الوحدة 1

تمهيدات

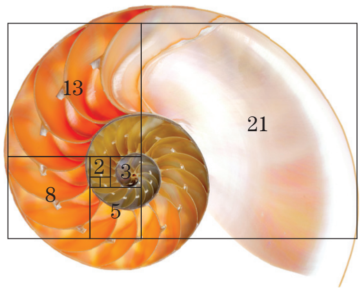
نقدّم في هذه الوحدة مجموعةً من الموضوعات المألوفة، وفي المقام الأول تلك التي نعدّها أساسيةً لدراسة التفاضل والتكامل. وفي حين أننا لا نعتزم أن تشكّل هذه الوحدة مراجعةً شاملةً لرياضيات ما قبل التفاضل والتكامل، فإننا سعينا إلى تسليط الأضواء على بعض الرموز والمصطلحات الموحّدة التي نستخدمها في هذا الكتاب.

أثناء نموّ حيوان النوتيلاس، يحيط نفسه بصدفةٍ حلزونية الشكل. وتعتمد هذه الهندسة البديعة على كمّ لا يستهان به من المفاهيم الرياضية. ينمو النوتيلاس بطريقةٍ تحافظ أبعاده وفقها على نسب كلية ثابتة. ونقصد بذلك أنه إن رسمت مستطيلًا يحيط بالصدفة، فتبقى نسبة طوله إلى عرضه ثابتة.

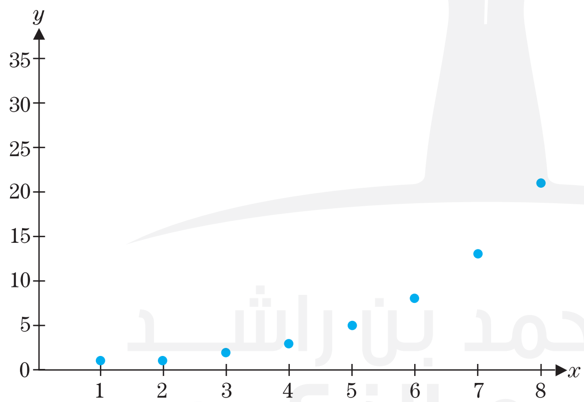
ثمّة العديد من الطرق لتمثيل هذه الخاصية رياضيًا. ندرس في الإحداثيات القطبية (التي نعرضها في الوحدة 9) الحلزونات اللوغاريتمية التي تتميز بخاصية النمو الثابت لزاويتها، ويقابل ذلك ثبات نسب أبعاد صدفة النوتيلاس. باستخدام المفاهيم الأساسية في الهندسة، يمكنك تقسيم المستطيل المحيط بالصدفة إلى سلسلة من المربعات كما يوضّح الشكل. تشكّل الأطوال النسبية للمربعات متتالية فيبوناتشي الشهيرة، ....,8 ,5 ,3 ,2 ,1 ,1 ، حيث كل عدد في المتتالية يساوي مجموعة العددين السابقين له.

تتميّز متتالية فيبوناتشي بقائمةٍ مذهلةٍ من الخواصّ المثيرة للاهتمام. (ابحثوا على شبكة الإنترنت لتعرفوا تمامًا ماذا نقصد!) تقابل الأعداد الموجودة في المتتالية ظواهر مذهلةً في الطبيعة، كعدد بتلات الزنبق (3) والحوذان (5) والقطيفة (13) ونبات حشيشة الحمى (34). ورغم أن الطريقة المستخدمة لتوليد متتالية فيبوناتشي بسيطة، فمن المفيد أيضًا التفكير في كيفية التعبير عنها على صورة دالة. إن تعيين النقاط المتعددة الأولى من المتتالية على مستوٍ إحداثي (كما هو موضّح في الشكل 1.1 على الصفحة التالية) لا بدّ أن يظهر تمثيلًا بيانيًّا ينحني نحو الأعلى، كمنحنًى لقطعٍ مكافئٍ أو منحنًى أسي.

ثمّة جانبان في هذه المسألة يشكّلان موضوعين هامين في إطار التفاضل والتكامل. يتجلى أحدهما في أهمية البحث عن أنماط تساعدنا في وصف العالم على نحوٍ أفضل. أما الموضوع الثاني، فيتمثل بالتفاعل المتبادل بين التمثيلات البيانية والدوال. ومن خلال ربط تقنيات الجبر مع الصور المرئية التي تقدّمها التمثيلات البيانية، ستحسّن من قدرتك على حل مسائل في الرياضيات من الحياة اليومية بصورةٍ كبيرةٍ.



صدفة النوتيلاس



الشكل 1.1
متتالية فيبوناتشي

الدرس 1-1 كثيرات الحدود والدوال النسبية

نظام الأعداد الحقيقية والمتباينات

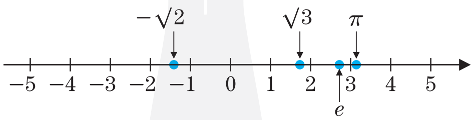
نبدأ حساب التفاضل والتكامل انطلاقا من نظام الأعداد الحقيقية، حيث سنركّز على الخواصّ ذات الأهمية الخاصة بالنسبة إلى حساب التفاضل والتكامل.

تتألف مجموعة الأعداد الصحيحة من الأعداد الكلية والمعكوس الجمعي لكل عدد، ±3, ±2, ±1, 0 ... إنّ العدد النسبي هو عدد من الصيغة $\frac{p}{q}$ ، حيث إنّ p و q عددان صحيحان و $q \neq 0$ على سبيل المثال، $\frac{2}{3}$، $-\frac{7}{3}$ و $\frac{27}{125}$ جميعها أعداد نسبية. لاحظ أنّ كل عدد صحيح n هو عدد نسبي أيضًا، بما أننا نستطيع كتابته على صورة ناتج قسمة عددين صحيحين: $n = \frac{n}{1}$.

إنّ **الأعداد غير النسبية** هي كل الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها بالصيغة $\frac{p}{q}$، حيث p وq عددان صحيحان. تذكر أنّ الأعداد النسبية لها امتداداتٌ عشريةٌ منتهية أو دورية. على سبيل المثال $\frac{1}{6} = 0.16666\bar{6}$، $\frac{1}{8} = 0.125$، $\frac{1}{3} = 0.3333\bar{3}$ و$\frac{1}{2} = 0.5$ جميعها نسبية. وعلى النقيض من ذلك، للأعداد غير النسبية امتداداتٌ عشريةٌ غير دورية وغير منتهية. فعلى سبيل المثال، نورد أدناه ثلاثة أعدادٍ غير نسبيةٍ مألوفةٍ مع امتداداتها العشرية:

$$\sqrt{2} = 1.41421\,35623\ldots,$$
$$\pi = 3.14159\,26535\ldots$$
و
$$e = 2.71828\,18284\ldots.$$

نتصوّر أنّ الأعداد الحقيقية أعدادٌ مرتبةٌ على طول خط الأعداد الموضّح في الشكل 1.2 (الأعداد الحقيقية). ويشار إلى مجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$.



الشكل 1.2
خط الأعداد الحقيقية

بالنسبة للعددين الحقيقيين a وb حيث $a < b$ نعرّف الفترة المغلقة $[a, b]$ على أنها مجموعة الأعداد الحقيقية بين a وb بما فيها a وb (النقطتان الطرفيتان). أي إنّ:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

الشكل 1.3
فترة مغلقة

كما هو موضّح في الشكل 1.3. حيث تشير الدوائر الممتلئة إلى أنّ a وb تقعان في $[a, b]$.

وبصورة مشابهة، تمثّل الفترة المفتوحة (a, b) مجموعة الأعداد بين a وb ولكنلا تشمل النقطتين الطرفيتين a وb. أي إنّ:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

الشكل 1.4
فترة مفتوحة

كما هو موضّح في الشكل 1.4 حيث تشير الدوائر الفارغة إلى أنّ a وb ليستا محتويتين في (a, b). وبصورةٍ مشابهة، نرمز إلى المجموعة $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ بالفترة (a, ∞) و$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ بـــ $(-\infty, a)$. في كلتا الحالتين، من الضروري إدراك أنّ ∞ و$-\infty$ ليستا عددين حقيقيين وأننا نستخدم هذا الرمز بقصد السهولة لا أكثر.

لا بدّ أنك الآن على معرفةٍ جيدةٍ بالخواص التالية للأعداد الحقيقية.

النظرية 1.1

إذا كان a وb عددين حقيقيين و $a < b$، فإنّ

(i) لأي عدد c حقيقي $a + c < b + c$.

(ii) لأي عددين حقيقيين c و d ، إذا كان $c < d$، فإنّ $a + c < b + d$

(iii) لأي عدد c حقيقي $c > 0, a \cdot c < b \cdot c$

(iv) لأي عدد حقيقي $c < 0, a \cdot c > b \cdot c$

ملحوظة 1.1

نحتاج إلى الخواص المعطاة في النظرية 1.1 لحل المتباينات. لاحظ أنّ الجزء (i) ينصّ على أنّك تستطيع جمع الكمية نفسها إلى كلا طرفي متباينة. وينص الجزء (iii) على أنك تستطيع ضرب كلا طرفي متباينة بعدد موجب. أخيرًا، ينص الجزء (iv) على أنك إذا ضربت كلا طرفي متباينة بعددٍ سالب، فإن ذلك يعكس إشارة التباين.

وسنوضّح طريقة استخدام النظرية 1.1 لحل متباينةٍ بسيطة.

المثال 1.1 حلّ متباينة خطية

حُل المتباينة الخطية $2x + 5 < 13$

الحل يمكننا استخدام الخواص الواردة في النظرية 1.1 لإيجاد x. بطرح 5 من كلا الطرفين، نحصل على

$$(2x + 5) - 5 < 13 - 5$$

أو

$$2x < 8$$

وبقسمة كلا الطرفين على 2، نحصل على

$$x < 4$$

نكتب حل المتباينة في أغلب الأحيان على صورة فترة. وفي هذه الحالة، نحصل على الفترة $(-\infty, 4)$.

يمكنك التعامل مع المتباينات الأكثر تعقيدًا بالطريقة نفسها.

المثال 1.2 حلّ المتباينات ثنائية الأطراف

حُل المتباينة ثنائية الطرف $6 < 1 - 3x \le 10$

الحل أولًا، عليك أن تدرك أنّ هذه المسألة تتطلب إيجاد قيم x بحيث يكون

$$1 - 3x \le 10 \quad \text{و} \quad 6 < 1 - 3x .$$

من الأكثر كفاءةً العمل على حل المتباينتين معًا. أولًا، اطرح العدد 1 من كل حدّ لتحصل على

$$6 - 1 < (1 - 3x) - 1 \le 10 - 1$$

أو

$$5 < -3x \le 9$$

والآن، بالقسمة على -3 ولكن توخّ الحذر. بما أنّ $-3 < 0$ تنعكس إشارة التباين لدينا

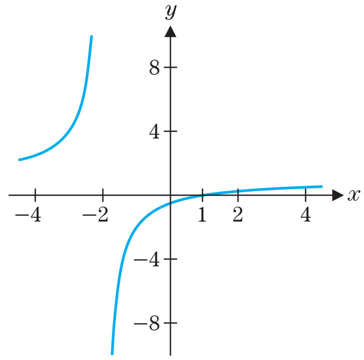
$$\frac{5}{-3} > \frac{-3x}{-3} \ge \frac{9}{-3}$$

أو

$$-\frac{5}{3} > x \ge -3$$

نكتب هذا في العادة بالصورة $-3 \le x < -\frac{5}{3}$

أو على فترةٍ بالصورة $[-3, -\frac{5}{3})$ ■



الشكل 1.5

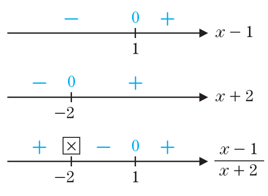
$$y = \frac{x-1}{x+2}$$

ستحتاج في العادة إلى حلّ متبايناتٍ تضمّ كسورًا. وسنقدّم مثالًا نموذجيًا عن ذلك في ما يلي.

المثال 1.3 حل متباينة تتضمن كسرًا

حل المتباينة $\frac{x-1}{x+2} \ge 0$

الحل يبين الشكل 1.5 التمثيل البياني للدالة، حيث يبدو أنّ الشكل يشير إلى أنّ الحلّ يضم كل قيم $x < -2$ و$x \ge 1$ اقرأ المتباينة بعنايةٍ ولاحظ أنه ثمّة طرقٌ ثلاث فقط لتحقيقها: إما أن يكون البسط والمقام موجبين، أو أن يكونا سالبين، أو أن يكون البسط صفرًا. ولتوضيح ذلك، نرسم خطي أعدادٍ لكلٍ من الحدّين، مع الإشارة إلى النقاط التي يكون فيها كل حدٍ موجبًا أو سالبًا أو صفرا ونرسم خط أعدادٍ ثالثًا نشير فيه إلى قيمة ناتج القسمة، وذلك كما هو موضّح في الهامش. وضعنا في المستقيم الثالث قيمةً لــ "$\boxtimes$" فوق -2 للإشارة إلى أنّ ناتج القسمة غير معرّفٍ عند $x = -2$ ومن هذا المستقيم الأخير يمكن أن ترى أنّ ناتج القسمة ليس سالبًا حين $x < -2$ أو $x \ge 1$ نكتب الحلّ بصيغة فترةٍ على النحو $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$.لاحظ أنّ هذا الحلّ يتفق مع ما يُظهره الشكل 1.5.



بالنسبة إلى متباينات كثيرات حدودٍ من الدرجة الثانية أو من درجةٍ أعلى، فإنّ تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل وتحديد أين تكون فيها العوامل المفردة موجبةً أو سالبة، كما في المثال 1.4، سيوصلنا إلى حل.

المثال 1.4 حلّ متباينةً تربيعية

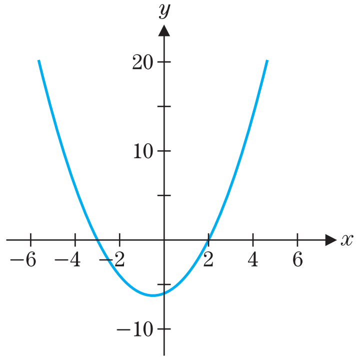
أوجد حلّ المتباينة التربيعية

$$x^2 + x - 6 > 0 \qquad (1.1)$$

الحل يبيّن في الشكل 1.6 تمثيلًا بيانيًا لكثيرةٍ حدودٍ تقع على يسار المتباينة. وبما أنّ كثيرة الحدود يمكن تحليلها إلى العوامل فإن (1.1) يكافئ

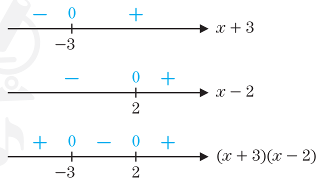
$$(x+3)(x-2) > 0 \tag{1.2}$$

يمكن لهذا أن يحدث بطريقتين اثنتين فحسب: حين يكون كلا العاملين موجبًا أو حين يكونان سالبين. كما في المثال 1.3، نرسم خطي أعدادٍ لكلا العاملين على حدة، ونشير فيهما اين يكون كلٌ منهما موجبًا أو سالبًا أو يساوي الصفر، ونستخدم هذين الرسمين لرسم خط أعدادٍ ثالثٍ يمثّل ناتج الضرب، ونبيّن هذين الشكلين في الهامش. لاحظ أنّ خط الأعداد الثالث يشير إلى أن ناتج الضرب موجبٌ عندما $x < -3$ أو $x > 2$ ندوّن ذلك كفترة بالصورة $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$. ■



الشكل 1.6

$y = x^2 + x - 6$



ستتذكر بلا شكٍ التعريف الموحّد التالي.

التعريف 1.1

إنّ **القيمة المطلقة** لعدد حقيقي x تساوي $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

تحقق من قراءة التعريف 1.1 على النحو الصحيح. إذا كان x سالب، فإنّ $-x$ موجبٌ . وهذا ينصّ على أنّه $|x| \geq 0$ لكل الأعداد الحقيقية x فعلى سبيل المثال، وباستخدام التعريف، يكون

$$|-4| = -(-4) = 4$$

لاحظ أنه لأي عددين حقيقيين a وb

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

وذلك بالرغم من أن

$$|a + b| \neq |a| + |b|$$

بصورةٍ عامّة. (للتحقق من ذلك، خذ ببساطة $a = 5$ و$b = -2$ واحسب كلتا الكميتين).

ولكن، الصحيح دائما هو:

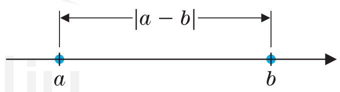
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

ويشار إلى هذه العلاقة باسم **المتباينة المثلثية**.

ملاحظات

لأي عددين حقيقيين a وb تعطي العلاقة، $|a - b|$ المسافة بين a و b، (انظر الشكل 1.7).

إنّ تفسير العلاقة $|a - b|$ على أنها المسافة بين a وb (اطّلع على الملاحظة في الهامش) مفيدٌ بالتحديد لحلّ المتباينات التي تضم قيمًا مطلقة. نقترح أن تستخدم هذا التفسير حين يكون ذلك ممكنًا لقراءة ما تعني المتباينة، لا أن تتبع إجراءً ما فحسب للوصول إلى حل.



الشكل 1.7

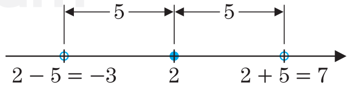
المسافة بين a و b

المثال 1.5 **حلّ متباينةٍ تتضمّن قيمة مطلقة**

أوجد حلّ المتباينة

$$|x - 2| < 5 \tag{1.3}$$

الحل استغرق أولًا بضع لحظاتٍ في قراءة ما تنصّ عليه هذه المتباينة. بما أنّ $|x - 2|$ تعطي المسافة من x إلى 2، فإنّ (1.3) تنصّ على أنّ المسافة من x إلى 2 يجب أن تكون أصغر من 5. ولذلك، أوجد كل الأعداد x التي تبعد عن 2 مسافة أصغر من 5. نشير إلى مجموعة كل الأعداد التي تقع ضمن مسافة تبعد 5 وحدات عن العدد 2 في الشكل 1.8. يمكنك الآن قراءة الحل مباشرة من الشكل: $-3 < x < 7$ أو وفق صيغة الفترة: $(-3, 7)$. ■



الشكل 1.8

$|x - 2| < 5$

يمكن حلّ الكثير من المتباينات التي تتضمن قيمًا مطلقةً ببساطةٍ عِبر قراءة المتباينة على النحو الصحيح، كما في المثال 1.6.

المثال 1.6 حل متباينة تتضمن قيمة مطلقة لمجموع

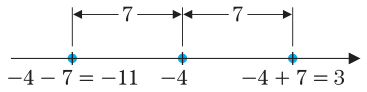
أوجد حلّ المتباينة

$$|x+4| \le 7$$

الحل لاستخدام تفسيرنا للمسافة، فإن علينا كتابة (1.4) بالصورة (1.4)

$$|x-(-4)| \le 7$$

ويشير هذا إلى أنّ المسافة من x إلى -4 أقل من أو تساوي 7. نوضّح الحل في الشكل 1.9. ومنه يَتبَعُ أنّ $-11 \le x \le 3$ أو $[-11, 3]$.



الشكل 1.9
$|x+4| \le 7$

تذكّر أنّه لأي عددٍ حقيقي $r > 0$، تكافئ $|x| < r$ المتباينة التالية التي لا تضم قيمًا مطلقة:

$$-r < x < r$$

في المثال 1.7، نستخدم ذلك لإعادة النظر في المتباينة الواردة في المثال 1.5.

المثال 1.7 طريقة بديلة لحل المتباينات

أوجد حلًا للمتباينة $|x-2| < 5$

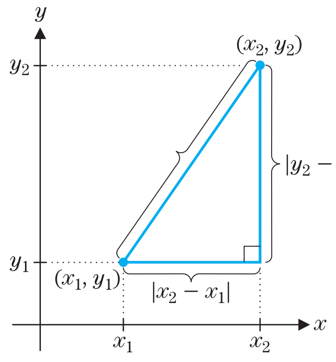
الحل يكافئ هذا متباينةً ثنائية الطرف

$$-5 < x-2 < 5$$

بإضافة 2 إلى كلّ حدٍّ نحصل على الحل

$$-3 < x < 7$$

والذي يمكن كتابته أيضًا وفق صيغة الفترة $(-3, 7)$ كما سبق وأشرنا.



الشكل 1.10
المسافة

تذكر أنّ المسافة بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هي نتيجةٌ بسيطةٌ لنظرية فيثاغورس المعطاة بالصيغة:

$$d\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

نوضّح ذلك في الشكل 1.10

المثال 1.8 استخدام قانون المسافة

أوجد المسافة بين النقطتين $(1, 2)$ و$(3, 4)$.

الحل إنّ المسافة بين $(1, 2)$ و$(3, 4)$ تساوي

$$d\{(1, 2), (3, 4)\} = \sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

معادلات المستقيمات

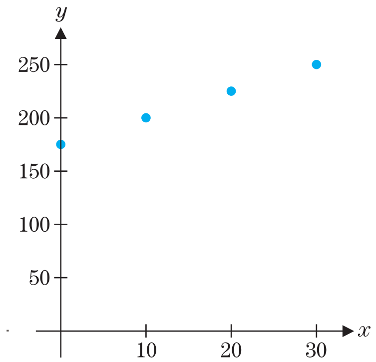
تجري الحكومة إحصاءً سكانيًا على مستوى البلاد كلّ 10 سنواتٍ لتحديد تعداد السّكان. نوضّح البيانات الخاصة بتعداد السّكان خلال العديد من العقود الأخيرة في الجدول المرفق.

العام	تعداد السكّان
1960	179,323,175
1970	203,302,031
1980	226,542,203
1990	248,709,873

من صعوبات تحليل هذه البيانات أنّ الأعداد كبيرةٌ جدًا. ويمكن الحدّ من وطأة هذه المشكلة من خلال **تحويل** البيانات. يمكننا تبسيط بيانات الأعوام عبر تعريف x على أنّه عدد الأعوام منذ العام 1960. وبالتالي فإن العام 1960 يقابل $x = 0$ والعام 1970 يقابل $x = 10$ وهكذا. يمكن تبسيط بيانات التعداد السّكاني عبر تقريب الأعداد إلى أقرب مليون. نوضّح بيانات التحويل في الجدول المرفق، ونبيّن أيضًا مخطط تشتتٍ لنقاط البيانات هذه في الشكل 1.11.

x	y
0	179
10	203
20	227
30	249

قد يبدو أن النقاط في الشكل 1.11 تشكّل خطًا مستقيمًا. (استخدم المسطرة وتحقّق بنفسك). لتحديد إذا كانت النقاط في الواقع على استقامةٍ واحدة (تدعى النقاط التي تقع على مستقيم واحدٍ **النقاط المستقيمة**)، فيمكن أن نفكّر في نمو التعداد السكاني في كلٍ من العقود المشار إليها. من عام 1960 إلى عام 1970، كان النمو يساوي 24 مليونًا. (أي لتنتقل من النقطة الأولى إلى الثانية، عليك أن تزيد x بمقدار 10 وتزيد y بمقدار 24). وعلى النحو نفسه، من العام 1970 إلى العام 1980، كان النموّ يساوي 24 مليونًا. لكن من العام 1980 إلى العام 1990، كان النموّ يساوي 22 مليونًا فقط. وبما أنّ معدّل النموّ ليس ثابتًا، فلا تقع نقاط البيانات على مستقيمٍ واحد. وينطوي هذا البرهان على مفهوم الميل المألوف.



الشكل 1.11
بيانات التعداد السكاني

التعريف 1.2

الحل $x_1 \neq x_2$ فإنّ **ميل** المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) يساوي العدد

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1.5}$$

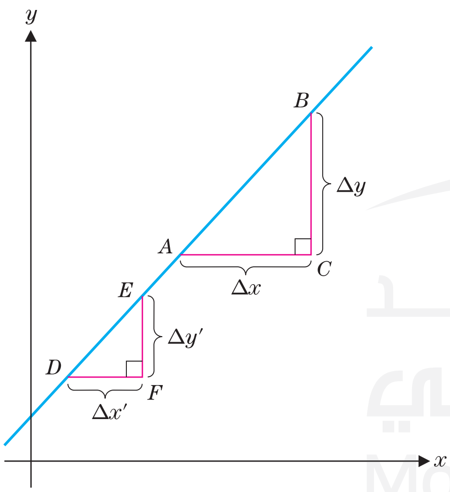
حين يكون $x_1 = x_2$ و $y_1 \neq y_2$ فإن المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1)و (x_2, y_2) يكون **رأسيًا** ويكون الميل غير معرّف.

يوصف الميل في أغلب الأحيان على أنه "التغيّر في y مقسومًا على التغيّر في x" ويكتب بالصورة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$،

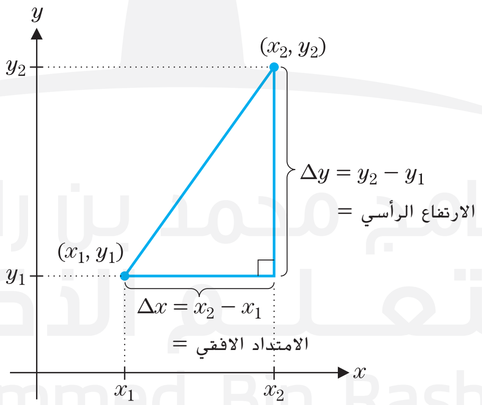
أو بصورةٍ أبسط $\frac{\text{الارتفاع الرأسي}}{\text{الامتداد الافقي}}$ (انظر الشكل 1.12a).

بالإشارة إلى الشكل 1.12b (والذي يكون فيه للمستقيم ميلٌ موجب)، لاحظ أنّه لكل أربع نقاط A، B، D وE واقعةٍ على المستقيم، يكون المثلثان القائمان ΔABC و ΔDEF متشابهين. تذكّر أنّه في المثلثات المتشابهة، يجب أن تكون الأضلاع المتناظرة فيها متناسبة. وفي هذه الحالة، يكون:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$



الشكل 1.12b
المثلثات المتشابهة والميل



الشكل 1.12a
الميل

وبذلك فإن الميل هو نفسه بغض النظر عن النقاط المختارة على المستقيم. لاحظ أنّ أي مستقيمٍ يكون **أفقيًا**، إذا كان ميله صفرًا فقط.

المثال 1.9 إيجاد ميل مستقيم

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (2, 5) و(4, 3).

الحل من (1.5)، نحصل على

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$$

المثال 1.10 استخدام الميل لتحديد ما إذا كانت النقاط (مستقيمة) تقع على مستقيم واحد.

استخدم الميل لتحدّد ما إذا كانت النقاط $(1,2)$، $(3,10)$، $(4,14)$ مستقيمة.

الحل لاحظ أولًا أنّ ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1,2)$ و$(3,10)$ يساوي

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-2}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

وبطريقة مشابهة، فإنّ ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3,10)$ و$(4,14)$ يساوي

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14-10}{4-3} = 4$$

وبما أنّ الميلين متساويان، فلا بدّ أنّ النقاط مستقيمة.

تذكر أنك إذا كنت تعلم ميل مستقيم ونقطةٍ يمرّ بها المستقيم، فإن لديك ما يكفي من المعلومات لتمثيله بيانيًا. والطريقة الأسهل لتمثيل مستقيم بيانيًا هي تحديد نقطتين ورسم مستقيمٍ يمرّ بهما. وفي هذه الحالة، لا حاجة لك إلا أن تجِد النقطة الثانية.

المثال 1.11 تمثيل مستقيمٍ بيانيًا

إذا كان لدينا مستقيمٌ يمرّ بالنقطة (2, 1) وميله $\frac{2}{3}$، أوجد نقطةً ثانيةً على المستقيم ومن ثمّ مثله بيانيًا.

الحل بما أنّ الميل يعطى بالعلاقة $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$، فإننا نأخذ $m = \frac{2}{3}$، $y_1 = 1$ و$x_1 = 2$ كي نحصل على

$$\frac{2}{3} = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}$$

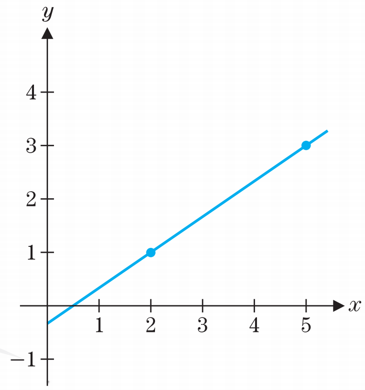
ولك الحرية في اختيار الإحداثي x الخاص بالنقطة الثانية. على سبيل المثال، لإيجاد النقطة الواقعة عند $x_2 = 5$ عوّض هذه القيمة وأوجد الحل. من

$$\frac{2}{3} = \frac{y_2 - 1}{5-2} = \frac{y_2 - 1}{3}$$

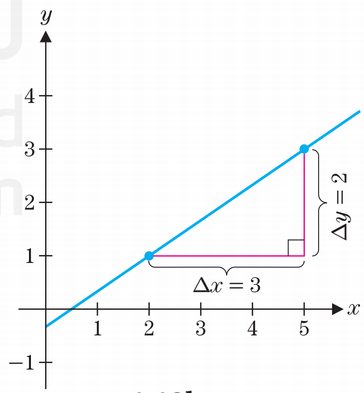
نحصل على $y_2 - 1 = 2$ أو $y_2 = 3$ وبالتالي فإن نقطةً ثانيةً هي (5, 3). إنّ التمثيل البياني للمستقيم موضّح في الشكل 1.13a. من الطرق البديلة لإيجاد نقطةٍ ثانيةٍ هي استخدام الميل

$$m = \frac{2}{3} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

يُفهم من الميل $\frac{2}{3}$ أننا إذا انتقلنا مسافة ثلاث وحداتٍ أفقيًا إلى اليمين، فيجب أن ننتقل مسافة وحدتين رأسيًا إلى أعلى كي نبقى على المستقيم. وذلك كما هو موضّح في الشكل 1.13b.



الشكل 1.13a
التمثيل البياني للمستقيم



الشكل 1.13b
استخدام الميل لإيجاد نقطة ثانية

في المثال 1.11، كان اختيار $x = 5$ عشوائيًا تمامًا؛ حيث يمكنك اختيار أي قيمةٍ تريدها لـ x لإيجاد نقطةٍ ثانية. وعلاوةً على ذلك، بما أنّ x يمكن أن تساوي أي عددٍ حقيقي، يمكنك أن تترك x كمتغيّرٍ وأن تكتب معادلةً تحقّقها أي نقطة (x, y) على المستقيم.

في الحالة العامة لمستقيم يمرّ بالنقطة (x_0, y_0) وميله m فإنه يكون لدينا من (1.5)

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{1.6}$$

بضرب كلا طرفي (1.6) بـ$(x - x_0)$ فإننا نحصل على

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

أو

صيغة النقطة والميل

$$y = m(x - x_0) + y_0 \tag{1.7}$$

يطلق على المعادلة (1.7) اسم **صيغة النقطة والميل**.

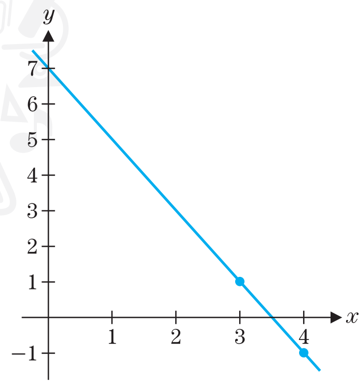
المثال 1.12 إيجاد معادلة مستقيم بدلالة نقطتين

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (3,1) و(-1 ,4) ومثّله بيانيًا.

الحل من (1.5) الميل يساوي $m = \frac{-1-1}{4-3} = \frac{-2}{1} = -2$ وباستخدام (1.7) عند الميل $m = -2$ والإحداثي $x_0 = 3$ والإحداثي $y_0 = 1$ فإننا نحصل على معادلة المستقيم:

$$y = -2(x - 3) + 1 \tag{1.8}$$

لتمثيل المستقيم بيانيًا، حدّد النقطتين $(3, 1)$ و$(4, -1)$ ويمكنك حينها رسم المستقيم الظاهر في الشكل 1.14 بسهولة.



الشكل 1.14
$y = -2(x - 3) + 1$

على الرغم من أنّ صيغة النقطة والميل للمعادلة هي في أغلب الأحيان الطريقة الأكثر ملاءمةً من حيث التعامل، فقد يكون من الأكثر ملاءمةً أحيانًا استخدام **صيغة الميل والمقطع**. وتأخذ هذه الصيغة الشكل

$$y = mx + b$$

وفيها m هو الميل و b هو التقاطع مع محور y (أي المكان الذي يقطع فيه التمثيل البياني المحور y). في المثال 1.12، فإنك تضرب ببساطة (1.8) لتحصل على $y = -2x + 6 + 1$ أو

$$y = -2x + 7$$

وكما ترى من الشكل 1.14، يقطع التمثيل البياني المحور y عند $y = 7$

تقدّم النظرية 1.2 نتيجةً مألوفةً عن توازي المستقيمات وتعامدها.

النظرية 1.2

يكون المستقيمان (غير الرأسيين) **متوازيين** إذا كان لهما الميل نفسه. وأي مستقيمين رأسيين هما متوازيان حكمًا. ويكون المستقيمان (غير الرأسيين) ميلاهما m_1 و m_2 **متعامدين** عندما يساوي ناتج ضرب ميليهما -1 (أي $m_1 \cdot m_2 = -1$). كذلك فإن أي مستقيمين أحدهما رأسي والثاني أفقي هما متعامدان حكمًا.

بما أننا نستطيع قراءة الميل من معادلة مستقيم، فمن السهل تحديد الحالات التي يكون فيها المستقيمان متوازيين أو متعامدين. ونوضّح ذلك في المثالين 1.13 و1.14.

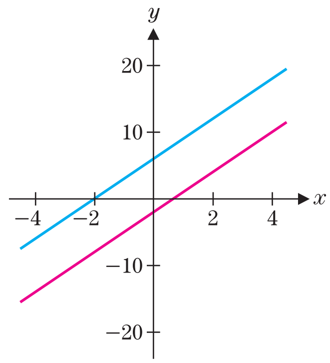
المثال 1.13 إيجاد معادلة مستقيم موازٍ

أوجد معادلة مستقيمٍ موازٍ لـــ $y = 3x - 2$ ويمرّ بالنقطة $(-1, 3)$

الحل من السهل قراءة ميل المستقيم من المعادلة: $m = 3$ إذًا تكون معادلة المستقيم الموازي هي:

$$y = 3[x - (-1)] + 3$$

أو ببساطة $y = 3x + 6$. يبين الشكل 1.15 التمثيل البياني لكلا المستقيمين



الشكل 1.15
المستقيمان المتوازيان

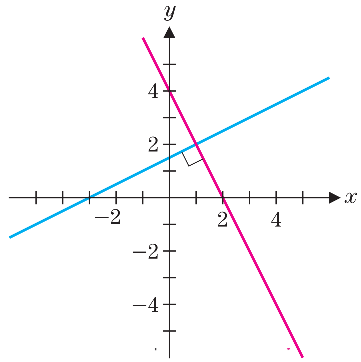
المثال 1.14 إيجاد معادلة مستقيم عمودي

أوجد معادلة مستقيم عموديٍ على $y = -2x + 4$ ويقطع المستقيم عند النقطة $(1,2)$

الحل إنّ ميل $y = -2x + 4$ يساوي -2 وحينها يكون ميل المستقيم العمودي $-1/(-2) = \frac{1}{2}$. بما أن المستقيم يجب أن يمرّ بالنقطة $(1,2)$، فإن معادلة المستقيم العمودي هي

$$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 2 \quad \text{أو} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

يبين الشكل 1.16 التمثيل البياني للمستقيمين



الشكل 1.16
المستقيمان المتعامدان

نعود الآن إلى هذا المثال التمهيدي الفرعي ونستخدم معادلة مستقيمٍ لنقدّر التعداد السّكانيّ في عام 2000.

المثال 1.15 استخدام مستقيمٍ للتنبؤ بالتعداد السكاني

من بيانات التعداد السكاني الخاصة بإحصاء عدد السكان خلال الأعوام 1960 و1970 و1980 و1990 في المثال 1.8، تنبّأ بالتعداد السكاني للعام 2000.

الحل نبدأ في هذا المثال الفرعي بتبيان أنّ النقاط الموجودة في الجدول المقابل ليست مستقيمة. بيد أن هذه النقاط شبه مستقيمة. إذًا لِمَ لا نستخدم الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين الأخيرتين $(20, 227)$ و $(30, 249)$ (المقابلتين للتعدادين السكانيين في العامين 1980 و1990) للتنبؤ بالتعداد السكاني عام 2000؟ (هذا مثالٌ بسيطٌ لإجراءٍ أكثر عموميةً يدعى **الاستكمال**). ميل المستقيم الذي يصل بين النقطتين يساوي

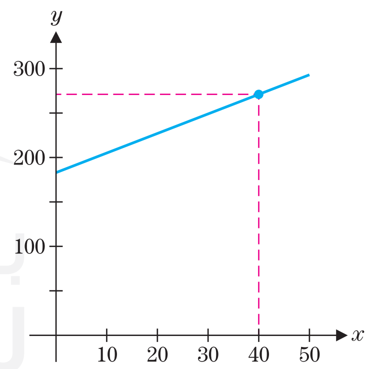
$$m = \frac{249 - 227}{30 - 20} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$$

وبالتالي فإن معادلة المستقيم

$$y = \frac{11}{5}(x - 30) + 249$$

انظر الشكل 1.17 لتعاين التمثيل البياني للمستقيم. إذا اتّبعنا هذا المستقيم وصولًا إلى النقطة المقابلة لـــ $x = 40$ (العام 2000)، فإننا نحصل على التعداد السكاني المتوقع

$$\frac{11}{5}(40 - 30) + 249 = 271$$

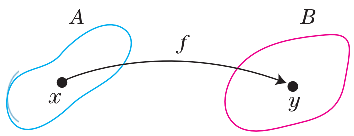


الشكل 1.17
التعداد السّكاني

بالتالي، يبلغ التعداد السكاني المتنبّأ به 271 مليون نسمة. إنّ العدد الفعلي الذي أشار إليه إحصاء السكان عام 2000 كان يساوي 281 مليون نسمة، وهذا يشير إلى أنّ تعداد السكان في الولايات المتحدة الأمريكية كان ينمو بمعدلٍ أسرع بين عامي 1990 و2000 بالمقارنة مع العقد السابق.

الدوال

لأي مجموعتين جزئيتين A وB من خط الأعداد الحقيقية، نورِد التعريف التالي:



التعريف 1.3

إنّ **الدالة** f هي قاعدةٌ تربط بين العنصر الواحد بالضبط في المجموعة B مع كل عنصر x في المجموعة A وفي هذه الحالة، نكتب $y = f(x)$.

تُعرف المجموعة A **بمجال** f وتُعرّف مجموعة كل القيم $f(x)$ في B **بمدى** f. ويكتب على أنه $\{y \mid y = f(x)\}$ لكل $\{x \in A\}$. ما لم يرد خلاف ذلك، حين تعطى دالةٌ صيغتها f وفق تعبير محدد، فإن مجال f هو أكبر مجموعة من الأعداد الحقيقية التي يكون فيها التعبير معرّفًا. نشير إلى x على أنه **المتغيّر المستقل** وإلى y على أنه **المتغيّر التابع**.

ملحوظة 1.2

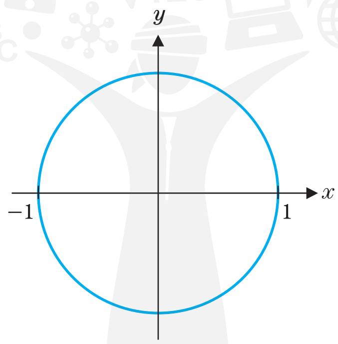
يمكن تعريف الدوال بصيغ بسيطة، مثل $f(x) = 3x + 2$ ولكن بصورةٍ عامة، أي حالةٍ تحقق شرط ارتباط قيمة واحدة لـــ y بالتحديد مع كل قيمة لـــ x فإنّها تعرّف الدّالة.

ونعني **بالتمثيل البياني** للدالة f التمثيل البياني للمعادلة $y = f(x)$. أي أنّ التمثيل البياني يتألف من جميع النقاط (x, y) حيث x تقع في مجال الدالة f و حيث أن $y = f(x)$.

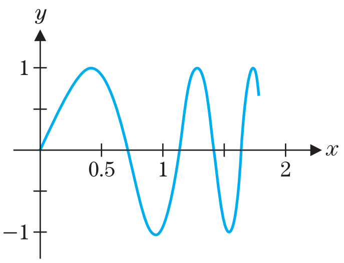
تجدر الإشارة إلى أنّ ليس كل منحنى هو تمثيل بياني لدالة، وذلك أنه من أجل أن يكون لدالةٍ ترتبط قيمةٌ واحدةٌ فقط لـــ y مع قيمةٍ محددةٍ لـــ x . يمكنك أن تحدد بيانيًا ما إذا كان منحنىً ما، هو التمثيل البياني لدالةٍ باستخدام اختبار الخط الرأسي: إذا قطع أي مستقيم رأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن المنحنى ليس تمثيلًا بيانيًا لدالة، وذلك في ضوء أنه توجد في هذه الحالة قيمتان لـــ y تقابلان قيمةً واحدةً لـــ x.

المثال 1.16 استخدام اختبار الخط الرأسي

حدّد المنحنيات البيانية الواردة في الشكلين 1.18a و1.18b والتي تقابل دوالًا.

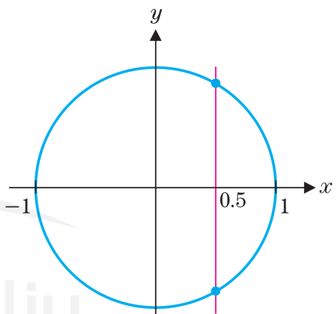


الشكل 1.18a

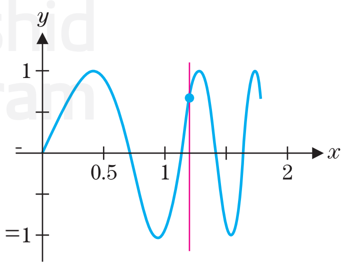


الشكل 1.18b

الحل لاحظ أنّ الدائرة في الشكل 1.18a ليست تمثيلًا بيانيًا لدالة، وذلك لأن أحد المستقيمات الرأسية عند $x = 0.5$ يقطع الدائرة مرتين (انظر الشكل 1.19a). إنّ التمثيل البياني في الشكل 1.18b هو تمثيل بياني لدالة، وذلك على الرغم من تموّجه إلى الأعلى والأسفل على نحوٍ متكرر. على الرغم من أنّ مستقيماتٍ أفقيةً تقطع التمثيل البياني على نحوٍ متكرر، فإن المستقيمات الرأسية، كالمستقيم عند $x = 1.2$ تقطعه مرةً واحدةً فقط. (انظر الشكل 1.19b) ■



الشكل 1.19a
يفشل المنحنى في ان يكون تمثيل بياني لدالة مع اختبار الخط المستقيم الرأسي



الشكل 1.19b
ينجح المنحنى في ان يكون تمثيل بياني لدالة مع اختبار الخط المستقيم الرأسي

إن الدوال المألوفة على الأغلب هي كثيرات حدود. وتعدّ هذه الدّوال الأبسط من حيث التعامل معها لأنّها تعرّف بصورةٍ كاملةٍ من خلال الحساب.

التعريف 1.4

إنّ كثيرة **الحدود** هي الدالة التي يمكن كتابتها بالصيغة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

وفيها $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ أعداد حقيقية (**معاملات** كثيرة الحدود) حيث $a_n \neq 0$ و$n \geq 0$ عدد صحيح (**درجة** كثيرة الحدود).

لاحظ أنّه يمكن تعريف كثيرة الحدود لجميع قيم x على الأعداد الحقيقية بكامله. علاوةً على ذلك، عليك إدراك أنّ التمثيل البياني لكثيرة الحدود الخطية لكثيرة الحدود الخطية (الدرجة 1) $f(x) = ax + b$ هو خطّ مستقيم.

المثال 1.17 عينات لكثيرات حدود

نورد في ما يلي أمثلةً عن كثيرات حدود:

$f(x) = 2$ كثيرة حدود من الدرجة 0 او ثابتة

$f(x) = 3x + 2$ كثيرة حدود من الدرجة 1 أو خطية

$f(x) = 5x^2 - 2x + 2/3$ كثيرة حدود من الدرجة 2 أو تربيعية

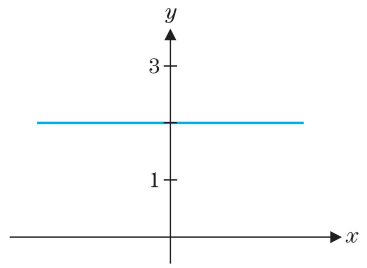
$f(x) = x^3 - 2x + 1$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو تكعيبية

$f(x) = -6x^4 + 12x^2 - 3x + 13$ كثيرة حدود من الدرجة الرابعة

و

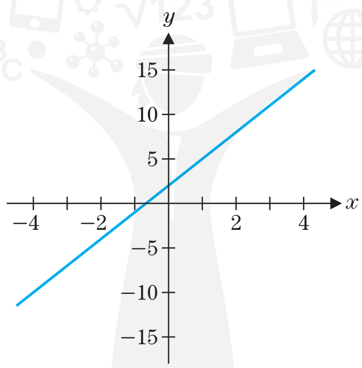
$f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2 + x - 3$ (كثيرة حدود من الدرجة الخامسة)

نعرض في الأشكال 1.20a–1.20f التمثيلات البيانية لهذه الدوال الست.



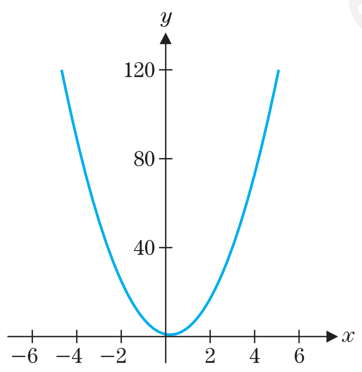
الشكل 1.20a

$f(x) = 2$



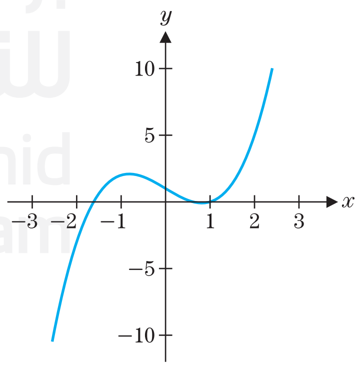
الشكل 1.20b

$f(x) = 3x + 2$



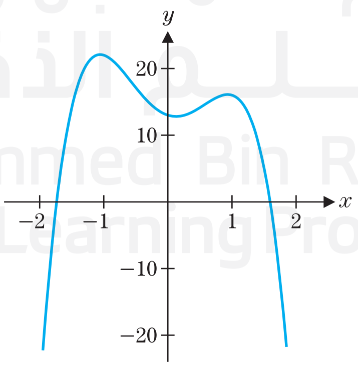
الشكل 1.20c

$f(x) = 5x^2 - 2x + 2/3$



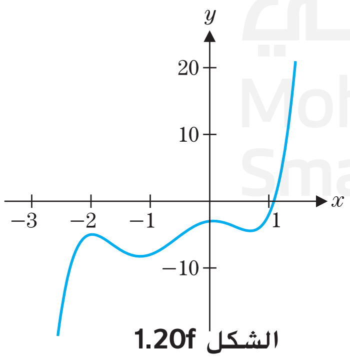
الشكل 1.20d

$f(x) = x^3 - 2x + 1$



الشكل 1.20e

$f(x) = -6x^4 + 12x^2 - 3x + 13$



الشكل 1.20f

$f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2 + x - 3$

التعريف 1.5

أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث ان p وq كثيرتا حدود، تسمى **بالدالة النسبية**.

لاحظ بما أنّ $p(x)$ و$q(x)$ كثيرتا حدود، فيمكن تعريف كلتيهما لكل x. وبذلك يمكن تعريف الدالة النسبية $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ لكل قيم x حيث ان $q(x)\neq 0$.

المثال 1.18 الدالة النسبية البسيطة

أوجد مجال الدالة

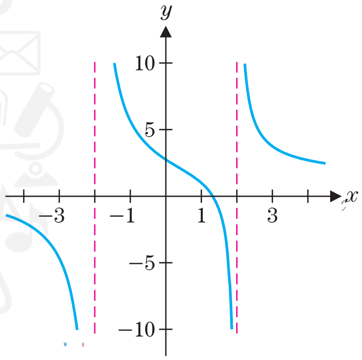
$$f(x)=\frac{x^2+7x-11}{x^2-4}$$

الحل لدينا هنا $f(x)$ دالة نسبية. يبين الشكل 1.21 التمثيل البياني. ويتألف مجالها من قيم التي تجعل المقام لا يساوي الصفر. لاحظ أنّ

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

بالتالي، المقام يساوي الصفر عندما $x=\pm 2$ فقط. وهذا يشير إلى أنّ مجال f هو

$$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq\pm 2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$$



الشكل 1.21

$$f(x)=\frac{x^2+7x-11}{x^2-4}$$

تعرّف دالة **الجذر التربيعي** بالطريقة المعتادة. عندما نكتب $y=\sqrt{x}$ فإننا نقصد أنّ y هو العدد الذي من أجله $y^2=x$ و$y\geq 0$. وبالتحديد، $\sqrt{4}=2$ انتبه إلى عدم كتابة عباراتٍ خاطئةٍ مثل $\sqrt{4}=\pm 2$. وبالتحديد، انتبه من كتابة

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

بما أنّ $\sqrt{x^2}$ تطلب إيجاد العدد غير السالب الذي مربعه x^2 فإننا نبحث عن $|x|$ وليس عن x يمكن القول إنّ

$$\sqrt{x^2}=x\text{، إذا وفقط إذا كان } x\geq 0$$

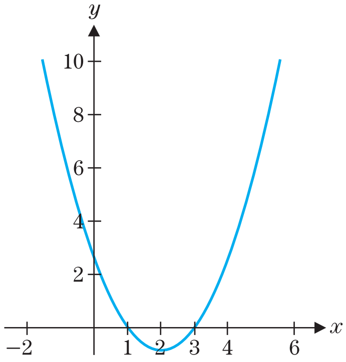
وبصورةٍ مشابهة، لكل عددٍ صحيح $n\geq 2, y=\sqrt[n]{x}$ عندما $y^n=x$، حيث n عدد زوجي، $x\geq 0$ و$y\geq 0$.

المثال 1.19 إيجاد مجال دالة تضم جذرًا تربيعيًا أو تكعيبيًا

أوجد المجال لكل من $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ و$g(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$.

الحل بما أنّ الجذور الزوجية معرفةٌ فقط لكل القيم غير السالبة، فإنّ $f(x)$ معرّفة فقط لكل $x^2-4\geq 0$. لاحظ أنّ هذا يكافئ أن يكون لدينا $x^2\geq 4$، حيث يحدث ذلك عندما $x\geq 2$ أو $x\leq -2$ وبالتالي فإن مجال f هو $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$. ومن ناحيةٍ أخرى، الجذور الفردية معرفةٌ لكل القيم الموجبة والسالبة. نتيجةً لذلك، إنّ مجال g هو الأعداد الحقيقية كاملةً $(-\infty,\infty)$.

نجد أنّه من المفيد في أغلب الأحيان تسمية نقاط التقاطع وغيرها من النقاط الهامة في التمثيل البياني. ويتطلب إيجاد هذه النقاط حل المعادلات. يدعى حل المعادلة $f(x)=0$ **صفرًا** للدالة f أو **جذرًا** للمعادلة $f(x)=0$. لاحظ أنّ صفر الدالة f يقابل نقطة تقاطع مع المحور x للتمثيل البياني الخاص بـــ $y=f(x)$.



الشكل 1.22

$y = x^2 - 4x + 3$

المثال 1.20 إيجاد الأصفار بالتحليل إلى العوامل

أوجد كل نقاط التقاطع مع المحورين x وy للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

الحل لإيجاد نقطة التقاطع مع المحور y، نضع $x = 0$ لنحصل على

ولإيجاد نقاط التقاطع مع المحور x نحلّ المعادلة $f(x) = 0$ وفي هذه الحالة، وبالتحليل إلى العوامل لنحصل على

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0$$

يمكنك الآن قراءة الصفرين: $x = 1$ و$x = 3$، كما هو محدد في الشكل 1.22.

لسوء الحظ، لا يكون التحليل إلى العوامل بهذه السهولة دائما. وبالطبع، لكل دالة تربيعية من الصورة

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(لكل $a \neq 0$)، يعطى الحل (الحلول) من خلال **القانون العام** لحل المعادلة التربيعية:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

المثال 1.21 إيجاد الأصفار باستخدام القانون العام

أوجد أصفار الدالة $f(x) = x^2 - 5x - 12$.

الحل قد لا يحالفك الحظ كثيرًا في محاولة تحليل هذه العلاقة إلى العوامل. ولكن لدينا من الدالة التربيعية:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}.$$

بالتالي، يعطى الحلّان من خلال $x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2} \approx 6.772$ و $x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2} \approx -1.772$.(لا غرابة في أنك لم تستطِع تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل!)

عادةً ما يكون إيجاد أصفار كثيرات حدودٍ درجتها أعلى من 2 ودوال أخرى أكثر صعوبةً، بل يكون مستحيلًا في بعض الأحيان. على الأقل، يمكنك دائما إيجاد تقريبٍ لأي صفرٍ (أصفار) عبر استخدام تمثيلٍ بيانيٍ للاقتراب من النقطة (النقاط) التي يقطع فيها التمثيل البيانيّ المحور x. وذلك وفق ما سنُبيّنه عمّا قريب. لكن ثمّة مسألةٌ أساسيةٌ أكثر، ألا وهي تحديد عدد الأصفار التي تضمها دالةٌ ما. بصورةٍ عامة، ليس من طريقةٌ للإجابة عن هذا السؤال بدون استخدام حساب التفاضل والتكامل. ولكن في حالة كثيرات الحدود، تزودنا النظرية 1.3 (الناتجة عن النظرية الأساسية للجبر) بفكرة.

النظرية 1.3

للدوال التي درجتها n يوجد على الأكثر n صفرًا متمايزًا أو مختلفًا.

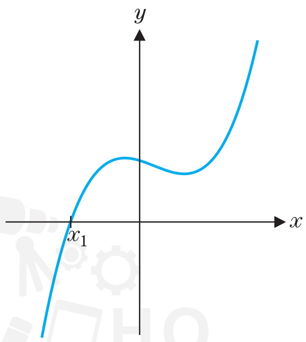
لاحظ أنّ النظرية 1.3 لا تخبرنا بعدد الأصفار التي تضمها كثيرة حدودٍ ما، بل إنّ العدد الأقصى من الأصفار المتمايزة (أي المختلفة) هو الدرجة نفسها. قد يكون لكثيرة الحدود التي درجتها n أي عددٍ من الأصفار الحقيقية المتمايزة او المختلفة يتراوح بين 0 و n صفرًا حقيقيًا مختلفًا. لكن، يجب أن تضم كثيرات الحدود ذوات الدرجة الفردية *على الأقل* صفرًا حقيقيًا *واحدًا*. على سبيل المثال، في حالة كثيرة حدود تكعيبية، فإن لدينا واحدًا من ثلاثة احتمالاتٍ كما هو موضّحٌ في الأشكال 1.23a و1.23b و1.23c. وهذه هي التمثيلات البيانية للدوال.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3 = (x+1)(x^2 - 3x + 3)$$
$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$$
$$h(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x+1)(x-1)(x-3)$$

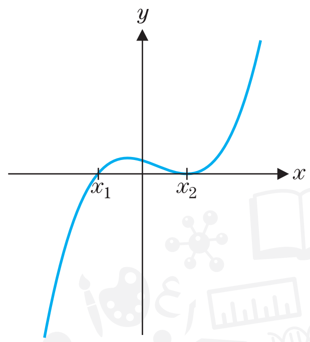
ملحوظة 1.3

قد يكون لكثيرات الحدود أيضًا أصفار في الأعداد المركبة على سبيل المِثال، أصفار الدالة $f(x) = x^2 + 1$ أعداد مركبة فقط $x = \pm i$ حيث إنّ i هي الوحدة التخيلية المُعرفة من خلال $i = \sqrt{-1}$. سنحصر اهتمامنا في دراستنا هذه على الأصفار الحقيقية.

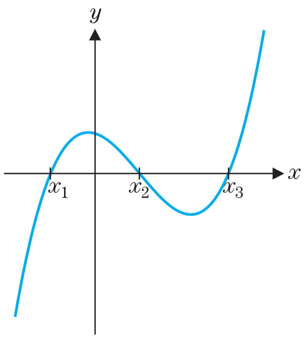
على التوالي. لاحظ أنك يمكن أن ترى من خلال التحليل الى العوامل مكان تواجد الأصفار (وعددها).



الشكل 1.23a
صفر واحد



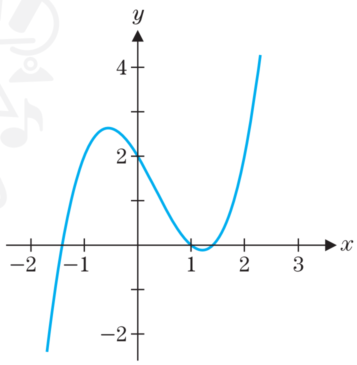
الشكل 1.23b
صفران اثنان



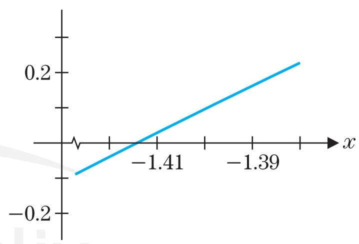
الشكل 1.23c
ثلاثة أصفار

تُوضّح النظرية 1.4 أهمية العلاقة بين عوامل كثيرات الحدود وأصفارها.

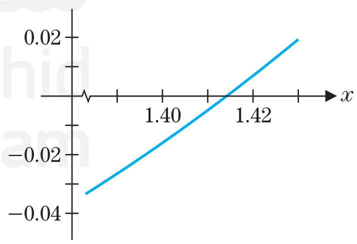
> **النظرية 1.4** (نظرية العامل)
> لأي دالة كثيرة الحدود f. فإن $f(a) = 0$ إذا وفقط إذا كان $(x - a)$ عاملاً للدالة $f(x)$.



الشكل 1.24a
$y = x^3 - x^2 - 2x + 2$



الشكل 1.24b
تكبير لإظهار الصفر بجوار
$x = -1.4$



الشكل 1.24c
تكبير لإظهار الصفر بجوار
$x = 1.4$

المثال 1.22 إيجاد أصفار كثيرة حدود تكعيبية

أوجد أصفار $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$.

الحل من خلال حساب $f(1)$ يمكنك أن ترى أن أحد أصفار هذه الدالة هو $x = 1$ ولكن ما عدد الأصفار الأخرى؟ يبيّن التمثيل البياني للدالة (انظر الشكل 1.24a) أنّه ثمة صفران آخران للدالة f. أحدهما بجوار $x = -1.5$ والآخر بجوار $x = 1.5$ تستطيع إيجاد هذين الصفرين بصورةٍ أكثر دقةً عبر استخدام حاسبة بيانية لتكبير موضعيهما (كما هو موضّح في الشكلين 1.24b و1.24c). يتضح من خلال تكبير هذه التمثيلات البيانية أنّ الصفرين المتبقيين لـ f يقعان بجوار $x = 1.41$ و$x = -1.4$ يمكنك إجراء هذه التقديرات على نحوٍ أكثر دقةً عبر التكبير بصورةٍ إضافية. يمكن لمعظم الحاسبات البيانية والأجهزة الحاسوبية الجبرية إيجاد الأصفار التقريبية باستخدام برنامج «حلّ» مدمج. نقدّم في الوحدة 3 طريقةً متعددة الاستخدامات (تدعى طريقة نيوتن) لإيجاد تقريباتٍ دقيقةٍ إلى الأصفار. إنّ الطريقة الوحيدة لإيجاد الحلّ الدقيق هي تحليل التعبير إلى عوامل (إما باستخدام القسمة المطولة أو المركّبة). لدينا هنا

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x - 1)(x^2 - 2) = (x - 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}),$$

ومنها يمكن أن ترى أن الصفرين هما $x = 1$، $x = \sqrt{2}$ و$x = -\sqrt{2}$.

تذكّر أنه لإيجاد نقاط تقاطع منحنيين معرّفين بـ $y = f(x)$ و$y = g(x)$، فإننا نضع لإيجاد الإحداثيات x لأي نقاط تقاطع.

المثال 1.23 إيجاد نقاط تقاطع مستقيم مع قطع مكافئ

أوجد نقاط تقاطع القطع المكافئ $y = x^2 - x - 5$ والمستقيم $y = x + 3$.

الحل يبيّن تمثيل المنحنيين (انظر الشكل 1.25 في الصفحة التالية) وجود نقطتي تقاطع إحداهما بجوار $x = -2$ والأخرى بجوار $x = 4$.

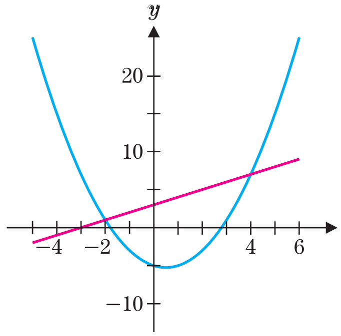
ولتحديد هاتين النقطتين بدقة، نساوي الدالتين ونحل لإيجاد

$$x^2 - x - 5 = x + 3$$

يعطينا طرح $(x+3)$ من كلا الطرفين

$$0 = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$$

وهذا يشير إلى أن الحلّين بالضبط هما $x = -2$ و$x = 4$. نحسب قيمتي y المقابلتين من معادلة المستقيم $y = x + 3$ (أو معادلة القطع المكافئ). نقطتا التقاطع هما إذًا $(-2, 1)$ و$(4, 7)$ لاحظ أنّ هاتين النقطتين متوافقتان مع نقطتي التقاطع المبينتين في الشكل 1.25.



الشكل 1.25

$y = x + 3$ و $y = x^2 - x - 5$

ولسوء الحظ، لن يكون بالإمكان على الدوام حل المعادلات بالضبط، كما فعلنا في الأمثلة 1.20–1.23. سنستكشف بعض خيارات التعاطي مع مسائل أكثر تعقيدًا.

التمارين 1.1

تمارين كتابية

1. إذا كان ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين A وB يساوي ميل المستقيم المار بالنقطتين B وC، اشرح السبب في أنّ النقاط A ، B وC مستقيمة.

2. إذا لم ينجح المنحنى في اختبار الخط الرأسي، فإنّ ذلك المنحنى ليس تمثيلًا بيانيًا لدالة. اشرح هذه النتيجة من خلال تعريف الدوال.

3. ينبغي ألا تكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع بصورة آلية. قارن الصيغ التالية للمستقيم نفسه: $y = 2.4(x - 1.8) + 0.4$ و$y = 2.4x - 3.92$ على افتراض أنّ $x = 1.8$ فأي معادلةٍ تفضل استخدامها لحساب y وماذا لو أعطيت $x = 0$ أو $x = 8$ فهل ثمة أي أفضليةٍ لمعادلةٍ على الأخرى؟ هل بوسعك قراءة الميل بسرعةٍ من أيٍ من المعادلتين؟ اشرح السبب في عدم كون أي صيغةٍ من صيغتي المعادلة "أفضل".

4. لفهم التعريف 1.1، حريّ بك أن تعتقد أنّ $|x| = -x$ لكل القيم السالبة لـ x. باستخدام $x = -3$ بمثابة مثال، اشرح بالكلمات السبب في أنّ الضرب x بـ -1 يعطي النتيجة نفسها لأخذ القيمة المطلقة لـ x.

في التمارين 1-10، أوجد حلّ المتباينة.

1. $3x + 2 < 8$
2. $3 - 2x < 7$
3. $1 \le 2 - 3x < 6$
4. $-2 < 2x - 3 \le 5$
5. $\dfrac{x+2}{x-4} \ge 0$
6. $\dfrac{2x+1}{x+2} < 0$
7. $x^2 + 2x - 3 \ge 0$
8. $x^2 - 5x - 6 < 0$
9. $|x + 5| < 2$
10. $|2x + 1| < 4$

في التمارين 11-14، حدّد ما إذا كانت النقاط مستقيمة.

11. $(2, 1), (0, 2), (4, 0)$
12. $(3, 1), (4, 4), (5, 8)$
13. $(4, 1), (3, 2), (1, 3)$
14. $(1, 2), (2, 5), (4, 8)$

في التمارين 15-18، أوجد (a) المسافة بين النقطتين، و(b) ميل المستقيم المار بالنقطتين المعطيتين، و(c) معادلة للمستقيم المار بالنقطتين.

15. $(1, 2), (3, 6)$
16. $(1, -2), (-1, -3)$
17. $(0.3, -1.4), (-1.1, -0.4)$
18. $(1.2, 2.1), (3.1, 2.4)$

في التمارين 19-22، أوجد نقطةً ثانيةً على المستقيم الذي ميله m وتقع عليه النقطة P ومثّل المستقيم وأوجد معادلتهُ.

19. $m = 2, P = (1, 3)$
20. $m = 0, P = (-1, 1)$
21. $m = 1.2, P = (2.3, 1.1)$
22. $m = -\frac{1}{4}, P = (-2, 1)$

في التمارين 23-28، حدّد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك.

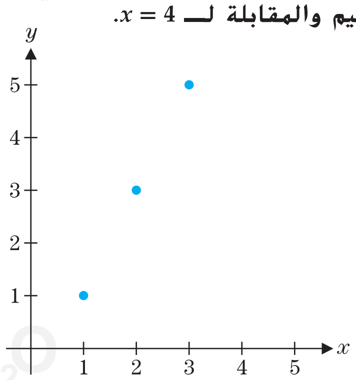
23. $y = 3(x - 1) + 2$ and $y = 3(x + 4) - 1$
24. $y = 2(x - 3) + 1$ and $y = 4(x - 3) + 1$
25. $y = -2(x + 1) - 1$ and $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 3$
26. $y = 2x - 1$ and $y = -2x + 2$
27. $y = 3x + 1$ and $y = -\frac{1}{3}x + 2$
28. $x + 2y = 1$ and $2x + 4y = 3$

في التمارين 29-32، أوجد معادلة مستقيم يمرّ بالنقطة المعطاة إضافةً إلى (a) مستقيم موازٍ و(b) آخر عمودي على المستقيم المعطى.

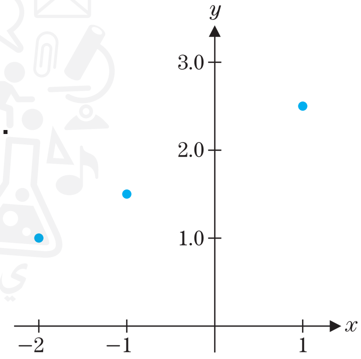
29. $y = 2(x + 1) - 2$ at $(2, 1)$
30. $y = 3(x - 2) + 1$ at $(0, 3)$
31. $y = 2x + 1$ at $(3, 1)$
32. $y = 1$ at $(0, -1)$

في التمرينين 33 و 34، أوجد معادلةً المستقيم المار بالنقاط المعطاة واحسب الإحداثي y للنقطة الواقعة على المستقيم والمقابلة لــ $x = 4$.

33.

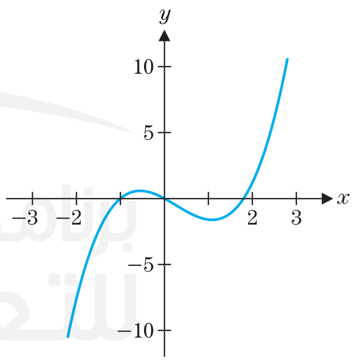


34.

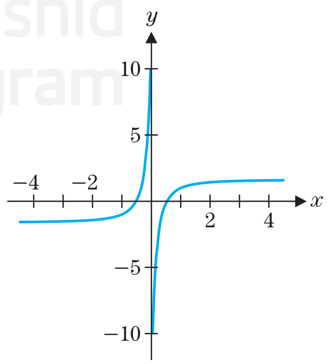


في التمارين 35-38، استخدم اختبار الخط الرأسي لتحديد ما إذا كان المنحنى تمثيل بياني لدالة.

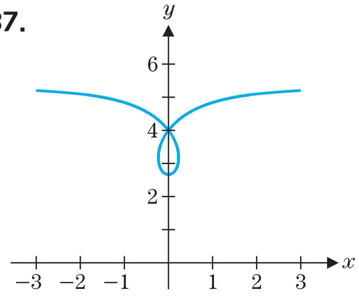
35.



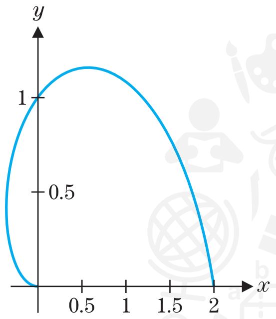
36.



37.



38.



في التمارين 39-42، حدّد ما إن كانت الدالة المعطاة كثيرة الحدود أو نسبية أو كلتيهما، أو غير ذلك.

39. $f(x) = x^3 - 4x + 1$

40. $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x - 1}{x^4 - 1}$

41. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$

42. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

في التمارين 43-48، أوجد مجال الدالة.

43. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

44. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

45. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{x - 5}$

46. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{9 - x^2}}$

47. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$

48. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + x - 6}$

في التمرينين 49 و 50، أوجد القيم المحددة للدالة.

49. $f(x) = x^2 - x - 1; \quad f(0), f(2), f(-3), f(1/2)$

50. $f(x) = \dfrac{3}{x}; \quad f(1), f(10), f(100), f(1/3)$

في التمرينين 51 و 52، نقدّم شرحًا موجزًا لحالة ما. اذكر مجالاً معقولاً للمتغيّر المحدد.

51 يرغب ببيع قطعة حلوى جديدة؛ x = عدد قطع الحلوى المُباعة في الشهر الأول.

52 يُرغب ببناء مصفٍ للسيارات فوق قطعة أرضٍ بعداها ′200 في ′200؛ x = عرض المصف (بالأقدام).

في التمارين 53-56، ناقش ما إذا كنت تعتقد أنّ y ستكون دالّةً لـــ x.

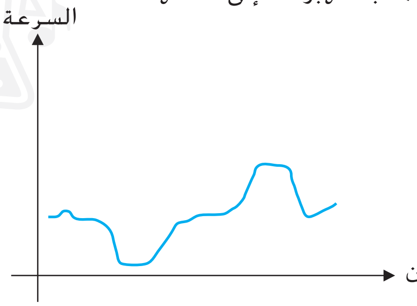
53. y = الدرجة التي تحصّلها في امتحان، x = عدد ساعات دراستك

54. y = احتمال الإصابة بسرطان الرئة، x = عدد السجائر المدخّنة في اليوم

55. y = وزن أحد الأشخاص، x= عدد دقائق التمرين كل يوم

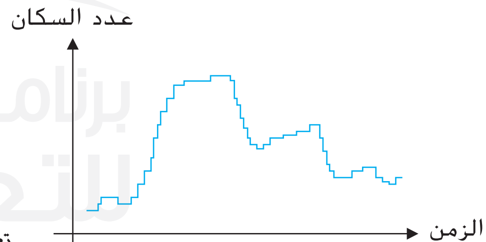
56. y = سرعة سقوط جسم، x = وزن الجسم

57. يبيّن الشكل A سرعة أحد الدّراجين بالنسبة للزمن. بالنسبة إلى لأجزاء المستوية من هذا التمثيل البياني، ما الذي يحدث لسرعة الدّراج؟ ما الذي يحدث لسرعة الدراج عندما يصعد المنحنى ا لبياني للأعلى؟ أو يهبط للأسفل؟ حدّد أجزاء المنحنى البياني المقابلة لصعود الدّراج إلى أعلى التلّة وتلك المقابلة لهبوطه إلى أسفلها.



الشكل A
سرعة الدّراج

58. يبيّن الشكل B تعداد سكان بلدٍ صغير بدلالة الزمن. وخلال المدة الزمنية المبينة، عانى ذلك البلد من تدفّق اللاجئين ومن الحرب ومن الطاعون. حدّد هذه الأحداث الهامة.



الشكل B
تعداد السّكان

في التمارين 59-64، أوجد كل نقاط تقاطع التمثيل البياني المعطى.

59. $y = x^2 - 2x - 8$

60. $y = x^2 + 4x + 4$

61. $y = x^3 - 8$

62. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

63. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

64. $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 4}$

في التمارين 65-72، حلّل إلى العوامل و/أو استخدم القانون العام لإيجاد كل أصفار الدالة المعطاة.

65. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

66. $f(x) = x^2 + x - 12$

67. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

68. $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

69. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

70. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

71. $f(x) = x^6 + x^3 - 2$

72. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

في التمرينين 73 و 74، أوجد كل نقاط التقاطع.

73. $y = x^2 + 2x + 3$ و $y = x + 5$

74. $y = x^2 + 4x - 2$ و $y = 2x^2 + x - 6$

تطبيقات

75. تعطى درجة غليان الماء (بالفهرنهايت) عند الارتفاع h (المقدّر بآلاف الأقدام فوق سطح البحر) بالعلاقة $B(h) = -1.8h + 212$. أوجد h كي يغلي الماء عند $98.6°$. لماذا يُعدّ هذا الارتفاع خطرًا على البشر؟

76. قِيسَ معدّل دوران كرة جولف تضرب بواسطة عصًا ذات رأس معدني على أنّه 9100 rpm لكل كرة قيمة انضغاطها 120 و 10000 rpm لكل كرة قيمة انضغاطها 60. يستخدم معظم لاعبي الجولف كراتٍ قيمة انضغاطها 90. إذا كان معدّل دوران الكرة تابعًا لقيمة الانضغاط، أوجد معدّل دوران كرةٍ قيمة انضغاطها 90. يستخدم لاعبو الجولف المحترفون في أغلب الأحيان كراتٍ قيمة انضغاطها 100. قدّر معدّل دوران كرةٍ قيمة انضغاطها 100.

77. يعتمد معدّل صرير صرصار على درجة الحرارة، إذ يصدر أحد أنواع صراصير الأشجار صريرًا بتواتر 160 مرة في الدقيقة عند درجة الحرارة 79°F و100 مرة في الدقيقة عند درجة الحرارة 64°F. أوجد دالّةً خطيةً تربط درجة الحرارة بصرير الصرصار.

78. عند وصف طريقة قياس درجة الحرارة عبر عدّ مرّات صرير الصرصار، تقترح معظم الأدلة عدّ مرّات الصرير خلال 15 ثانية. استخدم التمرين 77 لتفسير السبب في اعتبار هذه المدّة مدةً ملائمة.

79. لعب أحد الأشخاص لعبةً حاسوبيةً عدة مرات. وتبين الإحصاءات أنه قد فاز 415 مرة وخسر 120 مرة، وسُجِلت النسبة المئوية للفوز على أنها 78%. فكم مرةً متتاليةً عليه الفوز لرفع النسبة المئوية المُسجلة للفوز إلى 80%؟

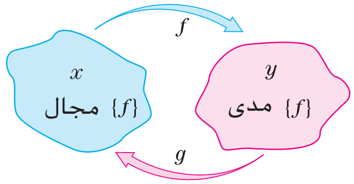
تمارين استكشافية

1. افترض أنّ لديك آلةً تكبّر الصور الفوتوغرافية بصورةٍ تناسبية. على سبيل المثال، يمكن أن تكبّر الآلة صورةً مقاسها 4×6 إلى 8×12 عبر مضاعفة العرض والارتفاع. يمكنك تشكيل صورةٍ مقاسها 8×10 عبر اقتصاص بوصةٍ واحدةٍ من كل ضلع. اشرح طريقة تكبير صورةٍ مقاسها $3\frac{1}{2} \times 5$ إلى 8×10 يعود أحد الأصدقاء من اسكتلندا وبحوزته صورةٌ بعداها $3\frac{1}{2} \times 5$ يظهر فيها وحش بحيرة لوخ نيس لمسافة $\frac{1}{4}''$ من الخارج على الجهة اليمنى. إذا استخدمت الإجراء الخاص بك للتكبير إلى 8×10، فهل سيشمل القصّ وحش البحيرة؟

2. حلّ المعادلة $|x - 2| + |x - 3| = 1$ (ارشاد: الحلّ غير مألوف من حيث احتوائه على أكثر من عددين فقط). ثم حلّ المعادلة $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$. (ارشاد: إذا قمت بالتعويض على نحو صحيح، فبإمكانك استخدام حلّك الخاص بالمعادلة السابقة).

ملاحظات الطلاب

الدوال العكسية



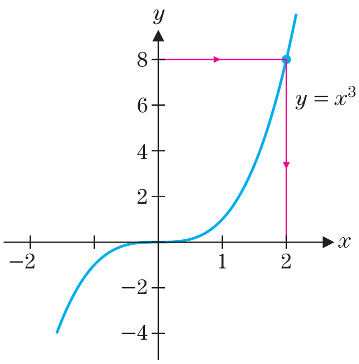
الشكل **1.26**

$g = f^{-1}$

ثمة عددٌ هائلٌ من المسائل العكسية. فعلى سبيل المثال، في مخطط القلب الكهربائي (EKG)، تستخدم قياسات النشاط الكهربائي على سطح الجسم خلال الاستدلال عن شيءٍ ما حول النشاط الكهربائي على سطح القلب. ويشار إلى هذا المثال على أنه مسألةٌ معكوسة، وذلك نظرًا إلى أنّ الأطباء يحاولون تحديد قيم الدخل (أي النشاط الكهربائي على سطح القلب) عبر مراقبة قيم الخرج (النشاط الكهربائي المقيس على سطح الصدر).

في هذه الفقرة، نقدّم تعريف الدالة المعكوسة. وفكرة الدّوال المعكوسة بسيطةٌ للغاية. لدينا قيمةٌ معطاةٌ للخرج (أي قيمة تقع ضمن مدى دالةٍ معطاة)، ونرغب بإيجاد قيمة الدخل (القيمة الواقعة ضمن المجال) التي أعطت قيمة الخرج تلك. أي إذا كان لديك مدى $y \in \{f\}$ أوجد المجال $x \in \{f\}$ الذي من أجله $y = f(x)$ (انظر الشكل التوضيحي للدالة العكسية g المبين في الشكل 1.26).

على سبيل المثال، افترض أنّ $f(x) = x^3$ و $y = 8$ فهل تستطيع إيجاد قيمة لـــ x تحقق $x^3 = 8$؟ أي هل تستطيع إيجاد القيمة x المقابلة لـــ $y = 8$ ؟ (انظر الشكل 1.27). إن حل هذه المسألة المحددة بطبيعة الحال هو $x = \sqrt[3]{8} = 2$. وبصورةٍ عامة إذا كان $x^3 = y$ فإن $x = \sqrt[3]{y}$. وفي ضوء ذلك، نقول إن الدالة التكعيبية هي معكوس $f(x) = x^3$.



الشكل **1.27**

إيجاد قيمة x المقابلة لـ $y = 8$

المثال 2.1 دالتان تعكس كلٌ منهما أثر الأخرى

إذا كان $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^{1/3}$ أوضح أنّ

$$f(g(x)) = x \text{ و } g(f(x)) = x \text{ ،}$$

لجميع قيم x

الحل لكل الأعداد الحقيقية x لدينا

$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

و

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

ملحوظة 2.1

انتبه جيداً إلى الرمز. لاحظ أن $f^{-1}(x)$ لا تعني $\frac{1}{f(x)}$. حيث نكتب المعكوس الضربي لـ $f(x)$ بالصيغة

$$\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$$

لاحظ في المثال 2.1 أنّ أثر f يبطل أثر g وبالعكس. نأخذ هذا المبدأ على أنه تعريف الدالة العكسية.

التعريف 2.1

افترض أنّ لـــ f و g المجالين A و B على الترتيب، وأنّ $f(g(x))$ معرّفة لكل قيم $x \in B$ وأنّ $g(f(x))$ معرّفة لكل قيم $x \in A$ إذا كان

$f(g(x)) = x$. لكل قيم $x \in B$. و

$g(f(x)) = x$. لكل قيم $x \in A$.

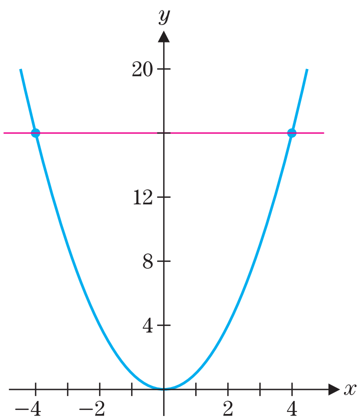
فإننا نقول إنّ g هي الدالة **العكسية** لـــ f وتكتب بالصيغة $g = f^{-1}$ وبصورةٍ مكافئة، f هي الدالة العكسية لـــ g ، $f = g^{-1}$.

لاحظ أن الكثير من الدوال المألوفة ليس لها دوال عكسية.

المثال 2.2 الدوال التي ليس لها دوال عكسية

أوضح أنّ الدالة $f(x) = x^2$ ليس لها دالة عكسية في الفترة $(-\infty, \infty)$.

الحلّ لاحظ أنّ $f(4) = 16$ و $f(-4) = 16$ أي أنه توجد قيمتان لـــ x تعطيان قيمة y نفسها. بالتالي، إذا كان علينا تعريف معكوس للدالة f فكيف سنعرّف $f^{-1}(16)$؟ انظر في التمثيل البياني لـــ $y = x^2$ (انظر الشكل 1.28) لكي ترى ما هي المسألة.

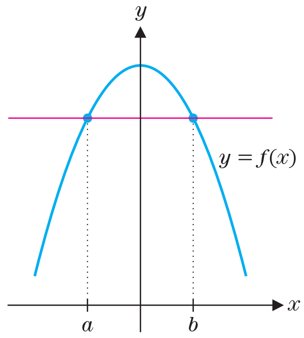


الشكل **1.28**

$y = x^2$

لكل $y > 0$ هناك قيمتان لـ x يكون من أجلهما $y = x^2$ ونظرًا إلى ذلك، فليس للدالة معكوس. ■

ولكل $f(x) = x^2$ يغرينا أن نستبق الأمور بالقول إنّ الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ هي معكوس الدالة $f(x)$ لاحظ أنّه بالرغم من أنّ $f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ لجميع قيم $x \geq 0$ (أي لجميع قيم x في المجال $g(x)$) فإنه من غير الصحيح عمومًا أن يكون $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ وفي الواقع، تنطبق هذه المساواة فقط لكل $x \geq 0$ ولكن للدالة $f(x) = x^2$ المحصورة في المجال $x \geq 0$ يكون لدينا $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



الشكل 1.29

$f(a) = f(b)$، من أجل $a \neq b$

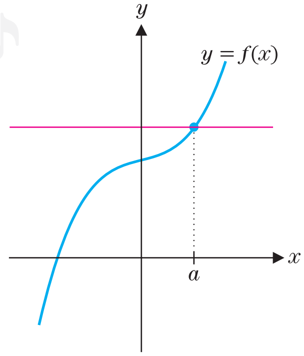
إذًا f لا تنجح في اختبار المستقيم الأفقي وبالتالي ليس فيها دالة واحد إلى واحد.

التعريف 2.2

يقال للدالة f بأنها دالة **واحد لواحد** عندما يكون كل عنصر في المدى $y \in \{f\}$ مرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجال $x \in \{f\}$ بحيث يتحقق عندها $y = f(x)$

ملحوظة 2.2

لاحظ أنّ التعريف المكافئ للدالة واحد لواحد هو التالي. نقول عن دالة $f(x)$ أنها دالة واحد لواحد إذا كانت المساواة $f(a) = f(b)$ عندما $a = b$ فقط . ويعدّ هذا التعريف في أغلب الأحيان مفيدًا من أجل البراهين التي تنطوي على دوال واحد لواحد.



الشكل 1.30

يقطع كل مستقيم أفقي المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر. وبالتالي تنجح الدالة f في اختبار المستقيم الأفقي وهي دالة واحد لواحد.

من المفيد أن نفكّر بمفهوم واحد لواحد بدلالة التمثيلات البيانية. لاحظ أنّ الدالة f تعدّ دالة واحد لواحد إذا كان كل مستقيم أفقي يقطع التمثيل البياني في نقطةٍ واحدةٍ فقط على الأكثر. ويشار إلى هذا باسم **اختبار المستقيم الأفقي**، ونوضّح ذلك في الشكلين 1.29 و1.30. ينبغي أن تبدو النتيجة التالية الآن منطقية.

النظرية 2.1

يكون للدالة f دالة عكسية إذا وفقط إذا كانت الدالة واحد لواحد.

وتنصّ هذه النظرية ببساطة أنه لكل دالة واحد لواحد دالة عكسية وأن كل دالةٍ لها دالةٌ عكسية هي دالة واحد لواحد. ولكنها لا تذكر شيئًا عن طريقة إيجاد الدالة العكسية. وبالنسبة للدوال البسيطة جدًا، يمكننا إيجاد المعكوس من خلال حل المعادلات.

المثال 2.3 إيجاد الدالة العكسية

أوجد معكوس الدالة $f(x) = x^3 - 5$

الحل لاحظ أنه من غير الواضح تمامًا من التمثيل البياني (انظر الشكل 1.31) إن كانت الدالة f تنجح في اختبار المستقيم الأفقي. لإيجاد الدالة العكسية، اكتب $y = f(x)$ وحلها لإيجاد x (أي حل لإيجاد قيمة المدخل x التي تعطي قيمة المخرج y). لدينا

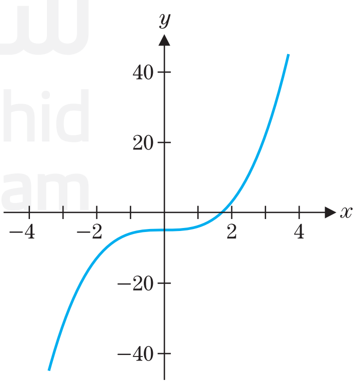
$$y = x^3 - 5$$

إن إضافة 5 إلى الطرفين وأخذ الجذر التكعيبي يعطياننا

$$(y+5)^{1/3} = (x^3)^{1/3} = x$$

وبالتالي، $x = f^{-1}(y) = (y+5)^{1/3}$ يعطينا عكس المتغيرين x و y

$$f^{-1}(x) = (x+5)^{1/3}$$ ■



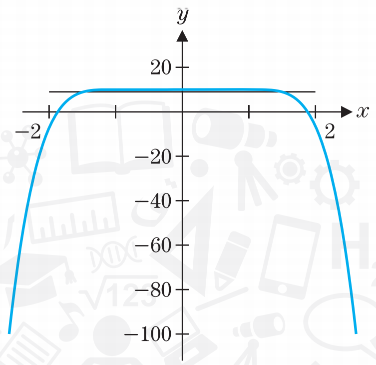
الشكل 1.31

$y = x^3 - 5$

المثال 2.4 دالة ليست واحدًا لواحد

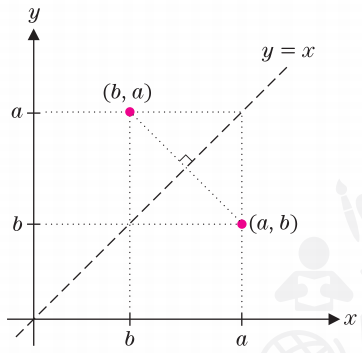
وضّح أنه لا يوجد للدالة $f(x) = 10 - x^4$ دالةٌ عكسية.

الحل يمكنك أن ترى من الرسم البياني (انظر الشكل 1.32) أن f ليست دالة واحدٍ لواحد؛ على سبيل المثال، $f(1) = f(-1) = 9$ وبالنتيجة، ليس للدالة f دالة عكسية. ■



الشكل 1.32

$y = 10 - x^4$



الشكل 1.33

العكس بالنسبة لـ $y = x$

حتى إن لم نستطع صراحةً إيجاد دالة عكسية، فيمكن أن نمثّل ذلك بيانيًا. لاحظ أنه إذا كانت (a, b) نقطةً على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ وكان للدالة f دالةٌ عكسية، f^{-1} وبما أنّ

$$b = f(a)$$

فيكون لدينا

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

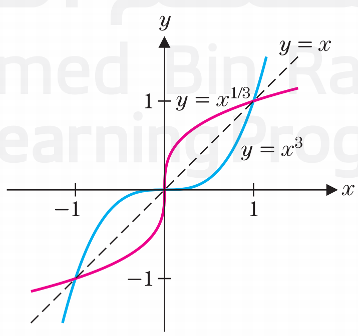
أي إنّ (b, a) نقطةٌ تقع على التمثيل البياني لـ $y = f^{-1}(x)$ وهذا يخبرنا بالكثير عن الدالة العكسية. وبالتحديد، يمكننا الحصول على الفور على أي عددٍ من النقاط على التمثيل البياني $y = f^{-1}(x)$ عبر تفحّصه ببساطة. إضافةً إلى ذلك، لاحظ أنّ النقطة (b, a) هي معكوس النقطة (a, b) بالنسبة للمستقيم $y = x$. (انظر الشكل 1.33). يتبع ذلك أنه عند إعطاء التمثيل البياني لأي دالة واحد لواحد، فيمكنك رسم التمثيل البياني لدالتها العكسية ببساطة عبر عكس التمثيل البياني بكامله بالنسبة للمستقيم $y = x$.

نوضّح في المثال 2.5 تماثل دالةٍ ومعكوسها.

المثال 2.5 التمثيل البياني لدالة ومعكوسها

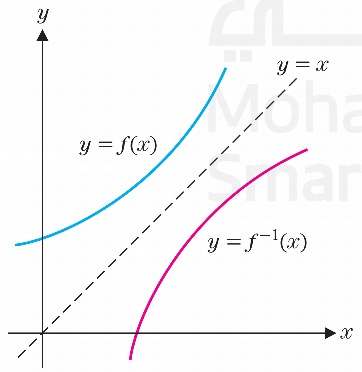
ارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $f(x) = x^3$ ومعكوسها.

الحل من المثال 2.1، إنّ الدالة العكسية لـ $f(x) = x^3$ هي $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ لاحظ تماثل الرسمين الظاهرين في الشكل 1.34. ■



الشكل 1.34

$y = x^{1/3}$ و $y = x^3$

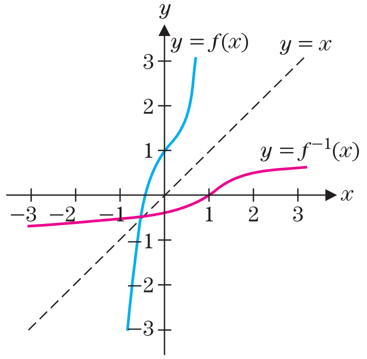


الشكل 1.35

التمثيلان البيانيان لـ f و f^{-1}

الرياضيات اليوم

كيم روسمو (1955–) عالم جريمةٍ كنديٌ طوّر خوارزمية الاستهداف الجغرافي الجنائي التي تحدد المنطقة الأكثر احتمالاً لإقامة القتلة المتسلسلين والمغتصبين وغيرهم من المجرمين. خدم روسمو مدة 21 عامًا في دائرة شركة فانكوفر. وقد تتلمذ على يد الأستاذين بول وباتريشيا براتنغهام من جامعة فراسر. وقد طوّر الأستاذان نظرية نمط الجريمة التي تتنبأ بمواقع الجرائم في ضوء أماكن إقامة المجرمين وعملهم ولهوهم. بينما عكس روسمو نموذجهما واستخدم مواقع الجرائم لتحديد المكان الأرجح لإقامة المجرمين. وقد قامت أحداث الحلقة الأولى من مسلسل Numbers على عمل روسمو.



الشكل 1.36

$y = f^{-1}(x)$ و $y = f(x)$

في معظم الأحيان، لا نستطيع إيجاد صيغةٍ للدالة العكسية وعلينا أن نقبل ببساطةٍ بمعرفة أن هناك دالةً عكسيةفحسب. لاحظ أننا نستطيع استخدام مبدأ التماثل المبيّن أعلاه باختصار لرسم التمثيل البياني لدالة عكسية، وذلك حتى إن لم تكن لدينا صيغة تلك الدالة. (انظر الشكل 1.35).

المثال 2.6 **رسم التمثيل البياني لدالة عكسية مجهولة**

ارسم تمثيلاً بيانيًا لــ $f(x) = x^5 + 8x^3 + x + 1$ ومعكوسها.

الحل على الرغم من أننا غير قادرين على إيجاد صيغةٍ للدالة العكسية، فإننا نستطيع رسم تمثيل بياني لــ f^{-1} بسهولة. نأخذ ببساطة التمثيل البياني لــ $y = f(x)$ ونعكسه بالنسبة للمستقيم $y = x$ كما هو موضّح في الشكل 1.36. (عندما سنقدّم المعادلات الوسيطية في درس قادم سنطّلع على طريقةٍ ذكيةٍ لرسم هذا التمثيل البياني بواسطة حاسبة التمثيل البياني). ■

التمارين 1.2

كتابة التمارين

1. اشرح بالكلمات (وبصورة) السبب في صحة الآتي: إذا كانت الدالة $f(x)$ متزايدة لكل قيم x [إي، إذا كان $x_2 > x_1$، فإن $f(x_2) > f(x_1)$]، وبالتالي للدالة f دالةً عكسية.
2. افترض أنّ التمثيل البياني لدالةٍ ينجح في اختبار المستقيم الأفقي. اشرح لماذا تعلم أن للدالة دالةً عكسية (معرفةً على مدى الدالة).
3. يعمل الرادار من خلال ارتداد ذبذبةٍ كهرَمَغناطيسيّة عالية التردد عن جسمٍ متحرك، ومن ثمّ قياس تشتّت الذبذبة عند ارتدادها. اشرح لِمَ تعدّ هذه مسألةً معكوسةً عبر تحديد الدخل والخرج.
4. لكلّ مرضٍ بشري مجموعةٌ من الأعراض المرافقة له. يحاول الأطباء حلّ مسألةٍ معكوسة: فمن خلال الأعراض المعطاة يحاولون تحديد المرض المسبب للأعراض. اشرح السبب في أنّ هذه المسألة ليست مسألة معكوس جيدة التعريف (أي إنه من غير الممكن منطقيًا على الدّوام التعرّف على الأمراض بصورةٍ صحيحةٍ من الأعراض فحسب).

في التمارين 1–4، بيّن أنّ $f(g(x)) = x$ و $g(f(x)) = x$ من أجل كل قيم x:

1. $f(x) = x^5$ و $g(x) = x^{1/5}$
2. $f(x) = 4x^3$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^{1/3}$
3. $f(x) = 2x^3 + 1$ أو $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ و $g(x) = \dfrac{1-2x}{x}$ $(x \neq 0, x \neq -2)$

في التمارين 5–12، حدّد ما إن كان للدالة دالةٌ عكسية (أو أنها دالة واحد لواحد). فإن كان ذلك، أوجد الدالة العكسية ومثل بيانيًا الدالة الأصلية والعكسية.

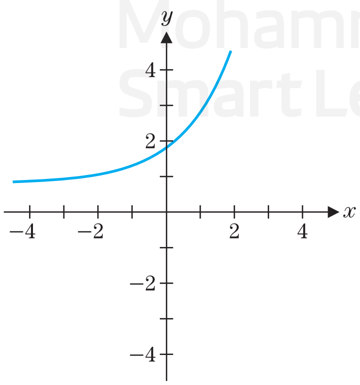
5. $f(x) = x^3 - 2$
6. $f(x) = x^3 + 4$
7. $f(x) = x^5 - 1$
8. $f(x) = x^5 + 4$
9. $f(x) = x^4 + 2$
10. $f(x) = x^4 - 2x - 1$
11. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
12. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

في التمارين 13–18، افترض أنّ للدالة دالةً عكسية. أوجد قيم الدالة المحددة بدون الحل لإيجاد الدالة العكسية.

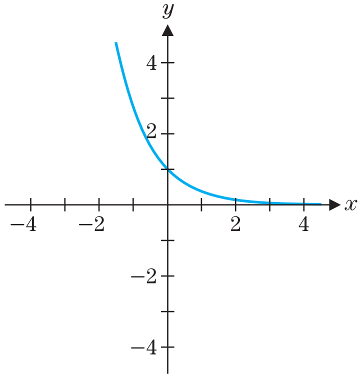
13. $f(x) = x^3 + 4x - 1$, (a) $f^{-1}(-1)$, (b) $f^{-1}(4)$
14. $f(x) = x^3 + 2x + 1$, (a) $f^{-1}(1)$, (b) $f^{-1}(13)$
15. $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$, (a) $f^{-1}(-5)$, (b) $f^{-1}(5)$
16. $f(x) = x^5 + 4x - 2$, (a) $f^{-1}(38)$, (b) $f^{-1}(3)$
17. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$, (a) $f^{-1}(4)$, (b) $f^{-1}(2)$
18. $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}$, (a) $f^{-1}(3)$, (b) $f^{-1}(1)$

في التمارين 19–22، استخدم التمثيل البياني المعطى لتمثيل الدالة العكسية بيانيًا.

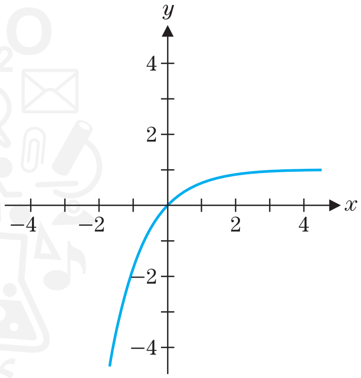
19.



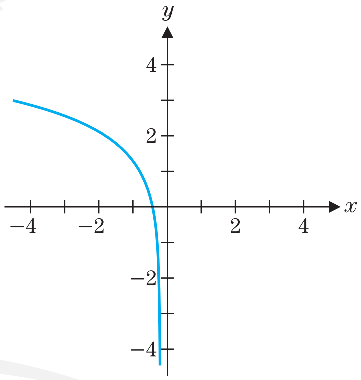
20.



21.



22.



في التمارين 23–26، افترض أنّ للدالة f دالةً عكسية واشرح سبب صحة العبارة.

23. إذا كان مدى الدالة f هو كل قيم $y > 0$، فإن مجال الدالة f^{-1} هو جميع قيم $x > 0$.

24. إذا كان التمثيل البياني للدالة f يتضمن النقطة (a, b)، فإن التمثيل البياني للدالة f^{-1} سيتضمن النقطة (b, a).

25. إذا كان التمثيل البياني للدالة f لا يقطع المستقيم $y = 3$، إذًا $f^{-1}(x)$ ليست معرفةً عند $x = 3$.

26. إذا كان مجال الدالة f كل الأعداد الحقيقية، فإن مدى الدالة f^{-1} هو جميع الأعداد الحقيقية.

في التمارين 27–36، استخدم تمثيلًا بيانيًا لتحديد ما إن كانت الدالة دالة واحد لواحد. ففي حال كانت كذلك، مثّل الدّالة العكسيّة.

27. $f(x) = x^3 - 5$

28. $f(x) = x^2 - 3$

29. $f(x) = x^3 + 2x - 1$

30. $f(x) = x^3 - 2x - 1$

31. $f(x) = x^5 - 3x^3 - 1$

32. $f(x) = x^5 + 4x^3 - 2$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

34. $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$

35. $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

تتضمن التمارين 37–46 دوال معكوسة على مجالاتٍ مقيّدة.

37. وضّح أنّ $f(x) = x^2\ (x \geq 0)$ و $g(x) = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$ دالتان متعاكستان. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

38. وضّح أنّ $f(x) = x^2 - 1\ (x \geq 0)$ و $g(x) = \sqrt{x+1}\ (x \geq -1)$ دالتان متعاكستان. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

39. مثّل بيانيًا $f(x) = x^2$ من أجل $x \leq 0$ وتحقّق من أنها دالة واحد لواحد. ثم أوجد معكوسها. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

40. مثّل بيانيًا $f(x) = x^2 + 2$ من أجل $x \leq 0$ وتحقّق من أنها دالة واحد لواحد. ثم أوجد معكوسها. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

41. مثّل الدالة $f(x) = (x-2)^2$ وأوجد فترةً تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

42. مثّل الدالة $f(x) = (x+1)^4$ وأوجد فترةً تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

43. مثّل الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ وأوجد فترةً تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

44. مثّل الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ وأوجد فترةً تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

45. مثّل الدالة $f(x) = \sin x$ وأوجد فترةً تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة العكسية المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

46. مثّل الدالة $f(x) = \cos x$ وأوجد فترةً تكون فيها دالة واحد لواحد. أوجد الدالة المعكوسة المقيدة على تلك الفترة. ومثّل كلتا الدالتين بيانيًا.

تطبيقات

في التمارين 47–52، ناقش ما إذا كانت للدالة الموصوفة دالة عكسية.

47. يتغيّر دخل إحدى الشركات مع الزمن.

48. يتغيّر طول شخصٍ مع الزمن.

49. عند إسقاط كرة، يتغيّر ارتفاعها مع الزمن.

50. عند رمي كرةٍ إلى الأعلى، يتغيّر ارتفاعها مع الزمن.

51. يعتمد ظلّ الجسم على شكله ثلاثي الأبعاد.

52. يعتمد عدد السعرات الحرارية المحروقة على مدى سرعة جريان الشخص.

53. افترض أن مديرك قد أخبرك أنك نلت زيادةً في الراتب بنسبة 10%. وفي الأسبوع التالي، أعلن مديرك أنه نظرًا إلى ظروفٍ خارجةٍ عن إرادته، ستُقتطع من رواتب جميع الموظفين نسبة 10%. فهل أنت ميسور الحال بالدرجة نفسها التي كنت عليها منذ أسبوعين؟ أوضح أن الزيادة بنسبة 10% والتخفيض بنسبة 10% ليستا عمليتين معكوستين. أوجد معكوس إضافة 10%. (إرشاد: لإضافة 10% إلى كمية ما، يمكنك ضرب تلك الكمية بـــ 1.10)

54. افترض أنّ أحد الموظفين نال زيادةً في الراتب بنسبة 6% مع علاوة قدرها AED 500. أوجد مقلوب هذا الأجر في الحالات التالية: (a) أتت الزيادة بنسبة 6% قبل العلاوة. (b) أتت الزيادة بنسبة 6% بعد العلاوة.

تمارين استكشافية

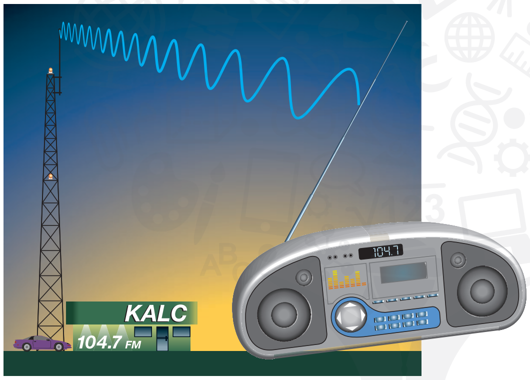
1. أوجد قيم k التي تجعل $f(x) = x^3 + kx + 1$ دالة واحد لواحد.

2. أوجد قيم k التي تجعل $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 1$ دالة واحد لواحد.

الدرس

1-3 الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية

يتضمّن عدد كبير من الظواهر التي تواجهها في حياتك اليومية أمواجًا. فعلى سبيل المثال، تُنقل الموسيقى من المحطات الإذاعية على هيئة موجاتٍ كهْرَمَغْناطيسيّة. حيث يترجم مستقبل المذياع لديك هذه الموجات الكهْرَمَغْناطيسيّة ويسبب اهتزاز غشاءٍ رقيق داخل مكبرات الصوت، والتي بدورها تشكّل موجات ضغطٍ في الهواء. وعندما تبلغ هذه الموجات أذنيك، فإنك تسمع الموسيقى من مذياعك. (انظر الشكل 1.37). كلٌّ من هذه الموجات موجةٌ دورية، ويقصد بذلك أنّ الشكل الأساسي للموجة يتكرر مرارًا وتكرارًا. يستلزم التوصيف الرياضي لهذه الظاهرة استخدام الدوال الدورية، وأكثر هذه الدوال شيوعًا الدوال المثلثية. نذكّرك أولًا بتعريفٍ أساسي.



الشكل 1.37
المذياع وموجات الصوت

ملاحظات
عندما نناقش الزمن الدوري لدالة، فإننا نركّز في أغلب الأحيان على الزمن الدوري الأساسي.

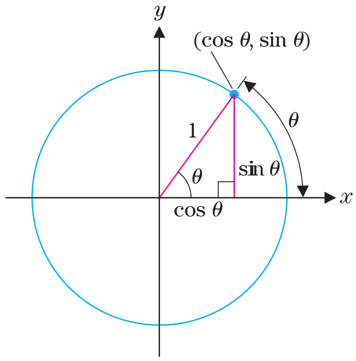
التعريف 3.1

تكون الدالة f دالة **دورية** و **زمنها الدوري** T إذا كان

$$f(x+T)=f(x)$$

لكل قيم x بحيث يكون x و $x+T$ في مجال f. وتدعى أصغر قيمة $T>0$ لهذا العدد بالزمن الدوري الأساسي.

ثمّة العديد من الطرق المتكافئة لتعريف دوال الـــ ***sine*** و ***cosine***. ونودّ أن نؤكّد على تعريفٍ بسيطٍ يمكنك من خلاله استنباط الكثير من الخواصّ الأساسية لهذه الدّوال بسهولة. بالإشارة إلى **الشكل 1.38**. ابدأ برسم دائرة الوحدة $x^2 + y^2 = 1$. لتكن θ الزاوية المقاسة (بعكس اتجاه عقارب الساعة) من المحور الموجب x إلى القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطة الأصل والنقطة (x, y) على الدائرة. وهنا نقيس θ بالقياس الدائري (الراديان) بدلالة طول القوس المحدّد في الشكل. بالإشارة إلى **الشكل 1.38** من جديد، نعرّف $\sin\theta$ على أنه الإحداثي y للزاوية الواقعة على الدائرة و $\cos\theta$ على أنه الإحداثي x لتلك النقطة. يتبع عن هذا التعريف أنّ $\sin\theta$ و $\cos\theta$ دالتان معرّفتان لكل قيم θ بحيث يكون لكلّ منهما المجال $-\infty < \theta < \infty$ ، في حين أن مدى كلٍ من هاتين الدالتين هو الفترة $[-1, 1]$.



الشكل 1.38

تعريف $\sin\theta$ و $\cos\theta$: $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$

ملحوظة 3.1

نقيس الزوايا دائمًا بالقياس الدائري بوحدة الــ(*radian*) ما لم يذكر خلاف ذلك.

لاحظ أنه بما أنّ محيط دائرة $(C = 2\pi r)$ نصف قطرها وحدة واحدة يساوي 2π. نستنتج بأنّ $360°$ تقابل 2π راديان. وبالمثل، فإن $180°$ تقابل π *rad* ، و $90°$ تقابل $\pi/2$ *rad* ، وهكذا. في الجدول المرفق، ندرج بعض الزوايا الشائعة التي تقاس بالدرجات، جنبًا إلى جنب مع قياساتها المقابلة بوحدة الــ(*radian*).

الزاوية بالدرجات	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$180°$	$270°$	$360°$
الزاوية بالراديان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

النظرية 3.1

الدوال $f(\theta) = \sin\theta$ و $g(\theta) = \cos\theta$ تمثل دوال دورية، ودورتها 2π.

البرهان

بالرجوع إلى **الشكل 1.38**. بما أنّ الدائرة الكاملة تساوي 2π ***rad*** ، فإن إضافة 2π إلى أي زاوية سوف تأخذك في دورة كاملة حول الدائرة وتعود إلى النقطة نفسها (x, y) وهذا يؤدي إلى أن

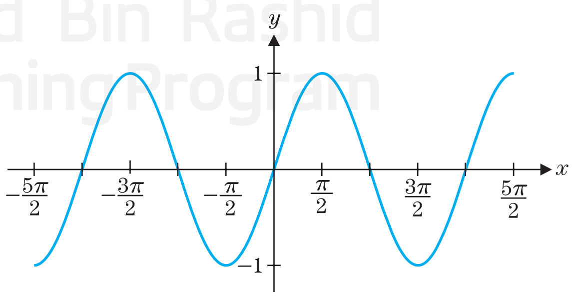
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$

و

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

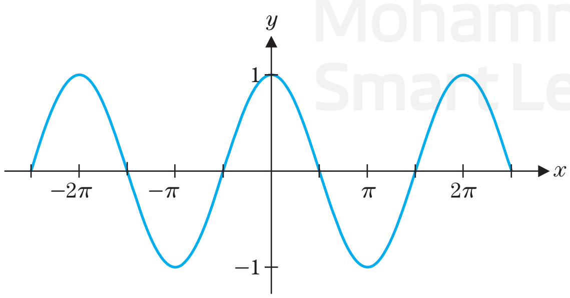
لكل قيم θ تكون 2π هي أصغر زاوية موجبة تحقق هذه النظرية.

من معرفتك بالتمثيلات البيانية لِــ $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ الموضّحة في الشكلين 1.39a و 1.39b على الترتيب.



الشكل 1.39a

$y = \sin x$



الشكل 1.39b

$y = \cos x$

لاحظ أنه يمكنك إجراء انسحابٍ لمنحنى $y = \sin x$ إلى اليمين أو اليسار وتحصل على صورة طبق الأصل من منحنى $y = \cos x$. وبالتحديد لدينا العلاقة

$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1

يبين الجدول المرفق بعض القيم الشائعة للـــ *sine* و *cosine*. لاحظ أنه يمكن قراءة العديد من تلك القيم مباشرة من الشكل 1.38.

مثال 3.1 حل المعادلات التي تحتوي على الـــ sine و الـــ cosine

أوجد جميع حلول المعادلات (a) $2\sin x - 1 = 0$ و (b) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$.

الحل (a) لاحظ بأنّ $2\sin x - 1 = 0$ إذا كانت $2\sin x = 1$ أو $\sin x = \frac{1}{2}$ من دائرة الوحدة، نجد أنّ $x = \frac{1}{2}$ إذا كانت $x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6}$. بما أنّ دورة الـــ $\sin x$ تساوي 2π، فالحلول الإضافية هي $\frac{\pi}{6} + 2\pi, \frac{5\pi}{6} + 2\pi, \frac{\pi}{6} + 4\pi$ وهكذا. إنّ إحدى الطرق الملائمة لتوضيح أنه يمكن إضافة *أي* مضاعف عددي صحيح لِ 2π لأي من الحلين تتمثّل بكتابة $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$، لأي عدد صحيح n قد يبدو الجزء (b) صعبًا في البداية. ولكن لاحظ بأنه يبدو كمعادلة تربيعية تستخدم $\cos x$ بدلًا من x باستخدام هذه المعلومة. يمكنك تحليل الطرف الأيسر إلى العوامل لتحصل على

$$0 = \cos^2 x - 3\cos x + 2 = (\cos x - 1)(\cos x - 2)$$

ينتج عن ذلك $\cos x = 1$ أو $\cos x = 2$ بما أنّ $-1 \leq \cos x \leq 1$ لكل قيم x فالمعادلة $\cos x = 2$ ليس لها حل. ولكننا نحصل على $\cos x = 1$ إذا كانت $x = 0, 2\pi$ أو أي مضاعف عدد صحيحٍ لـــ 2π يمكننا تلخيص كل الحلول عن طريق كتابة $x = 2n\pi$، لأي عدد صحيح n. ■

ملاحظة 3.2

بدلاً من كتابة $(\sin\theta)^2$ أو $(\cos\theta)^2$، فإننا نستخدم الرمز $\sin^2\theta$ و $\cos^2\theta$ على الترتيب. وإضافة إلى ذلك، فإننا غالباً ما نحذف الأقواس ونكتب، على سبيل المثال، $\sin 2x$ بدلاً من $\sin(2x)$.

نقوم الآن بإعطاء تعريفات للدوال المثلثية الأربع المتبقية.

التعريف 3.2

دالة الـــ *tan* معرفة كما يلي $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

دالة الـــ *cot* معرفة كما يلي $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

دالة *sec* معرفة كما يلي $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

دالة الـــ *csc* معرفة كما يلي $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

التمثيلات البيانية لهذه الدوال موضحة في الأشكال 1.40a و 1.40b و 1.40c و 1.40d لاحظ مواقع خطوط التقارب الرأسية في كل تمثيل بياني. في دوال التمام $\cot x$ و $\csc x$. ينتج عن القسمة على $\sin x$ خطوط تقارب رأسية عند $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ وهكذا (حيث $\sin x = 0$). من أجل $\tan x$ و $\sec x$ ينتج عن القسمة على $\cos x$ خطوط تقارب رأسية عند $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$ وهكذا (حيث $\cos x = 0$) بمجرد انتهائك من تحديد خطوط التقارب الرأسية. سيصبح رسم التمثيلات البيانية سهلًا نسبيًا.

لاحظ بأنّ $\tan x$ و $\cot x$ دوال دورية دورتها π. بينما $\sec x$ و $\csc x$ دوال دورية دورتها 2π.

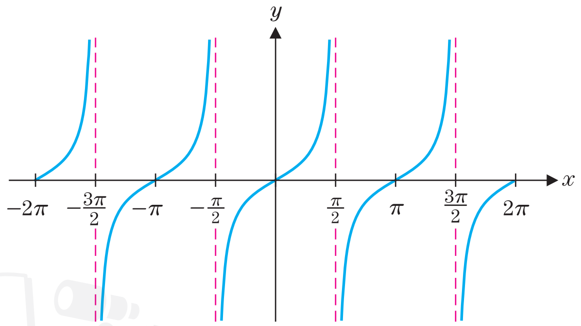
من المهم تعلم تأثير التعديلات البسيطة على هذه الدوال. ونقدم بعض الأفكار هنا وفي التمرينات.

ملاحظة 3.3

تحتوي معظم الآلات الحاسبة على مفاتيح للدوال $\sin x$ و $\cos x$ و $\tan x$ ولكن ليس للدوال المثلثية الثلاث الأخرى. ويعكس هذا الدور الرئيس الذي تؤديه $\sin x$ و $\cos x$ و $\tan x$ في التطبيقات. لحساب قيم الدالة للدوال المثلثية الثلاث الأخرى. يمكنك ببساطة استخدام المتطابقات

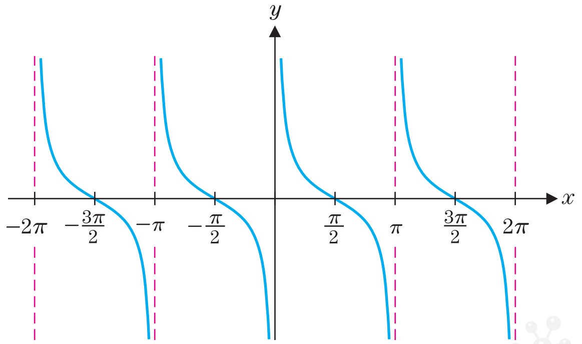
$$\cot x = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

و $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$



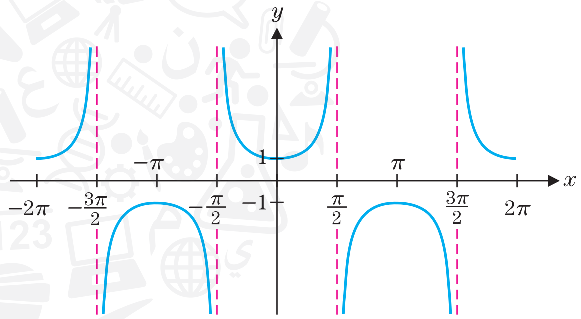
الشكل 1.40a

$y = \tan x$



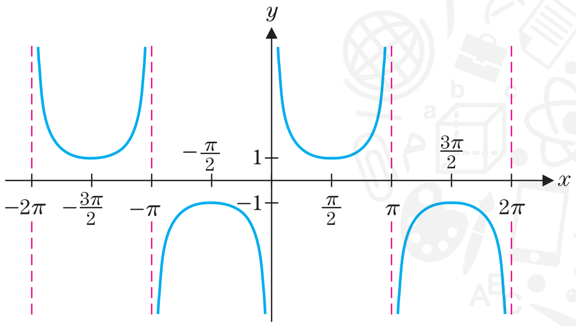
الشكل 1.40b

$y = \cot x$



الشكل 1.40c

$y = \sec x$

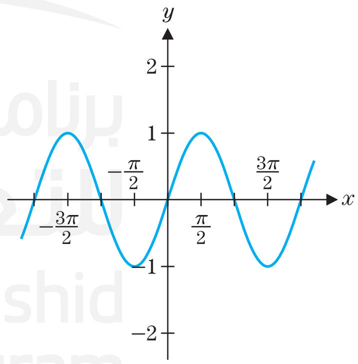


الشكل 1.40d

$y = \csc x$

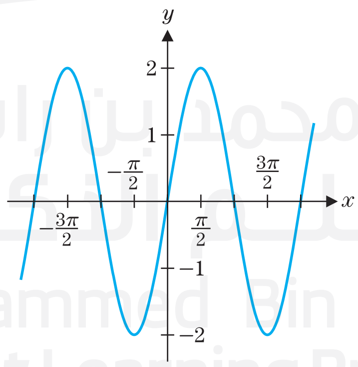
مثال 3.2 تبديل السعة والدورة

مثِّل $y = 2\sin x$ و $y = \sin 2x$ بيانيًا ووضح طريقة اختلاف كل منهما عن التمثيل البياني لـِ $y = \sin x$. (انظر الشكل 1.41a.)



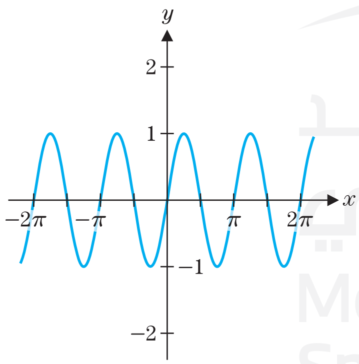
الشكل 1.41a

$y = \sin x$



الشكل 1.41b

$y = 2\sin x$



الشكل 1.41c

$y = \sin(2x)$

الحل التمثيل البياني لـِ $y = 2\sin x$ موضّح في الشكل 1.41b. لاحظ أن هذا التمثيل البياني مماثل للتمثيل البياني لـِ $y = \sin x$ ما عدا أن قيم y تتذبذب بين -2 و 2 بدلًا من -1 و 1 ثم. التمثيل البياني لـِ $y = \sin 2x$ موضّحٌ في الشكل 1.41c. في هذه الحالة، إنّ التمثيل البياني مشابه للتمثيل البياني لِ $y = \sin x$ ما عدا أنّ الدورة π بدلًا من 2π (بحيث تحدث التذبذبات أسرع مرتين). ■

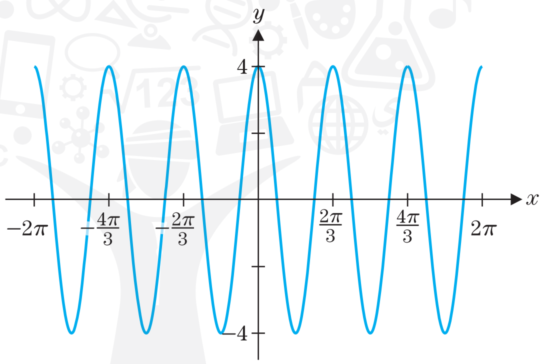
يمكن تعميم النتائج في المثال 3.2. لكل $A > 0$ يتذبذب التمثيل البياني لـِ $y = A\sin x$ بين $y = -A$ و $y = A$ وفي هذه الحالة، تسمى A **سعة** المنحنى الجيبي. لاحظ أنه لكل ثابت موجب c فإن دورة $y = \sin cx$ هي $2\pi/c$ وعلى نحوٍ مماثل. من أجل الدالة $y = A\cos cx$ تكون السعة A وتكون الدورة $2\pi/c$.

يمكن استخدام دوال الـ **sine** و **cosine**. لنمذجة موجات الصوت. تمثل النغمة الصافية (فكّر في الشوكة الرنانة) موجة ضغطٍ تصفها الدالة الجيبية $y = A\sin ct$ (نستخدم هنا المتغيّر t نظرًا إلى أن ضغط الهواء يمثل دالة زمنية). تحدد السعة A إلى أي مدى يبدو الصوت مرتفعًا وتحدد الدورة طبقة صوت النغمة. في هذا الإطار، سيكون من الملائم الحديث عن **التكرار** $f = c/2\pi$. كلما ارتفع التكرار ارتفعت معه طبقة صوت النغمة. (يقاس التكرار بالهرتز، حيث كل 1 هيرتز يساوي 1 دورة في الثانية الواحدة). لاحظ بأنّ التكرار هو ببساطة المعكوس الضربي للدورة.

مثال 3.3 إيجاد السعة والدورة والتكرار

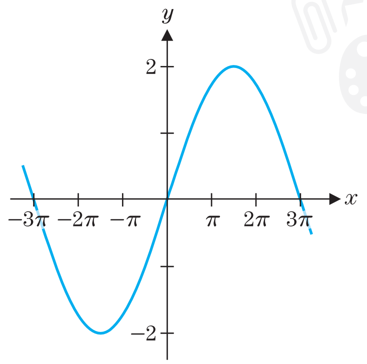
أوجد السعة والدورة والتكرار لكلٍ من (a) $f(x) = 4\cos 3x$ و (b) $g(x) = 2\sin(x/3)$

الحل (a) للدالة $f(x)$ السعة تساوي 4 والدورة تساوي $2\pi/3$ والتكرار يساوي $3/(2\pi)$. (انظر الشكل 1.42a) (b) من أجل $g(x)$ السعة تساوي 2 والدورة تساوي $2\pi/(1/3) = 6\pi$ والتكرار يساوي $1/(6\pi)$ (انظر الشكل 1.42b)



الشكل 1.42a

$y = 4\cos 3x$



الشكل 1.42b

$y = 2\sin(x/3)$

يوجد عدد هائل من القوانين أو **المتطابقات** التي قد تكون مفيدة في التعامل مع الدوال المثلثية. ينبغي أن تلاحظ أنه – ومن تعريف $\sin\theta$ و $\cos\theta$ (انظر الشكل 1.38). فإن نظرية فيثاغورس تعطينا المتطابقة المعروفة

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

نظرًا إلى أنّ وتر المثلث المشار إليه يساوي 1. وهذا صحيح بالنسبة لأي زاوية θ . بالإضافة إلى ذلك.

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \text{ و } \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

ننظم لائحة متطابقات مهمة في النظرية 3.2.

النظرية 3.2

لأي عددين حقيقيين α و β ، نحصل على المتطابقات التالية:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \quad (3.1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (3.2)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad (3.3)$$

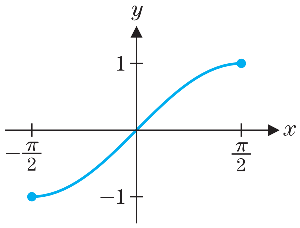
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad (3.4)$$

من المتطابقات الأساسية الملخصة في النظرية 3.2. يمكن استخلاص عدة متطابقات أخرى مفيدة. نستخلص اثنتين من تلك المتطابقات في المثال 3.4.

مثال 3.4 اشتقاق متطابقات مثلثية جديدة

اشتق المتطابقتين $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ و $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

الحل يمكن الحصول على هاتين المتطابقتين من القانونين(3.1) و(3.2) على الترتيب، من خلال استبدا $\alpha = \theta$ و $\beta = \theta$. وبدلًا من ذلك، يمكن الحصول على متطابقة $\cos 2\theta$ من خلال طرح المعادلة (3.3) من المعادلة (3.4). ■



الشكل 1.43

$y = \sin x$ on $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

الدوال المثلثية المعكوسة

نقوم الآن بتوسيع مجموعة الدوال المتاحة لك بتعريف معكوس الدوال المثلثية. من أجل البدء، انظر إلى التمثيل البياني لِ $y = \sin x$. (انظر الشكل 1.41a) لاحظ بأنه لا يمكنا تعريف دالة معكوسة، لأن $\sin x$ لا تمثل واحد إلى واحد. ورغم أنّ دالة الجيب ليس لها دالة عكسية، يمكننا تعريف واحدة بتعديل مجال الجيب. نقوم بذلك عن طريق اختيار جزء من المنحنى يجتاز اختبار المستقيم الأفقي. إذا قيدنا المجال بالفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، فعندها تكون $y = \sin x$ دالة واحد لواحد (انظر الشكل 1.43) ومن ثم، يكون لها معكوس. وهكذا نعرّف دالة **معكوسة الجيب** كما يلي

$$\boxed{y = \sin^{-1} x \text{ اذا وفقط إذا كان } \sin y = x \text{ و } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}} \quad (3.5)$$

فكر في هذا التعريف كما يلي: إذا كانت $y = \sin^{-1} x$. فعندها تكون y هي الزاوية (بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$) التي تحقق $\sin y = x$. لاحظ أنه كان بإمكاننا اختيار أي فترة تكون $\sin x$ عندها الدالة واحد لواحد. لكن $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ هي الأكثر ملائمة. للتحقق من أن هذه دوال معكوسة، لاحظ أنّ

$$\sin(\sin^{-1} x) = x \text{ لكل قيم } x \in [-1, 1]$$

و

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \text{ لكل قيم } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3.6)$$

اقرأ المعادلة (3.6) بحرص شديد. إنها *لا* تقول بأن $\sin^{-1}(\sin x) = x$ *لكل قيم* x. وبدلاً من ذلك، *فقط* تلك القيم المقيدة بالمجال، $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ على سبيل المثال، $\sin^{-1}(\sin \pi) \ne \pi$. بما أنّ

$$\sin^{-1}(\sin \pi) = \sin^{-1}(0) = 0$$

ملاحظة 3.4

غالبًا ما يستخدم علماء الرياضيات الرمز $\mathbf{arcsin}\, x$ بدلًا من $\sin^{-1} x$. ويقرأ المتعلمون $\sin^{-1} x$ "معكـــوس $\sin x$" أو "قوس $\sin x$" بشكلٍ تبادلي.

مثال 3.5 قيمة دالة معكوس الـ *sine*

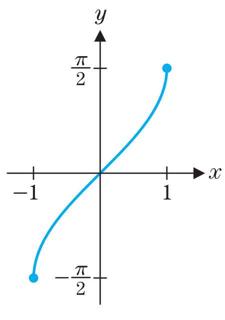
أوجد قيمة (a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و (b) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

الحل (a). نبحث عن الزاوية θ في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ والتي تكون عندها $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. لاحظ أنه بما أنّ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. يكون لدينا $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. (b). لاحظ أنّ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ و $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. بالتالي،

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}. \quad ■$$

من خلال المثال 3.5، قد تعتقد أن (3.5) طريقة ملتوية لتعريف دالة. إذا كان هذا ما اعتقدته، فقد فهمت الفكرة بالضبط. في الواقع، نحن نريد أن نؤكد أن ما نعرفه عن دالة معكوس الجيب ناتج أساسًا من الإشارة إلى دالة الجيب.

تذكّر من مناقشتنا في القسم 0.3 أنه يمكننا رسم تمثيلٍ بياني لِ $y = \sin^{-1} x$ ببساطة عبر عكس التمثيل البياني لِ $y = \sin x$ في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (من الشكل 1.43) من خلال المستقيم $y = x$. (انظر الشكل 1.44).



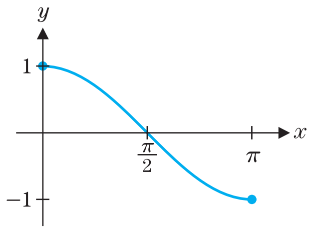
الشكل 1.44

$y = \sin^{-1} x$

بالانتقال إلى $y = \cos x$. نلاحظ أن تقييد المجال في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ كما فعلنا مع دالة معكوس الـ *sine*.

لن ينفع هنا. (لم لا؟) إنّ أبسط طريقة لجعل $\cos x$ واحد لواحد تتمثّل في تقييد مجالها في الفترة $[0, \pi]$. (انظر الشكل 1.45). ونتيجة لذلك، نعرِّف دالة **معكوس** ***cosine*** كما يلي

$$y = \cos^{-1} x \text{ اذا وفقط اذا كان } \cos y = x \text{ و } 0 \le y \le \pi.$$



الشكل 1.45

$y = \cos x$ on $[0, \pi]$

لاحظ هنا أنه لدينا

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \text{ لكل قيم } x \in [-1, 1]$$

و

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \text{ لكل قيم } x \in [0, \pi].$$

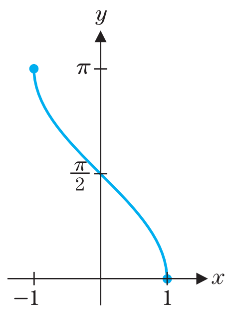
كما هو الحال مع تعريف معكوس الجيب . فمن المفيد التفكير في $\cos^{-1} x$ على أنها تلك الزاوية θ في $[0, \pi]$ والتي من أجلها تكون $\cos \theta = x$. كما هو الحال مع $\sin^{-1} x$. فمن الشائع استخدام $\cos^{-1} x$ و $\arccos x$ بشكلٍ متبادل.

مثال 3.6 قيمة دالة معكوس الـ *cosine*

أوجد قيمة $\cos^{-1}(0)$ (a) و $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (b).

الحل لحل الفرع (a). ستحتاج لإيجاد تلك الزاوية θ في $[0, \pi]$ والتي من أجلها تكون $\cos \theta = 0$. ليس من الصعب رؤية أنّ $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$. (إذا حسبت هذا على آلتك الحاسبة وحصلت على 90. فآلتك الحاسبة في وضع الدرجات. في هذه الحالة، فينبغي لك تغييرها فورًا لوضع التقدير بالرديان (**rad**)). ولحل الفرع (b). ابحث عن الزاوية $\theta \in [0, \pi]$ والتي من أجلها تكون $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. لاحظ أنّ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$. ونتيجةً لذلك.

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \blacksquare$$



الشكل 1.46

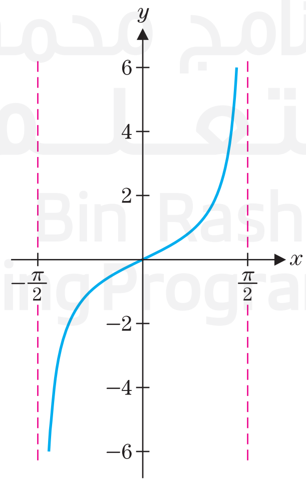
$y = \cos^{-1} x$

مرة أخرى، نحصل على التمثيل البياني لهذه الدالة المعكوسة بواسطة عكس التمثيل البياني لِ $y = \cos x$ في الفترة $[0, \pi]$ (الموضّحة في الشكل 1.45) من خلال المستقيم $y = x$. (انظر الشكل 1.46).

ويمكننا تعريف معكوسات كل من الدوال المثلثية الأربعة المتبقية بطرق مشابهة. للدالة $y = \tan x$ نقيد المجال في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. فكّر لماذا لم يجرِ تضمين النقطتين الطرفيتين لهذه الفترة. (انظر الشكل 1.47). بعد أن قمت بذلك، سترى بسهولة أننا نعرِّف دالة **معكوس الـ** ***tan*** كما يلي

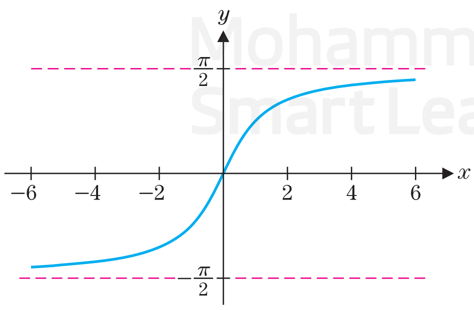
$$y = \tan^{-1} x \text{ اذا وفقط إذا كان } \tan y = x \text{ و } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

عندها، يمكن إيجاد التمثيل البياني لِ $y = \tan^{-1} x$ كما هو موضّح في الشكل 1.48 بواسطة عكس التمثيل البياني في الشكل 1.47 من خلال المستقيم $y = x$.



الشكل 1.47

$y = \tan x$ on $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



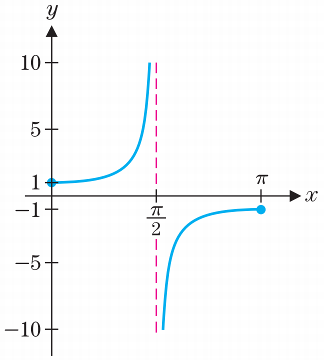
الشكل 1.48

$y = \tan^{-1} x$

مثال 3.7 إيجاد قيمة معكوس الـ *tan*

أوجد قيمة $\tan^{-1}(1)$.

الحل يجب أن تبحث عن الزاوية θ في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ والتي تكون عندها $\tan\theta = 1$. وذلك غاية في السهولة. بما أنّ $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ و $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. يكون لدينا $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.



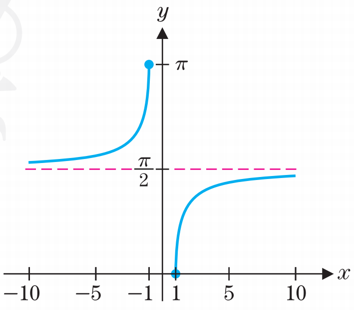
الشكل 1.49

$y = \sec x$ on $[0, \pi]$

ننتقل الآن إلى تحديد معكوس $\sec x$. أولًا، ينبغي التنويه. توجد طرق متعددة معقولة يمكننا من خلالها تقييد المجال بشكلٍ مناسب، ويتباين المؤلفون في اختيارهم لطريقة التقييد. وقد اخترنا (بصورة تعسفية نوعًا ما) تقييد المجال ليكون $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. ولكن لماذا لم نستخدم كل $[0, \pi]$؟ تحتاج فقط للتفكير في تعريف $\sec x$ لترى لِمَ احتجنا إلى استبعاد القيمة $x = \frac{\pi}{2}$. انظر الشكل 1.49 من أجل التمثيل البياني لِـ $\sec x$ عند هذا المجال. (لاحظ خط التقارب الرأسي عن $x = \frac{\pi}{2}$) بالتالي. نعرّف دالة **معكوس القاطع** كما يلي

$$y = \sec^{-1} x \text{ اذا وفقط اذا كان } \sec y = x \text{ و } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

يوضّح الشكل 1.50 التمثيل البياني لِـ $\sec^{-1} x$.



الشكل 1.50

$y = \sec^{-1} x$

مثال 3.8 إيجاد قيمة معكوس الـ *sec*

أوجد قيمة $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$.

الحل يجب أن تبحث عن الزاوية θ حيث $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ والتي تكون عندها $\sec\theta = -\sqrt{2}$. لاحظ أنه إذا كان $\sec\theta = -\sqrt{2}$، عندها $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. بما أنّ $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ تقع في الفترة $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. فيكون $\sec^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$.

لا تشتمل الآلات الحاسبة عادةً على دوال $\sec x$ أو $\sec^{-1} x$. في هذه الحالة، يجب عليك تحويل قيمة *sec* المطلوبة لتصبح قيمة *csc* وتستخدم معكوس *csc*. كما فعلنا في المثال 3.8.

سنلخص المجال والمدى لكلٍ واحدة من الدوال المثلثية المعكوسة الرئيسية الثلاث في الهامش.

ملاحظة 3.5

يمكننا وبطريقة مماثلة تحديد معكوسات $\cot x$ و $\csc x$. بسبب ندرة استخدام هذه الدوال، فسنحذفها هنا وندرسها في التدريبات.

الوظيفة	النطاق	المدى
$\sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

في العديد من التطبيقات، نكون بحاجة لحساب طول أحد أضلاع مثلث قائم الزاوية باستخدام طول ضلعٍ آخر وزاوية **حادة** (أي زاوية قياسها بين 0 و $\frac{\pi}{2}$ راديان). يمكننا أن نفعل هذا بسهولة إلى حد ما، كما في المثال 3.9.

مثال 3.9 إيجاد ارتفاع برج

يقف شخصٌ على بعد 100 m من قاعدة برجٍ ويكون قياس الزاوية عنده من الأرض إلى قمة البرج $60°$. (انظر الشكل 1.51). (a) أوجد ارتفاع البرج. (b) ما قياس الزاوية إذا كان الشخص يبعد 200 m عن القاعدة؟

الحل لحل الجزء (a). نحول $60°$ أولًا لتصبح بالراديان:

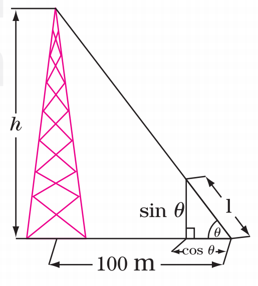
$$60° = 60\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ radians}$$

نعلم أنّ قاعدة المثلث في الشكل 1.51 تساوي 100 m يجب علينا الآن حساب ارتفاع البرج h. باستخدام المثلثات المتشابهة الموضّحة في الشكل 1.51. نجد

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{h}{100}$$

إذًا، فارتفاع البرج

$$h = 100\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 100\tan\theta = 100\tan\frac{\pi}{3} = 100\sqrt{3} \approx 173 \text{ m}$$



الشكل 1.51

ارتفاع برج

من أجل الجزء (b)، تعطينا المثلثات المتشابهة في الشكل 1.51

$$\tan\theta = \frac{h}{200} = \frac{100\sqrt{3}}{200} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بما أنّ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$، يكون

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0.7137 \text{ rad}$$ (حوالي 41 درجة) ■

في المثال 3.10، نقوم بتبسيط التعابير التي تشمل كلًا من الدوال المثلثية والدوال المثلثية المعكوسة.

مثال 3.10 تبسيط التعابير التي تحتوي على دوال مثلثية معكوسة

بسط: (a) $\sin(\cos^{-1} x)$ و (b) $\tan(\cos^{-1} x)$.

الحل لا تبحث عن صيغة غامضة لمساعدتك. فكر في البداية: $\cos^{-1} x$ زاوية (سمِّها θ) تكون عندها $x = \cos\theta$. أولًا، خذ بعين الاعتبار الحالة التي تكون عندها $x > 0$. بالنظر إلى الشكل 1.52، رسمنا مثلثًا قائم الزاوية وتره 1 وزاوية مجاورة θ. إذا، ومن تعريف sine و cosine ، نعرف أن قاعدة المثلث $\cos\theta = x$ والارتفاع $\sin\theta$، وبحسب نظرية فيثاغورس

$$\sin(\cos^{-1} x) = \sin\theta = \sqrt{1 - x^2}.$$

انتظر! لم ننته بعد من الجزء (a). يوضّح الشكل 1.52 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. لكن وبحسب التعريف فإنّ $\theta = \cos^{-1} x$ يمكن أن تتراوح من 0 إلى π. هل تتغيّر إجابتنا إذا كانت $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$؟ لتتأكد من أنها لا تتغير، لاحظ أنه إذا كانت $0 \le \theta \le \pi$، تكون $\sin\theta \ge 0$. وبحسب متطابقة فيثاغورس $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$، نجد أنّ

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

بما أنّ $\sin\theta \ge 0$، يجب أن يكون

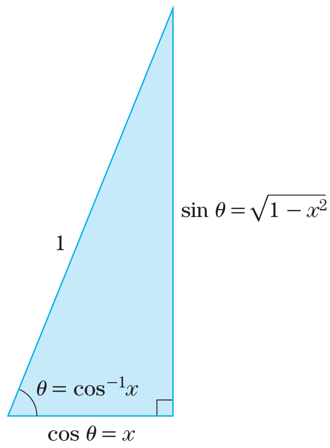
$$\sin\theta = \sqrt{1 - x^2}$$

لكل قيم x.

من أجل الجزء (b)، يمكنك أن ترى من الشكل 1.52 أنّ

$$\tan(\cos^{-1} x) = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

لاحظ بأن هذه المتطابقة الأخيرة صحيحة، سواء كانت $x = \cos\theta$ موجبة أو سالبة. ■



الشكل 1.52

$\theta = \cos^{-1} x$

التمارين 1.3

تمارين كتابة

1. يفضِّل كثير من الطلاب استخدام الدرجات لقياس الزوايا ولا يفهمون سبب تعلمهم القياس بالراديان. كما نوقش في النص، يقيس الراديان المسافة مباشرة على طول دائرة الوحدة، وتمثل المسافة جانبًا مهمًا في العديد من التطبيقات. بالإضافة إلى ذلك، سنرى لاحقًا أنّ الكثير من قوانين حساب التفاضل والتكامل تكون أبسط بصيغة الراديان منها بالدرجة. بصرف النظر عن الاعتياد، ناقش كل مزايا الدرجة عن الراديان. بالموازنة، أيهما أفضل؟

2. يمثّل طالب $f(x) = \cos x$ بيانيًا على حاسبة بيانية ويحصل على ما يبدو أنه خطّ مستقيم عند الارتفاع $y = 1$ بدلًا من منحنى الـ cosine المعتاد. وبعد التحقق، تكتشف أن الحاسبة تبين نافذة التمثيل البياني $-10 \le x \le 10, -10 \le y \le 10$ وأنها في وضع الدرجات. اشرح الخطأ الذي حدث وطريقة تصحيحه.

3. إنّ الدوال المعكوسة ضرورية من أجل حل المعادلات. إنّ المدى المقيد الذي كان علينا أن نستخدمه لتعريف معكوسات الدوال المثلثية يقيد أيضًا فائدتها في حل المعادلات. اشرح طريقة استخدام $\sin^{-1} x$ لإيجاد كل حلول المعادلة $\sin u = x$.

4. ناقش طريقة حساب $\sec^{-1} x, \csc^{-1} x$ و $\cot^{-1} x$ على حاسبة تتضمن دوال من أجل $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ و $\tan^{-1} x$ فقط.

5. في المثال 3.3، $f(x) = 4\cos 3x$ لها دورة $2\pi/3$ و $g(x) = 2\sin(x/3)$ لها دورة 6π. اشرح لمَ يكون للمجموع $h(x) = 4\cos 3x + 2\sin(x/3)$ دورة 6π.

6. أعطِ مدى لِ $\sec^{-1} x$ يكون مختلفًا عن ذلك المعطى في النص. أيّ من قيم x ستجعل قيمة $\sec^{-1} x$ تتغيّر؟ باستخدام المناقشة حول الحاسبة في التمرين 4، أعطِ سببًا واحدًا لاختيارنا هذا المدى.

في التمرينين 1 و 2، حول القياس المعطى بالراديان إلى درجات.

1. (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{4\pi}{3}$
2. (a) $\frac{3\pi}{5}$ (b) $\frac{\pi}{7}$ (c) 2 (d) 3

في التمرينين 3 و 4، حول القياس المعطى بالدرجات إلى راديان.

3. (a) 180° (b) 270° (c) 120° (d) 30°
4. (a) 40° (b) 80° (c) 450° (d) 390°

في التمارين من 5 إلى 14، أوجد كافة حلول المعادلة المعطاة.

5. $2\cos x - 1 = 0$
6. $2\sin x + 1 = 0$
7. $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$
8. $2\sin x - \sqrt{3} = 0$
9. $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$
10. $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$
11. $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$
12. $\sin 2x - \cos x = 0$
13. $\cos^2 x + \cos x = 0$
14. $\sin^2 x - \sin x = 0$

في التمارين من 15 إلى 24، ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة.

15. $f(x) = \sin 2x$
16. $f(x) = \cos 3x$
17. $f(x) = \tan 2x$
18. $f(x) = \sec 3x$
19. $f(x) = 3\cos(x - \pi/2)$
20. $f(x) = 4\cos(x + \pi)$
21. $f(x) = \sin 2x - 2\cos 2x$
22. $f(x) = \cos 3x - \sin 3x$
23. $f(x) = \sin x \sin 12x$
24. $f(x) = \sin x \cos 12x$

في التمارين من 25 إلى 32، حدد السعة والدورة والتردد.

25. $f(x) = 3\sin 2x$
26. $f(x) = 2\cos 3x$
27. $f(x) = 5\cos 3x$
28. $f(x) = 3\sin 5x$
29. $f(x) = 3\cos(2x - \pi/2)$
30. $f(x) = 4\sin(3x + \pi)$
31. $f(x) = -4\sin x$
32. $f(x) = -2\cos 3x$

في التمرينات من 33 إلى 36، أثبت صحة المتطابقة المثلثية المعطاة.

33. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$
34. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
35. (a) $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ (b) $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$
36. (a) $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$ (b) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$

في التمارين من 37 إلى 46، أوجد قيمة الدالة المعكوسة عبر رسم دائرة وحدة وتحديد الزاوية الصحيحة وإيجاد قيمة الزوج المرتب على الدائرة.

37. $\cos^{-1} 0$
38. $\tan^{-1} 0$
39. $\sin^{-1}(-1)$
40. $\cos^{-1}(1)$
41. $\sec^{-1} 1$
42. $\tan^{-1}(-1)$
43. $\sec^{-1} 2$
44. $\csc^{-1} 2$
45. $\cot^{-1} 1$
46. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

47. برهن أنّه لثابتٍ ما β،

$$4\cos x - 3\sin x = 5\cos(x + \beta)$$

ثمّ، أوجد تقديرًا لقيمة β.

48. برهن أنّه لثابتٍ ما β،

$$2\sin x + \cos x = \sqrt{5}\sin(x + \beta)$$

ثمّ، أوجد تقديرًا لقيمة β

في التمارين من 49 إلى 52، حدد ما إذا كانت الدالة دورية. وإذا كانت دورية، أوجد الدورة (الأساسية) الأصغر.

49. $f(x) = \cos 2x + 3\sin \pi x$
50. $f(x) = \sin x - \cos\sqrt{2}x$
51. $f(x) = \sin 2x - \cos 5x$
52. $f(x) = \cos 3x - \sin 7x$

في التمارين من 53 إلى 56، استخدم مدى θ لتحديد قيمة الدالة المشار إليها.

53. $\sin\theta = \frac{1}{3}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; أوجد $\cos\theta$.
54. $\cos\theta = \frac{4}{5}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; أوجد $\sin\theta$.
55. $\sin\theta = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$; أوجد $\cos\theta$.
56. $\sin\theta = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$; أوجد $\tan\theta$.

في التمارين من 57 إلى 64، استخدم مثلثًا لتحويل كل تعبير إلى أبسط صورة. وحيثما أمكن، اذكر مدى الذي ينطبق عليه التبسيط.

57. $\cos(\sin^{-1} x)$
58. $\cos(\tan^{-1} x)$
59. $\tan(\sec^{-1} x)$
60. $\cot(\cos^{-1} x)$
61. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$
62. $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$
63. $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$
64. $\csc\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$

في التمارين من 65 إلى 68، استخدم حاسبة التمثيل البياني أو الحاسوب لتحديد عدد حلول كل معادلة، وتقدير الحلول عدديًا (x مقدرة بالراديان).

65. $2\cos x = 2 - x$ **66.** $3\sin x = x$

67. $\cos x = x^2 - 2$ **68.** $\sin x = x^2$

التطبيقات

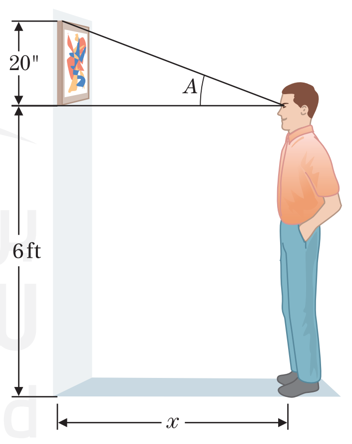
69. يقيس شخص يجلس على بعد ميلين من موقع إطلاق صاروخ بزاوية قياسها $20°$ درجة فوق الموقع الحالي. فما مقدار ارتفاع الصاروخ؟

70. شجرة طولها 6 ft على بعد 4 ft من قاعدة عمود إنارة وتصنع ظلا طوله قدمان. فما ارتفاع عمود الإنارة؟

71. يقف مسّاحٌ على بعد 80 ft قاعدة مبنى حكومي ويقيس من مكانه زاوية قياسها $50°$ درجة الى قمة البرج . يكتشف المسّاح أن مركز البرج يقع على مسافة 20 ft داخل الجزء الأمامي للهيكل. أوجد المسافة من الأرض إلى قمة البرج.

72. افترض أنّ المسّاح في التمرين 71 قدَّر أن مركز البرج يقع بين $20'$ و $21'$ داخل الجزء الأمامي للهيكل. حدد عدد الأقدام الاضافية على ارتفاع البرج.

73. صورة معلقة في معرض فني لها إطار ارتفاعه 20 in ويرتفع الجزء السفلي من الإطار 6 ft فوق سطح الأرض. يقف شخص ترتفع عيناه 6 ft عن سطح الأرض على مسافة x قدم من الجدار. فلتكن A الزاوية المحصورة بين الشعاع من عين الشخص إلى الجزء السفلي من الإطار والشعاع من عين الشخص إلى الجزء العلوي من الإطار. اكتب A كدالة لِ x ومثّل $y = A(x)$ بيانيًا.



74. تهدف لعبة الجولف إلى ضرب كرة لتدخل في حفرة قطرها 4.5in افترض أنّ لاعب جولف يقف على بعد x ft من الحفرة ويحاول ضرب الكرة لتسقط فيها يتمثل التقريب الأول لهامش خطأ الضربة في قياس الزاوية A التي يشكلها الشعاع من الكرة إلى الحافة اليمنى للحفرة والشعاع من الكرة إلى الحافة اليسرى من الحفرة. أوجد A كدالة لــ x.

75. في دارة التيار المتردد، يعطى الجهد بالعلاقة $v(t) = v_p \sin(2\pi ft)$. حيث تمثّل v_p ذروة الجهد وتمثّل f التردد بالهرتز Hz. يقيس مقياس جهد كهربائي في الواقع متوسط الجهد (ويدعى **جذر متوسط مربع القيمة**) ويساوي $v_p/\sqrt{2}$. إذا كان للجهد سعة 170 ودورة $\pi/30$. فأوجد التردد وقم بقياس الجهد.

76. يقوم مشغّل أسطوانات قديم بتدوير الأسطوانات بسرعة $33\frac{1}{3}$ rpm (دورة في الدقيقة). ما دورة التدوير (مقدرة بالدقيقة)؟ ما دورة أسطوانة سرعتها 45-rpm؟

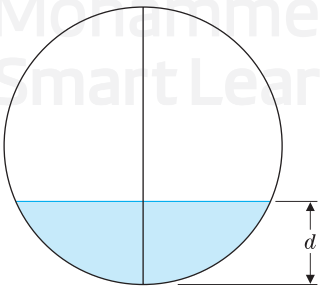
77. لنفترض أنّ مبيعات تذاكر إحدى شركات الطيران (بآلاف الدراهم) تعطى بالعلاقة $s(t) = 110 + 2t + 15\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$. حيث تقاس t بالشهور. ما الظاهرة من الحياة اليومية التي يمكن أن تتسبب بتقلّب مبيعات التذاكر منمذجة بدلالة الـ sin؟ بناءً على إجابتك، ما الشهر الذي يقابل $t = 0$؟ بصرف النظر عن التقلبات الموسمية، ما مقدار زيادة مبيعات شركة الطيران سنويًا؟

78. يبدأ مدوزنو آلات البيانو عادةً بضرب شوكة رنانة، ثم ضرب مفتاح البيانو المقابل لها. إذا كان لكلٍ من الشوكة الرنانة ونغمة البيانو تكرار مقداره 8، يكون الصوت الناتج $\sin 8t + \sin 8t$. مثّل ذلك بيانيًا. إذا كان البيانو غير مدوزن قليلًا على تكرار 8.1. فالصوت الناتج $\sin 8t + \sin 8.1t$. مثّل ذلك بيانيًا واشرح طريقة تمكن مدوزن البيانو من سماع الفرق الضئيل في التكرار.

تمارين استكشافية

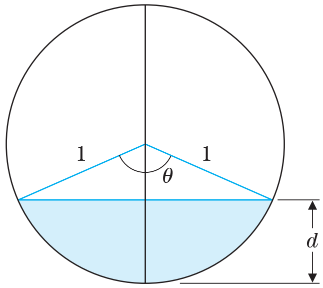
1. قام الفيزيائي فيليب موريسون في كتابه رنين الحقيقة (*The Ring of Truth*) بإجراء تجربة لتقدير محيط الأرض. في ولاية نبراسكا، قاس الزاوية إلى نجمة ساطعة في السماء، ثم قاد 370 ميل جنوبًا إلى ولاية كانساس وقاس الزاوية الجديدة للنجمة. أظهرت بعض الحسابات الهندسية أنّ الفارق بين الزاويتين – والذي يساوي $5.02°$ درجة يساوي الزاوية من مركز الأرض إلى الموقعين في نبراسكا وكانساس. لو كانت الأرض كروية تمامًا (وهي ليست كذلك) وكان محيط جزء الدائرة الذي يبلغ قياسه $5.02°$ درجة يساوي 370 ميل قدّر محيط الكرة الأرضية. استندت هذه التجربة إلى تجربة مماثلة قام بها العالم اليوناني القديم إراتوستينس. عرف الإغريق القدماء والإسبان أيام كولومبس أنّ الأرض كانت دائرية، وكان الاختلاف في ما بينهم حول المحيط فقط. دافع كولومبوس عن رقم يساوي حوالي نصف القيمة الفعلية، وذلك لأنه لم تكن هناك سفينة قادرة على البقاء في المياه فترة طويلة بما يكفي للإبحار طوال المسافة الحقيقية.

2. لدينا خزان نفط ذو مقطع عرضي دائري موضوع على جانبه، ويجري إدخال عصا في فتحة من الجزء العلوي لقياس عمق الوقود في d الخزان. وبناء على هذا القياس، يتمثل الهدف في حساب النسبة المئوية للوقود المتبقي في الخزان.



لتبسيط العمليات الحسابية، نفترض أنّ الدائرة دائرة وحدة مركزها في $(0, 0)$ رسم أنصاف الأقطار التي تمتد من نقطة الأصل إلى الجزء العلوي من الوقود.

تساوي مساحة الوقود في الأسفل مساحة جزء الدائرة المحصور بأنصاف الأقطار ناقص مساحة المثلث المُشكل فوق الوقود في الشكل.



ابدأ بالمثلث، الذي تساوي مساحته نصف القاعدة مضروبة بالارتفاع. اشرح لمَ يساوي الارتفاع $1 - d$. اعثر على مثلث قائم الزاوية في الشكل (يوجد اثنان منها) يكون له وتر قياسه 1 (نصف قطر الدائرة) وضلعٌ رأسي طوله $1 - d$. يساوي طول الضلع الأفقي نصف قاعدة المثلث الأكبر. أوضح أنّ هذا يساوي $\sqrt{1-(1-d)^2}$. تساوي مساحة جزء الدائرة $\pi\theta/2\pi = \theta/2$. حيث θ هي الزاوية في الجزء العلوي من المثلث. أوجد هذه الزاوية كدالة لِ d. (ارشاد: ارجع إلى المثلث قائم الزاوية المستخدم أعلاه ذو الزاوية العليا $\theta/2$). ثم أوجد المساحة المملوءة بالوقود واقسم على π لإيجاد جزء الخزان المملوء بالوقود

3. يمكن أن تكون رسومات الحاسوب مضللة. ينجح هذا التمرين بأفضل شكل باستخدام التمثيل البياني "المتقطع" (نقاط افرادية غير متصلة). مثّل $y = \sin x^2$ مستخدمًا نافذة تمثيلٍ بياني يمثّل كل بيكسل فيها خطوة بمقدار 0.1 بالاتجاه x أو y. يجب أن تحصل على الانطباع بأنّ موجه تتذبذب بسرعة متزايدة وأنت تتحرك إلى اليسار واليمين. الآن، غيّر نافذة التمثيل البياني بحيث يصبح منتصف الشاشة الأصلية (في الغالب $x = 0$) في أقصى يسار الشاشة الجديدة. من المرجّح أن ترى ما يبدو أنه خليط عشوائي من النقاط. تابع تغيير التمثيل البياني بزيادة قيم x. صف الأنماط أو غياب الأنماط الذي تراه. من المفترض أن تجد نمطًا يبدو وكأنه صفان من النقاط عبر أعلى وأسفل الشاشة، ونمطًا آخر يشبه الموجه الجيبية الأصلية. لكل نمطٍ تجده، اختر النقاط المجاورة التي لها إحداثيات a و b. ثم غيِّر التمثيل البياني بحيث تصبح $a \le x \le b$ ثم أوجد الجزء المفقود من التمثيل البياني. تذكّر أنه سواء كانت النقاط متصلة أم لا، فإن تمثيلات الحاسوب البيانية تهمل جزءًا من التمثيل، وتكمن مهمتك في تحديد ما إذا كان الجزء المتروك مهمًا أم لا.

الدرس

1-4 الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

تتكاثر بعض أنواع البكتيريا بسرعة كبيرة، ويحتمل أنك قد اكتشفت ذلك إذا سبق لك أن أصبت بالتهاب في جرح أو في الحلق. في الظروف المناسبة، سيتضاعف عدد البكتيريا في بعض المواقع خلال أقل من ساعة. في هذا القسم، سنناقش بعض الدوال التي يمكن استخدامها لنمذجة مثل هذا النمو السريع.

لنفترض أن هناك في البداية 100 بكتيريا في موقع معين ويتضاعف عددها كل ساعة. استخدم دالة العدد $P(t)$ ، حيث تمثّل t الزمن (بالساعات) وشغِّل الساعة عند الوقت $t = 0$. بما أنّ العدد المبدئي يساوي 100، يكون $P(0) = 100$. وبعد ساعة واحدة، تضاعف العدد إلى 200، بحيث يصبح $P(1) = 200$. وبعد ساعة أخرى، سيتضاعف العدد مرة أخرى إلى 400، ليصبح $P(2) = 400$، وهكذا.

لحساب عدد البكتيريا بعد 10 ساعات، يمكن أن تقوم بحساب العدد بعد 4 ساعات و5 ساعات وهكذا ، أو يمكنك استخدام الاختصار التالي. لإيجاد $P(1)$، ضاعف العدد الأولي، بحيث تكون $P(1) = 2 \cdot 100$. لإيجاد $P(2)$، ضاعف العدد الأولي عند الزمن $t = 1$ بحيث تكون $P(2) = 2 \cdot 2 \cdot 100 = 2^2 \cdot 100$. وبالمثل، $P(3) = 2^3 \cdot 100$. يؤدي بنا هذا النمط إلى

$$P(10) = 2^{10} \cdot 100 = 102{,}400.$$

لاحظ أنه يمكن نمذجة العدد بواسطة الدالة

$$P(t) = 2^t \cdot 100.$$

ندعو $P(t)$ دالة أسيّة، لأنّ المتغيّر t أُس. هناك سؤال مهم هنا: ما مجال هذه الدالة؟ حتى الآن، انحصر استخدامنا بقيم الإعداد الصحيحة، t ولكن ما قيم t الأخرى التي تجعل $P(t)$ ذات معنى؟ من المؤكد أنّ الأسس النسبية ذات معنى، كما هو الحال مع، $P(1/2) = 2^{1/2} \cdot 100$ حيث $2^{1/2} = \sqrt{2}$ يخبرنا هذا بأن عدد البكتيريا في الموقع بعد نصف ساعة يساوي تقريبًا

$$P(1/2) = 2^{1/2} \cdot 100 = \sqrt{2} \cdot 100 \approx 141.$$

من السهل تفسير الأسس الكسرية كجذور. فعلى سبيل المثال،

$$x^{1/2} = \sqrt{x},$$
$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x},$$
$$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2,$$
$$x^{3.1} = x^{31/10} = \sqrt[10]{x^{31}}$$

وهكذا. لكن ماذا عن الأسس غير النسبية؟ من المؤكد أن تعريفها أكثر صعوبة، ولكنها تؤدي المطلوب منها بالضبط. على سبيل المثال، بما أنّ π بين 3.14 و 3.15، تقع 2^{π} بين $2^{3.14}$ و $2^{3.15}$ بهذه الطريقة، نُعرّف 2^x لكل x غير نسبي من أجل ملء الفجوات في التمثيل البياني $y = 2^x$ لـ x غير نسبي. أي، إذا كانت x وكانت $a < x < b$، للأعداد النسبية a و b ، فإنّ $2^a < 2^x < 2^b$.

إذا أردت لسببٍ من الأسباب إيجاد عدد البكتيريا بعد π ساعة، يمكنك استخدام آلتك الحاسبة أو كمبيوترك لإيجاد العدد التقريبي:

$$P(\pi) = 2^{\pi} \cdot 100 \approx 882$$

من أجل التسهيل، سنقوم الآن بتلخيص القواعد المعتادة للأسس.

قوانين الأسس (لكل $x, y > 0$)

- لأية أعدادٍ صحيحة m و n $(n \geq 2)$.

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

- لأية عددٍ حقيقي p،

$$(xy)^p = x^p \cdot y^p, \quad x^{-p} = \frac{1}{x^p} \quad \text{و} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}$$

- لأية أعدادٍ حقيقية p و q .

$$(x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

- لأية أعدادٍ حقيقية p و q .

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q} \quad \text{و} \quad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$$

طوال دراستك لحساب التفاضل والتكامل، ستحتاج لأن تكون قادرًا على التحويل بسرعة في ما بين الصورة الأسيّة والصورة الكسرية أو الجذرية.

مثال 4.1 تحويل التعابير إلى الصورة الأسيّة

حوِّل كل تعبير إلى الصيغة الأسيّة: (a) $3\sqrt{x^5}$، (b) $\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$، (c) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x}}$ و (d) $(2^x \cdot 2^{3+x})^2$

الحل في الحالة (a)، كل ما عليك فعله هو ترك 3 وتحويل الأس:

$$3\sqrt{x^5} = 3x^{5/2}$$

في الحالة (b)، استخدم أسًّا سالبًا لتكتب x في البسط:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{x}} = 5x^{-1/3}$$

في الحالة (c)، افصل الثوابت عن المتغيّرات أولًا ثم حوّل إلى أبسط صورة:

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\frac{x^2}{x^{1/2}} = \frac{3}{2}x^{2-1/2} = \frac{3}{2}x^{3/2}$$

في الحالة (d)، قم بالعمليات داخل الأقواس أولًا ثم قم بالتربيع:

$$(2^x \cdot 2^{3+x})^2 = (2^{x+3+x})^2 = (2^{2x+3})^2 = 2^{4x+6} \quad \blacksquare$$

بشكلٍ عام، لدينا التعريف التالي.

التعريف 4.1

للثابتان $a \neq 0$ و $b > 0$ تسمى الدالة $f(x) = a \cdot b^x$ دالة أسيّة، ويسمى b الأساس وتسمى x الأس.

يجب الحرص على التمييز بين الدوال الجبرية مثل $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^{2/3}$ والدوال الأسيّة. في الدوال الأسيّة مثل $h(x) = 2^x$، يكون المتغيّر هو الأس (وهو سبب التسمية) بدلًا من الأساس. لاحظ أيضًا أنّ مجال الدوال الأسيّة هو خط الأعداد الحقيقية بأكمله، $(-\infty, \infty)$، بينما يكون المدى هو الفترة المفتوحة $(0, \infty)$، بما أنّ $b^x > 0$ لكل قيم x.

بينما يمكن استخدام أي عدد حقيقي موجب كأساس لدالة أسيّة، توجد ثلاثة أسس هي الأكثر شيوعًا في الممارسة العملية. ينشأ الأساس 2 بطبيعة الحال عند تحليل العمليات التي تتضاعف على فترات منتظمة (مثل البكتيريا في بداية هذا الدرس). إنّ نظام العد القياسي الذي نستخدم هو نظام عد العشرات (10)، ولذلك يشيع استخدام هذا الأساس. ولكن الأساس الأكثر فائدة إلى حدٍ بعيدٍ هو العدد غير النسبي e. مثل π، إن العدد e يُستخدم في عدد مذهل من الحسابات المهمة. نعرِّف e بالعلاقة

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \qquad (4.1)$$

لاحظ أن المعادلة (4.1) تحوي اثنين على الأقل من أوجه القصور المهمة. الأول، لم نبين إلى الآن ما يعنيه الرمز $\lim\limits_{n\to\infty}$. أما الثاني، فإنّ السبب الذي يجعل أي شخص يعرّف عددًا بمثل تلك الطريقة الغريبة غير واضح.

يكفي في الوقت الراهن القول إنّ المعادلة (4.1) تعني أنه يمكن تقريب e بحساب قيم $(1 + 1/n)^n$ لكل قيم n الكبيرة، وأنه كلما زادت قيمة n اقترب التقريب من القيمة الحقيقية لـ e. بالتحديد، إذا نظرت إلى متتالية الأعداد $(1 + 1/2)^2, (1 + 1/3)^3, (1 + 1/4)^4$ وهكذا دواليك، فإنها ستصبح بالتدريج أكثر قربًا إلى العدد غير النسبي e.

للحصول على فكرة عن قيمة e، احسب مجموعة من هذه الأعداد:

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.5937\ldots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.7169\ldots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{10{,}000}\right)^{10{,}000} = 2.7181\ldots$$

وهكذا. يجب عليك حساب ما يكفي من هذه القيم لإقناع نفسك بأن الأعداد القليلة الأولى من التمثيل العشري لـ e $(e \approx 2.718281828459\ldots)$ صحيحة.

مثال 4.2 حساب القيم الأسيّة للأساس e

قرّب e^4، $e^{-1/5}$ و e^0.

الحل باستخدام الآلة الحاسبة، نجد أن

$$e^4 = e \cdot e \cdot e \cdot e \approx 54.598$$

من قوانين الأسس،

$$e^{-1/5} = \frac{1}{e^{1/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 0.81873$$

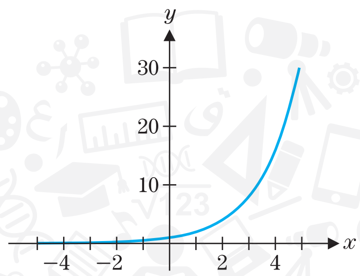
(على الآلة الحاسبة، من الملائم استبدال $-1/5$ بـ -0.2). أخيرًا، $e^0 = 1$. ■

تلخص التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة العديد من خصائصها المهمة.

مثال 4.3 رسم التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة

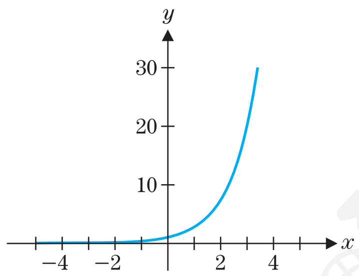
ارسم التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة $y = 2^x$، $y = e^x$، $y = e^{2x}$، $y = e^{x/2}$، $y = (1/2)^x$ و $y = e^{-x}$.

الحل باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب، يجب أن تحصل على تمثيلات بيانية مماثلة لما يلي.



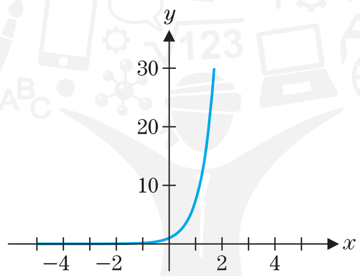
الشكل 1.53a

$y = 2^x$



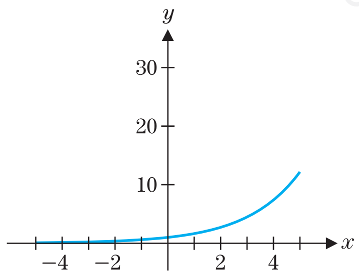
الشكل 1.53b

$y = e^x$



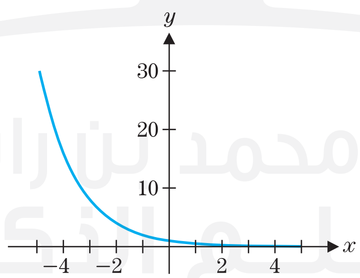
الشكل 1.54a

$y = e^{2x}$



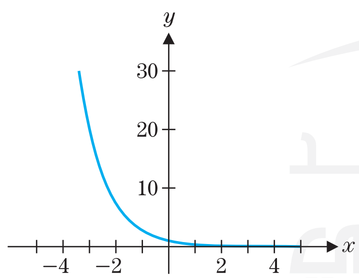
الشكل 1.54b

$y = e^{x/2}$



الشكل 1.55a

$y = (1/2)^x$



الشكل 1.55b

$y = e^{-x}$

لاحظ أن كلًا من المنحنيات في الأشكال 1.53a و1.53b و1.54a و1.54b تبدأ قريبة جدًا من المحور x (عند القراءة من اليسار إلى اليمين)، وتمرّ بالنقطة $(0, 1)$ ثم ترتفع ارتفاعًا حادًا. وهذا صحيح بالنسبة لكل الدوال الأسيّة التي فيها الأساس أكبر من 1 ومعامل إيجابي في الأس. لاحظ أنه كلما ازداد الأساس $(e > 2)$ أو كلما ازداد المعامل في الأس $(2 > 1 > 1/2)$ ازدادت سرعة ارتفاع التمثيل البياني إلى اليمين (وانخفاضه إلى اليسار). لاحظ أنّ التمثيلات البيانية في الشكلين 1.55a و1.55b تمثّل الصورة المعكوسة على المحور y للشكلين 1.53a و1.53b، على الترتيب. ترتفع التمثيلات البيانية عندما تتحرك باتجاه اليسار وتنخفض نحو المحور x عندما تتحرك باتجاه اليمين. تجدر الإشارة إلى أنه وفق قوانين الأسس، $(1/2)^x = 2^{-x}$ و $(1/e)^x = e^{-x}$.

في الأشكال من 1.53 إلى 1.55، كل دالة أسيّة تمثّل دالة واحد لواحد، مما يحتّم أن لها دالة عكسية. نعرّف الدوال اللوغاريتمية بأنها معكوسات الدوال الأسيّة.

التعريف 4.2

لأيّ عدد موجب $b \neq 1$، تُعرَّف الدالة اللوغاريتمية التي أساسها b، وتكتب $\log_b x$، بالعلاقة

$$y = \log_b x \text{ إذا وفقط إذا كان } x = b^y$$

أي أنّ لوغاريتم $\log_b x$ يعطي الأس الذي إذا رفع للأساس b نحصول على العدد x على سبيل المثال،

$$\log_{10} 10 = 1 \quad (\text{since } 10^1 = 10),$$
$$\log_{10} 100 = 2 \quad (\text{since } 10^2 = 100),$$
$$\log_{10} 1000 = 3 \quad (\text{since } 10^3 = 1000)$$

وهكذا، إنّ قيمة $\log_{10} 45$ أقل وضوحًا من القيم الثلاث السابقة، ولكن الفكرة نفسها؛ أنت بحاجة للعثور على العدد y بحيث تكون $10^y = 45$. الجواب يقع بين 1 و 2، ولكن لنكون أكثر دقة، ستحتاج إلى استخدام التجربة والخطأ. ستحصل على $\log_{10} 45 \approx 1.6532$.

لاحظ من التعريف 4.2 أنه ومن أجل أي أساس $b > 0$ $(b \neq 1)$ إذا كان $y = \log_b x$ فإن $x = b^y > 0$ أي أنّ مجال $f(x) = \log_b x$ هو الفترة $(0, \infty)$ وبالمثل، فمدى f هو مستقيم الأعداد الحقيقية بأكمله، $(-\infty, \infty)$.

كما هو الحال مع الدوال الأسيّة، يتوضّح أن قيم الأساس الأكثر فائدة هي 2 و 10 و e. نختصر $\log_{10} x$ عادةً لتصبح $\log x$. وبنفس الطريقة، نختصر $\log_e x$ عادةً لتصبح $\ln x$ (اختصار لمصطلح لوغاريتم طبيعي).

مثال 4.4 إيجاد قيم اللوغاريتمات

من دون استخدام الآلة الحاسبة، حدّد $\log(1/10)$، $\log(0.001)$، $\ln e$ و $\ln e^3$.

الحل بما أنّ $1/10 = 10^{-1}$، $\log(1/10) = -1$. بالمثل، بما أنّ $0.001 = 10^{-3}$، نجد أنّ $\log(0.001) = -3$ بما أنّ $\ln e = \log_e e^1$، $\ln e = 1$. وبالمثل، $\ln e^3 = 3$.

نود أن نؤكد على العلاقة العكسية التي يحددها التعريف 4.2. ونقصد بذلك أنّ b^x و $\log_b x$ دوال متعاكسة لكل $b > 0$ $(b \neq 1)$.

بالتحديد، من أجل الأساس e، لدينا

$$\ln(e^x) = x \text{ لكل } x \quad \text{و} \quad e^{\ln x} = x \text{ لكل } x \tag{4.2}$$

نوضّح هذا على النحو التالي. فلتكن

$$y = \ln x = \log_e x$$

بحسب التعريف 4.2، نجد أنّ

$$x = e^y = e^{\ln x}$$

يمكن أن نستخدم هذه العلاقة بين اللوغاريتمات الطبيعية والأسس لحل المعادلات التي تحتوي على اللوغاريتمات والأسس، كما هو الحال في المثالين 4.5 و 4.6.

مثال 4.5 حل معادلة لوغاريتمية

حل المعادلة $\ln(x+5) = 3$ لكل x.

الحل بأخذ الأس لطرفي المعادلة وكتابة الأشياء بترتيب عكسي (من أجل السهولة)، نجد أنّ

$$e^3 = e^{\ln(x+5)} = x + 5$$

من (4.2). طرح 5 من كلا الطرفين يعطينا

$$e^3 - 5 = x$$

مثال 4.6 حل معادلة أسيّة

حل المعادلة $e^{x+4} = 7$ لكل x.

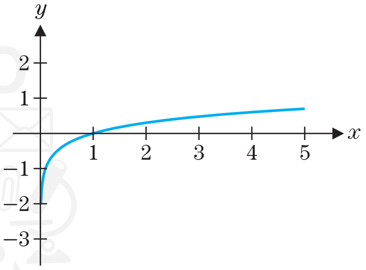
الحل بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين وكتابة الأشياء بترتيب عكسي (من أجل التبسيط)، نجد من (4.2) أنّ

$$\ln 7 = \ln\left(e^{x+4}\right) = x + 4.$$

طرح 4 من كلا الطرفين يعطينا

$$\ln 7 - 4 = x \ \blacksquare$$

كما هو الحال دائمًا، توفّر التمثيلات البيانية ملخصات مرئية ممتازة لأهم خصاص الدالة.



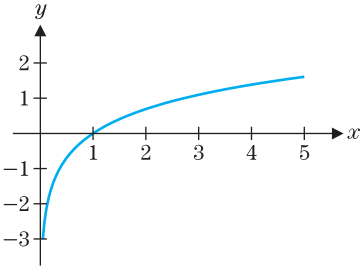
الشكل 1.56a

$y = \log x$

مثال 4.7 تمثيل اللوغاريتمات بيانيًا

ارسم التمثيلات البيانية لـِ $y = \log x$ و $y = \ln x$، وناقش خصائص كل منها بإيجاز.

الحل من الآلة الحاسبة أو الكمبيوتر، ستحصل على التمثيلات البيانية المشابهة للموجودة في الأشكال 1.56a و1.56b. لاحظ أنه يجب أن يكون لكلا التمثيلين البيانيين خط تقارب عند $x = 0$ (لماذا؟)، عبر المحور x عند $x = 1$ وزيادة تدريجية جدًا بزيادة x. وليس للتمثيلين البيانيين أي نقاط على يسار المحور y، لأن $\log x$ و $\ln x$ محددان فقط لـــ $x > 0$. إنّ التمثيلين البيانيين متشابهان جدًا، بالرغم من عدم تطابقهما. $\blacksquare$



الشكل 1.56b

$y = \ln x$

تتضمن النظرية 4.1 ملخصًا للخصائص الممثلة بيانيًا.

> **نظرية 4.1**
>
> لأي أس موجب $b \neq 1$.
>
> (i) $\log_b x$ يُعرف فقط لـــ $x > 0$.
>
> (ii) $\log_b 1 = 0$
>
> (iii) إذا كانت $b > 1$، فإن $\log_b x < 0$ لكل $0 < x < 1$ و $\log_b x > 0$ لكل $x > 1$.

البرهان

(i) لاحظ أنه بما أنّ $b > 0$، تكون $b^y > 0$ لأي y. ما يعني أنّه إذا كان $\log_b x = y$، فإن $x = b^y > 0$.

(ii) وبما أنّ $b^0 = 1$ لأي عدد $b \neq 0$، $\log_b 1 = 0$ (أي، الأس الذي قمت برفع الأساس b إليه للحصول على العدد 1 هو 0).

(iii) ستُبرهن ذلك كتمرين. $\blacksquare$

تشترك كل اللوغاريتمات في مجموعة الخصائص المحدّدة الواردة في النظرية 4.2.

> **نظرية 4.2**
>
> لأي أساس موجب $b \neq 1$ وأي أعداد موجبة x و y، يكون:
>
> (i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
>
> (ii) $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$
>
> (iii) $\log_b\left(x^y\right) = y \log_b x$

كما هو الحال مع معظم القواعد الجبرية، فإن كل خاصية من هذه الخصائص يمكنها تبسيط الحسابات بشكل كبير عند تطبيقها.

مثال 4.8 تبسيط التعابير اللوغاريتمية

اكتب كلًا مما يلي في صورة لوغاريتم منفرد: $\log_2 27^x - \log_2 3^x$ (a) و $\ln 8 - 3\ln(1/2)$ (b).

الحل أولًا، لاحظ أنه يوجد أكثر من ترتيب يمكن العمل به لحل كل مسألة. بالنسبة إلى الجزء (a)، لدينا $27 = 3^3$ وكذلك، $27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$. ذلك يعطينا

$$\begin{aligned}\log_2 27^x - \log_2 3^x &= \log_2 3^{3x} - \log_2 3^x \\ &= 3x\log_2 3 - x\log_2 3 = 2x\log_2 3 = \log_2 3^{2x}\end{aligned}$$

بالنسبة للجزء (b)، لاحظ أنّ $8 = 2^3$ و $1/2 = 2^{-1}$. إذن،

$$\begin{aligned}\ln 8 - 3\ln(1/2) &= 3\ln 2 - 3(-\ln 2) \\ &= 3\ln 2 + 3\ln 2 = 6\ln 2 = \ln 2^6 = \ln 64\end{aligned}$$

في بعض الحالات، يكون من المفيد استخدام قواعد اللوغاريتمات لتبسيط تعبير محدد، كما في المثال 4.9.

مثال 4.9 بسط التعبير اللوغاريتمي

استخدم قواعد اللوغاريتمات لتبسيط التعبير $\ln\left(\frac{x^3y^4}{z^5}\right)$.

الحل من النظرية 4.2، لدينا

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x^3y^4}{z^5}\right) &= \ln(x^3y^4) - \ln(z^5) = \ln(x^3) + \ln(y^4) - \ln(z^5) \\ &= 3\ln x + 4\ln y - 5\ln z\end{aligned}$$

باستخدام قواعد الأسس واللوغاريتمات، يمكننا إعادة صياغة أي دالة أسيّة كدالة أسيّة لها الأساس e على النحو التالي. لأي أساس $a > 0$ لدينا

$$\boxed{a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln a}} \qquad (4.3)$$

ينتج ذلك من النظرية 4.2 (iii) وحقيقة أنّ $e^{\ln y} = y$ لكل $y > 0$.

مثال 4.10 إعادة صياغة الدالة الأسيّة كدالة أسيّة لها الأساس e

أعد صياغة الدوال الأسيّة 2^x، 5^x و $(2/5)^x$ كدوال أسيّة لها أساس e.

الحل من (4.3)، لدينا

$$2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x\ln 2},$$

$$5^x = e^{\ln(5^x)} = e^{x\ln 5}$$

و

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = e^{\ln[(2/5)^x]} = e^{x\ln(2/5)}$$

بما أنه يمكننا إعادة صياغة دالة أسيّة لها أساس موجب في ما يتعلق بدالة أسيّة لها الأساس e فإنه يمكننا إعادة صياغة أي لوغاريتم في ما يتعلق باللوغاريتمات الطبيعية، على النحو التالي. سنوضّح في ما بعد أنّ

$$\boxed{\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \text{، اذا } b > 0\text{، } b \neq 1 \text{ و } x > 0.} \qquad (4.4)$$

افترض أنّ $y = \log_b x$ إذن بالتعريف 4.2، يصبح لدينا $x = b^y$. بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا طرفي هذه المعادلة، نحصل بناء على النظرية 4.2 (iii) على

$$\ln x = \ln(b^y) = y\ln b$$

بقسمة كلا الطرفين على $\ln b$ (حيث $b \neq 1$، $\ln b \neq 0$) نحصل على

$$y = \frac{\ln x}{\ln b}$$

لتتكون (4.4).

تُعتبر المعادلة (4.4) مفيدة في حساب اللوغاريتمات ذات الأساسات التي تختلف عن e أو 10. وهذا ضروري لأن الآلة الحاسبة الخاصة بك تحتوي، على الأرجح، على مفاتيح لــ $\ln x$ و $\log x$ فقط. ولتوضيح هذه الفكرة نناقش المثال 4.11.

مثال 4.11 تقريب قيمة اللوغاريتمات

قم بتقريب قيمة $\log_7 12$

الحل من (4.4)، لدينا

$$\log_7 12 = \frac{\ln 12}{\ln 7} \approx 1.2769894$$

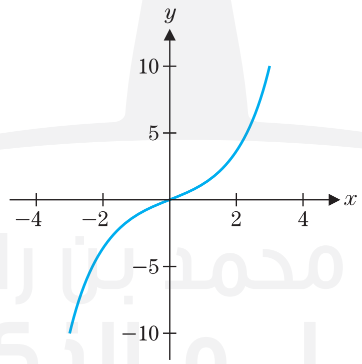
قوس جيت واي

الدوال الزائدية

يوجد تركيبان خاصان من الدوال الأسيّة، يُطلق عليهما دوال الجيب الزائدي(Hyperbolic Sine) وجيب التمام الزائدي (Hyperbolic Cosine). ولهذه الدوال تطبيقات هامة. على سبيل المثال، تم بناء قوس جيت واي في ميزوري على شكل تمثيل بياني لجيب تمام زائدي. (انظر الصورة الموجودة في الهامش). تُحدد دالة الجيب الزائدي [التي يُرمز لها بــ $\sinh(x)$] ودالة جيب التمام الزائدي [التي يُرمز لها بــ $\cosh(x)$] بالمعادلات

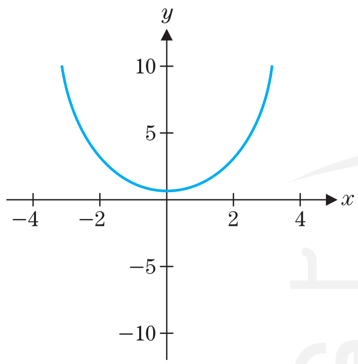
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

التمثيلات البيانية لتلك الدوال موضحة في الأشكال 1.57a و1.57b. غالبًا ما يكون استخدام الدوال الزائدية (بما في ذلك دالة الظل الزائدي $\tanh x$، المحددة بالطريقة المعتادة) مريحًا عند حل المعادلات. سنكتفي الآن بالتحقق من العديد من الخصائص الأساسية التي تحققها الدوال الزائدية بالتوازي مع نظائرها المثلثية.



الشكل 1.57a

$y = \sinh x$



الشكل 1.57b

$y = \cosh x$

مثال 4.12 حساب قيم الدوال الزائدية

احسب $f(0)$، $f(1)$، و $f(-1)$. وحدد طريقة مقارنة $f(x)$ و $f(-x)$ لكل دالة: (a) $f(x) = \sinh x$ و (b) $f(x) = \cosh x$.

الحل بالنسبة للجزء (a)، لدينا $\sinh 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$. لاحظ أن هذا يعني أنّ $\sinh 0 = \sin 0 = 0$. كذلك، لدينا $\sinh 1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \approx 1.18$، بينما $\sinh(-1) = \frac{e^{-1} - e^1}{2} \approx -1.18$. لاحظ أنّ $\sinh(-1) = -\sinh 1$. في الحقيقة، وبالنسبة لأي x،

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \frac{-(e^{x} - e^{-x})}{2} = -\sinh x$$

[تنطبق القاعدة نفسها على دالة الـ sine: $\sin(-x) = -\sin x$.] بالنسبة للجزء (b)، لدينا

$\cosh 0 = \frac{e^{0} + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$. لاحظ أنّ هذا يعني أنّ $\cosh 0 = \cos 0 = 1$. كذلك،

لدينا، $\cosh 1 = \frac{e^{1} + e^{-1}}{2} \approx 1.54$، بينما $\cosh(-1) = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} \approx 1.54$. لاحظ أنّ

$\cosh(-1) = \cosh 1$. في الحقيقة، وبالنسبة لأي x

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

[تنطبق القاعدة نفسها على دالة الـــ cosine : $\cos(-x) = \cos x$.] ■

ملاءمة المنحنى للبيانات

أنت على دراية بفكرة أنّ نقطتين تحددان خطًا مستقيمًا. وكما نلاحظ في المثال 4.13، فإن النقطتين ستحددان أيضًا الدالة الأسيّة.

مثال 4.13 مطابقة البيانات لمنحنى الدالة الأسيّة

أوجد الدالة الأسيّة من الصورة $f(x) = ae^{bx}$ التي تمر بالنقطتين $(0, 5)$ و $(3, 9)$.

الحل يجب أن نجد الحل للحصول على a و b، باستخدام خواص اللوغاريتمات والدوال الأسيّة. أولًا، إذا كان للتمثيل البياني أن يمرّ بالنقطة $(0, 5)$، فإن ذلك يعني

$$5 = f(0) = ae^{b \cdot 0} = a$$

لذلك $a=5$. بعد ذلك، وإذا كان للتمثيل البياني أن يمرّ بالنقطة $(3, 9)$، يجب أن يكون لدينا

$$9 = f(3) = ae^{3b} = 5e^{3b}$$

لإيجاد الحل للحصول على b، نقسم كلا طرفي المعادلة على 5 ونأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين، ما يعطينا الناتج

$$\ln\left(\frac{9}{5}\right) = \ln e^{3b} = 3b$$

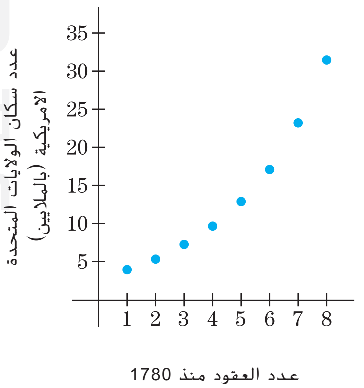
من (4.2). أخيرًا، تعطينا القسمة على 3 قيمة b:

$$b = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{5}\right)$$

بناءً عليه، $f(x) = 5e^{\frac{1}{3}\ln(9/5)\,x}$. ■

العام	عدد سكان
1790	3,929,214
1800	5,308,483
1810	7,239,881
1820	9,638,453
1830	12,866,020
1840	17,069,453
1850	23,191,876
1860	31,443,321

تأمل بيانات عدد سكان الولايات المتحدة منذ 1790 حتى 1860، الواردة في الجدول المرفق. يمكن الاطلاع على مخطط لنقاط البيانات في الشكل 1.58 (حيث يمثل المقياس الرأسي عدد السكان بالمليون). يوضح ذلك أنّ عدد السكان كان في زيادة، مع تضاعف الزيادات في كل عقد. إذا رسمت منحنى تخيليًا خلال هذه النقاط، من المحتمل أن تحصل على صورة لقطع مكافئ أو ربما النصف الأيمن لمكعب أو دالة أسيّة. وإليك السؤال: هل من الأفضل تمثيل هذه البيانات باستخدام الدالة التربيعية أم الدالة التكعيبية أم الدالة الأسيّة أم ماذا؟



الشكل 1.58

يمكننا استخدام خصائص اللوغاريتمات من النظرية 4.2 للمساعدة في تحديد ما إذا كان من الأفضل تمثيل مجموعة محددة من البيانات بواسطة دالة كثيرة الحدود أم دالة أسيّة، على النحو التالي. افترض أنّ البيانات تأتي بالفعل من دالة أسيّة. لتكن $y = ae^{bx}$ (أي أنّ البيانات تقع على التمثيل البياني لهذه الدالة الأسيّة). إذن،

$$\ln y = \ln(ae^{bx}) = \ln a + \ln e^{bx} = \ln a + bx$$

إذا رسمت تمثيلاً بيانيًا جديدًا، حيث يوضّح المحور الأفقي قيم x ويوضّح المحور الرأسي قيم $\ln y$ فإن التمثيل البياني سيكون $\ln y = bx + c$ (حيث الثابت $c = \ln a$). من ناحية أخرى، افترض أنّ البيانات أتت بالفعل من دالة كثيرة الحدود. إذا كان $y = bx^{n}$ (لأي n)، فلاحظ أنّ

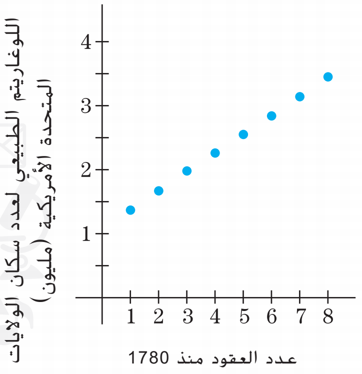
$$\ln y = \ln(bx^{n}) = \ln b + \ln x^{n} = \ln b + n\ln x$$

في هذه الحالة، سيبدو التمثيل البياني للمحورين الأفقي والرأسي الموافق لـ x و $\ln y$ على التوالي مثل التمثيل البياني للوغاريتم $\ln y = n \ln x + c$ وهذه التمثيلات البيانية شبه اللوغاريتمية (أي، التمثيلات البيانية لـ $\ln y$ مقابل x) تسمح لنا بتمييز التمثيل البياني للدالة الأسيّة من التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود: تصبح التمثيلات البيانية خطوطًا مستقيمة، بينما تصبح التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود (من الدرجة ≥ 1) منحنيات لوغاريتمية. وعادةً ما يستخدم العلماء والمهندسون التمثيلات البيانية شبه اللوغاريتمية لمساعدتهم في فهم الظواهر الفيزيائية ممثلة ببعض البيانات.

مثال 4.14 استخدام التمثيل البياني شبه اللوغاريتمي لتعريف نوع الدالة

حدد إذا ما كان عدد سكان الأمم المتحدة منذ 1790 حتى 1860 يتزايد كدالة أسيّة أم كثيرة الحدود.

الحل كما ذكر سالفًا، تكمن الخدعة في رسم تمثيل بياني شبه لوغاريتمي. أي أنه بدلًا من رسم مخطط لـ $(1, 3.9)$ بوصفها نقطة البيانات الأولى، ارسم مخططًا لـ $(1, \ln 3.9)$ وهكذا. يرد المخطط شبه اللوغاريتمي لمجموعة البيانات هذه في الشكل 1.59. بالرغم من أن النقاط ليست مستقيمة بالضبط (كيف تثبت ذلك؟). إلا أنّ التمثيل البياني جدًا إلى الخط المستقيم يتقاطع مع محور $\ln y$ عند القيمة 1 وميله 0.3. تستنتج من ذلك أنه من الأنسب تمثيل عدد السكان بواسطة دالة أسيّة. وسيكون النموذج الأسي $y = P(t) = ae^{bt}$، حيث يمثّل t عدد العقود منذ 1780. وهنا، يكون b المنحنى ويكون $\ln a$ تقاطع $\ln y$ الخط في التمثيل البياني شبه اللوغاريتمي. أي أنّ، $b \approx 0.3$ و $\ln a \approx 1$ (لماذا؟). لذلك $a \approx e$. إذن، يتم تمثيل عدد السكان بواسطة $P(t) = e \cdot e^{0.3t}$ مليون. ■



الشكل 1.59

التمارين 1.4

تمارين الكتابة

1. بدءًا من خلية واحدة، تكون الإنسان بفضل 50 جيلًا من الانقسامات الخلوية. اشرح لماذا بعد انقسامات n توجد خلايا 2^n. خمّن عدد الخلايا الموجودة بعد 50 انقسامًا، ثم احسب 2^{50}. ناقش باختصار كيفية زيادة الدوال الأسيّة بسرعة.

2. اشرح سبب تشابه الرسوم البيانية لـ $f(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3. قارن بين $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ لـ $x = \frac{1}{2}$، $x = 1$، $x = 2$، $x = 3$ و $x = 4$. بشكل عام، أي الدوال أكبر لقيم x الكبيرة؟ لقيم x الصغيرة؟

4. قارن بين $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 3^x$ لـ $x = -2$، $x = -\frac{1}{2}$، $x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$. بشكل عام، أي الدوال أكبر لقيم x السالبة؟ لقيم x الموجبة؟

في التمارين 1–6، حول كل تعبير أسي إلى صورة كسرية أو جذرية.

1. 2^{-3} 2. 4^{-2} 3. $3^{1/2}$

4. $6^{2/5}$ 5. $5^{2/3}$ 6. $4^{-2/3}$

في التمارين 7–12، حول كل تعبير إلى صورة أسيّة.

7. $\frac{1}{x^2}$ 8. $\sqrt[3]{x^2}$ 9. $\frac{2}{x^3}$

10. $\frac{4}{x^2}$ 11. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 12. $\frac{3}{2\sqrt{x^3}}$

في التمارين 13–16، أوجد القيمة الصحيحة للتعبير الموضح دون استخدام آلة حاسبة.

13. $4^{3/2}$ 14. $8^{2/3}$ 15. $\frac{\sqrt{8}}{2^{1/2}}$ 16. $\frac{2}{(1/3)^2}$

في التمارين 17–20، استخدم آلة حاسبة أو كمبيوتر لتقدير كل قيمة.

17. $2e^{-1/2}$ 18. $4e^{-2/3}$

19. $\frac{12}{e}$ 20. $\frac{14}{\sqrt{e}}$

في التمارين 26–21، ارسم التمثيلات البيانية للدوال الموضّحة وقارن التمثيلات البيانية.

21. $f(x) = e^{2x}$ and $g(x) = e^{3x}$

22. $f(x) = 2e^{x/4}$ and $g(x) = 4e^{x/2}$

23. $f(x) = 3e^{-2x}$ and $g(x) = 2e^{-3x}$

24. $f(x) = e^{-x^2}$ and $g(x) = e^{-x^2/4}$

25. $f(x) = \ln 2x$ and $g(x) = \ln x^2$

26. $f(x) = e^{2\ln x}$ and $g(x) = x^2$

في التمارين 36–27، قم بحل المعادلة الموضحة للحصول على x.

27. $e^{2x} = 2$
28. $e^{4x} = 3$
29. $e^x(x^2 - 1) = 0$
30. $xe^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$
31. $4\ln x = -8$
32. $x^2 \ln x - 9\ln x = 0$
33. $e^{2\ln x} = 4$
34. $\ln(e^{2x}) = 6$
35. $e^x = 1 + 6e^{-x}$
36. $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 2$

في التمرينين 37 و38، استخدم تعريف اللوغاريتم لتحديد القيمة.

37. (a) $\log_3 9$ (b) $\log_4 64$ (c) $\log_3 \frac{1}{27}$

38. (a) $\log_4 \frac{1}{16}$ (b) $\log_4 2$ (c) $\log_9 3$

في التمرينين 39 و 40، استخدم المعادلة (4.4) لتقريب القيمة.

39. (a) $\log_3 7$ (b) $\log_4 60$ (c) $\log_3 \frac{1}{24}$

40. (a) $\log_4 \frac{1}{10}$ (b) $\log_4 3$ (c) $\log_9 8$

في التمارين 46–41، أعد صياغة التعبير كلوغاريتم منفرد (واحد).

41. $\ln 3 - \ln 4$
42. $2\ln 4 - \ln 3$
43. $\frac{1}{2}\ln 4 - \ln 2$
44. $3\ln 2 - \ln \frac{1}{2}$
45. $\ln \frac{3}{4} + 4\ln 2$
46. $\ln 9 - 2\ln 3$

في التمرينات 50–47، أوجد دالة بالشكل $f(x) = ae^{bx}$ باستخدام قيم الدالة الموضحة.

47. $f(0) = 2, f(2) = 6$
48. $f(0) = 3, f(3) = 4$
49. $f(0) = 4, f(2) = 2$
50. $f(0) = 5, f(1) = 2$

في التمرينات 54–51، ارجع إلى الدوال الزائدية.

51. بيّن أن مدى الــ *cosh* هو $\cosh x \ge 1$ وأنّ مدى الــ sinh هو مجمل خط الاعداد.

52. بيّن أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ لكل x

53. أوجد كل حلول $\sinh(x^2 - 1) = 0$

54. أوجد كل حلول $cosh\,(3x + 2) = 0$

التطبيقات

مطعم للوجبات السريعة يعطي لكل زبون تذكرة مباراة. ومع كل تذكرة، يكون لدى الزبون فرصة 1 في الــ 10 للفوز بوجبة مجانية. إذا كنت ذهبت إلى المطعم 10 مرات، فقيم فرصك في الفوز بوجبة مجانية واحدة على الأقل. الاحتمال الدقيق هو $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$. احسب هذا العدد وقارنه بتخمينك.

56. في التمرين 55، إذا كان لديك 20 تذكرة بفرصة 1 في الــ 20 للفوز، فهل تتوقع زيادة أم انخفاض احتمال فوزك مرة واحدة على الأقل؟ احسب الاحتمال $1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{20}$ لتكتشف ذلك.

57. بشكل عام، إذا كان لديك n فرصة للفوز بــ 1 في الــ n فرصة في كل محاولة، فإن احتمال الفوز مرة واحدة على الأقل هو $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. بما أنّ n يزداد، فما هو العدد الذي يقترب منه هذا الاحتمال؟ (ارشاد: هناك سبب جيد لوجود هذا السؤال في هذا القسم!)

58. إذا كان $y = a \cdot x^m$، بيّن أنّ $\ln y = \ln a + m\ln x$. إذا كان $v = \ln y$ و $u = \ln x$ و $b = \ln a$، بيّن أنّ $v = mu + b$. اشرح السبب في أنّ التمثيل البياني لــ v كدالة لــ u سيكون خطًا مستقيمًا. يُطلق على هذا التمثيل البياني مخطط **لوغاريتم-لوغاريتم** لــ y و x.

59. للبيانات المعطاة، احسب $v = \ln y$ و $u = \ln x$، وارسم النقاط (u, v). أوجد الثوابت m و b بحيث $v = mu + b$ واستخدم نتائج التمرين 58 لإيجاد ثابت a بحيث $y = a \cdot x^m$.

x	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
y	14.52	17.28	20.28	23.52	27.0	30.72

60. كرر التمرين 59 للبيانات المعطاة.

x	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
y	9.37	10.39	11.45	12.54	13.66	14.81

61. قم بإنشاء مخطط لوغاريتم- لوغاريتم (انظر التمرين 58) لبيانات سكان الولايات المتحدة في المثال 4.14. مقارنةً بالمخطط شبه اللوغاريتم للبيانات في الشكل 1.59، هل يبدو المخطط لوغاريتم- لوغاريتم خطيًا؟ بناءً على ذلك، هل من الأفضل تمثيل بيانات السكان بواسطة دالة أسيّة أم دالة كثيرة الحدود (ذات قوة جبرية)؟

62. قم بإنشاء مخطط شبه لوغاريتم للبيانات في التمرين 59. مقارنةً بمخطط لوغاريتم- لوغاريتم الذي أنشأته بالفعل، هل يبدو هذا المخطط خطيًا؟ بناءً على ذلك، هل من الأفضل تمثيل هذه البيانات بواسطة دالة أسيّة أم دالة ذات قوة جبرية؟

63. يحدد تركيز $[H^+]$ أيونات الهيدروجين الحرة في المحلول الكيميائي درجة حموضة pH المحلول، على النحو المحدد بــ $pH = -\log[H^+]$ أوجد $[H^+]$ إذا كان pH يساوي (a) 7 و(b) 8 و(c) 9. لكل زيادة في pH بمقدار 1، ما هو العامل الذي يغير $[H^+]$؟

64. تُعتبر العصارة المعدية حمضًا، بـــ pH يبلغ 2.5 تقريبًا. يُعتبر الدم قلويًا، بـــ pH يبلغ 7.5 تقريبًا. قارن بين تركيزات أيونات الهيدروجين في المادتين (انظر التمرين 63).

65. تُحدد قوة ريختر M لزلزال ما من حيث الطاقة E بالجول المتحررة بسبب الزلزال، باستخدام $\log_{10} E = 4.4 + 1.5M$ أوجد طاقة الزلزال بالقوى (a) 4 و (b) 5 و6 (c). لكل زيادة في M بمقدار 1، ما هو العامل الذي يغيّر E ؟

66. يُحدد مستوى ديسبل للضوضاء من حيث شدة I الضوضاء، باستخدام $\text{dB} = 10\log(I/I_0)$. هنا، $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$ هي شدة الصوت المسموع بالكاد. احسب مستويات شدة الأصوات بقوة (a) $\text{dB} = 80$ و (b) $\text{dB} = 90$ و (c) $\text{dB} = 100$. لكل زيادة بمقدار 1 ديسبل، ما هو العامل الذي يغيّر I؟

67. يبلغ طول قوس 630 ft ويبلغ عرضه 630 ft. (يعتقد أغلب الناس أنه يبدو طوله أكبر من عرضه). نموذج واحد لمخطط القوس هو $y = 757.7 - 127.7\cosh\left(\frac{x}{127.7}\right)$ لـ $y \geq 0$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتقريب تقاطعات x و y وحدد إذا ما كانت القياسات الأفقية والرأسيّة للنموذج صحيحة أم لا.

68. لتمثيل مخطط قوس باستخدام قطع مكافئ، يمكنك البدء بـــ $y = -c(x + 315)(x - 315)$ لثابت ما c. اشرح سبب إعطاء ذلك التقاطعات x الصحيحة. حدد الثابت c الذي يعطي y تقاطعًا قدره 630. ارسم cos المكافئ والزائدي في التمرين 67 على المحاور نفسها. هل التمثيلات البيانية متطابقة تقريبًا أم مختلفة جدًا؟

69. في البيانو القياسي، يحدث A أسفل C الأوسط موجة صوتية تكرارها 220Hz (دورة في الثانية). تكرار A الأعلى بمقدار الجواب 440Hz. بشكل عام، ينتج عن مضاعفة التكرار نفس نغمة الجواب الأعلى. أوجد الصيغة الأسيّة للتكرار f كدالة لعدد الجوابات x أعلى A الموجود أسفل C الأوسط.

70. توجد 12 نغمة في الجواب بالبيانو القياسي. C الأوسط عبارة عن 3 نغمات فوق A (انظر التمرين 69). إذا تم ضبط النغمات بالتساوي، فهذا يعني أن C الأوسط أعلى من A بربع جواب. استخدم $x = \frac{1}{4}$ في صيغتك من التمرين 69 لتقدير تردد C الأوسط.

تمرينات استكشافية

1. مثّل $y = x^2$ و $y = 2^x$ بيانيًا وقرب الحلين الموجبين للمعادلة $x^2 = 2^x$. مثّل $y = x^3$ و $y = 3^x$ بيانيًا، وقرب الحلين الموجبين للمعادلة $x^3 = 3^x$. اشرح لماذا $x = a$ ستكون دائمًا حلًا لـ$x^a = a^x$ و$a > 0$. ما هو المختلف بشأن دور $x = 2$ كحلٍ لـ $x^2 = 2^x$ مقارنةً بدور $x = 3$ كحلٍ لـ $x^3 = 3^x$؟ لتحديد قيمة a التي يحدث عندها التغيير، قم بحل $x^a = a^x$ بيانيًا للحصول على $a = 2.1, 2.2, \ldots, 2.9$. ولاحظ أن $a = 2.7$ و $a = 2.8$ يعملان بشكل مختلف. استمر في تضييق فاصل التغيير عن طريق اختبار $a = 2.71, 2.72, \ldots, 2.79$. ثم خمن القيمة الدقيقة لـ a.

2. مثّل $y = \ln x$ بيانيًا وصف السلوك بالقرب من $x = 0$. ثم مثّل $y = x\ln x$ بيانيًا وصف السلوك بالقرب من $x = 0$. كرر ذلك.

لـ $y = x^2\ln x$ و $y = x^{1/2}\ln x$ و $y = x^a\ln x$ لمجموعة مختلفة من الثوابت الموجبة a. لأن المعادلة "تزيد عن حدها"، عند $x = 0$ فإننا نفترض أنّ $y = \ln x$ لها موقع **تفرد** عند $x = 0$ ويكون **ترتيب** موقع التفرد عند $x = 0$ لدالة ما $f(x)$ هو القيمة الأصغر لـ a بحيث لا يكون $y = x^a f(x)$ موقع تفرد عند $x = 0$. حدد ترتيب موقع التفرد عند $x = 0$ بالنسبة لـ (a) $f(x) = \frac{1}{x}$ و (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و (c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$. كلما ارتفع ترتيب موقع التفرد، كلما كان موقع التفرد "سيئًا". بناءً على عملك، ما مدى سوء موقع التفرد لـ $y = \ln x$ عند $x = 0$؟

الدرس

1-5 تحويلات الدوال

أنت الآن على علم بقائمة طويلة من الدوال: كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية والأسية واللوغاريتمية. من أحد أهم أهداف هذا المقرر فهم خصائص هذه الدوال بصورة أكمل. وستقوم، إلى حد كبير، ببناء فهمك عن طريق دراسة بعض الخصائص الهامة للدوال.

فنحن نتوسع في قائمة الدوال الخاصة بنا من خلال الجمع بينها. وسنبدأ بطريقة مباشرة بالتعريف 5.1.

التعريف 5.1

افترض أنّ f و g عبارة عن دالتين بمجالات D_1 و D_2، على التوالي. تُحدد الدوال $f+g$، $f-g$ و $f \cdot g$ عن طريق

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

و

لكل x في $D_1 \cap D_2$ (أي $x \in D_1$، و $x \in D_2$). تُحدد الدالة $\frac{f}{g}$ عن طريق

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

لكل x في $D_1 \cap D_2$ بحيث $g(x) \neq 0$.

في المثال 5.1، سندرس تركيبات مختلفة لعدة دوال بسيطة.

المثال 5.1 تركيب الدوال

إذا كانت $f(x) = x - 3$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ فحدد الدوال $f+g$ ، $3f-g$ و $\frac{f}{g}$ مع ذكر مجال كل منها.

الحل أولًا، لاحظ أن مجال f هو خط الاعداد ومجال g هو $x \geq 1$. الآن،

$$(f+g)(x) = x - 3 + \sqrt{x-1}$$

و

$$(3f-g)(x) = 3(x-3) - \sqrt{x-1} = 3x - 9 - \sqrt{x-1}$$

لاحظ أنّ مجال $(f+g)$ و $(3f-g)$ هو $\{x|x \geq 1\}$. لـ

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{\sqrt{x-1}}$$

المجال هو $\{x|x > 1\}$، حيث أضفنا القيد $x \neq 1$ لتجنب القسمة على 0. ■

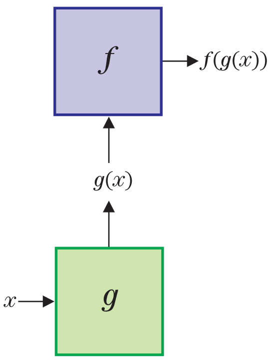
التعريف 5.1 والمثال 5.1 يبينان لنا كيفية عمل متسلسلة حسابية باستخدام الدوال. العمل على دوال لا تستجيب مباشرةً إلى التسلسل الحسابي هو تركيب لدالتين.

التعريف 5.2

يُحدد **تركيب** الدوال f و g، المكتوب بالشكل $f \circ g$ ، عن طريق

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لكل x حيث x في مجال g و $g(x)$ في مجال f .



$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

تركيب دالتين عبارة عن عملية من خطوتين، على النحو المُشار إليه سالفًا في المخطط الهامشي. فانتبه لملاحظة ما يقوله هذا التعريف. لا سيما، لـ $f(g(x))$ التي يجب تعريفها، ستحتاج أولًا إلى تعريف $g(x)$، من ثم فيجب أن تكون x في مجال g بعد ذلك، يجب تعريف f عند النقطة $g(x)$ لذلك يجب أن يكون العدد $g(x)$ في مجال f.

المثال 5.2 إيجاد تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$. فحدد الدوال $f \circ g$ و $g \circ f$ مع ذكر مجال كل منها.

الحل أولًا، لدينا

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2})$$
$$= (\sqrt{x-2})^2 + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$$

من المغري كتابة أن مجال $f \circ g$ هو مجمل الخط الفعلي، ولكن انظر بمزيد من العناية. ولاحظ أنه بالنسبة لتكون x في مجال g، يجب أن يكون لدينا $x \geq 2$. إنّ مجال f هو مجمل خط الاعداد، من ثم فلا يضيف ذلك المزيد من القيود على مجال $(f \circ g)$. وبالرغم من أن التعبير النهائي $x - 1$ يُحدد لكل x. إلا أنّ مجال $(f \circ g)$ هو $\{x \mid x \geq 2\}$.

بالنسبة للتركيب الثاني،

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1)$$
$$= \sqrt{(x^2+1) - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$$

يتطلب الجذر التربيعي الناتج $x^2 - 1 \geq 0$ أو $|x| \geq 1$. وبما أنّ الدالة الداخلية f تُحدد لكل x، فإن مجال $g \circ f$ هو $\{x||x| \geq 1\}$، الذي نكتبه عند تدوين الفترة كـ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. ■

بتقدمك في التفاضل والتكامل، ستحتاج في كثير من الأحيان إلى إدراك أن الدالة المعطاة عبارة عن تركيب لدوال أبسط.

المثال 5.3 تحديد تركيبات الدوال

حدد الدوال f و g بحيث يمكن كتابة الدالة المعطاة كـ $(f \circ g)(x)$ لكل من (a) $\sqrt{x^2+1}$ و (b) $(\sqrt{x}+1)^2$ و (c) $\sin x^2$ و (d) $\cos^2 x$. لاحظ أنه توجد أكثر من إجابة محتملة لكل دالة.

الحل (a) لاحظ أن x^2+1 توجد داخل الجذر التربيعي. إذن، فالخيار الأول هو أن يكون لديك $g(x) = x^2+1$ و $f(x) = \sqrt{x}$.

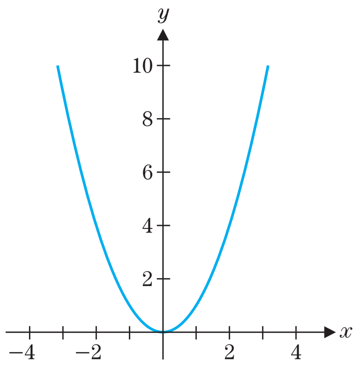
(b) هنا، $\sqrt{x}+1$ يوجد داخل التربيع. إذن، فالخيار الأول هو $g(x) = \sqrt{x}+1$ و $f(x) = x^2$.

(c) يمكن إعادة كتابة الدالة كـ $\sin(x^2)$، مع وجود x^2 بوضوح داخل دالة الجيب. إذن، $g(x) = x^2$ و $f(x) = \sin x$ هو الخيار الأول.

(d) الدالة كما وردت باختصار لـ $(\cos x)^2$. إذن، فالخيار الأول هو $g(x) = \cos x$ و$f(x) = x^2$

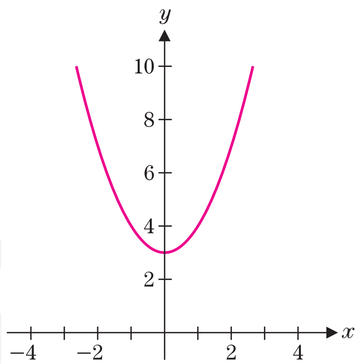
بشكل عام، من الصعب تقريبًا أخذ التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$ وإنتاج التمثيل البياني $f(g(x))$. إذا كانت إحدى الدوال f و g خطية، مع ذلك، يوجد إجراء بياني بسيط لتمثيل التركيب بيانيًا. بحيث تُستكشف **التحويلات الخطية** في بقية هذا القسم.

الحالة الأولى هي أخذ التمثيل البياني لـ $f(x)$ وإنتاج التمثيل البياني لـ $f(x)+c$ لثابت ما c. ينبغي أن تتمكن من استنتاج النتيجة العامة من المثال 5.4.



الشكل 1.60a

$y = x^2$



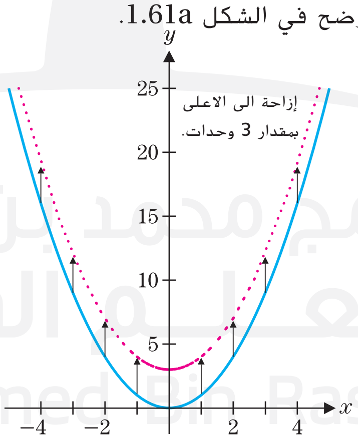
الشكل 1.60b

$y = x^2+3$

المثال 5.4 الإزاحة الرأسية لتمثيل بياني

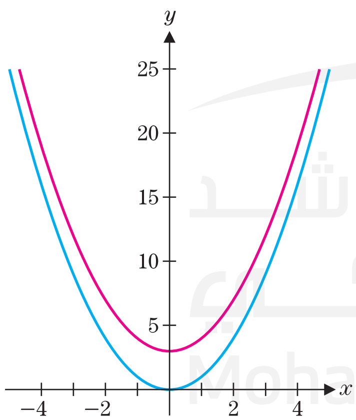
مثّل $y = x^2$ و $y = x^2+3$ بيانيًا؛ وقم بالمقارنة بين التمثيلات البيانية.

الحل قد تتمكن من رسم ذلك يدويًا. ينبغي أن تحصل على تمثيلات بيانية مشابهة للتمثيلات البيانية الموجودة في الأشكال 1.60a و 1.60b. يبين كلا الشكلين قطوعًا مكافئة تفتح لأعلى. يتمثل الاختلاف الرئيسي الواضح في أن x^2 له تقاطع y قيمته 0 و x^2+3 له تقاطع y قيمته 3. في الحقيقة، وبالنسبة لأي قيمة معطاة لـ x، سيتم رسم النقطة الموجودة على التمثيل البياني $y = x^2+3$ أعلى بمقدار 3 وحدات عن النقطة المطابقة على التمثيل البياني $y = x^2$. وهذا موضح في الشكل 1.61a.



الشكل 1.61a

إزاحة التمثيل إلى الأعلى



الشكل 1.61b

$y = x^2$ و $y = x^2+3$

في الشكل 1.61b، يتضح أن التمثيلان البيانيان على المحاور نفسها. للعديد من الأشخاص، لا يبدو التمثيل البياني العلوي مشابهًا للتمثيل البياني السفلي وذلك لأن السفلي قد تحرك 3 وحدات. إلا أن هذا مجرد خداع بصري يؤسف له. عادةً ما يقدر البشر المسافة بين المنحنيات، من الناحية العقلية، على أنها أقصر مسافة بين المنحنيات. وبالنسبة لهذه القطوع المكافئة، تكون أقصر مسافة رأسية عند $x = 0$ إلا أنها تصبح أفقية على نحو متزايد عندما تتحرك بعيدًا عن المحور y. وتقاس المسافة البالغة 3 بين القطوع المكافئة رأسيًا.

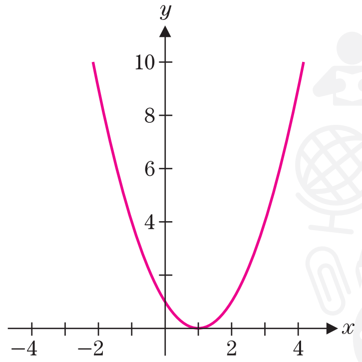
بشكل عام، يكون التمثيل البياني لـ $y = f(x) + c$ مشابهًا للتمثيل البياني لـ $y = f(x)$ بعد إزاحته إلى أعلى (إذا كان $c > 0$) أو إلى أسفل (إذا كان $c < 0$) بمقدار $|c|$ وحدات. عادةً ما نشير إلى $f(x) + c$ بوصفه ازاحة رأسية (لأعلى أو لأسفل بمقدار $|c|$ وحدات).

نستكشف في المثال 5.5 ما يحدث إذا ما أضفنا ثابتًا إلى x.

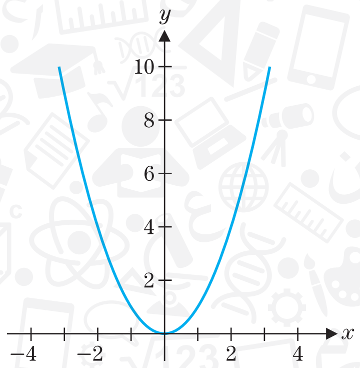
المثال 5.5 الإزاحة الأفقية

قارن بين التمثيلات البيانية لـ $y = x^2$ و $y = (x-1)^2$.

الحل التمثيلات البيانية موضحة في الأشكال 1.62a و 1.62b على التوالي.

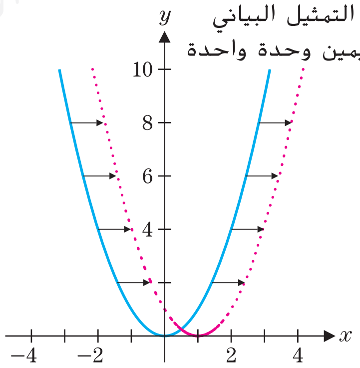


الشكل 1.62b
$y = (x-1)^2$



الشكل 1.62a
$y = x^2$

لاحظ أنّ التمثيل البياني لـ $y = (x-1)^2$ يبدو مشابهًا للتمثيل البياني لـ $y = x^2$، إلا أنه انتقل بمقدار وحدة واحدة نحو اليمين. وهذا أمر معقول للسبب التالي. اختر قيمة لـ x. لنقل، $x = 13$. قيمة $(x-1)^2$ عند $x = 13$ هي 12^2. نفس قيمة x^2 نفسها عند $x = 12$ ، وحدة واحدة جهة اليسار. لاحظ أنّ هذا النمط نفسه يستمر لأيّ x تقوم باختياره. ويتضح ذلك من المخطط المتزامن للدالتين (انظر الشكل 1.63).



الشكل 1.63
إزاحة التمثيل إلى اليمين

بشكل عام، وبالنسبة لـ $c > 0$، يكون التمثيل البياني لـ $y = f(x - c)$ هو التمثيل البياني نفسه لـ $y = f(x)$ بعد إزاحته بمقدار c وحدة جهة اليمين. وبالمثل، (مرةً أخرى، بالنسبة لـ $c > 0$). تحصل على التمثيل البياني لـ $y = f(x + c)$ بتحريك التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ جهة اليسار بمقدار c وحدة. عادةً ما نشير إلى $f(x - c)$ و $f(x + c)$ بوصفهما **الإزاحة الأفقية** (اليمنى واليسرى، على التوالي، بمقدار c وحدة).

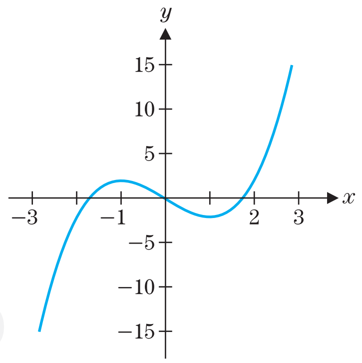
لتفادي اللبس في ما يتعلق بطريقة ازاحة التمثيل البياني لـ $y = f(x)$، ركّز على ما يجعل البرهان (المقدار داخل الأقواس) صفر. بالنسبة لـ $f(x)$، هذا هو $x = 0$. ولكن بالنسبة لـ $f(x - c)$ يجب أن يكون لديك $x = c$ للحصول على $f(0)$ [أي تكون قيمة y هي نفسها قيمة $f(x)$ عندما $x = 0$]. هذا يعني أن النقطة الموجودة في التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ عند $x = 0$ تطابق النقطة الموجودة على التمثيل البياني لـ $y = f(x - c)$ عند $x = c$.

المثال 5.6 مقارنة بين الإزاحة الرأسية والأفقية

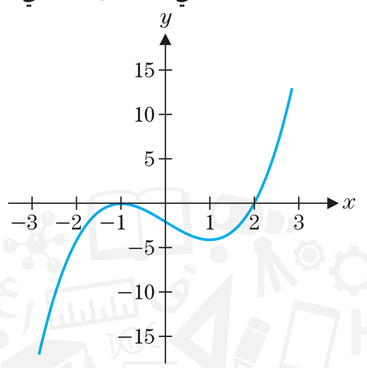
للتمثيل البياني لـ $y = f(x)$ الموضح في الشكل 1.64a، ارسم التمثيلات البيانية لـ $y = f(x) - 2$ و $y = f(x - 2)$.

الحل لتمثيل $y = f(x) - 2$ بيانيًا، قم فقط بإزاحة التمثيل البياني الأصلي لأسفل بمقدار وحدتين، كما هو موضّح في الشكل 1.64b. لتمثيل $y = f(x - 2)$ بيانيًا، قم فقط بإزاحة

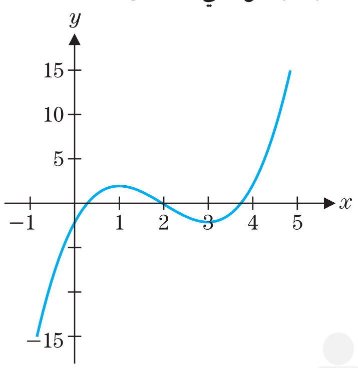
التمثيل البياني الأصلي جهة اليمين بمقدار وحدتين (بحيث يتطابق $x = 0$ المقطع من محور x عند $x = 0$ في التمثيل البياني الأصلي مع المقطع مع محور x عند $x = 2$ في التمثيل البياني المزاح، كما هو موضّح في الشكل 1.64a.



الشكل 1.64a
$y = f(x)$



الشكل 1.64b
$y = f(x) - 2$



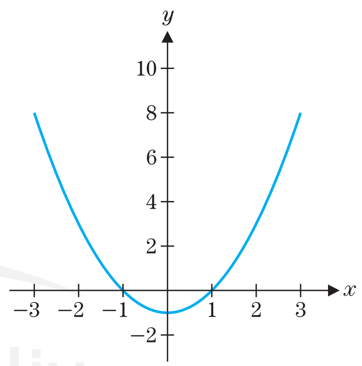
الشكل 1.64c
$y = f(x - 2)$

يستكشف المثال 5.7 أثر ضرب / قسمة x أو y في / على ثابت.

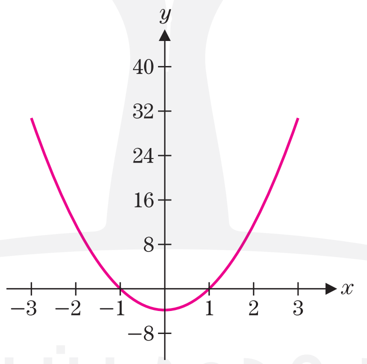
المثال 5.7 مقارنة بعض التمثيلات البيانية المرتبطة

قارن التمثيلات البيانية لـ $y = x^2 - 1$، $y = 4(x^2 - 1)$ و $y = (4x)^2 - 1$.

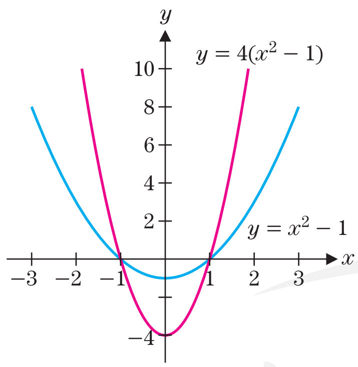
الحل التمثيلات البيانية موضحة في الأشكال 1.65a و 1.65b على التوالي.



الشكل 1.65a
$y = x \;\; - 1$



الشكل 1.65b
$y = 4(x^2 - 1)$

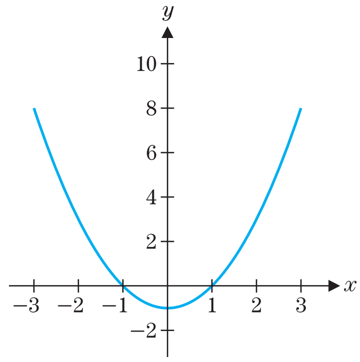


الشكل 1.65c
$y = x^2 - 1$ و $y = 4(x^2 - 1)$

تبدو التمثيلات البيانية متطابقة إلى أن تقارن المقاييس على المحور y. فالمقياس في الشكل 1.65b أكبر بأربعة أضعاف، مما يعكس ضرب الدالة الأصلية في 4. ويبدو التأثير مختلفاً عند تخطيط الدالة على المقياس نفسه، كما هو الحال في الشكل 1.65c. هنا، يبدو القطع المكافئ $y = 4(x^2 - 1)$ أقل سمكًا وذو مقطع مع محور y مختلف. لاحظ أنّ المقاطع لمحور x لا تتغير. (لماذا ذلك؟)

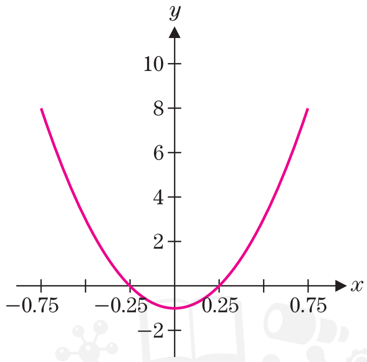
التمثيلات البيانية لـ $y = x^2 - 1$ و $y = (4x)^2 - 1$ موضحة في الأشكال 1.66a و 1.66b. على التوالي (في الصفحة التالية).

هل يمكنك تحديد الفرق هنا؟ في هذه الحالة، تغير مقياس x الآن، بالعامل نفسه وهو 4 كما هو الحال في الدالة. لمشاهدة ذلك، لاحظ أنه باستبدال $x = 1/4$ في $(4x)^2 - 1$ ينتج $(1)^2 - 1$ تمامًا كما هو الحال عند استبدال $x = 1$ في الدالة الأصلية. وعند الرسم على نفس مجموعة المحاور (كما في الشكل 1.66c)، يبدو القطع المكافئ $y = (4x)^2 - 1$ أقل سمكًا. هنا تكون المقاطع مع محور x مختلفة، ولكن المقاطع مع محور y تكون متشابهة.



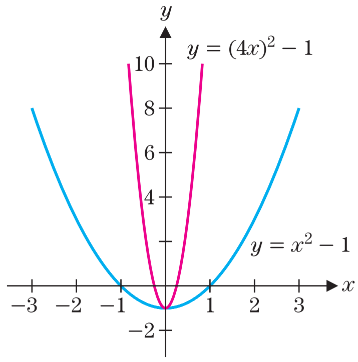
الشكل 1.66a

$y = x^2 - 1$



الشكل 1.66b

$y = (4x)^2 - 1$



الشكل 1.66c

$y = x^2 - 1$ و $y = (4x)^2 - 1$

يمكننا تعميم الملاحظات المذكورة في المثال 5.7. قبل قراءة الشرح، جرب ذكر قاعدة عامة لنفسك. كيف ترتبط التمثيلات البيانية لـ $y = cf(x)$ و $y = f(cx)$ بالتمثيل البياني لـ $y = f(x)$؟

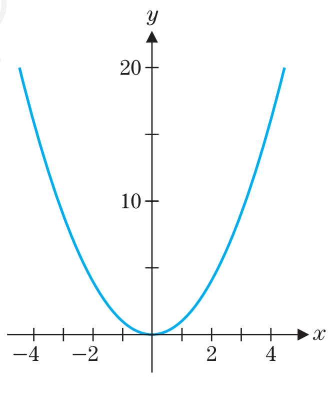
بناءً على المثال 5.7. لاحظ أنه للحصول على التمثيل البياني لـ $y = cf(x)$ لثابت ما $c > 0$ يمكنك أخذ التمثيل البياني لـ $y = f(cx)$ وضرب المقياس على محور y في c وللحصول على التمثيل البياني لـ $y = f(cx)$ لثابت ما $c > 0$ يمكنك أخذ التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ وضرب المقياس على محور x في $1/c$.

يمكن الجمع بين هذه القواعد الأساسية لفهم التمثيلات البيانية الأكثر تعقيدًا.

المثال 5.8 الإزاحة والتمددة

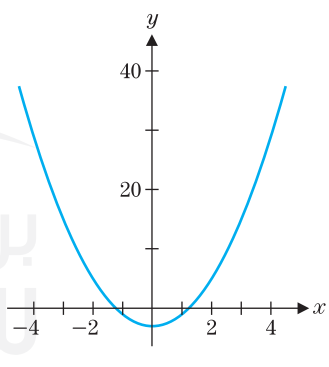
صف كيفية الحصول على التمثيل البياني لـ $y = 2x^2 - 3$ من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

الحل ليمكنك الحصول من x^2 إلى $2x^2 - 3$ عن طريق الضرب في 2 ثم طرح 3. ففيما يتعلق بالتمثيل البياني، يكون لذلك أثر ضرب المقياس y في 2 ثم تحريك الرسم البياني لأسفل بمقدار 3 وحدات. (انظر التمثيلات البيانية في الأشكال 1.67a و 1.67b).



الشكل 1.67a

$y = x^2$



الشكل 1.67b

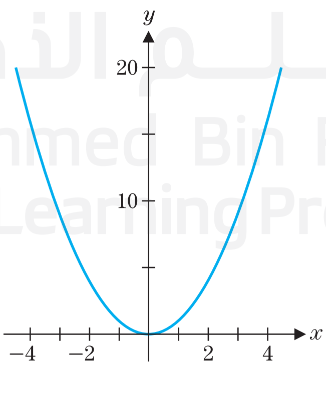
$y = 2x^2 - 3$

المثال 5.9 الإزاحة في كلا اتجاهي x و y

صف طريقة الحصول على التمثيل البياني لـ $y = x^2 + 4x + 3$ من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

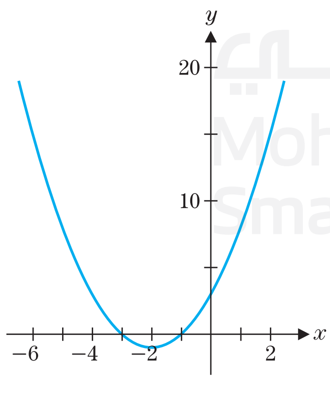
الحل يمكننا ربط ذلك مرة أخرى (والتمثيل البياني لكل معادلة تربيعية) بالتمثيل البياني لـ $y = x^2$. يجب أولاً أن **نكمل المربع**. تذكر أنه في هذه العملية، خذ معامل x، واقسم على 2 ($4/2 = 2$) ثم قم بتربيع النتيجة ($2^2 = 4$). أضف واطرح هذا الرقم ثم، أعد صياغة الحدود كمربع كامل. لدينا

$$y = x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1$$



الشكل 1.68a

$y = x^2$



الشكل 1.68b

$y = (x + 2)^2 - 1$

لتمثيل هذه الدالة بيانيًا، خذ القطع المكافئ $y = x^2$ (انظر الشكل 1.68a) ازاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين جهة اليسار ووحدة واحدة لأسفل. (انظر الشكل 1.68b).

يلخص الجدول التالي اكتشافاتنا في هذا القسم.

تحويلات $f(x)$

التحويل	الشكل	الأثر على المنحنى
الإزاحة الرأسية	$f(x) + c$	$\mid C \mid$ وحدة لأعلى $(c>0)$ او الأسفل $(c<0)$
الإزاحة الأفقية	$f(x + c)$	$\mid C \mid$ وحدة جهة اليسار $(c>0)$ او اليمين $(c>0)$
المقياس الرأسي	$cf(x)(c > 0)$	ضرب المقياس الرأسي في c
المقياس الأفقي	$f(cx)(c > 0)$	قسمة المقياس الأفقي على c

ستستكشف تحويلات إضافية في التمارين.

التمرين 1.5

تمارين الكتابة

1. قد يكون المجال المقيد للمثال 5.2 محيرًا. فكّر في التناظر التالي. افترض أنّ لديك رحلة بالطائرة من نيويورك إلى لوس أنجلوس مع التوقف لإعادة التزود بالوقود في مينابوليس. فإذا كان الطقس السيئ قد أغلق المطار في مينابوليس، اشرح سبب إلغاء الرحلة (أو إعادة توجيهها على الأقل) حتى إذا كان الطقس جيدًا في نيويورك ولوس أنجلوس.

2. اشرح سبب كون التمثيلات البيانية لـ $y = 4(x^2 - 1)$ و $y = (4x)^2 - 1$ في الأشكال 1.65c و 1.66c "أقل سمكًا" من التمثيل البياني لـ $y = x^2 - 1$.

3. كما هو موضح في المثال 5.9، يمكن استخدام استكمال التربيع لإعادة صياغة أي دالة تربيعية بالشكل $a(x - d)^2 + e$. وباستخدام قواعد التحويل في هذا القسم، اشرح لماذا يعني ذلك أن القطوع المكافئة (ذات $a > 0$) ستبدو متشابهة في الأساس.

4. اشرح لماذا يتم الحصول على التمثيل البياني لـ $y = f(x + 4)$ بتحريك التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ أربع وحدات جهة اليسار، بدلاً من جهة اليمين.

في التمارين 1–6، أوجد التركيب $f \circ g$ و $g \circ f$، وحدد المجالات الخاصة بها.

1. $f(x) = x + 1,\quad g(x) = \sqrt{x - 3}$
2. $f(x) = x - 2,\quad g(x) = \sqrt{x + 1}$
3. $f(x) = e^x,\quad g(x) = \ln x$
4. $f(x) = \sqrt{1 - x},\quad g(x) = \ln x$
5. $f(x) = x^2 + 1,\quad g(x) = \sin x$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1},\quad g(x) = x^2 - 2$

في التمارين 7–16، أوجد تركيب $f(x)$ و $g(x)$، وحدد المجالات الخاصة بها.

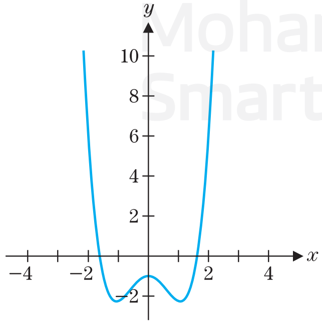
7. $\sqrt{x^4 + 1}$
8. $\sqrt[3]{x + 3}$
9. $\dfrac{1}{x^2 + 1}$
10. $\dfrac{1}{x^2} + 1$
11. $(4x + 1)^2 + 3$
12. $4(x + 1)^2 + 3$
13. $\sin^3 x$
14. $\sin x^3$
15. e^{x^2+1}
16. e^{4x-2}

في التمارين 17–22، حدد الدوال $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ بحيث تساوي الدالة المعطاة $[f \circ (g \circ h)](x)$.

17. $\dfrac{3}{\sqrt{\sin x + 2}}$
18. $\sqrt{e^{4x} + 1}$
19. $\cos^3(4x - 2)$
20. $\ln\sqrt{x^2 + 1}$
21. $4e^{x^2} - 5$
22. $[\tan^{-1}(3x + 1)]^2$

في التمارين 23–30، استخدم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ الموضّح في الشكل لتمثيل الدالة المُشار إليها بيانيًا.

23. $f(x) - 3$
24. $f(x + 2)$
25. $f(x - 3)$
26. $f(x) + 2$
27. $f(2x)$
28. $3f(x)$
29. $-3f(x) + 2$
30. $3f(x + 2)$



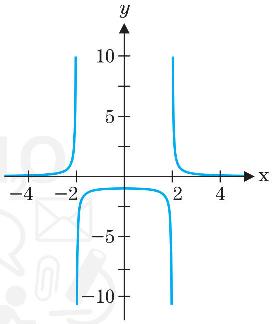
التمثيل البياني لتمارين 23-30

في التمارين 38-31، استخدم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ الموضّح في الشكل لتمثيل الدالة المُشار إليها بيانيًا.

31. $f(x-4)$ **32.** $f(x+3)$ **33.** $f(2x)$

34. $f(2x-4)$ **35.** $f(3x+3)$ **36.** $3f(x)$

37. $2f(x)-4$ **38.** $3f(x)+3$



التمثيل البياني لتمارين 38-31

في التمارين 44-39، أكمل التربيع واشرح طريقة تحويل التمثيل البياني لـ $y = x^2$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة.

39. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ **40.** $f(x) = x^2 - 4x + 4$

41. $f(x) = x^2 + 2x + 4$ **42.** $f(x) = x^2 - 4x + 2$

43. $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ **44.** $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

في التمارين 48-45، مثل الدالة المعطاة بيانيًا وقارنها بالتمثيل البياني لـ $y = x^2 - 1$.

45. $f(x) = -2(x^2-1)$

46. $f(x) = -3(x^2-1)$

47. $f(x) = -3(x^2-1)+2$

48. $f(x) = -2(x^2-1)-1$

في التمارين 52-49، مثل الدالة المعطاة بيانيًا وقارنها بالتمثيل البياني لـ $y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$.

49. $f(x) = (-x)^2 - 2(-x)$

50. $f(x) = -(-x)^2 + 2(-x)$

51. $f(x) = (-x+1)^2 + 2(-x+1)$

52. $f(x) = (-3x)^2 - 2(-3x) - 3$

.53 بناءً على التمارين 48-45، اذكر قاعدة تحويل التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ إلى التمثيل البياني لـ $y = cf(x)$ بالنسبة لـ $c < 0$.

.54 بناءً على التمارين 52-49، اذكر قاعدة تحويل التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ إلى التمثيل البياني لـ $y = f(cx)$ بالنسبة لـ $c < 0$.

.55 ارسم التمثيل البياني لـ $y = |x|^3$. اشرح سبب تطابق التمثيل البياني لـ $y = |x|^3$ مع التمثيل البياني لـ $y = |x|^3$ الموجود على يمين من المحور y. بالنسبة لـ $y = |x|^3$ صف طريقة مقارنة التمثيل البياني الموجود على يسار المحور y مع التمثيل البياني الموجود على يمين المحور y. بشكل عام، صف طريقة رسم التمثيل البياني لـ $y = f(|x|)$ بفرض التمثيل البياني لـ $y = f(x)$.

.56 بالنسبة لـ $y = x^3$. صف طريقة مقارنة التمثيل البياني الموجود على يسار المحور y مع التمثيل البياني الموجود على يمين المحور y. بيّن أنه بالنسبة لـ $f(x) = x^3$، لدينا $f(-x) = -f(x)$. بشكل عام، إذا كان لديك التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ على يمين المحور y و $f(-x) = -f(x)$ لكل x. صف كيفية تمثيل $y = f(x)$ بيانيًا على يسار المحور y.

.57 **تكرارات** الدوال ضرورية في تطبيقات متنوعة. لتكرار $f(x)$. ابدأ بالقيمة الأولية x_0 واحسب $x_1 = f(x_0)$ و $x_2 = f(x_1)$ و $x_3 = f(x_2)$ وهكذا دواليك. على سبيل المثال، باستخدام $f(x) = \cos x$ و $x_0 = 1$ وتكون التكرارات هي $x_1 = \cos 1 \approx 0.54$ و $x_2 = \cos x_1 \approx \cos 0.54 \approx 0.86$ و $x_3 \approx \cos 0.86 \approx 0.65$ وهكذا دواليك. استمر في حساب التكرارات وبيّن أنها تقترب أكثر فأكثر من 0.739085. ثم اختر x_0 الخاص بك (أي رقم تريده) وبيّن أن التكرارات مع هذا x_0 الجديد تقارب أيضًا 0.739085.

.58 بالإشارة إلى التمرين 57. بيّن أنه يمكن كتابة تكرارات الدالة كـــ $x_1 = f(x_0)$ و $x_2 = f(f(x_0))$ و $x_3 = f(f(f(x_0)))$ وهكذا دواليك. مثّل $y = \cos(\cos x)$ و $y = \cos(\cos(\cos x))$ و $y = \cos(\cos(\cos(\cos x)))$ بيانيًا. ينبغي أن يتزايد وجه الشبه بين التمثيلات البيانية والخط الأفقي. استخدم نتيجة التمرين 57 لتحديد خط التحديد.

.59 احسب عدة تكرارات لـ $f(x) = \sin x$ (انظر التمرين 57) باستخدام مجموعة من قيم البدء. ماذا يحدث للتكرارات على المدى الطويل؟

.60 كرر التمرين 59 لـ $f(x) = x^2$.

.61 في الحالات حيث تكرر تكرارات الدالة (انظر التمرين 57) رقمًا واحدًا، يُطلق على هذا الرقم نقطة ثابتة. اشرح لماذا يجب أن تكون أي نقطة ثابتة حلًا للمعادلة $f(x) = x$. أوجد كل النقاط الثابتة لـ $f(x) = \cos x$ عن طريق حل المعادلة $\cos x = x$. قارن نتائجك بنتائج التمرين 57.

.62 أوجد كل النقاط الثابتة لـ $f(x) = \sin x$ (انظر التمرين 61). قارن نتائجك بنتائج التمرين 59.

تمارين استكشافية

.1 لقد استكشفت كيف يمكن لاستكمال التربيع أن يحول أي دالة تربيعية إلى الشكل $y = a(x-d)^2 + e$. استنتجنا أن كل القطوع المكافئة ذات $a > 0$ تبدو متشابهة. لمعرفة أن نفس الجملة ليست صحيحة بالنسبة للدوال كثيرة الحدود التكعيبية، مثل $y = x^3$ و $y = x^3 - 3x$ بيانيًا. في هذا التمرين، ستستخدم استكمال التكعيب لتحديد عدد التمثيلات البيانية التكعيبية المختلفة الموجودة. لمعرفة ما قد يبدو عليه "استكمال المكعب"، بيّن أولًا أنّ $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$. استخدم هذه النتيجة لتحويل التمثيل البياني لـ $y = x^3$ إلى التمثيلات البيانية لـ (a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ و (b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$. بيّن أنه لا يمكنك الحصول على تحويل بسيط إلى $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. مع ذلك بيّن أنه يمكن الحصول على $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ من $y = x^3 + x$ باستخدام التحويلات الأساسية. بيّن أن العبارة التالية صحيحة: يمكن الحصول على أي مكعب $(y = ax^3 + bx^2 + cx + d)$ باستخدام التحويلات الأساسية من $y = ax^3 + kx$ بالنسبة لـ k الثابت نفسه.

2. في العديد من التطبيقات، من الضروري أخذ مقطع من التمثيل البياني (على سبيل المثال، بعض البيانات) وبسطها من أجل التوقعات أو التحليلات الأخرى. على سبيل المثال، افترض أنّ لديك إشارة إلكترونية تساوي $f(x) = 2x$ بالنسبة لـ $0 \le x \le 2$. للتنبؤ بقيمة الإشارة عند $x = -1$، فقد ترغب في معرفة إذا ما كانت الإشارة دورية أم لا. إذا كانت الإشارة دورية، فبيّن لماذا سيكون $f(-1) = 2$ تنبؤًا جيدًا. في بعض التطبيقات، قد تفترض أن الدالة متساوية. أي، $f(x) = f(-x)$ لكل x. في هذه الحالة، أنت تريد $f(x) = 2(-x) = -2x$ لـ $-2 \le x \le 0$. مثّل الامتداد المتساوي بيانيًا لـ $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{if } -2 \le x \le 0 \\ 2x & \text{if } 0 \le x \le 2 \end{cases}$.

أوجد الامتداد المتساوي لـــ (a) $f(x) = x^2 + 2x + 1, 0 \le x \le 2$ و (b) $f(x) = e^{-x}, 0 \le x \le 2$.

3. وعلى غرار الامتداد المتساوي المذكور في التمرين الاستكشافي 2، تتطلب التطبيقات في بعض الأحيان أن تكون الدالة فردية؛ أي $f(-x) = -f(x)$. فبالنسبة لـ $f(x) = x^2$ و $0 \le x \le 2$ يتطلب الامتداد الفردي أنه بالنسبة لـ $f(x) = -f(-x) = -(-x)^2 = -x^2$ و $-2 \le x \le 0$ بحيث $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{if } -2 \le x \le 0 \\ x^2 & \text{if } 0 \le x \le 2 \end{cases}$ مثّل $y = f(x)$ بيانيًا وناقش طريقة إدارة النصف الأيمن من التمثيل البياني. بيانيًا، للحصول على النصف الأيسر من التمثيل البياني. أوجد الامتداد الفردي لـ (a) $f(x) = x^2 + 2x,\ 0 \le x \le 2$ و (b) $f(x) = e^{-x} - 1, 0 \le x \le 2$.

تمارين المراجعة

تمارين كتابة

تتضمن القائمة التالية مصطلحات المعرفة ونظريات واردة في هذا الفصل. بالنسبة لكل مصطلح أو نظرية، (1) اذكر تعريف أو عبارة دقيقة، (2) اذكر معنى المصطلح أو النظرية بعبارات عامة، و (3) صف أنواع المسائل ذات الصلة بالمصطلح أو النظرية.

ميل الخط	خطوط متوازية	خطوط متعامدة
مجال	المقطع	أصفار الدالة
نافذة التمثيل البياني	القيمة العظمى المحلية	خط تقارب رأسي
دالة عكسية	دالة فردية	دالة دورية
دالة الـــ sine	دالة cosine	دالة sinh الزاوية
e	دالة أسية	لوغاريتم
تركيب		

صح أم خطأ

اذكر إذا ما كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة وبيّن السبب باختصار. إذا كانت العبارة خاطئة، حاول "تصحيحها" عن طريق تعديل العبارة الموضّحة إلى العبارة الجديدة الصحيحة.

1. بالنسبة للتمثيل البياني، يمكنك حساب الميل باستخدام أي نقطتين والحصول على القيمة نفسها.
2. يجب أن تمرّ كل التمثيلات البيانية باختبار الخط الرأسي.
3. للدالة التكعيبية تمثيلًا بيانيًا بحد أقصى محلي وحد أدنى محلي.
4. إذا لم يكن للدالة حد أقصى أو أدنى محلي، فإنها تكون فردية.
5. يمكن الحصول على التمثيل البياني لمعكوس f عن طريق عكس التمثيل البياني لـ f عبر $y = x$ القطري.
6. إذا كانت f عبارة عن دالة مثلثية، فإن حل المعادلة $f(x) = 1$ هو $f^{-1}(1)$.
7. الدوال الأسية واللوغاريتمية هي معكوس بعضها البعض.
8. للدوال التربيعية رسومات بيانية مثل القطع المكافئ $y = x^2$.

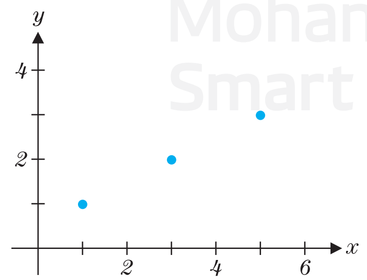
في التمرينين 1 و 2، أوجد ميل المستقيم من خلال النقاط المحددة.

1. $(2, 3), (0, 7)$
2. $(1, 4), (3, 1)$

في التمرينين 3 و 4 حدد ما إذا كانت الخطوط متوازية أو متعامدة أو غير ذلك.

3. $y = 3x + 1$ and $y = 3(x - 2) + 4$
4. $y = -2(x + 1) - 1$ and $y = \frac{1}{2}x + 2$

5. حدد ما إذا كانت النقاط (1, 2) و (2, 4) و (0, 6) تشكل رؤوس المثلث قائم الزاوية.
6. تمثل البيانات التعداد السكاني في أوقات مختلفة. ارسم النقاط وناقش أي أنماط وتوقع التعداد السكاني في المرة القادمة: (0, 2100) و (1, 3050) و (2, 4100) و (3, 5050).
7. أوجد معادلة المستقيم من خلال النقاط المحددة في الرسم البياني التالي واحسب الإحداثي y المناسب لـ $x = 4$.



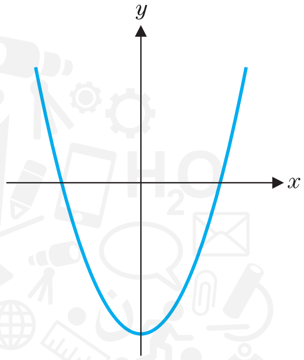
8. بالنسبة إلى $f(x) = x^2 - 3x - 4$، احسب $f(0)$، $f(2)$ و $f(4)$.

في التمرينين 9 و 10، أوجد معادلة المستقيم من خلال الميل والنقطة المذكورين.

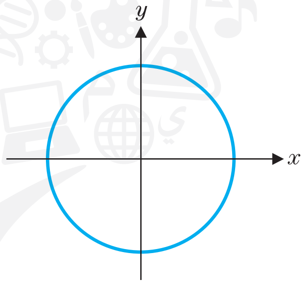
9. $m = -\frac{1}{3}, \quad (-1, -1)$ **10.** $m = \frac{1}{4}, \quad (0, 2)$

في التمرينين 11 و 12، استخدم اختبار الخط الرأسي لتحديد ما إذا كان المنحنى هو الرسم البياني للدالة.

11.



12.



في التمرينين 13 و 14، أوجد مجال المعادلة المعطاة.

13. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2}$

في التمارين 15-28، ارسم بيانيًا القيعان المبينة ونقاط التقاطع وخطوط التقارب.

15. $f(x) = x^2 + 2x - 8$ **16.** $f(x) = x^3 - 6x + 1$

17. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ **18.** $f(x) = x^5 - 4x^3 + x - 1$

19. $f(x) = \dfrac{4x}{x+2}$ **20.** $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$

21. $f(x) = \sin 3x$ **22.** $f(x) = \tan 4x$

23. $f(x) = \sin x + 2\cos x$ **24.** $f(x) = \sec 2x$

25. $f(x) = 4e^{2x}$ **26.** $f(x) = 3e^{-4x}$

27. $f(x) = \ln 3x$ **28.** $f(x) = e^{\ln 2x}$

.29 حدد كل نقاط التقاطع لـ $y = x^2 + 2x - 8$ (انظر التمرين 15).

.30 حدد كل نقاط التقاطع لـ $y = x^4 - 2x^2 + 1$ (انظر التمرين 17).

.31 أوجد كل خطوط التقارب لـ $y = \dfrac{4x}{x+2}$.

.32 أوجد كل خطوط التقارب لـ $y = \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$.

في التمارين 33-36، أوجد أو قدّر كل أصفار الدالة المعطاة.

33. $f(x) = x^2 - 3x - 10$ **34.** $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

35. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ **36.** $f(x) = x^4 - 3x - 2$

في التمرينين 37 و 38، حدد عدد الحلول.

37. $\sin x = x^3$

38. $\sqrt{x^2+1} = x^2 - 1$

.39 يقف مساح على بعد 50 ft من عمود الهاتف ويرصد الزاوية 34 إلى قمة العمود. ما هو طول العمود؟

.40 أوجد $\sin\theta$ باعتبار أنّ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $\cos\theta = \frac{1}{5}$.

.41 حوّل إلى صيغة كسرية أو صيغة جذرية: (a) $5^{-1/2}$ (b) 3^{-2}.

.42 حوّل إلى صيغة أسية: (a) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ (b) $\dfrac{3}{x^2}$.

.43 أعد كتابة $\ln 8 - 2\ln 2$ باعتباره لوغاريتم منفرد.

.44 قم بحل المعادلة x: $e^{\ln 4x} = 8$.

في التمرينين 45 و 46، قم بحل المعادلة.

45. $3e^{2x} = 8$ **46.** $2\ln 3x = 5$

في التمرينين 47 و 48، أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ وحدد مجال كل منها.

47. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

48. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

في التمرينين 49 و 50، حدد الدوال $f(x)$ و$g(x)$ مثل $(f\circ g)(x)$ التي تساوي الدالة المعطاة.

49. e^{3x^2+2} **50.** $\sqrt{\sin x + 2}$

في التمرينين 51 و 52، أكمل المربع واشرح طريقة تحويل الرسم البياني لـ $y = x^2$ إلى الرسم البياني للدالة المعطاة.

51. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ **52.** $f(x) = x^2 + 4x + 6$

في التمارين 53–56، حدد ما إذا كانت دالة واحد لواحد أم لا. وإذا كانت دالة واحد لواحد، فاذكر معكوسها.

53. $x^3 - 1$ 54. e^{-4x} 55. e^{2x^2} 56. $x^3 - 2x + 1$

في التمارين 57-60، مثّل بيانيًا المعكوس بدون حله.

57. $x^5 + 2x^3 - 1$
58. $x^3 + 5x + 2$
59. $\sqrt{x^3 + 4x}$
60. e^{x^3+2x}

في التمارين 61-64، أوجد قيمة الكمية باستخدام دائرة الوحدة.

61. $\sin^{-1} 1$
62. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
63. $\tan^{-1}(-1)$
64. $\csc^{-1}(-2)$

في التمارين 65-68، حوّل إلى أبسط صورة التعبير الجذري.

65. $\sin(\sec^{-1} 2)$
66. $\tan(\cos^{-1}(4/5))$
67. $\sin^{-1}(\sin(3\pi/4))$
68. $\cos^{-1}(\sin(-\pi/4))$

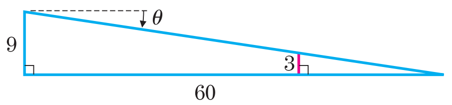
في التمرينين 69 و 70، أوجد كل حلول المعادلة.

69. $\sin 2x = 1$
70. $\cos 3x = \frac{1}{2}$

تمارين استكشافية

1. مثّل بيانيًا أي دالة $y = f(x)$ لها معكوس. (حسب اختيارك) مثّل بيانيًا معكوس الدالة $y = f^{-1}(x)$. بعد ذلك مثّل بيانيًا $y = g(x) = f(x + 2)$. مثّل بيانيًا $y = g^{-1}(x)$ واستخدم الرسم البياني لتحديد صيغة $g^{-1}(x)$ من حيث $f^{-1}(x)$. كرّر ذلك لـ $h(x) = f(x) + 3$ و $k(x) = f(x - 4) + 5$.

2. في لعبة التنس، تتجاوز رمية الإرسال الشبكة ثم تسقط في المربع الموجود في الجانب الآخر من الشبكة. في هذا التمرين، ستكتشف هامش الخطأ لرمية الإرسال الصحيحة. أولًا، انظر باستقامة لرمية الإرسال (هذا يعني أساسًا أنّ رمية الإرسال تُسدد بقوة غير متناهية) وسددت بنحو 9 أقدام فوق سطح الأرض. حدد نقطة البداية (0, 9). يبعد الجانب الخلفي من مربع الإرسال 60 ft عند (60, 0). يبعد الجزء العلوي من الشبكة حوالي 3 أقدام عن سطح الأرض و39 ft من مستهل ضربة الكرة، عند (39, 3). أوجد زاوية رمية الإرسال (أي الزاوية التي تقاس أفقيًا) والمثلث الذي شكلته النقاط (0, 9) و (0, 0) و (60, 0). وبطبيعة الحال، فغالبًا ما تنحني رمية الإرسال لأسفل بسبب الجاذبية. بتجاهل مقاومة الهواء، فإن مسار الكرة التي سددت نحو الزاوية θ والسرعة الأولية v ft/s هو $y = -\frac{16}{(v\cos\theta)^2}x^2 - (\tan\theta)x + 9$. لتُسدد في الجانب الخلفي من خط الإرسال، فإنك تحتاج $y = 0$ عندما $x = 60$. عوّض في هذه القيم بالإضافة إلى $v = 120$. اضرب في $\cos^2\theta$ واستبدل $\sin\theta$ بـ $\sqrt{1 - \cos^2\theta}$. استبدل $\cos\theta$ بـ z يعطيك معادلة جبرية في z. قدّر بالعدد z. وبالمثل، عوّض $x = 39$ و$y = 3$ وأوجد المعادلة لـــ $w = \cos\theta$. قدّر بالعدد w. ينتج هامش الخطأ لرمية الإرسال من $\cos^{-1} z < \theta < \cos^{-1} w$.



3. غالبًا ما يقول لاعبو كرة البيسبول أن رمية الكرة السريعة بشكل غير معتاد ترتفع أو تقفز حتى تصل إلى القاعدة. وأحد تفسيرات هذا الخطأ هو عدم قدرة اللاعبين على تتبّع الكرة في مسارها إلى القاعدة. ويعوض اللاعب ذلك بالتنبؤ بمسار الكرة عند وصولها إلى القاعدة. افترض أنّ ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الرئيسة هو بالقدم $h = -(240/v)^2 + 6$ وسرعتها v ft/s. (نضع الجاذبية في الاعتبار في هذه المعادلة وليس مقاومة الهواء). في منتصف الطريق إلى القاعدة، فإن الارتفاع يكون $h = -(120/v)^2 + 6$ بالقدم قارن ارتفاعات منتصف الطريق لرمية الكرة بـ $v = 132$ و $v = 139$ (حوالي 90 mi/h و 95 mi/h على التوالي). هل يتمكن اللاعب ضارب الكرة من تحديد فروق كثيرة بينها؟ والآن قارن بين الارتفاعات عند القاعدة. لماذا يعتقد اللاعب ضارب الكرة أنّ الرمية الأسرع تقفز يمين القاعدة. كم قدمًا تقفزها الرمية الأسرع؟

ملاحظات الطلاب