني للدالة $g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ في الشكل 1.2.1. لاحظ أنه يوجد 3 نقاط انعطاف، وهذا يتوافق أيضًا مع الدالة التربيعية.



**الشكل 1.2.1**

### تمرين موجّه

**اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل العوامل.**

**4A.** $g(x) = x^4 - 9x^2 + 18$

**4B.** $h(x) = x^5 - 6x^3 - 16x$

إذا وُجد عامل $(x - c)$ يتكرر أكثر من مرة بالصيغة التي تم تحليلها بالكامل إلى العوامل للدالة $f(x)$، فإن الصفر المرتبط بها $c$ يُسمى **صفرًا مُكررًا**. عندما يتكرر الصفر بعدد زوجي من المرات، سيكون التمثيل البياني مماسًا للمحور الأفقي $x$ عند هذه النقطة. عندما يتكرر الصفر بعدد فردي من المرات، سيقطع التمثيل البياني المحور الأفقي $x$ عند هذه النقطة. يصبح التمثيل البياني مماسًا لمحور عندما يلمس المحور عند هذه النقطة، ولكن لا يقطعه.

## مثال 5 الدوال كثيرة الحدود ذات الأصفار المُكررة

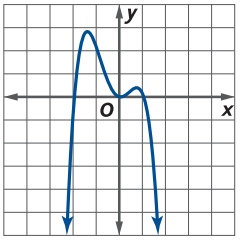
**اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة $h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$ ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل العوامل.**

بما أن الدالة من الدرجة 4، إذًا $h$ تحتوي على 4 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و $-1$ 4 أو 3 نقاط دوران على الأكثر. جد الأصفار الحقيقية.

| | |
|---|---|
| افرض أن $h(x)$ تساوي 0 | $-x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$ |
| بإخراج $-x^2$ كعامل مشترك، | $-x^2(x^2 + x - 2) = 0$ |
| حلل إلى العوامل | $-x^2(x - 1)(x + 2) = 0$ |

يحتوي التعبير السابق على 4 عوامل، ولكن حل $x$ ينتج عنه 3 أصفار، و 0 و 1 و $-2$. ومن بين الأصفار، يتكرر 0 مرتين.

يؤكد التمثيل البياني للدالة $h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$ الموضح في الشكل 1.2.2 على هذه الأصفار ويوضح أن $h$ تحتوي على ثلاث نقاط دوران. لاحظ أنه عندما يكون $x = 1$ و $x = -2$، فإن التمثيل البياني يقطع المحور الأفقي $x$ ولكن عندما $x = 0$، يصبح التمثيل البياني مماسًا للمحور الأفقي $x$.



**الشكل 1.2.2**

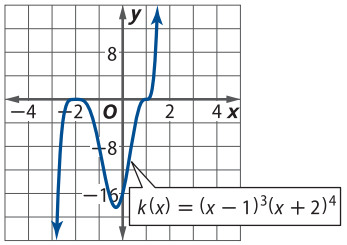
### تمرين موجّه

**اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.**

**5A.** $g(x) = -2x^3 - 4x^2 + 16x$

**5B.** $f(x) = 3x^5 - 18x^4 + 27x^3$

في $h(x) = -x^2(x-1)(x+2)$ من مثال 5، يتكرر الصفر $x = 0$ مرتين. في $k(x) = (x-1)^3(x+2)^4$ يتكرر الصفر $x = 1$ ثلاث مرات، بينما يتكرر $x = -2$ 4 مرات. لاحظ أنه في التمثيل البياني $k$ الموضح، يقطع المنحنى المحور الأفقي $x$ عند $x = 1$ وليس عند $x = -2$ يمكن تعميم هذه الملاحظات كما يلي وتوضيح أنها صحيحة لكل الدوال كثيرة الحدود.




## المفهوم الأساسي الأصفار المُكررة للدوال كثيرة الحدود

بما أن $(x-c)^m$ أكبر قيمة أسيّة في $(x-c)$ التي تعد عاملاً للدالة كثيرة الحدود $f$، إذاً $c$ صفرًا مُكررًا $m$ مرة في $f$، بحيث يكون $m$ عددًا طبيعيًا.

- إذا وُجد صفر $c$ له تكرار فردي، فإن التمثيل البياني للدالة $f$ يقطع المحور الأفقي $x$ عند $x = c$ ويغير قيمة $f(x)$ الإشارة عند $x = c$.
- إذا وُجد صفر $c$ له تكرار زوجي، فإن التمثيل البياني للدالة $f$ يصبح مماسًا للمحور الأفقي $x$ عند $x = c$ ولا تغير قيمة $f(x)$ الإشارة عند $x = c$.

**نصيحة دراسية**

**الأصفار غير المتكررة** يمكن اعتبار الصفر غير المُكرر أنه يحتوي على تكرار 1 أو تكرار فردي. يقطع التمثيل البياني المحور الأفقي $x$ ويحتوي على إشارة تتغير عند كل صفر غير مُكرر.

لديك الآن عدة اختبارات وأدوات لمساعدتك في تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.

## مثال 6 تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا

**فيما يتعلق بالدالة $f(x) = x(2x+3)(x-1)^2$، (a) طبّق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مُكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثّل الدالة بيانيًا.**

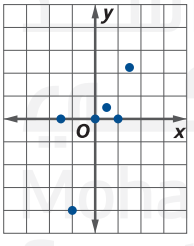
**a.** بما أن ناتج $x(2x+3)(x-1)^2$ يحتوي على حد رئيسي في $x(2x)(x)^2$ أو $2x^4$، إذًا $f$ من الدرجة 4 ومعامل الحد الرئيس يساوي 2. بما أن الدرجة زوجية ومعامل الحد الرئيس موجب، إذًا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

**b.** الأصفار الحقيقية المختلفة هي 0 و $-1.5$ و 1. كما يتكرر الصفر الموجود عند 1 مرتين.

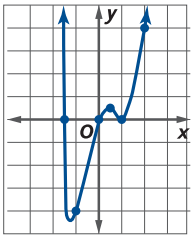
**c.** اختر قيم $x$ التي تقع ضمن الفترات التي حددتها أصفار الدالة.

| الفترة | قيمة $x$ في الفترة | $f(x)$ | $(x, f(x))$ |
|---|---|---|---|
| $(-\infty, -1.5)$ | $-2$ | $f(-2) = 18$ | $(-2, 18)$ |
| $(-1.5, 0)$ | $-1$ | $f(-1) = -4$ | $(-1, -4)$ |
| $(0, 1)$ | 0.5 | $f(0.5) = 0.5$ | $(0.5, 0.5)$ |
| $(1, \infty)$ | 1.5 | $f(1.5) = 2.25$ | $(1.5, 2.25)$ |

**d.** ارسم مخططًا للبيانات التي وجدتها (الشكل 1.2.3). يوضح لك السلوك الطرفي للدالة أن التمثيل البياني يتغير رأسيًا في نهاية الأمر تجاه اليمين واليسار. تعرف أيضًا أن التمثيل البياني يقطع المحور الأفقي $x$ عند أصفار غير مُكررة $-1.5$ و 0، ولكن لا يقطع المحور الأفقي $x$ عند الصفر المتكرر 1 لأن تكراره زوجي. ارسم منحنى متصلاً عبر النقاط كما هو موضح في الشكل 1.2.4.




**الشكل 1.2.3**




**الشكل 1.2.4**

### تمرين موجّه

**فيما يتعلق بكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مُكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثّل الدالة بيانيًا.**

**6A.** $f(x) = -2x(x-4)(3x-1)^3$

**6B.** $h(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$

## 2 تمثيل البيانات

يمكنك استخدام حاسبة بيانية لتمثيل البيانات التي توضح السلوك الخطي والتربيعي والتكعيبي عن طريق التحقق من عدد نقاط الدوران الذي يوضحه مخطط تشتت البيانات.

### مثال 7 من الحياة اليومية تمثيل البيانات باستخدام دوال كثيرة الحدود

**المدخرات ارجع إلى بداية الدرس. يوضح الجدول متوسط المدخرات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية.**

| العام | 1970 | 1980 | 1990 | 1995 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النسبة المئوية للمدخرات | 9.4 | 10.0 | 7.0 | 4.6 | 2.3 | 1.8 | 2.4 | 2.1 | 2.0 | -0.4 |

**المصدر:** وزارة التجارة الأمريكية

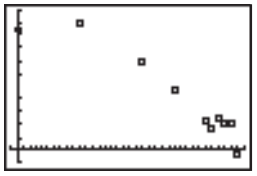
**الربط بالحياة اليومية**

يحتاج خريج كلية في إحدى الدول أن يتقاعد عند سن 65 إلى ادخار متوسط AED 10,000 كل عام للتقاعد.

**المصدر:** Monroe Bank

**a. صمم مخطط تشتت للبيانات. وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.**

أدخل البيانات باستخدام ميزة القائمة في الحاسبة البيانية.
لنفرض أن L1 عدد الأعوام منذ 1970. ثم صمم مخطط تشتت للبيانات.
يشبه منحنى مخطط التشتت التمثيل البياني للمعادلة التربيعية. لذا سنستخدم الانحدار التربيعي.



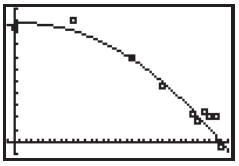
[−1, 36] scl: 1 by [−1, 11] scl: 1

**b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قرّب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط.**

باستخدام أداة QuadReg على الحاسبة البيانية وتقريب كل معامل إلى أقرب ناتج من ألف $f(x) = -0.009x^2 + 0.033x + 9.744$ بما أن معامل الارتباط $r^2$ للبيانات يساوي 0.96، وهذا أقرب إلى 1، إذًا النموذج ملائم جدًا.


الشكل 1.2.5

يمكننا رسم الانحدار (غير المقرب) الكامل عبر إرساله إلى قائمة Y=. إذا أدخلت L1 وL2 وY1 بعد QuadReg، كما هو موضح في الشكل 1.2.5، فسيتم إدخال معادلة الانحدار إلى Y1. مثّل هذه الدالة بيانيًا وكذلك باستخدام مخطط التشتت في نفس نافذة العرض. تتناسب الدالة مع البيانات جيدًا.



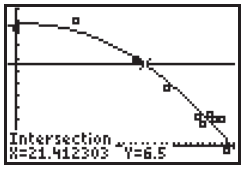
[−1, 36] scl: 1 by [−1, 11] scl: 1

**c. استخدم النموذج لتقدير نسبة المدخرات في 1993.**

بما أن 1993 بعد 1970 بمقدار 23 عامًا، استخدم ميزة CALC على الحاسبة لإيجاد $f(23)$
بما أن قيمة $f(23)$ تساوي 5.94، إذًا نسبة المدخرات في 1993 كانت تقريبًا 5.94%.

**d. استخدم النموذج لتحديد العام التقريبي الذي وصلت فيه نسبة المدخرات إلى 6.5%.**

مثّل بيانيًا الخط $y = 6.5$ بالنسبة إلى Y2. ثم استخدم تقاطع 5: على قائمة CALC لإيجاد نقطة تقاطع $y = 6.5$ مع $f(x)$.
بما أن التقاطع يحدث عندما $x \approx 21$، إذًا العام التقريبي الذي وصلت فيه النسبة إلى 6.5% كان تقريبًا 1970 + 21 أو 1991.




[−1, 36] scl: 1 by [−1, 11] scl: 1

### تمرين موجّه

**7. السكان** تم توضيح متوسط عمر سكان إحدى الدول حسب التوقع في عام 2080.

| العام | 1900 | 1930 | 1960 | 1990 | 2020 | 2050 | 2080 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| متوسط العمر | 22.9 | 26.5 | 29.5 | 33.0 | 40.2 | 42.7 | 43.9 |

a. اكتب دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات. بفرض أن L1 يمثل عدد الأعوام منذ 1900.
b. قدّر متوسط عمر السكان في 2005.
c. وفقًا للنموذج الخاص بك، في أي عام وصل متوسط عمر السكان إلى 30؟

## تمارين

**ارسم التمثيل البياني لكل دالة.** (مثال 1)

1. $f(x) = (x + 5)^2$
2. $f(x) = (x - 6)^3$
3. $f(x) = x^4 - 6$
4. $f(x) = x^5 + 7$
5. $f(x) = 16x^4$
6. $f(x) = 32x^5 - 16$
7. $f(x) = (x - 3)^4 + 6$
8. $f(x) = (x + 4)^3 - 3$
9. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 9)^5$
10. $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + 8$

11. **الماء** إذا كان تصريف خزان بحجم 10 لترات يستغرق دقيقة واحدة، فإن حجم ما يتبقى من الماء في الخزان يمكن أن يكون $v(t) = 10(1 - t)^2$ تقريبًا، بحيث تكون $t$ الزمن بالدقائق، $0 \le t \le 1$. مثِّل الدالة بيانيًا. (مثال 1)

**وضح السلوك الطرفي للرسم البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس.** (مثال 2)

12. $f(x) = -5x^7 + 6x^4 + 8$
13. $f(x) = 2x^6 + 4x^5 + 9x^2$
14. $g(x) = 5x^4 + 7x^5 - 9$
15. $g(x) = -7x^3 + 8x^4 - 6x^6$
16. $h(x) = 8x^2 + 5 - 4x^3$
17. $h(x) = 4x^2 + 5x^3 - 2x^5$
18. $f(x) = x(x + 1)(x - 3)$
19. $g(x) = x^2(x + 4)(-2x + 1)$
20. $f(x) = -x(x - 4)(x + 5)$
21. $g(x) = x^3(x + 1)(x^2 - 4)$

22. **الأغذية العضوية** يمكن تمثيل عدد الكيلومترات المربعة المستخدمة في إحدى الدول لإنتاج التفاح العضوي من 2000 إلى 2005 كما يلي $a(x) = 43.77x^4 - 498.76x^3 + 1{,}310.2x^2 + 1{,}626.2x + 6{,}821.5$، بحيث $x = 0$ تساوي 2,000. (مثال 2)
   a. مثّل كل دالة باستخدام الحاسبة البيانية.
   b. وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني للدالة باستخدام الحدود. اشرح باستخدام اختبار الحد الرئيس.

**اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل على العوامل.** (الأمثلة 3-5)

23. $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3$
24. $f(x) = x^6 - 8x^5 + 12x^4$
25. $f(x) = x^4 + 4x^2 - 21$
26. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 32x^2$
27. $f(x) = x^6 - 6x^3 - 16$
28. $f(x) = 4x^8 + 16x^4 + 12$
29. $f(x) = 9x^6 - 36x^4$
30. $f(x) = 6x^5 - 150x^3$
31. $f(x) = 4x^4 - 4x^3 - 3x^2$
32. $f(x) = 3x^5 + 11x^4 - 20x^3$

**فيما يتعلق بكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مُكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثّل الدالة بيانيًا.** (مثال 6)

33. $f(x) = x(x + 4)(x - 1)^2$
34. $f(x) = x^2(x - 4)(x + 2)$
35. $f(x) = -x(x + 3)^2(x - 5)$
36. $f(x) = 2x(x + 5)^2(x - 3)$
37. $f(x) = -x(x - 3)(x + 2)^3$
38. $f(x) = -(x + 2)^2(x - 4)^2$
39. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x$
40. $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$
41. $f(x) = x^4 + x^3 - 20x^2$
42. $f(x) = x^5 + 3x^4 - 10x^3$

43. **خزانات المياه** فيما يلي عدد الأقدام دون الحد الأقصى لمستوى المياه في خزان مياه رينبو بولاية ويسكونسين خلال عشرة أشهر في 2007. (مثال 7)

| الشهر | المستوى | الشهر | المستوى |
|---|---|---|---|
| يناير | 4 | يوليو | 9 |
| فبراير | 5.5 | أغسطس | 11 |
| مارس | 10 | سبتمبر | 16.5 |
| أبريل | 9 | نوفمبر | 11.5 |
| مايو | 7.5 | ديسمبر | 8.5 |

   a. اكتب نموذجًا يوضح مستوى المياه كدالة لعدد الأشهر منذ يناير.
   b. استخدم النموذج لتقدير مستوى المياه في الخزان في أكتوبر.

**استخدم حاسبة بيانية لكتابة دالة كثيرة الحدود لتمثيل كل مجموعة من البيانات.** (مثال 7)

44.

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 8.75 | 7.5 | 6.25 | 5 | 3.75 | 2.5 | 1.25 |

45.

| x | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 5 | 6 | 4 | -1 | -3 | 5 | 9 |

46.

| x | -2.53 | -2 | -1.5 | -1 | -0.5 | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 23 | 11 | 7 | 6 | 6 | 5 | 3 | 2 | 4 |

47.

| x | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 52 | 41 | 32 | 44 | 61 | 88 | 72 | 59 | 66 | 93 |

48. **الكهرباء** فيما يلي متوسط أسعار الكهرباء بالتجزئة في إحدى الدول من 1,970 إلى 2,005. فيما يلي الأسعار المتوقعة أيضًا لعامي 2010 و 2020. (مثال 7)

| العام | السعر (fil/kWh) | العام | السعر (fil/kWh) |
|---|---|---|---|
| 1970 | 6.125 | 1995 | 7.5 |
| 1974 | 7 | 2000 | 6.625 |
| 1980 | 7.25 | 2005 | 6.25 |
| 1982 | 9.625 | 2010 | 6.25 |
| 1990 | 8 | 2020 | 6.375 |

   a. اكتب نموذجًا يوضح النسبة كدالة لعدد الأعوام منذ 1970.
   b. استخدم النموذج لتوقع متوسط سعر الكهرباء في 2015.
   c. وفقًا للنموذج، في أي سنة تكرر السعر 7 fils للمرة الثانية؟

49. **أجهزة الحاسب الآلي** فيما يلي عدد أجهزة الحاسب الآلي المحمولة المبيعة كل ربع عام من 2005 إلى 2007. لنفرض أن الربع الأول من 2005 رقم 1 والربع الرابع من 2007 رقم 12.

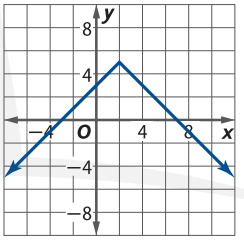
| أرباع العام | المبيعات (بالألوف) |
|---|---|
| 1 | 423 |
| 2 | 462 |
| 3 | 495 |
| 4 | 634 |
| 5 | 587 |
| 6 | 498 |
| 7 | 798 |
| 8 | 986 |
| 9 | 969 |
| 10 | 891 |
| 11 | 1,130 |
| 12 | 1,347 |

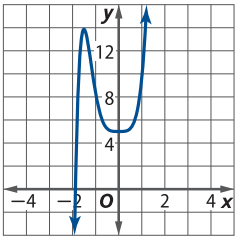
a. توقع السلوك الطرفي للبيانات حيث تقترب $x$ من اللانهاية.

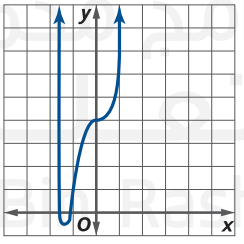
b. استخدم حاسبة بيانية لتمثيل البيانات ورسمها بيانيًا. هل النموذج ملائم تمامًا؟ اشرح استدلالك.

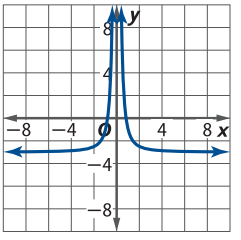
c. اشرح السلوك الطرفي للتمثيل البياني باستخدام الحدود. هل توقعك دقيق؟ اشرح استدلالك.

**حدد هل يمكن أن يوضح كل تمثيل بياني دالة كثيرة الحدود. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة هي لا، فاشرح السبب.**

50.



51.



52.



53.



**جد دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n$ تحتوي على الأصفار الحقيقية التالية فقط. قد تكون أكثر من إجابة.**

54. $-1;\ n = 3$

55. $3;\ n = 3$

56. $6, -3;\ n = 4$

57. $-5, 4;\ n = 4$

58. $7;\ n = 4$

59. $0, -4;\ n = 5$

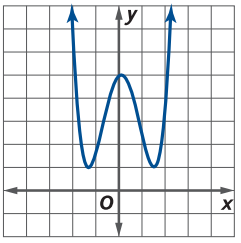
60. $2, 1, 4;\ n = 5$

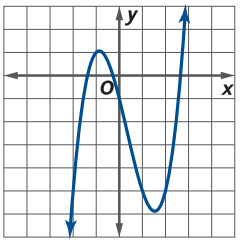
61. $0, 3, -2;\ n = 5$

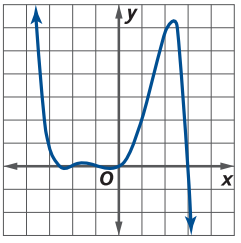
62. $n = 4$: لا توجد أصفار حقيقية

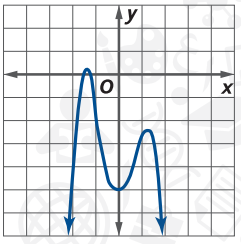
63. $n = 6$: لا توجد أصفار حقيقية

**حدد هل درجة $n$ في الدالة كثيرة الحدود لكل تمثيل بياني زوجية أم فردية وهل معامل الحد الرئيس فيها $a_n$ موجبًا أم سالبًا.**

64.



65.



66.



67.



68. **التصنيع** تصنع شركة عبوات الألمنيوم لمشروبات الطاقة.


a. اكتب معادلة $V$ تمثل إجمالي حجم العبوة.

b. اكتب دالة $A$ من حيث $r$ التي تمثل مساحة سطح حاوية بحجم $15\ cm^3$.

c. استخدم حاسبة تمثيل بياني لتحديد أدنى حد ممكن من مساحة سطح العبوة.

**حدد دالة كثيرة الحدود تحتوي على كل مجموعة من الأصفار. قد تكون هناك أكثر من إجابة.**

69. $5, -3, 6$

70. $4, -8, -2$

71. $3, 0, 4, -1, 3$

72. $1, 1, -4, 6, 0$

73. $\frac{3}{4}, -3, -4, -\frac{2}{3}$

74. $-1, -1, 5, 0, \frac{5}{6}$

75. **السكان** زادت نسبة سكان للتعداد السكاني لإحدى الدول الذين يعيشون في المناطق الحضرية.

| العام | النسبة المئوية للسكان |
|---|---|
| 1950 | 56.1 |
| 1960 | 63 |
| 1970 | 68.6 |
| 1980 | 74.8 |
| 1990 | 74.8 |
| 2000 | 79.2 |

a. اكتب نموذجًا يوضح النسبة كدالة لعدد الأعوام منذ 1950.

b. استخدم النموذج لتوقع النسبة المئوية للسكان الذين سيعيشون في المناطق الحضرية في 2015.

c. استخدم النموذج لتوقع العام الذي سيعيش فيه 85% من السكان في المناطق الحضرية.

**صمم دالة بالخصائص التالية. ثم مثّلها بيانيًا.**

76. الدرجة = 5، 3 أصفار حقيقية، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

77. الدرجة = 6، 4 أصفار حقيقية، $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

78. الدرجة = 5، 2 أصفار حقيقية مختلفة، يتكرر واحد منها مرتين، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

79. الدرجة = 6، 3 أصفار حقيقية مختلفة، يتكرر واحد منها مرتين، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

80. **الطقس** فيما يلي درجات الحرارة بالدرجة المئوية من 10 صباحًا إلى 7 مساءًا في يوم ما في مدينة بحيث $x$ هو عدد الساعات منذ 10 صباحًا

| الزمن | درجة الحرارة | الزمن | درجة الحرارة |
|---|---|---|---|
| 0 | 4.1 | 5 | 10 |
| 1 | 5.7 | 6 | 7 |
| 2 | 7.2 | 7 | 4.6 |
| 3 | 7.3 | 8 | 2.3 |
| 4 | 9.4 | 9 | -0.4 |

a. مثّل البيانات بيانيًا.

b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة 3.

c. كرر الجزء b باستخدام دالة من الدرجة 4.

d. أي دالة تمثل نموذجًا أفضل؟ اشرح.

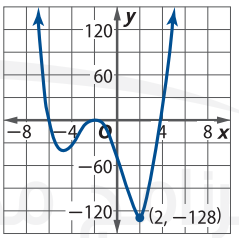
**لكل من التمثيلات البيانية التالية:**

a. **حدد أقل درجة ممكنة وحدد السلوك الطرفي.**

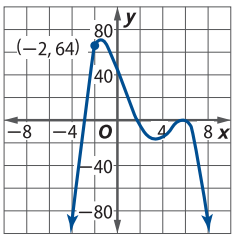
b. **حدد الأصفار وتكرارها. لنفرض جميع الأصفار قيمًا متكاملة.**

c. **صمم دالة تلائم التمثيل البياني ونقطة محددة.**

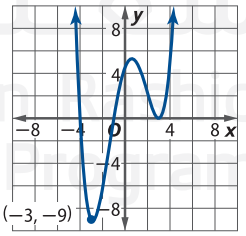
81.



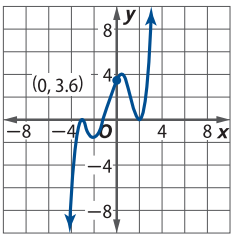

82.




83.




84.




**اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم جد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.**

85. $f(x) = 16x^4 + 72x^2 + 80$

86. $f(x) = -12x^3 - 44x^2 - 40x$

87. $f(x) = -24x^4 + 24x^3 - 6x^2$

88. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 24$

89. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتحقق من سلوك توافيق الدوال كثيرة الحدود.

a. **العرض البياني** مثّل $f(x)$ و$g(x)$ و$h(x)$ بيانيًا في كل صف على شاشة الحاسبة البيانية نفسها. فيما يتعلق بكل تمثيل بياني، عدّل النافذة لملاحظة سلوك كل منها على مقياس أكبر وقريب جدًا من الأصل.

| $f(x) =$ | $g(x) =$ | $h(x) =$ |
|---|---|---|
| $x^2 + x$ | $x^2$ | $x$ |
| $x^3 - x$ | $x^3$ | $-x$ |
| $x^3 + x^2$ | $x^3$ | $x^2$ |

b. **العرض التحليلي** وضح سلوك كل تمثيل بياني للدالة $f(x)$ من حيث $g(x)$ أو $h(x)$ بالقرب من الأصل.

c. **العرض التحليلي** وضح سلوك كل تمثيل بياني للدالة $f(x)$ من حيث $g(x)$ أو $h(x)$ عند اقتراب $x$ من $\infty$ و $-\infty$.

d. **العرض الكلامي** توقع سلوك الدالة التي هي عبارة عن توافيق بين دالتين $a$ و $b$ مثل $f(x) = a + b$، بحيث تكون $a$ حد الدرجة الأعلى.

## مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

90. **تحليل الخطأ** نهلة ووفاء يرسمان نموذجًا للبيانات الموضحة. تعتقد نهلة أن النموذج ينبغي أن يكون $f(x) = 5.754x^3 + 2.912x^2 - 7.516x + 0.349$ تعتقد وفاء أنه ينبغي أن يكون $f(x) = 3.697x^2 + 11.734x - 2.476$ هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

| x | $f(x)$ | x | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| −2 | −19 | 0.5 | −2 |
| −1 | 5 | 1 | 1.5 |
| 0 | 0.4 | 2 | 43 |

91. **الاستنتاج** هل يمكن أن تحتوي دالة كثيرة الحدود على كل من القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة؟ اشرح استنتاجك.

92. **الاستنتاج** وضح لماذا الدالة الثابتة $f(x) = c,\ c \neq 0$ تحتوي على درجة 0، ولكن الدالة الصفرية $f(x) = 0$ ليس لها درجة.

93. **تحدٍ** استخدم التحليل إلى العوامل بالتجميع لتحديد أصفار $f(x) = x^3 + 5x^2 - x^2 - 5x - 12x - 60$ اشرح كل خطوة.

94. **الاستنتاج** كيف من الممكن تمثيل أكثر من دالة بنفس الدرجة والسلوك الطرفي والأصفار الحقيقية المختلفة؟ اضرب مثالًا لشرح استنتاجك.

95. **الاستنتاج** ما أدنى درجة لدالة كثيرة الحدود تحتوي على القيمة العظمى المطلقة والقيمة العظمى النسبية والقيمة الصغرى النسبية؟ اشرح استنتاجك.

96. **الكتابة في الرياضيات** وضح كيف تحدد أفضل دالة كثيرة حدود يمكن استخدامها عند رسم نموذج للبيانات.

## مراجعة شاملة

**حُلّ كل من المعادلات التالية.**

**97.** $\sqrt{z+3} = 7$

**98.** $d + \sqrt{d^2 - 8} = 4$

**99.** $\sqrt{x-8} = \sqrt{13+x}$

**100. إعادة رسم نموذج** يستبدل عامل سجادة في غرفة المعيشة مقاس 12 ft في 15 ft .
تبلغ تكلفة السجادة الجديدة AED 13.99 لكل متر مربع. تحول الصيغة $f(x) = 9x$ الياردات المربعة إلى قدم مربع.

**a.** جد معكوس $f^{-1}(x)$ ما أهمية $f^{-1}(x)$ ؟

**b.** كم ستبلغ تكلفة السجادة الجديدة؟

**توجد $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ و $g(x) = 6x + 4$، جد كل دالة.**

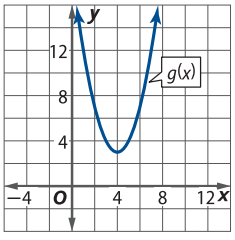
**101.** $(f+g)(x)$

**102.** $[f \circ g](x)$

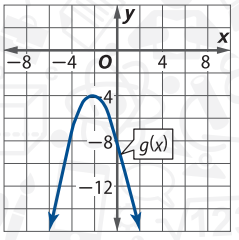
**103.** $[g \circ f](x)$

**وضح كيف ترتبط الدالتان $f(x) = x^2$ و $g(x)$ ببعضهما. ثم اكتب معادلة لـ $g(x)$.**

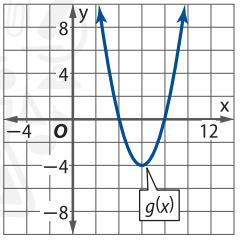
**104.**




**105.**




**106.**




**107. الأعمال** تنتج شركة منتجًا جديدًا بتكلفة AED 25 لكل منتج. استأجرت محلل تسويق للمساعدة على تحديد سعر البيع.
بعد جمع البيانات المرتبطة بسعر البيع $s$ لطلب المستهلكين السنوي وتحليلها $d$. يقدر المحلل طلب المنتج باستخدام $d = -200s + 15{,}000$.

**a.** إذا كان الربح السنوي هو الفرق بين إجمالي الإيرادات وتكاليف الإنتاج، فحدد سعر البيع $s \geq 25$ الذي سيرفع أرباح الشركة السنوية $P$.

**b.** ما مخاطر تحديد سعر البيع باستخدام هذه الطريقة؟

**فيما يلي نتائج أحد الاختبارات في صفوف الفيزياء.** (الدرس 8-0)

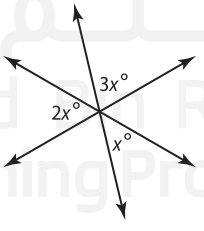
**82, 77, 84, 98, 93, 71, 76, 64, 89, 95, 78, 89, 65, 88, 54,**
**96, 87, 92, 80, 85, 93, 89, 55, 62, 79, 90, 86, 75, 99, 62**

**108.** ارسم مخطط صندوق ذا عارضين.

**109.** ما الانحراف المعياري لدرجات الامتحان؟

## مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

**110. SAT/ACT** يوضح الشكل تقاطع ثلاثة مستقيمات. الشكل ليس مرسومًا بمقياس رسم.




$x =$

**A** 16
**B** 20
**C** 30
**D** 60
**E** 90

**111.** على المجال $2 < x \leq 3$، أي من الدوال التالية تحتوي على أكبر قيمة لـ $y$؟

**F** $y = \frac{x+3}{x-2}$
**G** $y = \frac{x-5}{x+1}$
**H** $y = x^2 - 3$
**J** $y = 2x$

**112. الاختيار من متعدد** أي من المعادلات التالية يمثل نتيجة تحريك الدالة الأم $y = x^3$ لأعلى 4 وحدات ولليمين 5 وحدات؟

**A** $y + 4 = (x+5)^3$
**B** $y - 4 = (x+5)^3$
**C** $y + 4 = (x-5)^3$
**D** $y - 4 = (x-5)^3$

**113. المراجعة** أي مما يلي يوضح الأعداد في مجال $h(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$؟

**F** $x \neq 5$
**G** $x \geq \frac{3}{2}$
**H** $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$
**J** $x \neq \frac{3}{2}$

# الدرس 1-2

## مختبر تقنية التمثيل البياني

# السلوك الخفي للتمثيلات البيانية

**الهدف:**

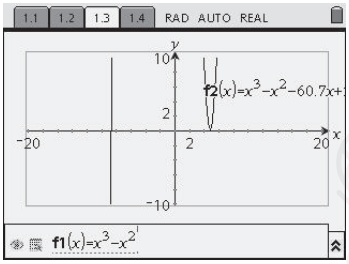
- استخدام الحاسبة البيانية لاستكشاف السلوك الخفي للتمثيلات البيانية.

يعد استخدام تقنيات التمثيل البياني مثل الحواسب والآلات الحاسبة طريقة فعالة للقدرة على تمثيل دوال بيانيًا وإيجاد قيمتها. ومع ذلك، من المهم أن نضع في الاعتبار حدود تقنية التمثيل البياني عند تفسير التمثيلات البيانية.

## النشاط السلوك الخفي للتمثيلات البيانية

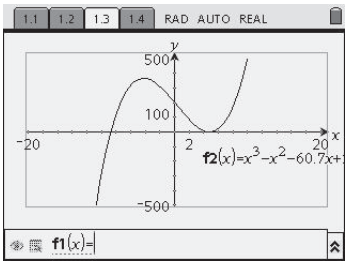
**حدد أصفار $f(x) = x^3 - x^2 - 60.7x + 204$ بيانيًا.**

**الخطوة 1** افتح صفحة جديدة للتمثيلات البيانية والهندسة، ومثِّل الدالة بيانيًا.



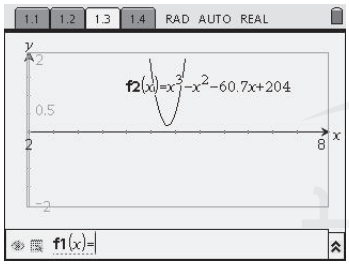

يبدو أن للدالة صفرين، أحدهما بين 10− و 8− والآخر بين 4 و 6.

**الخطوة 2** من قائمة Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)، اختر Window Settings (إعدادات النافذة). غيِّر أبعاد النافذة على النحو المبين.




يبدو سلوك التمثيل البياني أوضح كثيرًا في النافذة الأكبر. لا يزال يبدو أن الدالة لها صفرين، أحدهما بين 8− و 10− والآخر بين 4 و 6.

**الخطوة 3** من قائمة Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)، اختر Window Settings (إعدادات النافذة). غيِّر النافذة إلى [2, 8] على [2, 2−].




من خلال تكبير التمثيل البياني في المساحة التي يوجد فيها الصفر، يتضح أنه لا يوجد صفر بين القيمتين 4 و 6. لذا، يحتوي التمثيل البياني على صفر واحد.

**نصيحة دراسية**

**إعدادات النافذة (Window Settings)** (إعدادات النافذة) يمكنك اختيار قيم للنافذة حسب معاينة تمثيلك البياني أو يمكنك استخدام إحدى أدوات التكبير والتصغير مثل مربع التكبير/التصغير الذي يسمح لك بتكبير مساحة معينة من التمثيل البياني.

## حلل النتائج

1. بالإضافة إلى الحدود التي تم اكتشافها في الخطوات السابقة، كيف يمكن أن تقيد الحاسبة البيانية قدرتك على تفسير التمثيلات البيانية؟
2. ما الطرق الأخرى لتجنب هذه الحدود؟

## تمارين

**حدد أصفار كل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا. لاحظ السلوك الخفي.**

3. $x^3 + 6.5x^2 - 46.5x + 60$
4. $x^4 - 3x^3 + 12x^2 + 6x - 7$
5. $x^5 + 7x^3 + 4x^2 - x + 10.9$
6. $x^4 - 19x^3 + 107.2x^2 - 162x + 73$

# الدرس 1-3 نظريتا الباقي والعامل

**السابق:**
- لقد حللت التعابير التربيعية إلى العوامل لحل المعادلات.

**الحالي:**
1. قسمة الدوال كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية.
2. استخدام نظريتَي الباقي والعامل.

**لماذا؟:**
- تُعد أشجار خشب السكويه بحديقة ريدوود الوطنية بولاية كاليفورنيا أقدم الأنواع الحية في العالم. ويمكن لهذه الأشجار أن تنمو حتى تصل إلى 107 أمتار ويمكن أن تعيش لما يصل إلى 2,000 عام. يمكن استخدام القسمة التركيبية لتحديد ارتفاع إحدى الأشجار خلال عام معين.

**مفردات جديدة**

**قسمة تركيبية**
synthetic division

**دالة كثيرة حدود المنخفضة**
depressed olynomial

**تعويض تركيبي**
synthetic ubstitution

## 1 قسمة الدوال كثيرة الحدود

فكّر في الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ وإذا علمت أن $f$ تحتوي على صفر عند $x = 3$. فأنت تعلم أيضًا أن $(x - 3)$ هي عامل من عوامل $f(x)$ حيث $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة. تعلم أن هناك دوالاً كثيرة حدود من الدرجة الثانية $q(x)$ مثل هذا

$$f(x) = (x - 3) \cdot q(x)$$

معنى هذا أن $q(x)$ يمكن إيجادها عن طريق قسمة $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ by $(x - 3)$ حيث إن

$$q(x) = \frac{f(x)}{x - 3}, \text{ إذا كان } x \neq 3$$

لقسمة الدوال كثيرة الحدود، يمكننا استخدام خوارزمية مشابهة لتلك الموجودة بالقسمة المطولة ذات الأعداد الصحيحة.

### مثال 1 استخدام القسمة المطولة لتحليل دالة كثيرة الحدود إلى العوامل

**حلِّل $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ بالكامل إلى العوامل باستخدام القسمة المطولة إذا كان $(x - 3)$ عاملاً.**

$$\begin{array}{r l}
 & 6x^2 - 7x - 3 \\
x - 3 \,\big) & 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 \\
(-) & \underline{6x^3 - 18x^2} \\
 & -7x^2 + 18x \\
(-) & \underline{-7x^2 + 21x} \\
 & -3x + 9 \\
(-) & \underline{-3x + 9} \\
 & 0
\end{array}$$

اضرب المقسوم عليه في $6x^2$ حيث إن $\frac{6x^3}{x} = 6x^2$

اطرح وقم بإنزال الحد التالي.

اضرب المقسوم عليه في $-7x$ حيث إن $\frac{-7x^2}{x} = -7x$

اطرح وقم بإنزال الحد التالي.

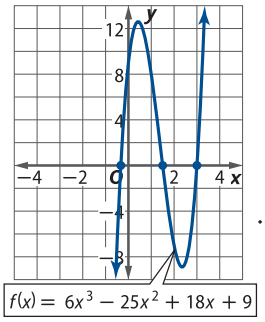
اضرب المقسوم عليه في $-3$ حيث إن $\frac{-3x}{x} = -3$

اطرح. لاحظ أن الباقي هو 0

من عملية القسمة هذه، يمكنك كتابة $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 = (x - 3)(6x^2 - 7x - 3)$

بتحليل التعابير التربيعية إلى العوامل ينتج $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 = (x - 3)(2x - 3)(3x + 1)$

وبالتالي أصفار الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ هي 3 و $\frac{3}{2}$ و $-\frac{1}{3}$ كما أن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي $x$ الموضحة بالتمثيل البياني $(x)$ تؤيد هذا الاستنتاج.




**تمرين موجّه**

**حلِّل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المُعطى والقسمة المطوَّلة.**

1A. $x^3 + 7x^2 + 4x - 12;\ x + 6$

1B. $6x^3 - 2x^2 - 16x - 8;\ 2x - 4$

يمكن أن ينتج عن القسمة المطوَّلة باقي صفري، كما في المثال 1 أو باقي غير صفري، كما هو موضح في المثال أدناه. لاحظ أنه كما هو الحال مع القسمة المطوَّلة ذات الأعداد الصحيحة، يتم التعبير عن قسمة كثيرات الحدود باستخدام الناتج والباقي والمقسوم عليه.

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+2\overline{)x^2+5x-4} \\ (-)\ \underline{x^2+2x} \\ 3x-4 \\ (-)\ \underline{3x+6} \\ -10 \end{array}$$

المقسوم عليه ← $x+2$ ، المقسوم ← $x^2+5x-4$ ، ناتج القسمة ← $x+3$ ، الباقي ← $-10$

المقسوم ← $x^2+5x-4$ ، المقسوم عليه ← $x+2$ ، ناتج القسمة ← $x+3$ ، الباقي ← $-10$

$$\frac{x^2+5x-4}{x+2} = x+3+\frac{-10}{x+2},\ x \neq -2$$

المقسوم عليه ← $x+2$ ، القيمة المستبعدة ← $-2$

تذكّر أنه يمكن التعبير عن المقسوم بحدود المقسوم عليه والناتج والباقي.

**المقسوم = الباقي + الناتج × المقسوم عليه**

$$x^2+5x-4 = (-10) + (x+3) \times (x+2)$$

ويؤدي بنا هذا إلى تعريف قسمة كثيرات الحدود.

## المفهوم الأساسي قسمة كثيرات الحدود

لنفترض أن $f(x)$ و$d(x)$ هما دالتان كثيرتا حدود حيث تكون درجة $d(x)$ أقل من أو تساوي درجة $f(x)$ و$d(x) \neq 0$. وهكذا يكون هناك حدود كثيرة ومتعددة $q(x)$ و $r(x)$ بحيث تكون

$$f(x) = d(x) \times q(x) + r(x) = \frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}.$$

حيث $r(x) = 0$ أو درجة $r(x)$ أصغر من درجة $d(x)$. إذا كان $r(x) = 0$، إذًا $d(x)$ يقسم $f(x)$ *بالتساوي*.

قبل القسمة، تأكد من كتابة كل دالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية ومن إدراج العناصر النائبة ذات المعاملات الصفرية متى لزم الأمر لأسس المتغير الناقصة.

## مثال 2 القسمة المطوَّلة مع الباقي غير الصفري

**اقسم $9x^3 - x - 3$ على $3x + 2$**

أولاً أعد كتابة $9x^3 - x - 3$ بالشكل $9x^3 + 0x^2 - x - 3$ ثم استخدم عملية القسمة.

$$\begin{array}{r} 3x^2-2x+1 \\ 3x+2\overline{)9x^3+0x^2-x-3} \\ (-)\ \underline{9x^3+6x^2} \\ -6x^2-x \\ (-)\ \underline{-6x^2-4x} \\ 3x-3 \\ (-)\ \underline{3x+2} \\ -5 \end{array}$$

يمكنك كتابة هذه النتيجة بالشكل

$$\frac{9x^3-x-3}{3x+2} = 3x^2-2x+1+\frac{-5}{3x+2},\ x \neq -\frac{2}{3}$$

$$= 3x^2-2x+1-\frac{5}{3x+2},\ x \neq -\frac{2}{3}$$

التحقق من الحل اضرب للتحقق من هذه النتيجة.

$$(3x+2)(3x^2-2x+1)+(-5) \stackrel{?}{=} 9x^3-x-3$$

$$9x^3-6x^2+3x+6x^2-4x+2-5 \stackrel{?}{=}$$

$$9x^3-x-3$$

$$9x^3-x-3 = \quad 9x^3-x-3 \checkmark$$

### تمرين موجّه

**اقسم باستخدام القسمة المطولة.**

**2A.** $(8x^3 - 18x^2 + 21x - 20) \div (2x - 3)$

**2B.** $(-3x^3 + x^2 + 4x - 66) \div (x - 5)$

عند قسمة الدوال كثيرة الحدود، قد يكون للمقسوم عليه درجة أعلى من 1. وقد يؤدي هذا أحيانًا إلى ناتج به حدود ناقصة.

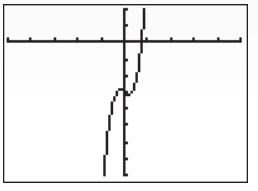
### نصيحة دراسية

**الصحيح مقابل غير الصحيح**

يكون التعبير النسبي غير صحيح إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام. لذا ففي خوارزميات القسمة، $\frac{f(x)}{d(x)}$ يُعد تعبيرًا نسبيًا غير صحيح، بينما $\frac{r(x)}{d(x)}$ يُعد تعبيرًا نسبيًا صحيحًا.

### نصيحة دراسية

**التحقق من التمثيل البياني** كما يمكنك التحقق من النتيجة الموضحة بالمثال 2 باستخدام الحاسبة البيانية. التمثيلات البيانية $Y_1 = 9x^3 - x - 3$ و $Y_2 = (3x^2 - 2x + 1)(3x + 2) - 5$ متطابقة.



[−5, 5] scl: 1 by [−8, 2] scl: 1

## المثال 3 القسمة على دالة كثيرة الحدود من الدرجة 2 أو أعلى

**اقسم $2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11$ على $x^2 - 2x + 7$**

$$
\begin{array}{r}
2x^2 - 1 \\
x^2 - 2x + 7 \overline{)\, 2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11} \\
(-)\ \underline{2x^4 - 4x^3 + 14x^2} \\
-x^2 + 3x - 11 \\
(-)\ \underline{-x^2 + 2x - 7} \\
x - 4
\end{array}
$$

يمكنك كتابة هذه النتيجة بالشكل $\dfrac{2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11}{x^2 - 2x + 7} = 2x^2 - 1 + \dfrac{x - 4}{x^2 - 2x + 7}$

### تمرين موجّه

**اقسم باستخدام القسمة المطولة.**

**3A.** $(2x^3 + 5x^2 - 7x + 6) \div (x^2 + 3x - 4)$

**3B.** $(6x^5 - x^4 + 12x^2 + 15x) \div (3x^3 - 2x^2 + x)$

### نصيحة دراسية

**القسمة على الصفر** في المثال 3، لا يتم تحديد هذه القسمة لأن $x^2 - 2x + 7 = 0$. من هذا الدرس فصاعدًا، يمكنك افتراض أنه لا يمكن لـ $x$ أخذ القيم التي تكون قسمتها المُشار إليها غير معرّفة.

**القسمة التركيبية** طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي بالصيغة $x - c$ ضع في اعتبارك القسمة المطوّلة من المثال 1.

| القسمة المطوّلة | المتغيرات المحذوفة | الطي العمودي | القسمة التركيبية |
|---|---|---|---|
| لاحظ المعاملات التي تم تمييزها بالنص الملوّن. $6x^2 - 7x - 3$ <br> $x - 3 \overline{)\, 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9}$ <br> $(-)\ \underline{6x^3 - 18x^2}$ <br> $-7x^2 + 18x$ <br> $(-)\ \underline{-7x^2 + 21x}$ <br> $-3x + 9$ <br> $(-)\ \underline{-3x + 9}$ <br> $0$ | احذف $x$ وأسس $x$. <br> $6 \quad -7 \quad -3$ <br> $-3 \overline{)\, 6 \quad -25 \quad +18 \quad +9}$ <br> $-)\ \underline{6 \quad -18}$ <br> $-7 \quad +18$ <br> $(-)\ \underline{-7 \quad +21}$ <br> $-3 \quad +9$ <br> $(-)\ \underline{-3 \quad +9}$ <br> $0$ | قم بطي القسمة المطوّلة عموديًا مع حذف التكرارات. <br> $-3 \mid 6 \quad -25 \quad 18 \mid 9$ <br> $\underline{\quad -18 \quad 21 \quad 9}$ <br> $6 \quad -7 \quad -3 \quad 0$ | قم بتغيير علامات المقسوم عليه والأعداد في السطر الثاني. <br> $3 \mid 6 \quad -25 \quad 18 \quad 9$ <br> $\underline{\quad 18 \quad -21 \quad -9}$ <br> $6 \quad -7 \quad -3 \quad 0$ <br> العدد الذي يمثل الآن المقسوم عليه هو الصفر المرتبط بذات الحدين $x - c$ كما أننا الآن نجمع بدلاً من الطرح عن طريق تغيير الإشارات بالسطر الثاني. |

يمكننا استخدام القسمة التركيبية الموضحة في المثال أعلاه لوضع المستقيمات العريضة لإجراء القسمة التركيبية لأي دالة كثيرة الحدود عن طريق دالة ذات حدين.

## المفهوم الأساسي خوارزمية القسمة التركيبية

لقسمة كثيرة الحدود على عامل $x - c$، استكمل كل خطوة.

**الخطوة 1** اكتب معاملات المقسوم بالصيغة القياسية. اكتب الصفر المرتبط بالمعادلة $c$ للمقسوم عليه $x - c$ في المربع. قم بإنزال المعامل الأول.

**الخطوة 2** اضرب المعامل الأول في $c$. اكتب الناتج تحت المعامل الثاني.

**الخطوة 3** اجمع الناتج والمعامل الثاني.

**الخطوة 4** كرّر الخطوتين 2 و 3 حتى تصل إلى ناتج الجمع في العمود الأخير. الأرقام الموجودة في الصف الأسفل هي معامل الناتج. القوة للحد الأول أصغر بمقدار واحد عن المقسوم. العدد النهائي هو الباقي.

**مثال**

اقسم $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ على $x - 3$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 6 & -25 & 18 & 9 \\
 & & 18 & -21 & -9 \\
\hline
 & 6 & -7 & -3 & 0
\end{array}
$$

معاملات الناتج — الباقي

= اضرب في $c$ واكتب الناتج. = اجمع الحدود.

كما هو الحال مع قسمة الدوال كثيرة الحدود عن طريق القسمة المطوّلة، تذكر استخدام الأصفار كقيمة رمزية لأي حدود ناقصة بالمقسوم. عند قسمة كثيرة الحدود على أحد عواملها ذات الحدين $x - c$، فإنه يطلق على ناتج القسمة **كثيرة الحدود المنخفضة**.

## مثال 4 القسمة التركيبية

**اقسم باستخدام القسمة التركيبية.**

**a.** $(2x^4 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x + 2)$

حيث إن $c = -2$, $x + 2 = x - (-2)$. قم بإجراء القسمة التركيبية كالتالي، باستخدام القيمة الرمزية للصفر للحد المفقود $x^3$ في المقسوم. ثم اتبع إجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ & & -4 & 8 & -6 & 2 \\ \hline & 2 & -4 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

= اجمع الحدود.

= اضرب في $c$ واكتب الناتج.

معاملات الدالة كثيرة الحدود المنخفضة — الباقي

يتضمن ناتج القسمة درجة واحدة أصغر من تلك التي يحتوي عليها المقسوم، لذا

$$\frac{2x^4 - 5x^2 + 5x - 2}{x + 2} = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$$

تحقق من هذه النتيجة

**b.** $(10x^3 - 13x^2 + 5x - 14) \div (2x - 3))$

أعد كتابة تعبير القسمة بحيث يكون المقسوم عليه على هذه الصورة $x - c$.

$$\frac{5x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7}{x - \frac{3}{2}} = \frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3} = \frac{(10x^3 - 13x^2 + 5x - 14) \div 2}{(2x - 3) \div 2}$$

إذًا، $c = \frac{3}{2}$ . قم بإجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 5 & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -7 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 5 & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -7 \\ & & \frac{15}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ \hline & 5 & 1 & 4 & \boxed{-1} \end{array}$$

إذًا، $\frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3} = 5x^2 + x + 4 - \frac{1}{x - \frac{3}{2}} = 5x^2 + x + 4 - \frac{2}{2x - 3}$ تحقق من هذه النتيجة.

**تمرين موجّه**

**4A.** $(4x^3 + 3x^2 - x + 8) \div (x - 3)$

**4B.** $(6x^4 + 11x^3 - 15x^2 - 12x + 7) \div (3x + 1)$

**نصيحة تكنولوجية**

**استخدام التمثيلات البيانية**

للتحقق من عملية القسمة، يمكنك تمثيل تعبير قسمة الدالة كثيرة الحدود والدالة كثيرة الحدود المنخفضة ذات الباقي بيانيًا. يجب أن تتطابق التمثيلات البيانية.

## 2 نظريتا الباقي والعامل

عندما يكون $d(x) = (x - c)$ هو المقسوم عليه من الدرجة 1 ويكون الباقي هو العدد الحقيقي $r$. بالتالي، يتم تبسيط خوارزمية القسمة إلى

$$f(x) = (x - c) \times q(x) + r$$

عند إيجاد قيمة $f(x)$ حيث $x = c$، نجد أن

$$r = f(c) = (c - c) \times q(c) + r = 0 \times q(c) + r$$

إذًا $f(c) = r$، الذي يمثل الباقي. وهذا يقودنا إلى النظرية التالية.

**المفهوم الأساسي نظرية الباقي**

إذا كانت الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ مقسومة على $x - c$، فإن الباقي هو $r = f(c)$

تشير نظرية الباقي إلى أنه لإيجاد قيمة الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ حيث $x = c$، يمكنك قسمة $f(x)$ على $x - c$ باستخدام القسمة التركيبية. سيكون الباقي $f(c)$ باستخدام القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة تُسمى **التعويض التركيبي**.

## مثال 5 من الحياة اليومية استخدام نظرية الباقي

**كرة القدم يمكن تمثيل عدد التذاكر المبيعة أثناء موسم كرة القدم باستخدام $t(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 74$ حيث إن $x$ هو عدد المباريات التي تم لعبها. استخدم نظرية الباقي لإيجاد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثانية عشرة بموسم كرة القدم.**

لإيجاد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثانية عشرة، استخدم التعويض التركيبي لتقييم $t(x)$ حيث $x = 12$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 1 | −12 | 48 | 74 |
| | | 12 | 0 | 576 |
| | 1 | 0 | 48 | 650 |

الباقي هو 650، حيث إن $t(12) = 650$ وبالتالي، تم بيع 650 تذكرة خلال المباراة الثانية عشرة بالموسم.

**تحقق من الحل** يمكنك التحقق من صحة إجابتك باستخدام التعويض المباشر.

$t(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 74$ الدالة الأصلية

$t(12) = (12)^3 - 12(12)^2 + 48(12) + 74 = 650$ ✓ استبدل 12 لـ $x$ وبسّط.

**تمرين موجّه**

5. **كرة القدم** استخدم نظرية الباقي لتحديد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثالثة عشر بموسم كرة القدم بالموسم.

**الربط بالحياة اليومية**

إن قواعد كرة القدم بالمدرسة الثانوية مشابهة لقواعد كرة القدم بالكليات والمحترفين. يتمثل أكبر اختلافين في أن مدة الأشواط تكون 12 دقيقة في مقابل 15 دقيقة وأن نقطة الانطلاق تبدأ من خط الـ 40 ياردة بدلاً من الـ 30 ياردة.

**المصدر:** *الاتحاد الوطني لجمعيات المدارس الثانوية بالولايات المتحدة الأمريكية*

إذا كنت تستخدم نظرية الباقي لإيجاد قيمة $f(x)$ عند $x = c$ والنتيجة هي $f(c) = 0$، إذًا فأنت تعلم أن $c$ هو صفر الدالة و $(x - c)$ هو العامل. يقودنا هذا إلى نظرية مفيدة تقدم اختبارًا لتحديد ما إذا كان $(x - c)$ هو عامل $f(x)$

### المفهوم الأساسي نظرية العامل

يكون للدالة كثيرة الحدود $f(x)$ العامل $(x - c)$ فقط في حالة $f(c) = 0$

يمكنك استخدام القسمة التركيبية لإجراء هذا الاختبار.

## مثال 6 استخدام نظرية العامل

**استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين المقدمة عوامل لـ $f(x)$ واستخدم التعابير ذات الحدين التي تُعد عوامل لكتابة الصيغة التي تم تحليلها إلى العوامل لـ $f(x)$**

**a.** $f(x) = 4x^4 + 21x^3 + 25x^2 - 5x + 3;\ (x - 1),\ (x + 3)$

استخدم القسمة التركيبية لاختبار كل عامل، $(x - 1)$ و $(x + 3)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −3 | 4 | 21 | 25 | −5 | 3 |
| | | −12 | −27 | 6 | −3 |
| | 4 | 9 | −2 | 1 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 21 | 25 | −5 | 3 |
| | | 4 | 25 | 50 | 45 |
| | 4 | 25 | 50 | 45 | 48 |

بما أن الباقي عند $f(x)$ مقسومًا على $(x + 3)$ يكون0. إذًا $f(-3) = 0$ و $(x + 3)$ يُعد عاملاً.

لأن الباقي عند $f(x)$ مقسومًا على $(x - 1)$ يكون $f(1) = 48$ و $(x - 1)$ لا يُعد عاملاً.

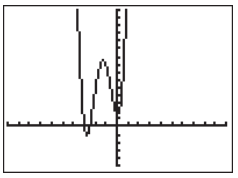
نظرًا لأن $(x + 3)$ يُعد عاملاً لـ $f(x)$، يمكننا استخدام ناتج القسمة $f(x) \div (x + 3)$ لكتابة صيغة المعادلة بعد تحليلها إلى العوامل $f(x)$

$$f(x) = (x + 3)(4x^3 + 9x^2 - 2x + 1)$$

**نصيحة تكنولوجية**

**الأصفار** يمكنك التأكد من الأصفار بالتمثيل البياني لدالة ما باستخدام خاصية الصفر من قائمة CALC في الحاسبة البيانية.

**التحقق من الحل** إذا كان $(x + 3)$ عاملاً في المعادلة $f(x) = 4x^4 + 21x^3 + 25x^2 - 5x + 3$ إذًا فإن $-3$ هي صفر الدالة و$(-3, 0)$ هي نقطة التقاطع مع المحور الأفقي للتمثيل البياني. مثّل $f(x)$ بيانيًا باستخدام حاسبة بيانية واثبت أن $(-3, 0)$ نقطة على التمثيل البياني. ✔



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 30] scl: 2

**b.** $f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20;\ (x + 4),\ (x - 5)$

استخدم القسمة التركيبية لاختبار العامل $(x + 4)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −4 | 2 | −1 | −41 | −20 |
| | | −8 | 36 | 20 |
| | 2 | −9 | −5 | 0 |

بما أن الباقي عندما يكون $f(x)$ مقسومًا على $(x + 4)$ هو 0. فإن $f(-4) = 0$ ويكون $(x + 4)$ عاملاً لـ $f(x)$.

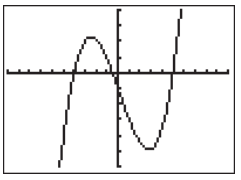
بعد ذلك، اختبر العامل الثاني، $(x - 5)$ باستخدام الدالة كثيرة الحدود المنخفضة $2x^2 - 9x - 5$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 2 | −9 | −5 |
| | | 10 | 5 |
| | 2 | 1 | 0 |

بما أن الباقي عندما يكون $f(x)$ مقسومًا على $(x - 5)$ هو 0. فإن $f(5) = 0$ و $(x - 5)$ هو عامل $f(x)$. بما أن $(x + 4)$ و$(x - 5)$ عاملان لـ $f(x)$. يمكننا استخدام ناتج القسمة النهائي لكتابة صيغة المعادلة $f(x)$ بعد تحليلها إلى العوامل

$$f(x) = (x + 4)(x - 5)(2x + 1)$$

**تحقق من الحل** يؤكد التمثيل البياني $f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20$ أن $x = -4$ و $x = 5$ و $x = -\frac{1}{2}$ أصفار للدالة. ✔



[−10, 10] scl: 1 by [−120, 80] scl: 20

**تمرين موجّه**

**استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـ $f(x)$ واستخدم التعابير ذات الحدين لكتابة صيغة $f(x)$ بعد تحليلها إلى العوامل**

6A. $f(x) = 3x^3 - x^2 - 22x + 24;\ (x - 2),\ (x + 5)$

6B. $f(x) = 4x^3 - 34x^2 + 54x + 36;\ (x - 6),\ (x - 3)$

يمكنك اعتبار القسمة التركيبية أداة مفيدة لتحليل أصفار الدوال كثيرة الحدود وإيجادها.

## ملخص المفاهيم القسمة التركيبية والبواقي

إذا كان $r$ هو الباقي بعد عملية قسمة تركيبية لـ $f(x)$ من $(x - c)$، فإن العبارات التالية تكون صحيحة.

- $r$ هي قيمة $f(c)$
- إذا كان $r = 0$، فإن $(x - c)$ هو عامل $f(x)$
- إذا كان $r = 0$، فإن $c$ هو تقاطع المحور الأفقي $x$ للتمثيل البياني $f$
- إذا كان $r = 0$، فإن $x = c$ هو حل $f(x) = 0$

## تمارين

**حلِّل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المقدم والقسمة المطوَّلة.** (المثال 1)

1. $x^3 + 2x^2 - 23x - 60;\ x + 4$
2. $x^3 + 2x^2 - 21x + 18;\ x - 3$
3. $x^3 + 3x^2 - 18x - 40;\ x - 4$
4. $4x^3 + 20x^2 - 8x - 96;\ x + 3$
5. $-3x^3 + 15x^2 + 108x - 540;\ x - 6$
6. $6x^3 - 7x^2 - 29x - 12;\ 3x + 4$
7. $x^4 + 12x^3 + 38x^2 + 12x - 63;\ x^2 + 6x + 9$
8. $x^4 - 3x^3 - 36x^2 + 68x + 240;\ x^2 - 4x - 12$

**اقسم باستخدام القسمة المطولة.** (المثالان 2 و 3)

9. $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x + 12) \div (x - 4)$
10. $(x^6 - 2x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 24) \div (x + 2)$
11. $(4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 12) \div (2x + 4)$
12. $(2x^4 - 7x^3 - 38x^2 + 103x + 60) \div (x - 3)$
13. $(6x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 15x^3 + 2x^2 + 10x - 6) \div (2x - 1)$
14. $(108x^5 - 36x^4 + 75x^2 + 36x + 24) \div (3x + 2)$
15. $(x^4 + x^3 + 6x^2 + 18x - 216) \div (x^3 - 3x^2 + 18x - 54)$
16. $(4x^4 - 14x^3 - 14x^2 + 110x - 84) \div (2x^2 + x - 12)$
17. $\dfrac{6x^5 - 12x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 8x + 8}{3x^3 + 2x + 3}$
18. $\dfrac{12x^5 + 5x^4 - 15x^3 + 19x^2 - 4x - 28}{3x^3 + 2x^2 - x + 6}$

**اقسم باستخدام القسمة التركيبية.** (المثال 4)

19. $(x^4 - x^3 + 3x^2 - 6x - 6) \div (x - 2)$
20. $(2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 8x - 4) \div (x + 3)$
21. $(3x^4 - 9x^3 - 24x - 48) \div (x - 4)$
22. $(x^5 - 3x^3 + 6x^2 + 9x + 6) \div (x + 2)$
23. $(12x^5 + 10x^4 - 18x^3 - 12x^2 - 8) \div (2x - 3)$
24. $(36x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 30x - 12) \div (3x + 1)$
25. $(45x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 8x + 12) \div (3x - 2)$
26. $(48x^5 + 28x^4 + 68x^3 + 11x + 6) \div (4x + 1)$
27. $(60x^6 + 78x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 25x - 20) \div (5x + 4)$
28. $\dfrac{16x^6 - 56x^5 - 24x^4 + 96x^3 - 42x^2 - 30x + 105}{2x - 7}$

29. **التعليم** يمكن تمثيل عدد طلاب من الآلاف الحاصلين على درجة البكالوريوس ما بين عامي 1970 و 2006 كما يلي $g(x) = 0.0002x^5 - 0.016x^4 + 0.512x^3 - 7.15x^2 + 47.52x + 800.27$. حيث إن $x$ هو عدد الأعوام منذ 1970. استخدم التعويض التركيبي لتقدير عدد الطلاب الذين تخرجوا عام 2005. قرّب إلى أقرب جزء من ألف. (المثال 5)

30. **التزلج** يمكن تمثيل المسافة التي يقطعها الشخص في التزلج بالأمتار على النحو التالي $d(t) = 0.2t^2 + 3t$. حيث إن $t$ هو الزمن بالثواني. استخدم نظرية الباقي لإيجاد المسافة المقطوعة بعد 45 s. (المثال 5)

**جد كل $f(c)$ باستخدام التعويض التركيبي.** (المثال 5)

31. $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + x^3 - 6x^2 + 8x - 15;\ c = 3$
32. $f(x) = 3x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 8x - 3;\ c = 4$
33. $f(x) = 2x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 3x - 4;\ c = 5$
34. $f(x) = 4x^6 + 8x^5 - 6x^3 - 5x^2 + 6x - 4;\ c = 6$
35. $f(x) = 10x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 8;\ c = -6$
36. $f(x) = -6x^7 + 4x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 15x^2 - 9x + 64;\ c = 2$
37. $f(x) = -2x^8 + 6x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 6x + 24;\ c = 4$

**استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـ $f(x)$ استخدم التعابير ذات الحدين لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$** (مثال 6)

38. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + x + 6;\ (x + 2),\ (x - 1)$
39. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 8x + 12;\ (x - 1),\ (x + 3)$
40. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 18x + 135;\ (x - 5),\ (x + 5)$
41. $f(x) = 3x^4 - 22x^3 + 13x^2 + 118x - 40;\ (3x - 1),\ (x - 5)$
42. $f(x) = 4x^4 - x^3 - 36x^2 - 111x + 30;\ (4x - 1),\ (x - 6)$
43. $f(x) = 3x^4 - 35x^3 + 38x^2 + 56x + 64;\ (3x - 2),\ (x + 2)$
44. $f(x) = 5x^5 + 38x^4 - 68x^2 + 59x + 30;\ (5x - 2),\ (x + 8)$
45. $f(x) = 4x^5 - 9x^4 + 39x^3 + 24x^2 + 75x + 63;\ (4x + 3),\ (x - 1)$

46. **الأشجار** يوضح الجدول أدناه ارتفاع شجرة بالأمتار في أعمار مختلفة بالأعوام.

| العمر | الارتفاع | العمر | الارتفاع |
|---|---|---|---|
| 2 | 3.3 | 24 | 73.8 |
| 6 | 13.8 | 26 | 82.0 |
| 10 | 23.0 | 28 | 91.9 |
| 14 | 42.7 | 30 | 101.7 |
| 20 | 60.7 | 36 | 111.5 |

a. استخدم حاسبة رسوم بيانية لكتابة معادلة تربيعية لتمثيل نمو الشجرة.

b. استخدم القسمة التركيبية لتقييم ارتفاع الشجرة عند 15 عامًا.

47. **ركوب الدراجات الهوائية** يقود عبيد دراجته بسرعة ابتدائية $v_0$ من 4 أمتار في الثانية. عندما يمر بمنحدر، تزيد سرعة الدراجة بمعدل $a$ من $0.4\ m/s^2$. المسافة الرأسية من أعلى التل إلى أسفله 25 m. استخدم $d(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ لإيجاد الزمن الذي سيستغرقه عبيد حتى ينزل من التل، حيث إن $d(t)$ هي المسافة المقطوعة و $t$ الموضح بالثواني.

**حلِّل كل دالة كثيرة الحدود باستخدام العامل الموضح والقسمة المطوَّلة. افترض $n > 0$.**

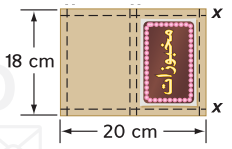
48. $x^{3n} + x^{2n} - 14x^{n} - 24;\ x^{n} + 2$

49. $x^{3n} + x^{2n} - 12x^{n} + 10;\ x^{n} - 1$

50. $4x^{3n} + 2x^{2n} - 10x^{n} + 4;\ 2x^{n} + 4$

51. $9x^{3n} + 24x^{2n} - 171x^{n} + 54;\ 3x^{n} - 1$

52. **التصنيع** يتم قص قطعة من الورق المقوى مقاس 18 cm في 20 cm من الورق المقوى وطيها داخل صندوق مخبز.




a. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل حجم الصندوق.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

c. ترغب الشركة في أن يكون حجم الصندوق $196\ cm^3$. اكتب معادلة لتمثيل هذه الحالة.

d. جد عددًا صحيحًا موجبًا لـ $x$ التي تحقق المعادلة الموجودة في الجزء **c**.

**جد حجم $k$ بحيث يكون كل باقي صفرًا.**

53. $\dfrac{x^3 - kx^2 + 2x - 4}{x - 2}$

54. $\dfrac{x^3 + 18x^2 + kx + 4}{x + 2}$

55. $\dfrac{x^3 + 4x^2 - kx + 1}{x + 1}$

56. $\dfrac{2x^3 - x^2 + x + k}{x - 1}$

57. **النحت** سيستخدم عيسى كتلة من الطين بحجم 3 m في 4 m في 5 m في صنع تمثال. ويرغب في تقليص حجم الطين بإزالة نفس الكمية من الطول والعرض والارتفاع.

a. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل الموقف.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

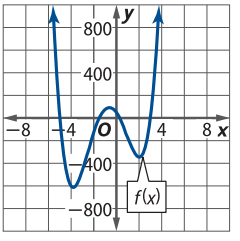
c. إنه يرغب في تقليص حجم الطين إلى $\frac{3}{5}$ من الحجم الأصلي. اكتب معادلة لتمثيل هذه الحالة.

d. كم ينبغي عليه أن يقتطع من كل بُعد؟

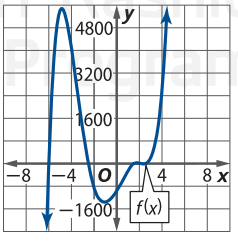
**استخدم التمثيلات البيانية والقسمة التركيبية لتحليل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل.**

58. $f(x) = 8x^4 + 26x^3 - 103x^2 - 156x + 45$ (الشكل 1.3.1)

59. $f(x) = 6x^5 + 13x^4 - 153x^3 + 54x^2 + 724x - 840$ (الشكل 1.3.2)




**الشكل 1.3.1**




**الشكل 1.3.2**

60. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف القيمتين العظمى والصغرى لدالة ما.

a. **العرض البياني** مثّل كل دالة كثيرة الحدود ذات صلة بيانيًا وحدد الأصفار الأكبر والأصغر. ثم انسخ وأكمل الجدول.

| الدالة كثيرة الحدود | أكبر صفر | أصغر صفر |
|---|---|---|
| $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ | | |
| $x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 10x$ | | |
| $x^5 - x^4 - 2x^3$ | | |

b. **العرض العددي** استخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة كل دالة في الجزء **a** لقيم الأعداد الصحيحة الثلاثة الأكبر من الصفر الأكبر.

c. **العرض الكلامي** قدّم فرضية عن خصائص الصف الأخير عندما تُستخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة ما لعددٍ صحيحٍ أكبر من صفره الأكبر.

d. **العرض العددي** استخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة كل دالة في الجزء **a** لقيم الأعداد الصحيحة الثلاثة الأقل من الصفر الأصغر.

e. **العرض الكلامي** قدم فرضية عن خصائص الصف الأخير عندما تُستخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة عدد ما أقل من صفره الأصغر.

## مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

61. **تحدٍ** هل $(x - 1)$ عامل $18x^{165} - 15x^{135} + 8x^{105} - 15x^{55} + 4$؟ اشرح استنتاجك.

62. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكنك استخدام الحاسبة البيانية والقسمة التركيبية وتحليل العامل لتحليل الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة ذات المعاملات النسبية والأصفار الثلاثة الصحيحة والصفرين النسبيين غير الصحيحين.

63. **الاستنتاج** حدد هل كل عبارة أدناه صحيحة أم خاطئة. اشرح.

إذا كان $h(y) = (y + 2)(3y^2 + 11y - 4) - 1$، فإن باقي $\dfrac{h(y)}{y + 2}$ هو $-1$

**تحدٍ جد $k$ بحيث يحتوي الناتج على باقي 0.**

64. $\dfrac{x^3 + kx^2 - 34x + 56}{x + 7}$

65. $\dfrac{x^6 + kx^4 - 8x^3 + 173x^2 - 16x - 120}{x - 1}$

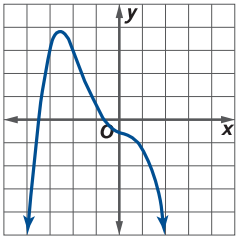
65. $\dfrac{kx^3 + 2x^2 - 22x - 4}{x - 2}$

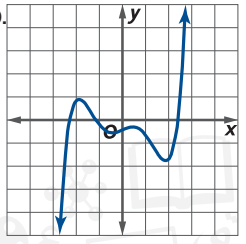
67. **تحدٍ** إذا كان $2x^2 - dx + (31 - d^2)x + 5$ يحتوي على عامل $x - d$. فما قيمة $d$ إذا كان $d$ عددًا صحيحًا؟

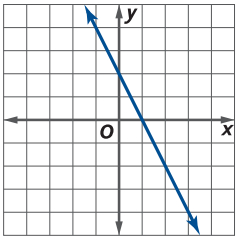
68. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق في قسمة الدالة كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطوّلة والقسمة التركيبية.

## مراجعة شاملة

**حدد هل درجة $n$ في الدالة كثيرة الحدود لكل تمثيل بياني زوجية أم فردية وهل معامل الحد الأكبر فيها $a_n$ موجبًا أم سالبًا.** (الدرس 2-2)

69.



70.



71.



72. **التقفز بالمظلات** يتم إيجاد الزمن التقريبي $t$ بالثواني الذي يستغرقه سقوط جسمٍ ما من مسافة $d$ قدم باستخدام المعادلة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$ لنفترض أن اللاعب سقط قبل أن يفتح المظلة بمدة 11 ثانية. فما المسافة التي يسقطها اللاعب خلال هذه المدة؟ (الدرس 1-2)

73. **مكافحة الحرائق** يتم تمثيل السرعة $v$ وأقصى ارتفاع $h$ للمياه التي يتم ضخها في الهواء باستخدام المعادلة $v = \sqrt{2gh}$، حيث $g$ هو السرعة بسبب الجاذبية ($32\ ft/s^2$) (الدرس 1-7)

a. حدّد معادلة ستنتج أقصى ارتفاع للمياه كدالة سرعتها.

b. يجب على إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة قوية بما يكفي لدفع المياه لمسافة 80 ft في الهواء. هل ستلبي المضخة المُعلن عنها للمشروع بسرعة 75 ft/s احتياجات إدارة مكافحة الحرائق؟ اشرح.

**حُل أنظمة المعادلات التالية جبريًا.**

**74.** $5x - y = 16$
$2x + 3y = 3$

**75.** $3x - 5y = -8$
$x + 2y = 1$

**76.** $y = 6 - x$
$x = 4.5 + y$

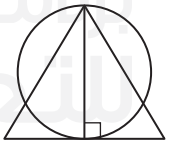
**77.** $2x + 5y = 4$
$3x + 6y = 5$

**78.** $7x + 12y = 16$
$5y - 4x = -21$

**79.** $4x + 5y = -8$
$3x - 7y = 10$

## مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

**80. اختبارا SAT/ACT** في الشكل الموضح، مثلث متساوي الأضلاع مرسوم أيضًا بارتفاع قطر الدائرة. إذا كان محيط المثلث 36، فما محيط الدائرة؟



A $6\sqrt{2}\pi$
B $6\sqrt{3}\pi$
C $12\sqrt{2}\pi$
D $12\sqrt{3}\pi$
E $36\pi$

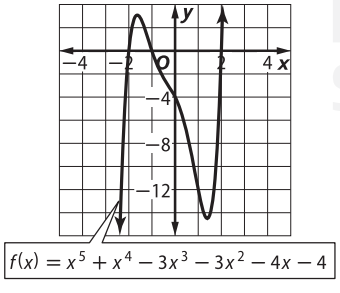
**81. مراجعة** إذا كان $(3, -7)$ هو مركز الدائرة وتقع النقطة $(8, 5)$ على الدائرة، فما محيط الدائرة؟

F $13\pi$
G $15\pi$
H $18\pi$
J $25\pi$
K $26\pi$

**82. مراجعة** الحد الأول في المتتالية هو $x$. كل حد لاحق هو ثلاثة أضعاف من ضعف الحد السابق. ما الحد الخامس في المتتالية؟

A $8x - 21$
B $8x - 15$
C $16x - 39$
D $16x - 45$
E $32x - 43$

83. استخدم التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود. أي مما يلي لا يُعد عامل $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟




F $(x - 2)$
G $(x + 2)$
H $(x - 1)$
J $(x + 1)$

# اختبار منتصف الوحدة

## الدروس 1-1 إلى 1-3

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال للدالة، وفترات تزايد الدالة أو تناقصها.** (الدرس 1-1)

1. $f(x) = 2x^3$
2. $f(x) = -\frac{2}{3}x^4$
3. $f(x) = 3x^{-8}$
4. $f(x) = 4x^{\frac{2}{5}}$

5. **الأشجار** فيما يلي أطوال أشجار التنوب والمساحات التي تغطيها فروعها. (الدرس 1-1)

| المساحة ($m^2$) | الارتفاع (m) |
|---|---|
| 37.95 | 4.2 |
| 7.44 | 2.1 |
| 23.54 | 3.4 |
| 4.75 | 1.7 |
| 46.48 | 4.6 |

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

b. حدد دالة أسية لتمثيل للبيانات.

c. توقع المساحة التي تغطيها فروع شجرة التنوب بارتفاع 7.6 m.

**حُلّ كل لكل من المعادلات التالية.** (الدرس 1-1)

6. $\sqrt{5x + 7} = 13$
7. $\sqrt{2x - 2} + 1 = x$
8. $\sqrt{3x + 10} + 1 = \sqrt{x + 11}$
9. $-5 = \sqrt[4]{(6x + 3)^3} - 32$

**اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.** (الدرس 1-2)

10. $f(x) = x^2 - 11x - 26$
11. $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3$
12. $f(x) = x^4 + 9x^2 - 10$

13. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يوضح السلوك الطرفي الممكن لدالة أحادية الحد من الدرجة الفردية؟ (الدرس 1-2)

A $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$

B $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

C $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

D $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

**وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس.** (الدرس 1-2)

14. $f(x) = -7x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 23x + 7$
15. $f(x) = -5x^5 + 4x^4 + 12x^2 - 8$

16. **الطاقة** فيما يلي استهلاك خولة للكهرباء بالكيلو واط في الساعة (kWh) خلال 12 شهرًا الماضية. (الدرس 1-2)

| الشهر | الاستهلاك (kWh) | الشهر | الاستهلاك (kWh) |
|---|---|---|---|
| يناير | 240 | يوليو | 300 |
| فبراير | 135 | أغسطس | 335 |
| مارس | 98 | سبتمبر | 390 |
| أبريل | 110 | أكتوبر | 345 |
| مايو | 160 | نوفمبر | 230 |
| يونيو | 230 | ديسمبر | 100 |

a. حدد نموذجًا لعدد الكيلو واط بالساعات التي استخدمتها خولة كدالة لعدد الأشهر منذ يناير.

b. استخدم النموذج لتوقع عدد الكيلو واط بالساعات التي ستستخدمها خولة في يناير القادم. هل هذه الإجابة منطقية؟ اشرح استدلالك.

**القسمة باستخدام القسمة التركيبية.** (الدرس 1-3)

17. $(5x^3 - 7x^2 + 8x - 13) \div (x - 1)$
18. $(x^4 - x^3 - 9x + 18) \div (x - 2)$
19. $(2x^3 - 11x^2 + 9x - 6) \div (2x - 1)$

**حدد كل $f(c)$ باستخدام التعويض التركيبي.** (الدرس 1-3)

20. $f(x) = 9x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 16x + 8$; $c = 2$
21. $f(x) = 6x^6 - 3x^5 + 8x^4 + 12x^2 - 6x + 4$; $c = -3$
22. $f(x) = -2x^6 + 8x^5 - 12x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 6x - 3$; $c = -2$

**استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة عوامل لـ $f(x)$ استخدم التعابير ذات الحدين التي تُعد عوامل لكتابة الصيغة $f(x)$ بعد تحليلها إلى العوامل** (الدرس 1-3)

23. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 25x - 50$; $(x + 5)$
24. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$; $(x - 1)$, $(x - 2)$

25. **الاختيار من متعدد** جد الباقي عند قسمة $f(x) = x^3 - 4x + 5$ على $x + 3$ (الدرس 1-3)

F $-10$
G $8$
H $20$
J $26$

# الدرس 1-4 أصفار الدوال كثيرة الحدود

**السابق**

- تعلمت أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة $n$ يمكن أن تحتوي على $n$ أصفار حقيقية على الأكثر. (الدرس 1-1)

**الحالي**

1. إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود.
2. إيجاد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود.

**لماذا؟**


- تقدّر شركة أن الأرباح $P$ بآلاف الدراهم من نموذج معين لجهاز التحكم في ألعاب الفيديو كما يلي $P(x) = -0.0007x^2 + 2.45x$، بحيث $x$ هو عدد الآلاف بالدرهم المستثمرة في تسويق جهاز التحكم. لمعرفة عدد الدراهم التي ينبغي أن تستثمرها الشركة لتحقيق أرباح تبلغ AED 1,500,000 ، يمكنك استخدام الأساليب الواردة في هذا الدرس لحل المعادلة كثيرة الحدود $P(x) = 1{,}500$

**مفردات جديدة**

نظرية الصفر النسبي
Rational Zero Theorem
الحد الأدنى lower bound
الحد الأعلى upper bound
قاعدة ديكارت للإشارات
Descartes' Rule of Signs
نظرية الجبر الأساسية
Fundamental Theorem of Algebra
نظرية التحليل إلى العوامل الخطية
Linear Factorization Theorem
نظرية الجذر المرافق
Conjugate Root Theorem
مترافقات مركبة complex conjugates
الجذور الحقيقية غير القابلة للاختزال
irreducible over the reals

## 1 الأصفار الحقيقية

تذكّر أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة $n$ يمكن أن تحتوي على $n$ من الأصفار الحقيقية. ويمكن أن تكون هذه الأصفار الحقيقية نسبية أو غير نسبية.

| الأصفار النسبية | الأصفار غير النسبية |
|---|---|
| $f(x) = 3x^2 + 7x - 6$ أو $f(x) = (x + 3)(3x - 2)$ يوجد صفران نسبيان، $-3$ أو $\frac{2}{3}$ | $g(x) = x^2 - 5$ أو $g(x) = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$ يوجد صفران غير نسبيين، $\pm\sqrt{5}$ |

توضح **نظرية الصفر النسبي** كيف يمكن استخدام معامل الحد الرئيس والحد الثابت لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

### المفهوم الأساسي نظرية الصفر النسبي

بما أن $f$ دالة كثيرة الحدود بالصيغة التالية $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات من الأعداد الصحيحة

و $a_0 \neq 0$، فإن كل صفر نسبي للدالة $f$ يُمثل بالصيغة $\frac{p}{q}$، بحيث

- $p$ و $q$ لا يوجد لهما أي عوامل مشتركة إلا $\pm 1$
- $p$ عامل عدد صحيح للحد الثابت $a_0$
- $q$ عامل عدد صحيح لمعامل الحد الرئيس $a_n$

**النتيجة** إذا كان معامل الحد الرئيس $a_n$ يساوي 1، فأي صفر نسبي للدالة $f$ يُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت $a_0$

بمجرد أن تعرف جميع الأصفار النسبية الممكنة لدالة كثيرة الحدود، يمكنك استخدام التعويض المباشر أو التركيبي لتحديد أي منها يُعد أصفارًا فعلية للدالة كثيرة الحدود.

### مثال 1 معامل الحد الرئيس يساوي 1

**اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.**

a. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

**الخطوة 1** حدد الأصفار النسبية الممكنة.

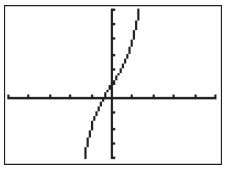
بما أن معامل الحد الرئيس يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت 1. لذا، الأصفار النسبية الممكنة للدالة $f$ هي 1 و $-1$

**الخطوة 2** استخدم التعويض المباشر لاختبار كل صفر ممكن.

$f(1) = (1)^3 + 2(1) + 1$ أو 4

$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 1$ أو $-2$

بما أن $f(1) \neq 0$ و $f(-1) \neq 0$، يمكنك استنتاج أن $f$ لا يحتوي على أصفار نسبية. من التمثيل البياني للدالة $f$، يمكنك معرفة أن $f$ تحتوي على صفر حقيقي واحد. يوضح تطبيق نظرية الأصفار النسبية أن هذا الصفر غير نسبي.



[-5, 5] scl: 1 by [-4, 6] scl: 1

b. $g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9$

**الخطوة 1** بما أن معامل الحد الرئيس يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت $-9$. لذا، الأصفار النسبية الممكنة للدالة g هي $\pm1$ و $\pm3$ و$\pm9$

**الخطوة 2** ابدأ باختبار 1 و$-1$ باستخدام التعويض التركيبي.

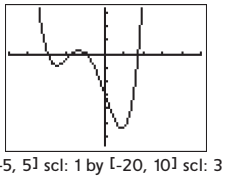
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | 4 | 0 | $-12$ | $-9$ |
| | | $-1$ | $-3$ | 3 | 9 |
| | 1 | 3 | $-3$ | $-9$ | 0 |
| $-3$ | 1 | 3 | $-3$ | $-9$ | |
| | | $-3$ | 0 | 9 | |
| | 1 | 0 | $-3$ | 0 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 0 | $-12$ | $-9$ |
| | | 1 | 5 | 5 | $-7$ |
| | 1 | 5 | 5 | $-7$ | $-16$ |

بما أن $g(-1) = 0$، يمكنك استنتاج أن $-1$ يساوي صفرًا في $g$. يوضح اختبار $-3$ على الدالة كثيرة الحدود المنخفضة أن $-3$ هو صفر نسبي آخر.

لذا، $g(x) = (x + 1)(x + 3)(x^2 - 3)$ وبما أن العامل $(x^2 - 3)$ لا ينتج عنه أي أصفار نسبية، يمكننا استنتاج أن $g$ يحتوي فقط على صفرين نسبيين $-1$ و$-3$.

**التحقق من الحل** يحتوي التمثيل البياني للدالة $g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9$ في الشكل 1.4.1 على نقاط تقاطع مع المحور الأفقي $x$ عند $-1$ و$-3$ وبالقرب من $(2, 0)$ و$(-2, 0)$. من خلال تطبيق نظرية الأصفار النسبية، نعرف أن هذين الصفرين الأخيرين يجب أن يكونا غير نسبيين.
في الحقيقة، ينتج عن العامل $(x^2 - 3)$ صفران غير نسبيين، $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ ✔




**الشكل 1.4.1**

**تمرين موجّه**

**اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.**

**1A.** $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2$

**1B.** $h(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 30$

عندما لا يساوي معامل أكبر حد في الدالة كثيرة الحدود 1، يمكن أن تزيد قائمة الأصفار النسبية الممكنة بدرجة كبيرة.

## مثال 2 معامل الحد الرئيس لا يساوي 1

**اذكر جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة $h(x) = 3x^3 - 7x^2 - 22x + 8$ ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.**

**الخطوة 1** معامل الحد الرئيس هو **3** والحد الثابت هو **8**.

الأصفار النسبية الممكنة: $\frac{\text{عوامل } 8}{\text{عوامل } 3} = \frac{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8}{\pm1, \pm3} = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}$

**الخطوة 2** باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن $-2$ صفر نسبي.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 3 | $-7$ | $-22$ | 8 |
| | | $-6$ | 26 | $-8$ |
| | 3 | $-13$ | 4 | 0 |

بتطبيق خوارزمية القسمة، $h(x) = (x + 2)(3x^2 - 13x + 4)$ وبمجرد تحليل $3x^2 - 13x + 4$ إلى العوامل، تصبح الدالة كثيرة الحدود $h(x) = (x + 2)(3x - 1)(x - 4)$ ويمكنك استنتاج أن الأصفار النسبية للدالة $h$ هي $-2$ و$\frac{1}{3}$ و 4. تحقق من هذه النتيجة بالتمثيل البياني.

**تمرين موجّه**

**اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.**

**2A.** $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 18x - 36$

**2B.** $f(x) = 3x^4 - 18x^3 + 2x - 21$

## مثال 3 من الحياة اليومية حل معادلة كثيرة الحدود

**الأعمال بعد أول نصف ساعة، يمكن تمثيل عدد ألعاب الفيديو التي باعتها الشركة في تاريخ الإصدار كما يلي $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x$، بحيث يكون $g(x)$ هو عدد الألعاب المبيعة بالمئات و $x$ عدد الساعات بعد الإصدار. ما الزمن المستغرق لبيع 400 لعبة؟**

بما أن $g(x)$ تمثل عدد الألعاب المبيعة بالمئات، يجب أن تحل $g(x) = 4$ لتحديد الزمن المستغرق لبيع 400 لعبة.

| | |
|---|---|
| $g(x) = 4$ | اكتب المعادلة. |
| $2x^3 + 4x^2 - 2x = 4$ | قم بتعويض $2x^3 + 4x^2 - 2x$ لـ $g(x)$ |
| $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$ | اطرح 4 من كل طرف. |

طبّق نظرية الأصفار النسبية على هذه الدالة الجديدة كثيرة الحدود $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

**الخطوة 1** الأصفار النسبية الممكنة: $\frac{\text{4 عوامل}}{\text{2 عوامل}} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4}{\pm 1, \pm 2}$

$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2} =$

**الخطوة 2** باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن 1 يمثل صفرًا نسبيًا.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | −2 | −4 |
| | | 2 | 6 | 4 |
| | 2 | 6 | 4 | 0 |

بما أن 1 يمثل صفرًا للدالة $f$. إذًا $x = 1$ يعد حلاً للدالة $f(x) = 0$. يمكن كتابة الدالة كثيرة الحدود المنخفضة $2x^2 + 6x + 4$ كما يلي $2(x + 1)(x + 2)$ وأصفار هذه الدالة كثيرة الحدود 1− و2− وبما أن الزمن لا يمكن أن يكون بالسالب، إذًا الحل $x = 1$. لذا، يستغرق الزمن ساعة واحدة لبيع 400 لعبة.

### تمرين موجّه

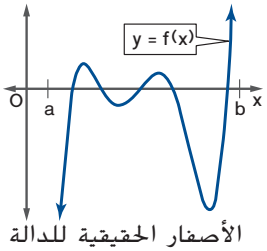
3. **الكرة الطائرة** فيما يلي التمثيل البياني لكرة طائرة عادت بعد ضربها بسرعة أولية 40 مترًا في الثانية بارتفاع 4 مترًا $f(t) = 4 + 40t - 16t^2$، بحيث $f(t)$ يمثل ارتفاع الكرة بالقدم و $t$ يمثل الزمن بالثواني. ما الزمن الذي ستصل به الكرة إلى ارتفاع 20 مترًا؟

### الربط بالحياة اليومية

أظهرت دراسة حديثة أن أعمار ما يقرب من ثلث هواة ألعاب الفيديو المعروفة بين 6 و 17 عامًا.

**المصدر:** NPD Group Inc

ثمة طريقة لتضييق البحث عن الأصفار الحقيقية وهي تحديد الفترة التي يتم فيها تحديد مواقع الأصفار الحقيقية للدالة. العدد الحقيقي $a$ هو **القيمة الصغرى** للأصفار الحقيقية للدالة $f$ إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $x < a$ وبالمثل، $b$ هو **القيمة العظمى** للأصفار الحقيقية للدالة $f$ إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $x > b$




الأصفار الحقيقية للدالة f توجد في الفترة [a, b]

يمكنك اختبار هل تحتوي فترة معينة على جميع الأصفار الحقيقية لدالة باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى التالية.

### المفهوم الأساسي اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

لنفرض أن $f$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات حقيقية ومعامل الحد الرئيس موجب. لنفرض أن $f(x)$ تمت قسمته على $x - c$ باستخدام القسمة التركيبية.

- إذا كان $c \leq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب وغير موجب، فإن $c$ هي قيمة صغرى للأصفار الحقيقية للدالة $f$
- إذا كان $c \geq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب، فإن $c$ هي قيمة عظمى للأصفار الحقيقية للدالة $f$

### القراءة في الرياضيات

**غير سالبة وغير موجبة** تذكّر أن القيمة غير السالبة هي القيمة الموجبة أو الصفر وأن القيمة غير الموجبة هي القيمة السالبة أو الصفر.

للاستفادة من اختبارات القيمة العظمى والقيمة الصغرى، اتبع هذه الخطوات.

**الخطوة 1** مثّل الدالة بيانيًا لتحديد فترة توجد فيها الأصفار.

**الخطوة 2** باستخدام التعويض التركيبي، تأكد أن القيمتين العظمى والصغرى للفترة هما في الحقيقة القيمتان العظمى والصغرى للدالة بتطبيق اختبارات القيمة العظمى والقيمة الصغرى.

**الخطوة 3** استخدم نظرية الصفر النسبي للمساعدة على إيجاد جميع الأصفار الحقيقية.

## مثال 4 استخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

**نصيحة دراسية**

**القيمتان العظمى والصغرى** ليس بالضرورة أن تكون القيمتان العظمى والصغرى لدالة فريدين.

**حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.**

**الخطوة 1** مثّل $h(x)$ بيانيًا باستخدام آلة حاسبة بيانية. من هذا التمثيل البياني، يبدو أن الأصفار الحقيقية لهذه الدالة توجد في الفترة $[-1, 7]$

**الخطوة 2** اختبر القيمة الصغرى للدالة $c = -1$ والقيمة العظمى للدالة $c = 7$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 2 | $-11$ | 2 | $-44$ | $-24$ |
| | | $-2$ | 13 | $-15$ | 59 |
| | 2 | $-13$ | 15 | $-59$ | 35 |
| 7 | 2 | $-11$ | 2 | $-44$ | $-24$ |
| | | 14 | 21 | 161 | 819 |
| | 2 | 3 | 23 | 117 | 795 |

تعمل القيم على تبديل الإشارات في السطر الأخير، لذا $-1$ هو القيمة الصغرى.

جميع القيم غير سالبة في السطر الأخير، لذا 7 هو القيمة العظمى.

**الخطوة 3** استخدم نظرية الصفر النسبي.

الأصفار النسبية الممكنة: $\frac{\text{24 عوامل}}{\text{4 عوامل}} = \frac{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24}{\pm1, \pm2}$

$= \pm1, \pm2, \pm3\ \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

بما أن الأصفار الحقيقية في الفترة $[-1, 7]$، يمكنك تضييق هذه القائمة إلى $\pm1$ أو $\pm\frac{1}{2}$ أو $\pm\frac{3}{2}$ أو 2 أو 4 أو 6 فقط. من التمثيل البياني، يبدو أن 6 و $-\frac{1}{2}$ فقط منطقيان.

ابدأ بإختبار $-\frac{1}{2}$ في الدالة كثيرة الحدود

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | 8 | 4 |
| | | $-1$ | 0 | $-4$ |
| | 2 | 0 | 8 | 0 |

الآن اختبر 6

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | $-11$ | 2 | $-44$ | $-24$ |
| | | 12 | 6 | 48 | 24 |
| | 2 | 1 | 8 | 4 | 0 |

بتطبيق خوارزمية القسمة، $h(x) = 2(x - 6)(x + \frac{1}{2})(x^2 + 4)$ لاحظ أن العامل $(x^2 + 4)$ لا توجد له أصفار حقيقية مرتبطة به لأن $x^2 + 4 = 0$ لا توجد لها حلول حقيقية. لذا، $f$ لها حلان حقيقيان نسبيان وهما 6 و $-\frac{1}{2}$ ويدعم التمثيل البياني للدالة $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$ هذا الاستنتاج.

### تمرين موجّه

**حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة المحددة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.**

**4A.** $g(x) = 6x^4 + 70x^3 - 21x^2 + 35x - 12$

**4B.** $f(x) = 10x^5 - 50x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 41x + 30$

ثمة طريقة أخرى لتضييق البحث عن الأصفار الحقيقية هي استخدام **قاعدة ديكارت للإشارات**. توفر هذه القاعدة معلومات عن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة في دالة كثيرة الحدود عن طريق فحص التغير في إشارة الدالة كثيرة الحدود.

**القراءة في الرياضيات**

**تغير الإشارة** يحدث تغير *الإشارة* في أي دالة مكتوبة بالصيغة القياسية عندما تحتوي المعاملات التالية على إشارات معاكسة.

## المفهوم الأساسي قاعدة ديكارت للإشارات

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ دالة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية، فإن

- عدد الأصفار الحقيقية *الموجبة* للدالة $f$ يساوي عدد تغيرات الإشارة للدالة $f(x)$ أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي
- عدد الأصفار الحقيقية *السالبة* للدالة $f$ هو نفسه عدد تغيرات الإشارة للدالة $f(-x)$ أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي محدد.

## مثال 5 استخدام قاعدة ديكارت للإشارات

**وضّح الأصفار الحقيقية الممكنة للدالة $g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$**

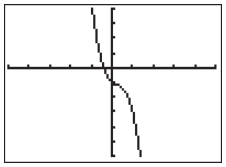
اختبر تغيرات الإشارة للدالة $g(x)$ والدالة $g(-x)$

$$g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$$g(-x) = -3(-x)^3 + 2(-x)^2 - (-x) - 1$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x - 1$$

تحتوي الدالة الأصلية $g(x)$ على تغيرين في الإشارة، بينما تحتوي الدالة $g(-x)$ على متغير واحد في الإشارة. بتطبيق قاعدة ديكارت للإشارات، تعرف أن الدالة $g(x)$ تحتوي على صفرين حقيقيين موجبين أو بدون أصفار وصفر حقيقي سالب واحد .

من التمثيل البياني للدالة $g(x)$ الموضحة، يمكنك معرفة أن الدالة تحتوي على صفر حقيقي سالب واحد قريب من $x = -0.5$ وبدون أصفار حقيقية موجبة.



[-5, 5] scl: 1 by [-6, 4] scl: 1

### تمرين موجّه

**وضح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة.**

**5A.** $h(x) = 6x^5 + 8x^2 - 10x - 15$

**5B.** $f(x) = -11x^4 + 20x^3 + 3x^2 - x + 18$

عند استخدام قاعدة ديكارت للإشارات، يتضمن عدد الأصفار الحقيقية الموضح أي أصفار متكررة. لذا، ينبغي حساب صفر بالتكرار $m$ كأصفار **m.**

**2 الأصفار المركبة** يمكن أن تحتوي مثل الدوال التربيعية على أصفار حقيقية أو تخيلية ويمكن أن تحتوي الدوال كثيرة الحدود ذات الدرجة الأعلى أيضًا على أصفار في نظام الأعداد المركبة. تجعلنا هذه الحقيقة بالإضافة إلى **نظرية الجبر الأساسية** نحسّن العبارة الخاصة بنا المعنية بعدد الأصفار لأي دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n$.

## المفهوم الأساسي نظرية الجبر الأساسية

تحتوي أي دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n$، بحيث $n > 0$، على صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة.

**النتيجة** تحتوي أي دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n$ على عدد $n$ معين من الأصفار، بما في ذلك الأصفار المُكررة، في نظام الأعداد المركبة.

**الربط بتاريخ الرياضيات**

**رينيه ديكارت (1596–1650)** فيلسوف وعالم ورياضي فرنسي. كتب ديكارت العديد من الأعمال الفلسفية مثل *نقاش المنهج* وأعمال رياضية مثل *الهندسة*.

بتوسيع نظرية العامل لتشمل كلاً من الأصفار الحقيقية والتخيلية وتطبيق نظرية الجبر الأساسية، نحصل على **نظرية التحليل إلى العوامل الخطية**.

## المفهوم الأساسي نظرية التحليل إلى العوامل الخطية

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n > 0$، فإن الدالة $f$ تحتوي على عدد $n$ معين من العوامل الخطية

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

حيث $a_n$ عدد حقيقي معين غير الصفر و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ هي الأصفار المركبة (بما في ذلك الأصفار المتكررة) للدالة $f$.

وفق **نظرية الجذر المرافق** عندما تحتوي معادلة كثيرة الحدود على متغير واحد وذات معاملات حقيقية على جذر بالصيغة $a + bi$، بحيث $b \neq 0$، فإن **المرافق المركب**، $a - bi$، يُعد جذرًا أيضًا. يمكنك استخدام هذه النظرية لكتابة دالة كثيرة الحدود توجد أصفارها المركبة.

## مثال 6 إيجاد دالة كثيرة الحدود أصفارها معلومة

**اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تتضمن 2− و 4 و $3 - i$ كأصفار.**

بما أن $3 - i$ صفرًا للدالة ويجب أن تحتوي الدالة كثيرة الحدود على معاملات حقيقية، إذًا تعرف أن $3 + i$ يجب أن تكون أيضًا هو صفرًا للدالة. باستخدام نظرية التحليل إلى العوامل الخطية والأصفار 2− و 4 و $3 - i$ و $3 + i$، يمكنك كتابة $f(x)$ كما يلي.

$$f(x) = a[x - (-2)](x - 4)[x - (3 - i)][x - (3 + i)]$$

في حين أن $a$ يمكن أن يكون عددًا حقيقيًا غير الصفر، من الأسهل أن نفرض أن $a = 1$. ثم بسّط الدالة.

$f(x) = (1)(x + 2)(x - 4)[x - (3 - i)][x - (3 + i)]$ لنفرض أن $a = 1$

$= (x^2 - 2x - 8)(x^2 - 6x + 10)$ اضرب

$= x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 28x - 80$ اضرب

وبالتالي، تصبح الدالة ذات أقل درجة التي تحتوي على 2− و 4 و $3 - i$ و $3 + i$ كأصفار هي $f(x) = x^4 - 8x^3\ 14x^2 + 28x - 80$ أو أي مضاعف غير صفري للدالة $f(x)$.

### تمرين موجّه

**اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية مع الأصفار الموضحة.**

**6A.** $-3, 4i, 1$ مكرر مرتين

**6B.** $2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 1 + i$

**نصيحة دراسية**

**الدوال كثيرة الحدود اللانهائية** بما أن $a$ يمكن أن يكون أي عدد حقيقي غير الصفر، إذًا يوجد عدد لا نهائي من الدوال كثيرة الحدود التي يمكن كتابتها لمجموعة معينة من الأصفار.

في المثال 6، كتبت معادلة بأصفار حقيقية ومركبة. تتضمن الدالة أصفارًا مركبة عندما تحتوي صيغتها المحللة على عامل تربيعي يُعد من الجذور الحقيقية غير القابلة للتبسيط. يصبح التعبير التربيعي **الجذور الحقيقية غير القابلة للتبسيط** عندما يحتوي على معاملات حقيقية غير مرتبطة بأصفار حقيقية. يوضح هذا المثال النظرية التالية.

## المفهوم الأساسي تحليل الدوال كثيرة الحدود على الأعداد الحقيقية

يمكن كتابة كل دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n > 0$ ذات معاملات حقيقية كناتج ضرب للعوامل الخطية وعوامل الجذور التربيعية غير القابلة للتبسيط، وكل له معاملات حقيقية.

**نصيحة دراسية**

**الدوال كثيرة الحدود الأولية** لاحظ الفرق بين التعابير التي تُعد جذورًا تربيعية وتعابير غير قابلة للتبسيط تُعد *أولية*. التعبير $x^2 - 8$ أولي لأنه لا يمكن تحليله إلى تعابير باستخدام معاملات صحيحة. ومع ذلك، لا تُعد $x^2 - 8$ جذورًا تربيعية غير قابلة للتبسيط لأنه توجد أصفار حقيقية مرتبطة بها $\sqrt{8}$ و $-\sqrt{8}$.

كما يتضح من نظرية التحليل إلى العوامل الخطية، عند تحليل دالة كثيرة الحدود على نظام الأعداد المركبة، يمكننا كتابة المعادلة بوصفها ناتج ضرب العوامل الخطية فقط.

## مثال 7 تحليل أصفار الدالة كثيرة الحدود وإيجادها

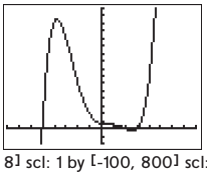
**لنفرض أن** $k(x) = x^5 - 18x^3 + 30x^2 - 19x + 30$

**a. اكتب $k(x)$ كناتج ضرب للعوامل الخطية وعوامل الجذور التربيعية غير القابلة للاختزال.**

الأصفار النسبية الممكنة هي $\pm1$، $\pm2$، $\pm3$، $\pm5$، $\pm6$، $\pm10$، $\pm15$، $\pm30$ وبذلك تحتوي الدالة الأصلية على 4 متغيرات إشارة.

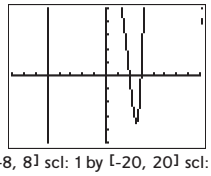
$$k(-x) = (-x)^5 - 18(-x)^3 + 30(-x)^2 - 19(-x) + 30$$
$$= -x^5 + 18x^3 + 30x^2 + 19x + 30$$

بما أن $k(-x)$ تحتوي على متغير إشارة واحد، إذًا $k(x)$ تحتوي على 4 أصفار حقيقية موجبة أو 2 أو 0 وعلى صفر حقيقي سالب واحد.


[-8, 8] scl: 1 by [-100, 800] scl: 50

يعرض التمثيل البياني الموضح $-5$ كصفر حقيقي واحد للدالة $k(x)$.
استخدم التعويض التركيبي لاختبار هذه الاحتمالية.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5$ | 1 | 0 | $-18$ | 30 | $-19$ | 30 |
| | | $-5$ | 25 | $-35$ | 25 | $-30$ |
| | 1 | $-5$ | 7 | $-5$ | 6 | 0 |


[-8, 8] scl: 1 by [-20, 20] scl: 4

بما أن $k(x)$ تحتوي على صفر حقيقي سالب واحد فقط، إذًا لست بحاجة إلى اختبار أي أصفار نسبية سالبة ممكنة أخرى. قم بتكبير الأصفار الحقيقية الموجبة في التمثيل البياني الذي يظهر 2 و 3 كأصفار نسبية أخرى. اختبر هذه الاحتمالات بالتتابع في الدوال كثيرة الحدود التربيعية المنخفضة ثم التكعيبية.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | $-5$ | 7 | $-5$ | 6 |
| | | 2 | $-6$ | 2 | $-6$ |
| | 1 | $-3$ | 1 | $-3$ | 0 |

ابدأ باختبار 2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | $-3$ | 1 | $-3$ |
| | | 0 | 3 | 3 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |

اختبر الآن 3 على الدالة كثيرة الحدود المنخفضة.

لا ينتج عن العامل التربيعي المتبقي $(x^2 + 1)$ أي أصفار نسبية وبالتالي أي جذور حقيقية غير قابلة للاختزال. لذا، تصبح $k(x)$ المكتوبة كناتج لعوامل خطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال
$k(x) = (x + 5)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1)$

**b. اكتب $k(x)$ كناتج للعوامل الخطية.**

يمكنك تحليل $x^2 + 1$ بكتابة التعبير أولاً كفرق مربعات $x^2 - (\sqrt{-1})^2$ أو $x^2 - i^2$. ثم حلل فرق الجذور التربيعية هذا كما يلي $(x - i)(x + i)$. لذا، تُكتب $k(x)$ كناتج ضرب العوامل الخطية كما يلي.

$$k(x) = (x + 5)(x - 2)(x - 3)(x - i)(x + i)$$

**c. اذكر جميع أصفار $k(x)$.**

بما أن الدالة من الدرجة 5، ومن خلال استخدام نتيجة نظرية الجبر الأساسية، تحتوي $k(x)$ على خمسة أصفار بالفعل، بما في ذلك أي صفر قد يكون متكررًا. يعطينا التحليل إلى العوامل الخطية هذه الأصفار الخمسة: $-5$ و 2 و 3 و $i$ و $-i$.

### تمرين موجّه

**اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج ضرب العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و(b) ناتج ضرب العوامل الخطية. ثم (c) اذكر جميع أصفارها.**

**7a.** $f(x) = x^4 + x^3 - 26x^2 + 4x - 120$

**7B.** $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 99x + 108$

### نصيحة دراسية

**استخدام التكرار** سيكون الصفر النسبي في بعض الأحيان صفرًا متكررًا في الدالة. استخدم التمثيل البياني للدالة لتحديد هل ينبغي اختبار صفر نسبي باستخدام التعويض التركيبي بالتتابع.

### نصيحة دراسية

**الصيغة التربيعية** يمكنك أيضًا استخدام القانون العام لإيجاد أصفار $x^2 + 1$ لتحليل التعبير.

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$
$$= \pm \frac{\sqrt{-4}}{2}$$
$$= \pm \frac{2i}{2} = \pm i$$

**لذا، يُعد 1, -1 أصفارًا ويُعد $(x - i)$ و $(x + i)$ عوامل.**

يمكنك استخدام التعويض التركيبي مع الأعداد المركبة بنفس الطريقة التي تستخدمها مع الأعداد الحقيقية. يمكن أن يساعدك ذلك على تحليل الدالة كثيرة الحدود لإيجاد جميع أصفارها.

## مثال 8 إيجاد أصفار الدالة كثيرة الحدود بمعلومية واحد منها

**جد جميع الأصفار المركبة للدالة $p(x) = x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 22x - 13$ مع العلم أن $2 - 3i$ هي صفر للدالة $p$. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة $p(x)$.**

استخدم التعويض التركيبي للتأكد أن $2 - 3i$ هي صفر للدالة $p(x)$.

$$(2-3i)(-4-3i) = -8 + 6i + 9i^2$$
$$= -8 + 6i + 9(-1)$$
$$= -17 + 6i$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-3i$ | 1 | $-6$ | 20 | $-22$ | $-13$ |
| | | $2-3i$ | $-17+6i$ | | |
| | 1 | $-4-3i$ | | | |

$$(2-3i)(3+6i) = 6 + 3i - 18i^2$$
$$= 6 + 3i - 18(-1)$$
$$= 24 + 3i$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-3i$ | 1 | $-6$ | 20 | $-22$ | $-13$ |
| | | $2-3i$ | $-17+6i$ | $24+3i$ | |
| | 1 | $-4-3i$ | $3+6i$ | | 0 |

$$(2-3i)(2+3i) = 4 - 9i^2$$
$$= 4 - 9(-1)$$
$$= 4 + 9 = 13$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-3i$ | 1 | $-6$ | 20 | $-22$ | $-13$ |
| | | $2-3i$ | $-17+6i$ | $24+3i$ | 13 |
| | 1 | $-4-3i$ | $3+6i$ | $2+3i$ | 0 |

بما أن $2 - 3i$ هي للدالة $p$. فأنت تعرف أن $2 + 3i$ أيضًا صفر للدالة $p$. اقسم الدالة كثيرة الحدود المنخفضة على $2 + 3i$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2+3i$ | 1 | $-4-3i$ | $3+6i$ | $2+3i$ |
| | | $2+3i$ | $-4-6i$ | $-2-3i$ |
| | 1 | $-2$ | $-1$ | 0 |

باستخدام هذين الصفرين والدالة كثيرة الحدود المنخفضة من هذه القسمة الأخيرة، يمكنك كتابة
$p(x) = [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x^2 - 2x - 1)$
بما أن $p(x)$ دالة رباعية كثيرة الحدود، فأنت تعرف أن لها 4 أصفار حقيقية بالفعل. إذا وجدت صفرين اثنين، تجد الصفرين الآخرين. جد أصفار
$x^2 - 2x - 1$ باستخدام القانون العام.

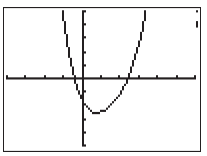
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{القانون العام}$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \qquad a = 1 \text{ و } b = -2 \text{ و } c = -1$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \qquad \text{بسّط}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2} \qquad \text{بسّط}$$

لذا، أصفار الدالة الأربعة $p(x)$ هي $2 - 3i$ و $2 + 3i$
و $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ ويكون التحليل إلى العوامل الخطية للدالة $p(x)$ هو
$[x - (2 - 3i)] \times [x - (2 + 3i)][x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})]$
باستخدام التمثيل البياني للدالة $p(x)$، يمكنك التأكد من أن الدالة تحتوي على صفرين حقيقيين عند $1 + \sqrt{2}$ أو حوالي 2.41 و $1 - \sqrt{2}$ أو حوالي $-0.41$




### تمرين موجّه

**لكل دالة، استخدم الصفر الموضح لإيجاد جميع الأصفار المركبة للدالة. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة.**

**8A.** $g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 46x + 10$; $2 + \sqrt{3}$

**8B.** $h(x) = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 8x - 95$; $1 - \sqrt{6}$

**انتبه!**

**الأعداد المركبة** تذكّر من درس سابق أن جميع الأعداد الحقيقية أعداد مركبة أيضًا.

**نصيحة دراسية**

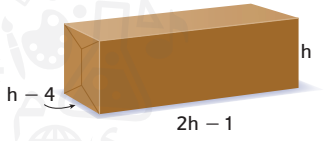
**قسمة العوامل المشتركة** قبل تطبيق أي من الطرق الواردة في هذا الدرس، تذكّر أن إخراج أي عوامل مشتركة أحادية الحد. على سبيل المثال، ينبغي أولاً تحليل $g(x) = -2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 8x$ كما يلي $g(x) = -2x(x^3 - 3x^2 + 2x + 4)$. وهذا يعني أن 0 هو صفر للدالة $g$.

## تمارين

**اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.** (المثالان 1 و 2)

1. $g(x) = x^4 - 6x^3 - 31x^2 + 216x - 180$
2. $f(x) = 4x^3 - 24x^2 - x + 6$
3. $g(x) = x^4 - x^3 - 31x^2 + x + 30$
4. $g(x) = -4x^4 + 35x^3 - 87x^2 + 56x + 20$
5. $h(x) = 6x^4 + 13x^3 - 67x^2 - 156x - 60$
6. $f(x) = 18x^4 + 12x^3 + 56x^2 + 48x - 64$
7. $h(x) = x^5 - 11x^4 + 49x^3 - 147x^2 + 360x - 432$
8. $g(x) = 8x^5 + 18x^4 - 5x^3 - 72x^2 - 162x + 45$

9. **التصنيع** فيما يلي مواصفات أبعاد العبوة الكرتونية الجديدة. إذا تم تمثيل حجم الحاوية بالصيغة $V(h) = 2h^3 - 9h^2 + 4h$ وتحتوي على 45 $in^3$ من سلعة ما، فما هي أبعاد العبوة؟ (مثال 3)




**جد حلاً لكل من المعادلات التالية.** (المثال 3)

10. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12 = 0$
11. $x^4 + 9x^3 + 23x^2 + 3x - 36 = 0$
12. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$
13. $x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 84x - 80 = 0$
14. $x^4 + 34x = 6x^3 + 21x^2 - 48$
15. $6x^4 + 41x^3 + 42x^2 - 96x + 6 = -26$
16. $-12x^4 + 77x^3 = 136x^2 - 33x - 18$

17. **المبيعات** يمكن تمثيل المبيعات $S(x)$ بآلاف الدراهم التي يحققها متجر في الشهر تقريبًا من خلال $S(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x$، بحيث $x$ هو عدد الأيام بعد أول يوم من الشهر. كم عدد الأيام الذي يستغرقها المتجر لتحقيق AED 16,000؟ (المثال 3)

**حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية لكل دالة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد الأصفار الحقيقية.** (المثال 4)

18. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 12x^2 + 44x - 48$
19. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 29x^2 + 34x + 24$
20. $g(x) = 2x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 4x + 16$
21. $g(x) = 6x^4 - 33x^3 - 6x^2 + 123x - 90$
22. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 39x^2 - 16x - 20$
23. $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 21x^2 + 9x - 27$
24. $h(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 16x - 12$
25. $h(x) = 4x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 80x^2 - 75x + 18$

**وضّح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة.** (المثال 5)

26. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$
27. $f(x) = 10x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 4x - 8$
28. $f(x) = -3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 6$
29. $f(x) = 12x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 2x + 12$
30. $g(x) = 4x^5 + 3x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 16x - 24$
31. $h(x) = -4x^5 + x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 64x - 124$

**اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على الأصفار الموضحة.** (المثال 6)

32. $3, -4, 6, -1$
33. $-2, -4, -3, 5$
34. $-5, 3, 4 + i$
35. $-1, 8, 6 - i$
36. $2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, -3, 7$
37. $-5, 2, 4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}$
38. $\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 4i$
39. $\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 3 - 4i$
40. $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 4 + 5i$
41. $6 - \sqrt{5}, 6 + \sqrt{5}, 8 - 3i$

**اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و(b) ناتج العوامل الخطية. ثم (c) اذكر جميع أصفارها.** (المثال 7)

42. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 20x + 48$
43. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 8$
44. $h(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 18x - 216$
45. $f(x) = 4x^4 - 35x^3 + 140x^2 - 295x + 156$
46. $f(x) = 4x^4 - 15x^3 + 43x^2 + 577x + 615$
47. $h(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$
48. $g(x) = x^4 + 31x^2 - 180$

**استخدم الصفر الموضح لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالة. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة.** (المثال 8)

49. $h(x) = 2x^5 + x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 225x + 108; 3i$
50. $h(x) = 3x^5 - 5x^4 - 13x^3 - 65x^2 - 2{,}200x + 1{,}500; -5i$
51. $g(x) = x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 46x - 60; 3 - i$
52. $g(x) = 4x^5 - 57x^4 + 287x^3 - 547x^2 + 83x + 510; 4 + i$
53. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 32x + 96; -2i$
54. $g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 46x + 10; 3 + i$

55. **الهندسة المعمارية** يصمم مهندس معماري نموذجًا مقياسيًا لمبنى بشكل هرمي.
   a. إذا كان ارتفاع النموذج المقياسي أقل من طوله بمقدار 9 cm وكانت قاعدته مربعة، فاكتب دالة كثيرة الحدود توضح حجم النموذج من حيث طوله.
   b. إذا كان حجم النموذج $6{,}300\ cm^3$، فاكتب معادلة توضح الموقف.
   c. ما أبعاد النموذج المقياسي؟

56. **الإنشاءات** يزيد ارتفاع نفق قيد الإنشاء عن نصف عرضه بمقدار قدم واحد وطوله يزيد عن 324 مرة من عرضه بمقدار 32 ft. إذا كان حجم النفق $62.231.040\ ft^3$ وعلى شكل متوازي مستطيلات، فجد الطول والعرض والارتفاع.

**اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات صحيحة تحتوي على العدد الموضح كصفر.**

57. $\sqrt[3]{6}$

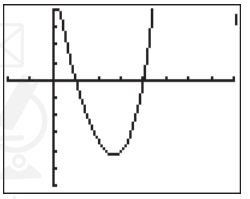
58. $\sqrt[3]{5}$

59. $-\sqrt[3]{2}$

60. $-\sqrt[3]{7}$

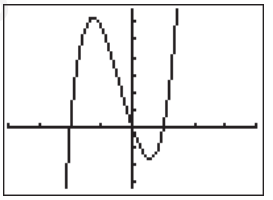
**استخدم كل تمثيل بياني لكتابة $g$ كناتج للعوامل الخطية. ثم اذكر جميع أصفارها.**

61. $g(x) = 3x^4 - 15x^3 + 87x^2 - 375x + 300$



[-2, 8] scl: 1 by [-300, 200] scl: 50

62. $g(x) = 2x^5 + 2x^4 + 28x^3 + 32x^2 - 64x$



[-4, 4] scl: 1 by [-40, 80] scl: 12

**حدد جميع الأصفار النسبية المحتملة للدالة.**

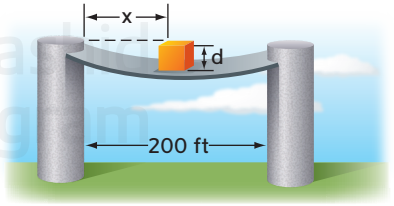
63. $h(x) = 6x^3 - 6x^2 + 12$

64. $f(y) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^3 - y^2 + 2y - 8$

65. $w(z) = z^4 - 10z^3 + 30z^2 - 10z + 29$

66. $b(a) = a^5 - \frac{5}{6}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}$

67. **الهندسة** تدعم دعامتين بينهما مسافة 200 ft عارضة من الصلب. إذا وُضع وزن على مسافة $x$ ft من الدعامة الموجودة على اليسار، فسيحدث انحراف رأسي تمثله الدالة التالية $d = 0.0000008x^2(200 - x)$ كم يبعد الوزن عن الدعامة إذا كان الانحراف الرأسي 0.8 m؟




**اكتب كل دالة كثيرة الحدود كناتج للعوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال.**

68. $x^3 - 3$

69. $x^3 + 16$

70. $8x^3 + 9$

71. $27x^6 + 4$

72. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة سوف تستكشف الدوال كثيرة الحدود الزوجية والفردية.

a. **العرض التحليلي** حدد الدرجة وعدد أصفار كل دالة كثيرة الحدود.

i. $f(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$

ii. $g(x) = 2x^5 + x^4 - 32x - 16$

iii. $h(x) = 5x^3 + 2x^2 - 13x + 6$

iv. $f(x) = x^4 + 25x^2 + 144$

v. $h(x) = 3x^6 + 5x^5 + 46x^4 + 80x^3 - 32x^2$

vi. $g(x) = 4x^4 - 11x^3 + 10x^2 - 11x + 6$

b. **العرض العددي** جد أصفار كل دالة.

c. **العرض الكلامي** هل يجب أن تحتوي دالة من الدرجة الفردية على أقل عدد من الأصفار الحقيقية؟ اشرح.

## مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

73. **تحليل الخطأ** تستخدم أيوب ومازن نظرية الأصفار النسبية لإيجاد جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة $f(x) = 7x^2 + 2x^3 - 5x - 3$ ويعتقد أيوب أن الأصفار الممكنة هي $\pm 3$ و $\pm 1$ و $\pm \frac{3}{7}$ و $\pm \frac{1}{7}$ ويعتقد مازن أنها $\pm 3$ و $\pm 1$ و $\pm \frac{3}{2}$ و $\pm \frac{1}{2}$ هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

74. **الاستنتاج** اشرح لماذا يجب أن تحتوي $g(x) = x^9 - x^8 + x^5 + x^3 - x^2 + 2$ على جذر بين $x = -1$ و $x = 0$.

75. **تحدٍ** استخدم $f(x) = x^2 + x - 6$ و $f(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$ و $f(x) = x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40$ لوضع فرضية عن العلاقة بين التمثيلات البيانية وأصفار $f(x)$ والرسوم البيانية وأصفار كل مما يلي.

a. $-f(x)$

b. $f(-x)$

76. **مسألة مفتوحة** اكتب دالة من الدرجة 4 ذات صفر تخيلي وصفر غير نسبي.

77. **الاستنتاج** حدد هل العبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضادًا. تحتوي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ذات معاملات حقيقية على صفر غير حقيقي واحد فقط.

**تحدٍ جد أصفار كل دالة إذا كانت $h(x)$ تحتوي على أصفار عند $x_1$ و $x_2$ و $x_3$.**

78. $c(x) = 7h(x)$

79. $k(x) = h(3x)$

80. $g(x) = h(x - 2)$

81. $f(x) = h(-x)$

82. **الاستنتاج** عند وجود أول حدين للدالة كثيرة الحدود التالية $f(x) = a_1x^5 - a_2x^4 + \ldots$ إذا كانت $x - c$ عاملاً للدالة $f(x)$، فما القيمة التي يجب أن تكون $c$ أكبر منها أو تساويها لتصبح حدًا أعلى لأصفار الدالة $f(x)$؟ لنفرض أن المعاملات المحددة غير سالبة و $a_1 \neq 0$. اشرح استنتاجك.

83. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يجب أن تحتوي دالة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية وصفر واحد تخيلي على صفرين تخيليين اثنين على الأقل.

## مراجعة شاملة

**اقسم باستخدام القسمة التركيبية.** (الدرس 3-1)

**84.** $(x^3 - 9x^2 + 27x - 28) \div (x - 3)$

**85.** $(x^4 + x^3 - 1) \div (x - 2)$

**86.** $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x - 2) \div (x + 1)$

**87.** $(2x^3 - 2x - 3) \div (x - 1)$

**وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.** (الدرس 2-1)

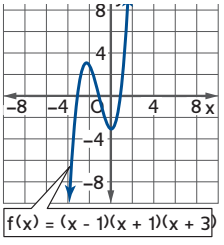
**88.** $f(x) = -4x^7 + 3x^4 + 6$

**89.** $f(x) = 4x^6 + 2x^5 + 7x^2$

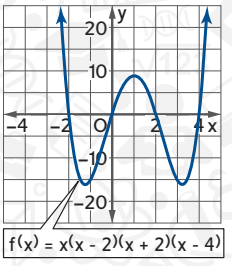
**90.** $g(x) = 3x^4 + 5x^5 - 11$

**قدّر لأقرب 0.5 وحدة وصنّف القيم القصوى للتمثيل البياني لكل دالة. ادعم إجابتك بالأرقام.** (الدرس 4-1)

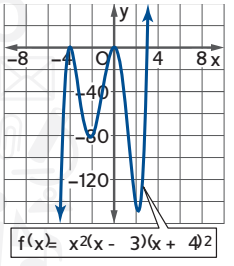
**91.**




**92.**




**93.**




**94.** **المسائل المالية** يختار المستثمرون أسهمًا مختلفة لضمان محفظة متوازنة. توضح المصفوفات أسعار سهم واحد لكل مجموعة من الأسهم المختلفة في أول يوم عمل من شهر يوليو وأغسطس وسبتمبر.

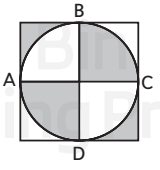
| | سبتمبر | أغسطس | يوليو |
|---|---|---|---|
| السهم A | 27.25] | 30.94 | [33.81 |
| السهم B | 8.75] | 13.25 | [15.06 |
| السهم C | 46.44] | 54 | [54 |
| السهم D | 34.38] | 44.69 | [52.06 |

**a.** تمتلك السيدة حورية 42 سهمًا من السهم A و 59 سهمًا من السهم B و 21 سهمًا من السهم C و 18 سهمًا من السهم D. اكتب مصفوفة صفية تمثل محفظة السيدة حورية.

**b.** استخدم ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي قيمة محفظة السيدة حورية لكل شهر إلى أقرب فلس.

## مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

**95.** **SAT/ACT** هناك دائرة محصورة في مربع وتقطع المربع في النقاط التالية $A$ و $B$ و $C$ و $D$. إذا كان $AC = 12$، فما إجمالي مساحة المناطق المظللة؟




A 18
B 36
C $18\pi$
D $24\pi$
E 72

**96.** **مراجعة** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ لها حد أدنى نسبي يقع علي أي من قيم $x$ التالية؟

F $-2$
G 2
H 3
J 4

**97.** جد جميع أصفار $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20$.

A $-4, 1 + 2i, 1 - 2i$
B $1, 4 + i, 4 - i$
C $-1, 1, 4 + i, 4 - i$
D $4, 1 + i, 1 - i$

**98.** **مراجعة** أي تعبير يساوي $(t^2 + 3t - 9)(5 - t)^{-1}$؟

F $t + 8 - \frac{31}{5 - t}$
G $-t - 8$
H $-t - 8 + \frac{31}{5 - t}$
J $-t - 8 - \frac{31}{5 - t}$

# الدرس 1-5 الدوال النسبية

**السابق**

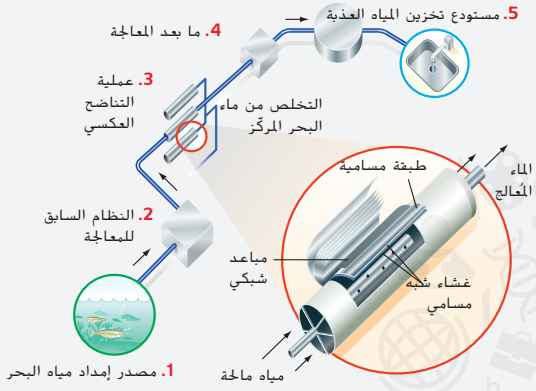
- حددت نقاط الانفصال والسلوك الطرفي للتمثيلات البيانية للدوال باستخدام الحدود.

**الحالي**

1. تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بيانيًا.
2. حل المعادلات النسبية.

**لماذا؟**

- يتم استخدام تحلية الماء أو إزالة الملح من ماء البحر حاليًا في مناطق من العالم بسبب الكمية المحدودة للماء المتوفر وفي العديد من السفن والغواصات. وتعتبر أيضًا بديلاً لتوفير الماء في المستقبل. ويمكن إنشاء نموذج لتكلفة النطاقات المتنوعة لتحلية الماء باستخدام الدوال النسبية.




**مفردات جديدة**

الدالة النسبية rational function
خط تقارب asymptote
خط تقارب رأسي vertical asymptote
خط تقارب أفقي horizontal asymptote
خط تقارب مائل oblique asymptote
فجوات holes

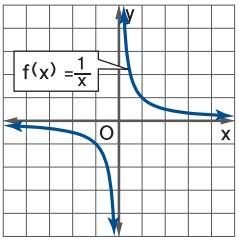
## 1 الدوال النسبية

**الدالة النسبية** $f(x)$ تساوي ناتج قسمة دالتين كثيرتي الحدود $a(x)$ و $b(x)$، حيث $b$ لا يساوي صفرًا.

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)},\ b(x) \neq 0$$

مجال الدالة النسبية هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية باستثناء تلك القيم التي تجعل المعادلة $b(x) = 0$ أو النواتج الصفرية للمعادلة $b(x)$.

تمثل الدالة المقلوبة إحدى أبسط الدوال النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$. كما هو الحال مع الكثير من الدوال النسبية، يتضمن التمثيل البياني للدالة المقلوبة فروعًا تقترب من قيم $x$ وقيم $y$ محددة. وتُسمى المستقيمات التي تمثل هذه القيم **خط التقارب**.



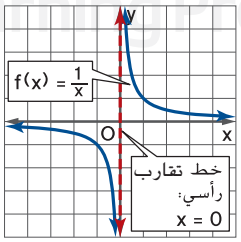

وبما أن الدالة المقلوبة غير معرفة عندما $x = 0$، إذن مجالها يساوي $(-\infty, 0)$ أو $(0, \infty)$. ويمكن وصف سلوك الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ إلى اليسار $(0^-)$ وإلى اليمين $(0^+)$ لقيمة $x = 0$ باستخدام الحدود.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

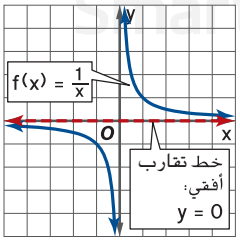
من درس سابق، ينبغي إدرك أن الصفر كنقطة للانفصال اللانهائي في مجال الدالة $f$. يُسمى المستقيم $x = 0$ في الشكل 1.5.2 *خط تقارب رأسيًا* للتمثيل البياني للدالة f. ويمكن، أيضًا، وصف السلوك الطرفي للدالة f باستخدام الحدود.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

يُسمى المستقيم $y = 0$ في الشكل 2.5.2 *خط تقارب أفقيًا* للتمثيل البياني للدالة $f$.




**الشكل 1.5.2**




**الشكل 1.5.2**

ويمكن تعميم هذه التعريفات لخطوط التقارب الرأسية والأفقية.

يمكنك استخدام معرفتك بالحدود والانفصال والسلوك الطرفي لتحديد خطوط التقارب الرأسية والأفقية، إن وُجدت، للدالة النسبية.

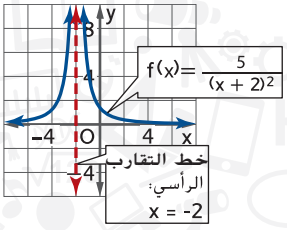
### قراءة الرياضيات

**رمز النهاية** التعبير $\lim_{x \to c^-} f(x)$ يُقرأ بالطريقة التالية *نهاية الدالة f من x عندما تقترب x من c من اليسار* والتعبير $\lim_{x \to c^+} f(x)$ يُقرأ بالطريقة التالية *نهاية الدالة f من x عندما تقترب x من c من اليمين.*

## المفهوم الأساسي خطوط التقارب الرأسية والأفقية

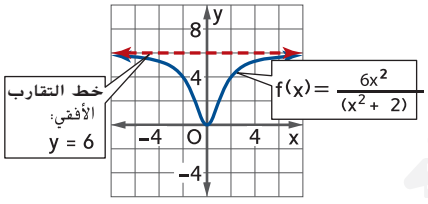
**التوضيح بالكلمات** $x = c$ هو خط تقارب رأسي للتمثيل البياني للدالة $f$ إذا كان $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$

**مثال**




**التوضيح بالكلمات** $y = c$ هو خط تقارب أفقي للتمثيل البياني للدالة $f$ إذا كان $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$

**مثال**




## مثال 1 إيجاد خطوط التقارب الرأسية والأفقية

**جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.**

a. $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$

**الخطوة 1** **جد المجال.**

تكون الدالة غير معرّفة عند الصفر الحقيقي في المقام $b(x) = x - 3$ تساوي صفرًا. العدد الحقيقي الذي يجعل ناتج المعادلة $b(x)$ يساوي صفرًا هو 3. إذًا، مجال الدالة $f$ هو كل الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 3$.

**الخطوة 2** **جد خطوط التقارب، إن وُجدت.**

تحقق من خطوط التقارب الرأسية.

حدّد ما إذا كانت $x = 3$ نقطة انفصال لا نهائي. جد الحد حيث $x$ تقترب من 3 من اليسار واليمين.

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −69 | −699 | −6999 | غير معرّف | 7001 | 701 | 71 |

نظرًا لأن $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty$، فأنت تعلم أن $x = 3$ هو خط تقارب رأسي للدالة $f$.

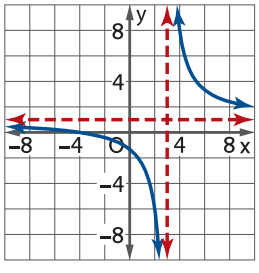
تحقق من خطوط التقارب الأفقية.

استخدم جدولاً لفحص السلوك الطرفي للدالة $f(x)$.

| $x$ | −10,000 | −1000 | −100 | 0 | 100 | 1000 | 10,000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.9993 | 0.9930 | 0.9320 | −1.33 | 1.0722 | 1.0070 | 1.0007 |

يشير الجدول إلى أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. وبناءً عليه، فأنت تعلم أن $y = 1$ هو خط تقارب أفقي للدالة $f$.

**التحقق من الحل** التمثيل البياني الموضح للدالة $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$ يدعم كل هذه النتائج. ✔



b. $g(x) = \dfrac{8x^2 + 5}{4x^2 + 1}$

**الخطوة 1** الأصفار في المقام $b(x) = 4x^2 + 1$ تخيلية، لذلك، فإن مجال $g$ هو كل الأعداد الحقيقية.

**الخطوة 2** نظرًا لأن مجال $g$ هو كل الأعداد الحقيقية، فليس للدالة خطوط تقارب رأسية.

وباستخدام القسمة، يمكنك تحديد أن

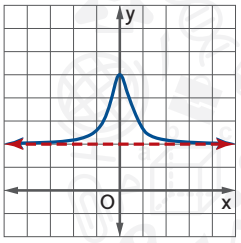
$$g(x) = \frac{8x^2 + 5}{4x^2 + 1} = 2 + \frac{3}{4x^2 + 1}$$

حيث إن قيمة $|x|$ تزيد، يصبح $4x^2 + 1$ عددًا موجبًا كبيرًا بشكل متزايد، كما يتناقص $\dfrac{3}{4x^2 + 1}$ مقتربًا من 0. ولذلك،

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 2 + 0$$

**التحقق من الحل** يمكنك استخدام جدول القيم لدعم هذا الاستنتاج.

التمثيل البياني $g(x) = \dfrac{8x^2 + 5}{4x^2 + 1}$ الموضح يدعم أيضًا كل هذه النتائج. ✔




**تمرين موجّه**

**جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.**

**1A.** $m(x) = \dfrac{15x + 3}{x + 5}$

**1B.** $h(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 4}$

يوضح التحليل في مثال 1 وجود علاقة بين السلوك الطرفي للدالة وخط التقارب الأفقي. يرد تلخيص هذه العلاقة، مع السمات الأخرى للتمثيلات البيانية للدوال النسبية فيما يلي.

## المفهوم الأساسي التمثيلات البيانية للدوال النسبية

إذا كانت $f$ هي الدالة النسبية وفقًا للمعطيات

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

حيث إن $b(x) \neq 0$ و$a(x)$ و$b(x)$ ليس لها عوامل مشتركة غير $\pm 1$، إذًا التمثيل البياني للدالة $f$ له الخصائص التالية.

**خطوط التقارب الرأسية** قد تحدث خطوط التقارب الرأسية عند الأصفار الحقيقية للمعادلة $b(x)$.

**خط التقارب الأفقي** قد يحتوي التمثيل البياني على خط تقارب أفقي واحد أو لا يحتوي على خط تقارب أفقي كما هو محدد بمقارنة الدرجة $n$ من $a(x)$ بالدرجة $m$ من $b(x)$.

- إذا كانت $n < m$، فإن الخط المتقارب الأفقي $y = 0$
- إذا كانت $n = m$، فإن خط التقارب الأفقي $y = \dfrac{a_n}{b_m}$
- إذا كانت $n > m$، فلا يوجد خط تقارب أفقي.

**نقاط التقاطع** تقع نقاط التقاطع مع المحور الأفقي $x$، إن وُجدت، عند الأصفار الحقيقية للمعادلة $a(x)$. يكون التقاطع مع المحور الرأسي $y$، إن وُجد، هو قيمة الدالة $f$ عندما $x = 0$

**نصيحة دراسية**

**الأقطاب** يُسمى خط التقارب الرأسي في التمثيل البياني للدالة النسبية قطب الدالة أيضًا.

لتمثيل دالة نسبية بيانيًا، بسّط $f$، إن أمكن، ثم اتبع هذه الخطوات.

**الخطوة 1** جد المجال.

**الخطوة 2** جد خطوط التقارب وارسمها، إن وُجدت.

**الخطوة 3** جد نقاط التقاطع مع المحور الأفقي $x$ ونقاط التقاطع مع المحور الرأسي $y$ وارسمها، إن وُجدت.

**الخطوة 4** جد نقطة واحدة على الأقل من *فترات الاختبار* المحددة بأي نقاط تقاطع مع المحور الأفقي $x$ وخطوط التقارب الرأسية وارسمها.

**نصيحة دراسية**

**فترات الاختبار** قد تغير الدالة النسبية الإشارة عند أصفارها وقيمها غير المعرفة، لذلك عندما تُرتب قيم $x$، فإنها تقسم مجال الدالة إلى فترات الاختبار التي يمكن أن تساعدك على تحديد ما إذا كان التمثيل البياني يقع فوق المحور الأفقي $x$ أم تحته.

## مثال 2 تمثيل الدوال النسبية بيانيًا: $n < m$ و $n > m$

**في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.**

a. $g(x) = \frac{6}{x+3}$

**الخطوة 1** تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$.

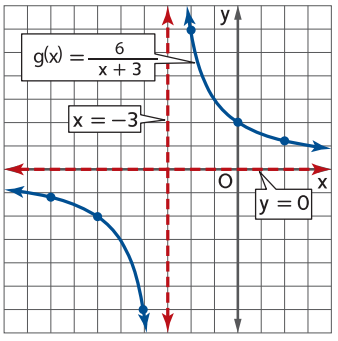
**الخطوة 2** يوجد خط تقارب رأسي عند النقطة $x = -3$

تساوي درجة الدالة كثيرة الحدود في البسط صفرًا، وتساوي درجة الدالة كثيرة الحدود في المقام 1. لأن $0 < 1$، التمثيل البياني $g$ يحتوي على خط تقارب أفقي عند النقطة $y = 0$

**الخطوة 3** ليس للدالة كثيرة الحدود في البسط أصفار حقيقية، لذلك ليس لـ $g$ نقاط تقاطع مع المحور الأفقي $x$. لأن $g(0) = 2$، تكون نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y$ هي 2.

**الخطوة 4** مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم اختر قيم $x$ التي تقع في فترات الاختبار المحددة بخط التقارب الرأسي لإيجاد نقاط إضافية لرسمها على التمثيل البياني. استخدم منحنيات سلسة لإكمال التمثيل البياني.

| الفترة | $x$ | $(x, g(x))$ |
|---|---|---|
| $(-\infty, -3)$ | $-8$ | $(-8, -1.2)$ |
| | $-6$ | $(-6, -2)$ |
| | $-4$ | $(-4, -6)$ |
| $(-3, \infty)$ | $-2$ | $(-2, 6)$ |
| | $2$ | $(2, 1.2)$ |




**نصيحة دراسية**

**القطع الزائد**

التمثيلات البيانية للدوال المقلوبة $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{6}{x+3}$ تُسمى *القطوع الزائدة*.

ستتعلم المزيد عن القطوع الزائدة في وحدة لاحقة.

b. $k(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3}$

**ينتج عن تحليل البسط إلى عوامله** $k(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{x-3}$. **لاحظ أنه ليس للبسط والمقام عوامل مشتركة، لذلك يكون التعبير في أبسط صورة.**

**الخطوة 1** تكون الدالة غير معرفة $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

**الخطوة 2** يوجد خط تقارب رأسي عند النقطة $x = 3$.

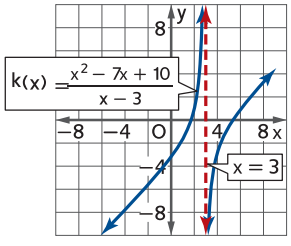
قارن بين درجات البسط والمقام. لأن $2 > 1$، لا يوجد خط تقارب أفقي.

**الخطوة 3** للبسط أصفار عند $x = 2$ و $x = 5$. لذلك نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي $x$ هما 2 و5. $k(0) = -\frac{10}{3}$. لذلك تكون نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y$ هي $-3.3$ تقريبًا.

**الخطوة 4** مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا.

ثم جد النقاط في فترات الاختبار المحددة بنقاط التقاطع وخطوط التقارب الرأسية وارسمها: $(-\infty, 0), (0, 3), (3, \infty)$.

استخدم المنحنيات السلسة لإكمال التمثيل البياني.




**تمرين موجّه**

**2A.** $h(x) = \frac{2}{x^2 + 2x - 3}$

**2B.** $n(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$

في مثال 3، درجة البسط *مساوية* لدرجة المقام.

## مثال 3 تمثيل الدالة النسبية بيانيًا: $n = m$

**حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع للدالة $f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 9}$ ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.**

ينتج عن تحليل كل من البسط والمقام إلى عوامله $f(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$ بدون عوامل مشتركة.

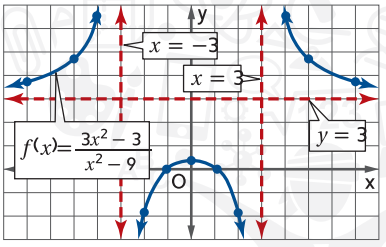
**الخطوة 1** تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$، ويكون المجال $\{x \mid x \neq -3, 3, x \in \mathbb{R}\}$

**الخطوة 2** توجد خطوط تقارب رأسية عندما $x = 3$ و $x = -3$

ويوجد خط تقارب أفقي عند $y = \frac{3}{1}$ أو $y = 3$، وهي النسبة بين المعاملات المستخدمة للبسط والمقام، لأن درجات الدوال كثيرة الحدود تكون متساوية.

**الخطوة 3** نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي $x$ هما 1 و $-1$، وهما النواتج الصفرية للبسط. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y$ هي $\frac{1}{3}$ لأن الدالة $f(0) = \frac{1}{3}$

**الخطوة 4** مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار وارسمها $(-\infty, -3)$ و $(-3, -1)$ و $(-1, 1)$ و $(1, 3)$ و $(3, \infty)$




**تمرين موجّه**

**في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.**

**3A.** $h(x) = \frac{x-6}{x+2}$

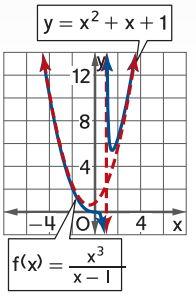
**3B.** $h(x) = \frac{x^2 - 4}{5x^2 - 5}$

عندما تكون درجة البسط *أكبر بمقدار واحد بالضبط* من درجة المقام، فإن التمثيل البياني يكون له *ميل* أو **خط تقارب مائل**.

### نصيحة دراسية

**خطوط التقارب اللاخطية**

خطوط التقارب تكون كلها خطية. قد يكون للدالة النسبية خط تقارب غير خطي أيضًا. مثلاً، التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ له خط تقارب تربيعي.




## المفهوم الأساسي خطوط التقارب المائلة

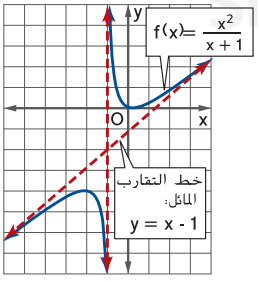
إذا كانت $f$ هي الدالة النسبية وفقًا للمعطيات

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

حيث إن $b(x)$ لها درجة أكبر من 0 و $a(x)$ ولا توجد عوامل مشتركة للمعادلتين $b(x)$ غير 1، إذًا التمثيل البياني للدالة $f$ يحتوي على خط تقارب مائل إذا كانت قيمة $n = m + 1$. تكون دالة خط التقارب المائل هي ناتج قسمة كثيرات الحدود $q(x)$ الناتج من قسمة $a(x)$ على $b(x)$.

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \underbrace{q(x)}_{\text{دالة خط التقارب المائل}} + \frac{r(x)}{b(x)}$$

**مثال**



## مثال 4 تمثيل الدالة النسبية بيانيًا: $n = m + 1$

**حدّد أي خطوط تقارب ونقاط التقاطع للدالة $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12}$ ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.**

ينتج عن تحليل المقام إلى عوامله $f(x) = \frac{2x^3}{(x+4)(x-3)}$

**الخطوة 1** تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -4, 3, x \in \mathbb{R}\}$

**الخطوة 2** توجد خطوط تقارب رأسية عند $x = -4$ و $x = 3$

تكون درجة البسط أكبر من درجة المقام، لذلك لا يوجد خط تقارب أفقي.

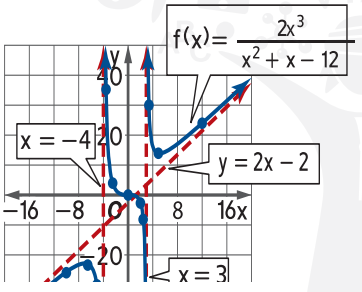
لأن درجة البسط أكبر بواحد بالضبط من درجة المقام، يوجد للدالة $f$ خط تقارب مائل. باستخدام قسمة كثيرات الحدود، يمكنك كتابة ما يلي.

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12}$$
$$= 2x - 2 + \frac{26x - 24}{x^2 + x - 12}$$

لذلك، تكون معادلة خط التقارب المائل هي $y = 2x - 2$

**الخطوة 3** تكون نقاط تقاطع المحور الأفقي $x$ والمحور الرأسي $y$ هي 0، لأن 0 يمثل الناتج الصفري للبسط والدالة $f(0) = 0$

**الخطوة 4** مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار $(-\infty, -4)$ و $(-4, 0)$ و $(0, 3)$ و $(3, \infty)$ وارسمها.




### نصيحة دراسية

**خط التقارب للسلوك الطرفي**

في مثال 4، التمثيل البياني للدالة $f$ يقترب من خط التقارب المائل $y = 2x - 2$ حيث $x \to \pm\infty$. ومع ذلك، بين خطي التقارب الرأسيين $x = -4$ و $x = 3$، يمر التمثيل البياني بالمستقيم $y = 2x - 2$ ولهذا السبب، يُشار إلى خط التقارب المائل أو الأفقي بخط *التقارب للسلوك الطرفي*.

### تمرين موجّه

**في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب ونقاط تقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.**

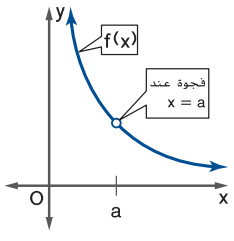
**4A.** $h(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x + 4}$

**4B.** $p(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$

عندما يكون لبسط الدالة النسبية ومقامها معاملات مشتركة، يكون للتمثيل البياني للدالة نقاط انفصال يمكن إزالتها تُسمى **فجوات**. عند النواتج الصفرية للعوامل المشتركة. تأكد من توضيح نقاط الانفصال هذه عندما تقوم بتمثيل الدالة بيانيًا.

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-a)}(x-b)}{\cancel{(x-a)}(x-c)}$$

**اختصر العامل المشترك في البسط والمقام بالقسمة عليه. يكون الناتج الصفري لـ $x - a$ هو $a$.**




### نصيحة دراسية

**حالات الانفصال التي يمكن إزالتها والتي لا يمكن إزالتها** إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = a$، ولكن يمكن جعلها متصلة في تلك النقطة من خلال التبسيط، إذًا لهذه الدالة *انفصال يمكن إزالته* عند $x = a$. وما عدا ذلك، يكون لهذه الدالة *انفصال لا يمكن إزالته* عند $x = a$

## مثال 5 التمثيل البياني لدالة نسبية لها عوامل مشتركة

**حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع للدالة $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$ ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.**

ينتج من تحليل كل من البسط والمقام $h(x) = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x-4)\cancel{(x+2)}}$ ، $\frac{x-2}{x-4}, x \neq -2, 4$

**الخطوة 1** تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -2, 4, x \in \mathbb{R}\}$

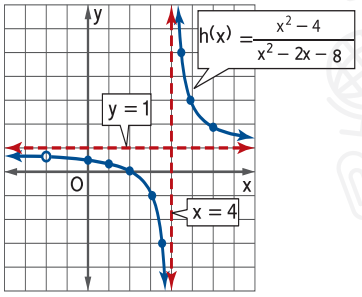
**الخطوة 2** يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 4$، وهو الصفر الحقيقي للمقام بعد تبسيطه.

يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 1$، وهو النسبة للمعاملات الرئيسة لكل من البسط والمقام. لأن درجات الدوال كثيرة الحدود تكون متساوية والفجوة عند $x=-2$.

**الخطوة 3** نقطة التقاطع مع المحور الأفقي $x$ هي 2، وهو صفر البسط بعد تبسيطه. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y$ هي $\frac{1}{2}$ لأن $h(0) = \frac{1}{2}$.

**الخطوة 4** مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار $(-\infty, 2)$ و $(2, 4)$ و $(4, \infty)$ وارسمها.

توجد فجوة عند $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ لأن الدالة الأصلية تكون غير معرفة عند $x = -2$




### تمرين موجّه

**في كل دالة، حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.**

**5A.** $g(x) = \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 + x - 12}$

**5B.** $c(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5}$

### نصيحة دراسية

**الفجوة** في مثال 5، حُذِفَت $x + 2$ من التعبير الأصلي بالقسمة عليها. عوّض بالعدد $-2$ في التعبير الجديد.

$h(-2) = \frac{(-2) - 2}{(-2) - 4}$

$= \frac{-4}{-6}$ أو $\frac{2}{3}$

توجد فجوة عند النقطة $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$

## 2 المعادلات النسبية

يمكن حل المعادلات النسبية التي تتضمن كسورًا بضرب كل حد في المعادلة في المقام المشترك الأصغر لكل حدود المعادلة.

## مثال 6 حل المعادلة النسبية

**حُلّ المعادلة $x + \frac{6}{x - 8} = 0$**

$x + \frac{6}{x - 8} = 0$ المعادلة الأصلية

$x(x - 8) + \frac{6}{x - 8}(x - 8) = 0(x - 8)$ اضرب في المقام المشترك الأصغر، $x - 8$.

$x^2 - 8x + 6 = 0$ خاصية التوزيع

$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$ القانون العام

$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 4 \pm \sqrt{10}$ بسّط.

### تمرين موجّه

**حُلّ كل من المعادلات التالية.**

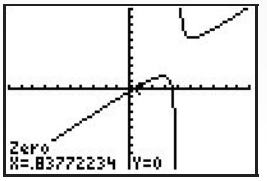
**6A.** $\frac{20}{x + 3} - 4 = 0$

**6B.** $\frac{9x}{x - 2} = 6$

### نصيحة دراسية

**التحقق من صحة الحل**

يمكنك أيضًا التحقق من النتيجة في مثال 6 باستخدام حاسبة بيانية لتمثيل $y = x + \frac{6}{x - 8}$ بيانيًا. استخدم قائمة الحاسبة البيانية لتحديد مواقع الأصفار. لأن أصفار التمثيل البياني تبدو عند $x = 7.16$ و $x = 0.84$ تقريبًا، يكون الحل صحيحًا.




على [-20, 20] scl: 2
[-20, 20] scl: 2

قد ينتج من حل المعادلة النسبية حلولاً دخيلة. تحقق من إجاباتك في المعادلة الأصلية دائمًا.

**نصيحة دراسية**

**التقاطع** يمكنك استخدام سمة التقاطع في الحاسبة البيانية في حل معادلة نسبية بالتمثيل البياني لكل من طرفي المعادلة وإيجاد كل نقاط التقاطع للتمثيلين البيانيين.

## مثال 7 حل معادلة نسبية باستخدام الحلول الدخيلة

**حُلّ المعادلة** $\frac{4}{x^2-6x+8}=\frac{3x}{x-2}+\frac{2}{x-4}$

المقام المشترك الأصغر للتعابير هو $(x-2)(x-4)$، وهي عوامل المعادلة $x^2-6x+8$

| | |
|---|---|
| $\frac{4}{x^2-6x+8}=\frac{3x}{x-2}+\frac{2}{x-4}$ | المعادلة الأصلية |
| $(x-2)(x-4)\frac{4}{x^2-6x+8}=(x-2)(x-4)\left(\frac{3x}{x-2}+\frac{2}{x-4}\right)$ | اضرب في المقام المشترك الأصغر |
| $4=3x(x-4)+2(x-2)$ | خاصية التوزيع |
| $4=3x^2-10x-4$ | خاصية التوزيع |
| $0=3x^2-10x-8$ | اطرح 4 من كل طرف. |
| $0=(3x+2)(x-4)$ | حلل. |
| $x=-\frac{2}{3}$ أو $x=4$ | جد الحل. |

لأن الدالة الأصلية تكون غير معرفة عند $x=4$، يمكنك حذف هذا الحل الدخيل. لذلك، يكون الحل الوحيد هو $-\frac{2}{3}$

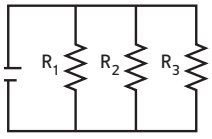
**تمرين موجّه**

**حُـــلّ كل من المعادلات التالية.**

**7a.** $\frac{2x}{x+3}+\frac{3}{x-6}=\frac{27}{x^2-3x-18}$

**7B.** $-\frac{12}{x^2+6x}=\frac{2}{x+6}+\frac{x-2}{x}$

## مثال 8 من الحياة اليومية حل المعادلة النسبية




**الكهرباء يوضح مخطط دائرة كهربية ثلاث مقاومات متوازية. إذا كانت $R$ هي المقاومة المكافئة للمقاومات الثلاث،**

**إذًا $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$. في هذه الدائرة، $R_1$ تساوي ضعف مقاومة $R_2$، و $R_3$ تساوي 20 أوم. لنفترض أن المقاومة المكافئة تساوي 10 أوم. جد $R_1$ و $R_2$.**

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$ | المعادلة الأصلية |
| $\frac{1}{10}=\frac{1}{2R_2}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{20}$ | $R_3=20$ ، $R_1=2R_2$ $R=10$ |
| $\frac{1}{20}=\frac{1}{2R_2}+\frac{1}{R_2}$ | اطرح $\frac{1}{20}$ من كل طرف. |
| $(20R_2)\frac{1}{20}=(20R_2)\left(\frac{1}{2R_2}+\frac{1}{R_2}\right)$ | اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، وهو $20R_2$. |
| $R_2=10+20=30$ | بسّط. |

$R_2$ تساوي 30 أوم و $R_1=2R_2$ أو 60 أوم.

**تمرين موجّه**

**8. الأجهزة الإلكترونية** لنفترض أن التيار $I$، بالأمبير، في دائرة كهربية، تم تحديده بالصيغة $I=t+\frac{1}{10-t}$، حيث $t$ هو الزمن بالثواني. في أي وقت يساوي التيار أمبير واحد؟

**مهن من الحياة اليومية**

**فني الكهرباء** يعمل فنيو الكهرباء في تركيب مكونات كهربية متنوعة مثل توصيلات الأسلاك والمصاهر ويقومون بصيانتها. كما يجب عليهم الحفاظ على الالتزام بالقوانين العالمية والمحلية والخاصة بالدولة. يستكمل معظم فنيي الكهرباء برنامج تمرين يتضمن كلا من التعليم داخل الفصول الدراسية والتدريب العملي.

## تمارين

**جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.** (المثال 1)

1. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$
2. $h(x) = \frac{x^3 - 8}{x + 4}$
3. $f(x) = \frac{x(x-1)(x+2)^2}{(x+3)(x-4)}$
4. $g(x) = \frac{x - 6}{(x+3)(x+5)}$
5. $h(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x}$
6. $f(x) = \frac{x^2 + 9x + 20}{x - 4}$
7. $h(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)^2(x+4)^2}$
8. $g(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x+1)(x-3)}$

**في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.** (الأمثلة 1-5)

9. $f(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-5)}$
10. $g(x) = \frac{(2x+3)(x-6)}{(x+2)(x-1)}$
11. $f(x) = \frac{8}{(x-2)(x+2)}$
12. $f(x) = \frac{x+2}{x(x-6)}$
13. $g(x) = \frac{(x+2)(x+5)}{(x+5)^2(x-6)}$
14. $h(x) = \frac{(x+6)(x+4)}{x(x-5)(x+2)}$
15. $h(x) = \frac{x^2(x-2)(x+5)}{x^2 + 4x + 3}$
16. $f(x) = \frac{x(x+6)^2(x-4)}{x^2 - 5x - 24}$
17. $f(x) = \frac{x - 8}{x^2 + 4x + 5}$
18. $g(x) = \frac{-4}{x^2 + 6}$

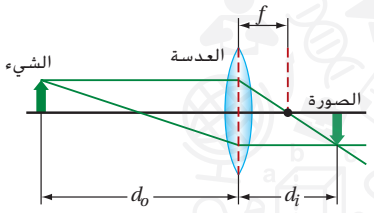
19. **المبيعات** خطة العمل لمشاريع غسل السيارات الجديدة التي سيتم فيها تمثيل الأرباح بآلاف الدراهم بالدالة $p(z) = \frac{3z^2 - 3}{2z^2 + 7z + 5}$، حيث $z$ تمثل أسبوع التشغيل و$z = 0$ تمثل الافتتاح. (المثال 4)
   a. اذكر مجال الدالة.
   b. حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط تقاطع الدالة $p(z)$.
   c. مثّل الدالة بيانيًا.

**في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب والفجوات ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.** (الأمثلة 2-5)

20. $h(x) = \frac{3x - 4}{x^3}$
21. $h(x) = \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x^3 + 4}$
22. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 4x + 3}$
23. $g(x) = \frac{x + 7}{x - 4}$
24. $h(x) = \frac{x^3}{x + 3}$
25. $g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x - 4}$
26. $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 21}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$
27. $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$
28. $f(x) = \frac{(x+4)(x-1)}{(x-1)(x+3)}$
29. $g(x) = \frac{(2x+1)(x-5)}{(x-5)(x+4)^2}$

30. **الإحصاء** يُقال إن العدد $x$ هو *الوسط التوافقي* للعددين $y$ و $z$ إذا كان $\frac{1}{x}$ هو المتوسط بين $\frac{1}{y}$ و $\frac{1}{z}$. (المثال 7)
   a. **اكتب معادلة يكون حلها الوسط التوافقي بين 30 و 45.**
   b. **جد الوسط التوافقي بين 30 و 45.**

31. **بصريات** تكون معادلة العدسة $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o}$، حيث تكون $f$ هي البعد البؤري، و $d_i$ هي المسافة من العدسة إلى الصورة، و $d_o$ هي المسافة من العدسة إلى الشيء. لنفترض أن الشيء يبعد 32 cm عن العدسة والبعد البؤري يساوي 8 cm. (مثال 7)




   a. **اكتب معادلة نسبية لتمثيل الموقف.**
   b. **جد المسافة بين العدسة والصورة.**

**حُلّ كل من المعادلات التالية.** (أمثلة 6-8)

32. $y + \frac{6}{y} = 5$
33. $\frac{8}{z} - z = 4$
34. $\frac{x-1}{2x-4} + \frac{x+2}{3x} = 1$
35. $\frac{2}{y+2} - \frac{y}{2-y} = \frac{y^2+4}{y^2-4}$
36. $\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{23}{x^2+x}$
37. $\frac{4}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{14}{x^2-2x}$
38. $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} = \frac{1}{20}$
39. $\frac{6}{x-3} - \frac{4}{x+2} = \frac{12}{x^2-x-6}$
40. $\frac{x-1}{x-2} + \frac{3x+6}{2x+1} = 3$
41. $\frac{2}{a+3} - \frac{3}{4-a} = \frac{2a-2}{a^2-a-12}$

42. **الماء** التكلفة اليومية لإزالة النسبة المئوية $x$ من الملح من ماء البحر في محطة التحلية هي $c(x) = \frac{994x}{100 - x}$، حيث $0 \le x < 100$.
   a. مثّل كل دالة بيانيًا باستخدام الحاسبة البيانية.
   b. مثّل بيانيًا المستقيم $y = 8{,}000$ وجد التقاطع مع التمثيل البياني $c(x)$ لتحديد النسبة المئوية للملح الذي يمكن إزالته مقابل AED 8,000 يوميًا.
   c. وفقًا للنموذج، هل من الممكن أن تزيل محطة التحلية 100% من الملح؟ اشرح استدلالك.

**اكتب دالة نسبية لكل مجموعة من الخصائص.**

43. نقاط التقاطع مع المحور الأفقي $x$ عند $x = 0$ و $x = 4$، خطوط تقارب رأسية عند $x = 1$ و $x = 6$، وخط مقارب أفقي عند $y = 0$

44. نقاط التقاطع مع المحور الأفقي $x$ عند $x = 2$ و $x = -3$ وخط مقارب رأسي عند $x = 4$ ونقطة انفصال عند $(-5, 0)$

45. **الكهرباء** عندما تكون المقاومة الكلية لدائرة متصلة على التوازي ثابتة، يمكن تمثيل المقاومين الفرديين $r_1$ و $r_2$ بالمعادلة $r_2 = \frac{30r_1}{r_1 - 30}$

a. جد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالة، إن وُجدت. تحقق من إجابتك بيانيًا.

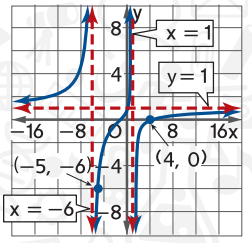
b. انسخ الجدول الموضح وأكمله.

| $r_1$ | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_2$ | | | | | | |

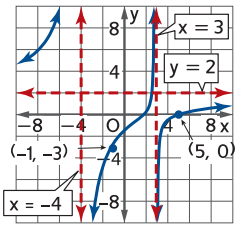
c. هل المجال $r_1 < 30$ صحيح في هذا الموقف؟ اشرح استنتاجك.

**استخدم معرفتك بخطوط التقارب والنقاط المذكورة للتعبير عن الدالة الموضحة في كل تمثيل بياني.**

46.




47.




**استخدم سمة التقاطع في الحاسبة البيانية لحل كل معادلة.**

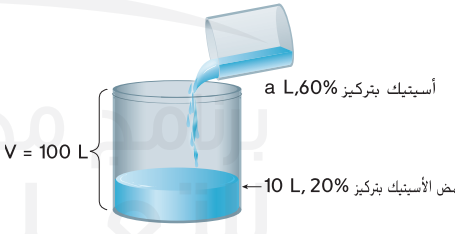
48. $\frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^3 + 6} = 8$

49. $\frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^4 + 3x^2 - 4} = 1$

50. $\frac{3x^3 - 4x^2 + 8}{4x^4 + 2x - 1} = 2$

51. $\frac{2x^5 - 3x^3 + 5x}{4x^3 + 5x - 12} = 6$

52. **الكيمياء** عندما يُضاف محلول حمض الأسيتيك بتركيز 60% إلى 10 لترات من محلول حمض الأسيتيك بتركيز 20% في خزان سعته 100 لتر، يتغير تركيز المحلول الإجمالي.




a. وضّح أن تركيز المحلول يكون $f(a) = \frac{3a + 10}{5a + 50}$، حيث تكون $a$ هي حجم المحلول بتركيز 60%.

b. جد المجال ذا الصلة للدالة $f(a)$ وخطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.

c. اشرح دلالة أي قيود للمجال أو خطوط التقارب.

d. بغض النظر عن قيود المجال، هل توجد أي خطوط تقارب إضافية للدالة؟ اشرح.

53. **التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستتحقق من خطوط التقارب للدوال النسبية.**

a. **العرض الجدولي** انسخ الجدول وأكمله. حدّد خط التقارب الأفقي لكل دالة جبريًا.

| الدالة | خط التقارب الأفقي |
|---|---|
| $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 + 2}$ | |
| $h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 4}$ | |
| $g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^5 + 3}$ | |

b. **العرض البياني** مثّل كل دالة وخط التقارب الأفقي لها من الجزء a بيانيًا.

c. **العرض الجدولي** انسخ الجدول التالي وأكمله. استخدم نظرية الصفر النسبي لتساعدك على إيجاد الأصفار الحقيقية للبسط في كل دالة.

| الدالة | الأصفار الحقيقية للبسط |
|---|---|
| $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 + 2}$ | |
| $h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 4}$ | |
| $g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^5 + 3}$ | |

d. **العرض الكلامي** ضع فرضية عن سلوك التمثيل البياني لدالة نسبية عندما تكون درجة المقام أكبر من درجة البسط وللبسط ناتج صفري حقيقي واحد على الأقل.

## مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

54. **الاستنتاج** بافتراض أن $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{dx^3 + ex^2 + f}$. فهل سيكون للدالة $f(x)$ *في بعض الأحيان* أو *دائمًا* خط تقارب أفقي أم *لن يكون لها ذلك مطلقًا* عند $y = 1$ إذا كانت $a$ و $b$ و $c$ و $d$ و $e$ و $f$ ثوابت و $a \neq 0$ و $d \neq 0$. اشرح.

55. **ما قبل الكتابة** صمم خطة درس لتدريس موضوعات التمثيل البياني للدوال النسبية الواردة في هذا الدرس. ضع خطة تتناول فيها الهدف والطلاب والفكرة الرئيسة والتسلسل المنطقي والإطار الزمني لإكمال العمل.

56. **تحدٍ** اكتب معادلة نسبية لها خطوط تقارب رأسية عندما $x = -2$ و $x = 3$ وخط تقارب مائل $y = 3x$.

57. **الكتابة في الرياضيات** استخدم الكلمات والتمثيلات البيانية والجداول والمعادلات لتوضيح كيفية تمثيل دالة نسبية بيانيًا.

58. **تحدٍ** جد قيمة $k$ حتى يصبح للمعادلة النسبية حل دخيل واحد وحل حقيقي واحد.

$$\frac{2}{x^2 - 4x + k} = \frac{2x}{x - 1} + \frac{1}{x - 3}$$

59. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يجب استخدام فترات الاختبار للحصول على تمثيل بياني دقيق لدالة نسبية.

## مراجعة شاملة

**اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أي منها يعد أصفارًا، إن وجدت.** (الدرس 1-4)

**60.** $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

**61.** $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 18$

**62.** $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

**استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة عوامل لـ $f(x)$. استخدم الدوال ذات الحدين التي تعد عوامل لكتابة الصيغة المحللة إلى عوامل للدالة $f(x)$.** (الدرس 1-3)

**63.** $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24; x - 3, x - 2$

**64.** $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 11x^2 - 4x; x - 4, 2x - 1$

**65.** $f(x) = 6x^4 + 59x^3 + 138x^2 - 45x - 50; 3x - 2, x - 5$

**66.** $f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 17x - 6; 4x - 3; x - 1$

**67.** $f(x) = 4x^5 + 15x^4 + 12x^3 - 4x^2; x + 2, 4x + 1$

**68.** $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 10x^2 + x - 2; x + 1, x - 1$

**مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا.** (الدرس 1-2)

**69.** $f(x) = (x + 7)^2$

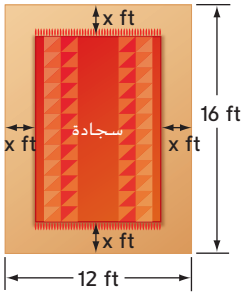
**70.** $f(x) = (x - 4)^3$

**71.** $f(x) = x^4 - 5$

**72.** **البيع بالتجزئة** تتسوق حمدة في متجر يعرض إرجاع AED 10 للمشتري لكل AED 50 ينفقها في هذا المتجر. لنفترض أن $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{50}\right]\!\right]$ و $h(x) = 10x$. حيث $x$ هي المبلغ المالي الذي أنفقته حمدة. (الدرس 1-6)

**a.** إذا أنفقت حمدة المال في المتجر، فهل يتم تمثيل المبلغ النقدي الذي يُرجِعُه المتجر بالدالة $f[h(x)]$ أو $h[f(x)]$؟ اشرح استنتاجك.

**b.** حدّد المبلغ النقدي الذي يُرجعه المتجر إذا أنفقت حمدة AED 312.68 في المتجر.




**73.** **التصميم الداخلي** يعمل أحمد حسن في التصميم الداخلي. طُلِب منه وضع سجادة شرقية في المكتب الجديد لإحدى الشركات. ينبغي أن تغطي السجادة نصف إجمالي مساحة الأرضية مع وجود عرض ثابت للمنطقة المحيطة بالسجادة. (الدرس 0-3)

**a.** إذا كانت أبعاد الغرفة 12 ft في 16 ft، فاكتب معادلة لتمثيل مساحة السجادة فيما يتعلق بـ $x$.

**b.** مثّل الدالة ذات الصلة بيانيًا.

**c.** ما أبعاد السجادة؟

**حوّل إلى أبسط صورة.**

**74.** $i^{10} + i^2$

**75.** $(2 + 3i) + (-6 + i)$

**76.** $(2.3 + 4.1i) - (-1.2 - 6.3i)$

## مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

**77.** **اختبار SAT/ACT** تبيع إحدى الشركات القهوة المطحونة في حاويتين على شكل إسطوانة وبحجمين مختلفين. تسع الحاوية الأصغر 300 جرام من القهوة. إذا كانت الحاوية الأكبر لها ضعف نصف قطر الحاوية الأصغر ومرة ونصف قدر الارتفاع، فكم عدد جرامات القهوة التي تسعها الحاوية الأكبر؟ (يتم حساب حجم الإسطوانة بالقاعدة $V = \pi r^2 h$.)

A 850
B 1275
C 1700
D 2126
E 2552

**78.** ما حلول المعادلات $1 = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}$ ؟

F $x = 1, x = -2$
G $x = -2, x = 1$
H $x = 1 + \sqrt{3}, x = 1 - \sqrt{3}$
J $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

**79.** **مراجعة** أراد أيمن أن يحسب متوسط درجاته في 6 اختبارات. جمع الدرجات بطريقة صحيحة ليحصل على $T$ ولكنه قسّم على 7 بدلاً من 6. وكانت النتيجة أقل من متوسطه الفعلي بـ 12 درجة. أي معادلة يمكن استخدامها لتحدد قيمة $T$؟

A $6T + 12 = 7T$
B $\frac{T}{7} = \frac{T - 12}{6}$
C $\frac{T}{7} + 12 = \frac{T}{6}$
D $\frac{T}{6} = \frac{T - 12}{7}$

**80.** تستطيع أماني أن تجمع أجزاء الأحجية في ثلاث ساعات. وتستطيع حصة أن تجمع أجزاء الأحجية نفسها في خمس ساعات. كم ستستغرقان من الزمن إذا عملتا معًا؟

F $1\frac{3}{8}$ ساعات
G $1\frac{5}{8}$ ساعات
H $1\frac{3}{4}$ ساعات
J $1\frac{7}{8}$ ساعات

# الدرس 1-6 المتباينات غير الخطية

**السابق**

- قمت بحل المعادلات كثيرة الحدود والمعادلات النسبية. (الدرسان 1-3 و 1-4)

**الحالي**

1. حل المتباينات كثيرة الحدود.
2. حل المتباينات النسبية.

**لماذا؟**

- تكون العديد من العوامل متضمنة عند بدء عمل جديد، بما في ذلك مقدار من الاستثمار المبدئي وأعمال الصيانة وتكاليف العمالة وتكلفة تصنيع المنتج المراد بيعه وسعر البيع الفعلي المحدد للمنتج. يمكن استخدام المتباينات غير الخطية لتحديد السعر المحدد لبيع أحد المنتجات لتحقيق ربح معين.

**مفردات جديدة**

متباينة كثيرة الحدود
polynomial inequality
مخطط الإشارات Sign chart
متباينة نسبية rational inequality

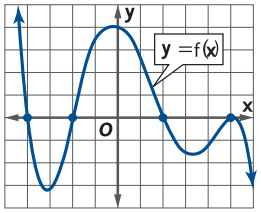
## 1 المتباينات كثيرة الحدود

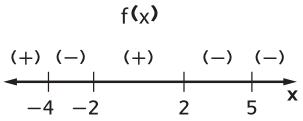
إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود، فعندئذٍ تأخذ **المتباينة كثيرة الحدود** الصورة العامة $f(x) \neq 0$ ، $f(x) < 0$ ، $f(x) \leq 0$ أو $f(x) > 0$ أو $f(x) \geq 0$ وتكون المتباينة $f(x) < 0$ صحيحة عندما يكون $f(x)$ عددًا سالبًا، بينما تكون $f(x) > 0$ صحيحة عندما يكون $f(x)$ عددًا موجبًا.

في الدرس 1-1، تعلمت أن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي $x$ لدالة كثيرة الحدود ما هي إلا أصفار حقيقية للدالة. عند ترتيبها، تنقسم أصفار المحور الأفقي $x$ إلى فترات تكون قيمة $f(x)$ إما موجبة بشكل كامل (تكون أعلى المحور الأفقي $x$) أو سالبة بشكل كامل (تكون أسفل المحور الأفقي $x$).

بإيجاد إشارة $f(x)$ لقيمة واحدة فقط في كل فترة على المحور الأفقي $x$، يمكنك تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة موجبة أو سالبة. بداية من فترات الاختبار الممثلة من خلال **مخطط الإشارات** الموجود في الجانب الأيسر، تعرف ما يلي:

- $f(x) < 0$ بالفترة $(-4, -2) \cup (2, 5) \cup (5, \infty)$
- $f(x) \leq 0$ بالفترة $[-4, -2] \cup [2, \infty)$
- $f(x) = 0$ عند $x = -4, -2, 2, 5$
- $f(x) > 0$ بالفترة $(-\infty, -4) \cup (-2, 2)$
- $f(x) \geq 0$ بالفترة $(-\infty, -4] \cup [-2, 2] \cup [5, 5]$.




### مثال 1 إيجاد حل لمتباينة كثيرة الحدود

**حُلّ المتباينة: لما يلي** $x^2 - 6x - 30 > -3$

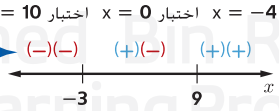
بجمع العدد 3 في كل طرف، تحصل على $x^2 - 6x - 27 > 0$ بافتراض أن $f(x) = x^2 - 6x - 27$ وينتج عن التحليل إلى العوامل ما يلي $f(x) = (x + 3)(x - 9)$. إذن تحتوي $f(x)$ على أصفار حقيقية عند $-3$ و 9. قم بإنشاء مخطط إشارات باستخدام هذه الأصفار، وبعد ذلك بقيمة ما على المحور الأفقي $x$ في كل فترة اختبار داخل الصورة التي تم تحليلها إلى العوامل للدالة كثيرة الحدود لتحديد هل $f(x)$ موجبة أم سالبة عند تلك النقطة.

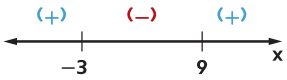
$f(x) = (x + 3)(x - 9)$

$f(x) = (x + 3)(x - 9)$

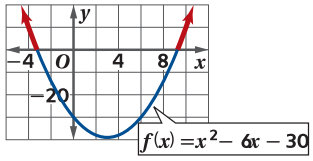
اختبار $x = -4$ اختبار $x = 0$ اختبار $x = 10$

فكّر: $(x + 3)$ و $(x - 9)$ هما قيمتان سالبتان عند $x = -4$




لأن $f(x)$ موجبة على الفترات الأولى والأخيرة، فإن مجموعة الحل لـ $x^2 - 6x - 30 > -3$ هي $(-\infty, -3) \cup (9, \infty)$ ويدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج، نظرًا لوجود $f(x)$ أعلى المحور الأفقي $x$ على هذه الفترات نفسها.




**تمرين موجّه**

**حُلّ كل من المتباينات التالية.**

**1A.** $x^2 + 5x + 6 < 20$

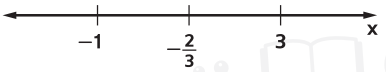
**1B.** $(x - 4)^2 > 4$

إذا كنت تعرف الأصفار الحقيقية لدالة ما، بما في ذلك مقدار التكرار، والسلوك الطرفي للدالة، فيمكنك تصميم مخطط إشارات بدون اختبار القيم.

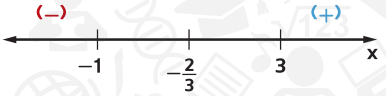
## مثال 2 إيجاد حل متباينة كثيرة حدود باستخدام السلوك الطرفي

**حُلّ المتباينة:** $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \leq 0$

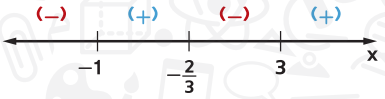
**الخطوة 1** بافتراض أن $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$ استخدم الأساليب الواردة في الدرس 1-4 لتحديد أن $f$ يحتوي على أصفار حقيقية عند $-1$ و $-\frac{2}{3}$ و 3. قم بإنشاء مخطط الإشارات.




**الخطوة 2** حدد السلوك الطرفي لـ $f(x)$. لأن درجة $f$ فردية ومعامل الحد الأكبر موجب، فأنت تعرف أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ يعني هذا أن الدالة تبدأ سالبة على اليسار وتنتهي موجبة على اليمين.

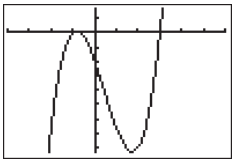



**الخطوة 3** لأن كل صفر مدرج يمثل موقع تغيير الإشارة، يمكنك إكمال مخطط الإشارات.




تساوي حلول $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \leq 0$ قيم المحور الأفقي $x$ بحيث يكون $f(x)$ سالبًا أو مساويًا لـ 0. من مخطط الإشارات، يمكنك معرفة أن مجموعة الحل تساوي $(-\infty, -1] \cup \left[-\frac{2}{3}, 3\right]$.

**التحقق من الحل** يكون التمثيل البياني لـ $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$ على المحور الأفقي $x$ على $(-\infty, -1] \cup \left[-\frac{2}{3}, 3\right]$. ✔



-4, 6] scl: 1 by [−25, 5] scl: 3

### تمرين موجّه

**حُلّ كل من المتباينات التالية.**

**2A.** $2x^2 - 10x \leq 2x - 16$

**2B.** $2x^3 + 7x^2 - 12x - 45 \geq 0$

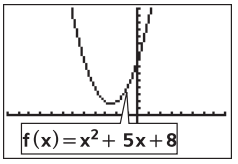
عندما لا تتقاطع دالة كثيرة الحدود مع المحور الأفقي $x$، يكون للمتباينات المرتبطة حلول غير عادية.

## مثال 3 المتباينات كثيرة الحدود التي لها مجموعات حل غير عادية

**حُـــلّ كل من المتباينات التالية.**

**a.** $x^2 + 5x + 8 < 0$

لا تحتوي الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 5x + 8$ على أصفار حقيقية، إذًا لا توجد أي تغيرات في الإشارات. تكون هذه الدالة موجبة بالنسبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي $x$. لذلك، لا يوجد حل لـ $x^2 + 5x + 8 < 0$. يدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج. لعدم وجود التمثيل البياني على المحور الأفقي $x$ أو أسفله. ومجموعة الحل هي $\varnothing$.




-12, 8] scl: 1 by [−5, 10] scl: 1

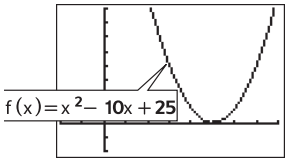
**b.** $x^2 + 5x + 8 \geq 0$

لأن الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 5x + 8$ موجبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي $x$، تساوي مجموعة الحل لـ $x^2 + 5x + 8 \geq 0$ جميع الأعداد الحقيقية أو $(-\infty, \infty)$.

**نصيحة دراسية**

**المتباينات كثيرة الحدود** يمكنك التحقق من حل إحدى المتباينات كثيرة الحدود بتمثيل الدالة بيانيًا وتقدير القيمة الحقيقية للمتباينة لكل فترة في الحل.

c. $x^2 - 10x + 25 > 0$




[−2, 8] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

تحتوي الدالة المرتبطة التالية $f(x) = x^2 - 10x + 25$ على صفر واحد حقيقي 5، مُكرر مرتين. إذًا لا تتغير إشارة قيمة $f(x)$. تكون هذه الدالة موجبة بالنسبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي $x$ باستثناء $x = 5$. لذلك، تكون مجموعة الحل لـ $x^2 - 10x + 25 > 0$ مساوية لـ $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$. يدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج.

d. $x^2 - 10x + 25 \leq 0$

تحتوي الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 - 10x + 25$ على صفر عند العدد 5. بالنسبة لجميع القيم الأخرى للمحور الأفقي $x$، تكون الدالة موجبة. لذلك، تكون مجموعة الحل لـ $x^2 - 10x + 25 \leq 0$ مساوية لـ $\{5\}$.

### تمرين موجّه

**حُلّ كل من المتباينات:**

3A. $x^2 + 2x + 5 > 0$

3B. $x^2 + 2x + 5 \leq 0$

3C. $x^2 - 2x - 15 \leq -16$

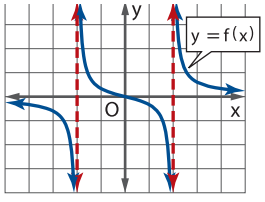
3D. $x^2 - 2x - 15 > -16$

**نصيحة دراسية**

**المتباينات النسبية** تذكر تضمين جميع الأصفار والنقاط غير المحدودة في دالة نسبية عند إنشاء مخطط الإشارات.

## 2 المتباينات النسبية

انظر في الدالة النسبية الموضحة على الجانب الأيسر. لاحظ الفترات التي تكون عليها $f(x)$ موجبة وسالبة. في حين يمكن أن تغير الدالة كثيرة الحدود من إشاراتها فقط في أصفارها الحقيقية، يمكن أن تغير الدالة النسبية من إشاراتها في الأصفار الحقيقية أو في نقاط الانقطاع لديها. لهذا السبب، عند حل أي **متباينة نسبية**، يجب عليك تضمين أصفار البسط والمقام في مخطط الإشارات.




يمكنك البدء في حل متباينة نسبية من خلال كتابة المتباينة أولاً بالصورة العامة مع تضمين تعبير نسبي واحد على اليسار وصفر على اليمين.

### مثال 4 إيجاد حل متباينة نسبية

**حُلّ المتباينة:** $\frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1} > 0$

$\frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1} > 0$ متباينة أصلية

$\frac{4x + 4 + 2x - 12}{(x-6)(x+1)} > 0$ استخدم المقام المشترك الأصغر، $(x - 1)(x + 6)$، لإعادة كتابة كل كسر. ثم اجمع.

$\frac{6x - 8}{(x-6)(x+1)} > 0$ بسّط.

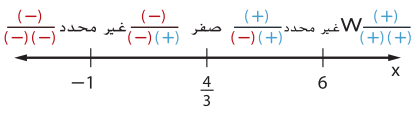
لنفترض أن $f(x) = \frac{6x - 8}{(x-6)(x+1)}$. إن الأصفار والنقاط غير المحددة في المتباينة تمثل أصفار البسط، $\frac{4}{3}$، والمقام، 6 و 1− قم بإنشاء جدول إشارات

باستخدام هذه الأعداد، بعد ذلك اختر قيم المحور الأفقي $x$ في كل فترة واختبره لتحديد هل $f(x)$ موجبة أم سالبة.

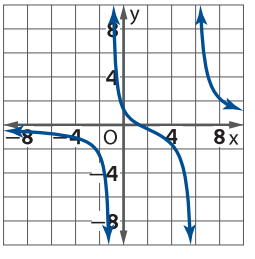
$f(x) = \frac{6x - 8}{(x-6)(x+1)}$


$f(x) = \frac{6x - 8}{(x-6)(x+1)}$

اختبار $x = -2$ اختبار $x = 0$ اختبار $x = 7$




تساوي مجموعة حل المتباينة الأصلية اتحاد تلك الفترات التي تكون لها $f(x)$ موجبة، $\left(-1, \frac{4}{3}\right) \cup (6, \infty)$ ويدعم التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1}$ في الشكل 1.6.1 هذا الاستنتاج.




**الشكل 1.6.1**

### تمرين موجّه

**جد حلًا للمتباينات التالية.**

**4A.** $\frac{x+6}{4x-3} \geq 1$ **4B.** $\frac{x^2-x-11}{x-2} \leq 3$ **4C.** $\frac{1}{x} > \frac{1}{x+5}$

يمكنك استخدام المتباينات غير الخطية لحل مسائل من الحياة اليومية.

## مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد حل متباينة نسبية

**المتنزهات الترفيهية تقوم مجموعة من طلاب المدرسة الثانوية بتأجير حافلة نظير دفع AED 600 لأخذهم إلى أحد المتنزهات الترفيهية في اليوم التالي لحفل التخرج. تبلغ تكلفة تذاكر المتنزه الترفيهي AED 60 وتقل بمقدار AED 0.50 في صورة خصم لكل فرد في المجموعة. اكتب متباينة يمكن استخدامها وإيجاد حل لها لتحديد كم عدد الطلاب الذين يجب عليهم الذهاب في رحلة نظير تكلفة إجمالية تكون أصغر من AED 40 لكل طالب.**

لنفترض أن $x$ يمثل عدد الطلاب.

تكلفة التذكرة لكل طالب + تكلفة الحافلة لكل طالب يجب أن تكون أصغر من AED 40.

$$60 - 0.5x + \frac{600}{x} < 40$$

اكتب المتباينة.

$$60 - 0.5x + \frac{600}{x} < 40$$

اطرح 40 من كل طرف.

$$60 - 0.5x + \frac{600}{x} - 40 < 0$$

استخدم العامل المشترك الأصغر، x، لإعادة كتابة كل كسر. ثم اجمع.

$$\frac{60x - 0.5x^2 + 600 - 40x}{x} < 0$$

بسّط.

$$\frac{-0.5x^2 + 20x + 600}{x} < 0$$

اضرب كل طرف في 2−. اعكس إشارة المتباينة.

$$\frac{x^2 - 40x - 1{,}200}{x} > 0$$

حلل إلى العوامل.

$$\frac{(x+20)(x-60)}{x} > 0$$

لنفترض أن $f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$ . أصفار هذه المتباينة هي 20− و 60 و 0. استخدم هذه الأعداد لإنشاء مخطط الإشارات لهذه الدالة وإكماله.

$$f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$$

اختبار $x = -30$ اختبار $x = -10$ اختبار $x = 10$ اختبار $= 70$

$\frac{(+)(+)}{(+)}$ صفر $\frac{(+)(-)}{(+)}$ غير محدد $\frac{(+)(-)}{(-)}$ صفر $\frac{(-)(-)}{(-)}$

−20 0 60 x

$$f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$$

(+) صفر (−) غير محدد (+) صفر (−)

−20 0 60 x

إذًا، مجموعة الحل لـ $60 - 0.5x + \frac{600}{x} < 40$ هي $(-20, 0) \cup (60, \infty)$

نظرًا لاستحالة وجود عدد سالب من الطلاب، يجب أن يذهب أكثر من 60 طالبًا إلى المتنزه الترفيهي نظير تكلفة إجمالية تبلغ أصغر من AED 40 لكل طالب.

### الربط بالحياة اليومية

يعد القطار الأفعواني كينجدا كا رولر الموجود في متنزه سيكس فلاجز أدفانتشر أطول قطار أفعواني في العالم. يصل القطار إلى أقصى ارتفاع له في الهواء ويبلغ 139 m وبعد ذلك يهبط رأسيًا بمعدل 270° في حركة حلزونية، في حين تصل سرعته إلى 206 km/h.

**المصدر:** Six Flags

### تمرين موجّه

5. **تنسيق الحدائق** يعمل مهندس تصميم الحدائق على تصميم سور يحيط بحديقة مستطيلة الشكل يبلغ محيطها 250 m. إذا كانت مساحة الحديقة تبلغ $1{,}000\ m^2$ على أقل تقدير، فاكتب متباينة وجد حلاً لها لإيجاد الأطوال المحتملة للسور.

# تمارين

**حُلّ كل من المتباينات التالية.** (الأمثلة 3-1)

1. $(x + 4)(x - 2) \le 0$
2. $(x - 6)(x + 1) > 0$
3. $(3x + 1)(x - 8) \ge 0$
4. $(x - 4)(-2x + 5) < 0$
5. $(4 - 6y)(2y + 1) < 0$
6. $2x^3 - 9x^2 - 20x + 12 \le 0$
7. $-8x^3 - 30x^2 - 18x < 0$
8. $5x^3 - 43x^2 + 72x + 36 > 0$
9. $x^2 + 6x > -10$
10. $2x^2 \le -x - 4$
11. $4x^2 + 8 \le 5 - 2x$
12. $2x^2 + 12x \ge 4x - 8$
13. $2b^2 + 16 \le b^2 + 8b$
14. $c^2 + 12 \le 3 - 6c$
15. $-a^2 \ge 4a + 4$
16. $3d^2 + 16 \ge -d^2 + 16d$

17. **أعمال تجارية** هناك مشروعات جديدة تقوم بها الشركة وستكون إيراداتها في العام الأول $r(x) = 120x - 0.0004x^2$ وستكون تكلفة بدء التشغيل $c(x) = 40x + 1{,}000{,}000$. حيث يمثل $x$ عدد المنتجات المباعة. الربح الصافي $p$ الذي سيتحقق في العام الأول يساوي $p = r - c$ اكتب متباينة وأوجِد حلها لتحديد كم عدد المنتجات التي يجب على الشركة بيعها لتحقيق ربح يصل إلى AED 2,000,000 على أقل تقدير. (مثال 1)

**حُلّ كل من المتباينات التالية.** (المثال 4)

18. $\frac{x - 3}{x + 4} > 3$
19. $\frac{x + 6}{x - 5} \le 1$
20. $\frac{2x + 1}{x - 6} \ge 4$
21. $\frac{3x - 2}{x + 3} < 6$
22. $\frac{3 - 2x}{5x + 2} < 5$
23. $\frac{4x + 1}{3x - 5} \ge -3$
24. $\frac{(x + 2)(2x - 3)}{(x - 3)(x + 1)} \le 6$
25. $\frac{(4x + 1)(x - 2)}{(x + 3)(x - 1)} \le 4$
26. $\frac{12x + 65}{(x + 4)^2} \ge 5$
27. $\frac{2x + 4}{(x - 3)^2} < 12$

28. **أعمال خيرية** ينظم برنامج الخدمات في إحدى المدارس الثانوية حفل عشاء لجمع أموال توجه إلى الأعمال الخيرية. ستبلغ تكلفة استئجار قاعة الطعام التي يمكن أن تستوعب 80 شخصًا AED 1,000. إذا بلغت تكلفة كل تذكرة AED 20 تُدفَع بشكل مسبق أو AED 22 تُدفَع في يوم حفل العشاء، وكان عدد الأشخاص الذين اشتروا التذاكر بشكل مسبق هو نفسه عدد الأشخاص الذين اشتروا التذاكر في يوم حفل العشاء، فاكتب متباينة لإيجاد أدنى عدد من الأشخاص الذين يجب عليهم حضور الحفل لتحقيق ربح يصل إلى AED 500 على أقل تقدير وإيجاد حل لها. (المثال 5)

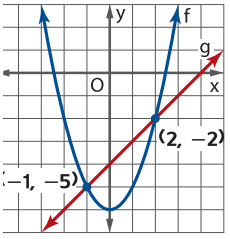
29. **التخرج** يقرر مجموعة من الأصدقاء تخصيص سيارة ليموزين لحضور حفل التخرج. تبلغ تكلفة استئجارها AED 750 بالإضافة إلى AED 25 لكل راكب. يوجد حد أدنى يبلغ راكبين، ويمكن أن تستوعب السيارة الليموزين حتى 14 شخصًا. اكتب متباينة لإيجاد كم عدد الأشخاص الذين يجب عليهم المشاركة في استئجار سيارة الليموزين علمًا بأن كل شخص سيدفع AED 120 على أقل تقدير وأوجِد حل للمتباينة. (المثال 5)

**جد المجال لكل تعبير مما يلي.**

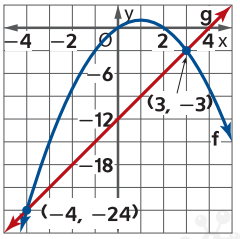
30. $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$
31. $\sqrt{x^2 - 3x - 40}$
32. $\sqrt{16 - x^2}$
33. $\sqrt{x^2 - 9}$
34. $\sqrt{\frac{x}{x^2 - 25}}$
35. $\sqrt[3]{\frac{x}{36 - x^2}}$

**جد مجموعة الحل للمتباينة: $f(x) - g(x) \ge 0$.**

36.




37.




38. **مبيعات** يبيع البائع الشطائر في كل حدث رياضي تنظمه المدرسة. تبلغ تكلفة كل شطيرة AED 0.38 وتكلفة كل كعكة AED 0.12. يستأجر البائع عربة الشطائر التي يستخدمها نظير AED 1,000. إذا كان البائع يرغب في أن تكون التكاليف التي يتكبدها أقل من الإيرادات التي يحققها بعد بيع 400 شطيرة، فكم تبلغ التكلفة التي ينبغي عليه تخصيصها لكل شطيرة؟

39. **الحدائق والمراكز الترفيهية** يبلغ محيط ملعب الحديقة المجتمعية مستطيل الشكل 112 m وتساوي مساحته على الأقل 588 m مربعًا.

a. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد الأطوال الممكنة التي يمكن بها بناء الملعب وإيجاد حل لها.

b. جـد حل للمتباينة التي كتبتها في الجزء a وفسره.

c. كيف تتغير المتباينة والحل إذا كانت مساحة الملعب لا تتجاوز أكثر من $588\ m^2$؟ فسر الحل في سياق الحالة.

**حُلّ كل من المتباينات التالية. (*إرشاد*: تحقق من أن كل فترة حل محتملة تقع ضمن المجال باستخدام المتباينة الأصلية.)**

40. $\sqrt{9y + 19} - \sqrt{6y - 5} > 3$

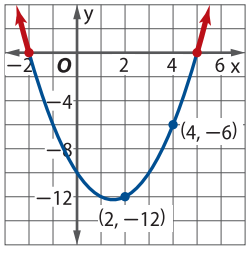
41. $\sqrt{4x + 4} - \sqrt{x - 4} \le 4$

42. $\sqrt{12y + 72} - \sqrt{6y - 11} \ge 7$

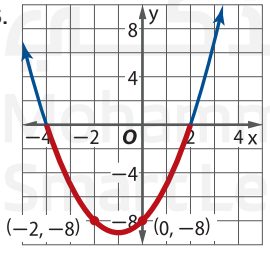
43. $\sqrt{25 - 12x} - \sqrt{16 - 4x} < 5$

**جد المتباينة التي يعبر عنها كل تمثيل بياني.**

44.




45.




**حُلّ كل من المتباينات التالية.**

46. $2y^4 - 9y^3 - 29y^2 + 60y + 36 > 0$

47. $3a^4 + 7a^3 - 56a^2 - 80a < 0$

48. $c^5 + 6c^4 - 12c^3 - 56c^2 + 96c \ge 0$

49. $3x^5 + 13x^4 - 137x^3 - 353x^2 + 330x + 144 \le 0$

50. **التعبئة** تبيع الشركة أوعية الزيت إسطوانية الشكل كهذا الوعاء المشار إليه.


a. استخدم حجم الوعاء للتعبير عن مساحة سطحه في صورة دالة ويكون نصف قطر المساحة بالسنتيمترات. (إرشاد: لتر واحد = 1,000 سنتيمتر مكعب)

b. تريد الشركة أن تكون مساحة سطح الوعاء أقل من $2{,}400\ cm^2$. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد أنصاف الأقطار للوفاء بهذا البند من المتطلبات.

c. استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد حل للمتباينة التي كتبتها في الجزء b وفسر الحل.

**حُلّ كل من المتباينات التالية.**

51. $(x + 3)^2(x - 4)^3(2x + 1)^2 < 0$

52. $(y - 5)^2(y + 1)(4y - 3)^4 \geq 0$

53. $(a - 3)^3(a + 2)^3(a - 6)^2 > 0$

54. $c^2(c + 6)^3(3c - 4)^5(c - 3) \leq 0$

55. **وقت الدراسة** يحدد جمال أنه بمساعدة المعلومات التي يعرفها في الوقت الحالي، يستطيع تحقيق مجموع درجات يصل إلى نسبة 75% من الاختبار الذي يخضع له. يعتقد جمال أن كل 5 دقائق كاملة يقضيها في الدارسة، سيرفع من مجموع درجاته بنسبة 1%.

a. إذا كان جمال يرغب في الحصول على مجموع درجات يصل إلى 89.5% على أقل تقدير، فاكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد الزمن $t$ الذي سيقضيه في الدراسة.

b. جـــــد حلًا للمتباينة التي كتبتها في الجزء a وفسر الحل.

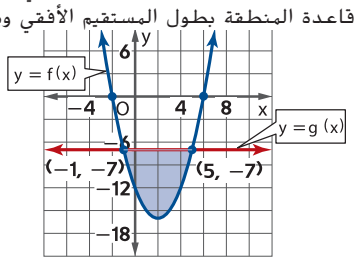
56. **ألعاب** تصرف آلة كرة السكي 3 بطاقات في كل مرة يلعب فيها أحد الأشخاص ثم بطاقتين إضافيتين لكل 80 نقطة يسجلها اللاعب.

a. اكتب دالة غير خطية لرسم نموذج لكمية البطاقات المستلمة لمجموع نقاط المحور الأفقي $x$.

b. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد مجموع النقاط الذي سيحتاج إليه اللاعب للحصول على 11 بطاقة على أقل تقدير.

c. أوجِد حلاً للمتباينة الموجودة في الجزء b وفسر الحل الذي تتوصل إليه.

57. مساحة منطقة محاطة بقطع مكافئ ومستقيم أفقي هي $A = \frac{2}{3}bh$، حيث يمثل $b$ قاعدة المنطقة بطول المستقيم الأفقي ويمثل $h$ ارتفاع المنطقة. جد المساحة المحاطة بـــ $f$ و$g$.




**إذا كان $k$ غير سالب، فجد الفترة لـــ $x$ الذي تكون له كل متباينة صحيحة.**

58. $x^2 + kx + c \geq c$

59. $(x + k)(x - k) < 0$

60. $x^3 - kx^2 - k^2x + k^3 > 0$

61. $x^4 - 8k^2x^2 + 16k^4 \geq 0$

62. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتحقق من المتباينات غير الخطية ذات القيم المطلقة.

a. **العرض الجدولي** انسخ الجدول الوارد أدناه وأكمله.

| الدالة | الأصفار | النقاط غير المحددة |
|---|---|---|
| $f(x) = \frac{x - 1}{\lvert x + 2\rvert}$ | | |
| $g(x) = \frac{\lvert 2x - 5\rvert}{x - 3}$ | | |
| $h(x) = \frac{\lvert x + 4\rvert}{\lvert 3x - 1\rvert}$ | | |

b. **العرض البياني** مثّل كل دالة بيانيًا في الجزء a.

c. **العرض الرمزي** قم بإنشاء مخطط إشارات لكل متباينة. ضمّن الأصفار والنقاط غير المحددة وقدّر إشارة البسوط والمقامات كل على حدة.

i. $\frac{x - 1}{\lvert x + 2\rvert} < 0$

ii. $\frac{\lvert 2x - 5\rvert}{x - 3} \geq 0$

iii. $\frac{\lvert x + 4\rvert}{\lvert 3x - 1\rvert} > 0$

d. **العرض العددي** اكتب حلاً لكل متباينة موجودة في الجزء c.

## مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

63. **تحليل الخطأ** يقوم حارب وخالد بحل $\frac{x^2}{(3 - x)^2} \geq 0$. يعتقد حارب أن الحل هو $(-\infty, 0]$ أو $[0, \infty)$. ويعتقد خالد أن الحل هو $(-\infty, \infty)$. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

64. **الاستنتاج** إذا كانت مجموعة الحل لمتباينة كثيرة الحدود هي $(-3, 3)$، فكم ستساوي مجموعة الحل إذا كان رمز المتباينة معكوسًا؟ اشرح استنتاجك.

65. **تحدٍ** جد القيم التي يكون لها $(a + b)^2 > (c + d)^2$ إذا كان $a < b < c < d$

66. **الاستنتاج** إذا كان $c < d > 0$، فجد الفترة التي يكون عليها $(x - c)(x - d) \leq 0$ صحيحًا. اشرح استنتاجك.

67. **تحدٍ** ما مجموعة الحل لـــ $(x - a)^{2n} > 0$ إذا كان $n$ عددًا طبيعيًا؟

68. **الاستنتاج** ماذا يحدث لمجموعة الحل لـــ $-(x + a)(x - b) < 0$ إذا تغير التعبير إلى $(x + a)(x - b) < 0$، حيث $a$ و$b > 0$؟ اشرح استنتاجك.

69. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يمكنك حل $\frac{3x + 1}{x - 2} < 6$ بضرب كل طرف في $x - 2$.

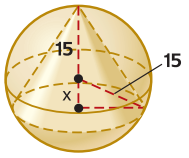
**جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وجدت.** (الدرس 1-5)

70. $f(x) = \frac{2x}{x+4}$

71. $h(x) = \frac{x^2}{x+6}$

72. $f(x) = \frac{x-1}{(2x+1)(x-5)}$

73. **الهندسة** ينحصر مخروط بداخل كرة يساوي نصف قطرها 15 سنتيمترًا. إذا كان حجم المخروط يساوي $1{,}152\pi$ سنتيمترًا مكعبًا، فجد الطول الذي يمثله الرمز $x$. (الدرس 1-4)




**اقسم باستخدام القسمة المطولة.** (الدرس 1-3)

74. $(x^2 - 10x - 24) \div (x + 2)$

75. $(3a^4 - 6a^3 - 2a^2 + a - 6) \div (a + 1)$

76. $(z^5 - 3z^2 - 20) \div (z - 2)$

77. $(x^3 + y^3) \div (x + y)$

78. **الموارد المالية** تظهر أسعار الإقفال بالدراهم للسهم خلال فترة زمنية ممتدة إلى شهر واحد. (الدرس 1-2)

| اليوم | السعر (الأسعار) | اليوم | السعر (الأسعار) |
|---|---|---|---|
| 1 | 30.15 | 15 | 15.64 |
| 5 | 27.91 | 20 | 10.38 |
| 7 | 26.10 | 21 | 9.56 |
| 10 | 22.37 | 28 | 9.95 |
| 12 | 19.61 | 30 | 12.25 |

a. مثّل البيانات بيانيًا.

b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة 3.

c. استخدم النموذج لتقدير سعر الإقفال في البورصة في اليوم 25.

79. **أمان المنازل** توفر الشركة نظام أمان للمنازل يستخدم الأعداد من 0 إلى 9، شاملة كلاً منهما، لرمز أمان مكون من 5 أرقام. (الدرس 0-7)

a. كم عدد رموز الأمان المختلفة المحتملة؟

b. في حالة عدم التمكن من تكرار الأعداد، فكم عدد رموز الأمان المتوفرة؟

c. بافتراض أن صاحب المنزل لا يريد استخدام 0 أو 9 كعدد في البداية ويريد أن يكون العدد 1 هو العدد الأخير. كم عدد الرموز التي يمكن تكوينها إذا أمكن تكرار الأعداد؟ في حالة عدم وجود تكرارات، فكم عدد الرموز المتوفرة؟

## مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. **اختبارا SAT/ACT** تقع الدائرتان، $A$ و$B$، في المستوى نفسه. إذا كان مركز الدائرة $B$ يقع على الدائرة $A$، فعندئذٍ كم عدد النقاط التي يمكن أن تتقاطع فيها الدائرة $A$ والدائرة $B$؟

I. 0 II. 1 III. 2

A I فقط
B III فقط
C I وIII فقط
D II وIII فقط
E I، II، وIII

81. يكون طول المستطيل أكبر من عرضه بمقدار 6 سنتيمترات. جد قيم العرض المحتملة إذا كانت مساحة المستطيل تزيد عن 216 سنتيمترًا مربعًا.

F $w > 12$
G $w < 12$
H $w > 18$
J $w < 18$

82. **إجابة حرة** يتم تمثيل كمية احتياطات مياه الشرب التي تقدر بملايين اللترات المتوفرة لإحدى المدن بواسطة $f(t) = 80 + 10t - 4t^2$. يتم تمثيل الحد الأدنى لكمية المياه التي يحتاج إليها قاطنو المدينة بواسطة $g(t) = (2t)^{\frac{4}{3}}$، حيث يمثل $t$ الزمن بالأعوام.

a. حدد أنواع الدوال الممثلة بواسطة $f(t)$ و$g(t)$.

b. ما المجال والمدى المرتبطان بـ $f(t)$ و$g(t)$؟ اشرح.

c. ما السلوك الطرفي لـ $f(t)$ و$g(t)$؟

d. مثّل $f(t)$ و$g(t)$ بيانيًا لـ $0 \le 6 \ge t$ على التمثيل البياني نفسه.

e. اشرح لماذا يجب أن تتوفر قيمة $c$ لـ $[0, 6]$ بحيث $f(c) = 50$

f. لأي قيمة في المجال ذي الصلة يحتوي $f$ على صفر؟ ما أهمية الصفر في هذه الحالة؟

g. إذا كانت هذه الحالة صحيحة وهذه التوقعات دقيقة، فمتى يُتوقع حاجة القاطنين بالمدينة إلى مياه أكثر من احتياطاتهم؟

# دليل الدراسة والمراجعة

## ملخص الوحدة

### المفاهيم الأساسية

**دوال القوة والدوال الجذرية** (الدرس 1-1)

- *دالة القوة* هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = ax^n$، حيث $a$ و $n$ أعداد حقيقية غير صفرية.
- *دالة أحادية الحد* هي أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = a$ أو $f(x) = ax^n$، حيث $a$ و $n$ أعداد حقيقية ثابتة غير صفرية.
- *دالة جذرية* هي أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$، حيث $n$ و $p$ أعداد صحيحة موجبة أكبر من 1 الذي ليس لديه عوامل مشتركة.

**الدوال كثيرة الحدود** (الدرس 1-2)

- دالة كثيرة الحدود هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$، حيث $a_n \neq 0$. الدرجة تساوي $n$.
- يوجد في التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود $n$ أصفار حقيقية مميزة على الأكثر و $n - 1$ نقاط دوران على الأكثر.
- يعتمد سلوك التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود عند $c$ الصفرية الخاصة به على عدد مرات تكرار العامل $(x - c)$.

**نظريتا الباقي والعامل** (الدرس 1-3)

- القسمة التركيبية: طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي بالصيغة $x - c$.
- في حالة قسمة $f$ على $x - c$، فإن الباقي يساوي $f(c)$.
- $x - c$ هي عامل لدالة كثيرة الحدود $f$ إذا وفقط إذا كان $f(c) = 0$.

**أصفار الدوال كثيرة الحدود** (الدرس 1-4)

- إذا كانت $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ ذات معاملات أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي لـ $f(x)$ يكتب بالصيغة $\frac{p}{q}$، حيث $p$ و $q$ ليس لديهما عوامل مشتركة، و $p$ هي عامل $a_0$ و $q$ هي عامل $a_n$.
- في الدالة كثيرة الحدود من الدرجة $n$، يوجد $n$ أصفار، بما في ذلك الأصفار المتكررة في نظام الأعداد المركبة. يوجد في هذه الدالة $n$ عوامل:

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ \ldots \ (x - c_n)$$

**الدوال النسبية** (الدرس 1-5)

- يتضمن التمثيل البياني لـ $f$ خطًا تقاربيًا رأسيًا $x = c$ إذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$
- يتضمن التمثيل البياني لـ $f$ خط تقارب أفقي $y = c$ إذا كانت $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$

الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ قد يوجد بها خطوط تقارب رأسيّة أو خطوط تقارب أفقية أو خطوط تقارب مائلة أو نقاط تقاطع مع المحور الأفقي $x$ ونقاط تقاطع مع المحور الرأسي $y$. يمكن تحديدهم جميعًا جبريًا.

**المتباينات غير الخطية** (الدرس 6 – 2)

- يجب أن يشمل مخطط إشارات المتباينة النسبية أصفارًا ونقاطًا غير محددة.

### المفردات الأساسية

- المترافقات المركبة complex conjugates
- الحل الدخيل extraneous solution
- خط التقارب الأفقي horizontal asymptote
- الجذور الحقيقية غير القابلة للاختزال irreducible over the reals
- معامل الحد الأكبر leading coefficientes
- اختبار الحد الرئيس leading-term test
- الحد الأدنى lower bound
- التكرار multiplicity
- خط التقارب المائل oblique asymptote
- الدالة كثيرة الحدود polynomial function
- دالة القوة power function
- الدالة التربيعية quartic function
- الدالة النسبية rational function
- الصفر المتكرر repeated zero
- مخطط-جدول- الإشارات sign chart
- القسمة التركيبية synthetic division
- التعويض التركيبي synthetic substitution
- نقطة دوران turning point
- الحد الأعلى upper bound
- خط التقارب الرأسي vertical asymptote

### مراجعة المفردات

**حدد الكلمة أو العبارة التي تُكمِل كل جملة أفضل ما يمكن.**

1. معامل الحد ذي أكبر أس للمتغير هو (معامل القيمة العظمى، الدرجة) لدالة الحدود.
2. (دالة كثيرة الحدود، دالة أسيّة) هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$، حيث $a_1, a_2, \ldots$ $a_n$ أعداد حقيقية و $n$ عدد طبيعي.
3. يوجد في الدالة التي لديها عدة عوامل لـ $(x - c)$ (أصفار متكررة، نقاط دوران).
4. (قسمة كثيرات الحدود، القسمة التركيبية) هي أقصر طريقة لقسمة الدوال كثيرة الحدود على عوامل خطية.
5. ترتبط (نظرية الباقي، نظرية العامل) بالعوامل الخطية لكثيرة الحدود ذات أصفار لدالتها المرتبطة.
6. يمكن ذكر بعض الأصفار الممكنة لدالة كثيرة الحدود في قائمة باستخدام نظرية (العامل، الأصفار النسبية).
7. يتم تحديد خطوط التقارب (الرأسيّة، الأفقية) عن طريق أصفار مقام دالة نسبية.
8. تحدد أصفار (المقام، البسط) نقاط التقاطع مع المحور الأفقي $x$ لتمثيل بياني لدالة نسبية.
9. تحدث خطوط التقارب (الأفقية، المائلة) عندما تمتلك دالة نسبية مقامًا بدرجة أكبر من 0 وبسطًا بدرجة أكبر من درجة مقامها.
10. (الدالة التربيعية، دالة القوة) هي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = ax^n$، حيث $a$ و $n$ أعداد حقيقية ثابتة غير صفرية.

# مراجعة درس بدرس

## 1-1 الدوال الأسيّة والجذرية

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها.**

11. $f(x) = 5x^6$
12. $f(x) = -8x^3$
13. $f(x) = x^{-9}$
14. $f(x) = \frac{1}{3}x^{-4}$
15. $f(x) = \sqrt{5x - 6} - 11$
16. $f(x) = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{6x^2 - 1} + 2$

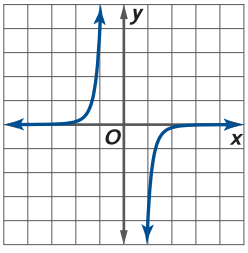
**جد حلاً لكل من المعادلات التالية.**

17. $2x = 4 + \sqrt{7x - 12}$
18. $\sqrt{4x + 5} + 1 = 4x$
19. $4 = \sqrt{6x + 1} - \sqrt{17 - 4x}$
20. $\sqrt[4]{x^2 + 31} - 1 = 3$

### مثال 1

**مثّل بيانيًا $f(x) = -4x^{-5}$ وقم بتحليلها. وضح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| −3 | 0.016 |
| −2 | 0.125 |
| −1 | 4 |
| 0 | غير محدد |
| 1 | −4 |
| 2 | −0.125 |
| 3 | −0.016 |




المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المدى: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

نقاط التقاطع. لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = 0$

التزايد: $(-\infty, 0)$ تزايد: $(0, \infty)$

## 1-2 الدوال كثيرة الحدود

**وضّح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.**

21. $f(x) = -4x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 12x - 6$
22. $f(x) = -3x^5 + 7x^4 + 3x^3 - 11x - 5$
23. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8x - 3$
24. $f(x) = x^3(x - 5)(x + 7)$

**اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.**

25. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$
26. $f(x) = x^5 + 8x^4 - 20x^3$
27. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
28. $f(x) = x^4 - 25$

**لكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيسي (b) حدد الأصفار وعدد مرات تكرار أي أصفار متكررة (c) جد بعض النقاط الإضافية (d) مثّل الدالة بيانيًا.**

29. $f(x) = x^3(x - 3)(x + 4)^2$
30. $f(x) = (x - 5)^2(x - 1)^2$

### مثال 2

**وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لـ $f(x) = -2x^5 + 3x^3 - 8x^2 - 6$ باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.**

الدرجة تساوي 5 ومعامل القيمة العظمى يساوي −2. لأن الدرجة فردية ومعامل القيمة العظمى سالب.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

### مثال 3

**اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الانعطاف للدالة $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ ونقاط الدوران لها. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.**

درجة $f$ تساوي 3. لذلك فإن 3 تتضمن أصفارًا حقيقية مميزة على الأكثر و 3 − نقطة دوران واحدة أو نقطتي دوران على الأكثر. لإيجاد أصفار حقيقية، حل المعادلة المرتبطة $f(x) = 0$ عن طريق التحليل إلى العوامل.

$$x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9)$$
$$= x(x + 3)(x + 3) \text{ أو } x(x + 3)^2$$

يتضمن التعبير 3 عوامل وصفرين حقيقيين مميزين و 0 و−3

## 1-3 نظريتا الباقي والعامل

**اقسم باستخدام القسمة المطولة.**

31. $(x^3 + 8x^2 - 5) \div (x - 2)$

32. $(-3x^3 + 5x^2 - 22x + 5) \div (x^2 + 4)$

33. $(2x^5 + 5x^4 - 5x^3 + x^2 - 18x + 10) \div (2x - 1)$

**اقسم باستخدام القسمة التركيبية.**

34. $(x^3 - 8x^2 + 7x - 15) \div (x - 1)$

35. $(x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18) \div (x - 2)$

36. $(2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 16x - 6) \div (2x - 1)$

**استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة هي عوامل لـ $f(x)$ أم لا. استخدم التعابير ذات الحدين التي تعتبر عوامل لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$**

37. $f(x) = x3 + 3x2 - 8x - 24.\ (x + 3)$

38. $f(x) = 2x4 - 9x3 + 2x2 + 9x - 4,\ (x - 1),\ (x + 1)$

39. $f(x) = x4 - 2x3 - 3x2 + 4x + 4,\ (x + 1),\ (x - 2)$

### مثال 4

**اقسم $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) \div (2x - 1)$ باستخدام القسمة التركيبية.**

أعد كتابة تعبير القسمة $\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$ بحيث يكون المقام بالصيغة $x - c$

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{2x - 1} = \frac{(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) \div 2}{(2x - 1) \div 2}$$

$$= \frac{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2}{x - \frac{1}{2}}$$

لذا، $c = \frac{1}{2}$ وقم بإجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -2 \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\frac{(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4)}{(2x - 1)} = x^2 - x + 2 - \frac{2}{(2x - 1)}$$

## 1-4 أصفار الدوال كثيرة الحدود

**اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أي منها أصفار، إن وجدت.**

40. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

41. $f(x) = x^3 - 14x - 15$

42. $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4$

43. $f(x) = 3x^4 - 14x^3 - 2x^2 + 31x + 10$

**جد حلاً لكل من المعادلات التالية.**

44. $x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18 = 0$

45. $6x^3 - 23x^2 + 26x - 8 = 0$

46. $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x = 48$

47. $2x^4 - 11x^3 + 44x = -4x^2 + 48$

**استخدم الصفر الموضح لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالة. ثم اكتب التحليل الى العوامل الخطية للدالة.**

48. $f(x) = x4 + x3 - 41x2 + x - 42,\ i$

49. $f(x) = x4 - 4x3 + 7x2 - 16x + 12.\ -2i$

### مثال 5

**حُـلّ المعادلة $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$**

لأن معامل القيمة العظمى يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تكون عوامل لـ $-32$. لذا تساوي جميع الأصفار النسبية الممكنة $\pm1$ و$\pm2$ و$\pm4$ و$\pm8$ و$\pm16$ و$\pm32$. باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن $-2$ تساوي صفرًا نسبيًا.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -16 & -32 \\ & & -2 & 0 & 32 \\ \hline & 1 & 0 & -16 & 0 \end{array}$$

لذا، $f(x) = (x + 2)(x^2 - 16)$ ويمكن كتابة الدالة كثيرة الحدود هذه بالصيغة $f(x) = (x + 2)(x - 4)(x + 4)$ والأصفار النسبية لـ $f$ تساوي $-2$ و $4$ و$-4$

## 1-5 الدوال النسبية

**ابحث عن مجال كل دالة وكل معادلات خطوط التقارب الرأسيّة أو الأفقية، إن وُجدت.**

**50.** $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$

**51.** $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25}$

**52.** $f(x) = \frac{x(x - 3)}{(x - 5)^2(x + 3)^2}$

**53.** $f(x) = \frac{(x - 5)(x - 2)}{(x + 3)(x + 9)}$

**في كل دالة، حدد أي خطوط التقارب ونقاط تقاطع. ثم مثِّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.**

**54.** $f(x) = \frac{x}{x - 5}$

**55.** $f(x) = \frac{x - 2}{x + 4}$

**56.** $f(x) = \frac{(x + 3)(x - 4)}{(x + 5)(x - 6)}$

**57.** $f(x) = \frac{x(x + 7)}{(x + 6)(x - 3)}$

**58.** $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

**59.** $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^3 - 6x^2 + 5x}$

**حُلّ كل من المعادلات التالية.**

**60.** $\frac{12}{x} + x - 8 = 1$

**61.** $\frac{2}{x + 2} + \frac{3}{x} = -\frac{x}{x + 2}$

**62.** $\frac{1}{d + 4} = \frac{2}{d^2 + 3d - 4} - \frac{1}{1 - d}$

**63.** $\frac{1}{n - 2} = \frac{2n + 1}{n^2 + 2n - 8} + \frac{2}{n + 4}$

### مثال 6

**ابحث عن مجال $f(x) = \frac{x + 7}{x + 1}$ وأي خطوط التقارب رأسيّة وأفقية.**

**الخطوة 1 جد المجال.**

الدالة غير محددة عند الصفر الموجود في المقام $h(x) = x + 1$. الذي يساوي $-1$. مجال $f$ هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء $x = -1$.

**الخطوة 2 ابحث عن خطوط التقارب، إن وجدت.**

تحقق من خطوط التقارب الرأسيّة.

صفر المقام يساوي $-1$. لذا يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -1$.

تحقق من خطوط التقارب الأفقية.

درجة البسط تساوي درجة المقام. نسبة معامل الحد الأكبر تساوي $\frac{1}{1} = 1$. لذا، $y = 1$ هي خط تقارب أفقي.

## 1-6 المتباينات غير الخطية

**حُلّ كل من المتباينات التالية.**

**64.** $(x + 5)(x - 3) \le 0$

**65.** $x^2 - 6x - 16 > 0$

**66.** $x^3 + 5x^2 \le 0$

**67.** $2x^2 + 13x + 15 < 0$

**68.** $x^2 + 12x + 36 \le 0$

**69.** $x^2 + 4 < 0$

**70.** $x^2 + 4x + 4 > 0$

**71.** $\frac{x - 5}{x} < 0$

**72.** $\frac{x + 1}{(12x + 6)(3x + 4)} \ge 0$

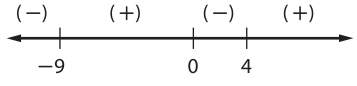
**73.** $\frac{5}{x - 3} + \frac{2}{x - 4} > 0$

### مثال 7

**حُلّ المتباينة: $x^3 + 5x^2 - 36x \le 0$**

ينتج عن تحليل دالة كثيرة الحدود إلى العوامل $f(x) = x^3 + 5x^2 - 36x$ تساوي $f(x) = x(x + 9)(x - 4)$. لذا تتضمن $f(x)$ أصفارًا حقيقية عند 0 و$-9$ و 4

أنشئ مخطط إشارات باستخدام هذه الأصفار. ثم عوّض عن قيمة $x$ من كل فترة للاختبار في الدالة لتحديد ما إذا كان $f(x)$ موجبة أم سالبة عند هذه النقطة.




لأن $f(x)$ سالبة في الفترتين الأولى والثالثة، فإن حل المعادلة $x^3 + 5x^2 - 36x \le 0$ يساوي $(-\infty, -9] \cup [0, 4]$

## التطبيقات وحل المسائل

**74. الفيزياء** ينص قانون كبلر الثالث، في الفيزياء، الذي يتعلق بحركة الكواكب على أنه يتم تحديد الزمن الذي تستغرقه $T$ للوصول إلى كوكب ما لإكمال دورة واحدة في مدارها حول الشمس عن طريق $T = R^{\frac{3}{2}}$، حيث $R$ هي المتوسط الحسابي لمسافة بُعد الكوكب عن الشمس. يتم قياس الزمن بالسنوات الأرضية، ويتم قياس المسافة بوحدات فلكية. (الدرس 1-1)

a. حدد مجال الدالة ذات الصلة ومداها.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

c. يتم رصد الزمن الذي يستغرقه كوكب المريخ ليدور حول الشمس بـ1.88 سنة أرضية. حدد متوسط بُعد كوكب المريخ عن الشمس بالأميال، علمًا بأن الوحدة الفلكية الواحدة تساوي 93 مليون ميل.

**75. سباق الخيول** أقام فصل الرياضة التابع للأستاذ حمدي سباقًا سنويًا للخيول في الريف للتنافس بين الطلاب. تم تحديد سرعة v بالأميال لكل ساعة منذ إطلاق السباق بعد t ثوانٍ. (الدرس 1-2)

| $t$ | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 85 | 50 | 30 | 20 | 15 | 12 |

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

b. حدد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.

c. استخدم الدالة للتنبؤ بالسرعة التي يسير عندها الخيل بعد 1.2 ثانية.

d. استخدم الدالة للتنبؤ بالوقت الذي تكون فيه سرعة الخيل هي 47 mi/h.

**76. المتنزهات** يتم تحديد مستوى الارتفاع عن سطح الأرض لراكب الأقطار الأفعواني "بيج مونستر" في الجدول. (الدرس 2-2)

| الزمن (بالثواني) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| الارتفاع (بالقدم) | 85 | 62 | 22 | 4 | 17 |

a. صمم مخطط تشتت للبيانات وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قرّب كل معامل إلى أقرب جزء من ألف واذكر معامل الارتباط.

c. استخدم النموذج لتقدير ارتفاع الراكب عند 17 ثانية.

d. استخدم النموذج لتحدد بصورة تقريبية أول وقت يرتفع فيه الراكب 50 قدمًا فوق سطح الأرض.

**77. زراعة الحدائق** زرع والدا أيمن بستانهما الجديد في عام 2001. ومنذ عام 2001 إلى عام 2011، زادت كمية العشب الزاحف على النحو التالي $f(x) = 0.021x^3 - 0.336x^2 + 1.945x - 0.720$، حيث $x$ تساوي عدد الأعوام منذ عام 2001 و $f(x)$ عدد الأقدام المربعة لكل عام. استخدم القسمة التركيبية لإيجاد عدد الأقدام المربعة للعشب الزاحف في البستان في عام 2011. قرّب إلى أقرب جزء من ألف. (الدرس 1-3)

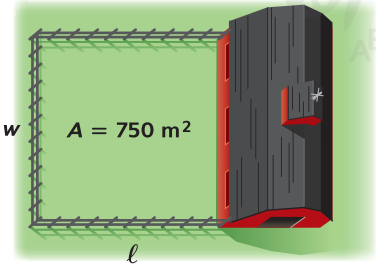
**78. التجارة** يبيع محل كتب مستعملة 1,000 كتاب، في المتوسط، شهريًا بمتوسط سعر يبلغ 10 AED لكل كتاب. ونظرًا لارتفاع التكاليف، ترغب صاحبة المحل في رفع أسعار جميع الكتب. وحسبت أن حجم مبيعاتها سيقل 50 كتابًا من الكتب التي رفعت سعرها 1 AED. (الدرس 1-4)

a. اكتب دالة تمثل إجمالي حجم مبيعاتها بعد رفع أسعار كتبها بمقدار $x$ درهم إماراتي.

b. كم عدد الدراهم الإماراتية التي تحتاجها لرفع أسعار كتبها بحيث يصل إجمالي قيمة مبيعاتها 11.250 AED؟

c. ما أقصى مبلغ يمكن أن ترفع به الأسعار وأن تحقق 10,000 AED من إجمالي المبيعات؟ اشرح.

**79. الزراعة** ترغب إحدى الفلاحات في تطويق مساحة مستطيلة باستخدام جانب واحد من حظيرتها و 80 m من مادة السياج. حدد أبعاد مساحة التطويق. افترض أن عرض مساحة التطويق w لن يكون أكبر من جانب الحظيرة. (الدرس 1-4)




**80. البيئة** تشتهر إحدى البرك باحتوائها على 0.40 % من الحمض. تحتوي البركة على 50,000 gal من الماء. (الدرس 1-5)

a. كم عدد جالونات الحمض في البركة؟

b. افترض أنه تمت إضافة $x$ جالونات من الماء النقي إلى البركة. اكتب $p(x)$، وهي النسبة المئوية للحمض في البركة بعد إضافة $x$ جالونات من الماء.

c. جد خط التقارب الأفقي لـ $p(x)$.

d. هل تشتمل الدالة على أي خطوط التقارب رأسيّة؟ اشرح.

**81. الأعمال التجارية** يقوم أحد الخبازين ببيع $x$ كعكات، ونتيجة لذلك فإنه سيحقق معدل إيرادات يصل إلى $b(x) = x^2 - 5x - 150$ مئة درهم إماراتي. حدد أدنى عدد من الكعكات التي يحتاج الخباز أن يبيعها لتحقيق ربح. (الدرس 1-6)

**82. حفلة دينية** يرغب أحد الفصول الأولية في تنظيم حفلة دينية لجمع تبرعات. وتبلغ تكلفة القاعة التي يرغب الفصل في استئجارها 3,000 AED فضلًا عن رسم إضافي يقدر بـ 5 AED لكل فرد. (الدرس 1-6)

a. اكتب متباينة لتحديد كم عدد الأفراد الذين يجب أن يحضروا الحفلة إذا أراد الفصل أن يجعل تكلفة الرسوم أصغر من 10 AED لكل فرد ثم جد حلاً لها.

b. ستوفر الصالة مؤثرات DJ مقابل 1,000 AED إضافي. كم عدد الأفراد الذين يجب أن يحضروا الحفلة لتصبح تكلفة الرسوم أصغر من 10 AED لكل فرد؟

# تدريب على الاختبار

**مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها.**

1. $f(x) = 0.25x^{-3}$
2. $f(x) = 8x^{\frac{4}{3}}$

**جد حلاً لكل من المعادلات التالية.**

3. $x = \sqrt{4 - x} - 8$
4. $\sqrt{5x + 4} = \sqrt{9 - x} + 7$
5. $-2 + \sqrt{3x + 2} = x$
6. $56 - \sqrt[8]{7x^2 + 4} = 54$
7. $x^4 - 5x^3 - 14x^2 = 0$
8. $x^3 - 3x^2 - 10x = -24$

**وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.**

9. $f(x) = 5x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 11x - 8$
10. $f(x) = -3x^5 - 8x^4 + 7x^2 + 5$

**اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.**

11. $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 60x$
12. $f(x) = x^5 - 16x$

13. **الاختيار من متعدد** أي من الدوال يوجد بها 3 نقاط دوران؟

A $f(x) = x^4 - 4$
B $f(x) = x^4 - 11x^3$
C $f(x) = x^3 + 9x^2 + 20x$
D $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

14. **كرة البيسبول** يتم تحديد الارتفاع $h$ بالقدم في كرة البيسبول، بعد ضرب الكرة من قبل أحد اللاعبين، عن طريق $h(t) = -32t^2 + 128t + 4$. حيث t هي الزمن بالثواني بعد ضرب الكرة. وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني للدالة باستخدام الحدود. اشرح باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

**لكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيسي (b) حدد الأصفار وعدد مرات تكرار أي أصفار متكررة (c) جد بعض النقاط الإضافية (d) مثّل الدالة بيانيًا.**

15. $f(x) = x(x - 1)(x + 3)$
16. $f(x) = x^4 - 9x^2$

**استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين المقدمة هي عوامل لـ $f(x)$ أم لا. استخدم التعابير ذات الحدين التي تُعتبر عوامل لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$.**

17. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$, $(x + 3)$
18. $f(x) = x^4 - x^3 - 34x^2 + 4x + 120$, $(x + 5)$, $(x - 2)$

19. **الطقس** يبين الجدول متوسط درجة الحرارة العالية في مدينة باي شهريًا.

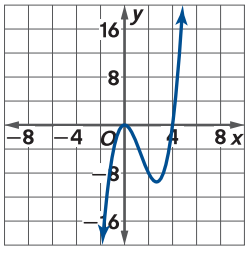
| يناير | فبراير | مارس | أبريل | مايو | يونيو |
|---|---|---|---|---|---|
| 62.3° | 66.5° | 73.3° | 79.1° | 85.5° | 90.7° |
| **يوليو** | **أغسطس** | **سبتمبر** | **أكتوبر** | **نوفمبر** | **ديسمبر** |
| 93.6° | 93.5° | 89.3° | 82.0° | 72.0° | 64.6° |

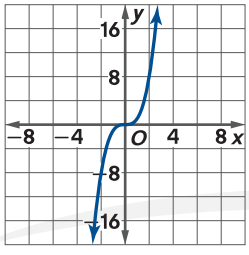
a. صمم مخطط تشتت للبيانات.
b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود درجتها 3.
استخدم $x = 1$ لشهر يناير وقرّب كل معامل إلى أقرب جزء من ألف.
c. استخدم النموذج للتنبؤ بمتوسط درجة الحرارة الكبرى ليناير القادم. افترض أن $x = 13$

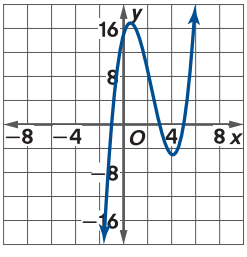
**اكتب دالة كثيرة الحدود لأقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على الأصفار الموضحة.**

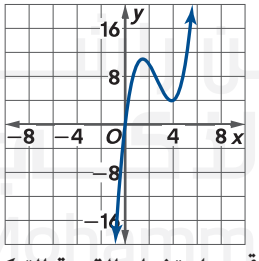
20. $-1, 4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$
21. $5, -5, 1 - i$

22. **الاختيار من متعدد** أي من الدوال التي يتم تمثيلها بيانيًا أدناه يجب أن يكون لديها أصفار تخيلية؟

F



H



G



J



**اقسم باستخدام القسمة التركيبية.**

23. $f(x) = (x^3 - 7x^2 + 13) \div (x - 2)$
24. $f(x) = (x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 8) \div (x + 3)$

**حدد أي خطوط تقارب ونقاط تقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.**

25. $f(x) = \dfrac{2x - 6}{x + 5}$
26. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4}$

**جد حلاً للمتباينات التالية.**

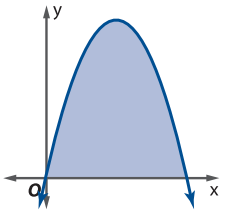
27. $x^2 - 5x - 14 < 0$
28. $\dfrac{x^2}{x - 6} \geq 0$

# الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم

# المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات

**الهدف**

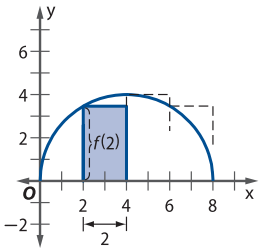
- تقريب المساحة الواقعة بين المنحنى والمحور الأفقي $x$.




يُعد *حساب التفاضل* والتكامل أحد فروع التفاضل والتكامل الذي يركز على عمليات إيجاد المساحات والأحجام والأطوال. في الهندسة، تعلمت كيفية حساب محيطات ومساحات وأحجام المضلعات والمجسمات والأشكال المركبة عبر الاستعانة بمعرفتك المتعلقة بالأشكال الأساسية، مثل المثلثات والأهرامات والمخاريط. يمكن إيجاد محيطات ومساحات وأحجام الأشكال والأجسام غير المنتظمة التي لا تعد من ضمن مجموعة الأشكال الأساسية بطريقة متشابهة. يعد حساب المساحة بين المنحنى والمحور الأفقي $x$، كما هو موضح على الجانب الأيسر، من تطبيقات حساب التفاضل والتكامل.

## نشاط 1 تقريب المساحة الواقعة تحت أحد المنحنيات

**قرّب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x}$ والمحور الأفقي $x$ باستخدام المستطيلات.**



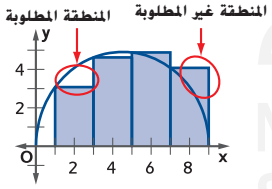

**الخطوة 1** ارسم 4 مستطيلات تكون بعرض وحدتين بين $f(x)$ والمحور الأفقي $x$. ينبغي إيجاد ارتفاع المستطيل عندما تتقاطع **النقطة الطرفية** عندالجانب الأيسر مع $f(x)$، كما هو موضح في الشكل. لاحظ أن ارتفاع المستطيل الأول سوف يساوي $f(0)$ أو 0

**الخطوة 2** احسب مساحة كل مستطيل.

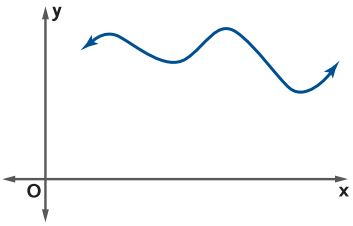
**الخطوة 3** قرّب مساحة المنطقة باستخدام ناتج جمع مساحات المستطيلات.

### حلل النتائج

1. ما التقدير التقريبي للمساحة؟
2. كيف تؤثر مساحة أحد المستطيلات الواقعة خارج التمثيل البياني على التقدير التقريبي؟
3. احسب المساحة الفعلية لنصف الدائرة. كيف تتم مقارنة التقدير التقريبي مع المساحة الفعلية؟
4. كيف يمكن استخدام المستطيلات لإيجاد عملية التقدير الأكثر دقة؟ اشرح استنتاجك.



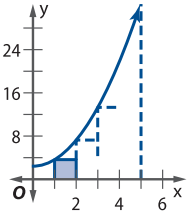

قد لا يؤدي استخدام المستطيلات الكبيرة نسبيًا في حساب المساحة الواقعة أسفل المنحنى إلى الحصول على تقدير تقريبي يتسم بالدقة مثل العدد 3 المطلوب. قد تكون قطاعات المساحة الملحوظة أسفل المنحنى غير محسوبة. وبالمثل، إذا تجاوزت المستطيلات المنحنى، فقد يتم تضمين كميات كبيرة من المساحات التي تقع أسفل أحد المنحنيات في التقريب.




بالإضافة إلى ذلك، لا تكون المناطق محاطة دائمًا بمنحنى يتقاطع مع المحور الأفقي $x$. لقد تناولت بالدراسة العديد من الدوال التي لها تمثيلات بيانية تتضمن سلوكيات طرفية مختلفة. لا يلزم أن تكون لهذه التمثيلات البيانية نقطتا تقاطع مع المحور الأفقي $x$ تسمح بوجود نقاط بداية ونهاية واضحة. في تلك الحالات، نحسب غالبًا المساحة الواقعة أسفل المنحنى للفترة الموجودة على المحور الأفقي $x$.

## نشاط 2 تقريب المساحة الواقعة تحت أحد المنحنيات

**قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = x^2 + 2$ والمحور الأفقي $x$ على الفترة $[1, 5]$ باستخدام المستطيلات.**




**الخطوة 1** ارسم 4 مستطيلات بعرض وحدة واحدة بين $f(x)$ و المحور الأفقي $x$ على الفترة $[1, 5]$ كما هو موضح في الشكل. استخدم **النقطة الطرفية** عند الجانب الأيسر لكل فترة فرعية لإيجاد ارتفاع كل مستطيل.

**الخطوة 2** احسب مساحة كل مستطيل.

**الخطوة 3** قرّب مساحة المنطقة عن طريق إيجاد ناتج جمع مساحات المستطيلات.

**الخطوة 4** كرر الخطوات من 1 إلى 3 باستخدام 8 مستطيلات، يساوي عرض كل منها 0.5 وحدة، و 16 مستطيلاً، يساوي عرض كل منها 0.25 وحدة.

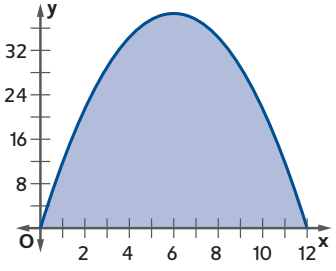
### حلل النتائج

5. ما قيمة المساحة الكلية التي تقترب منها التقديرات التقريبية؟
6. باستخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيسر، تقع جميع المستطيلات بالكامل أسفل المنحنى. كيف يؤثر هذا على التقدير التقريبي لمساحة المنطقة؟
7. هل تختلف التقديرات التقريبية إذا تم إيجاد كل ارتفاع محدد للمستطيل باستخدام النقطة النهائية له عند الجانب الأيمن؟ هل هذا حقيقي دومًا؟ اشرح استنتاجك.
8. ما الذي سيحدث للتقديرات التقريبية إذا قمنا بالاستمرار في زيادة عدد المستطيلات المراد استخدامها؟ اشرح استنتاجك.
9. قدم فرضية تمثل العلاقة بين المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات وعدد المستطيلات المستخدمة لإيجاد التقدير التقريبي. اشرح إجابتك.

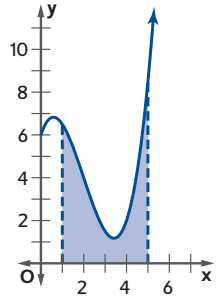
**نصيحة دراسية**

**نقاط طرفية** قد تستخدم أي نقطة داخل فترة فرعية لإيجاد ارتفاع المستطيلات المستخدمة لتقريب المساحة. النقاط المستخدمة بشكل شائع أكثر هي النقاط الطرفية عند الجانب الأيسر والنقاط الطرفية عند الجانب الأيمن والنقاط الموجودة في المنتصف.

## التمثيل والتطبيق




10. في هذه المسألة، ستقوم بتقريب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور الأفقي $x$.
   a. قرّب المساحة باستخدام 6 مستطيلات و 12 مستطيلاً و 24 مستطيلاً. جد ارتفاع كل مستطيل باستخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيسر.
   b. ما قيمة المساحة الكلية التي تقترب منها التقديرات التقريبية؟
   c. هل يؤدي استخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيمن والمقابلة للنقاط النهائية الموجودة عند الجانب الأيسر لارتفاعات المستطيلات إلى وجود تقديرات تقريبية مختلفة؟ اشرح استنتاجك.




11. في هذه المسألة، ستقوم بتقريب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ والمحور الأفقي $x$ عند الفترة $[1, 5]$.
   a. قرّب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أولاً ومن ثمَّ استخدام 8 مستطيلات. جد ارتفاع كل مستطيل باستخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيسر.
   b. هل يكون ناتج حساب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أو 8 مستطيلات مساويًا لتقديرات تقريبية كافية؟ اشرح استنتاجك.
   c. هل يؤدي استخدام نقاط النقاط الطرفية عند الجانب الأيمن والمقابلة للنقاط النهائية الموجودة عند الجانب الأيسر لارتفاعات المستطيلات إلى وجود تقديرات تقريبية مختلفة؟ اشرح استنتاجك.