مدرس الرياضيات مصطفى علام http://t.me/mustafaallam

قناة التلجرام ملازم ومراجعات الرياضيات https://t.me/alllaaam82

قناة اليوتيوب لشرح تمارين كتب الرياضيات https://www.youtube.com/channel/UCvyojYVtaSKb7dt8U7C2a9g/videos

فيديوهات وكتب رياضيات سادس https://t.me/mathbook6

كتب وفيديوهات رياضيات سابع https://t.me/mathbook7

كتب رياضيات ثامن https://t.me/mathbook_8

فيديوهات وكتب رياضيات تاسع https://t.me/mathbook9GEN

كتب وفيديوهات رياضيات عاشر عام https://t.me/mathbook10GEN

فيديوهات رياضيات عاشر متقدم https://t.me/mathbook10ADV

فيديوهات وكتب رياضيات حادي عشر عام https://t.me/mathbook11GEN

كتب وفيديوهات رياضيات حادي عشر متقدم https://t.me/mathbook11ADV

كتب وفيديوهات رياضيات ثاني عشر عام https://t.me/mathbook12GEN

كتب وفيديوهات رياضيات ثاني عشر متقدم https://t.me/mathbook12ADV

بنوك أسئلة الرياضيات للبوابة الذكية https://t.me/math_bank

الوحدة الرابعة

الدوال المثلثية

عمل المدرس مُصطفى علام 050-2509447

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 علم

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

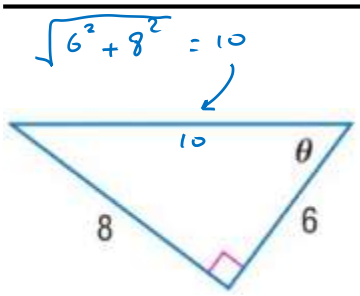
ورقة عمل الثاني عشر العام | 4-1 حساب المثلثات قائمة الزوايا | الاسم : _____

نواتج التعلّم: 1– إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة للمثلثات القائمة الزاوية. 2– حل المثلثات القائمة الزاوية.

$\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$	$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$	$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$
$\cot\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$	$\sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}$	$\csc\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}}$

إيجاد قيم النسب المثلثية

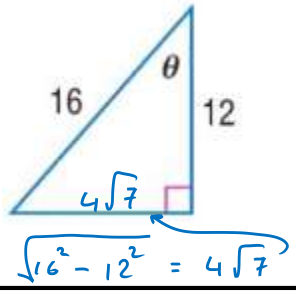
أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.



$\sin\theta = \frac{8}{10}$ $\quad \csc\theta = \frac{10}{8}$

$\cos\theta = \frac{6}{10}$ $\quad \sec\theta = \frac{10}{6}$

$\tan\theta = \frac{8}{6}$ $\quad \cot\theta = \frac{6}{8}$



$\sin\theta = \frac{4\sqrt{7}}{16}$ $\quad \csc\theta = \frac{16}{4\sqrt{7}}$

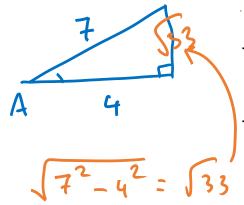
$\cos\theta = \frac{12}{16}$ $\quad \sec\theta = \frac{16}{12}$

$\tan\theta = \frac{4\sqrt{7}}{12}$ $\quad \cot\theta = \frac{12}{4\sqrt{7}}$

استخدام قيمة نسبة مثلثية ما لإيجاد قيم النسب المثلثية الأخرى

في مثلث قائم، تكون ∠A حادة. أوجد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.

$\cos A = \frac{4}{7} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

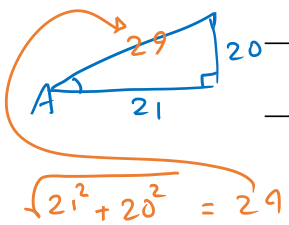


$\sin A = \frac{\sqrt{33}}{7}$ $\quad \csc A = \frac{7}{\sqrt{33}}$

$\cos A = \frac{4}{7}$ $\quad \sec A = \frac{7}{4}$

$\tan A = \frac{\sqrt{33}}{4}$ $\quad \cot A = \frac{4}{\sqrt{33}}$

$\tan A = \frac{20}{21}$



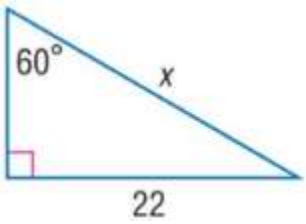
$\sin A = \frac{20}{29}$ $\quad \csc A = \frac{29}{20}$

$\cos A = \frac{21}{29}$ $\quad \sec A = \frac{29}{21}$

$\tan A = \frac{20}{21}$ $\quad \cot A = \frac{21}{20}$

إيجاد طول الضلع المجهول

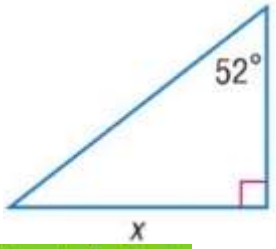
استخدم نسبة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



$\sin 60 = \frac{22}{x}$

$\Rightarrow x = \frac{22}{\sin 60}$

$x = \boxed{25.4}$



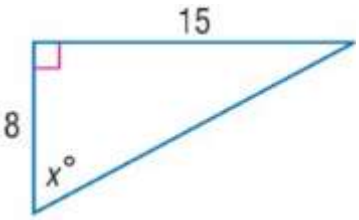
$\tan 52 = \frac{x}{6}$

$\Rightarrow x = 6 \tan 52$

$x = \boxed{7.7}$

إيجاد قياس الزاوية المجهولة

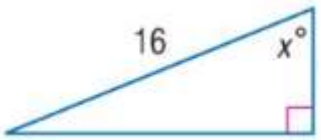
أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



$\tan x = \frac{15}{8}$

$x = \tan^{-1} \frac{15}{8}$

$x = \boxed{61.9^\circ}$



$\cos x = \frac{6}{16}$

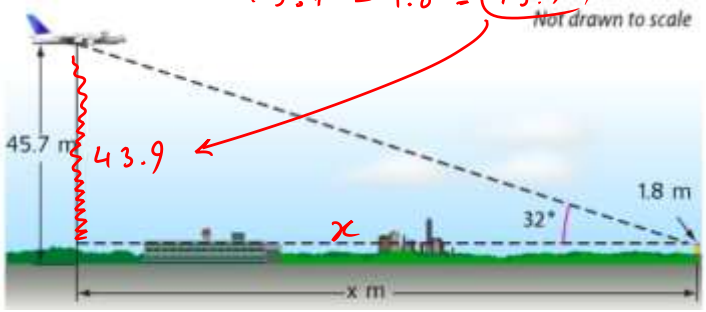
$x = \cos^{-1} \frac{6}{16}$

$x = \boxed{68^\circ}$

استخدام زاوية الارتفاع

طائرات عامل من الطاقم الأرضي يبلغ طوله 1.8 m يوجه طائرة على مدرج المطار. إذا نظر العامل إلى الطائرة بزاوية ارتفاع قدرها 32°، فما المسافة الأفقية بين العامل والطائرة؟

$45.7 - 1.8 = 43.9$



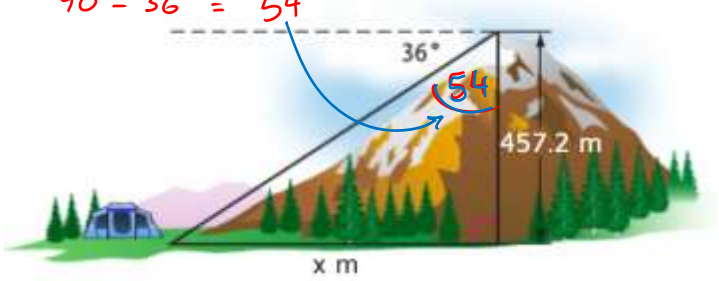
$\tan 32 = \frac{43.9}{x}$

$\Rightarrow x = \frac{43.9}{\tan 32}$

$= \boxed{70.3}$ m

التخييم تسلقت مجموعة من المتسلقين قمة جبل تبلغ 457.2 m خلال رحلتهم. عندما ينظر المتسلقون للأسفل بزاوية انخفاض قدرها 36°، يمكنهم رؤية مخيمهم عن بعد. ما المسافة بين المخيم والمجموعة مقربا الناتج لأقرب متر؟

$90 - 36 = 54^\circ$

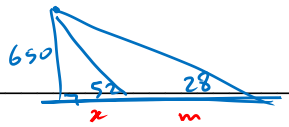


$\tan 54 = \frac{x}{457.2}$

$\Rightarrow x = 457.2 \tan 54$

$x = \boxed{629.3}$ m

ركوب المنطاد منطاد هواء ساخن يتحرك فوق حي بزاوية انخفاض قدرها $28°$ بالنسبة لمنزل و $52°$ بالنسبة لمنزل آخر في آخر الشارع. إذا كان ارتفاع المنطاد هو $650\ ft$ ، فاستنتج المسافة بين المنزلين.



المطلوب المسافة (m)

$$\tan 52 = \frac{650}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{650}{\tan 52}$$

$$\tan 28 = \frac{650}{x+m}$$

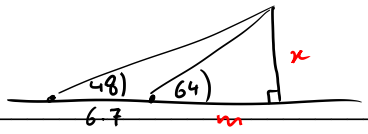
$$x + m = \frac{650}{\tan 28}$$

$$\Rightarrow m = \frac{650}{\tan 28} - x$$

$$= \frac{650}{\tan 28} - \frac{650}{\tan 52}$$

$$m = \boxed{714.64}\ ft$$

مبان زاوية الارتفاع من السيارة لأعلى شقة بالمبنى هي $48°$. إذا كانت زاوية الارتفاع من سيارة أخرى أمام السيارة الأولى مباشرة بمسافة $6.7\ m$ هي $64°$. فكم يبلغ ارتفاع المبنى؟



$$\tan 48 = \frac{x}{m+6.7}$$

$$\Rightarrow x = (m+6.7)\tan 48 \longrightarrow ①$$

$$\tan 64 = \frac{x}{m}$$

$$\Rightarrow x = m \tan 64 \longrightarrow ②$$

حل ② في ①

$$(m+6.7)\tan 48 = m \tan 64$$

$$m\tan 48 + 6.7\tan 48 = m\tan 64$$

$$m\tan 48 - m\tan 64 = -6.7\tan 48$$

$$m(\tan 48 - \tan 64) = -6.7\tan 48$$

$$m = \frac{-6.7\tan 48}{\tan 48 - \tan 64} \longrightarrow ③$$

بالتعويض من ③ في ②

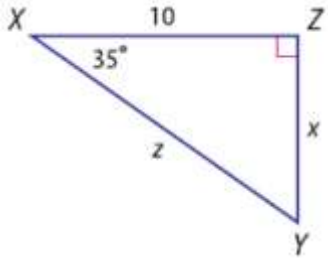
$$\Rightarrow x = \left(\frac{-6.7\tan 48}{\tan 48 - \tan 64}\right)\tan 64$$

$$x = \boxed{16.24}\ m$$

حل مثلث قائم الزاوية

حُـلّ كل مثلث. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من عشرة، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

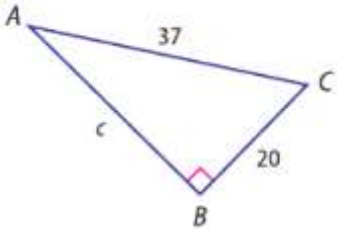
Solve each triangle. Round side lengths to the nearest tenth and angle measures to the nearest degree.



$\tan 35 = \frac{x}{10}$ $\Rightarrow x = 10 \tan 35$ $x = \boxed{7}$

$\cos 35 = \frac{10}{z}$ $\Rightarrow z = \frac{10}{\cos 35}$ $z = \boxed{12.2}$

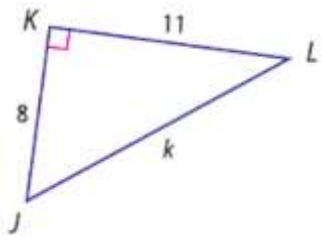
$m\angle Y = 90 - 35 = \boxed{55^\circ}$



$c = \sqrt{37^2 - 20^2}$ ← فيثاغورس $c = \boxed{31.1}$

$\cos C = \frac{20}{37}$ $C = \cos^{-1}\left(\frac{20}{37}\right)$ $C = \boxed{57^\circ}$

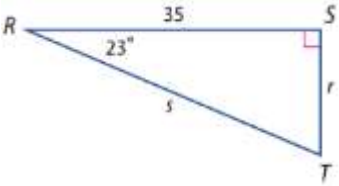
$\sin A = \frac{20}{37}$ $A = \sin^{-1}\left(\frac{20}{37}\right)$ $A = \boxed{33^\circ}$



$k = \sqrt{11^2 + 8^2}$ $k = \boxed{13.6}$

$\tan J = \frac{11}{8}$ $J = \tan^{-1}\left(\frac{11}{8}\right)$ $J = \boxed{54^\circ}$

$\tan L = \frac{8}{11}$ $L = \tan^{-1}\frac{8}{11}$ $L = \boxed{36^\circ}$



$\cos 23 = \frac{35}{s}$ $\Rightarrow s = \frac{35}{\cos 23}$ $s = \boxed{38}$

$\tan 23 = \frac{r}{35}$ $\Rightarrow r = 35 \tan 23$ $r = \boxed{14.9}$

$T = 90 - 23 = \boxed{67^\circ}$

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام | 4-2 الدرجات والراديان | الاسم : _____

نواتج التعلّم:
1- تحويل قياسات الزوايا بالدرجات إلى قياسات راديان، والعكس بالعكس.
2- استخدام قياسات الزاوية لحل مسائل من الحياة اليومية.

القاعدة 60 يرجع مفهوم قياس الدرجة إلى البابليين القدماء، الذين قاموا بحسابات فلكية مبكرة باستخدام نظامهم الرقمي، والذي بني على نظام ستيني(60) بدلاً من النظام العشري (10) الذي نستخدمه اليوم.

تكون الزاوية في **الوضع القياسي Standard Position** عندما يكون رأسها عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، ويقع **ضلع الابتداء Initial Side** لها على الجزء الموجب من المحور x. يسمّى الضلع الذي دار للزاوية **ضلع الانتهاء Terminal Side**.

التحويل بين صيغة DMS والدرجة العشرية

اكتب كل قياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة.
Write each decimal degree measure in DMS form and each DMS measure in decimal degree form to the nearest thousandth.

56.735°

D درجة، M دقيقة، S ثانية

$= 56° + 0.735°\left(\frac{60'}{1°}\right)$
$= 56° + 44.1'$
$= 56° + 44' + 0.1'\left(\frac{60''}{1'}\right)$
$= 56° + 44' + 6''$
$= 56°\ 44'\ 6''$

أو باستخدام الآلة: 56.735 → ... → =

32° 5′ 28″

$= 32° + 5'\times\frac{1°}{60'} + 28''\times\frac{1'}{60''}\times\frac{1°}{60'}$
$= 32 + \frac{1}{12} + \frac{7}{900}$
$= 32.091°$

أو باستخدام الآلة: 32 → ... → 5 → ... → 28 → ... → = → S⇔D → S⇔D
32.09(1)
نحصل على الجواب

213.875°

$= 213° + 0.875°\left(\frac{60'}{1°}\right)$
$= 213° + 52.5'$
$= 213° + 52' + 0.5'\left(\frac{60''}{1'}\right)$
$= 213° + 52' + 30''$
$= 213°\ 52'\ 30''$

89° 56′ 7″

$= 89° + 56'\left(\frac{1°}{60'}\right) + 7''\left(\frac{1'}{60''}\right)\left(\frac{1°}{60'}\right)$
$= 89° + \left(\frac{14}{15}\right)° + \left(\frac{7}{3600}\right)°$
$= 89.935°$

التحويل بين قياسي الدرجة والراديان

حول كل قياس من الدرجات إلى الراديان كمضاعف لـ π وبالعكس.

Write each degree measure in radians as a multiple of π and each radian measure in degrees.

$\frac{\text{الراديان}}{\text{الدرجات}} = \frac{\pi}{180}$

120°

$\frac{x}{120} = \frac{\pi}{180}$

$\Rightarrow x = \frac{120\pi}{180} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$

−45°

$\frac{x}{-45} = \frac{\pi}{180}$

$\Rightarrow x = \frac{-45\pi}{180} = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$

$-\frac{3\pi}{2}$

$\frac{-\frac{3\pi}{2}}{x} = \frac{\pi}{180}$

$\Rightarrow x = \frac{180\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{\pi} = \boxed{-270^\circ}$

$\frac{5\pi}{6}$

$\frac{\frac{5\pi}{6}}{x} = \frac{\pi}{180}$

$\Rightarrow x = \frac{180\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\pi} = \boxed{150^\circ}$

210°

$\frac{x}{210} = \frac{\pi}{180}$

$\Rightarrow x = \frac{210\pi}{180} = \boxed{\frac{7\pi}{6}}$

−60°

$\frac{x}{-60} = \frac{\pi}{180}$

$\Rightarrow x = \frac{-60\pi}{180} = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$

$\frac{4\pi}{3}$

$\frac{\frac{4\pi}{3}}{x} = \frac{\pi}{180}$

$\Rightarrow x = \frac{180\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\pi} = \boxed{240^\circ}$

$-\frac{\pi}{6}$

$\frac{-\frac{\pi}{6}}{x} = \frac{\pi}{180}$

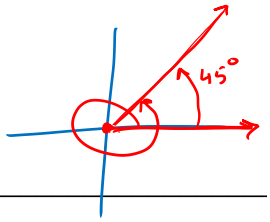
$\Rightarrow x = \frac{180\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\pi} = \boxed{-30^\circ}$

إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء ورسمها

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع رسم زاوية موجبة وزاوية سالبة مشتركة مع ضلع الانتهاء مع الزاوية

Identify all angles that are coterminal with the given angle. Then find and draw one positive and one negative angle coterminal with the given angle.

45°

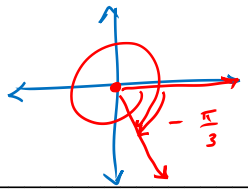


$45 + 360(n)$: n عدد صحيح

زاوية موجبة $n=1 \Rightarrow 45 + 360(1) = \boxed{405^\circ}$

زاوية سالبة $n=-1 \Rightarrow 45 + 360(-1) = \boxed{-315^\circ}$

$-\frac{\pi}{3}$



$-\frac{\pi}{3} + 2\pi(n)$: n عدد صحيح

زاوية موجبة $n=1 \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi(1)$

$= -\frac{\pi}{3} + \frac{6}{3}\pi$

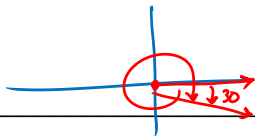
$= \boxed{\frac{5}{3}\pi}$

زاوية سالبة $n=-1$ $-\frac{\pi}{3} + 2\pi(-1)$

$= -\frac{\pi}{3} - \frac{6}{3}\pi$

$= -\frac{7}{3}\pi = \boxed{-\frac{7\pi}{3}}$

-30°



$-30 + 360n$, n عدد صحيح

زاوية موجبة $n=1 \Rightarrow -30 + 360(1) = \boxed{330^\circ}$

زاوية سالبة $n=-1 \Rightarrow -30 + 360(-1) = \boxed{-390^\circ}$

$\frac{3\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi(n)$

زاوية موجبة $n=1 \Rightarrow \frac{3\pi}{4} + 2\pi(1)$

$= \frac{3\pi}{4} + \frac{8}{4}\pi$

$= \boxed{\frac{11\pi}{4}}$

زاوية سالبة $n=-1 \Rightarrow \frac{3\pi}{4} + 2\pi(-1)$

$= \frac{3\pi}{4} - \frac{8\pi}{4}$

$= \boxed{\frac{-5\pi}{4}}$

إيجاد طول القوس

$S = r\theta$

جد طول القوس المحصور في كل دائرة باستخدام القياسات المعطاة لكل من الزاوية المركزية ونصف القطر. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

Find the length of the intercepted arc in each circle with the given central angle measure and radius. Round to the nearest tenth.

$\frac{\pi}{4}, r = 5$ cm

$S = r\theta$

$= 5\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= 5\left(\frac{3.14}{4}\right)$

$= \boxed{3.9}$ cm

$60°, r = 2$ cm

$\frac{x}{60} = \frac{\pi}{180}$ أولاً: نحول الزاوية من الدرجات إلى الراديان

$\Rightarrow x = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

ثانياً: نطبق القانون $S = r\theta$

$S = 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2(3.14)}{3} = \boxed{2.1}$ cm

$\frac{2\pi}{3}, r = 2$ m

$S = r\theta$

$= 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \boxed{4.2}$ m

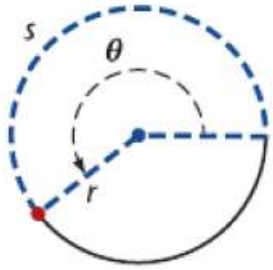
$135°, r = 0.5$ m

$\frac{x}{135} = \frac{\pi}{180}$ نحول من الدرجات إلى الراديان

$\Rightarrow x = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow S = r\theta \Rightarrow S = 0.5\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{1.2}$ m

إيجاد السرعة الزاوية والخطية



السرعة الخطية $v = \frac{s}{t}$

السرعة الزاوية $w = \frac{\theta}{t}$

ركوب الدراجة يقود الساعي دراجة كما هو مبين.

a. خلال عملية توصيل واحدة، تدور الإطارات بمعدل 140 دورة في الدقيقة. جد السرعة الزاوية للإطارات في الدقيقة بقياس راديان.

b. في جزء من الطريق خلال مهمة التوصيل التالية، يدور الإطار بمعدل ثابت بمقدار 2.5 دورة لكل ثانية. جد السرعة الخطية للإطار بمعدل ميل لكل ساعة.

1 mi = 63 360 in

دقيقة واحدة

محاذن زاوية الدورة الواحدة = 2π

بما أن ⇐ 140 دورة = $2\pi \times 140$

[a] $w = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi(140)}{1} = 280\pi = 879.6$ rad/s

[b] $V = \frac{s}{t} = \frac{15(2\pi)(2.5)}{1}$ in $\times \frac{60\times60}{1}$ $\times \frac{1 \text{ mi}}{63360 \text{ in}} = \frac{375}{88}\pi = 13.387$ mi/h

$\theta = (2\pi)2.5$ ⇐ 2.5 دورة

$r = 15$ in ⇐ نصف القرص

$\Rightarrow s = r\theta = 15(2\pi)(2.5)$ in

الوسائط

لاحظ جهاز DVD المبين.

A. جد السرعة الزاوية لجهاز DVD بالراديان لكل ثانية إذا كان القرص يدور بمعدل 3.5 دورة في الثانية.

B. إذا كان مشغل DVD قد سخن بشدة وبدأ دوران القرص يبطئ بمعدل 3 دورة في الثانية. فجد السرعة الخطية للقرص بالمتر لكل دقيقة.

[A] $w = \frac{\theta}{t} = \frac{3.5(2\pi)}{1} = 7\pi \approx 22$ rad/s

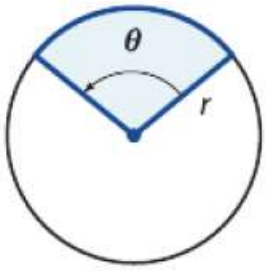
$\theta = (2\pi)3.5$ ⇐ 3.5 دورة

[B] $V = \frac{s}{t} = \frac{60(3)(2\pi)}{1}$ mm $\times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} = \frac{108\pi}{5} = 67.86$ m/min

$\theta = 3(2\pi)$ ⇐ 3 دورة

$r = 60$ mm

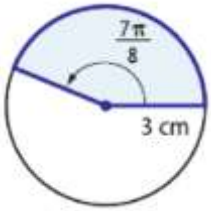
$\Rightarrow s = 60(3)(2\pi)$ mm



مساحة القطاع الدائري $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

جد مساحة القطاع الدائري بواسطة الزاوية المركزية المعطاة θ ونصف القطر r.

Find the area of the sector of a circle with the given central angle θ and radius r.



$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

$= \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$= \frac{63\pi}{16}$

$= 12.37 \text{ cm}^2$

$\theta = \frac{3\pi}{4}, r = 1.5 \text{ ft}$

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

$= \frac{1}{2}(1.5)^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 2.65 \text{ ft}^2$

$\theta = 50°, r = 6 \text{ m}$

نحول θ من الدرجات إلى الراديان

$\frac{x}{50} = \frac{\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{50\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$

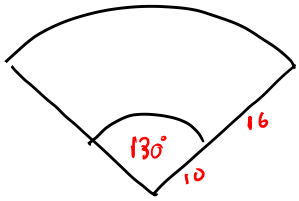
$\Rightarrow A = \frac{1}{2}r^2\theta$

$= \frac{1}{2}(6)^2\left(\frac{5\pi}{18}\right)$

$= 5\pi$

$= 15.71 \text{ m}^2$

الماسحات جد المساحة التقريبية التي مسحتها شفرة المسّاحة المبينة، إذا كان طول مسّاحة الزجاج الأمامي كله 26 بوصة.



$\frac{\theta}{130} = \frac{\pi}{180} \Rightarrow \theta = \frac{130\pi}{180} = \frac{13\pi}{18}$

$A_1 = \frac{1}{2}r^2\theta$

$= \frac{1}{2}(26)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right)$

$A_2 = \frac{1}{2}(10)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right)$

المساحة المطلوبة $= A_1 - A_2$

$= \frac{1}{2}(26)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right) - \frac{1}{2}(10)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right)$

$= 208\pi \text{ in}$

$= 653.45 \text{ in}$

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

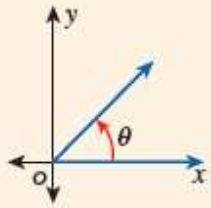
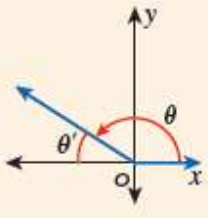
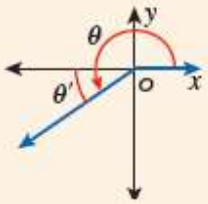
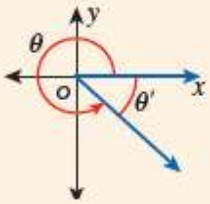
https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام | 4-3 النسب المثلثية على دائرة الوحدة | الاسم: _____

نواتج التعلّم: 1– إيجاد قيم النسب المثلثية لأي زاوية. 2– إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

الزوايا المرجعية

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$	$\theta' = 360° - \theta$

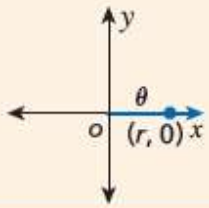
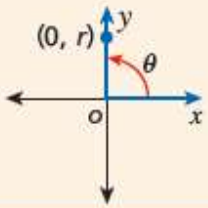
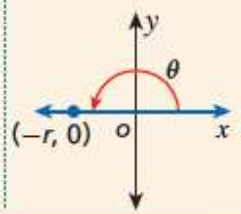
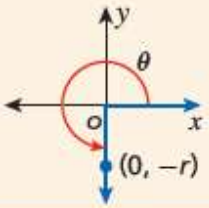
النسب المثلثية

إذا كانت P نقطة على ضلع الانتهاء لزاوية θ في الوضع القياسي

وكان $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ فإن:

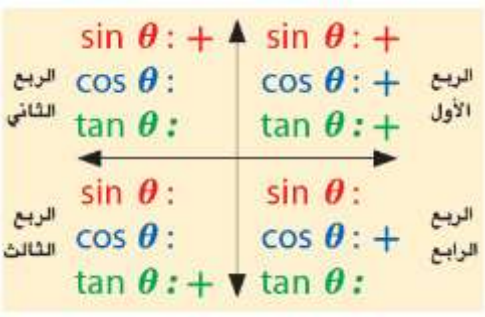
الظل	جيب التمام	الجيب
$\tan\theta = \frac{y}{x}$	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$\sin\theta = \frac{y}{r}$

الزوايا الربعية

$\theta = 0°$	$\theta = 90°$	$\theta = 180°$	$\theta = 270°$
			

النسب المثلثية للزوايا الربعية

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
90°	+1	0	غير معرّف
180°	0	−1	0
270°	−1	0	غير معرّف
360°	0	1	0



قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة

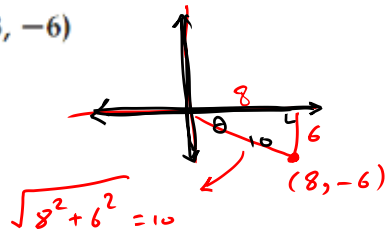
sine	cosine	Tangent
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$

إيجاد قيم النسب المثلثية عند معرفة نقطة

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في وضع قياسي. جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

The given point lies on the terminal side of an angle θ in standard position. Find the values of the six trigonometric functions of θ.

(8, −6)

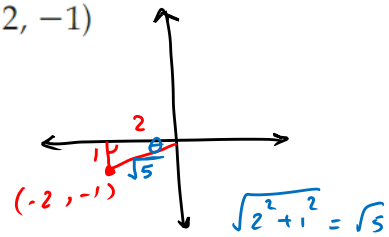


$\sin\theta = \frac{-6}{10}$ $\quad \csc\theta = \frac{-10}{6}$

$\cos\theta = \frac{8}{10}$ $\quad \sec\theta = \frac{10}{8}$

$\tan\theta = \frac{-6}{8}$ $\quad \cot\theta = \frac{-8}{6}$

(−2, −1)

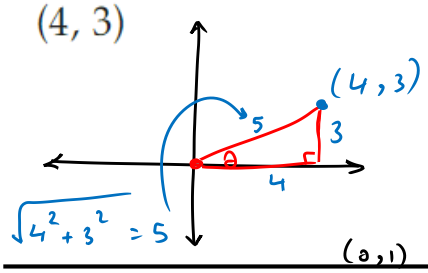


$\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ $\quad \csc\theta = -\sqrt{5}$

$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ $\quad \sec\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\tan\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \cot\theta = 2$

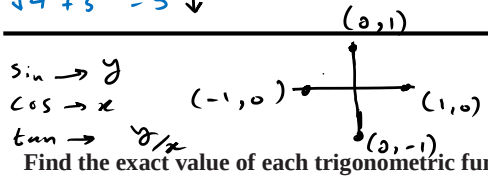
(4, 3)



$\sin\theta = \frac{3}{5}$ $\quad \csc\theta = \frac{5}{3}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\quad \sec\theta = \frac{5}{4}$

$\tan\theta = \frac{3}{4}$ $\quad \cot\theta = \frac{4}{3}$



إيجاد قيمة النسب المثلثية للزوايا الربعية

جد قيمة كل نسبة مثلثية. إذا كانت معرّفة. إذا لم تكن معرّفة فاكتب غير معرّفة.

Find the exact value of each trigonometric function, if defined. If not defined, write undefined.

$\sin(-180°)$ $= 0$ (y)

النقطة $(-1,0)$

$\tan\frac{3\pi}{2}$

$\frac{y}{x} = \frac{-1}{0}$ غير معرفة

النقطة $(0,-1)$

$\sec 4\pi$ $\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{1}{\cos 4\pi} = \frac{1}{1} = 1$

النقطة $(1,0)$

$\cos 270°$ $= 0$ (x)

النقطة $(0,-1)$

$\csc\frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{1}{y}\right)$

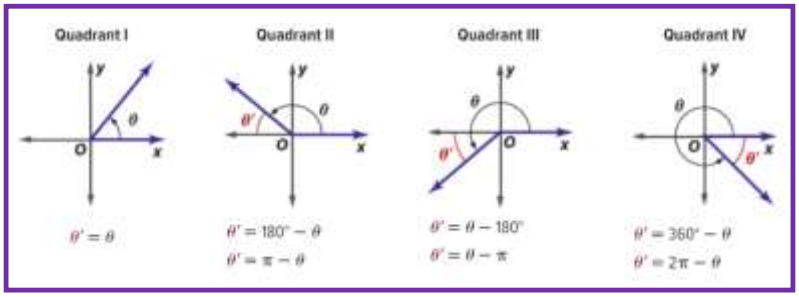
$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$

النقطة $(0,1)$

$\cot(-90°)$ $\left(\frac{x}{y}\right)$

$\frac{1}{\tan(-90)} = \frac{1}{\frac{-1}{0}} = \frac{0}{-1} = 0$

النقطة $(0,-1)$



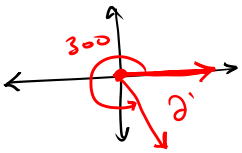
قواعد زاوية المرجع

إيجاد زوايا المرجع

Sketch each angle. Then find its reference angle.

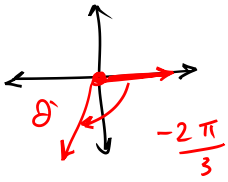
ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع.

300°



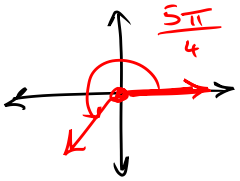
$\theta' = 360 - 300 = 60°$

$-\frac{2\pi}{3}$



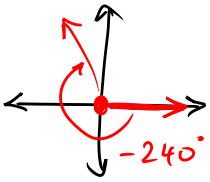
$\theta' = \pi - \frac{2\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

$\frac{5\pi}{4}$



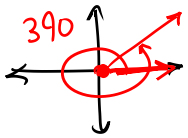
$\theta' = \frac{5\pi}{4} - \pi = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

$-240°$



$\theta' = 240 - 180 = \boxed{60°}$

390°



$\theta = 390 - 360 = \boxed{30°}$

استخدام زوايا المرجع لإيجاد القيم المثلثية

Find the exact value of each expression.

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

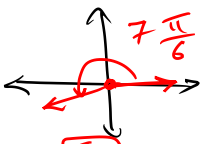
cos 120° (ق ث)

$\theta' = 180 - 120 = 60$

$\cos 120 = -\cos 60$

$= \boxed{-\frac{1}{2}}$

$\tan\frac{7\pi}{6}$



$\theta' = \frac{7\pi}{6} - \pi = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

$\tan\frac{7\pi}{6} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

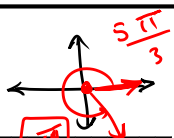
$\csc\frac{15\pi}{4}$

$\theta' = 4\pi - \frac{15\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

$\csc\frac{15\pi}{4} = -\csc\frac{\pi}{4}$

$= \boxed{-\sqrt{2}}$

$\tan\frac{5\pi}{3}$

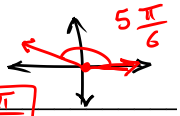


$\theta' = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

$\tan\frac{5\pi}{3} = -\tan\frac{\pi}{3}$

$= \boxed{-\sqrt{3}}$

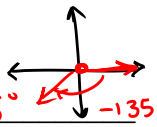
$\sin\frac{5\pi}{6}$



$\theta' = \pi - \frac{5\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\sec(-135°)$



$\theta' = 180 - 135 = 45°$

$\sec(-135) = -\sec 45$

$= \boxed{-\sqrt{2}}$

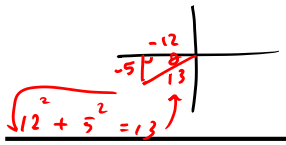
استخدام قيمة نسبة مثلثية واحدة لإيجاد قيم النسب الأخرى

Find the exact values of the five remaining trigonometric functions of θ.

جد قيم النسب الخمسة المثلثية المتبقية للزاوية θ.

$\tan\theta = \frac{5}{12}$, where $\sin\theta < 0$.

θ الربع الثالث



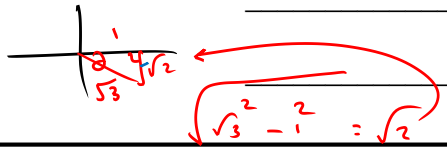
$\sin\theta = \frac{-5}{13}$ $\quad \csc\theta = \frac{-13}{5}$

$\cos\theta = \frac{-12}{13}$ $\quad \sec\theta = \frac{-13}{12}$

$\tan\theta = \frac{5}{12}$ $\quad \cot\theta = \frac{12}{5}$

$\sec\theta = \sqrt{3}$, $\tan\theta < 0$

θ الربع الرابع



$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\quad \csc\theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \sec\theta = \sqrt{3}$

$\tan\theta = -\sqrt{2}$ $\quad \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{5}{7}$, $\cot\theta > 0$

الربع الأول

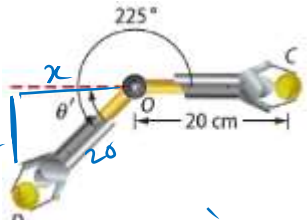
$\sin\theta = \frac{5}{7}$ $\quad \csc\theta = \frac{7}{5}$

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ $\quad \sec\theta = \frac{7}{2\sqrt{6}}$

$\tan\theta = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ $\quad \cot\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

إيجاد الإحداثيات بمعرفة نصف القطر وزاوية

تطبيقات الإنسان الآلي كجزء من فئة مدى الحركة في مسابقة المدرسة الثانوية حول تطبيقات الإنسان الآلي. برمج أحد الطلاب ذراعًا آليًا بطول 20 cm ليلتقط شيئًا عند نقطة C ويدور بزاوية $225°$ بالضبط ليضع الشيء في حاوية عند النقطة D. جد وضع الشيء عند النقطة D، بالنسبة للنقطة المحورية O.



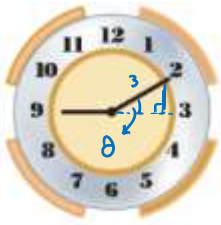
$\theta' = 225 - 180 = 45°$

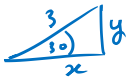
$\cos 225 = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 20\cos 225 = 20\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10\sqrt{2}$

$\sin 225 = \frac{y}{20} \Rightarrow y = 20\sin 225 = 20\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10\sqrt{2}$

الإحداثي $= (-10\sqrt{2}, -10\sqrt{2})$

آلية الساعة عقرب الدقائق بطول 3 in . ما وضع طرف عقرب الدقائق بالنسبة لنقطة المركز؟





$\theta = \frac{360}{12} = 30°$

$\sin 30 = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 3\sin 30 = 3\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5$

$\cos 30 = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\cos 30 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

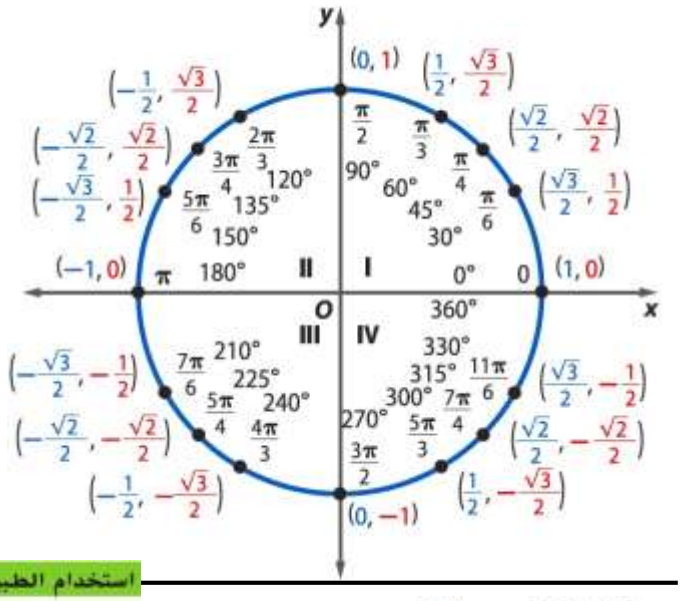
إذًا الإحداثيات لطرف عقرب الدقائق $= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1.5\right)$

sin → y
cos → x
tan → y/x

إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام دائرة الوحدة

Find the exact value of each expression. If undefined, write *undefined*. جد قيمة كل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة.

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (y)	$\cos 135° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ (x)
$\csc\frac{11\pi}{6} = -2$ ($\frac{1}{y}$)	$\tan 270° = \frac{-1}{0}$ = غير معرف ($\frac{y}{x}$)
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (x)	$\sec\frac{7\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ ($\frac{1}{x}$)
$\cot 210° = \sqrt{3}$ ($\frac{y}{x}$)	$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (y)



استخدام الطبيعة الدورية للنسب الدائرية

Find the exact value of each expression. جد قيمة كل تعبير مما يلي.

$\cos\frac{11\pi}{4}$

$= \cos\left(\frac{11\pi}{4} - 2\pi\right)$
$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$= \frac{-\sqrt{2}}{2}$ من دائرة الوحدة

$\tan\frac{19\pi}{6}$

$\frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$
$= \tan\left(\frac{19\pi}{6} - 3\pi\right)$
$= \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$= \frac{1}{\sqrt{3}}$ من دائرة الوحدة
$= \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)$
$= \sin\frac{4\pi}{3}$
$= \frac{-\sqrt{3}}{2}$ من دائرة الوحدة

$\sin\frac{13\pi}{4}$

$= \sin\left(\frac{13\pi}{4} - 2\pi\right)$
$= \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
$= \frac{-\sqrt{2}}{2}$ من دائرة الوحدة

$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right)$
$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$= \frac{-1}{2}$ من دائرة الوحدة

$\tan\frac{15\pi}{6}$

$= \tan\left(\frac{15\pi}{6} - 2\pi\right)$
$= \tan\left(\frac{3\pi}{6}\right)$
$= \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$= \frac{1}{0}$ من دائرة الوحدة
= غير معرفة

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام | 4-4 تمثيل دوال sine و cosine بيانيا | الاسم:_____

نواتج التعلّم: 1– تمثيل التحويلات لدوال الـ sine و cosine بيانيا. 2- استخدام دوال الـ sine لحل المسائل.

خصائص دالة الـ sine و cosine

دالة الـ cosine

المدى : $[-1, 1]$ المجال : $(-\infty, \infty)$

مقطع y : 1

مقطع x : $\frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$

الاتصال : continuous on $(-\infty, \infty)$

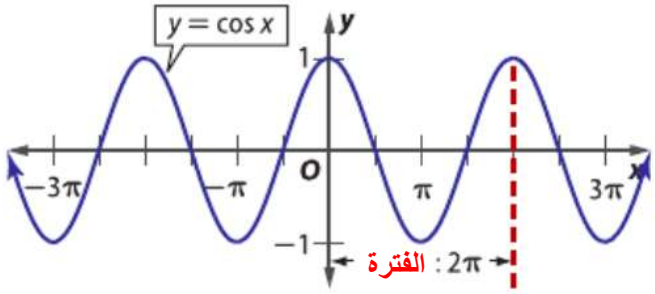
التناظر : y-axis (even function)

القيم القصوى : maximum of 1 at $x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

minimum of -1 at $x = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

السلوك الطرفي : $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ and $\lim_{x \to \infty} \cos x$ do not exist.

التذبذب : between -1 and 1



دالة الـ sine

المدى : $[-1, 1]$ المجال : $(-\infty, \infty)$

مقطع y : 0

مقطع x : $n\pi, n \in \mathbb{Z}$

الاتصال : continuous on $(-\infty, \infty)$

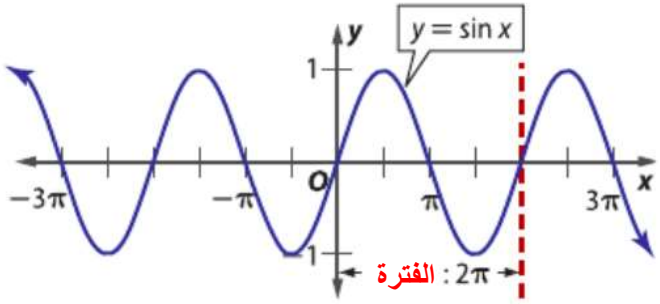
التناظر : origin (odd function)

القيم القصوى : maximum of 1 at $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

minimum of -1 at $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

السلوك الطرفي : $\lim_{x \to -\infty} \sin x$ and $\lim_{x \to \infty} \sin x$ do not exist.

التذبذب : between -1 and 1



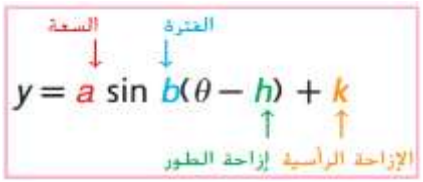
سعة منحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

التمثيل البياني للدوال المثلثية في صورتها العامة : $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$

سعتها $|a|$، وطول دورتها (فترتها) $\frac{2\pi}{|b|}$.

يتم وصف موجات الصوت عادة باستخدام **التردد**، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن. ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالة نجد مقلوب طول الدورة

$$\text{التردد} = \frac{1}{\text{طول الدورة}}$$



نقاط التقاطع مع المحور الأفقي

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$

تغيير الأبعاد (التمدّد) الرأسي بمقياس التمثيل البياني للدوال الجيبية (sinusoid)

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، وارسم فترتين لكلتا الدالتين على محاور الإحداثيات نفسها.

Describe how the graphs of $f(x)$ and $g(x)$ are related. Then find the amplitude of $g(x)$, and sketch two periods of both functions on the same coordinate axes.

$f(x) = \sin x$

$g(x) = \frac{1}{4}\sin x$

الفترة = 2π (x نقاط تقاطع ← $0, \pi, 2\pi, \ldots$

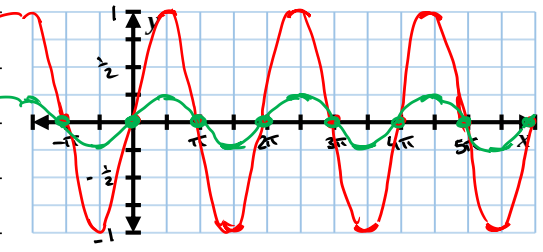
السعة = $\frac{1}{4}$

الفترة = 2π

نقاط تقاطع x = $0, \pi, 2\pi, \ldots$

$f(x)$ ضعف على ضعف $g(x)$

وذلك بعد الانكماش الرأسي بعامل $\frac{1}{4}$



$f(x) = \cos x$

$g(x) = \frac{1}{3}\cos x$

السعة = 1 (الفترة = 2π (نقاط تقاطع x ← $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

السعة = $\frac{1}{3}$

الفترة = 2π

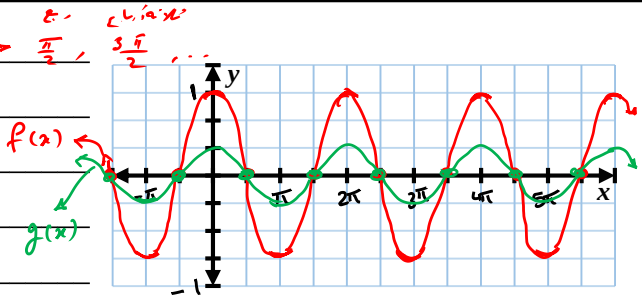
نقاط التقاطع = نفس نقاط الصورة ، نفس الصورة

$\frac{1}{4}(2\pi)$ ، $\frac{3}{4}(2\pi)$

$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

$f(x)$ ضعف على $g(x)$

وذلك بعد الانكماش الرأسي بعامل $\frac{1}{3}$



$f(x) = \cos x$

$g(x) = 2\cos x$

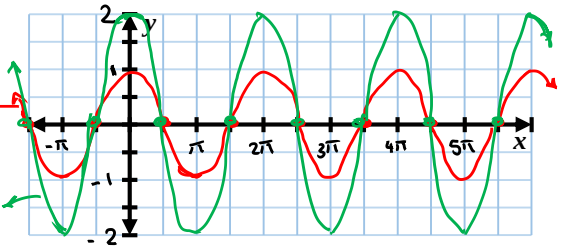
السعة = 2

الفترة = 2π

نقاط التقاطع x = $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

$f(x)$ ضعف على $g(x)$

وذلك بالتمدد الرأسي معامله 2



$f(x) = \sin x$

$g(x) = 5\sin x$

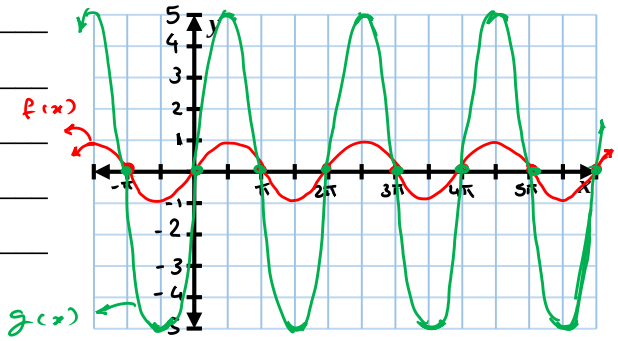
السعة = 5

الفترة = 2π

نقاط التقاطع x ← $0, \pi, 2\pi$

$f(x)$ ضعف على $g(x)$

وذلك بالتمدد الرأسي الذي معامله 5



انعكاس التمثيل البياني للدوال الجيبية (sinusoid)

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، وارسم فترتين لكلتا الدالتين على محاور الإحداثيات نفسها.

Describe how the graphs of $f(x)$ and $g(x)$ are related. Then find the amplitude of $g(x)$, and sketch two periods of both functions on the same coordinate axes.

$f(x) = \cos x$

$g(x) = -3\cos x$ ←

السعة $= |-3| = 3$

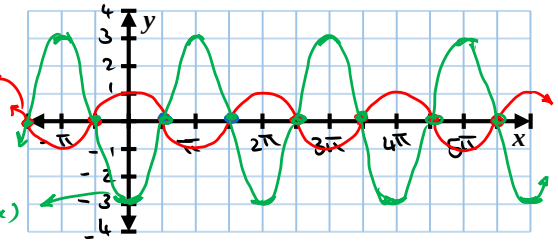
الفترة $= 2\pi$

نقاط التقاطع مع x ← $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ ....

$f(x)$ يسبق $g(x)$ بـ

وذلك بعد المدى الرئيسي الذي معادلته

ثم الانعكاس في محور x



$f(x) = \cos x$

$g(x) = -\frac{1}{5}\cos x$

السعة $= \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$

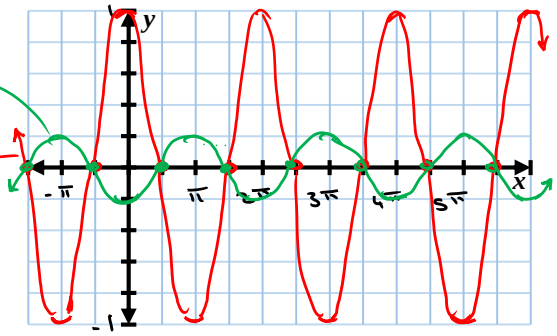
الفترة $= 2\pi$

نقاط تقاطع x ← $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$

$f(x)$ يسبق $g(x)$ بـ

وذلك بالانكماش الرئيسي الذي معادله $\frac{1}{5}$

ثم الانعكاس في محور x



$f(x) = \sin x$

$g(x) = -4\sin x$

السعة $= |-4| = 4$

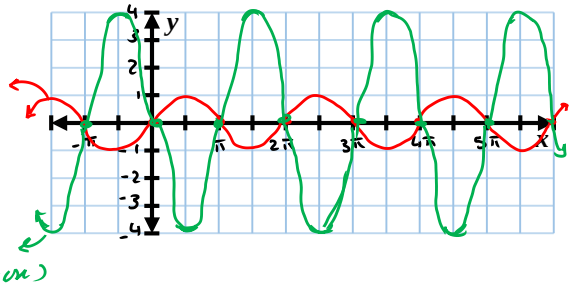
الفترة $= 2\pi$

نقاط تقاطع x ← 0 , π , 2π

$f(x)$ يسبق $g(x)$ بـ

وذلك بمقدار المدى الرئيسي الذي معادله 4

ثم انعكاس في محور x



تمثيل التوسع الأفقي للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيًا

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم جد دورة $g(x)$، وارسم على الأقل دورة واحدة لكل دالة على المحاور الإحداثية نفسها.

Describe how the graphs of $f(x)$ and $g(x)$ are related. Then find the period of $g(x)$, and sketch at least one period of each function on the same coordinate axes.

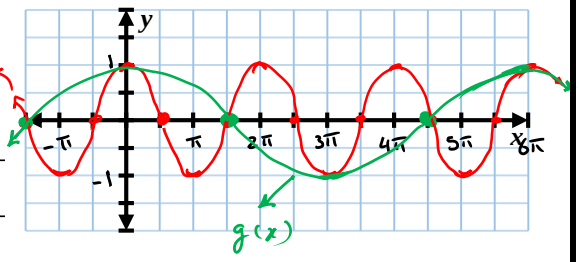
$f(x) = \cos x$

$g(x) = \cos \frac{x}{3}$ ←

السعة = 1

الفترة = $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

نقاط التقاطع ← مع المحور x : $\frac{1}{4}(6\pi) = \frac{3\pi}{2}$ ، ثلاثة أرباع الدورة : $\frac{3}{4}(6\pi) = \frac{9\pi}{2}$



تحصل على $g(x)$ من $f(x)$ بتمدد أفقي بالمعامل (3)

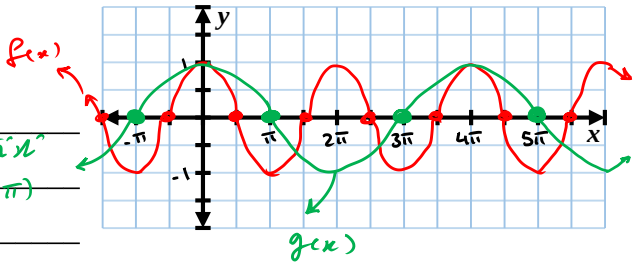
$f(x) = \cos x$

$g(x) = \cos \frac{x}{2}$ ←

السعة = 1

الفترة = $\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$

نقاط تقاطع x ← مع المحور x : $\frac{1}{4}(4\pi) = \pi$ ، ثلاثة أرباع الدورة : $\frac{3}{4}(4\pi) = 3\pi$



تحصل على $g(x)$ من $f(x)$ بتمدد أفقي بالمعامل (4)

$f(x) = \sin x$

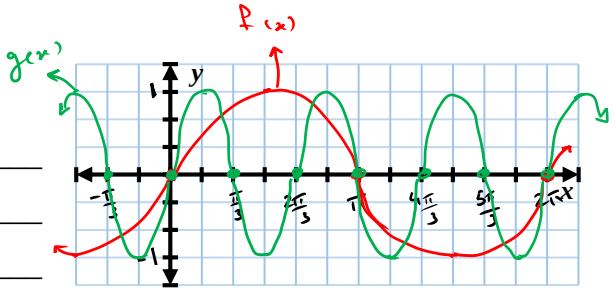
$g(x) = \sin 3x$ ←

السعة = 1

الفترة = $\frac{2\pi}{3}$

نقاط تقاطع x ← مع المحور x : 0 ، $\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$

0 ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$



تحصل على $g(x)$ من $f(x)$ بتمدد أفقي بالمعامل $(\frac{1}{3})$

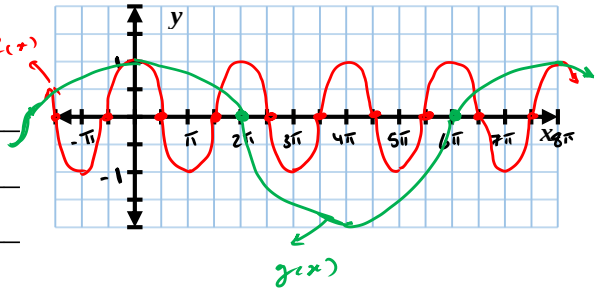
$f(x) = \cos x$

$g(x) = \cos \frac{1}{4}x$ ←

السعة = 1

الفترة = $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

نقاط التقاطع x ← مع المحور x : $\frac{1}{4}(8\pi) = 2\pi$ ، $\frac{3}{4}(8\pi) = 6\pi$



تحصل على $f(x)$ من $g(x)$ بتمدد أفقي بالمعامل (4)

استخدام التردد لكتابة الدالة الجيبية

الموسيقى تصنف النوتات الموسيقية وفقا للتردد. وضمن المقياس المخفف ذاته، يمثل الوسط C التردد 262 هيرتز. استخدم هذه المعلومات والمعلومات التي باليسار لكتابة معادلة دالة الـ sine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C وذات سعة 0.2 .

MUSIC Musical notes are classified by frequency. In the equal tempered scale, middle C has a frequency of 262 hertz. Use this information and the information at the left to write an equation for a sine function that can be used to model the initial behavior of the sound wave associated with middle C having an amplitude of 0.2.

$|a| = 0.2 \Rightarrow a = \mp 0.2$

$\text{الدورة (الفترة)} = \frac{1}{\text{التردد}} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{1}{\text{التردد}} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{1}{262} \Rightarrow |b| = 524\pi \Rightarrow b = \mp 524\pi$

$\Rightarrow y = a \sin bt$

$y = 0.2 \sin (524\pi) t$

هذه أحد الدوال

الموسيقى في نفس المقياس. مفتاح C الذي فوق مفتاح الوسط C له تردد تكراري 524 هيرتز. اكتب معادلة لدالة الـ sine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بمفتاح C هذا الذي له سعة 0.1 .

MUSIC In the same scale, the C above middle C has a frequency of 524 hertz. Write an equation for a sine function that can be used to model the initial behavior of the sound wave associated with this C having an amplitude of 0.1.

$|a| = 0.1 \Rightarrow a = \mp 0.1$

$\text{الفترة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{1}{\text{التردد}} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{1}{524} \Rightarrow |b| = 1048\pi \Rightarrow b = \mp 1048\pi$

$\Rightarrow y = a \sin bt$

$\Rightarrow y = 0.1 \sin 1048\pi t$

هذه أحد الدوال

تمثيل الإزاحة الأفقية للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيا

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة.

State the amplitude, period, frequency, and phase shift of each function. Then graph two periods of the function.

$$y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

السعة = 1

الدورة = $\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6}$

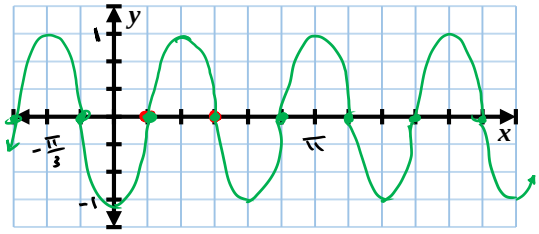
التكرار = $\frac{3}{2\pi}$

إزاحة الطور $\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2(3)} = \frac{\pi}{6}$

نقاط تقاطع x لـ $y = \sin 3x$ $\Rightarrow$ 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$

$0 + \frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{3\pi}{6}$ $\quad \frac{5\pi}{6}$



$$y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

السعة = 1

الفترة = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ $\Rightarrow$ التكرار = $\frac{1}{4\pi}$

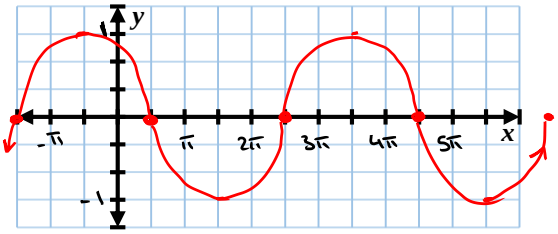
إزاحة الطور $\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}(2) = -\frac{\pi}{2}$

نقاط تقاطع x لـ $y = \cos\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}(4\pi)$, $\frac{3}{4}(4\pi)$

π $\quad , 3\pi$

x تقاطع $\Rightarrow$ $\pi - \frac{\pi}{2}$ $\quad , 3\pi - \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{5\pi}{2}$



$$y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

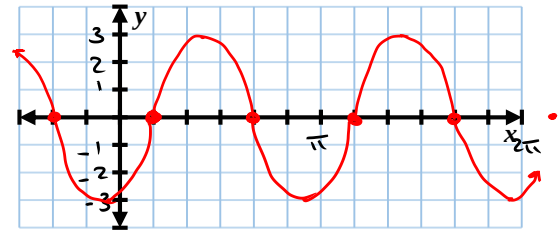
السعة = 3

الفترة = $\frac{2\pi}{2} = \pi$ $\Rightarrow$ التكرار = $\frac{1}{\pi}$

إزاحة الطور $\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3(2)} = \frac{\pi}{6}$

نقاط تقاطع محور x $\Rightarrow$ $0 + \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \pi$

$\frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{4\pi}{6}$ $\quad \frac{7\pi}{6}$



عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 علم
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

تمثيل الإزاحة الرأسية للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيا

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة.

State the amplitude, period, frequency, phase shift, and vertical shift of each function. Then graph two periods of the function.

$$y = \sin(x + 2\pi) - 1$$

السعة = 1

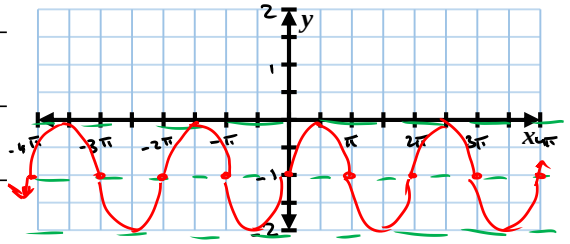
الدورة = $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$ ⇒ التكرار = $\frac{1}{2\pi}$

إزاحة الطور ⇒ $x + 2\pi = 0 \Rightarrow x = -2\pi$

الإزاحة الرأسية ⇒ -1 ⇒ خط المتوسط ⇒ $y = -1$ صفوف لأسفل

نقاط التقاطع مع خط المتوسط ⇒ $0 - 2\pi$, $\pi - 2\pi$, $2\pi - 2\pi$

-2π $-\pi$ 0



$$y = 2\cos x + 1$$

السعة = 2

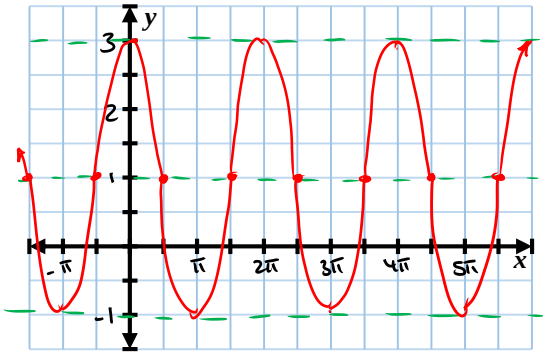
الدورة = 2π التكرار = $\frac{1}{2\pi}$

إزاحة الطور = 0

الإزاحة الرأسية = 1 ⇒ خط المتوسط ⇒ $y = 1$

نقاط تقاطع خط المتوسط ⇒ $\frac{1}{4}(2\pi)$, $\frac{3}{4}(2\pi)$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$



$$y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - 3$$

السعة = $\frac{1}{2}$

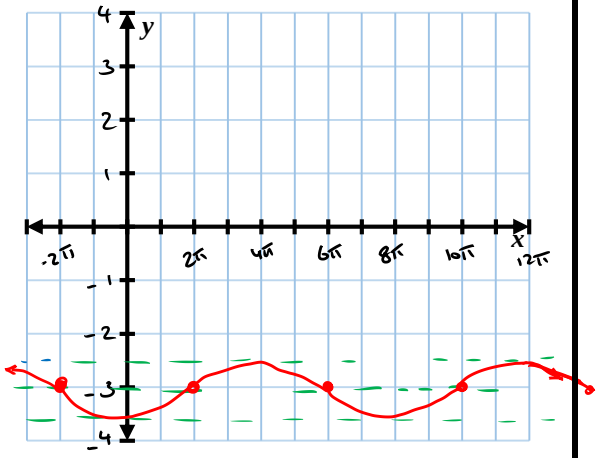
الدورة = $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ ⇒ التكرار = $\frac{1}{8\pi}$

إزاحة الطور ⇒ $\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}(4) = 2\pi$

الإزاحة الرأسية = -3 ⇒ خط المتوسط ⇒ $y = -3$

نقاط تقاطع خط المتوسط ⇒ $0 + 2\pi$, $4\pi + 2\pi$, $8\pi + 2\pi$

2π 6π 10π



تمثيل البيانات باستخدام الدوال الجيبية (sinusoid)

الأرصاد الجوية استخدم المعلومات الموجودة على اليسار لكتابة دالة جيبية تمثل عدد ساعات النهار في مدينة نيويورك كدالة زمن x بحيث $x = 1$ تمثل 15 يناير و $x = 2$ تمثل 15 فبراير وهكذا. ثم استخدم تمثيلك لتقدير عدد ساعات النهار في 30 سبتمبر في نيويورك.

عدد ساعات النهار في الخامس عشر من كل شهر في مدينة نيويورك.

	Month	Hours of Daylight
1	January	9.58
2	February	10.67
3	March	11.9
4	April	13.3
5	May	14.43
6	June	15.07
7	July	14.8
8	August	13.8
9	September	12.48
10	October	11.15
11	November	9.9
12	December	9.27

Source: U.S. Naval Observatory

METEOROLOGY Use the information at the left to write a sinusoidal function that models the number of hours of daylight for New York City as a function of time x, where $x = 1$ represents January 15, $x = 2$ represents February 15, and so on. Then use your model to estimate the number of hours of daylight on September 30 in New York City.

$y = a\cos(bx+c)+d$ سوف نستخدم هذه القاعدة

السعة $= \frac{1}{2}$(عظمى − صغرى) $= \frac{1}{2}(15.07 - 9.27) = 2.9 \Rightarrow a = 2.9$

الإزاحة الرأسية $= \frac{1}{2}$(عظمى + صغرى) $= \frac{1}{2}(15.07 + 9.27) = 12.17 \Rightarrow d = 12.17$

طول القوس $= 2|$عظمى $_2$ − صغرى $_2$ $| = 2|6 - 12| = 12$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 12 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{12} \Rightarrow b = \pm\frac{\pi}{6}$

الإزاحة الأفقية $\rightarrow 6 \rightarrow$ العظمى في المسألة الأولى عند $x = 6$

$\Rightarrow bx + c = 0$

$x = \frac{-c}{b} = 6 \Rightarrow c = -6b = -6\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\pi$

$\Rightarrow y = 2.9\cos\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) + 12.17$

سبتمبر 15 = 9
أكتوبر 15 = 10
سبتمبر 30 = 9.5

$\Rightarrow y = 2.9\cos\left(\frac{\pi}{6}(9.5) - \pi\right) + 12.17 = 11.42$ درجة

الأرصاد الجوية متوسط درجات الحرارة الشهرية في سياتل، واشنطن، موضحة أدناه.

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
درجة الحرارة (°)	41	44	47	50	56	61	65	66	61	54	46	42

اكتب دالة تمثل درجات الحرارة الشهرية، باستخدام $x = 1$ لتمثل شهر يناير.

وفقًا لنموذجك، ما متوسط درجة الحرارة الشهرية في سياتل في شهر فبراير؟

السعة $= \frac{1}{2}(66 - 41) = 12.5 \Rightarrow a = 12.5$

الإزاحة الرأسية $d \rightarrow \frac{1}{2}(66 + 41) = 53.5 \Rightarrow d = 53.5$

الدورة $= 2(8 - 1) = 14 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 14 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$

الإزاحة الأفقية $= 8 \Rightarrow bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-c}{b} \Rightarrow \frac{-c}{b} = 8 \Rightarrow c = -8b = -8\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{-8\pi}{7}$

$\Rightarrow y = 12.5\cos\left(\frac{\pi}{7}x - \frac{8\pi}{7}\right) + 53.5$

شهر فبراير $\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 12.5\cos\left(\frac{\pi}{7}(2) - \frac{8\pi}{7}\right) + 53.5 = 42.237$ درجة

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

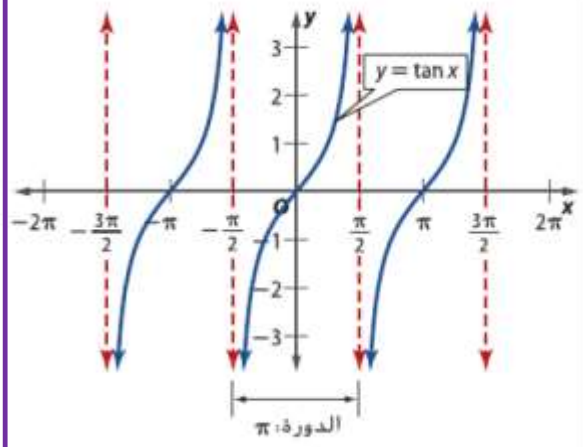
https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام | 4-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى | الاسم: _____

نواتج التعلّم: 1– تمثيل دالة الـ tan بيانيا ومقلوب الدوال المثلثية. 2- تمثيل الدوال المثلثية المتضائلة بيانيا.

خصائص الـ tan



المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطعات مع المحور x: $n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التقاطع مع المحور y: 0

الاتصال: اتصال لانهائي عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

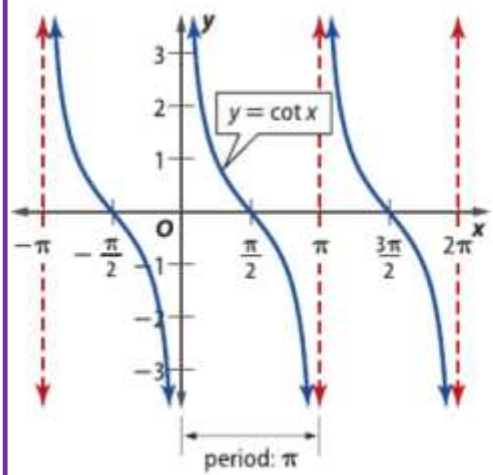
خطوط التقارب: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر الأصل (دالة فردية)

قيم قصوى: لا يوجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \tan x$ و $\lim_{x \to \infty} \tan x$ غير موجود. تذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.

خصائص الـ cotan



المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطعات مع المحور x: $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التقاطع مع المحور y: لا يوجد

الاتصال: اتصال لانهائي عند $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط التقارب: $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر نقطة الأصل (دالة فردية)

قيم قصوى: لا يوجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \cot x$ و $\lim_{x \to \infty} \cot x$ غير موجودة. تذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.

$y = a \cot b\theta$	$y = a \tan b\theta$
الدورة $= \frac{\pi}{\lvert b \rvert}$	الدورة $= \frac{\pi}{\lvert b \rvert}$
عدد صحيح n : n(الدورة) = نقاط تقاطع محور x	عدد صحيح n : n(الدورة) = نقاط تقاطع محور
عدد فردي n : $\frac{1}{2}n$(الدورة) = خطوط التقارب	عدد فردي n : $\frac{1}{2}n$(الدورة) = خطوط التقارب

تغيير الأبعاد (التمدد) الأفقي بمقياس التمثيل البياني لدالة الـ tan

Locate the vertical asymptotes, and sketch the graph of each function. حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًا كل دالة.

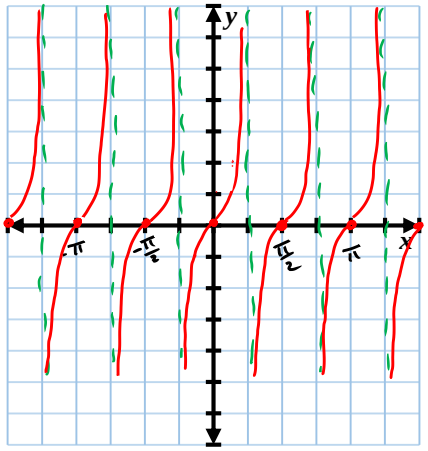
$y = \tan 2x$

الدورة = $\frac{\pi}{2}$

خطوط التقارب ⇒ $x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)n$: فردي

$= \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$

x نقاط تقاطع ⇒ $\frac{\pi}{2}n \rightarrow 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots$



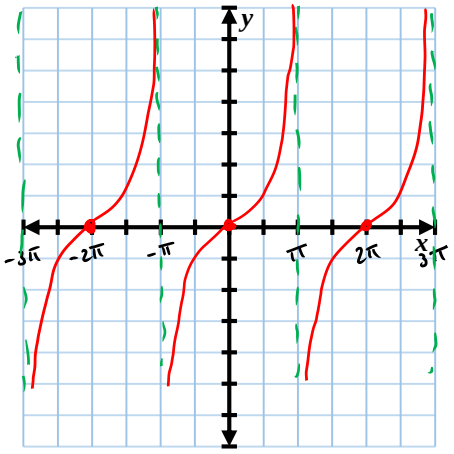
$y = \tan \frac{x}{2}$

الدورة = $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

خطوط التقارب = $\frac{1}{2}(2\pi)n$ / فردي

$\Rightarrow \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$

x نقاط التقاطع ⇒ $2\pi n \Rightarrow 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$



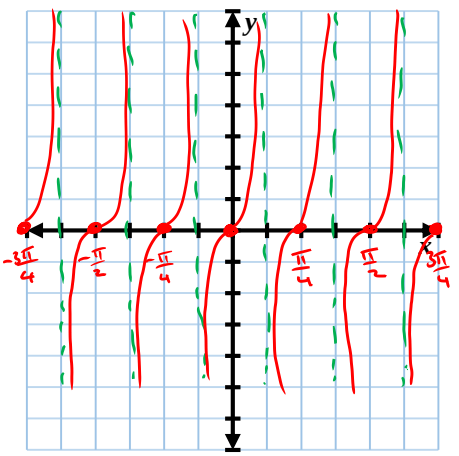
$y = \tan 4x$

الدورة = $\frac{\pi}{4}$

خطوط التقارب ⇒ $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)n$ ← فردي

$\Rightarrow \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \ldots$

x نقاط تقاطع ⇒ $\frac{\pi}{4}n \Rightarrow 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \ldots$



التمثيل البياني لانعكاس دالة الـ tan وانسحاباتها

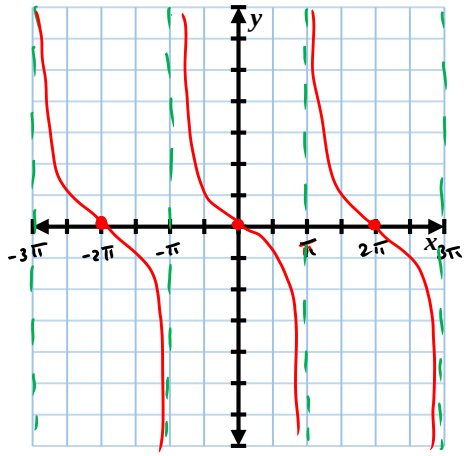
Locate the vertical asymptotes, and sketch the graph of each function. حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًا كل دالة.

$y = -\tan \frac{x}{2}$ ← الدورة $2\pi = \frac{\pi}{\frac{1}{2}}$

خطوط التقارب ⇒ $\frac{1}{2}(2\pi)n = \pi n$ ← فردي

$\Rightarrow \pi, 3\pi, 5\pi$

x نقاط التقاطع ⇒ $2\pi n \Rightarrow 0, 2\pi, 4\pi$



$y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

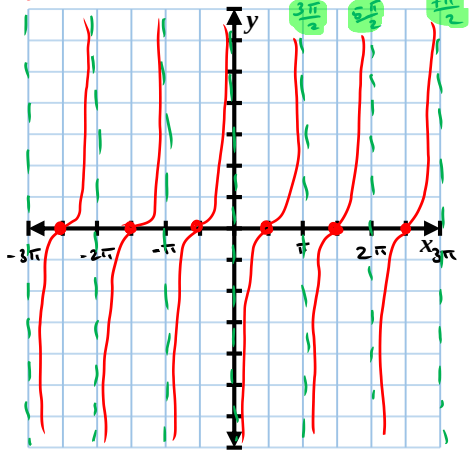
الدورة = $\frac{\pi}{1} = \pi$

إزاحة أفقية $\frac{3\pi}{2}$ ←

خطوط التقارب ⇒ $\frac{1}{2}\pi n = \frac{\pi}{2}n$ فردي n

$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$

x نقاط التقاطع ⇒ $\pi n \Rightarrow 0 + \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}, 2\pi + \frac{3\pi}{2}$



$y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

الدورة $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

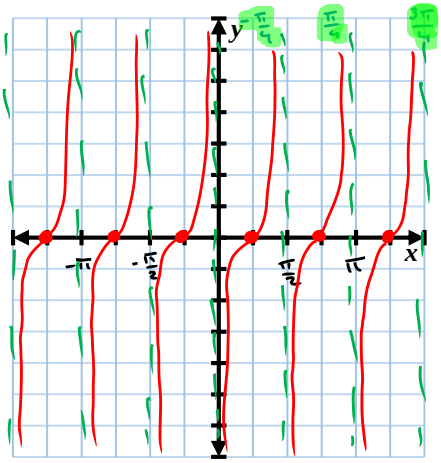
إزاحة أفقية: $x = -\frac{\pi}{4}$ ←

خطوط التقارب = $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)n$ ← فردي

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

$0, \frac{\pi}{2}, \pi$

x تقاطع ⇒ $\frac{\pi}{2}n \rightarrow 0 - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \pi - \frac{\pi}{4}$



Locate the vertical asymptotes, and sketch the graph of each function.

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًا كل دالة.

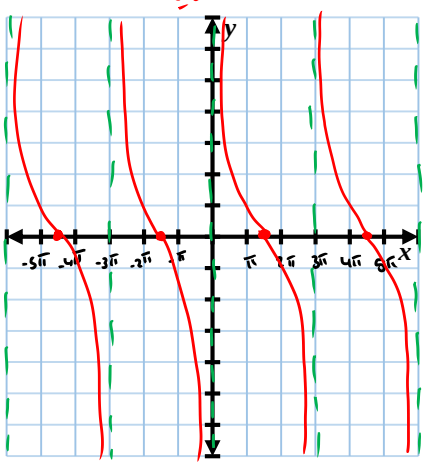
$y = \cot\frac{x}{3}$

الدورة $= \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$

خطوط التقارب $\rightarrow (3\pi)n \rightarrow 0, 3\pi, 6\pi, \ldots$

نقاط تقاطع x $\rightarrow \frac{1}{2}(3\pi)n \rightarrow \frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$

فردي



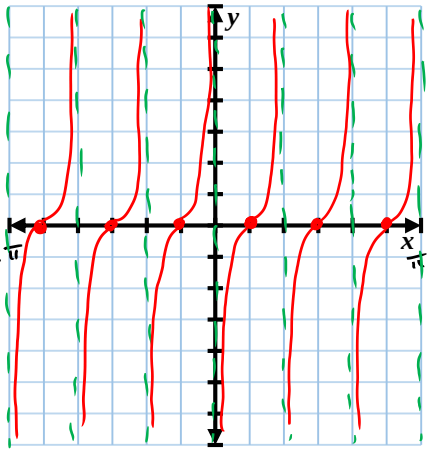
$y = -\cot 3x$

الدورة $\frac{\pi}{3}$

خطوط التقارب $\rightarrow \frac{\pi}{3}n \rightarrow 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \ldots$

نقاط تقاطع x $\rightarrow \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3})n \rightarrow \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

فردي



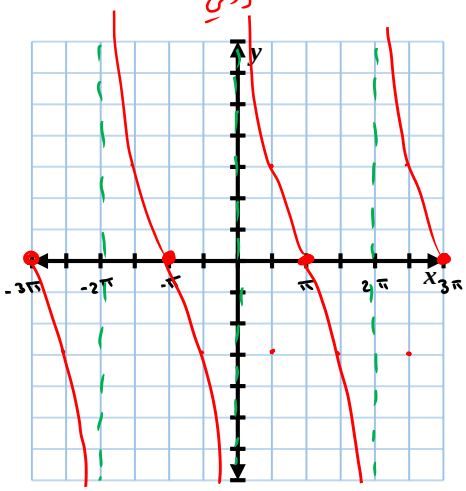
$y = 3\cot\frac{x}{2}$

الدورة $= \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

خطوط التقارب $\rightarrow 2\pi n \rightarrow 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$

نقاط تقاطع x $\rightarrow \frac{1}{2}(2\pi)n = \pi n \rightarrow \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$

فردي



دالة cosecant

المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $[1, \infty)$ و $(-\infty, -1]$

التقاطعات مع

المحور الأفقي x: لا يوجد

التقاطع مع

المحور الرأسي y: لا يوجد

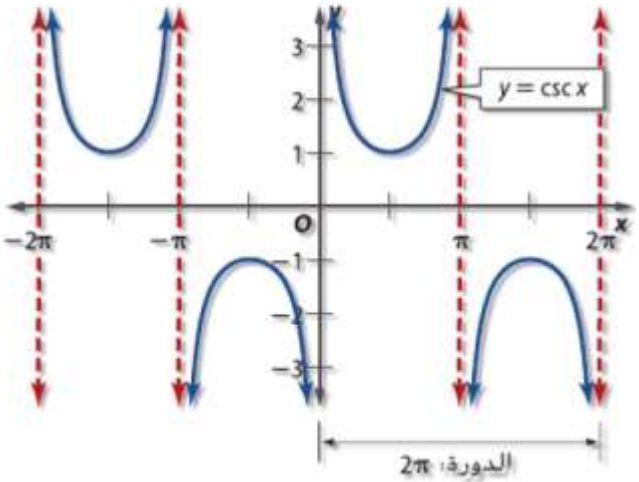
الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط التقارب: $x = m\pi, m \in \mathbb{Z}$

التناظر: نقطة الأصل (دالة فردية)

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} \csc x$ و $\lim_{x\to\infty} \csc x$ غير موجودتين.

تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



دالة secant

المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $[1, \infty)$ و $(-\infty, -1]$

التقاطعات مع

المحور الأفقي x: لا يوجد

التقاطع مع

المحور الرأسي y: 1

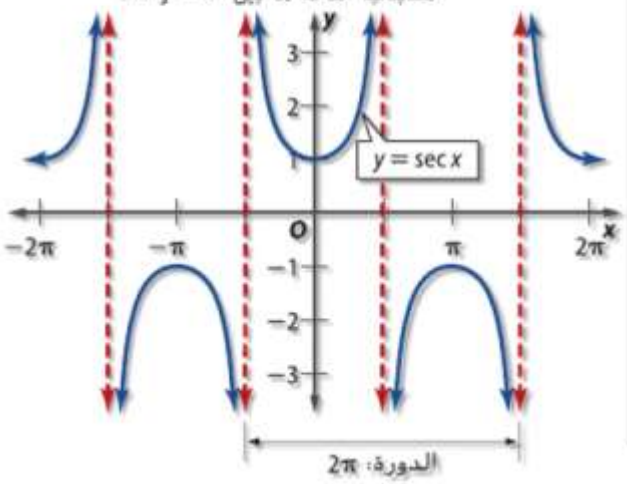
الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط التقارب: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر: محور رأسي y (الدالة زوجية)

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} \sec x$ و $\lim_{x\to\infty} \sec x$ غير موجودتين.

تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

تمثيل دوال الـ secant و الـ cosecant بيانيًا

Locate the vertical asymptotes, and sketch the graph of each function.

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًّا كل دالة.

$$y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin x$ تحويل

$\sin(x + \frac{\pi}{2})$ ← الدورة $= 2\pi$، السعة $= 1$

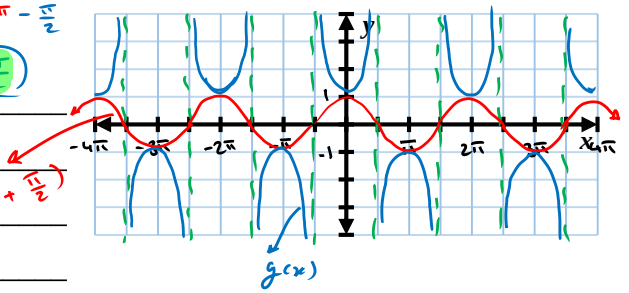
إزاحة الطور $-\frac{\pi}{2}$

نقاط التقاطع ← بداية | منتصف | نهاية

$0 - \frac{\pi}{2}$ ، $\pi - \frac{\pi}{2}$ ، $2\pi - \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

خطوط التقارب لـ $y = \csc(x + \frac{\pi}{2})$



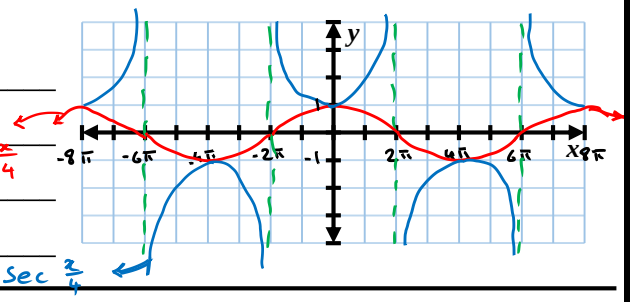
$$y = \sec\frac{x}{4}$$

$\cos\frac{x}{4}$ ← الدورة $= \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$، السعة $= 1$

نقاط تقاطع x: $\frac{1}{4}(8\pi)$ ، $\frac{3}{4}(8\pi)$

2π ، 6π

خطوط تقارب $y = \sec\frac{x}{4}$



$$y = \csc 2x$$

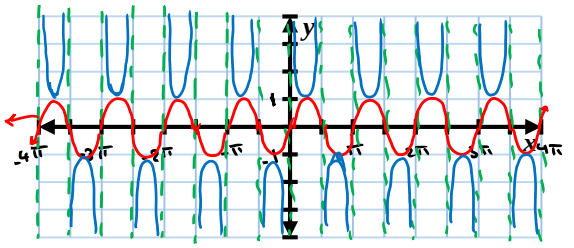
$\sin 2x$ ← السعة $= 1$

الدورة $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

نقاط التقاطع x: $0(\pi)$ ، $\frac{1}{2}(\pi)$ ، $1(\pi)$

0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π

خطوط تقارب $y = \csc 2x$



$$y = \sec(x + \pi)$$

$\cos(x + \pi)$ ← السعة $= 1$

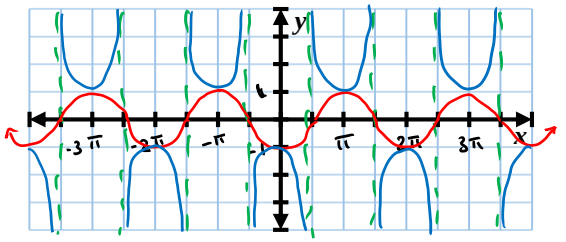
الدورة $= 2\pi$

إزاحة الطور $= -\pi$

نقاط التقاطع ← $\frac{1}{4}(2\pi) - \pi$ ، $\frac{3}{4}(2\pi) - \pi$

$-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$

خطوط التقارب $y = \sec(x + \pi)$



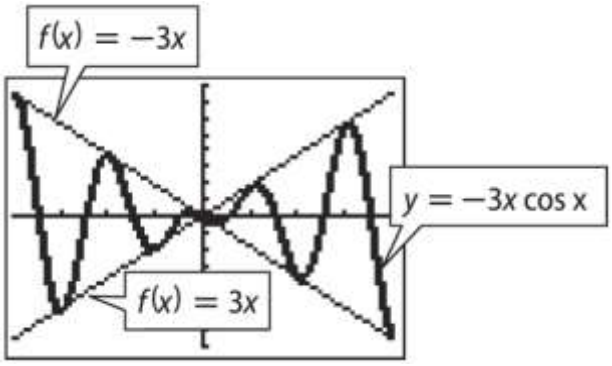
حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

Identify the damping factor $f(x)$ of each function. Then use a graphing calculator to sketch the graphs of $f(x)$, $-f(x)$, and the given function in the same viewing window. Describe the behavior of the graph.

$y = -3x \cos x$

$f(x) = -3x$ عامل التضاؤل هو

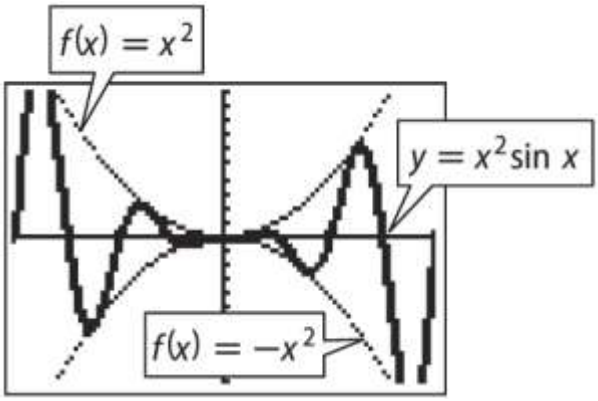
السلوك الطرفي: تتضاءل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



$y = x^2 \sin x$

$f(x) = x^2$ عامل التضاؤل هو

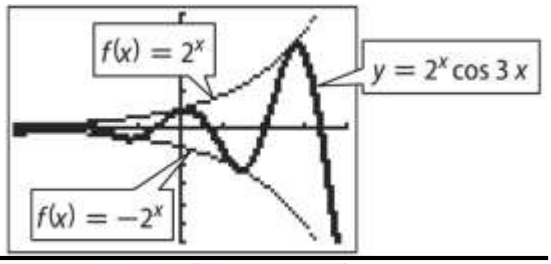
السلوك الطرفي: تتضاءل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



$y = 2^x \cos 3x$

$f(x) = 2^x$ عامل التضاؤل هو

السلوك الطرفي: تتضاءل سعة الدالة كلما اقتربت x من $-\infty$



المفهوم الأساسي الحركة التوافقية التضاؤلية

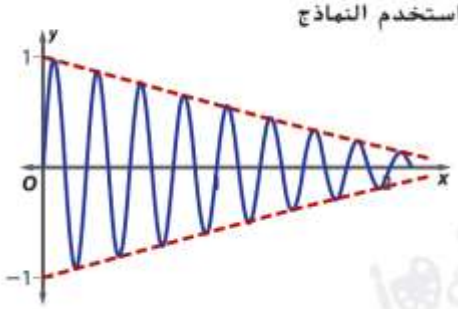
الكلمات

يكون الجسم في حالة **حركة توافقية تضاؤلية** عندما تحدد سعته بالدالة $a(t) = ke^{-ct}$

الرموز

بالنسبة لـ $y = ke^{-ct} \sin \omega t$ و $y = ke^{-ct} \cos \omega t$، حيث k هو الإزاحة. c ثابت التضاؤل $c > 0$، t هو الزمن، و ω هي الدورة.

استخدم النماذج



الحركة التوافقية المتضائلة

الموسيقى: أدى سحب وتر جيتار مسافة 0.8 cm أعلى موضع سكونه، ثم إطلاقه إلى حدوث اهتزاز. وكان ثابت تضاؤل الوتر 2.1، وتردد الملاحظة الناتجة 175 دورة في الثانية

a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر.

b. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.28 \le y \le 0.28$.

(a)

$k = 0.8$

$c = 2.1$

التردد $= 175$

التردد $= \frac{|b|}{2\pi}$

$175 = \frac{|b|}{2\pi} \Rightarrow |b| = 175(2)\pi = 350\pi$ ، $\omega = b$

$\Rightarrow y = k e^{-ct} \cos \omega t$

$y = 0.8 e^{-2.1t} \cos 350\pi t$

(b)

من الرسم بالآلة البيانية نرى أن الوترين تقريباً عند $t = 0.5$ $-0.28 \le y \le 0.28$

الموسيقى بفرض وجود وتر جيتار آخر، تم سحبه لمسافة 0.5 سنتيمتر أعلى موضع سكونه بتردد 98 دورة في الثانية، وثابت تضاؤل 1.7.

A. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر y بما أن دالة الزمن t.

B. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.15 \le y \le 0.15$.

(A)

$k = 0.5$

التردد $= 98 \Rightarrow$ التردد $= \frac{|b|}{2\pi}$

$c = 1.7$

$98 = \frac{|b|}{2\pi} \Rightarrow |b| = 98(2\pi) = 196\pi$

$\Rightarrow y = k e^{-ct} \cos \omega t$

$y = 0.5 e^{-1.7t} \cos 196\pi t$

(B)

من الآلة البيانية الوترين $-0.15 \le y \le 0.15$ عند $t = 0.71$

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

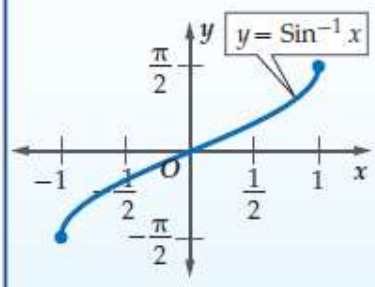
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام | 4-6 الدوال المثلثية العكسية | الاسم: _____

نواتج التعلّم: 1- إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية وتمثيلها بيانيا. 2- إيجاد تركيب الدوال المثلثية.

مفهوم أساسي — الدوالّ المثلّثية العكسية

أضف إلى مطويتك

الدالّة العكسية	الرموز	المجال	المدى	نموذج
دالّة الجيب العكسية $y = \text{Arcsin } x$	$y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$	
دالّة جيب التمام العكسية $y = \text{Arccos } x$	$y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$	
دالّة الظل العكسية $y = \text{Arctan } x$	$y = \text{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$	

إرشادات للدراسة تذكّر أنه عند حسابك قيمة معكوس الدالّة المثلّثية، فإن الناتج هو قياس زاوية.

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

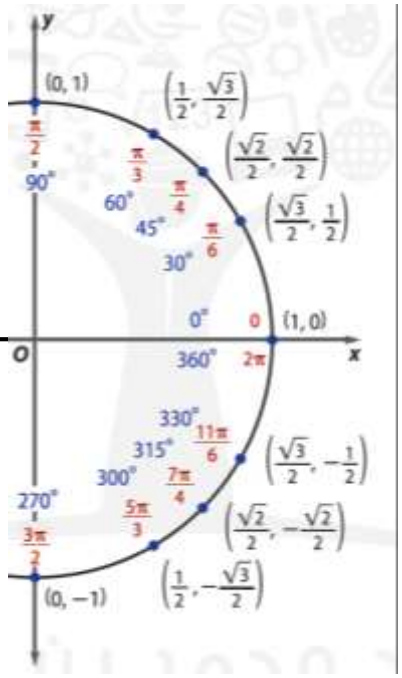
Find the exact value of each expression, if it exists.

إيجاد قيم دوال الـ $\sin^{-1}$

1) $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ — $y = \frac{1}{2}$ — النقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — عند الزاوية $30°$ — أو $\frac{\pi}{6}$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ — النقطة $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — عند الزاوية $-45°$ — أو $-\frac{\pi}{4}$

$\sin^{-1} 3$ — $y = 3$ — لا يوجد حل لأن مجال الدالة $\sin^{-1}$ هو $-1 \le x \le 1$



$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — عند الزاوية $60°$ — أو $\frac{\pi}{3}$

$\sin^{-1}(-2\pi)$ — $y = -2\pi$ — غير موجود لأن $-1 \le \square \le 1$

$\arcsin(-1)$ — $y = -1$ — النقطة $(0, -1)$ — عند الزاوية $-90°$ — أو $-\frac{\pi}{2}$

إيجاد قيمة دوال $\cos^{-1}$

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

Find the exact value of each expression, if it exists.

$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

النقطة $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

عند الزاوية $135°$

أو $\frac{3\pi}{4}$

$\arccos(-2)$ $x=-2$

غير موجودة

مجال الدالة $y=\arccos(x)$

$-1 \le x \le 1$

$\cos^{-1} 0$ $x=0$

النقطة $(0,1)$

عند الزاوية $90°$

أو $\frac{\pi}{2}$

$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

النقطة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

عند الزاوية $150°$

$\frac{5\pi}{6}$

$\arccos 2.5$ $x=2.5$

غير موجودة

مجال الدالة $y=\arccos x$

$-1 \le x \le 1$

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $x=-\frac{1}{2}$

عند النقطة $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

عند الزاوية $120°$

أو $\frac{2\pi}{3}$

إيجاد قيمة دوال معكوس ظل الزاوية

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

Find the exact value of each expression, if it exists.

$\tan^{-1}\sqrt{3}$ $\frac{y}{x}=\sqrt{3}$

النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

عند الزاوية $60°$

أو $\frac{\pi}{3}$

$\arctan 0$ $\frac{y}{x}=0$

النقطة $(1,0)$

عند الزاوية $0°$

$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

النقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

عند الزاوية $-30°$

أو $-\frac{\pi}{6}$

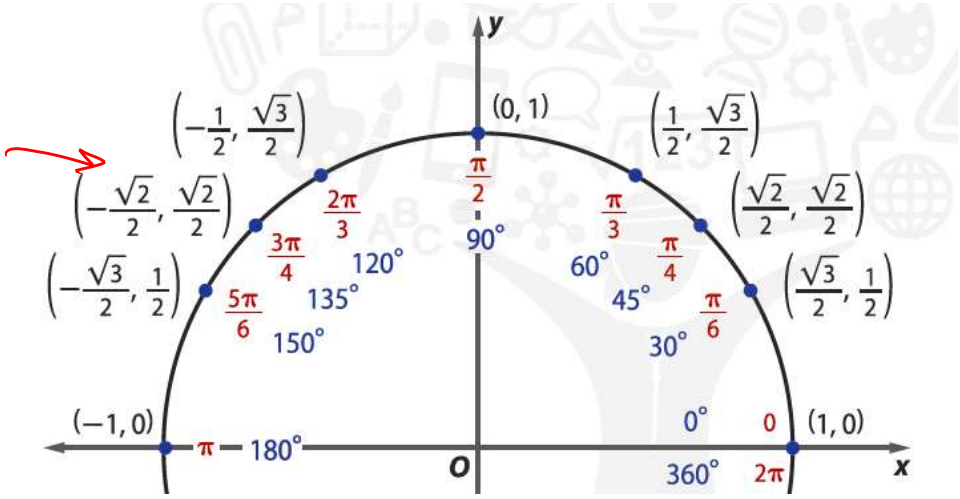
$\tan^{-1}(-1)$ $\frac{y}{x}=-1$

النقطة $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

عند الزاوية $-45°$

أو $-\frac{\pi}{4}$

$\cos^{-1}(0)$



عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

رسم التمثيلات البيانية للدوال المثلثية العكسية

Sketch the graph of each function.

مثّل كل دالة بيانيًا.

$y = \arccos 2x$ ⇒ $\cos y = 2x$ ⇒ $x = \frac{1}{2}\cos y$

حيث $y \in [0, \pi]$

نشئ جدول

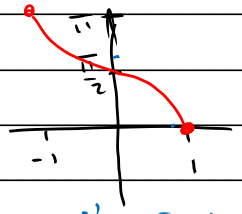
y	0	30	45	60	90	120	135	150	π
$\frac{1}{2}\cos y = x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{2}$

$y = \cos^{-1} 2x$

المجال ⇒ $-1 \le 2x \le 1$

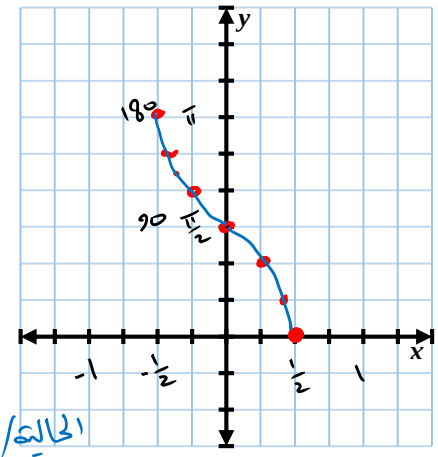
$-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

المدى ⇒ $0 \le y \le \pi$



$y = \sin^{-1} x$ الأصلية

الحالية / انكماش أفقي معامله $\frac{1}{2}$



$y = \arcsin 3x$ ⇒ $\sin y = 3x$ ⇒ $x = \frac{1}{3}\sin y$

حيث $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

نشئ جدول

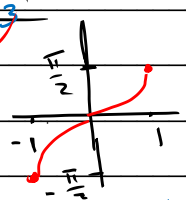
y	$-\frac{\pi}{2}$	-60	-45	-30	0	30	45	60	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{3}\sin y = x$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{3}$

$y = \sin^{-1} 3x$

المجال ⇒ $-1 \le 3x \le 1$

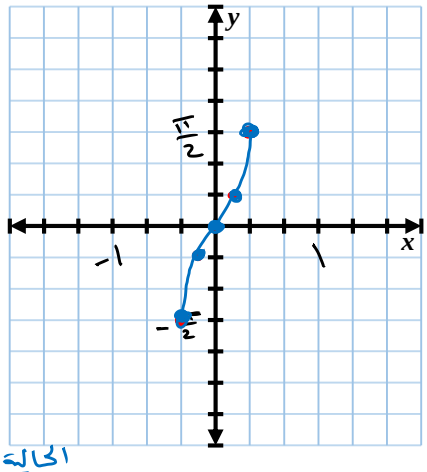
$-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}$

المدى ⇒ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



$y = \sin^{-1} x$ الأصلية

الحالية / انكماش أفقي معامله $\frac{1}{3}$

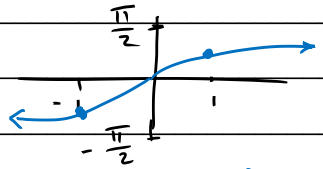


$y = \tan^{-1} 2x$ ⇒ $\tan y = 2x$ ⇒ $x = \frac{1}{2}\tan y$

المجال = $(-\infty, \infty)$

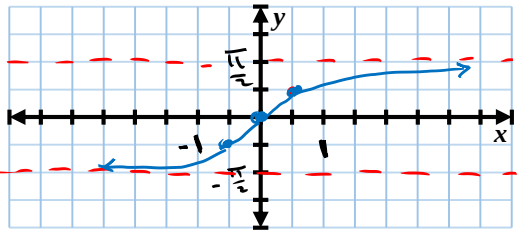
المدى ⇒ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y	-45	0	45

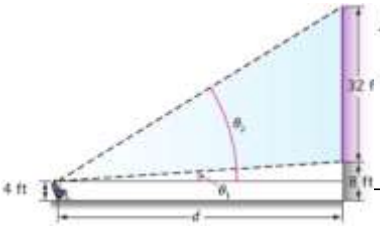


$y = \tan^{-1} x$ الأصلية

الحالية : انكماش أفقي معامله $\frac{1}{2}$



استخدام الدالة المثلثية العكسية



الأفلام في صالة السينما، تتغير زاوية رؤية المشاهد لمشاهدة الفيلم؛ بناءً على المكان الذي يجلس فيه في السينما.

a. اكتب دالة تمثل زاوية الرؤية θ لشخص في السينما مستوى عينيه عند الجلوس هو 4ft فوق مستوى الأرض.

b. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.

$\theta = \theta_2 - \theta_1$

$\theta = \tan^{-1}\frac{36}{d} - \tan^{-1}\frac{4}{d}$ (A)

$\tan\theta_2 = \frac{36}{d}$

$\Rightarrow \theta_2 = \tan^{-1}\frac{36}{d}$

بالمثل $\Rightarrow \theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{d}$

(B) يرسم الدالة على الآلة الحاسبة أو البرامج

ثم نجد القيم العظمى يتضح

أنه للدالة قيمة عظمى عند $d = 12$

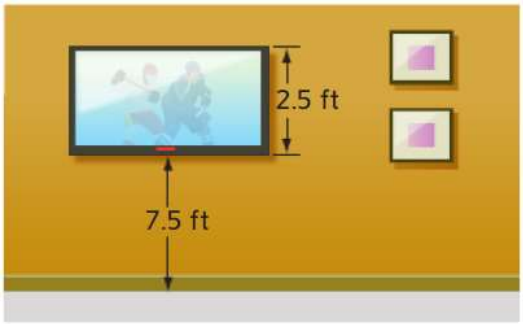
حيث $53.1°$

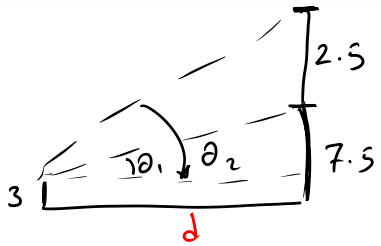
$\Leftarrow$ أقصى زاوية رؤية عند مسافة 12 ft

التلفاز اشترى أحمد شاشة تلفاز مسطحة جديدة. حتى تتمكن أسرته من مشاهدته، قرّر تعليق التلفاز على الحائط كما هو موضح.

A. اكتب دالة تمثل المسافة d التي تقع فيها أقصى زاوية رؤية θ لأحمد إذا كان مستوى عينه في أثناء الجلوس يبعد 3ft عن مستوى سطح الأرض.

B. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.





$\theta = \theta_2 - \theta_1$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{d} - \tan^{-1}\frac{4.5}{d}$

بنفس الطريقة السابقة أو البرامج

نحصل على أقصى قيمة لـ θ

عند $d = 5.6$ ft

$\theta = 0.22$ rad عند

$= 0.22 \times \frac{180}{\pi} = 12.6°$

$\Leftarrow$ المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية هي 5.6 ft

استخدام خصائص الدوال المثلثية العكسية

مجال تركيب الدوال المثلثية

$f[f^{-1}(x)] = x$

إذا كان $-1 \le x \le 1$، يكون $\sin(\sin^{-1} x) = x$.

إذا كان $-1 \le x \le 1$، يكون $\cos(\cos^{-1} x) = x$.

إذا كان $-\infty < x < \infty$، يكون $\tan(\tan^{-1} x) = x$.

$f^{-1}[f(x)] = x$

إذا كان $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$، يكون $\sin^{-1}(\sin x) = x$.

إذا كان $0 \le x \le \pi$، يكون $\cos^{-1}(\cos x) = x$.

إذا كان $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، يكون $\tan^{-1}(\tan x) = x$.

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

Find the exact value of each expression, if it exists.

1) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \frac{7\pi}{4}$ ← ليست محصورة

من المعلوم أن مدى $\arcsin$ هو $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

الحل النهائي يجب أن يكون في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ لأن: $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$

2) $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

أولاً: $-\frac{1}{4}$ ينتمي لمجال $\sin^{-1} x$ $(-1, 1)$

ثانياً: $= \boxed{-\frac{1}{4}}$ ← $\sin x$ ينتمي لمدى $-\frac{1}{4}$

$[-1, 1]$

3) $\tan\left(\tan^{-1}\frac{\pi}{3}\right)$

أولاً: $\frac{\pi}{3}$ ينتمي لمجال $\tan^{-1} x$ $(-\infty, \infty)$

ثانياً: $\boxed{\frac{\pi}{3}}$

$\tan x$ ينتمي لمدى $(-\infty, \infty)$

4) $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$

ليست محصورة

لأن $\tan\frac{\pi}{2}$ غير معرفة

5) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

أولاً: $\sin x$ في مجال $\frac{2\pi}{3}$ $(-\infty, \infty)$

ثانياً: $\frac{2\pi}{3}$ لا تقع في مدى $\sin^{-1} x$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{\frac{2\pi}{3}}$

$\Rightarrow$ لأن: $\frac{\pi}{3}$

$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \boxed{\frac{\pi}{3}}$

6) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$

أولاً: $\frac{3\pi}{4}$ في مجال $\cos x$ $(-\infty, \infty)$

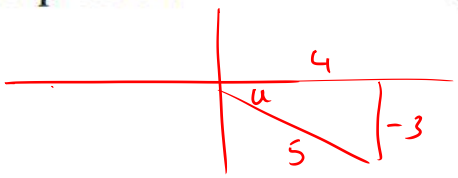
ثانياً: $\frac{3\pi}{4}$ في مدى $\cos^{-1}$ $(0, \pi)$

$\boxed{\frac{3\pi}{4}}$

إيجاد قيمة تركيب الدوال المثلثية

Find the exact value of each expression. جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

$\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$



$\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = u$ نفرض أن

$\Rightarrow \tan u = \frac{-3}{4}$

مجال $\tan^{-1}$ في الربع (1، 4)

$\tan u$ سالب فيلم

u في الربع الرابع

$\Rightarrow \cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$

$= \cos u$ من الافتراض

$= \boxed{\frac{4}{5}}$ من المثلث

$\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \boxed{30^\circ} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

$\sin\left(\arctan\frac{5}{12}\right)$

$\arctan\frac{5}{12} = u$ نفرض

$\Rightarrow \tan u = \frac{5}{12}$

مجال $\tan^{-1}$ في الربع (1، 4)

u في الربع (1) $\leftarrow$ موجب $\tan u$

$= \sin\left(\arctan\frac{5}{12}\right)$

$= \sin u$ من الافتراض

$= \boxed{\frac{5}{13}}$ من المثلث

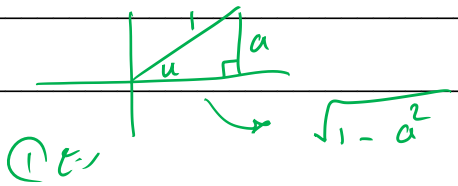
اكتب $\tan(\arcsin a)$ في صورة تعبير جبري لـ a لا يحتوي على دوال مثلثية.

Write $\tan(\arcsin a)$ as an algebraic expression of a that does not involve trigonometric functions.

نفرض أن $\arcsin a = u$

$\Rightarrow \sin u = a$

في الربع ① ، ④



في الربع ①

$\tan(\arcsin a)$

$= \tan u$

$= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \times \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}$ بتبسيط

$= \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$

اكتب كل تعبير في صورة تعبير جبري لـ x لا يحتوي على دوال مثلثية.

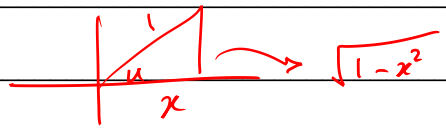
Write each expression as an algebraic expression of x that does not involve trigonometric functions.

$\sin(\arccos x)$

نفرض أن $u = \arccos x$

$\Rightarrow \cos u = x$

في الربع ① ، ②



لأن $\sin u$ في ① ، ② موجبة

$= \sin(\arccos x)$

$= \sin u$

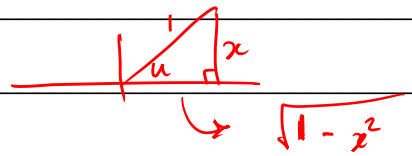
$= \sqrt{1-x^2}$

$\cot[\sin^{-1} x]$

نفرض أن $u = \sin^{-1} x$

$\Rightarrow \sin u = x$

في الربع ① ، ④



$\Rightarrow \cos(\sin^{-1} x)$

$= \cos u$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$