


**للممتازين**
**تمارين متنوعة على النهايات والإتصال**
**dxb**

$$f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(س) لتكن

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x-1) + f(3x) + 1) ?$$

اوجد

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 (س) إذا كانت  $f(x)$  دالة حدودية وكان بيان  $f(x)$  يمر بالنقطة  $(-2, 1)$  فأوجد

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8} - 3) \cot(x-1)}{(f(x))^3} ?$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 (س) لتكن  $|f(x) - \sin 3x^2| < 3x^4$  في جوار منقوص للعدد 0 فأوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} ?$$

.....

.....

.....

.....

.....



(س) إذا كانت  $f(x)$  متصلة عند  $x = 1$  وكانت  $f(1) = 4$  فأوجد  $a, b, c$  حيث :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2c & : x > 1 \\ 2a - 3b - c & : x = 1 \\ 3ax^2 + 2b - c & : x < 1 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(س) أوجد نهاية الدوال التالية :-

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{3} - x \right) \cot x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+2} - 2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{3x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

مستوي مرتفع :

$$\lim_{x \ln 2 \rightarrow \ln 5} \frac{4^x - 25}{2^{2x} - 2^{x+2} - 5} \text{ أوجد}$$

.....

.....

.....

.....

.....

مع تحياتي..... أهلال حسين



## نموذج الإجابة

## تمارين متنوعة على النهايات والإتصال

$$f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(س) لتكن

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x-1) + f(3x) + 1) ?$$

اوجد

الحـل

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(x-1)^2 - 2(x-1) - 1 + (3x)^2 - 2(3x) - 1 + 1] = 1 - 2 - 1 + 36 - 12 = 22$$

(س) إذا كانت  $f(x)$  دالة حدودية وكان بيان  $f(x)$  يمر بالنقطة  $(1, -2)$  فأوجد

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8} - 3) \cot(x-1)}{(f(x))^3} ?$$

الحـل

∴ حدودية فهي متصلة على  $R$  ∴ متصلة عند النقطة  $(1, -2)$  ∴  $-2 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{\tan(x-1)} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} (f(x))^3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{\tan(x-1)} \times \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{\tan(x-1)} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{-1}{8} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\tan(x-1)} = \\ &= \frac{-1}{8} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \frac{-1}{8} \end{aligned}$$

$$y = x - 1, x \rightarrow 1 \therefore y \rightarrow 0$$

(س) لتكن  $|f(x) - \sin 3x^2| < 3x^4$  في جوار منقوص للعدد 0 فأوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} ?$$

الحـل

$$-3x^4 < f(x) - \sin 3x^2 < 3x^4 \Rightarrow -3x^4 + \sin 3x^2 < f(x) < 3x^4 + \sin 3x^2 \quad (\div x^2)$$

$$\Rightarrow -3x^2 + \frac{\sin 3x^2}{x^2} < f(x) < 3x^2 + \frac{\sin 3x^2}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -3x^2 + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan 3y}{y} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan 3y}{y} = 3$$

$$(\therefore y \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0) \Leftrightarrow y = x^2 \text{ بفرض}$$



(س) إذا كانت  $f(x)$  متصلة عند  $x = 1$  وكانت  $f(1) = 4$  فأوجد  $a, b, c$  حيث :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2c & : x > 1 \\ 2a - 3b - c & : x = 1 \\ 3ax^2 + 2b - c & : x < 1 \end{cases}$$

الحل

$$\begin{array}{c} 2a - 3b - 3 \\ \uparrow \\ \frac{3ax^2 + 2b - c}{1} \quad \frac{ax^2 + bx + 2c}{1} \end{array}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 4 \leftarrow x=1$  :: الدالة  $f$  متصلة عند  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx + 2c) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (3ax^2 + 2b - c) = 4$$

$$a + b + 2c = 4 \rightarrow \textcircled{1}$$

بعد ضرب رقم 2 في العدد

$$6a + 4b - 2c = 8 \rightarrow \textcircled{5}$$

$$7a + 5b = 12 \rightarrow \textcircled{6}$$

$$-a + 5b + 0 = 0 \rightarrow \textcircled{4}$$

$$6a = 12 \rightarrow a = 2$$

بالتعويض في رقم 4

$$2 + 5b = 0 \rightarrow b = \frac{-2}{5}$$

$$f(1)=4$$

$$3a + 2b - c = 4 \rightarrow \textcircled{2}$$

$$-2a + 3b + c = -4 \rightarrow \textcircled{3}$$

$$a + 5b + 0 = 0 \rightarrow \textcircled{4}$$

بالتعويض في رقم 2

$$6 + 2\left(-\frac{2}{5}\right) - c = 4$$

$$6 - \frac{4}{5} - c = 4 \rightarrow c = 1.2$$

(س) أوجد نهاية الدوال التالية :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{3} - x \right) \cot x$$

الحل

مع تحياتي..... أهلال حسين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{3} - x \right) \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 \cot x}{3} + x \cot x \right)$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{3 \tan x} - \frac{x}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 \tan x} \cdot x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \frac{1}{3} \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+2} - 2}$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x)}{\sqrt{x+2} - 2} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x+2-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x(\sqrt{x+2} + 2) = 2(\sqrt{4} + 2) = 2(2 + 2) = 8$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{3x}$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{3x} \times \frac{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x}}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - 1 + \tan x}{3x(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{3x} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x}} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

\*مستوي مرتفع:

$$\lim_{x \ln x \rightarrow \ln 5} \frac{4^x - 25}{2^{2x} - 2^{x+2} - 5} \text{ أوجد}$$

الحل

$$\lim_{\ln 2^x \rightarrow \ln 5} \frac{(2^x - 5)(2^x + 5)}{(2^x)^2 - 4 \times 2^x - 5} \quad \ln 2^x \rightarrow \ln 5 \quad \therefore 2^x \rightarrow 5$$

$$\lim_{2^x \rightarrow 5} \frac{(2^x - 5)(2^x + 5)}{(2^x - 5)(2^x + 1)} = \frac{5+5}{5+1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

مع تحياتي.....أ.هلال حسين