

علاقات المثلثات

4

الرياضيات



لماذا؟ ▲

تصميم الديكور الداخلي تُستخدم علاقات المثلث لإيجاد قياسات الزوايا والمسافات ومقارنتها. ويستخدم مصممو الديكور الداخلي علاقات المثلثات لزيادة الكفاءة إلى الحد الأقصى وإحداث توازن في تصميمهم.

الحالي ..

- بعد دراستك لهذه الوحدة، ستكون قادرًا على:
 - التعرف على القطع المستقيمة الخاصة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
 - التعرف على العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات.
 - التعرف على طريقة كتابة البراهين غير المباشرة.

السابق ..

تعلّمت من قبل كيفية تصنيف المثلثات.

الاستعداد للوحدة

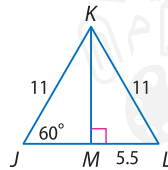
1

خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

تدريب سريع

مثال 1

جد قياس كل مما يلي.



a. JM

$m\angle J = m\angle L$. إذا $m\angle L = 60^\circ$ و $\overline{JM} \cong \overline{LM}$ حسب عكس نظرية المثلث متساوي الساقين. بما أن $LM = 5.5$ ، فإن $JM = 5.5$ عن طريق التعويض.

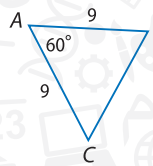
b. $m\angle JKL$

$$\begin{aligned} m\angle J + m\angle JKL + m\angle L &= 180 && \text{نظرية الجمع } \triangle \\ 60 + m\angle JKL + 60 &= 180 && m\angle J = m\angle L = 60 \\ 120 + m\angle JKL &= 180 && \text{بسط} \\ m\angle JKL &= 60 && \text{اطرح} \end{aligned}$$

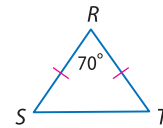
مراجعة سريعة

جد قياس كل مما يلي.

1. BC



2. $m\angle RST$



3. **الحدائق** يصمم خميس حوض أزهار على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول ضلعين من أضلاع حوض الأزهار يساوي 7 ft، فما طول الضلع الثالث مع التقريب إلى أقرب قدم؟

مثال 2

K هو نقطة منتصف $\overline{JL}$. خن بالاستناد إلى المعلومات المعطاة وارسم شكلاً يصور تخمينك.

المعطيات: K هو نقطة منتصف $\overline{JL}$. J ، K و L هي نقاط على خط واحد، ويقع K على مسافة متساوية بين J و L .

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

التحقق: ارسم $\overline{JL}$. وهذا يصور التخمين.



خن بالاستناد إلى المعلومات المعطاة.

4. $\angle 4$ و $\angle 3$ تشكلان زاوية مستقيمة.

5. $JKLM$ عبارة عن مربع.

6. $\overrightarrow{BD}$ عبارة عن منتصف للزاوية $\angle ABC$.

7. **الاستنتاج** حدد إذا ما كان الاستنتاج التالي صحيحاً دائماً، أم أحياناً، أم غير صحيح على الإطلاق استناداً إلى المعلومات المعطاة. علل استنتاجك.

المعطيات: تقع النقاط D ، E و F على مستقيم واحد

التخمين: $DE + EF = DF$

مثال 3

حل كل متباينة مما يلي.

حل المتباينة $3x + 5 > 2x$

$$\begin{aligned} 3x + 5 &> 2x && \text{مُعْطَى} \\ 3x - 3x + 5 &> 2x - 3x && \text{اطرح} \\ 5 &> -x && \text{بسط} \\ -5 &< x && \text{اقسم} \end{aligned}$$

$$8. x + 13 < 41$$

$$9. x - 6 > 2x$$

$$10. 6x + 9 < 7x$$

$$11. 8x + 15 > 9x - 26$$

12. **الأناشيد** أضافت غادة 15 نشيداً إضافياً إلى مشغل MP3 الخاص بها. ليصل الإجمالي إلى أكثر من 120 نشيد.

كم عدد الأناشيد التي كانت على المشغل في الأساس؟

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

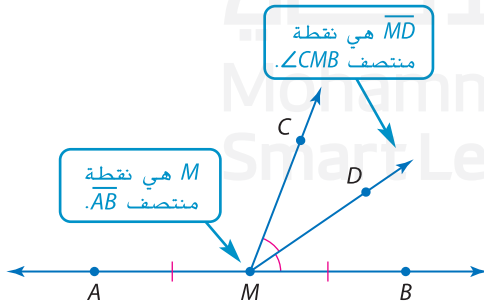
المفردات الجديدة

- منصف عمودي (perpendicular bisector)
- مستقيمات متلاقية (concurrent lines)
- نقطة الالتقاء (point of concurrency)
- مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)
- مركز الدائرة الداخلية (incenter)
- متوسط (median)
- نقطة مركزية (centroid)
- ارتفاع (altitude)
- ملتقى الارتفاعات (orthocenter)
- تبرير غير مباشر (indirect reasoning)
- برهان غير مباشر (indirect proof)
- برهان بالتناقض (proof by contradiction)

مراجعة المفردات

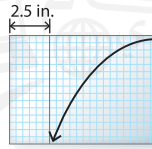
منصف الزوايا هو عبارة عن شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين

نقطة المنتصف هي النقطة الموجودة على قطعة مستقيمة بمنتصفها تمامًا بين أطرافها

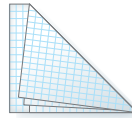


المطويات منظم الدراسة

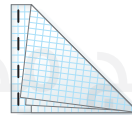
علاقات المثلثات اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك على الوحدة 4 حول علاقات المثلثات. ابدأ باستخدام سبع ورقات من ورق الرسم البياني.



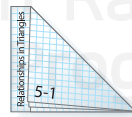
1 **اجمع** الورق فوق بعضه. اطو الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلية لتشكيل مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية.



2 **اطو** الجزء المستطيل إلى نصفين.



3 **قم** بتثبيت الورق بطول الثانية المستطيلة الشكل في أربعة أماكن.



4 **قم** بتسمية كل ورقة برقم أحد الدروس، والتبويب مستطيل الشكل بعنوان الوحدة.



مختبر الهندسة إنشاء المنصفات

4-1

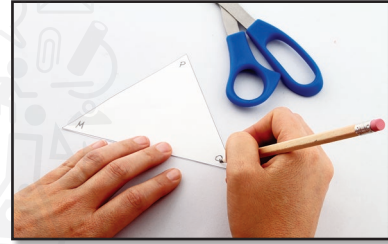
الإستشفاة

يمكن استخدام طي الأوراق لإنشاء قطع مستقيمة خاصة في المثلثات.

الإنشاء منصف عمودي

أنشئ منصفاً عمودياً على أحد أضلاع المثلث.

الخطوة 1



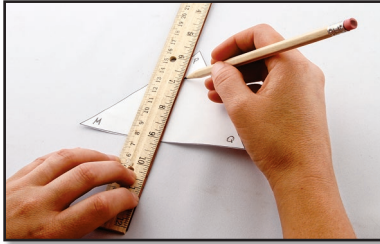
ارسم $\triangle MPQ$ ، وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2



اطوي المثلث من منتصفه $\overline{MQ}$ بحيث تلمس الرأس M الرأس Q .

الخطوة 3



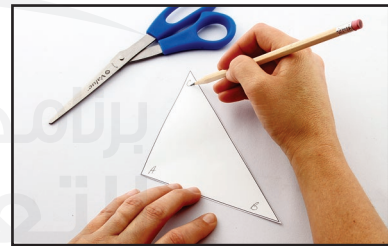
استخدم مسطرة لرسم $\overline{AB}$ بطول الثلثة. $\overline{AB}$ هو المنصف العمودي على $\overline{MQ}$.

منصف زاوية المثلث هو مستقيم يمر برأس المثلث ويقسمها إلى زاويتين متساويتين.

الإنشاء منصف الزاوية

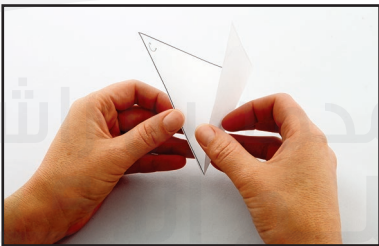
أنشئ منصف زاوية لأي مثلث.

الخطوة 1



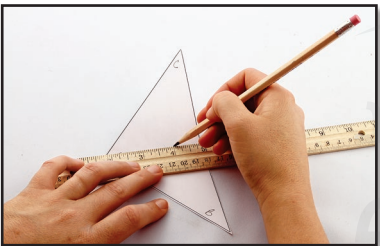
ارسم $\triangle ABC$ ، وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2



اطوي المثلث إلى نصفين من الرأس A ، بحيث يكون الضلعان $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ محاذيين لبعضهما.

الخطوة 3



حدد النقطة L في الثلثة بطول الحافة $\overline{BC}$. استخدم مسطرة لرسم $\overline{AL}$ بطول الثلثة. $\overline{AL}$ هو منصف زاوية في $\triangle ABC$.

النموذج والتحليل

1. أنشئ منصفين عموديين على الضلعين الآخرين في $\triangle MPQ$. أنشئ منصفين للزوايا على الزاويتين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ بشأن تقاطعها؟

كرر طريقتي الإنشاء لكل نوع من المثلثات.

2. حاد

3. منفرج

4. قائم

منصفات المثلثات

4-1

لماذا؟

الحالي

السابق

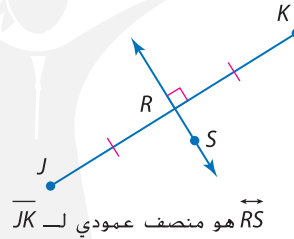
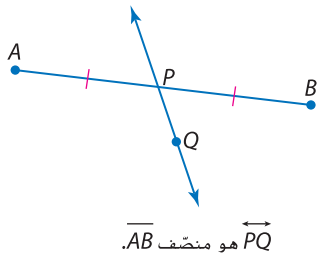


● إن إنشاء مثلث عمل في المطبخ من شأنه تحسين كفاءة عملية تحضير الطعام من خلال تقليل عدد الخطوات التي ينبغي اتخاذها. لتحديد النقطة التي تقع على مسافة واحدة من الحوض ومن الفرن ومن الثلاجة، يمكنك استخدام المنصفات العمودية للمثلث.

1 تحديد المنصفات العمودية في المثلثات واستخدامها.
2 تحديد منصفات الزوايا في المثلثات واستخدامها.

● لقد استخدمت منصفات القطع المستقيمة والزوايا.

1 **المنصفات العمودية** لقد تعلمت أن المستقيم المنصف هو أي قطعة مستقيمة أو مستقيم أو مستوى يتقاطع مع قطعة مستقيمة بمنصفها. إذا كان المنصف عمودي أيضًا على القطعة المستقيمة، فإنه يُسمى **منصف عمودي**.



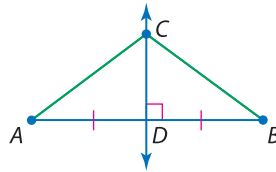
تذكر أن **المحل الهندسي** هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا. كما أن المنصف العمودي للقطعة المستقيمة هو محل هندسي لنقاط في مستوى تقع على مسافة واحدة من أطراف القطعة المستقيمة. هذا ينقلنا إلى النظريات التالية.

نظريات المنصفات العمودية

4.1 نظرية المنصفات العمودية

إذا وجدت نقطة على المنصف العمودي لقطعة مستقيمة ما، إذا فهي تقع على مسافة واحدة من طرفي القطعة المستقيمة.

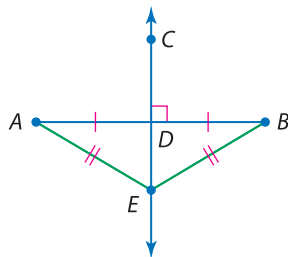
مثال: إذا كان $\overline{CD}$ هو منصف $\overline{AB}$ ، إذا $AC = BC$.



4.2 عكس نظرية المنصفات العمودية

إذا وجدت نقطة تقع على مسافة واحدة من طرفي قطعة مستقيمة ما، إذا فهي على المنصف العمودي للقطعة المستقيمة.

مثال: إذا كان $AE = BE$ ، إذا E تقع على $\overline{CD}$. المنصف $\perp \overline{AB}$.



المفردات الجديدة

منصف عمودي (perpendicular bisector)

المستقيميات المتقاطعة (concurrent lines)

نقطة التقاطع (point of concurrency)

مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)

مركز الدائرة الداخلية (incenter)

ممارسات في الرياضيات

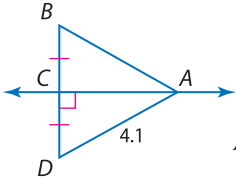
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

مثال 1 استخدام نظريات المُنصّفات العمودية

جد قياس كل مما يلي.

a. AB



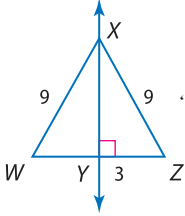
$$AB = AD$$

$$AB = 4.1$$

من المعلومات المبينة بالرسم التخطيطي، نعلم أن $\overrightarrow{CA}$ هو مُنصّف عمودي لـ $\overrightarrow{BD}$.

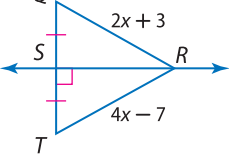
نظرية المُنصّف العمودي
تعوّض

b. WY



بما أن $WX = ZX$ و $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{WZ}$ ، $\overrightarrow{XY}$ هو المُنصّف العمودي لـ $\overrightarrow{WZ}$ وفقاً لعكس نظرية المُنصّف العمودي. وفقاً لتعريف مُنصّف القطعة المستقيمة، $WY = YZ$ بما أن $WY = 3$ ، $YZ = 3$.

c. RT



$$\overrightarrow{SR} \text{ هو مُنصّف عمودي لـ } \overrightarrow{QT}.$$

نظرية المُنصّف العمودي
بالتعويض

$$RT = RQ$$

$$4x - 7 = 2x + 3$$

$$2x - 7 = 3$$

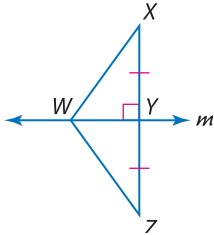
$$2x = 10$$

$$x = 5$$

طرح $2x$ من كل طرف
اجمع 7 لكل طرف
اقسم كل طرف على 2

فإن $RT = 4(5) - 7$ أو 13.

تمرين موجه



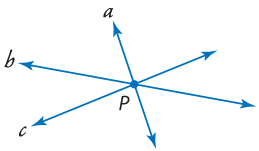
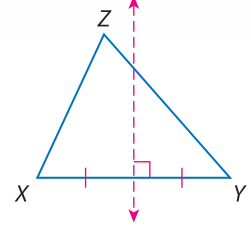
1A. إذا كان $WZ = 25.3$ و $WX = 25.3$ ، $YZ = 22.4$ جد XY .

1B. إذا كان m هو المُنصّف العمودي لـ XZ و $WZ = 14.9$ ، فجد WX .

1C. إذا كان m هو المُنصّف العمودي لـ XZ و $WX = 4a - 15$ و $WZ = a + 12$ فجد WX .

نصيحة دراسية

المُنصّفات العمودية ليس بالضرورة أن يمر المُنصّف العمودي لأحد أضلاع المثلث برأس المثلث. على سبيل المثال، في $\triangle XYZ$ أدناه، نجد أن المُنصّف العمودي لـ $\overrightarrow{XY}$ لا يمر بالنقطة Z .



الخطوط a ، b ، c متقاطعة عند النقطة P .

عندما تتقاطع ثلاث مستقيميات أو أكثر عند نقطة مشتركة، فإن المستقيميات تُسمى **مستقيميات متقاطعة**. والنقطة التي تتقاطع بها المستقيميات المتقاطعة تُسمى **نقطة التقاطع**.

بما أن للمثلث ثلاثة أضلاع، فإن لديه ثلاث مُنصّفات عمودية. تعتبر المُنصّفات مستقيميات متقاطعة. وتُسمى نقطة تقاطع المُنصّفات العمودية **نقطة تقاطع مُنصّفات** أضلاع المثلث.

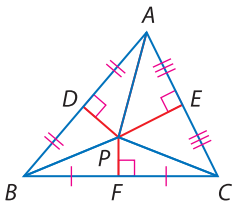
نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة المحيطة

الشرح

تتقاطع المُنصّفات العمودية لأضلاع المثلث في نقطة تُسمى **مركز الدائرة المحيطة** بحيث تكون على مسافة واحدة من رؤوس المثلث.

مثال

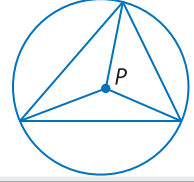
إذا كانت P هي نقطة تقاطع المُنصّفات لـ $\triangle ABC$ ، إذاً $PA = PB = PC$.



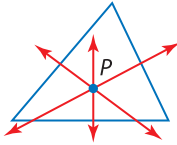
قراءة في الرياضيات

المحيط - كلمة المحيط -

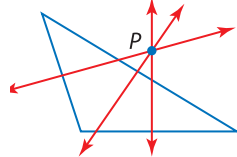
تعني الشيء الذي يكون من جميع الجهات أو الإطار الخارجي. فنقطة تقاطع المُنصفات هي مركز الدائرة التي تمس رؤوس المثلث من الخارج.



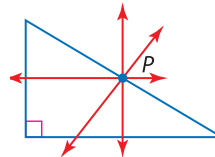
قد تقع نقطة تقاطع المُنصفات داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد

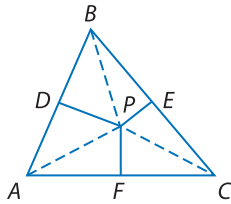


مثلث منفرج



مثلث قائم

إثبات نظرية مركز الدائرة المحيطة



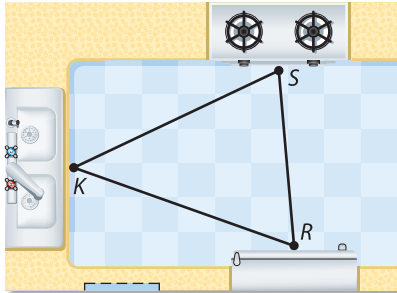
المعطيات: $\overline{PD}$ و $\overline{PF}$ و $\overline{PE}$ هم مُنصفات عمودية لـ $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

الفقرة الإثباتية:

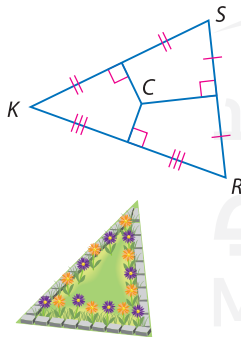
بما أن P يقع على المُنصف العمودي لـ $\overline{AC}$ ، فإنها تكون على مسافة واحدة من A و C . باستخدام تعريف المسافة الواحدة، $AP = CP$. تقع P على المُنصف العمودي لـ $\overline{BC}$ ، فإن، $CP = BP$. باستخدام خاصية التعدي في المساواة، $AP = BP$. فإن، $AP = CP = BP$.

مثال من الحياة اليومية 2 استخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة



تصميم داخلي فرن S، حوض K، وثلاجة R موضوعة في مطبخ بالشكل الموضح. جد موقعاً متوسطاً لطاولة تحضير الطعام بحيث تكون على مسافة واحدة من هذه النقاط الثلاث.

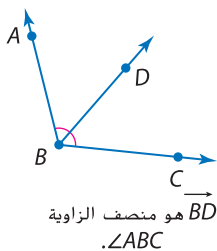
باستخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة، يمكن إيجاد نقطة تقع على مسافة واحدة من ثلاث نقاط باستخدام المُنصفات العمودية للمثلث الذي تشكل هذه النقاط الثلاث رؤوسه.



انسخ $\triangle SKR$ ، واستخدم مسطرة ومنقلة لرسم المُنصفات العمودية. موقع المركز الذي ستوضع فيه الطاولة هو C . نقطة تقاطع مُنصفات $\triangle SKR$.

تمرين موجه

2. يحتاج جاسم عند ري حديقته المثلثة إلى وضع آلة رش على مسافة واحدة من كل رأس من رؤوس مثلث الحديقة. أين ينبغي على جاسم وضع آلة الرش؟



BD هو منصف الزاوية $\angle ABC$.

2 مُنصفات الزاوية تذكر أن مُنصف الزاوية

يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين. قد يكون مُنصف الزاوية مستقيماً أو قطعة مستقيمة أو شعاعاً.

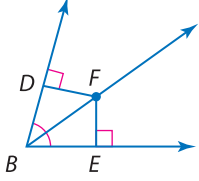
يمكن وصف مُنصف الزاوية بأنه محل هندسي للنقاط الموجودة داخل الزاوية التي تقطع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية. نقلنا هذا الوصف إلى النظريات التالية.

نظريات مُنصفات الزاوية

4.4 نظرية مُنصفات الزاوية

إذا وُجدت نقطة على مُنصف زاوية ما، فإنها تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية.

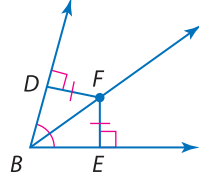
مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$, $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$, و $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ فإن $DF = FE$.



4.5 معكوس نظرية مُنصف الزاوية

إذا وُجدت نقطة داخل الزاوية تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية، فإنها تقع على مُنصف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ و $DF = FE$ فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$.



سوف تقوم بإثبات النظريتين 4.4 و 4.5 من خلال التمرينين 43 و 40.

مثال 3 استخدام نظريات مُنصف الزاوية

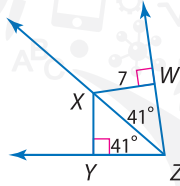
جد قياس كل مما يلي.

a. XY

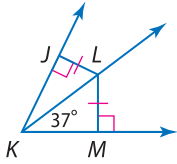
$$XY = XW$$

$$XY = 7$$

نظرية مُنصف الزاوية
بالتعويض



b. $m\angle JKL$



بما أن $\overrightarrow{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}$, $\overrightarrow{LM} \perp \overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{LJ} \cong \overrightarrow{LM}$ يقع على مسافة واحدة من ضلعي $\angle JKM$. باستخدام معكوس نظرية مُنصف الزاوية نظرية $\overrightarrow{KL}$ تنصف $\angle JKM$.

$$\angle JKL \cong \angle LKM$$

تعريف مُنصف الزاوية

$$m\angle JKL = m\angle LKM$$

تعريف الزوايا المتطابقة

$$m\angle JKL = 37$$

بالتعويض

c. SP

$$SP = SM$$

$$6x - 7 = 3x + 5$$

$$3x - 7 = 5$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

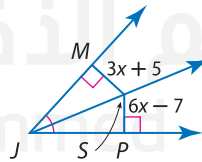
نظرية مُنصف الزاوية

بالتعويض

طرح $3x$ من كل جانب.

اجمع 7 مع كل طرف.

اقسم كل طرف على 3.



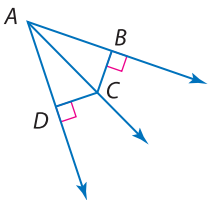
$$\text{إذا، } SP = 6(4) - 7 \text{ أو تساوي } 17$$

تمرين موجه

3A. إذا كان $m\angle BAC = 38$, $BC = 5$, $DC = 5$ فجد $m\angle DAC$.

3B. إذا كان $m\angle BAC = 40$, $m\angle DAC = 40$, $DC = 10$ فجد BC .

3C. إذا كان $\overrightarrow{AC}$ تنصف $\angle DAB$, $BC = 4x + 8$, $DC = 9x - 7$ فجد BC .



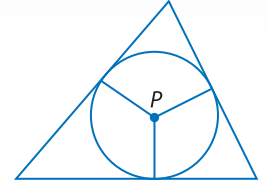
نصيحة دراسية

مُنصف الزاوية بالنسبة للجزء b، فإن عدم توفر أي معطيات سوى أن $JL = LM$ لن يكون كافياً لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ تنصف $\angle JKM$.

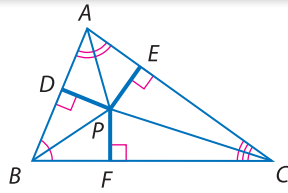
ونفس الشيء ينطبق على المُنصفات العمودية، فيما أن المثلث له ثلاث زوايا، فإن له أيضًا ثلاث مُنصفات زوايا. إن مُنصفات زاوية المثلث متقاطعة، ونقطة تقاطعها تُسمى **مركز الدائرة الداخلية** للمثلث.

قراءة في الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية هو مركز الدائرة التي تتقاطع مع كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. لهذا السبب، يقع مركز الدائرة الداخلية دائمًا داخل المثلث.



نظرية 4.6 نظرية مركز الدائرة الداخلية



تتقاطع مُنصفات زوايا المثلث في نقطة تُسمى مركز الدائرة الداخلية بحيث تكون على مسافة واحدة من أضلاع المثلث.

الشرح

إذا كانت النقطة P هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$ ، فإن $PD = PE = PF$.

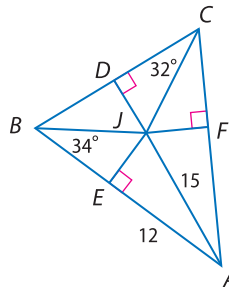
مثال

سوف تثبت النظرية 4.6 في تمرين 338

مثال 4 استخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية

جد قياس كل مما يلي إذا علمت أن J هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

a. JF



باستخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية، بما أن $JF = JE$ وبما أن J تقع على مسافة واحدة من أضلاع $\triangle ABC$ ، جد JF باستخدام نظرية فيثاغورس.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$JE^2 + 12^2 = 15^2$$

$$JE^2 + 144 = 225$$

$$JE^2 = 81$$

$$JE = \pm 9$$

نظرية فيثاغورس

بالتعويض

$$15^2 = 225 \text{ و } 12^2 = 144$$

ب طرح 144 من كل طرف

بحساب الجذر التربيعي من كل طرف

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، استخدم الجذر التربيعي الموجب فقط وهو 9. بما أن $JE = JF$ ، $JF = 9$.

b. $m\angle JAC$

بما أن $\overrightarrow{BJ}$ تنصف $\angle CBE$ ، $m\angle CBE = 2m\angle JBE$ ، إذا $m\angle CBE = 2(34)$ أو 68. وبالمثل، $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$ ، إذا $m\angle DCF = 2(32)$ أو تساوي 64.

$$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180$$

$$68 + 64 + m\angle FAE = 180$$

$$132 + m\angle FAE = 180$$

$$m\angle FAE = 48$$

نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle CBE = 68, m\angle DCF = 64$$

بسّط

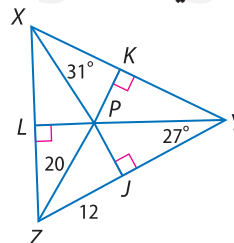
ب طرح 132 من كل طرف

بما أن $\overrightarrow{AJ}$ تنصف $\angle FAE$ ، $m\angle FAE = 2m\angle JAC$ ، فهذا يعني أن

$$m\angle JAC = \frac{1}{2}m\angle FAE \text{ إذا } m\angle JAC = \frac{1}{2}(48) \text{ أو } 24.$$

تمرين موجه

إذا كانت P هي المركز الداخلي لـ $\triangle XYZ$ ، جد قياس كل مما يلي.



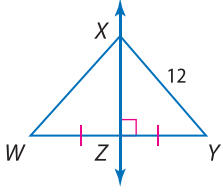
4A. PK

4B. $m\angle LZP$

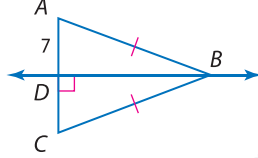
جد قياس كل مما يلي.

مثال 1

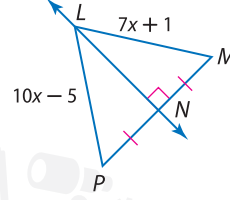
1. XW



2. AC

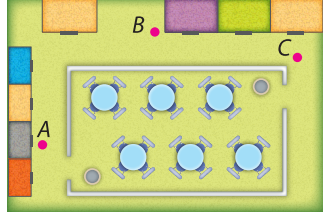


3. LP



4. إعلان أربع صديقات يتبادلن النشرات الإعلانية بساحة طعام بأحد المراكز التجارية. أخذت ثلاث منهن ما استطعن جمعه من النشرات الإعلانية وجلسن كما هو موضح. تحتفظ الصديقة الرابعة بمخزون إضافي من النشرات الإعلانية. انسخ مواضع النقاط A, B, C ثم عيّن موقع الصديقة الرابعة عند النقطة D حتى تكون على مسافة واحدة من الصديقات الثلاث الأخريات.

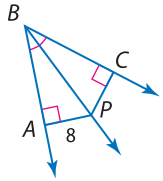
مثال 2



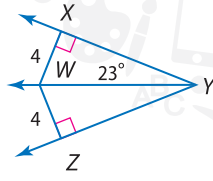
جد قياس كل من الآتي.

مثال 3

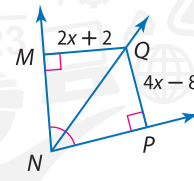
5. CP



6. $m\angle WYZ$

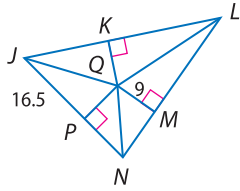


7. QM



8. الاستنتاج المنطقي جد JQ إذا كانت Q هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$.

مثال 4

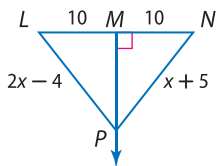


التمرين وحل المسائل

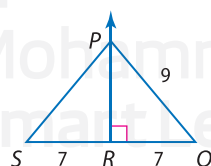
جد قياس كل مما يلي.

مثال 1

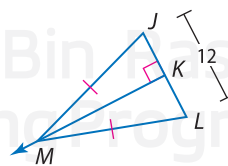
9. NP



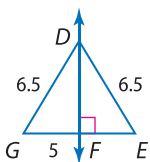
10. PS



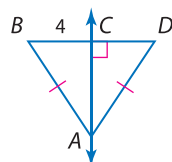
11. KL



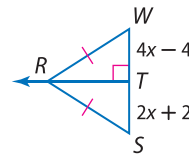
12. EG

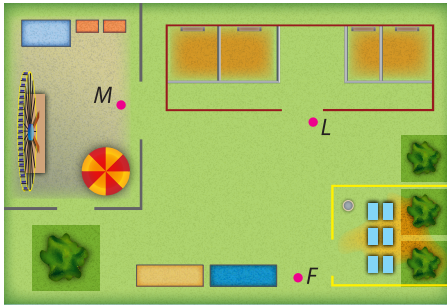


13. CD

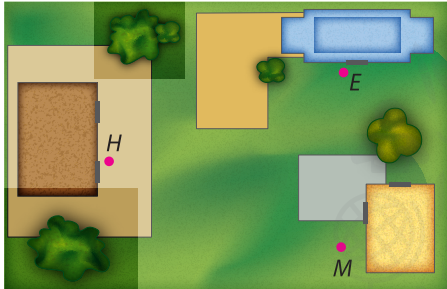


14. SW



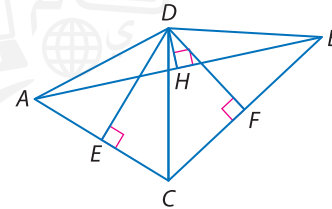


15. **المعرض الوطني** تم تحديد مواقع جناح الملاهي ومسابقات الماشية وبائعي المواد الغذائية في المعرض الوطني.
قرر المخططون للمعرض وضع دورات المياه المتنقلة على مسافة واحدة من كل موقع. انسخ مواضع النقاط M , L و F .
ثم جد موقع دورات المياه وسماها النقطة R .



16. **المدرسة** أنشأت إدارة جميع مدارس مبنى للحلقة الاولى وآخر للحلقة الثانية وآخر للحلقة الثالثة كما هو موضح بالرسم التخطيطي.
انسخ مواضع النقاط E , M و H . ثم جد موقع ساحة الحافلات B التي ستخدم هذه المدارس الثلاثة بحيث تكون الساحة على نفس المسافة من كل المدارس.

النقطة D هي مركز الدائرة المحيطة لـ $\triangle ABC$. اذكر أي القطع المستقيمة تتطابق مع القطع المستقيمة الأخرى.



جد قياس كل مما يلي.

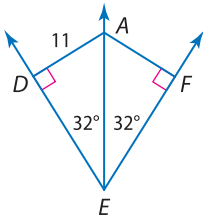
17. $\overline{AD}$

18. $\overline{BF}$

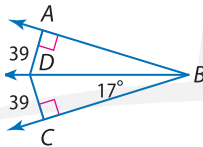
19. $\overline{AH}$

20. $\overline{DC}$

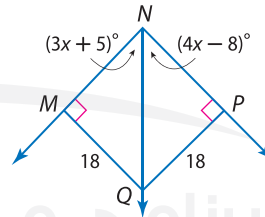
21. AF



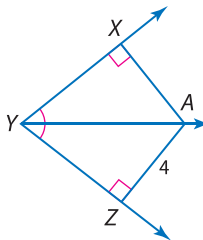
22. $m\angle DBA$



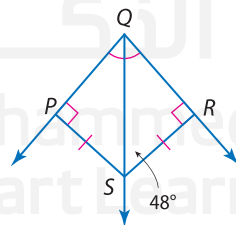
23. $m\angle PNM$



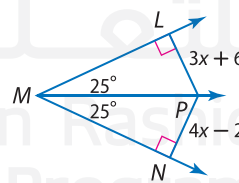
24. XA



25. $m\angle PQS$



26. PN



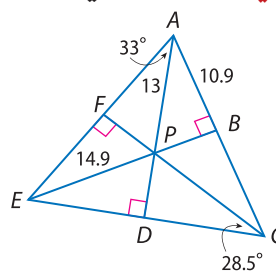
الاستنتاج المنطقي النقطة P هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$. جد قياس كل مما يلي.

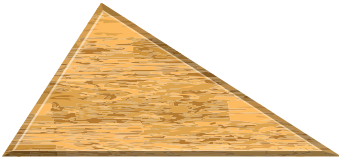
27. PB

28. DE

29. $m\angle DAC$

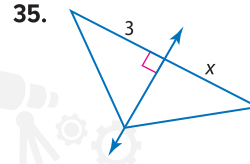
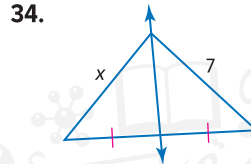
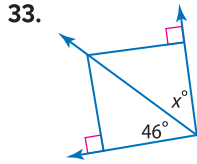
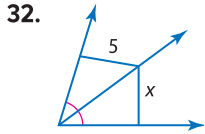
30. $m\angle DEP$



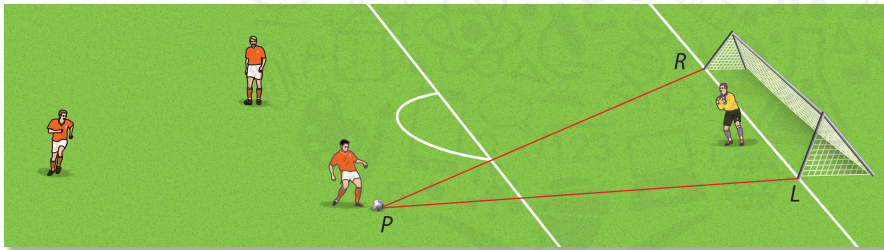


31. تصميم داخلي إذا أردت وضع مزهريّة على طاولة ركنية بحيث تكون على مسافة واحدة من جميع حواف الطاولة. اصنع رسماً تخطيطياً لتوضيح موقع المزهريّة. اشرح استنتاجك.

حدد ما إذا كانت المعلومات المعطاة بكل رسم تخطيطي كافية لإيجاد قيمة x . اشرح استنتاجك.



36. كرة قدم يتجه لاعب كرة القدم P إلى مرمى الفريق الخصم كما هو موضح بالرسم التخطيطي. لإحراز الهدف، ينبغي على اللاعب ركل الكرة بين عارضتي المرمى عند النقطتين L و R . يقف حارس المرمى أمام اللاعب. ثم حاول الحارس الوقوف بطريقة تساعد على القفز بجسده لإيقاف الركلة، بحيث يبعد عن الضلع الأيسر لزاوية التسديد بنفس المسافة التي يبعد بها عن الضلع الأيمن لزاوية التسديد.



- صف الموقع الذي ينبغي على الحارس الوقوف عنده. اشرح استنتاجك.
- انسخ $\triangle PRL$. استخدم منقلة ومسطرة لتحديد النقطة G التي ينبغي على الحارس الوقوف عندها.
- إذا تم ركل الكرة لتتبع المسار من P إلى R ، حدد أقصر مسار ينبغي على حارس المرمى اتبعه لصد الركلة. اشرح استنتاجك.

الإثبات اكتب إثباتاً من عمودين.

38. النظرية 4.6

37. النظرية 4.2

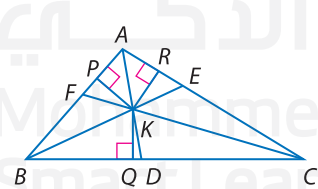
معطى: مُنَصَّفات زوايا $\triangle ABC$.

$\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$

$\overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KQ} \perp \overline{BC},$

$\overline{KR} \perp \overline{AC}$

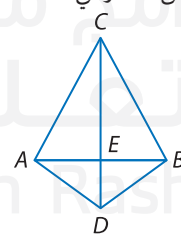
الإثبات: $KP = KQ = KR$



المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

الإثبات: تقع النقطتان C و D

على العمودي $\overline{AB}$



الفرضيات اكتب الفقرة الإثباتية لكل نظرية.

40. النظرية 4.5

39. النظرية 4.1

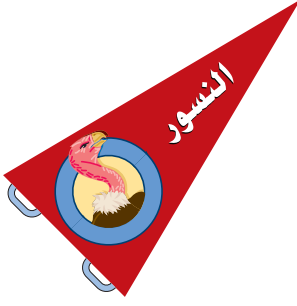
الهندسة الإحداثية اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمُنَصَّف العمودي للقطعة المستقيمة بالأطراف المعطاة. علل إجابتك.

42. $D(2, -2)$ و $C(-4, 5)$

41. $B(4, 3)$ و $A(-3, 1)$

43. الإثبات اكتب إثباتاً من عمودين للنظرية 4.4.

44. **تصميم بياني** تقوم خولة بتصميم علم مثلث لمدريستها. فهي تريد وضع صورة لشعار المدرسة داخل دائرة في العلم الرياضي. انسخ رسة العلم المثلث وحدد موقع النقطة التي ستكون مركز الدائرة لعمل أكبر دائرة ممكنة. علل رسمك.



هندسة إحدائية حدّد إحداثيات مركز الدائرة المحيطة للمثلث ذي الرؤوس المعطاة. اشرح.

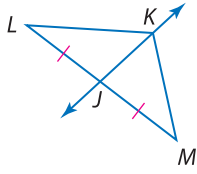
45. $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$

46. $J(5, 0), K(5, -8), L(0, 0)$



47. **محل هندسي** فكر في $\overline{CD}$. صف مجموعة كل النقاط الموجودة في الفراغ الواقع على مسافة واحدة من C و D.

مهارات التفكير العليا مسائل



48. **تحليل الخطأ** يقول حليم إنه بعد اطلاعه على المعلومات المبينة بالرسم التخطيطي، يمكنه استنتاج أن K تقع على المُنصف العمودي لـ $\overline{LM}$. لا يوافق حمادة على هذا الرأي. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

49. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم مثلثاً به مركز دائرة داخلية يقع داخل المثلث ولكن مع وجود مركز الدائرة المحيطة خارج المثلث. برر رسمك باستخدام مسطرة ومنقلة لإيجاد نقطتي التقاطع.

فرضيات حدّد ما إن كانت كل عبارة صحيحة أحياناً أو صحيحة دائماً، أو غير صحيحة على الإطلاق. برر استنتاجك باستخدام مثال مضاد أو إثبات.

50. تتقاطع مُنصفات زوايا المثلث في نقطة تقع على مسافة واحدة من رؤوس المثلث.

51. في المثلث المتساوي الساقين، يكون المُنصف العمودي للقاعدة هو أيضاً مُنصف زاوية الرأس المقابل.

تحذّر اكتب برهاناً من عمودين لكلٍ من التالي.

52. **المعطيات:** المستوي γ عمودي على

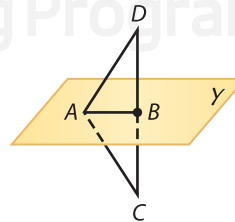
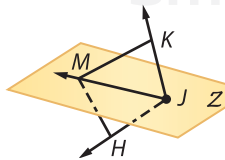
53. **المعطيات:** المستوي Z هو مُنصف زاوية

$$\angle KJH, \overline{KJ} \cong \overline{HJ}$$

$$\overline{MH} \cong \overline{MK} \quad \text{اثبت أن:}$$

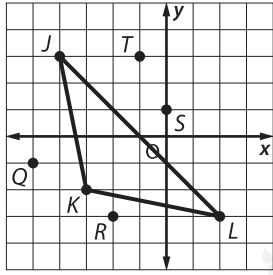
$$\overline{DC} \text{ مُنصف}$$

$$\angle ADB \cong \angle ACB \quad \text{الإثبات:}$$



54. **الكتابة في الرياضيات** قارن بين المُنصفات العمودية ومُنصفات زوايا المثلث. ما أوجه الشبه بينها؟ وما أوجه الاختلاف بينها؟ تأكد من مقارنة نقاط تقاطعها.

57. أي من النقاط التالية يمكن رسم مستقيم يمر بها بحيث يكون المستقيم مُنصفًا عموديًا لـ $\triangle JKL$ ؟



A T و K
B L و Q

C J و R
D S و K

58. إجابة مختصرة اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع نصف المستقيم الذي تقع عليه النقطتين $(-1, 0)$ و $(2, 4)$.

55. الجبر تم رمي جسم لأعلى بسرعة ابتدائية v متر في الثانية ومن ارتفاع ابتدائي s m. يُقدر الارتفاع h بالأمتار للجسم بعد t ثانية بالمعادلة $h = -10t^2 + vt + s$. تقف رنا على حافة شرفة ترتفع 54 m عن سطح الأرض ورمت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 12 m/s. بعد كم ثانية سترتطم الكرة بالأرض؟

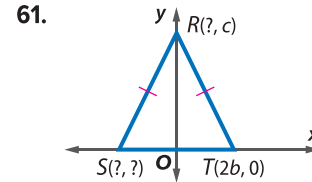
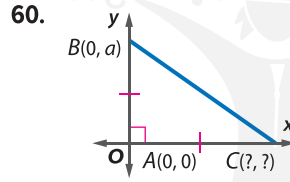
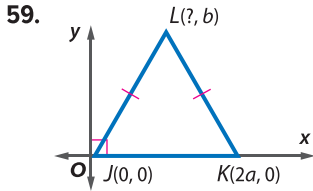
3 s A
4 s B
6 s C
9 s D

56. SAT/ACT حيث $x \neq -3, \frac{3x+9}{x+3} =$

F $x + 12$
G $x + 9$
H $x + 3$
J x
K 3

مراجعة شاملة

عين الإحداثيات المفقودة لكل مثلث.



هندسة إحداثية ارسم كل زوج من المثلثات بالرؤوس المعطاة. ثم حدد التحويل الهندسي وتحقق من أنه عبارة عن تحويل هندسي متطابق.

62. $A(-2, 4), B(-2, -2), C(4, 1);$
 $R(12, 4), S(12, -2), T(6, 1)$

63. $J(-3, 3), K(-3, 1), L(1, 1);$
 $X(-3, -1), Y(-3, -3), Z(1, -3)$

جد المسافة من المستقيم إلى النقطة المعطاة.

64. $y = 5, (-2, 4)$

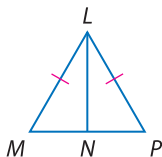
65. $y = 2x + 2, (-1, -5)$

66. $2x - 3y = -9, (2, 0)$

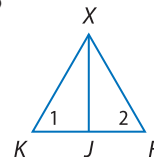
67. الهندسة الصوتية يقوم مهندس الاستوديو بتحصيل رسوم ثابتة بمقدار AED 450 مقابل تأجير المعدات و 42 AED مقابل ساعة من التسجيل والتجهيز. اكتب المعادلة التي توضح تكلفة تأجير مهندس الاستوديو كدالة زمنية. كم قد يُكلف تأجير مهندس الاستوديو لمدة 17 ساعة؟ (الدرس 3-4)

مراجعة المهارات

إثبات اكتب برهاناً من عمودين لكلٍ مما يلي.



69. المعطيات: $\triangle MLP$ متساوي الساقين.
 N هي نقطة منتصف $\overline{MP}$.
المطلوب: $\overline{LN} \perp \overline{MP}$



68. المعطيات: $\triangle XKF$ متساوي الأضلاع.
 $\overline{XJ}$ تنصف $\angle X$.
المطلوب: J هي نقطة منتصف $\overline{KF}$.



مختبر الهندسة إنشاء المتوسطات والارتفاعات

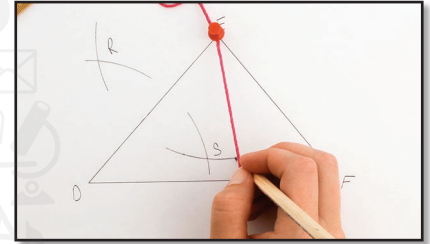
4-2

الإستكشاف

المتوسط في المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة طرفها رأس المثلث والطرف الآخر هو منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. يمكنك إنشاء متوسط من خلال تحديد نقطة منتصف على قطعة مستقيمة.
لف طرف خيط حول قلم رصاص. واستخدم دبوساً لتثبيت الخيط بالرأس.

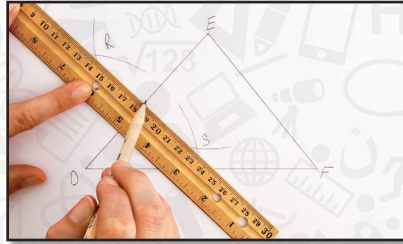
الإنشاء 1 متوسط المثلث

الخطوة 1



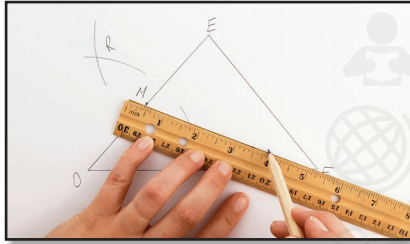
ضع الدبوس على الرأس D ثم على الرأس E لرسم أقواس متقاطعة أعلى وأسفل DE . اكتب على نقاط التقاطع S و R .

الخطوة 2



استخدم مسطرة لإيجاد النقطة الناشئة من تقاطع RS مع DE . اكتب على النقطة M . هذه هي نقطة المنتصف في DE .

الخطوة 3

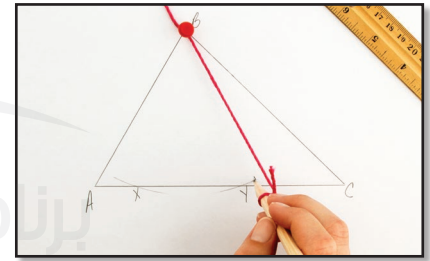


ارسم مستقيماً يمر عبر F و M . $\overline{FM}$ هو متوسط في $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة من رأس مثلث إلى الضلع المقابل ويكون عمودياً على الضلع المقابل.

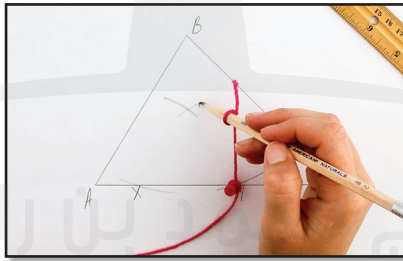
الإنشاء 2 ارتفاع المثلث

الخطوة 1



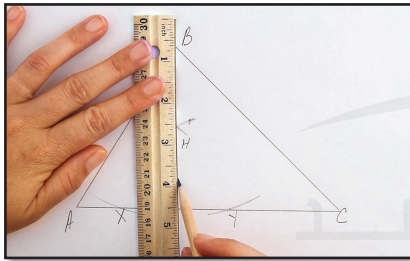
ضع الدبوس على الرأس B وارسم قوسين يتقاطعان عند $\overline{AC}$. اكتب على نقطتي تقاطع القوسين مع الضلعين X و Y .

الخطوة 2



عدّل طول الخيط بحيث يكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$. ثبت المسبار على X وارسم قوساً فوق $\overline{AC}$. استخدم نفس طول الخيط لرسم قوس من Y . اكتب على نقطتي تقاطع القوسين H .

الخطوة 3



استخدم مسطرة لرسم $\overrightarrow{BH}$. اكتب على النقطة الناشئة عن تقاطع $\overrightarrow{BH}$ مع $\overline{AC}$ اسم D . $\overline{BD}$ هو ارتفاع $\triangle ABC$ وعمودي على $\overline{AC}$.

استخدام النماذج والتحليل

1. أنشئ متوسطين لضلعين آخرين في $\triangle DEF$. ماذا تلاحظ بشأن متوسطات المثلث؟
2. أنشئ ارتفاعين للضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

4-2

الدرس

لماذا؟

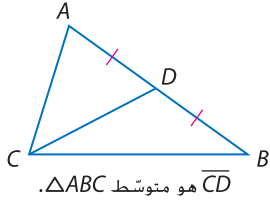
الحالي

السابق



- 1 تحديد المتوسطات في المثلثات واستخدامها.
 - 2 تحديد الارتفاعات في المثلثات واستخدامها.
- المنحوتة المتحركة هي جسم حركي أو متحرك تستخدم مبادئ التوازن والاتزان. تتكون المنحوتة المتحركة البسيطة من عدة قضبان متصلة بخيوط تُعلق عليها أجسام لها أوزان مختلفة. تتوازن الأجسام المعلقة مع بعضها ويمكن أن تدور بحرية. ولضمان تعليق مثلث على المنحوتة المتحركة بحيث يكون موازي للأرض، فعلى الفنانين معرفة نقطة توازن المثلث.

- لقد تعرفت على المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا في المثلث وقمت باستخدامهما.



- 1 **المتوسطات متوسطة** المثلث هو قطعة مستقيمة يمثل أحد طرفيها أحد رؤوس المثلث والآخر نقطة منتصف الضلع المقابل.
- لكل مثلث ثلاثة متوسطات متلاقية.
- وتُسمى نقطة التقاء متوسطات المثلث **النقطة المركزية للمثلث** وتقع دائماً داخل المثلث.

المفردات الجديدة

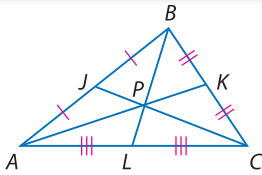
متوسط المثلث (median)

النقطة المركزية للمثلث (centroid)

ارتفاع المثلث (altitude)

ملتقى الارتفاعات (orthocenter)

النظرية 4.7 نظرية النقطة المركزية للمثلث



تتقاطع متوسطات المثلث في النقطة تُسمى النقطة المركزية للمثلث، وهي تقع على بعد ثلثي المسافة من الرأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل.

مثال إذا كانت النقطة P هي نقطة المركزية لـ $\triangle ABC$ ،
إذًا $AP = \frac{2}{3}AK$, $BP = \frac{2}{3}BL$ و $CP = \frac{2}{3}CJ$.

سوف تقوم بإثبات النظرية 4.7 في التمرين 36.

مهارسات في الرياضيات

مراجعة الدقة.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

مثال 1 استخدام نظرية النقطة المركزية

في $\triangle ABC$ إذا كان Q هي النقطة المركزية للمثلث و $BE = 9$.
 BQ و QE .

$$BQ = \frac{2}{3}BE$$

$$= \frac{2}{3}(9) \text{ or } 6$$

نظرية النقطة المركزية

$$BE = 9$$

$$BQ + QE = 9$$

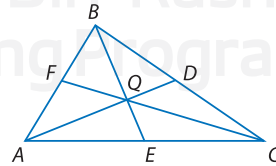
$$6 + QE = 9$$

$$QE = 3$$

بإضافة قطعة مستقيمة

$$BQ = 6$$

بطرح 6 من كل طرف.

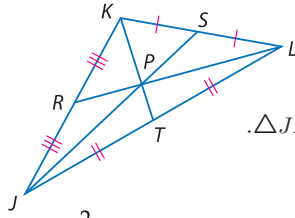


تمرين موجه في $\triangle ABC$ أعلاه، $FC = 15$. جد قياس كل من ما يلي.

1A. FQ

1B. QC

مثال 2 استخدام نظرية النقطة المركزية



في $\triangle JKL$ إذا كان $PT = 2$ فجد KP .

بما أن $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ هي نقطة منتصف $\overline{JK}$ و $\overline{LR}$ تمثل متوسط $\triangle JKL$. وبالمثل، S و T هما نقطتا منتصف $\overline{KL}$ و $\overline{LJ}$ على التوالي، لذا $\overline{JS}$ و $\overline{KT}$ هما أيضًا متوسطا $\triangle JKL$. وعليه، فالنقطة P هي النقطة المركزية لـ $\triangle JKL$.

$$KP = \frac{2}{3}KT$$

نظرية النقطة المركزية

$$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$$

بالتعويض

$$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$$

$PT = 2$

$$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$$

خاصية التوزيع

$$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$$

اطرح $\frac{2}{3}KP$ من كل طرف

$$KP = 4$$

اضرب كل طرف في 3

تمرين موجه

في $\triangle JKL$ أعلاه، $RP = 3.5$ و $JP = 9$. جد قياس كل مما يلي

2A. PL

2B. PS

كل المضلعات لها نقطة توازن أو مركز متوسط. تعتبر النقطة المركزية أيضًا هي نقطة التوازن أو مركز الجاذبية للمنطقة المثلثة. مركز الجاذبية هو النقطة التي تستقر عندها المنطقة بفعل الجاذبية.

مثال من الحياة اليومية 3 إيجاد النقطة المركزية للمثلث في المستوى الإحداثي

الفنون الاستعراضية يخطط فنان استعراضية لموازنة قطع مثلثة معدنية خلال عرضه التالي. عند وضع هذا المثلث على المستوى الإحداثي، تقع رؤوس المثلث على النقاط $(1,10)$ و $(5,0)$ و $(9,5)$. ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟

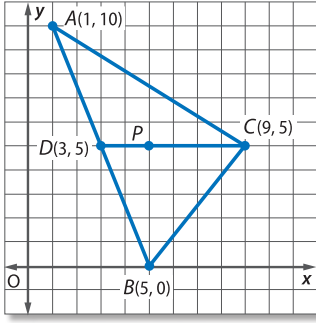
الاستيعاب تحتاج إلى إيجاد النقطة المركزية للمثلث على الإحداثيات المعطاة. تلك هي النقطة التي سوف يتوازن المثلث عندها.

التخطيط مثل المثلث بيانًا مع تسمية رؤوسه كالتالي $A(1, 10)$ و $B(5, 0)$ و $C(9, 5)$. بما أن النقطة المركزية هي نقطة التقاء متوسطات المثلث، استخدم نظرية النقطة المركزية لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث. تقع النقطة المركزية على بعد ثلثي المسافة من الرأس المقابلة إلى نقطة المنتصف تلك.

الربط بتاريخ الرياضيات

بيير دو فيرما

(1601-1665) ثمة مركز آخر للمثلث وهو ما يعرف بنقطة فيرما، وهي النقطة التي تكون المسافة الكلية بينها وبين الرؤوس الثلاثة أقل ما يمكن. فيرما هو أحد أشهر علماء الرياضيات في تخصص البراهين الكتابية.



الحل مثل بيانياً $\triangle ABC$.

جد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ بطرفيه $A(1, 10)$ و $B(5, 0)$.

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

لاحظ أن $\overline{DC}$ يُعد مستقيماً أفقياً. المسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تبلغ $9 - 3$ أو 6 وحدات.

إذا كانت P هي النقطة المركزية لـ $\triangle ABC$.

إذا $PC = \frac{2}{3}DC$. إذا تمثل النقطة المركزية $\frac{2}{3}(6)$ أو 4 وحدات

على يسار C . وتكون إحداثيات النقطة $P(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$. ينبغي على الفنان الاستعراضي موازنة المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

التحقق استخدم متوسطاً آخر للتحقق من الإجابة. إن نقطة المنتصف F للضلع $\overline{AC}$ هي

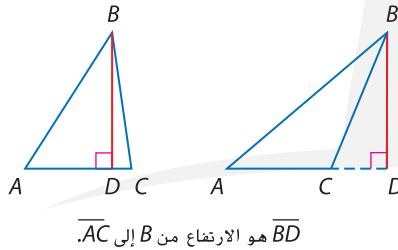
$$F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right) \text{ أو } F(5, 7.5). \overline{BF} \text{ هو مستقيم عرضي. لذا فالمسافة من } B \text{ إلى } F \text{ تساوي}$$

$7.5 - 0$ أو 7.5 . $\overline{PB} = \frac{2}{3}(7.5)$ أو 5. لذا تكون P أعلى بمقدار 5 وحدات عن B . تكون إحداثيات النقطة $(5, 0 + 5)$ أو $(5, 5)$. ✓

تمرين موجه

3. تقع رؤوس مثلث آخر على النقاط $(0, 4)$ و $(6, 11.5)$ و $(12, 1)$. ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟ اشرح استنتاجك.

2 الارتفاعات إن **ارتفاع** المثلث هو القطعة المستقيمة الممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يقع عليه الضلع المقابل وتتعامد على المستقيم الذي يقع عليه هذا الضلع. قد يكون ارتفاع المثلث داخل المثلث أو خارجه أو على الضلع.



$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

لكل مثلث ثلاثة ارتفاعات. إذا امتدت ارتفاعات المثلث فسوف تتقاطع في نقطة مشتركة.

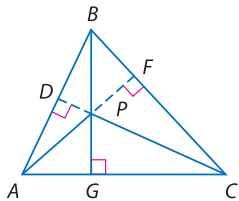
قراءة في الرياضيات

ارتفاع المثلث يُعرف بأنه المسافة بين قاعدة المثلث وقمته. يُستخدم ارتفاع المثلث لحساب مساحته.

المفهوم الأساسي ملتقى الارتفاعات

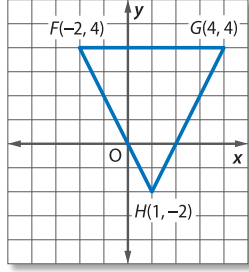
تتلاقى المستقيمتان التي تقع عليها ارتفاعات المثلث وتتلاقى في نقطة تُسمى **ملتقى الارتفاعات**.

مثال تتقاطع المستقيمتان التي تقع عليها الارتفاعات $\overline{AF}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{BG}$ عند النقطة P . ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$.



مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

الهندسة الإحداثية تقع رؤوس $\triangle FGH$ على النقاط $F(-2, 4)$, $G(4, 4)$ و $H(1, -2)$.
جد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$.



الخطوة 1

مثل بيانياً $\triangle FGH$. لإيجاد ملتقى الارتفاعات،
جد نقطة تقاطع ارتفاعين أو ثلاثة ارتفاعات.

الخطوة 2

جد معادلة للارتفاع من F إلى $\overline{GH}$. ميل $\overline{GH}$ يساوي $\frac{4 - (-2)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$ ؛ إذا فإن ميل الارتفاع، المتعامد على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

صيغة الميل والنقطة

$$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$$

$(x_1, y_1) = F(-2, 4)$ و $m = -\frac{1}{2}$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

بسّط

$$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$$

خاصية التوزيع

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

أضف 4 لكل طرف

جد معادلة للارتفاع من G إلى $\overline{FH}$. ميل $\overline{FH}$ يساوي $\frac{-2 - 4}{1 - (-2)} = \frac{-6}{3} = -2$ ؛ لذا فإن ميل الارتفاع يساوي $\frac{1}{2}$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

صيغة الميل والنقطة

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$(x_1, y_1) = G(4, 4)$ و $m = \frac{1}{2}$

$$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$$

خاصية التوزيع

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

أضف 4 لكل طرف

الخطوة 3 حل نظام المعادلات الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

إضافة المعادلتين لحذف x ينتج $2y = 5$ أو $y = \frac{5}{2}$.

معادلة الارتفاع من G

$$y = \frac{5}{2}$$

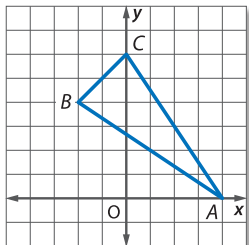
ب طرح $\frac{4}{2}$ أو 2 من كل طرف

بضرب كل طرف في 2

إن إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle FGH$ تساوي $(1, \frac{5}{2})$ أو $(1, 2\frac{1}{2})$.

تبرين موجه

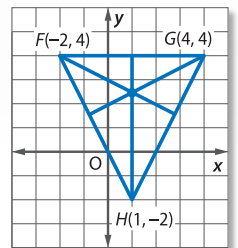
4. جد إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ المرسوم بيانياً على اليسار.



نصيحة دراسية

تحقق من مدى صحة الحل

استخدم جانباً من الورقة لرسم ارتفاعات كل ضلع بالمثلث.



يقع التقاطع تقريباً عند $(1, 2\frac{1}{2})$.
إذا، فالإجابة معقولة.

ملخص المفهوم القطع المستقيمة والنقاط الخاصة في المثلثات

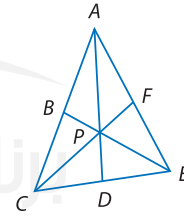
الاسم	مثال	نقطة الالتقاء	خاصية خاصة	مثال
منصف عمودي		مركز الدائرة المحيطة	مركز الدائرة المحيطة $\triangle ABC$ يقع على مسافة واحدة من كل رأس.	
منصف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية	مركز الدائرة الداخلية $\triangle ABC$ يقع على مسافة واحدة من كل أضلاع المثلث.	
متوسط المثلث		النقطة المركزية	النقطة المركزية R تقع على بعد ثلثي المسافة من كل رأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل لها.	
ارتفاع المثلث		ملتقى الارتفاعات	المستقيمات التي تقع عليها ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ تتقاطع مع ملتقى الارتفاعات S .	

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 في $\triangle ACE$ إذا كان P هي النقطة المركزية، $PF = 6$ و $AD = 15$. جد قياس كل مما يلي.

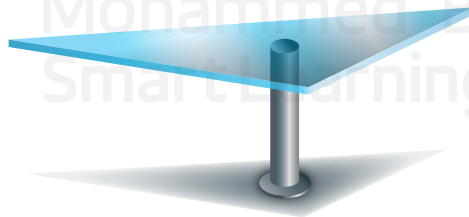
1. PC

2. AP



مثال 3

3. تصميم داخلي يقوم مهندس ديكور بتصميم طاولة قهوة مخصصة لأحد زبائنه. سطح الطاولة عبارة عن مثلث زجاجي تجب موازنته على دعامة واحدة. إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث هي $(3,6)$ و $(5,2)$ و $(7,10)$. فبأي نقطة يجب وضع الدعامة؟



4. هندسة الإحداثيات جد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle ABC$ مع رؤوس $A(-3, 3)$, $B(-1, 7)$ و $C(3, 3)$.

مثال 4

الأمثلة 1-2

في $\triangle SZU$ إذا كان $UJ = 9$ و $VJ = 3$ و $ZT = 18$. جد طول كل مما يلي.

5. YJ

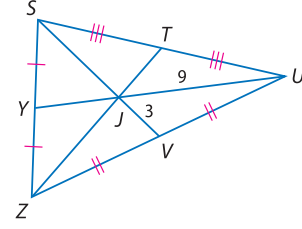
6. SJ

7. YU

8. SV

9. JT

10. ZJ



الهندسة الإحداثية حدد إحداثيات النقطة المركزية لكل مثلث حسب الرؤوس المعطاة.

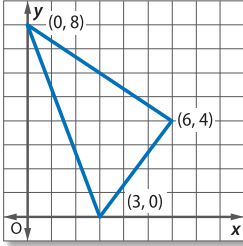
11. $A(-1, 11), B(3, 1), C(7, 6)$

12. $X(5, 7), Y(9, -3), Z(13, 2)$

مثال 3

13

تصميم داخلي صنعت حوريه ملصق عليه صور أصدقائها. تريد تعليق الملصق بسقف غرفتها بحيث يكون موازيًا للسقف. يتوفر الرسم التخطيطي للملصق بالتمثيل البياني الموجود على اليسار. بأي نقطة ينبغي أن تُعلق الخيط؟



الهندسة الإحداثية حدد إحداثيات ملتقى الارتفاعات لكل مثلث له رؤوس معلومة.

14. $J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$

15. $R(-4, 8), S(-1, 5), T(5, 5)$

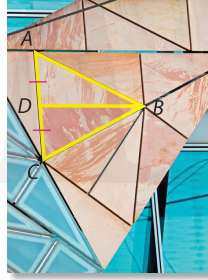
مثال 4

حدد إذا ما كانت كل قطعة مستقيمة $\overline{BD}$ عبارة عن ارتفاع أم متوسط أم منتصف عمودي.

16.



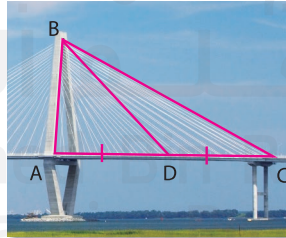
17.



18.

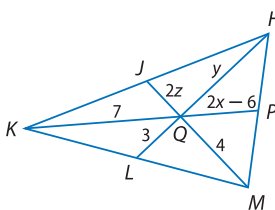


19.



20. **الاستنتاج المنطقي** في الشكل الموجود على اليسار، إذا كانت J, P و L هي نقاط

منتصف $\overline{KH}$ و $\overline{HM}$ ، على الترتيب، جد x, y و z .

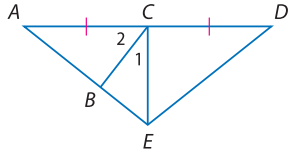


انسخ وأكمل كل عبارة للمثلث $\triangle RST$ والمتوسطات $\overline{RM}$, $\overline{SL}$ و $\overline{TK}$ والنقطة المركزية J.

21. $SL = x(JL)$

22. $JT = x(TK)$

23. $JM = x(RJ)$

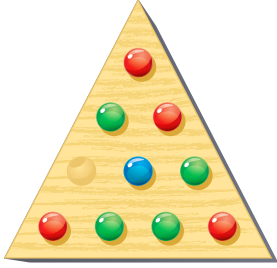


الجبر استخدم الشكل على اليمين.

24. إذا كان $\overline{EC}$ هو ارتفاع المثلث $\triangle AED$, $m\angle 1 = 2x + 7$ و $m\angle 2 = 3x + 13$ جد $m\angle 1$ و $m\angle 2$.

25. جد قيمة x إذا كان $AC = 4x - 3$, $DC = 2x + 9$ و $m\angle ECA = 15x + 2$. $\overline{EC}$ هو متوسّط $\triangle AED$. هل يعد $\overline{EC}$ أيضًا ارتفاعًا للمثلث $\triangle AED$? اشرح.

26. **الألعاب** لوحة الألعاب الموضحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع. فيها فجوات لقطع اللعب. هدف اللعبة هو التخلص من قطع اللعب من خلال القفز عليهم حتى لا يتبقى إلا قطعة واحدة. انسوخ رسمة لوحة اللعب، وحدد أيًا من نقاط الالتقاء تمثلها القطعة الزرقاء: مركز الدائرة المحيطة، أو مركز الدائرة الداخلية، أو النقطة المركزية، أو ملتقى الارتفاعات. اشرح استنتاجك.



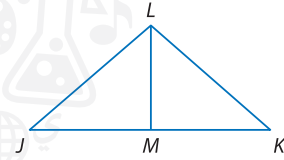
فرضيات استخدم المعلومات المعطاة لتحديد ما إذا كان $\overline{LM}$ منتصف متعامد أو متوسط و/أو ارتفاع للمثلث $\triangle JKL$.

27. $\overline{LM} \perp \overline{JK}$

28. $\triangle JLM \cong \triangle KLM$

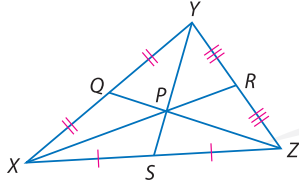
29. $\overline{JM} \cong \overline{KM}$

30. $\overline{LM} \perp \overline{JK}$, $\overline{JM} \cong \overline{KM}$



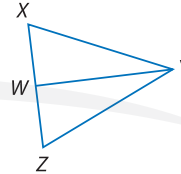
32. **الإثبات** اكتب إثبات جبري.

المعطيات: $\triangle XYZ$ ومتوسطاته $\overline{XR}$, $\overline{YS}$, $\overline{ZQ}$
المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$



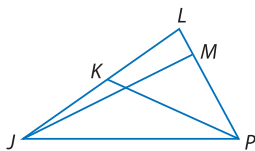
31. **الإثبات** اكتب فقرة إثباتية.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متساوي الساقين.
 $\overline{WY}$ تنصف $\angle Y$.
المطلوب: $\overline{WY}$ متوسط.



33. **التشيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف مكان نقاط الالتقاء لأي مثلث متساوي الأضلاع.

- عملياً أنشئ ثلاثة مثلثات مختلفة متساوية الأضلاع على ورق شفاف وقصها. اطو كل مثلث لتحديد مكان مركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي ومركز المتوسطات وملتقى الارتفاعات.
- لفظياً خمن العلاقات بين أربع نقاط التقاء لأي مثلث متساوي الأضلاع.
- بيانياً ضع مثلثًا متساوي الأضلاع ومركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي والمركز المتوسط وملتقى الارتفاعات على المستوى الإحداثي مستخدمًا إحداثيات مختلفة. وحدد إحداثيات كل نقطة التقاء.



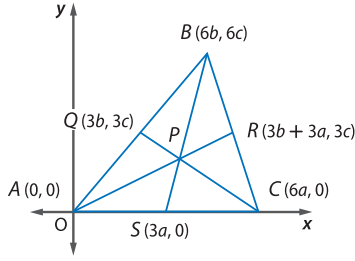
جبرياً في $\triangle JLP$, $m\angle JMP = 3x - 6$ و

$LK = 5y - 8$ و $JK = 3y - 2$

34. إذا كان $\overline{JM}$ هو ارتفاع في $\triangle JLP$, فجد x .

35. جد LK إذا كان $\overline{PK}$ متوسطًا.

36. البرهان اكتب برهاناً إحداثياً لإثبات نظرية النقطة المركزية.



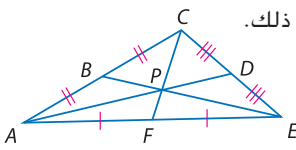
المعطيات: متوسطات $\triangle ABC$ هي $\overline{AR}$, $\overline{BS}$ و $\overline{CQ}$

البرهان: تتقاطع المتوسطات عند النقطة P ، حيث P تساوي ثلثي المسافة بين كل رأس ونقطة منتصف الضلع المقابل.

(إرشاد: أولاً، جد معادلات المستقيمات التي بها متوسطات. ثم جد إحداثيات النقطة P وأثبت أن المتوسطات الثلاثة جميعها تتقاطع عند النقطة P .)

بعد ذلك، استخدم قانون المسافة وعملية الضرب لإثبات أن $AP = \frac{2}{3}AR$, $BP = \frac{2}{3}BS$ و $CP = \frac{2}{3}CQ$.

مسائل مهارات التفكير العليا



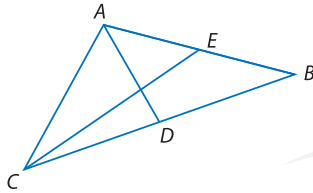
37. تحليل الخطأ وفقاً للشكل على اليسار، يقول حماد إن $\frac{2}{3}AP = AD$ لا يوافق بدر على ذلك. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

38. فرضيات حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. إذا كانت صحيحة، فاشرح استنتاجك. وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثلاً مضاداً.

يقع ملتقى ارتفاعات المثلث دائماً على رأس الزاوية القائمة.

39. التحدي يوجد في $\triangle ABC$ الرؤوس $A(-3, 3)$ و $B(2, 5)$ و $C(4, -3)$. فما إحداثيات النقطة المركزية في $\triangle ABC$ ؟ اشرح العملية المستخدمة للتوصل للإجابة.

40. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين المنصفات العمودية والمتوسطات والارتفاعات للمثلث.



41. التحدي في الشكل على اليسار، القطعتان المستقيمتان $\overline{AD}$ و $\overline{CE}$ هما عبارة عن متوسطين في $\triangle ACB$ ، و $AB = 10$ و $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ ، و $AB = 10$ و $CE = 9$. جد CA .

42. مسألة غير محددة الإجابة في هذه المسألة، إستكشف العلاقة بين نقاط الالتقاء الثلاث المذكورة.

a. ارسم مثلثاً حاداً، وجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

b. ارسم مثلثاً منفرجاً، وجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

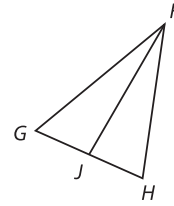
c. ارسم مثلثاً قائماً، وجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

d. خنّ العلاقة بين مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

43. الكتابة في الرياضيات استخدم المساحة لتوضيح سبب اعتبار النقطة المركزية للمثلث هي نفسها مركز جاذبيته. ثم استخدم هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.

تمرین على الاختبار المعیاري

44. بالشكل أدناه، $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$. أي مما يلي لا بد أن يكون صحيحاً؟



- A** $\overline{FJ}$ هو ارتفاع $\triangle FGH$.
B $\overline{FJ}$ هو منصف زاوية $\triangle FGH$.
C $\overline{FJ}$ هو متوسط في $\triangle FGH$.
D $\overline{FJ}$ هو المنصف العمودي لـ $\triangle FGH$.

45. **إجابة شبكية** ما نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني لـ $4x - 6y = 12$ ؟

46. **جبرياً تطوع** أربعة طالبات لطّي كتيبات لصالح مجموعة عمل مجتمعي محلية. أي طالبة هي الأسرع؟

الطالب	سرعة الطي
أُماني	صفحة واحدة كل 3 ثوانٍ
سهيلة	صفحتان كل 10 ثوانٍ
منى	30 صفحة في الدقيقة
منال	45 صفحة كل دقيقتين

H منى
J سهيلة

F منال
G أماني

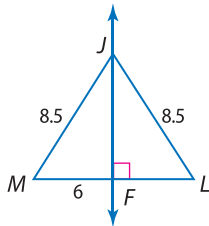
47. SAT/ACT 80 بالمائة من 42. ما نسبتها المئوية من 16؟

- A** 240 **D** 50
B 210 **E** 30
C 150

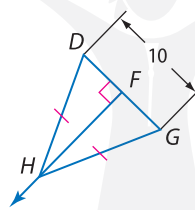
مراجعة شاملة

جد قیاس کل منها.

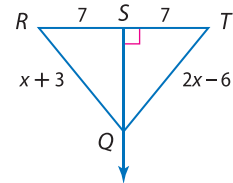
48. LM



49. DF



50. TQ



ضع كل نقطة مما يلي على المستوى الإحداثي ثم سمّها.

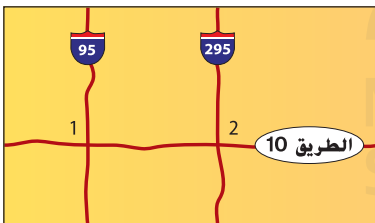
51. المثلث $\triangle XYZ$ قائم الزاوية وله وتر $\overline{XZ}$, ZY ، ويبلغ ضعف قياس XY ، و $\overline{XY}$ ، ويبلغ طوله b وحدة

52. $\triangle QRT$ مثلث متساوي الساقين وقياس قاعدته $\overline{QR}$ يبلغ b وحدة طولاً

حدد ما إذا كان $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{JK}$ متوازيين، أم متعامدان، أم خلاف ذلك. مثل كل مستقيم بيانياً للتأكد من صحة إجابتك.

53. $R(5, -4), S(10, 0), J(9, -8), K(5, -13)$

54. $R(1, 1)$, $S(9, 8)$, $J(-6, 1)$, $K(2, 8)$



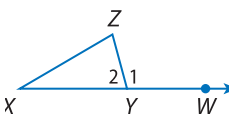
55. **طرق سريعة** بالقرب من مدينة هوبويل بولاية فيرجينيا، يقع الطريق 10 عمودياً على الطريقين المحوريين 95 و 295. اثبت أن زوايا تقاطع الطريق 10 مع الطريق المحوري 95 والطريق المحوري 295 متطابقان.

مراجعة المهارات

اكتب برهاناً تسلسلياً لإثبات نظرية الزاوية الخارجية.

56. المعطيات: $\triangle XYZ$

المطلوب: $m\angle X + m\angle Z = m\angle 1$



المتباينات في مثلث واحد

4-3

الدرس

السابق ..

الحالي ..

لماذا ..

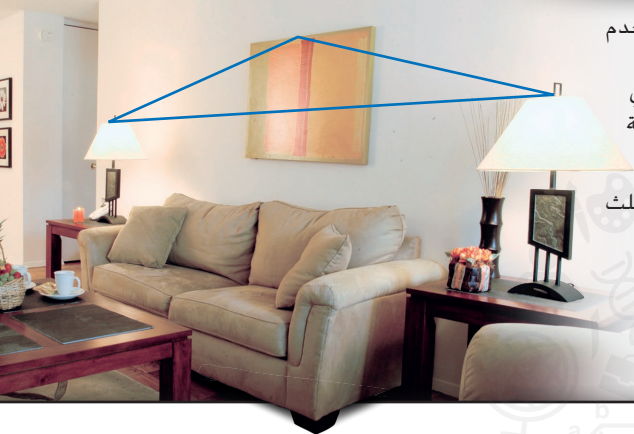
تعرفت على العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

1 التعرف على خواص المتباينات وتطبيقها على قياسات زوايا المثلث.

2 التعرف على خواص متباينات العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه وتطبيقها.

● لإنشاء مظهر عمق في غرفة ما، يستخدم مصممو الديكور الداخلي تقنية تُسمى التثليث. من أهم أمثلة هذه التقنية هي وضع طاولة جانبية على طرفي الأريكة مع وجود لوحة فوق الأريكة.

لا بد أن تكون قياسات زوايا قاعدة المثلث أصغر من قياس الزاوية الأخرى.



1 **متباينات الزاوية** في علم الجبر، تعرفت على العلاقة المتباينة بين عددين حقيقيين. تُستخدم هذه العلاقة غالبًا بالبراهين.

مهارسات في الرياضيات
افهم طبيعة المسائل واجتهد في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

المفهوم الأساسي تعريف المتباينة

الشرح لأي عددين حقيقيين a و b ، يكون $a > b$ فقط في عندما يوجد عدد موجب c حيث $a = b + c$.

مثال إذا كان $5 = 2 + 3$ ، فإن $5 > 2$ و $5 > 3$.

يُدرج الجدول أدناه بعض خواص المتباينات التي درستها بعلم الجبر.

المفهوم الأساسي خواص المتباينات للأعداد الحقيقية

الخصائص التالية صحيحة لأي أعداد حقيقية a و b و c .

خاصية المقارنة في المتباينات	$a < b$ ، أو $a = b$ ، أو $a > b$
خاصية التعدي في المتباينات	1. إذا كان $a < b$ و $b < c$ ، فإن $a < c$. 2. إذا كان $a > b$ و $b > c$ ، فإن $a > c$.
خاصية الجمع في المتباينات	1. إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$. 2. إذا كان $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$.
خاصية الطرح في المتباينات	1. إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$. 2. إذا كان $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$.

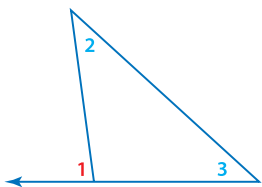
يمكن تطبيق تعريف المتباينة وخواص المتباينات على قياسات الزوايا والقطع المستقيمة، وذلك لأنها أعداد حقيقية. تأمل $\angle 1$ ، و $\angle 2$ ، و $\angle 3$ بالشكل الموضح.

باستخدام نظرية الزوايا الخارجية، فأنت تعرف أن $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$.

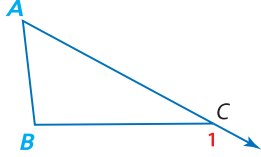
بما أن قياسات الزوايا تمثل أعدادًا موجبة، فإننا نستطيع القول أيضًا بأن

$$m\angle 1 > m\angle 2 \quad \text{و} \quad m\angle 1 > m\angle 3$$

باستخدام تعريف المتباينة، تقترح النتيجة النظرية التالية.



النظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجية



قياس زاوية المثلث الخارجية أكبر من قياس كلا الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.

مثال: $m\angle 1 > m\angle A$
 $m\angle 1 > m\angle B$

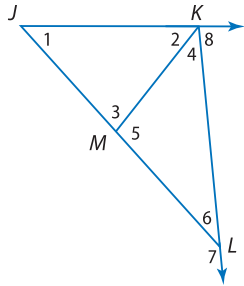
مراجعة المفردات

الزاوية الداخلية غير المتجاورة

تحتوي كل زاوية مثلث خارجية على زاويتين داخليتين غير مجاورتين. وأيضًا غير مجاورتين للزاوية الخارجية.

برهان نظرية 4.8 بالدرس 4-4.

مثال 1 استخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية



استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوية للشرط المذكور.

a. قياسها أصغر من $m\angle 7$

$\angle 7$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle KML$. حيث إن $\angle 4$ و $\angle 5$ زاويتين داخليتين غير مجاورتين. باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 7 > m\angle 4$ و $m\angle 7 > m\angle 5$.

$\angle 7$ هي أيضًا زاوية خارجية في $\triangle JKL$. حيث إن $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتين داخليتين غير مجاورتين. إذا، $m\angle 7 > m\angle 1$ و $m\angle 7 > m\angle 2$.

فإنه باستخدام التعويض $m\angle 7 > m\angle 1 + m\angle 2$. وبالتالي، $m\angle 7 > m\angle 3$.

إذا، فالزوايا ذات القياس الأصغر من $m\angle 7$ هي $\angle 1$ ، و $\angle 2$ ، و $\angle 4$ ، و $\angle 5$.

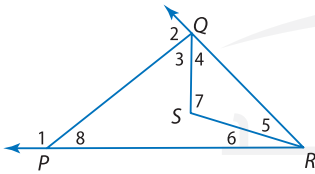
b. قياسها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ هي زاوية خارجية في $\triangle KLM$. لذا فباستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 3 > m\angle 6$. نظرًا لأن $\angle 8$ هي زاوية خارجية في $\triangle JKL$. فإن $m\angle 8 > m\angle 3$. بالتالي، قياسات $\angle 3$ ، و $\angle 8$ أكبر من $m\angle 6$.

تمرين موجه

1A. قياسها أصغر من $m\angle 1$

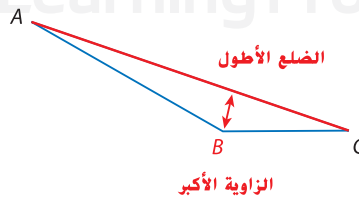
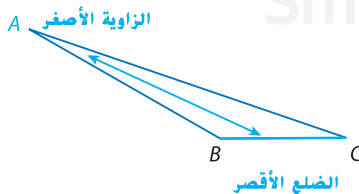
1B. قياسها أكبر من $m\angle 8$



اقتبه!

تحديد الضلع المقابل احرص على تحديد الضلع المقابل لزاوية ما بشكل صحيح. لا يمكن أن تكون الأضلاع المكونة للزاوية هي نفسها الأضلاع المقابلة.

2 متباينات ضلع الزاوية لقد تعلمت أنه إذا تطابق ضلعي مثلث، أو إذا كان المثلث متساوي الساقين، فإن الزوايا المقابلة لتلك الأضلاع تكون متطابقة. ما العلاقة التي تتكوّن في حالة عدم تطابق الأضلاع؟ افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأكبرها لمثلث متفرج مختلف الأضلاع.



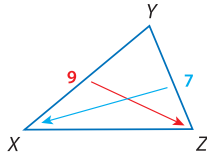
لاحظ أن أطول ضلع وأكبر زاوية في $\triangle ABC$ متقابلان. وبالمثل، فإن أقصر ضلع وأصغر زاوية متقابلان.

تنطبق علاقات الزوايا والأضلاع في المثلثات المنفرجة مختلفة الأضلاع على جميع المثلثات، وسيتم ذكر تلك العلاقات باستخدام المتباينات بالنظريات أدناه.

انتبه!

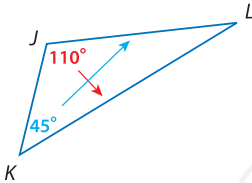
رموز الزوايا والمتباينات يبدو رمز الزاوية ($\angle$) مشابهًا لرمز أقل من ($<$). خاصةً عندما يكتب بخط اليد. احرص على كتابة الرمز بشكل صحيح عند استخدام كليهما في نفس الوقت.

نظريات علاقات الزوايا والأضلاع في المثلثات



4.9 إذا كان أحد أضلاع المثلث أطول من ضلع آخر، فإن الزاوية المقابلة للضلع الأطول ذات قياس أكبر من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

مثال: نظرًا لأن $XY > YZ$ ، فإن $m\angle Z > m\angle X$.



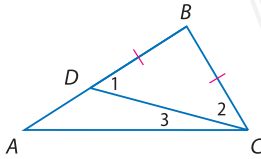
4.10 إذا كانت إحدى زوايا المثلث لها قياس أكبر من زاوية أخرى، فإن الضلع المقابل للزاوية الأكبر يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر.

مثال: نظرًا لأن $m\angle J > m\angle K$ ، فإن $KL > JL$.

برهان النظرية 4.9

المعطيات: $\triangle ABC$, $AB > BC$

المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$



البرهان:

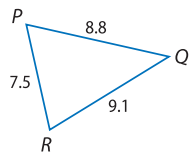
بما أن $AB > BC$ بالمثلث المعطى $\triangle ABC$ ، فإن النقطة D تقع على $\overline{AB}$ حيث إن $BD = BC$.
ارسم $\overline{CD}$ لعمل مثلث متساوي الساقين $\triangle BCD$. باستخدام نظرية المثلثات متساوية الساقين،
 $\angle 1 \cong \angle 2$ ، إذًا $m\angle 1 = m\angle 2$ باستخدام تعريف الزوايا المتطابقة.

باستخدام مسلمة إضافة الزوايا، $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$ ، إذًا $m\angle BCA > m\angle 2$ باستخدام تعريف المتباينات. باستخدام التعويض، نجد أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 1 > m\angle A$. بالتالي، نظرًا لأن $m\angle BCA > m\angle 1$ و $m\angle 1 > m\angle A$ ، فإنه باستخدام التعدي في المتباينات، نجد أن $m\angle BCA > m\angle A$.

سوف تُثبت النظرية 4.10 في الدرس 4-4، التمرين 31.

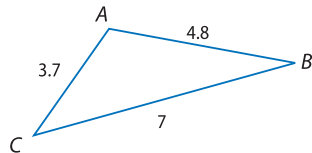
مثال 1 ترتيب قياسات زوايا المثلث



صنّف زوايا $\triangle PQR$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

الأضلاع من الأقصر إلى الأطول هي $\overline{PR}$ ، $\overline{PQ}$ ، $\overline{QR}$.
الزوايا المقابلة لتلك الأضلاع هي $\angle Q$ ، و $\angle P$ ، و $\angle R$.
على التوالي. إذًا فالزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle Q$ ، و $\angle R$ ، و $\angle P$.

تمرين موجه



2. صنّف زوايا $\triangle ABC$ وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

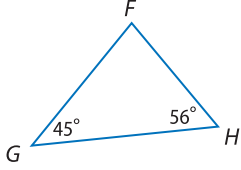
مثال 3 ترتيب أطوال أضلاع المثلث

صنّف أضلاع $\triangle FGH$ بالترتيب من الأقصر إلى الأطول.

جد أولاً قياس الزاوية المفقودة باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث.

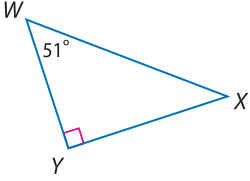
$$m\angle F = 180 - (45 + 56) = 79$$

إذاً، الزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle G$ ، و $\angle H$ ، و $\angle F$. الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي $\overline{FH}$ ، و $\overline{FG}$ ، و $\overline{GH}$. على التوالي. إذاً، الأضلاع من الأقصر إلى الأطول هي $\overline{FH}$ ، $\overline{FG}$ ، $\overline{GH}$.



تدريب موجه

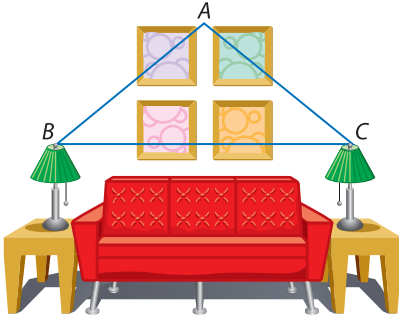
3. صنّف زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



يمكنك استخدام علاقات الزوايا والأضلاع في المثلث لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال من الحياة اليومية 4 علاقات الزوايا والأضلاع

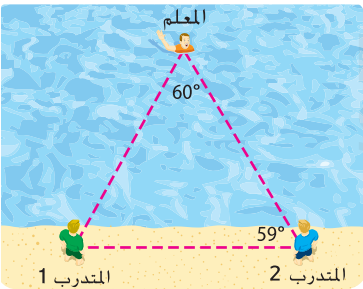
تصميم الديكور الداخلي يستخدم مصمم الديكور الداخلي التثليث لعمل عمق في غرفة معيشة أحد العملاء. إذا كان $m\angle B$ أصغر من $m\angle A$ ، فأى مسافة هي الأطول - المسافة بين المصباحين أم المسافة من المصباح عند النقطة B إلى نقطة المنتصف أعلى العمل الفني؟ اشرح.



وفقاً للنظرية 4.10، حتى يكون $m\angle B < m\angle A$ ، فإنه يجب أن يكون طول الضلع المقابل $\angle B$ أصغر من طول الضلع المقابل $\angle A$. بما أن $\overline{AC}$ يقع مقابل $\angle B$ ، و $\overline{BC}$ يقع مقابل $\angle A$ ، إذاً $AC < BC$ و $BC > AC$. إذاً، يجب أن تكون BC ، وهي المسافة بين المصباحين، أكبر من المسافة من المصباح عند النقطة B إلى نقطة المنتصف أعلى العمل الفني.

تدريب موجه

4. **الإنقاذ** أثناء تدريب على الإنقاذ، يُحاكي المدرب كونه الشخص المستغيث حتى يتمكن المتدربون من ممارسة مهارات الإنقاذ التي تعلموها. إن كان المدرب والمتدرب 1 والمتدرب 2 واقفين بالمواضع الموضحة بالرسم التخطيطي، فأى المتدربين هو الأقرب للمدرب؟

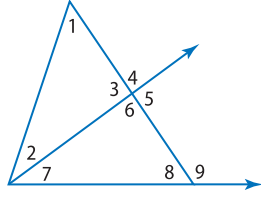


مهن من الحياة اليومية

تصميم ديكور داخلي يعمل مصمم ديكور داخلي على تزيين مساحة ما حتى تصبح مبهجة المنظر ومريحة لمن سيعيش أو يعمل بها. وينبغي على المصممين معرفة نظريات الألوان والدهان وتصميم الإضاءة وتخطيط المساحات. يوصى بالحصول على شهادة البكالوريوس لوظائف الخريجين الجدد. عادةً ما يتلقى الخريج تدريباً مهنيًا لفترة تتراوح من 1 إلى 3 سنوات قبل دخول امتحان القبول.

مثال 1

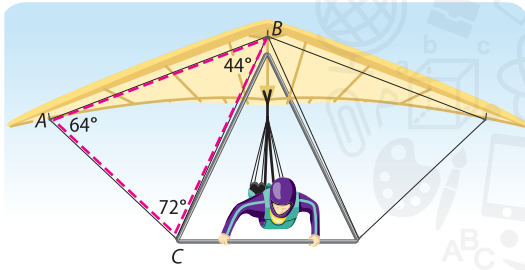
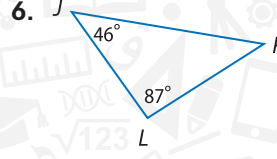
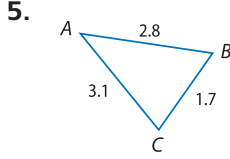
استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



1. قياسها أصغر من $m\angle 4$
2. قياسها أكبر من $m\angle 7$
3. قياسها أكبر من $m\angle 2$
4. قياسها أصغر من $m\angle 9$

المثالان 2-3

صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



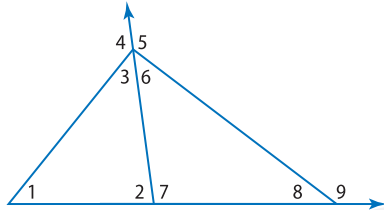
7. **الطيران الشراعي** تكوّن دعامات الطيران الشراعي مثلثات كما هو موضح. أي منها الأطول - الدعامة التي تمثلها AC أم الدعامة التي تمثلها BC ؟ اشرح استنتاجك.

مثال 4

التمرين وحل المسائل

مثال 1

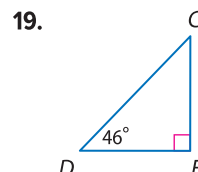
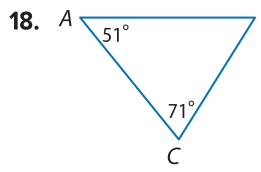
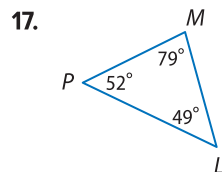
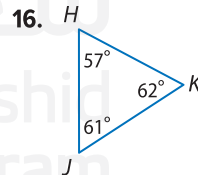
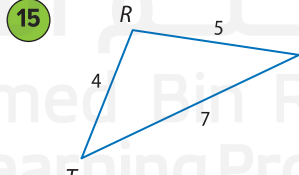
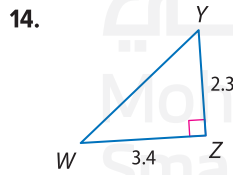
الاستنتاج المنطقي استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



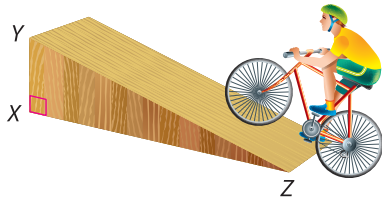
8. قياسها أكبر من $m\angle 2$
9. قياسها أصغر من $m\angle 4$
10. قياسها أصغر من $m\angle 5$
11. قياسها أصغر من $m\angle 9$
12. قياسها أكبر من $m\angle 8$
13. قياسها أكبر من $m\angle 7$

المثالان 2-3

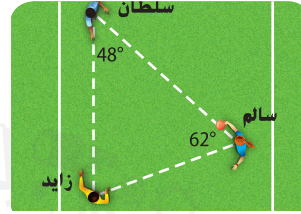
صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



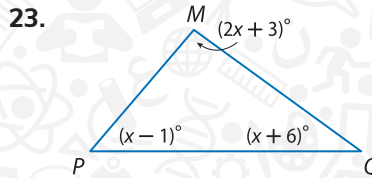
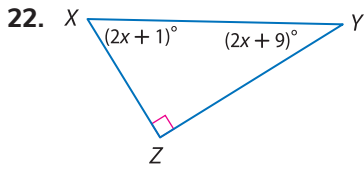
21. **منحدرات** يمثل المنحدر الخشبي أدناه منحدر دراجات. أي منها الأطول، طول المنحدر XZ أم طول السطح العلوي للمنحدر YZ ؟ اشرح استنتاجك مستخدماً النظرية 7.9.



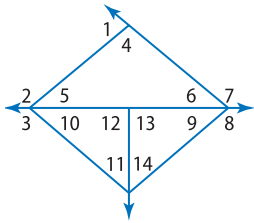
20. **رياضة** يلعب كل من زايد وسلطان وسالم لعبة تمرير القرص. يحاول سالم أن يقرر ما إذا كان سيمرر القرص لزايد أم لسلطان. أي من اللاعبين يجب أن يختار ليحصل على أقصر مسافة تمرير؟ اشرح استنتاجك.



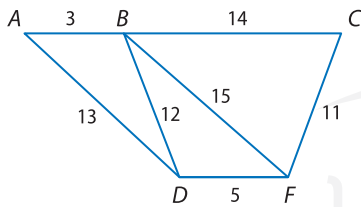
صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد الزاوية التي لها أكبر قياس.



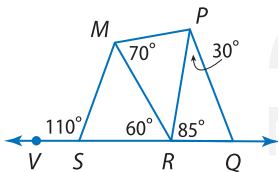
- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 24. $\angle 1, \angle 5, \angle 6$ | 25. $\angle 2, \angle 4, \angle 6$ |
| 26. $\angle 7, \angle 4, \angle 5$ | 27. $\angle 3, \angle 11, \angle 12$ |
| 28. $\angle 3, \angle 9, \angle 14$ | 29. $\angle 8, \angle 10, \angle 11$ |



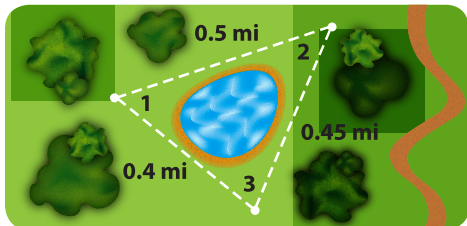
الاستنتاج المنطقي استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد العلاقات بين قياسات الزوايا المعروفة.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 30. $\angle ABD, \angle BDA$ | 31. $\angle BCF, \angle CFB$ |
| 32. $\angle BFD, \angle BDF$ | 33. $\angle DBF, \angle BFD$ |

استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد العلاقة بين الأطوال المعروفة.



- | | |
|--------------|--------------|
| 34. SM, MR | 35. RP, MP |
| 36. RQ, PQ | 37. RM, RQ |

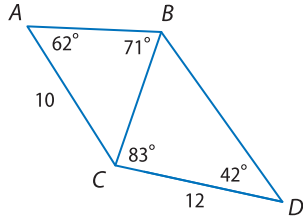


38. **نزهة على الأقدام** يستمتع حمدان وأسرته بالمشي على الأقدام حول بحيرة كما هو موضح بالرسم التخطيطي على اليسار. رتبّ زوايا المثلث المكون لمسارهما من الأكبر إلى الأصغر.

الهندسة الإحداثية صنف زوايا كل مثلث بمعرفة الرؤوس المعطاة بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر. علل إجابتك.

39. $A(-4, 6), B(-2, 1), C(5, 6)$

40. $X(-3, -2), Y(3, 2), Z(-3, -6)$



41. صنف أطوال أضلاع المثلثات بالشكل من الأقصر إلى الأطول. اشرح استنتاجك.

42. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة. ستتعرف على العلاقة بين أضلاع المثلث.

a. **الهندسة** ارسم ثلاثة مثلثات. أحدهم حاد الزاوية والآخر منفرج الزاوية والثالث قائم الزاوية. اكتب أسماء رؤوس كل مثلث A, B, و C.

المثلث	AB	BC	AB + BC	CA
حاد الزاوية				
منفرج الزاوية				
قائم الزاوية				

b. **جدوليًا** قس طول كل ضلع من أضلاع المثلثات الثلاثة. ثم انسخ الجدول وأكمله.

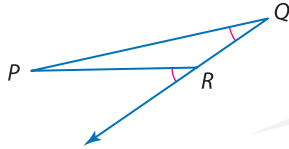
c. **جدوليًا** كَوّن جدولين إضافيين كالجدول أعلاه. وجد مجموع BC و CA في أحد الجداول ومجموع AB و CA في الجدول الآخر.

d. **جبريًا** اكتب متباينة لكل من الجداول التي صنعتها من خلال ربط قياس مجموع ضلعين بقياس الضلع الثالث للمثلث.

e. **لفظيًا** ضع تخمينًا حول العلاقة بين قياس مجموع ضلعين بالمثلث وقياس الضلع الثالث.

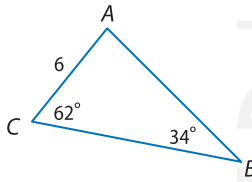
مسائل مهارات التفكير العليا

43. **الكتابة في الرياضيات** حلل المعلومات المعطاة بالرسم التخطيطي واطرح سبب عدم صحة العلامات.



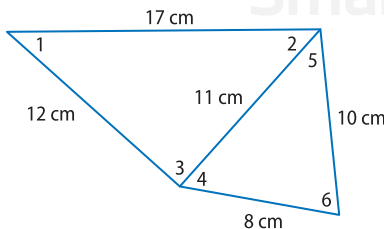
44. **تحدي** باستخدام مسطرة، ارسم $\triangle ABC$ بحيث يكون $m\angle A > m\angle B > m\angle C$. علل ما قيمت برسمه.

45. **مسألة غير محددة الإجابة** قد يكون قياسًا ممكنًا لـ $\overline{AB}$ في $\triangle ABC$ الموضح. اشرح استنتاجك.



46. **فرضيات** هل قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون أطول ضلع بالمثلث دائمًا، أم أحيانًا، أم لا تكون أطول منه على الإطلاق؟ اشرح.

47. **تحدي** استخدم أطوال الأضلاع في الشكل لترتيب الزوايا المرقمة من الأصغر إلى الأكبر مع العلم أن $m\angle 2 = m\angle 5$. اشرح استنتاجك.



48. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يكون الوتر دائمًا أطول ضلع بالمثلث القائم؟

تمرین على الاختبار المعیاري

49. الإحصاء يوضح المخطط عدد أسطوانات DVD وأنواعها المباعة في ثلاثة متاجر.

المبتجر 3	المبتجر 2	المبتجر 1	نوع أسطوانة DVD
92	80	75	الكوميديا
65	37	54	الحركة
62	48	30	الرعب
36	81	21	الخيال العلمي
255	246	180	الإجمالي

وفقًا للمعلومات المقدمة بالمخطط، أيُّ هذه العبارات صحيحة؟

A متوسط عدد أسطوانات DVD المباعة في كل متجر هو 56.

B باع المتجر 1 ضعف أفلام الحركة والرعب مما باعه المتجر 3 من أفلام الخيال العلمي.

C باع المتجر 2 أفلام كوميدية وخيال علمي أقل مما باعه المتجر 3.

D متوسط عدد أسطوانات DVD لأفلام الخيال العلمي المباعة في كل متجر هو 46.

50. يبلغ قياس زاويتين في مثلث 45° و 92° . ما نوع المثلث؟

F منفرج مختلف الأضلاع	H حاد مختلف الأضلاع
G منفرج متساوي الساقين	J حاد متساوي الساقين

51. **إجابة موسعة** في مطعم من فئة الخمسة نجوم، يجني النادل إجمالاً t من الدراهم مقابل العمل لعدد h ساعات بحيث يحصل على 198 AED إكرامية ويجني 2.50 AED في الساعة.

a. اكتب معادلة لتمثيل المجموع الكلي من النقود التي يجنيها النادل.

b. إن كان إجمالي ما يجنيه النادل AED 213، فكم ساعة يعملها؟

c. إن كان ما يجنيه النادل من إكرامية يبلغ 150 AED ويعمل 12 ساعة، فما إجمالي ما يكسبه من مال؟

52. SAT/ACT أي تعبير يحمل القيمة الأقل؟

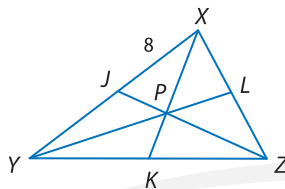
- | | |
|---------|---------|
| A -99 | D -28 |
| B 45 | E 15 |
| C -39 | |

مراجعة شاملة

في $\triangle XYZ$ ، نجد أن P هي النقطة المركزية، و $KP = 3$ ، و $XJ = 8$.
جد طول كل مما يلي.

XK .53

YJ.54



الهندسة الإحداثية اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع من أجل المُنصف العمودي للقطعة المستقيمة ذات نقطتي النهاية المعلومتين. علل إجابتك.

$E(2, 1)$, $D(-2, -4)$.56 $E(3, 5)$, $D(-2, 4)$.55

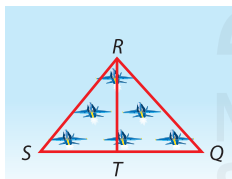
57. الطائرات النفاثة يطير سرب طيران استعراضى

في تشكيل يمكن رؤيته بمثلثين لهما ضلعًا مشتركًا. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ إذا كان T هي نقطة منتصف SQ و $SR \cong QR$.

58. حمامات سباحة تبلغ مساحة حمام سباحة مستطيل الشكل 20 ft في 30 ft.

ويبلغ عمق حمام السباحة 60 ft، ولكن يبلغ عمق الماء $\frac{3}{4}$ من عمق الحمام.
جد كل قياس مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

a. مساحة سطح الحمام



مراجعة المهارات

إذا كان $x = 8$ ، و $y = 2$ ، و $z = 3$. حدد ما إذا كانت كل جملة صحيحة أم خاطئة.

59. $z(x - y) = 13$

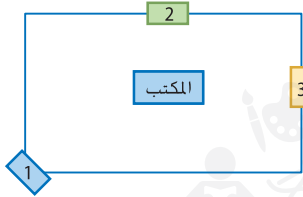
60. $2x = 3yz$

61. $x + y > z + y$

اختبار منتصف الوحدة

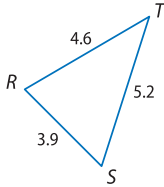
الدروس من 4-1 إلى 4-3

13. **هندسة معمارية** يصمم مهندس معماري مبنى مدرسة ثانوية. صف كيف يمكن وضع المكتب المركزي بحيث يكون عند تقاطع الأروقة المتصلة بالمداخل الثلاثة للمدرسة.

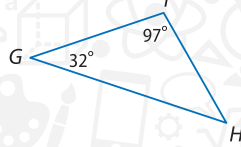


أدرج زوايا وأضلاع كل مثلث في ترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

14.



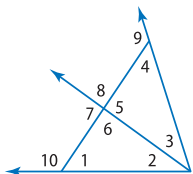
15.



16. **إجازة** يخطط عبد الله للطيران بالمسار المحدد على خريطة هاواي أدناه.



- a. إذا كان $m\angle A = 2 + m\angle B$ و $m\angle C = 2(m\angle B) - 14$ ، فما قياسات المثلثات الثلاثة؟
b. ما ترتيب المسافات التي سيقطعها عبد الله في رحلته من الأقل إلى الأكبر؟
c. طول الرحلة بأكملها حوالي 68 mi. تزيد مسافة الشوط الأوسط بمقدار 11 mi عن نصف الشوط الأقصر. تزيد مسافة الشوط الأطول بمقدار 12 mi عن ثلاثة أرباع الشوط الأقصر. ما مسافات أشواط الرحلة؟

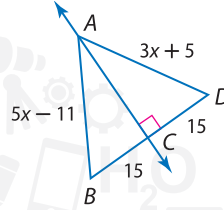


استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.

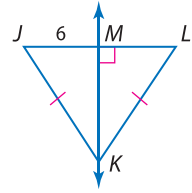
17. قياسها أصغر من $m\angle 8$
18. قياسها أكبر من $m\angle 3$
19. قياسها أصغر من $m\angle 10$

جد قياس كل مما يلي.

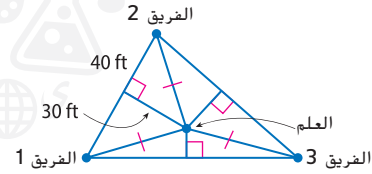
1. AB



2. JL

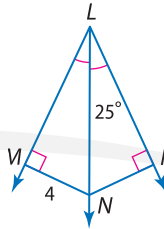


3. **المعسكر** انتهى معسكر أونواوتشي بلعبة إمساك العلم. إذا كانت مواقع البدء للثلاثة فرق موضحة بالرسم التخطيطي أدناه، بحيث يقع العلم على مسافة واحدة من قاعدة كل فريق. فكم يبعد العلم عن كل قاعدة بالأقدام؟

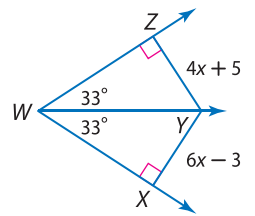


جد قياس كل مما يلي.

4. $\angle MNP$



5. XY



في $\triangle RST$ ، Z هو النقطة المركزية و $RZ = 18$. جد طول كل مما يلي.

6. ZV
7. SZ
8. SR

الهندسة الإحداثية جد إحداثيات المركز لكل مثلث مع الرؤوس المعروفة.

9. $A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$
10. $X(-11, 0), Y(-11, -8), Z(-1, -4)$
11. $R(-6, 4), S(-2, -2), T(2, 4)$
12. $J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$

مختبر الهندسة

منطق المصفوفة

4-4

يستخدم منطق المصفوفات صفوفًا مستطيلة لتسجيل المعلومات التي توصلت إليها من أجل حل مسألة منطق أو استنتاج. وبمجرد ملء كل الصفوف والأعمدة، يمكنك استنتاج النتيجة.

الطعام يذهب كل من فهد وفالح وصالح وماجد وطارق إلى مطعم إيطالي. يطلب كل واحد منهم طبقه المفضل: رافيولي، أو بيتزا، أو لازانيا، أو مانيكوتي أو سباجيتي. يجب ماجد الرافيولي، ولكن فهد لا يحب أطباق البيتزا. فالح لا يحب اللازانيا أو المانيكوتي. طبق صالح المفضل لا ينتهي بالحرف "ي". ماذا طلب كل واحد منهم؟

الخطوة 1

أنشئ مصفوفة مناسبة.

استخدم مصفوفة 5×5 التي تتضمن اسم كل شخص كعنوان لكل صف وأطعمته المفضلة المحتملة كعنوان لكل عمود.

الطبق المفضل					الاسم
رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي	
فهد	×	✓	×	×	
فالح	×	×	×	×	
ماجد	✓	×	×	×	
صالح	×	×	×	×	
طارق	×	×	×	×	

الخطوة 2

استخدم كل فكرة واستدلال منطقي لملء المصفوفة.

- نظرًا لأن ماجد يحب الرافيولي، ضع علامة ✓ في صف ماجد الآن تحت "رافيولي" وعلامة × في كل خلية أخرى في هذا الصف. نظرًا لأن كل طبق يحبه شخص واحد فقط، يمكنك وضع علامة × في كل خلية أخرى في عمود "رافيولي".

الطبق المفضل					الاسم
رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي	
فهد	×	✓	×	×	
فالح	×	×	×	✓	
ماجد	✓	×	×	×	
صالح	×	×	×	×	
طارق	×	×	×	×	

- ونظرًا لأن فهد لا يحب المعكرونة، فإنك تعرف أن فهد لا يمكن أن يحب المانيكوتي أو الرافيولي أو اللازانيا أو السباجيتي وكلها جميعًا أطباق معكرونة. لذا لا بد أن فهد يحب البيتزا. ضع علامة ✓ في صف فهد أسفل البيتزا. ضع علامة × في كل خلية أخرى في صف فهد وفي كل خلية أخرى في عمود البيتزا.

- نظرًا لأن فالح لا يحب اللازانيا أو المانيكوتي، ضع علامة × في صف فالح أسفل اللازانيا والمانيكوتي. وهذا يترك السباجيتي فقط بدون علامة × في صف فالح. لذلك، يمكنك استنتاج أنه من المؤكد أن فالح يحب السباجيتي. ضع علامة ✓ في هذه الخلية وعلامة × في كل خلية أخرى في عمود السباجيتي.

- يمكنك من خلال المصفوفة رؤية أن طبق صالح المفضل لا بد أن يكون إما اللازانيا أو المانيكوتي. ونظرًا لأن طبق صالح المفضل لا ينتهي بالحرف "ي"، يمكنك استنتاج أن صالح يحب اللازانيا. في صف صالح، ضع علامة ✓ أسفل اللازانيا وعلامة × أسفل المانيكوتي.

- وهذا يترك خلية واحدة فقط فارغة في صف طارق، لذا يمكنك استنتاج أن طبقه المفضل هو المانيكوتي.

الطبق المفضل					الاسم
رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي	
فهد	×	✓	×	×	
فالح	×	×	×	✓	
ماجد	✓	×	×	×	
صالح	×	✓	×	×	
طارق	×	×	✓	×	

الخطوة 3

استخدم مصفوفتك لتوضيح الإجابة على المسألة.

يمكنك من خلال المسألة معرفة أن فهد طلب البيتزا، وطلب فالح السباجيتي، وطلب ماجد الرافيولي، وطلب صالح اللازانيا وطلب طارق المانيكوتي.

تمارين

استخدم مصفوفة لحل كل مسألة.

1. **الرياضات** يرتاد محمود وعبد العزيز، وعبد الرحمن وعبد الرحيم نفس المدرسة. يشارك كل واحد منهم في رياضة مدرسية مختلفة: كرة السلة، أو كرة القدم، أو الركض، أو التنس. استخدم المعلومات التالية لتحديد الرياضة التي يشارك فيها كل طالب.

- لا يحب عبد العزيز الركض أو كرة السلة.
- لا يشارك محمود في كرة القدم أو التنس.
- يفضل عبد الرحمن رياضات الشتاء الداخلية.
- أحرز عبد الرحمن أربعة أهداف في المباراة النهائية في الموسم.

2. **العائلة** يوجد خمسة أطفال في عائلة راشد. استخدم المعلومات التالية لتحديد الترتيب الذي وُلد به الأطفال.

- سها أكبر من لميس.
- خليفة أصغر من سهيلة.
- لميس أكبر من خليفة وخالد.
- خالد أكبر من خليفة.
- سهيلة أكبر من سها.

3. **الحيوانات الأليفة** ذهبت كل من خديجة وشيماء وعلياء إلى ملجأ للحيوانات الأليفة. اختارت كل فتاة حيواناً أليفاً مختلفاً لتربيته: ببغاء أو أرنب أو قطة. أطلقت كل فتاة اسماً على حيوانها الأليف باسم "الطاووس الجميل" أو "زوزو" أو "روسكو". استخدم المعلومات التالية والمصفوفة الموضحة لتحديد الحيوان الذي تربيته كل فتاة وما الاسم الذي أعطته إياه.

الحيوان الأليف		اسم الحيوان الأليف	
ببغاء	أرنب	قطة	الطاووس
خديجة			
شيماء			
علياء			
الطاووس			
زوزو			
روسكو			

- الفتاة التي اعتنت بالببغاء لم تسميه "الطاووس الجميل".
- حيوان شيماء الأليف الذي أسمته "زوزو" ليس من نوع الحيوانات التي تقفز.
- اعتنت علياء بروسكو وهو ليس قطة.
- لم تعتن خديجة بالأرنب.

4. **الهندسة** رسم كل من علي وعمر وعامر مثلثاً، ولا يتشارك اثنان منهم في نفس طول الضلع أو نوع الزاوية. استخدم المعلومات التالية لتحديد نوع المثلث الذي رسمه كل منهم.

- لم يرسم علي مثلثاً متساوي الأضلاع.
- يوجد في مثلث عمر زاوية قياسها 25 درجة وزاوية أخرى قياسها 65 درجة.
- رسم عامر مثلثاً يحتوي على زوج واحد على الأقل من الأضلاع المتطابقة.
- يحتوي المثلث المنفرج على زاويتين متطابقتين.

البرهان غير المباشر

4-4

الدروس

السابق	الحالي	لماذا
قمت بكتابة فقرة إثباتية، وبرهان من عمودين، وبرهان تسلسلي.	1 كتابة براهين جبرية غير مباشرة. 2 كتابة براهين هندسية غير مباشرة.	- أحمد: "أنا تقريبا يوم عمل إثباتات." - بلال: "لنفترض أن يوم السبت هو يوم عمل للمعلمين. في أي يوم سيكون اختبار الرياضيات القادم؟" - أسامة: "مهم. . وفقًا للمنهج الدراسي، يكون يوم السبت القادم. لكننا لا نجري أي اختبارات في أيام عمل المعلمين؛ فنحن لسنا في المدرسة." - جمال: "بالضبط—إذا هذا يثبت ذلك! لا يمكن أن يكون يوم السبت القادم يوم عمل للمعلمين."

1 البرهان الجبري غير المباشر إن البراهين التي كتبها هي براهين مباشرة—فقد بدأت بافتراض صحيح وأثبت أن الاستنتاج كان صحيحًا. في المثال السابق، استخدم الطالبان **الاستنتاج غير المباشر** بافتراض أن هذا الاستنتاج خاطئ ثم أظهر أن هذا الافتراض قد أدى إلى تناقض.

في **البرهان غير المباشر** أو **البرهان بالتناقض**، أنت تفترض، بشكل مؤقت، عدم صحة ما تحاول إثباته، بإظهار استحالة هذا الافتراض منطقيًا، فإنك تثبت خطأ افتراضك وصحة الاستنتاج الأصلي. يُسمى هذا أحيانًا **البرهان بالنفي**.

المفردات الجديدة
 تبرير غير مباشر (indirect reasoning)
 برهان غير مباشر (indirect proof)
 برهان بالتناقض (proof by contradiction)

ممارسات في الرياضيات
 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

المفهوم الأساسي كيف تكتب برهانًا غير مباشر

- الخطوة 1** حدّد الاستنتاج المطلوب إثباته، افترض أن هذا الاستنتاج خاطئ من خلال افتراض صحة العكس.
- الخطوة 2** استخدم التفكير المنطقي لإظهار أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع الافتراض أو مع بعض الحقائق الأخرى. مثل تعريف أو مسلمة أو نظرية أو نتيجة ما.
- الخطوة 3** وضّح أنه بما أن الافتراض يؤدي إلى تناقض، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي المطلوب إثباته صحيحًا.

مثال 1 ذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر

اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

- إذا كان 6 من عوامل n ، فإن 2 من عوامل n .
- استنتاج العبارة الشرطية عبارة عن 2 من عوامل n . ويكون نقي الاستنتاج أن 2 ليس من عوامل n .
- ∠3 زاوية منفرجة.
- إذا كان افتراض أن ∠3 زاوية منفرجة خاطئًا، فإن افتراض أن ∠3 ليست زاوية منفرجة صحيحًا.

تمرين موجه

1A. $\triangle XYZ$ هو مثلث متساوي الأضلاع.

$x > 5$

مثال 2 كتابة برهاناً جبرياً غير مباشر

اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $-3x + 4 > 16$ ، فإن $x < -4$.

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: $x < -4$

الخطوة 1 البرهان غير المباشر:

نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$. إذا، افترض أن $x > -4$ أو $x = -4$ عبارة صحيحة.

الخطوة 2 قم بعمل جدول باحتمالات متعددة لـ x بافتراض أن $x > -4$ أو $x = -4$.

x	-4	-3	-2	-1	0
$-3x + 4$	16	13	10	7	4

عندما يكون $x > -4$ ، فإن $-3x + 4 < 16$ ؛ وعندما يكون $x = -4$ ، فإن $-3x + 4 = 16$.

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى وجود تناقض في المعلومة المعطاة بأن $-3x + 4 > 16$. لذا، لا بد أن يكون الافتراض بأن $x \geq -4$ عبارة خاطئة، ويكون الاستنتاج الأصلي بأن $x < -4$ عبارة صحيحة.

تمرين موجه

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة.

2A. إذا كان $7x > 56$ ، فإن $x > 8$.
2B. إذا كان $-c$ موجباً، فإن c رمز سالب.

قراءة في الرياضيات

التناقض

التناقض هو أحد المبادئ المنطقية التي تشير إلى أن الافتراض لا يمكن أن يكون A وعكس A في الوقت نفسه.

يُمكن استخدام الاستنتاج والبرهان غير المباشرين في المواقف اليومية.

مثال من الحياة اليومية 3 البرهان الجبري غير المباشر

تكاليف حفل التخرج طلب ماجد من صديقه محمد معرفة ثمن وجبته ووجبة محمد التي تناولاها عند خروجهما الأسبوع الماضي. لم يستطع محمد تذكر التكاليف الخاصة بكل وجبة، ولكنه تذكر إجمالي قيمة الفاتورة التي زادت عن 60 AED، بدون الإكرامية. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن إحدى الوجبتين على الأقل زادت تكلفتها عن 30 AED.

افتراض أن تكلفة إحدى الوجبتين هي x وتكلفة الوجبة الأخرى هي y .

الخطوة 1 المعطيات: $x + y = 60$

المطلوب: $x > 30$ أو $y > 30$

برهان غير مباشر:

افتراض أن $x \leq 30$ و $y \leq 30$.

الخطوة 2 إذا كان $x \leq 30$ و $y \leq 30$ ، فإن $x + y \leq 30 + 30$ أو $x + y \leq 60$. يُعد هذا تناقضاً لأننا نعلم أن $x + y > 60$.

الخطوة 3 بما أن افتراض $x \leq 30$ و $y \leq 30$ يؤدي إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فلا بد أن يكون الافتراض خاطئاً. لذلك، لا بد أن يكون الاستنتاج بأن $x > 30$ أو $y > 30$ صحيحاً. لهذا، لا بد أن تكلفة إحدى الوجبتين زادت عن 30 AED.

تمرين موجه

3. **السفر** قطع إسماعيل ما يزيد عن 360 km خلال رحلته، وتوقف في استراحتين. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإثبات أنه سافر أكثر من 120 km في رحلة الذهاب فقط.

تُستخدم البراهين غير المباشرة غالبًا لإثبات المفاهيم في نظرية الأعداد. في هذه البراهين، يساعد تذكر أنه يمكنك تمثيل العدد الزوجي بالتعبير $2k$ وتمثيل العدد الفردي بالتعبير $2k + 1$ لأي عدد صحيح k .

مثال 4 البراهين غير المباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًا صحيحًا، فإن x عدد زوجي صحيح.

الخطوة 1 المعطيات: $x + 2$ هو عدد زوجي صحيح.

المطلوب: x هو عدد زوجي صحيح.

برهان غير مباشر:

افترض أن x هو عدد صحيح فردي. هذا يعني أن $x = 2k + 1$ لبعض الأعداد الصحيحة k .

الخطوة 2 **تمويض الافتراض** $x + 2 = (2k + 1) + 2$

خاصية التبديل $= (2k + 2) + 1$

خاصية التوزيع $= 2(k + 1) + 1$

حدّد الآن ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا صحيحًا زوجيًا أم فرديًا. بما أن k عدد صحيح و $k + 1$ أيضًا عدد صحيح. افترض أن m تمثل العدد الصحيح $k + 1$.

التعويض $2(k + 1) + 1 = 2m + 1$

إذا، يمكن تمثيل $x + 2$ باستخدام $2m + 1$. حيث m عدد صحيح. لكن هذا التمثيل يعني أن $x + 2$ هو عدد صحيح فردي، وهو ما يتعارض مع العبارة المعطاة بأن $x + 2$ عدد صحيح زوجي.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن x هو عدد فردي صحيح يؤدي إلى تناقض مع العبارة المعطاة، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو أن x عدد زوجي صحيح، استنتاجًا صحيحًا.

تمرين موجه

4. اكتب برهانًا غير مباشر لإظهار أنه إذا كان تربيع العدد الصحيح فرديًا، فإن هذا العدد الصحيح يكون فرديًا.

انتبه!

الفرضيات لا يوجد تشابه بين البراهين بالتناقض واستخدام مثال مضاد. يساعدك المثال المضاد في نبذ تخمين ما، ولا يمكن استخدامه في إثبات تخمين.

2 **البراهين غير المباشرة في الهندسة** يُمكن استخدام الاستنتاج غير المباشر لإثبات عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجية.

مثال 5 برهان هندسي

إذا كانت إحدى الزوايا زاوية خارجية لمثلث، فأثبت أن قياسها أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين المتناظرتين غير المجاورتين.

الخطوة 1 صمّم رسمًا تخطيطيًا لهذا الموقف. ثم حدّد المعطيات والمطلوب إثباته.

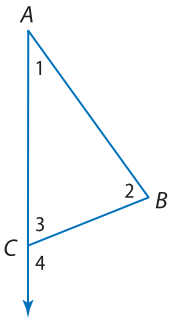
المعطيات: $\angle 4$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.

المطلوب: $m\angle 4 > m\angle 2$ و $m\angle 4 > m\angle 1$

برهان غير مباشر:

افترض أن $m\angle 4 \not> m\angle 2$ أو $m\angle 4 \not> m\angle 1$.

بعبارة أخرى، $m\angle 4 \leq m\angle 2$ أو $m\angle 4 \leq m\angle 1$.



(يُتبع في الصفحة التالية)

الخطوة 2 نحتاج فقط إلى بيان أن افتراض $m\angle 4 \leq m\angle 1$ يؤدي إلى تناقض. تتبع فرضية $m\angle 4 \leq m\angle 2$ نفس الاستنتاج.

$m\angle 4 \leq m\angle 1$ تعني أنه إما $m\angle 4 = m\angle 1$ أو $m\angle 4 < m\angle 1$.

الحالة رقم 1

$$m\angle 4 = m\angle 1$$

$$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2 \quad \text{نظرية الزاوية الخارجية}$$

$$m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2 \quad \text{تعويض}$$

$$0 = m\angle 2 \quad \text{اطرح } m\angle 4 \text{ من كل طرف}$$

هذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0. إذاً $m\angle 4 \neq m\angle 1$.

الحالة رقم 2

$$m\angle 4 < m\angle 1$$

بتطبيق نظرية الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$. بما أن قياس الزاوية موجب، فإن تعريف المتباينة يشير ضمناً إلى أن $m\angle 4 > m\angle 1$. يتناقض هذا مع افتراض أن $m\angle 4 < m\angle 1$.

الخطوة 3 في كلتا المسألتين، يؤدي الافتراض إلى وجود تناقض مع نظرية أو تعريف. ولذلك، لا بد أن يكون الاستنتاج الأصلي بأن $m\angle 4 > m\angle 1$ و $m\angle 4 > m\angle 2$ صحيحاً.

نصيحة دراسية

التعرف على التناقضات

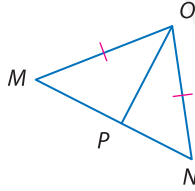
تذكر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائماً متضمناً في المعلومة المعطاة أو الافتراض. قد يكون التناقض في حقيقة معلومة أو تعريف، مثل المسألة رقم 1 للمثال رقم 5؛ حيث لا بد أن يكون قياس الزاوية أكبر من 0.

تمرين موجه

5. اكتب برهاناً غير مباشر.

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$



التحقق من فهمك

مثال 1

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ 2. $\triangle XYZ$ هو مثلث مختلف الأضلاع.

3. كان $4x < 24$. فإن $x < 6$. 4. $\angle A$ ليست زاوية قائمة.

مثال 2 اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة.

5. إذا كان $2x + 3 < 7$. فإن $x < 2$. 6. إذا كان $3x - 4 > 8$. فإن $x > 4$.

مثال 3 7. **لاكروس** أحرزت هيام 13 نقطة لحساب فريق مدرستها الثانوية في لعبة اللاكروس خلال المباريات الست الأخيرة. أثبت أن متوسط إحرازها للنقاط في كل مباراة أقل من 3 نقاط.

مثال 4 8. اكتب برهاناً غير مباشر لإظهار أنه إذا كان $5x - 2$ عدداً صحيحاً فردياً، فإن x يجب أن يكون عدداً صحيحاً فردياً.

مثال 5 اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة.

9. وتر المثلث قائم الزاوية هو الضلع الأكبر في هذا المثلث.

10. إذا كانت هناك زاويتان متكاملتين، فلا يمكن أن تكونا زاويتين منفرجتين.

مثال 1

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

11. إذا كان $2x > 16$ ، فإن $x > 8$.
12. $\angle 1$ و $\angle 2$ ليستا زاويتين متكاملتين.
13. إذا كان المستقيمان لهما نفس الميل، فإنهما متوازيان.
14. إذا كانت الزاويتان الداخليتان المتتاليتان اللتان تكوّنتا من مستقيمين ومحور قاطع، زاويتين متكاملتين، فإن هذين المستقيمين يكونان متوازيين.
15. إذا كان المثلث غير متساوي الأضلاع، فإنه يكون مثلثاً غير متساوي الزوايا.
16. العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2.

مثال 2

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة.

17. إذا كان $2x - 7 > -11$ ، فإن $x > -2$.
18. إذا كان $5x + 12 < -33$ ، فإن $x < -9$.
19. إذا كان $-3x + 4 < 7$ ، فإن $x > -1$.
20. إذا كان $-2x - 6 > 12$ ، فإن $x < -9$.

مثال 3

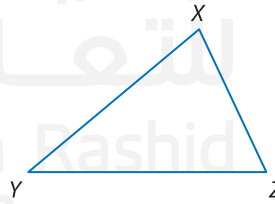
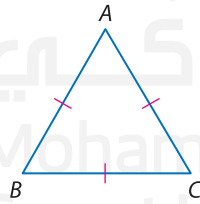
21. ألعاب الكمبيوتر اشترى إبراهيم لعبتين من ألعاب الكمبيوتر بتكلفة AED 80. بعد مرور بضعة أسابيع، سأله صديقه عن ثمن كل لعبة. لم يتذكر إبراهيم أسعار كل لعبة على حدة. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن إحدى اللعبتين على الأقل تزيد تكلفتها عن AED 40.

22. جمع التبرعات تحتفل مدرسة أمال بهرجان الخريف لجميع التبرعات للأعمال الخيرية المحلية. تصل تكلفة تذكرة الفرد البالغ لدخول المهرجان AED 6 وتذكرة الطفل AED 2.50. إذا كان إجمالي ما تم بيعه من التذاكر 375 تذكرة، وزاد الربح عن AED 1460، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل من تذاكر البالغين.

المثالان 4-5

الفرضيات اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة.

23. المعطيات: xy هو عدد فردي صحيح.
المطلوب: x و y هما عددان صحيحان فرديان
24. المعطيات: n^2 هو عدد زوجي.
المطلوب: n^2 يقبل القسمة على 4.
25. المعطيات: x هو عدد فردي.
المطلوب: x لا يقبل القسمة على 4.
26. المعطيات: xy هو عدد صحيح زوجي.
المطلوب: x أو y هو عدد صحيح زوجي.
27. المعطيات: $XZ > YZ$
المطلوب: $\angle X \neq \angle Y$
28. المعطيات: $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع.
المطلوب: $\triangle ABC$ متساوي الزوايا.



29. في المثلث متساوي الساقين لا يمكن أن تكون إحدى زوايا القاعدة زاوية قائمة.

30. توجد زاوية قائمة واحدة في المثلث.

31. اكتب برهاناً غير مباشر للنظرية 4.10.

32. اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $\frac{1}{b} < 0$ ، فإن b يكون سالباً.

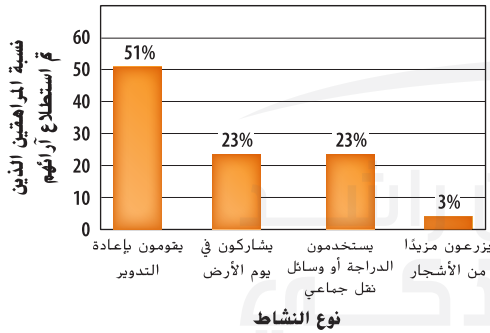
33. **كرة السلة** في رياضة كرة السلة، توجد ثلاث طرق ممكنة لتسجيل ثلاث نقاط دفعة واحدة. يمكن للاعب التسجيل في السلة من خلف خط الثلاث نقاط، أو قد تتم عرقلة اللاعب أثناء تسجيله رمية النقطتين وتحسب له رمية حرة، أو قد تتم عرقلة اللاعب خلف خط الثلاث نقاط وتحسب له ثلاث رميات حرة. عندما دخلت حصة في أحد صفوف الانتظار، كانت النتيجة 28 نقطة للفريق المضيف و 26 نقطة للفريق الزائر. وعند عودتها، كانت النتيجة 28 للفريق المضيف و 29 للفريق الزائر. استنتجت حصة أن أحد لاعبي الفريق الزائر قام بتسجيل رمية ثلاثية. أثبت أو ادحض افتراضها باستخدام البرهان غير المباشر.

34. **الألعاب** تدور لعبة حاسوب حول فارس في مهمة للبحث عن الكنز. وفي نهاية الرحلة، يقترب الفارس من البابين الظاهرين بالأسفل.



يخبر أحد الخدم الفارس أن إحدى العلامتين خاطئة والأخرى صحيحة. استخدم الاستنتاج غير المباشر لتحديد الباب الذي يجب أن يختاره الفارس. اشرح استنتاجك.

ما يفعل المراهقون للحفاظ على البيئة



35. **تطلاعات الرأي** أجرت مكتبة بديرية المحلية استطلاعات من خلال الإنترنت للمراهقين لمعرفة الأنشطة التي يشارك فيها المراهقون للحفاظ على البيئة. جاءت نتائج الاستطلاع كما هو موضح في الرسم البياني.

a. المطلوب: أكثر من نصف المراهقين المشاركين قالوا إنهم يقومون بإعادة التصنيع للحفاظ على البيئة.

b. إذا تم أخذ رأي 400 مراهق في استطلاع الرأي، فأثبت أن 92 مراهقاً قالوا إنهم شاركوا في يوم الحفاظ على الأرض.

36. **الاستنتاج** يمتلك كل من ناصر ومنصور ومحمود سيارات ذات ألوان مختلفة. توجد عبارة واحدة صحيحة بين العبارات التالية. استخدم الاستنتاج غير المباشر لتحديد العبارة الصحيحة. اشرح.

(1) ناصر لديه سيارة حمراء.

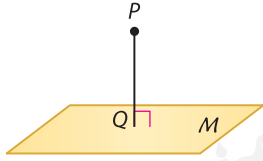
(2) منصور ليس لديه سيارة حمراء.

(3) محمود ليس لديه سيارة زرقاء.

حدّد إذا ما كان من الممكن إثبات صحة كل عبارة حول المسافة الأقصر بين نقطة ومستقيم أو مستوى باستخدام البرهان المباشر أو غير المباشر. ثم اكتب برهاناً لكل عبارة.

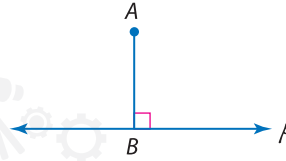
38. المعطيات: $\overline{PQ} \perp$ المستوى M

المطلوب: $\overline{PQ}$ هي القطعة المستقيمة الأقصر من P إلى المستوى M .



37. المعطيات: $\overline{AB} \perp$ المستقيم p

المطلوب: $\overline{AB}$ هي القطعة المستقيمة الأقصر من A إلى المستقيم p .



39. نظرية الأعداد في هذه المسألة، ستضع تخميناً وتثبتته حول علاقة نظرية الأعداد.

- اكتب تعبيراً حول مجموع مكعب أحد الأعداد والعدد ثلاثة.
- أنشئ جدولاً يشتمل على قيمة التعبير لـ 10 قيم مختلفة لـ n . أضف قيماً زوجية وفردية لـ n .
- اكتب تخميناً حول n عندما تكون قيمة التعبير زوجية.
- اكتب برهاناً غير مباشر لتخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا

40. الكتابة في الرياضيات اشرح الإجراء لكتابة برهان غير مباشر.

41. مسألة غير محددة الإجابة اكتب عبارة يمكن إثباتها باستخدام البرهان غير المباشر. أضف برهاناً غير مباشر لعبارتك.

42. تحدّ إذا كان x عدداً نسبياً، فيمكن تمثيله بناتج القسمة $\frac{a}{b}$ بالنسبة للعددين الصحيحين a و b . إذا كان $b \neq 0$ لا يمكن تمثيل العدد غير النسبي بناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهاناً غير مباشر لإظهار أن ناتج ضرب عدد نسبي غير صفري وعدد غير نسبي يكون عدداً غير نسبي.

43. النقد حاول كل من أسماء وإيمان إثبات العبارة التالية باستخدام البرهان غير المباشر. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إذا كان مجموع العددين زوجياً، فإن الأعداد زوجية.

إيمان

العبارة صحيحة.
إذا كان العددين فرديين، فإن المجموع يكون زوجياً. بما أن الافتراض يكون صحيحاً عندما يكون الاستنتاج خاطئاً، فإن العبارة صحيحة.

أسماء

العبارة صحيحة. إذا كان أحد الأعداد زوجياً والعدد الآخر صفراً، فإن المجموع يكون زوجياً. بما أن الافتراض يكون صحيحاً حتى عندما يكون الاستنتاج خاطئاً، فإن العبارة صحيحة.

44. الكتابة في الرياضيات راجع التمرين 8. اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة ثم اكتب البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي. كيف يتصل كل من البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة والبرهان غير المباشر للعبارة؟

47. صنف زوايا $\triangle MNO$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر إذا كان $MN = 9$ و $NO = 7.5$ و $OM = 12$.

- F $\angle N, \angle O, \angle M$
G $\angle O, \angle M, \angle N$
H $\angle O, \angle N, \angle M$
J $\angle M, \angle O, \angle N$

48. SAT/ACT إذا كان $b > a$, فأى مما يلي لا بد أن يكون صحيحاً؟

- A $-a > -b$
B $3a > b$
C $a^2 < b^2$
D $a^2 < ab$
E $-b > -a$

45. إجابة مختصرة اكتب معادلة في صيغة الميل والمقطع لوصف المستقيم المار بالنقطة (3, 5) ويوازي المستقيم $-2x + y = -4$.

46. عبارة: إذا كانت $\angle A \cong \angle B$ و $\angle A$ مكمل لـ $\angle C$, فإن $\angle B$ مكمل لـ $\angle C$.

ثبت بئينة العبارة السابقة من خلال التناقض. فقد بدأت بافتراض أن $\angle B$ غير مكمل لـ $\angle C$. أى من التعريفات التالية ستستخدمه بئينة للوصول إلى التناقض؟

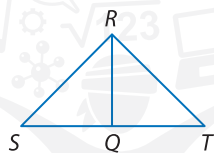
- A تعريف التطابق
B تعريف الزوج الخطي
C تعريف الزاوية القائمة
D تعريف الزوايا المتكاملة

مراجعة شاملة

49. البرهان اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$.

المطلوب: $m\angle SQR > m\angle SRQ$



الهندسة الإحداثية حدد إحداثيات مركز الدائرة المحيطة لكل مثلث له رؤوس معلومة.

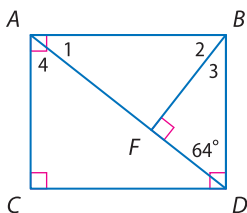
50. $D(-3, 3), E(3, 2), F(1, -4)$

51. $A(4, 0), B(-2, 4), C(0, 6)$

جد قياس كل مما يلي.

52. $m\angle 1$

53. $m\angle 4$

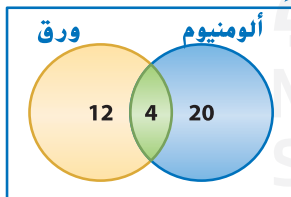


الهندسة الإحداثية جد المسافة بين كل زوج من المستقيمتين المتوازيين باستخدام المعادلات المعطاة.

54. $x + 3y = 6$
 $x + 3y = -14$

55. $y = 2x + 2$
 $y = 2x - 3$

إعادة تدوير مخلفات الأرصفة



56. إعادة التدوير راجع مخطط فن الذي يمثل عدد الأحياء في مدينة معينة المشتركة في برنامج إعادة تدوير مخلفات الأرصفة من الورق أو الألومنيوم.

a. كم عدد الأحياء التي تعيد تدوير الألومنيوم؟

b. كم عدد الأحياء التي تعيد تدوير كل من الورق أو الألومنيوم أو كليهما؟

c. كم عدد الأحياء التي تعيد تدوير الورق والألومنيوم؟

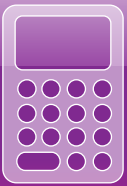
مراجعة المهارات

حدد ما إذا كانت كل متباينة صحيحة أم خاطئة.

57. $23 - 11 > 9$

58. $41 - 19 < 21$

59. $57 + 68 < 115$



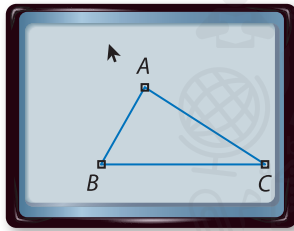
مختبر تقنية التمثيل البياني متباينة المثلث

4-5

يمكنك استخدام تطبيق خاص على بعض حاسبات التمثيل البياني لاكتشاف خصائص المثلثات.

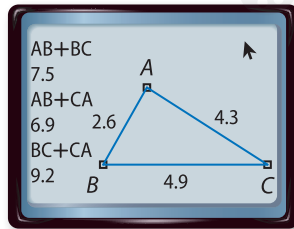
نشاط 1

صمم مثلثًا. لاحظ العلاقة بين مجموع طولي ضلعين وطول الضلع الآخر.



الخطوة 1

الخطوة 1 ارسم مثلثًا باستخدام أداة المثلث الموجودة في قائمة F2. ثم استخدم الأداة Alpha-Num الموجودة في قائمة F5 لتسمية الرؤوس بالأحرف A، و B، و C.



الخطوتان 2 و 3

الخطوة 2 قم بالوصول إلى أداة distance & length (المسافة والطول) الموضحة باسم D. & Length. ضمن Measure (قياس) في القائمة F5. استخدم الأداة لقياس كل ضلع من أضلاع المثلث.

الخطوة 3 اعرض $AB + BC$ و $AB + CA$ و $BC + CA$ باستخدام أداة Calculate (احسب) في القائمة F5. أطلق أسماء على القياسات.

الخطوة 4 انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث.

تحليل النتائج

1. استبدل كل $\bullet$ بأحد الرموز $>$ ، أو $<$ ، أو $=$ لجعل العبارة صحيحة.

$$AB + BC \bullet CA$$

$$AB + CA \bullet BC$$

$$BC + CA \bullet AB$$

2. انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث. ثم راجع إجاباتك على التمرين 1. ماذا تلاحظ؟

3. انقر على النقطة A واسحبها لكي تقع على المستقيم BC. ماذا تلاحظ حول AB، و BC، و CA؟ هل الرموز A، و B، و C تمثل رؤوس المثلث؟ اشرح.

4. ضع تخمينًا حول مجموع أطوال ضلعين من مثلث وطول الضلع الثالث.

5. هل القياسات والملاحظات التي دونتها في النشاط والتمارين 1-3 تمثل برهانًا للتخمين الذي قمت به في التمرين 4؟ اشرح.

6. استبدل كل $\bullet$ بأحد الرموز $>$ ، أو $<$ ، أو $=$ لجعل العبارة صحيحة.

$$|AB - BC| \bullet CA$$

$$|AB - CA| \bullet BC$$

$$|BC - CA| \bullet AB$$

ثم انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث ومراجعة إجاباتك. ماذا تلاحظ؟

7. كيف تمكنت من استخدام ملاحظاتك لتحديد الأطوال المحتملة للضلع الثالث بالمثلث من خلال معرفة طولي الضلعين الآخرين؟

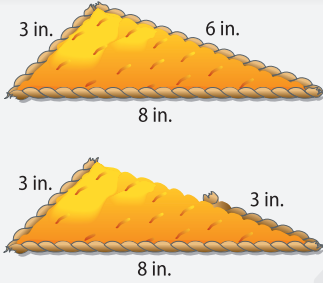
متباينة المثلث

4-5

لماذا ..

الحالي ..

السابق ..



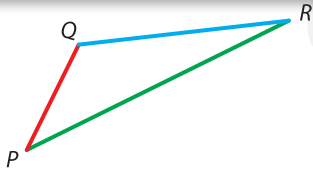
في عرض لتحسين المنازل، أرادت مصممة استخدام قطع مقصوصة من أحبال من مشرع حياكة آخر لتزيين الوسائد المثلثية الشكل التي صنعتها هي وصاحب المنزل. ولتقليل التكاليف، أرادت المصممة استخدام القصاصات دون قطعها. واختارت ثلاث قصاصات بشكل عشوائي وحاولت تكوين مثلث. ثم توضح محاولتين من ذلك.

1 استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد المثلثات المحتملة.
2 إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية متباينة المثلث.

لقد تعرفت على خواص متباينات العلاقات بين زوايا وأضلاع المثلث وقمت بتطبيقها.

1 **متباينة المثلث** في حين أن المثلث يتم تصميمه باستخدام هذه القطع المستقيمة الثلاث، يجب أن تنشأ علاقة خاصة بين أطوال القطع المستقيمة حتى تشكل مثلثاً.

نظرية 4.11 نظرية متباينة المثلث



يجب أن يكون مجموع أطوال أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أمثلة

$$\begin{aligned} PQ + QR &> PR \\ QR + PR &> PQ \\ PR + PQ &> QR \end{aligned}$$

سوف تثبت النظرية 4.11 في تمرين 23.

لتوضيح أنه ليس من الصعب تكوين مثلث باستخدام ثلاثة أطوال أضلاع، يجب عليك فقط توضيح أن إحدى متباينات المثلث الثلاث ليست صحيحة.

مثال 1 تحديد أطوال الأضلاع المعطاة المحتملة للمثلثات

هل يمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا، فاشرح السبب.

a. 8 in, 15 in, 17 in

تحقق من كل متباينة.

$$\begin{aligned} 8 + 15 &\geq 17 \\ 23 &> 17 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 + 17 &\geq 15 \\ 25 &> 15 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 + 17 &\geq 8 \\ 32 &> 8 \quad \checkmark \end{aligned}$$

بما أن مجموع كل زوج من أطوال الأضلاع أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 8 in و 15 in و 17 in ستكون مثلثاً.

b. 6 m, 8 m, 14 m

$$\begin{aligned} 6 + 8 &\geq 14 \\ 14 &\not> 14 \quad \times \end{aligned}$$

بما أن مجموع زوج واحد من أطوال الأضلاع ليس أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 6 m و 8 m و 14 m لن تكون مثلثاً.

تمرين موجه

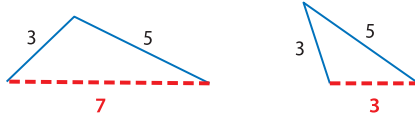
1A. 15 yd, 16 yd, 30 yd

1B. 2 ft, 8 ft, 11 ft

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها. التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

عندما يكون طولاً ضلعين في مثلث معلومين، قد يكون الضلع الثالث أي طول في مدى معين من القيم. يمكنك استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد مدى الأطوال المحتملة للضلع الثالث.



مثال على الاختبار المعياري 2 إيجاد الأطوال المحتملة للضلع

إذا كان قياسا ضلعين في مثلث 3cm و 7cm، فما أقل عدد صحيح ممكن لقياس الضلع الثالث؟

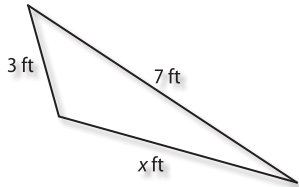
- A 3 cm B 4 cm C 5 cm D 10 cm

قراءة فقرة الاختبار

يجب أن تحدد أي قيمة تمثل أقل قياس محتمل للضلع الثالث من المثلث الذي يبلغ طولاً ضلعيه 3 أقدام و 7 أقدام.

حل فقرة الاختبار

لتحديد أقل قياس محتمل من الخيارات المعطاة، حدد أولاً مدى القياس المحتمل للضلع الثالث.



صم رسماً تخطيطياً وافرض أن x يمثل طول الضلع الثالث.

أولاً، أنشئ كل متباينات المثلثات الثلاثة وحلها.

$$\begin{array}{lll} 3 + 7 > x & 3 + x > 7 & x + 7 > 3 \\ 10 > x \text{ أو } x < 10 & x > 4 & x > -4 \end{array}$$

لاحظ أن $x > -4$ صحيح دائماً لأي قياس عدد صحيح لـ x .
بجمع المتباينتين المتبقيتين، فإن مدى القيم التي تلائم كلا المتباينتين هو $4 < x < 10$ والذي يمكن كتابته بالصيغة $4 < x < 10$.

أقل قيمة لعدد صحيح بين 4 و 10 هي 5. إذاً الإجابة الصحيحة هي الخيار C.

قراءة في الرياضيات

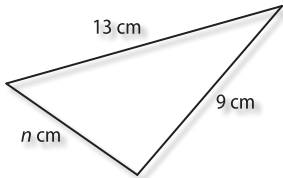
رموز المتباينات المتعددة

المتباينة المركبة $4 < x < 10$
تقرأ x بين 4 و 10.

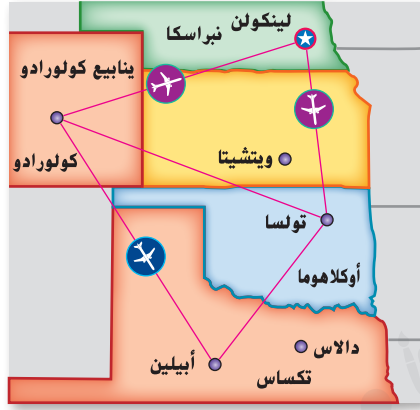
تمرين موجه

2. أي مما يلي قد لا يمكن أن يمثل قيمة n ؟

- 13 H 7 F
22 J 10 G



2 البراهين باستخدام نظرية متباينة المثلث يمكنك استخدام نظرية متباينة المثلث للاستنتاج في البراهين.

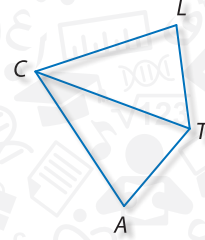


السفر المسافة من ينابيع كولورادو.
في منطقة الينابيع، بكولورادو، إلى أبيلين في تكساس هي نفسها المسافة من ينابيع كولورادو إلى تولسا في أوكلاهوما. أثبت أن رحلة الطيران مباشرة من ينابيع كولورادو إلى تولسا عبر لينكولن، في نبراسكا، تقطع مسافة أكبر من رحلة الطيران التي تنطلق دون توقف من ينابيع كولورادو إلى أبيلين.

صمم رسمًا تخطيطيًا أبسط لهذه الحالة وحدد اسمًا له.
ارسم الضلع $\overline{LT}$ لتكوين $\triangle CTL$.

المعطيات: $CA = CT$

المطلوب: $CL + LT > CA$



البرهان:

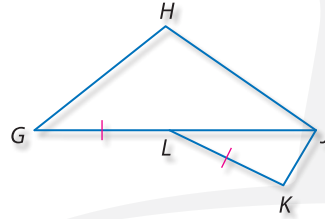
العبارة	التبرير
1. $CA = CT$	1. المعطيات
2. $CL + LT > CT$	2. نظرية متباينة المثلث
3. $CL + LT > CA$	3. التعويض

تبرين موجه

3. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$



التحقق من فهمك

هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا يُمكن ذلك، فاشرح السبب.

1. 5 cm, 7 cm, 10 cm 2. 3 in., 4 in., 8 in. 3. 6 m, 14 m, 10 m

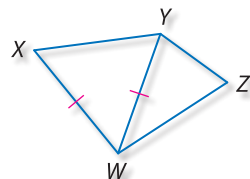
4. الاختيار من متعدد إذا كان قياسا ضلعي مثلث 5 أمتار و 9 أمتار. فما أقل قياس محتمل للضلع الثالث إذا كان القياس عددًا صحيحًا؟

14 m D

6 m C

5 m B

4 m A



5. البرهان اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$

مثال 1

هل يمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا يمكن ذلك، فاشرح السبب.

6. 4 ft, 9 ft, 15 ft
7. 11 mm, 21 mm, 16 mm
8. 9.9 cm, 1.1 cm, 8.2 cm
9. 2.1 in., 4.2 in., 7.9 in.
10. $2\frac{1}{2}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{8}$ m
11. $1\frac{1}{5}$ km, $4\frac{1}{2}$ km, $3\frac{3}{4}$ km

مثال 2

احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الآخرين.

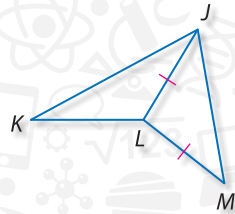
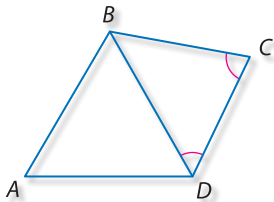
12. 4 ft, 8 ft
13. 5 m, 11 m
14. 2.7 cm, 4.2 cm
15. 3.8 in., 9.2 in.
16. $\frac{1}{2}$ km, $3\frac{1}{4}$ km
17. $2\frac{1}{3}$ yd, $7\frac{2}{3}$ yd

مثال 3

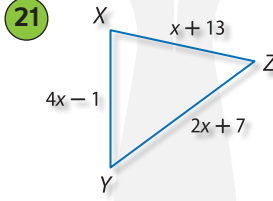
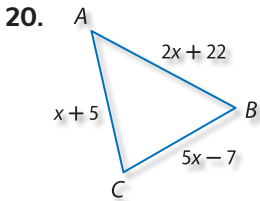
البرهان اكتب برهاناً من عمودين.

19. المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{LM}$
المطلوب: $KJ + KL > LM$

18. المعطيات: $\angle BCD \cong \angle CDB$
المطلوب: $AB + AD > BC$



الاستنتاج المنطقي حدد القيم المحتملة لـ x .



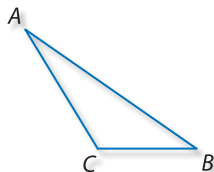
22. القيادة يريد حارب اتخاذ أقصر طريق من منزله إلى مباراة كرة قدم في استاد نادي الاتحاد. يمكنه أن يتخذ طريق أبو ظبي الرئيسي أو الطريق السريع 4 ثم شارع 6 للوصول إلى نادي الاتحاد.
 - a. أي طريق من المسارين المحتملين يعطي أقصر مسافة؟ اشرح استنتاجك.
 - b. افترض أن حارب يقود دائماً بأقل من حد السرعة. إذا كان أقصى سرعة في طريق أبو ظبي الرئيسي هو 30 ميلاً في الساعة وفي كل من الطريق السريع 4 وشارع 6 هو 55 mi/h، فما الطريق الأسرع؟ اشرح.

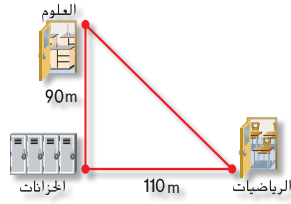
23. البرهان اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)

(إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة إضافية $\overline{CD}$ بحيث يكون C بين B و D . و $\overline{CD} \cong \overline{AC}$)





24. **المدرسة** عندما تذهب رهام من صف العلوم إلى صف الرياضيات، فإنها تتوقف عند خزانتها. المسافة بين صف العلوم وخزانتها هي 90 m. والمسافة من غرفتها إلى صف الرياضيات هي 110 m. ما المسافة المحتملة من صف العلوم إلى صف الرياضيات إذا كانت تمشي في الطريق الذي يمر مباشرة بين الفصلين الدراسيين

جد مدى القياسات الممكنة لـ x إذا كانت كل مجموعة من التعبيرات تمثل قياسات أضلاع المثلث.

25. $x, 4, 6$

26. $8, x, 12$

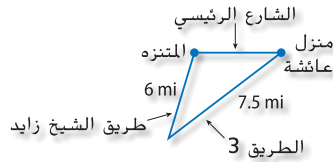
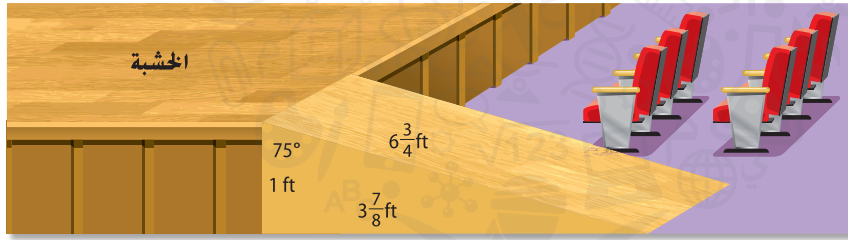
27. $x + 1, 5, 7$

28. $x - 2, 10, 12$

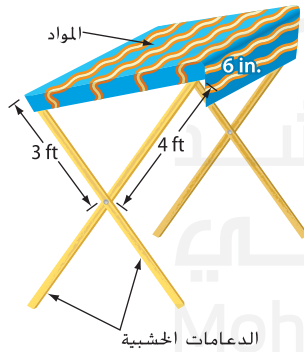
29. $x + 2, x + 4, x + 6$

30. $x, 2x + 1, x + 4$

31. **نادي الدراما** يعمل حميد وحسن على إنشاء منحدر للمسرح من أجل الإنتاج القادم لنادي الدراما. نموذج حميد للانحدار موضح أدناه. يهتم حسن بالقياسات ويعتقد أنه يجب أن يتحققا من القياسات قبل بدء تقطيع الخشب. هل اهتمام حسن في محله؟ اشرح استنتاجك.



32. **الاستنتاج المنطقي** تتركب عائشة دراجتها إلى المتنزه ويمكنها أن تتخذ أحد طريقين. الطريق الأكثر اختصارًا من منزلها هو اتخاذ الشارع الرئيسي. ولكن سيزداد الأمان باتخاذ الطريق رقم 3 ثم التحول يمينًا إلى طريق الشيخ زايد كما هو موضح. ما المسافة الإضافية التي ستمشيها بالميل إذا اتخذت الطريق رقم 3 إلى طريق الشيخ زايد؟



33. **صميم** صممت سالي مظلة يمكنها هي وصديقاتها أخذها إلى الشاطئ. وقررت سالي تغطية الجزء العلوي من المظلة بمواد ستمتد بمقدار 6 in فوق المقدمة. ما طول المواد التي يجب عليها شراؤها لاستخدامها في تصميمها بحيث تتم تغطية الجزء العلوي من المظلة. بما في ذلك الثنية عندما تكون الدعامات مفتوحة بأكبر قدر ممكن؟ لنفترض أن عرض المادة يكفي لتغطية المظلة.

التقدير دون استخدام الحاسبة، حدد هل من الممكن تكوين مثلث باستخدام الأطوال المعطاة للأضلاع أم لا. اشرح.

34. $\sqrt{8} \text{ ft}, \sqrt{2} \text{ ft}, \sqrt{35} \text{ ft}$

35. $\sqrt{99} \text{ yd}, \sqrt{48} \text{ yd}, \sqrt{65} \text{ yd}$

36. $\sqrt{3} \text{ m}, \sqrt{15} \text{ m}, \sqrt{24} \text{ m}$

37. $\sqrt{122} \text{ in.}, \sqrt{5} \text{ in.}, \sqrt{26} \text{ in.}$

التبرير حدد ما إذا كانت الإحداثيات المعطاة هي رؤوس المثلث أم لا. اشرح.

38. $X(1, -3), Y(6, 1), Z(2, 2)$

39. $F(-4, 3), G(3, -3), H(4, 6)$

40. $J(-7, -1), K(9, -5), L(21, -8)$

41. $Q(2, 6), R(6, 5), S(1, 2)$

42. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستخدم المتباينات لعقد مقارنات بين أضلاع مثلثين وزواياه.

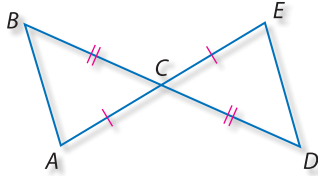
a. **هندسيًا** ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات التي يوجد بها زوجان من الأضلاع المتطابقة وزوج واحد من الأضلاع غير المتطابقة. حدد كل زوج من الأضلاع المتطابقة. اكتب على كل زوج مثلثات الرموز ABC و DEF ، حيث $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

b. **جدوليًا** انسخ الجدول أدناه. قس وسجل قيم BC و $m\angle A$ و EF و $m\angle D$ لكل زوج من المثلثات.

زوج من المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
1				
2				
3				

c. **لفظيًا** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الزوايا المقابلة للأضلاع غير المتطابقة لزوج المثلثات التي بها ضلعان متطابقان.

مسائل مهارات التفكير العليا



43. **التحدي** ما المدى للمحيطات المحتملة للشكل $ABCDE$ إذا كان $AC = 7$ و $DC = 9$ ؟ اشرح استنتاجك.

44. **الاستدلال** ما المدى لأطوال كل ضلع في مثلث متساوي الساقين إذا كان قياس القاعدة 6 بوصات؟ اشرح.

45. **الكتابة في الرياضيات** ما الذي يمكنك التوصل إليه حول مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة؟ قم بتضمين عنصرين على الأقل.

46. **تحدي** أضلاع مثلث متساوي الساقين هي أعداد صحيحة ومحيطه يساوي 30 وحدة. ما احتمال أن يكون المثلث متساوي الأضلاع؟

47. **مسألة غير محددة** الإجابة طول أحد أضلاع مثلث متران. ارسم مثلثًا يكون فيه الضلع الذي يبلغ طوله متران هو أقصر ضلع، وارسم مثلثًا آخر يكون فيه الضلع الذي يبلغ طوله متران هو أطول ضلع. قم بتضمين قياسات الأضلاع والزوايا في رسمك.

48. **الكتابة في الرياضيات** لتفرض أن منزلك يبعد $\frac{3}{4}$ km عن أحد المتنزهات، ويبعد المتنزه 1.5 km عن مركز التسوق.

a. إذا لم يكن منزلك والمتنزه ومركز التسوق على خط واحد، فما المعطيات التي تعرفها حول المسافة من منزلك إلى مركز التسوق؟ اشرح استنتاجك.

b. إذا كانت المواقع الثلاثة على خط واحد، فما المعطيات التي تعرفها حول المسافة من منزلك إلى مركز التسوق؟ اشرح استنتاجك.

تمرين على الاختبار المعياري

51. أي مما يلي يمثل خاتمة منطقية وفقاً للعبارة وعكسها أدناه؟

عبارة: إذا كان المضلع عبارة عن مستطيل، فإن له أربعة أضلاع.

العكس: إذا كان المضلع به أربعة أضلاع، إذا فهو مستطيل.

F العبارة وعكسها صحيحان.

G العبارة خاطئة، والعكس خطأ.

H العبارة صحيحة؛ والعكس خطأ.

J العبارة خاطئة، والعكس صحيح.

52. SAT/ACT عند طرح 7 من $14w$ ، تكون النتيجة z . أي من المعادلات التالية تمثل هذه العبارة؟

A $7 - 14w = z$

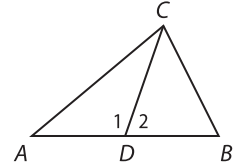
D $z = 14w - 7$

B $z = 14w + 7$

E $7 + 14w = 7z$

C $7 - z = 14w$

49. إذا كان $\overline{DC}$ متوسطاً في $\triangle ABC$ و $m\angle 1 > m\angle 2$ ، أي العبارات التالية ليست صحيحة؟



A $AD = BD$

C $AC > BC$

B $m\angle ADC = m\angle BDC$

D $m\angle 1 > m\angle B$

50. **إجابة مختصرة** برغب فريق كرة قدم في مدرسة ثانوية في الفوز بنسبة 75% بعد خوض 15 مباراة هذا الموسم. في الأسابيع الثلاثة الأولى، فاز الفريق في 5 مباريات. كم عدد المباريات الإضافية التي يجب على الفريق الفوز فيها لتحقيق هدفه؟

مراجعة شاملة

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

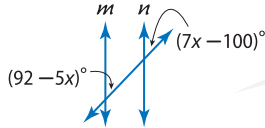
53. إذا كان $4y + 17 = 41$ ، إذا $y = 6$.

54. إذا كان المستقيمان مقطوعين بقاطع وكان زوج من الزوايا الداخلية البديلة متطابقاً، فإن الخطان متوازيان.

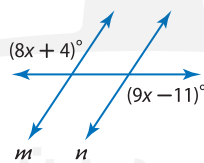
55. **الجغرافيا** تبلغ المسافة بين مدينة العين في إمارة أبو ظبي ومدينة دبا الحصن في إمارة الشارقة حوالي 375 mi. المسافة من دبا الحصن إلى مدينة زايد في إمارة العين حوالي 243 mi. استخدم نظرية متباينة المثلث لإيجاد المسافة المحتملة بين مدينة العين ومدينة زايد.

جد قيمة x حيث إن $m \parallel n$. حدد المسئلة أو النظرية التي استخدمتها.

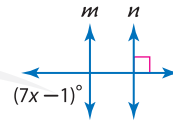
56.



57.



58.



الجبر جد قيمة x و JK إذا كان J بين K و L .

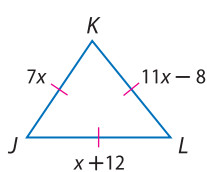
59. $KJ = 3x$ ، و $JL = 6x$ ، و $KL = 12$

60. $KJ = 3x - 6$ ، و $JL = x + 6$ ، و $KL = 24$

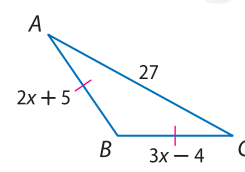
مراجعة المهارات

جد قيمة x وقياسات الأضلاع المجهولة لكل مثلث.

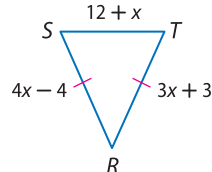
61.



62.



63.



المتباينات في مثلثين

4-6

السابق

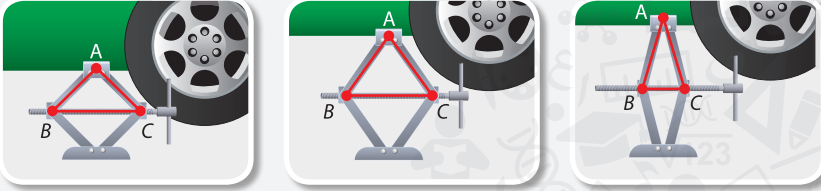
الحالي

لماذا

لقد استخدمت المتباينات لعمل مقارنات في مثلث واحد.

1 تطبيق نظرية المفضلة أو عكسها للمقارنة بين مثلثين.
2 إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المفضلة أو عكسها.

يستخدم مرفاع السيارة لرفع السيارات. وهذا المرفاع الموضح أدناه يعد أبسط المرفاع المستخدمة اليوم. لاحظ أنه عند خفض المرفاع، تظل ساقا $\triangle ABC$ متساوي الساقين متطابقتين، ولكن تتسع الزاوية المحصورة A ويطول كل من $\overline{BC}$ ، والضلع المقابل لـ $\angle A$.



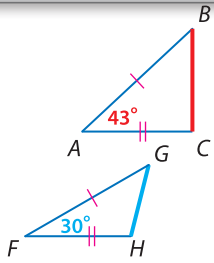
ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 نظرية المفضلة

تعد الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوع من أنواع المثلثات، وهي تصور النظريات التالية.

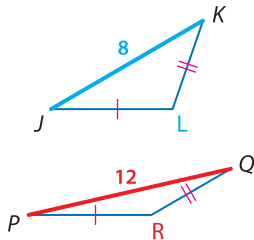
النظريات المتباينات في مثلثين

4.13 نظرية المفضلة إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكانت الزاوية المحصورة للمثلث الأول أكبر من الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.



مثال: إذا كان $m\angle A > m\angle F$ و $\overline{AB} \cong \overline{FG}$, $\overline{AC} \cong \overline{FH}$ ، إذا $\overline{BC} > \overline{GH}$.

4.14 عكس نظرية المفضلة إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول تكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.



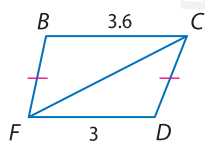
مثال: إذا كان $\overline{JL} \cong \overline{PR}$, $\overline{KL} \cong \overline{QR}$ ، و $PQ > JK$ ، إذا $m\angle R > m\angle L$.

سوف تُثبت النظرية 4.14 في تمرين 28.

مثال 1 استخدام نظرية المفضلة وعكسها

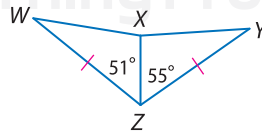
قارن بين القياسات المعطاة.

a. WX و XY



وفي $\triangle BCF \cong \triangle DFC$ ، يكون $\overline{BF} \cong \overline{DC}$ و $\overline{BC} > \overline{FD}$ و $\overline{FC} \cong \overline{CF}$ المفضلة وعكسها، $\angle BFC > \angle DCF$.

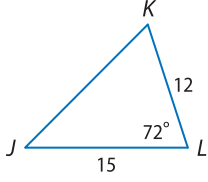
b. $m\angle FCD$ و $m\angle BFC$



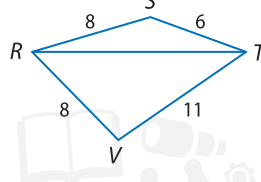
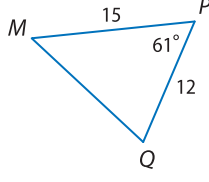
في $\triangle WXZ$ و $\triangle YXZ$ ، يكون $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$ و $\angle YZX > \angle WZX$ و $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$ بتطبيق نظرية $m\angle WZX < m\angle YZX$ إذا $WX < XY$.

قارن بين القياسات المعطاة.

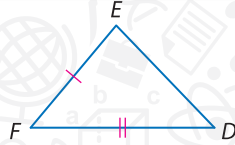
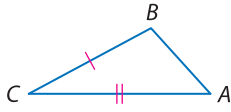
1A. JK و MQ



1B. $m\angle SRT$ و $m\angle VRT$



البرهان نظرية المفضلة



المعطيات: $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ يكون
 $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
 $m\angle F > m\angle C$

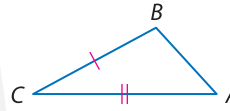
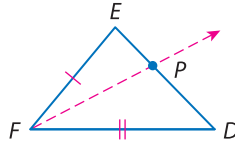
المطلوب: $DE > AB$

البرهان:

نعلم أن $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. ونعلم أيضًا أن $m\angle F > m\angle C$.
 ارسم شعاعًا مساعدًا FP بحيث يكون $m\angle DFP = m\angle C$ و $\overline{PF} \cong \overline{BC}$. يؤدي ذلك إلى حالتين.

الحالة 1 تقع P على $\overline{DE}$.

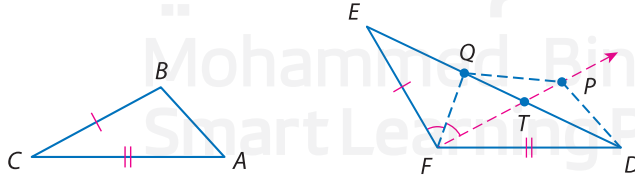
إذا $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بتطبيق مسلمة SAS. إذا $PD = BA$ بتطبيق CPCTC وتعريف القطع المتطابقة.



بتطبيق مسلمة جمع القطع المستقيمة، $DE = EP + PD$. وأيضًا، $DE > PD$ حسب تعريف المتباينة. لذلك، $DE > AB$ بالتعويض.

الحالة 2 لا تقع P على $\overline{DE}$.

ثم افترض أن تقاطع $\overline{FP}$ و $\overline{ED}$ يكون عند النقطة T . وارسم قطعة مستقيمة مساعدة أخرى $\overline{FQ}$ بحيث يقع Q على $\overline{DE}$ و $\angle EFQ \cong \angle QFP$. ارسم بعد ذلك القطعتين المستقيمتين المساعدةتين $\overline{PQ}$ و $\overline{PD}$.



بما أن $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ و $\overline{FP} \cong \overline{BC}$ ، إذا $\overline{FP} \cong \overline{EF}$ بتطبيق خاصية التعدي. أيضًا يتطابق $\overline{QF}$ مع نفسه بتطبيق خاصية الانعكاس. إذا $\triangle EFQ \cong \triangle PFQ$ بتطبيق مسلمة SAS. بتطبيق CPCTC أو $\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$ أو $\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$. أيضًا، $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بتطبيق مسلمة SAS. إذا $\overline{PD} \cong \overline{BA}$ بتطبيق CPCTC و $PD = BA$.

في $\triangle QPD$ ، يكون $QD + PQ > PD$ بتطبيق نظرية متباينة المثلث. بتطبيق التعويض، نجد أن $QD + EQ > PD$. بما أن $ED = QD + EQ$ بتطبيق مسلمة جمع القطع المستقيمة، فإن $ED > PD$. باستخدام التعويض، $ED > AB$ أو $DE > AB$.

نصيحة دراسية

نظرية المتباينة SAS و SSS

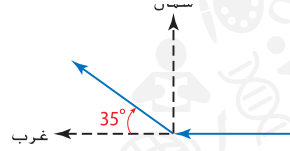
تُسمى نظرية المفضلة كذلك بنظرية المتباينة SAS. يُسمى أيضًا عكس نظرية المفضلة بنظرية المتباينة SSS.

مثال من الحياة اليومية 2 استخدام نظرية المثلثات

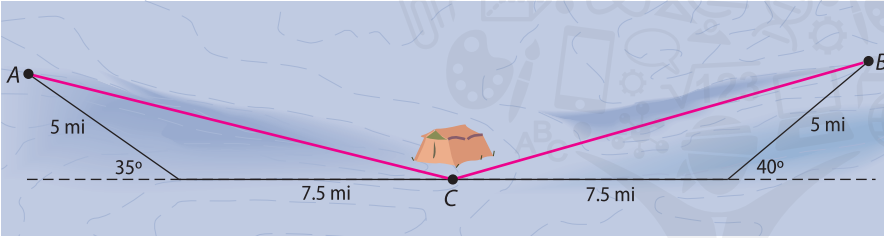
التزلج على الجليد غادرت مجموعتان من متزلجي الجليد من المعسكر الأساسي نفسه. قطعت المجموعة A مسافة 7.5 mi في اتجاه الغرب ثم تحولت 35° في الاتجاه الشمالي الغربي وقطعت 5 mi. وقطعت المجموعة B مسافة 7.5 أميال في اتجاه الشرق ثم تحولت 40° في الاتجاه الشمالي الشرقي وقطعت 5 أميال. عند هذه النقطة، أي من المجموعتين قطعت مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي؟ اشرح استنتاجك.

الفهم

لاستخدام مجموعة الاتجاهات المعطاة في هذه المسألة، ستحتاج إلى تحديد أي من مجموعتي التزلج على الجليد قطعت مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي. تم تفسير التحول بمقدار 35° باتجاه الشمال الغربي بشكل صحيح كما هو موضح.



التخطيط صمم رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.



تشكل المسارات التي سلكتها المجموعتان وخط العودة المستقيم مثلثين. قطعت كل مجموعة 7.5 mi ثم حولت اتجاهها وقطعت 5 mi.

استخدم الأزواج الخطية لحساب قياس الزاويتين المحصورتين. ثم طبق نظرية المثلثات لمقارنة المسافة التي قطعتهما كل مجموعة بعيدًا عن المعسكر الرئيسي.

الحل

قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة A يساوي $180 - 35 = 145$. قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة B يساوي $180 - 40 = 140$. بما أن $145 > 140$ ، فإن $AC > BC$ بتطبيق نظرية المثلثات. إذا قطعت المجموعة A مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي.

التحقق

تحولت المجموعة B بمقدار 5° أكثر من المجموعة A عند عودتهما إلى المعسكر الرئيسي، لذا يجب أن تكون المجموعة B أقرب إلى المعسكر من المجموعة A. وبذلك يجب أن تكون المجموعة A على مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي. ✓

تعزيز موجه

2A. التزلج غادرت مجموعتان من المتزلجين المنتجع نفسه. وقطعت المجموعة A مسافة 4 mi في اتجاه الشرق ثم تحولت 70° في الاتجاه الشمالي الشرقي وقطعت 3 mi. وقطعت المجموعة B مسافة 4 mi في اتجاه الغرب ثم تحولت 75° في الاتجاه الشمالي الغربي وقطعت 3 mi. عند هذه النقطة، أي المجموعتين قطعت مسافة أبعد عن المنتجع؟ اشرح استنتاجك.

2B. التزلج في المسألة 2A، افترض أنه بدلاً مما سبق قطعت المجموعة A مسافة 4 mi غربًا ثم تحولت 45° في الاتجاه الشمالي الغربي وسارت 3 mi. أي المجموعتين ستكون أقرب إلى المنتجع؟ اشرح استنتاجك.

إذا كانت الزاوية المحصورة لأحد المثلثين أكبر من الزاوية المحصورة للمثلث الآخر، فإننا نستخدم عكس نظرية المثلثات.

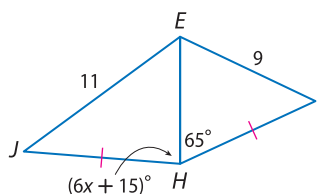
الربط بالحياة اليومية

يوجد أكثر من 225,000 mi من مسارات الجليد الممهدة والمحددة في أمريكا الشمالية.
المصدر: الجمعية الدولية لمصنعي مركبات التزلج على الجليد

نصيحة في حل المسائل

تصميم رسم تخطيطي صمم رسمًا تخطيطيًا لمساعدتك في رؤية المسألة الموصوفة بالكلمات وتفسيرها بشكل صحيح.

مثال 3 تطبيق الجبر على العلاقات بين المثلثات



الجبر احسب القيم المحتملة لـ x .

الخطوة 1 من خلال الرسم التخطيطي، نعلم أن $\overline{JH} \cong \overline{GH}$, $\overline{EH} \cong \overline{EH}$ و $JE > EG$

$m\angle JHE > m\angle EHG$ عكس نظرية المِثْلَة

$$6x + 15 > 65$$

$$x > 8\frac{1}{3}$$

التعويض

الحل لإيجاد قيمة x .

الخطوة 2 استخدم حقيقة أن قياس أي زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة ثانية.

$$m\angle JHE < 180$$

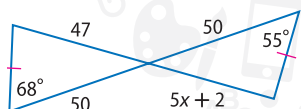
$$6x + 15 < 180$$

$$x < 27.5$$

التعويض

حل لإيجاد قيمة x .

الخطوة 3 اكتب $x > 8\frac{1}{3}$ و $x < 27.5$ في صورة المتباينة المركبة $8\frac{1}{3} < x < 27.5$.



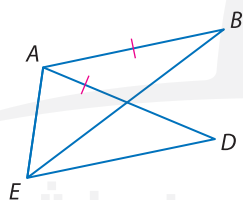
تمرين موجه

3. احسب القيم المحتملة للمتغير x .

2 إثبات العلاقات بين مثلثين

يمكنك استخدام نظرية المِثْلَة وعكسها لإثبات العلاقات بين مثلثين.

مثال 4 إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المِثْلَة



اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:

العبارة	التبرير
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	1. المعطيات
2. $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	2. خاصية الانعكاس
3. $m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB$	3. مسلّمة جمع الزوايا
4. $m\angle EAB > m\angle EAD$	4. تعريف المتباينة
5. $EB > ED$	5. نظرية المِثْلَة

تمرين موجه

4. اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

نصيحة دراسية

استخدام حقائق إضافية عند حساب المدى للقيم المحتملة لـ x . قد نحتاج إلى استخدام إحدى الحقائق التالية.

- قياس أي زاوية يكون دائماً أكبر من 0 وأصغر من 180.
- قياس أي قطعة مستقيمة يكون دائماً أكبر من 0.

مثال 5 إثبات العلاقات باستخدام عكس نظرية المِفْصَلة

اكتب برهاناً تسلسلياً.

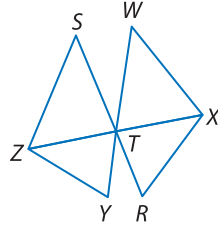
المعطيات: T هي نقطة منتصف ZX .

$$\overline{ST} \cong \overline{WT}$$

$$SZ > WX$$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$

البرهان التسلسلي:



T is the midpoint of ZX .

معطى

$$\overline{ZT} \cong \overline{TX}$$

تعريف نقطة المنتصف

$$\overline{ST} \cong \overline{WT}$$

معطى

$$SZ > WX$$

معطى

$$m\angle STZ > m\angle WTX$$

عكس نظرية المِفْصَلة

$$\angle STZ \cong \angle XTR$$

$$\angle WTX \cong \angle ZTY$$

رؤوس $\angle$ هي $\cong$

$$m\angle XTR > m\angle ZTY$$

التعويض

$$m\angle STZ = m\angle XTR$$

$$m\angle WTX = m\angle ZTY$$

تعريف $\cong$

تمرين موجه

5. اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $\overline{NK}$ هو أحد متوسطات $\triangle JMN$.

$$JN > NM$$

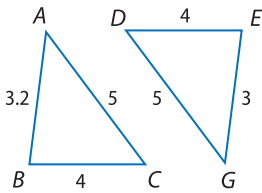
المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

التحقق من فهمك

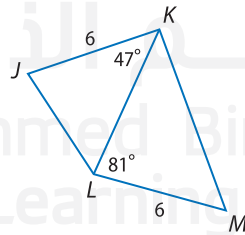
مثال 1

قارن بين القياسات المعطاة.

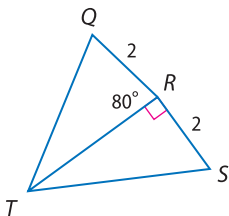
1. $m\angle ACB$ و $m\angle GDE$



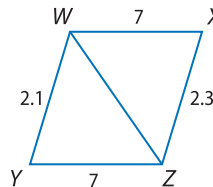
2. JL و KM

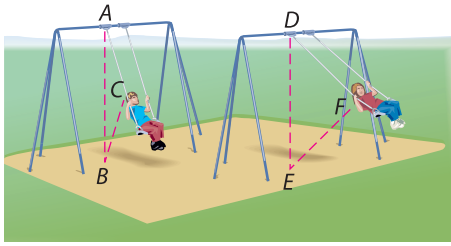


3. QT و ST



4. $m\angle XWZ$ و $m\angle YZW$





5. الأراجيح يتغير وضع الأرجوحة

وفقاً لمدى قوة دفعها.

a. أي من أزواج القطع المستقيمة التالية يكون متطابقاً؟

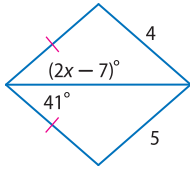
b. هل قياس $\angle A$ أكبر أم قياس $\angle D$ ؟ اشرح.

مثال 2

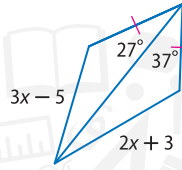
احسب مدى القيم المحتملة للمتغير x .

مثال 3

6.



7.

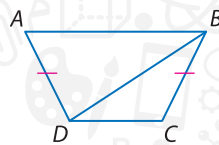


المثالان 4-5 الفرضيات اكتب برهاناً من عمودين.

9. المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CB}$

$DC < AB$

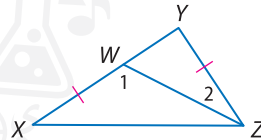
المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$



8. المعطيات: $\triangle YZX$

$\overline{YZ} \cong \overline{XW}$

المطلوب: $ZX > YW$

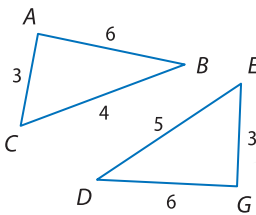


التمرين وحل المسائل

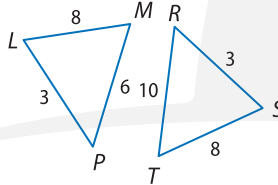
قارن بين القياسات المعطاة.

مثال 1

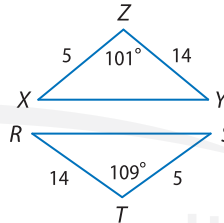
10. $m\angle BAC$ و $m\angle DGE$



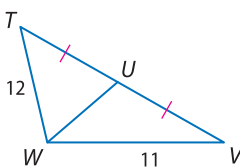
11. $m\angle MLP$ و $m\angle TSR$



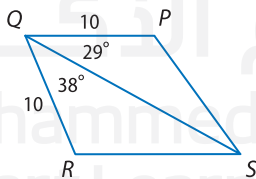
12. SR و XY



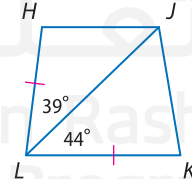
13. $m\angle TUW$ و $m\angle VUW$



14. PS و SR



15. JK و HJ

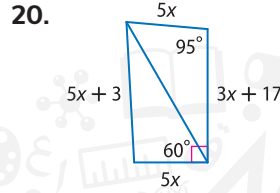
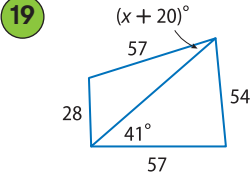
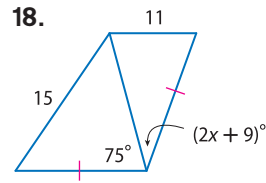
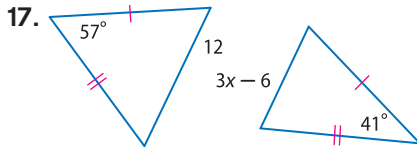


16. التخييم أقام حسن ووازن معسكرًا في حديقة وطنية. في الصباح، قرر حسن السير إلى الشلال. لذا غادر المعسكر وسار 5 mi باتجاه الشرق ثم تحول 15° إلى الجنوب الشرقي وسار ميلين آخرين. وغادر مازن المعسكر وسار 5 mi إلى الغرب، ثم تحول 35° باتجاه الشمال الغربي وسار ميلين إلى البحيرة للسباحة.

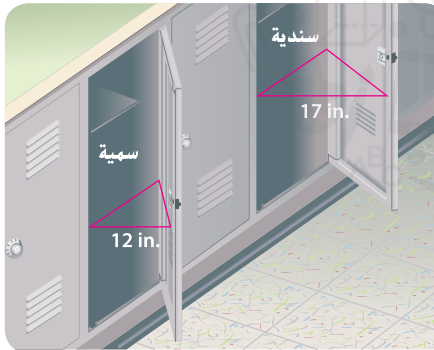
مثال 2

a. عند وصولهما إلى وجهتهما، من منهما أقرب إلى المعسكر؟ اشرح استنتاجك. أرفق رسمًا تخطيطيًا.

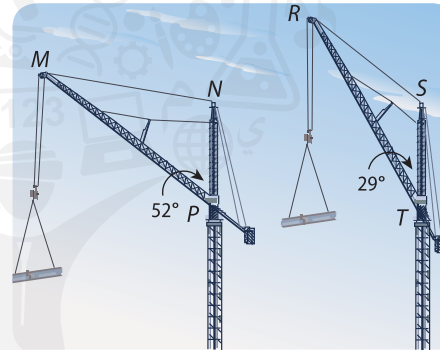
b. افترض أنه بدلاً من تحول مازن 35° باتجاه الشمال الغربي، تحول 10° باتجاه الجنوب الغربي. من سيكون على مسافة أبعد عن المعسكر؟ اشرح استنتاجك. أرفق رسمًا تخطيطيًا.



22. **الخزائن** تركت كل من سمية وسندية خزائيهما مفتوحتين كما هو موضح في الرسم التخطيطي. من صاحبة الخزانة التي تشكل زاوية أكبر؟ اشرح استنتاجك.



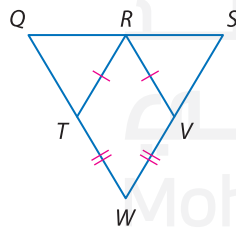
21. **الرافعات** في الرسم التخطيطي، تظهر رافعة وهي ترفع جسماً ما إلى ارتفاعين مختلفين. يتم تثبيت طول ذراع الرافعة، $\overline{MP} \cong \overline{RT}$ ، فما الأقصر طولاً: $\overline{MN}$ أم $\overline{RS}$ ؟ اشرح استنتاجك.



المثالان 4-5 **الفرضيات** اكتب برهاناً من عمودين.

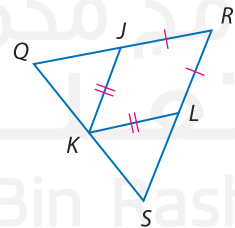
24. **المعطيات:** $\overline{VR} \cong \overline{RT}$, $\overline{WV} \cong \overline{WT}$
 $m\angle SRV > m\angle QRT$
 R هي نقطة منتصف $\overline{SQ}$

المطلوب: $WS > WQ$



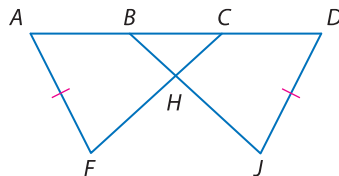
23. **المعطيات:** $\overline{LK} \cong \overline{JK}$, $\overline{RL} \cong \overline{RJ}$
 K هي نقطة منتصف $\overline{QS}$
 $m\angle SKL > m\angle QKJ$

المطلوب: $RS > QR$



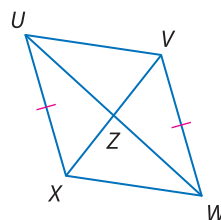
26. **المعطيات:** $\overline{AF} \cong \overline{DJ}$, $\overline{FC} \cong \overline{JB}$
 $AB > DC$

المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$

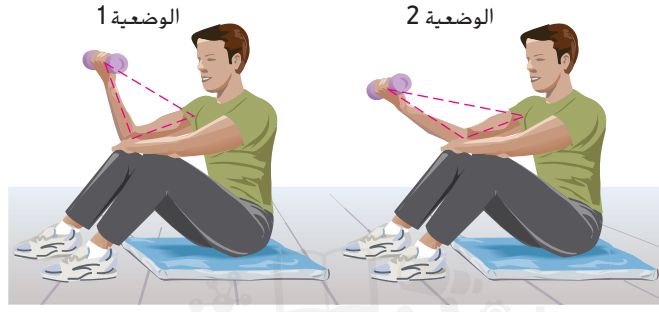


25. **المعطيات:** $\overline{XU} \cong \overline{VW}$, $VW > XW$
 $\overline{XU} \parallel \overline{VW}$

المطلوب: $m\angle XZU > m\angle UZV$



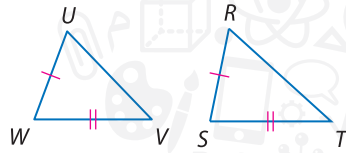
27 تمرين رياضي يقوم خلف بتمرينات تكوير عضلة الذراع الأمامية بالارتكاز على الركبة كجزء من تدريبات التقوية.



a. هل المسافة بين قبضة خلف وكتفه أكبر في الوضعية 1 أم في الوضعية 2 ؟ برر إجابتك باستخدام القياسات.

b. هل قياس الزاوية التي يشكّلها مرفق خلف أكبر في الوضعية 1 أم في الوضعية 2؟ اشرح استنتاجك.

28. البرهان استخدم برهاناً غير مباشر لإثبات نظرية المتباينة SSS (النظرية 6.14).

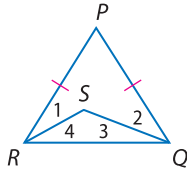


المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$

$\overline{ST} \cong \overline{VW}$

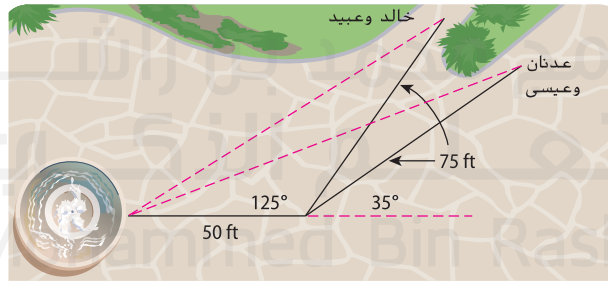
$RT > UV$

المطلوب: $m\angle S > m\angle W$



29. البرهان إذا كان $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$ و $SQ > SR$ ، فاكتب برهاناً من عمودين لإثبات أن $m\angle 1 < m\angle 2$.

30. البحث عن الكنز شارك كل من عبيد وعدنان وعيسى وخالد في لعبة البحث عن الكنز كجزء من درس الجغرافيا. تُظهر هذه الخريطة أن المفتاح التالي لحل اللغز يبعد 50 ft في اتجاه الشرق ثم 75 ft بزاوية 35° باتجاه الشمال الشرقي من نقطة البداية؛ وهي النافورة الموجودة في فناء المدرسة. عندما استعدوا للدوران والسير 75 ft بزاوية 35° في اتجاه الشرق الشمالي، اختلفوا حول اختيار الطريق، لذا افترقوا وسلكوا الطريقين الموضحين في الرسم التخطيطي أدناه.



a. أي ثنائي منهما اختار الطريق الصحيح؟ وضح استنتاجك.

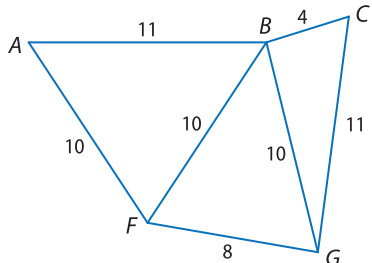
b. أي ثنائي منهما هو الأقرب إلى النافورة عندما يتوقف؟ اشرح استنتاجك.

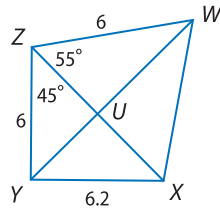
الاستنتاج المنطقي استخدم الشكل الظاهر على اليسار لكتابة متباينة تتعلق بزوايا المعطاة أو قياسات القطعة المستقيمة.

31. CB و AB

32. $m\angle FBG$ و $m\angle BFA$

33. $m\angle FBG$ و $m\angle BFA$





استخدم الشكل الظاهر على اليسار لكتابة متباينة تتعلق
بزوج الزوايا المعطاة أو قياسات القطعة.

34. $m\angle ZUY$ و $m\angle ZUW$

35. WU و YU

36. WX و XY

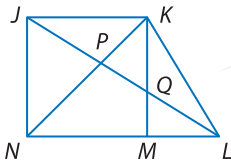
37. **التثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف خواص المضلعات.

- a. هندسيًا ارسم مضلعًا ثلاثي الأضلاع ورباعي الأضلاع وخماسي الأضلاع. اجعل اسم المضلع ثلاثي الأضلاع ABC . والمضلع رباعي الأضلاع $FGHJ$ ، والمضلع خماسي الأضلاع $PQRST$. استخدم المنقلة لقياس كل زاوية وتسميتها.
- b. جدولياً انسخ الجدول التالي وأكمله.

عدد الأضلاع	قياسات الزاوية		مجموع الزوايا
3	$m\angle A$	$m\angle C$	
	$m\angle B$		
4	$m\angle F$	$m\angle H$	
	$m\angle G$	$m\angle J$	
5	$m\angle P$	$m\angle S$	
	$m\angle Q$	$m\angle T$	
	$m\angle R$		

- c. **لفظيًا** اكتب تخمينًا حول العلاقة بين عدد أضلع المضلع ومجموع قياسات زوايا المضلع.
- d. **منطقيًا** ما نوع الاستنتاج الذي استخدمته في الجزء c؟ اشرح.
- e. **جبريًا** اكتب تعبيرًا جبريًا لمجموع قياسات زوايا مضلع له عدد n من الأضلاع.

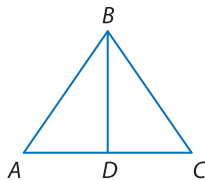
مسائل مهارات التفكير العليا



38. **التحدي** إذا كان $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$ ، $m\angle LJN > m\angle KJL$ ، و $\overline{JN} \perp \overline{NL}$ ، فما الأكبر؛ $m\angle LKN$ أم $m\angle LNK$ ؟ وضح استنتاجك.

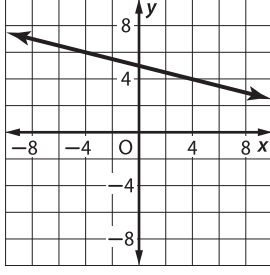
39. **مسألة غير محددة** الإجابة اذكر مثالاً من الحياة اليومية لأداة تستخدم مِفْصَلَةً. صمم رسمين تكون فيهما المِفْصَلَةُ المثبتة في الأداة في موضعين مختلفين. استخدم الرسومات لشرح سبب تسمية نظرية 7.13 بنظرية المفصلة.

40. **التحدي** المعطيات $\triangle RST$ مع المتوسط $\overline{RQ}$. إذا كان RT أكبر من أو يساوي RS ، فما التصنيفات المتاحة لـ $\triangle RQT$ ؟ اشرح استنتاجك.



41. **الدقة** إذا كان $\overline{BD}$ متوسطًا و $AB < BC$ ، إذا $\angle BDC$ تكون دائمًا أو، أحيانًا، أو لا تكون أبدًا زاوية حادة. اشرح.

42. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبين الفرق بين نظرية المِفْصَلَة ومسلّمة SAS في تطابق المثلثات.



45. الجبر ما الدالة الخطية

التي تصف التمثيل البياني
الموضح بشكل أفضل؟

$y = -\frac{1}{4}x + 5$ F

$y = -\frac{1}{4}x - 5$ G

$y = \frac{1}{4}x + 5$ H

$y = \frac{1}{4}x - 5$ J

46. SAT/ACT إذا كان ضلع المربع يساوي

$x + 3$ ، فقطر المربع هو

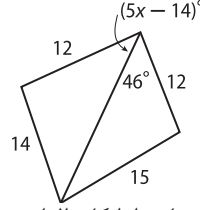
A $x^2 + 1$

B $x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

C $2x + 6$

D $x^2\sqrt{2} + 6$

E $x^2 + 9$



43. إجابة مختصرة اكتب

متباينة لوصف مدى القيم
المحتملة للمتغير X.

44. أي من العبارات التالية معكوس العبارة إذا كان الثلج
يتساقط، فإن خليفة يرتدي حذاء الثلوج؟

- A إذا ارتدى خليفة حذاء الثلوج، فإن الثلج يتساقط.
B إذا لم يتساقط الجليد، فإن خليفة لا يرتدي حذائه الشتوي.
C إذا لم يتساقط الجليد، فإن خليفة يرتدي حذائه الشتوي.
D إذا لم يتساقط الثلج أبداً، فإن خليفة لا يرتدي حذائه الشتوي.

مراجعة شاملة

احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الآخرين.

47. 3.2 cm, 4.4 cm

48. 5 ft, 10 ft

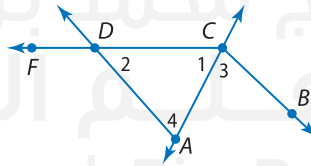
49. 3 m, 9 m

50. الجولات البحرية سألت مها صديقتها ميساء عن تكلفة الرحلة البحرية التي قامت بها هي وأقرب صديقاتها بعد التخرج. لم تتذكر ميساء تكلفة الفرد، ولكنها تذكرت إجمالي التكلفة التي تجاوزت AED 500. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن تكلفة الفرد كانت أكبر من AED 250.

ارسم شكلاً واذكر اسمه لتمثيل المثلثات المتطابقة. جد قيمة X.

51. $\triangle QRS \cong \triangle GHJ$ ، و $RS = 12$ ، و $QR = 10$ ، و $QS = 6$ ، و $HJ = 2x - 4$.

52. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ، و $AB = 13$ ، و $AC = 19$ ، و $BC = 21$ ، و $XY = 3x + 7$.



استخدم الشكل على اليسار.

53. ما اسم رأس $\angle 4$ ؟

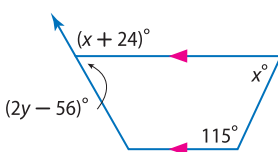
54. ما الاسم الآخر لـ $\angle 2$ ؟

55. ما الاسم الآخر لـ $\angle BCA$ ؟

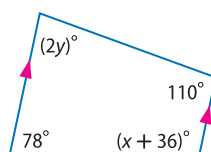
مراجعة المهارات

جد قيمة المتغير (المتغيرات) في كل شكل. اشرح استنتاجك.

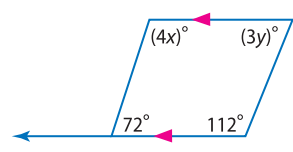
56.



57.



58.



دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات

- القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات هي المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا والمتوسطات والارتفاعات.
- تُسمى نقاط تقاطع كل من القطع المستقيمة الخاصة في المثلث بنقاط الالتقاء.
- نقاط الالتقاء في المثلث هي مراكز الدائرة المحيطة ومراكز الدائرة الداخلية والنقاط المركزية وملتقى الارتفاعات.

البرهان غير المباشر

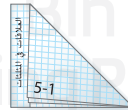
- كتابة برهان غير مباشر:
- 1. افتراض أن الاستنتاج خاطئ.
- 2. وضح أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.
- 3. بما أن الاستنتاج الخاطئ يؤدي إلى عبارة غير صحيحة، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي صحيحاً.

متباينات المثلث

- تقابل الزاوية الأكبر في المثلث الضلع الأكبر، وتقابل الزاوية الأصغر الضلع الأصغر.
- مجموع طولي أي ضلعين من أضلاع المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
- متباينة SAS (نظرية المفصلة): في أي مثلثين، إذا تطابق ضلعان، فقياس الزاوية المحصورة يحدد أي من المثلثين لديه الضلع الثالث الأكبر.
- متباينة SSS: في أي مثلثين، إذا تطابق ضلعان متناظران في كل من المثلثين، فطول الضلع الثالث يحدد أيًا من المثلثين يحتوي على الزاوية المحصورة ذات القياس الأكبر.

المطويات منظم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

- ارتفاع (altitude)
- نقطة مركزية (centroid)
- مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)
- مستقيمتان متلاقية (concurrent lines)
- مركز الدائرة الداخلية (incenter)
- برهان غير مباشر (indirect proof)
- تبرير غير مباشر (indirect reasoning)
- متوسط (median)
- ملتقى الارتفاعات (orthocenter)
- منصف عمودي (perpendicular bisector)
- نقطة الالتقاء (point of concurrency)
- برهان بالتناقض (proof by contradiction)

مراجعة المفردات

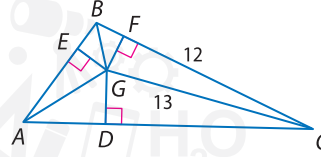
حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لعمل عبارة صحيحة.

1. تتقاطع ارتفاعات المثلث عند النقطة المركزية.
2. تُسمى نقطة التقاء متوسطات المثلث بمركز الدائرة الداخلية.
3. نقطة الالتقاء هي نقطة تقاطع ثلاثة خطوط أو أكثر.
4. مركز الدائرة المحيطة للمثلث يساوي البعد عن رؤوس المثلث.
5. لإيجاد النقطة المركزية للمثلث، يتم أولاً إنشاء منصفات الزاوية.
6. المنصفات العمودية لمثلث هي مستقيمتان متلاقية.
7. لعمل برهان بالتناقض، تفترض أولاً أن ما تحاول إثباته صحيح.
8. يستخدم البرهان بالتناقض الاستنتاج غير المباشر.
9. يربط متوسط المثلث نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث بنقطة منتصف ضلع آخر في المثلث.
10. مركز الدائرة الداخلية هو نقطة تقاطع فيها منصفات زاوية المثلث.

مراجعة درس بدرس

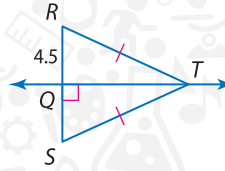
4-1 منصفات المثلثات

11. جد EG إذا كان G هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

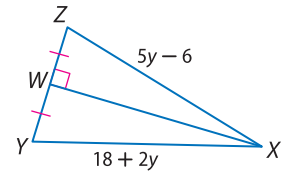


جد قياس كل مما يلي.

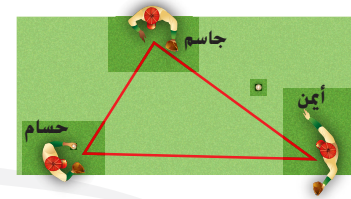
12. RS



13. XZ

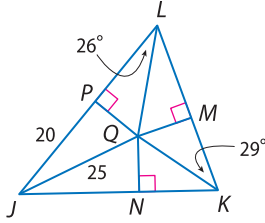


14. **كرة القاعدة** يقوم جاسم وأيمن بعملية الإحماء قبل لعب مباراة كرة القاعدة. يتطلب أحد تدريبات الإحماء وجود ثلاثة لاعبين لتشكيل مثلث، مع وجود لاعب في المنتصف. أين يجب أن يقف اللاعب الرابع بحيث يكون على مسافة متساوية من اللاعبين الثلاثة؟



مثال 1

جد قياس كل مما يلي إذا كان Q هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JKL$.



a. $\angle QJK$

$$m\angle KLP + m\angle MKN + m\angle NJP = 180 \quad \text{نظرية مجموع زوايا المثلث}$$

$$2(26) + 2(29) + m\angle NJP = 180 \quad \text{التعويض}$$

$$110 + m\angle NJP = 180 \quad \text{بسّط}$$

$$m\angle NJP = 70 \quad \text{الطرح}$$

بما أن $\overrightarrow{JQ}$ ينصف $\angle NJP$ ، فإن $m\angle QJK = \frac{1}{2}m\angle NJP$. إذاً، $m\angle QJK = \frac{1}{2}(70) = 35$

b. QP

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$

$$(QP)^2 + 20^2 = 25^2 \quad \text{التعويض}$$

$$(QP)^2 + 400 = 625 \quad 25^2 = 625 \text{ و } 20^2 = 400$$

$$(QP)^2 = 225 \quad \text{الطرح}$$

$$QP = 15 \quad \text{بسّط}$$

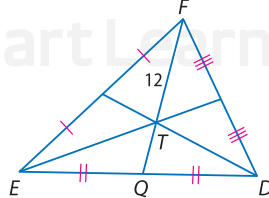
4-2 متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

15. رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0)$ و $E(0, 7)$ و $F(6, 3)$. جد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$.

16. **حفل التخرج** ليلي هي إحدى أعضاء لجنة حفل التخرج. وترغب في تعليق 12 مثلثاً متطابقاً في السقف بحيث تكون موازية للأرض. لذا رسمت مثلثاً واحداً على مستوى إحداثي بالإحداثيات $(0, 4)$ و $(3, 8)$ و $(6, 0)$. إذا كان كل مثلث سيتم تعليقه بسلسلة واحدة، ما إحداثيات النقطة التي يجب أن تتصل السلسلة عندها بالمثلث؟

مثال 2

في $\triangle EDF$ ، T هو النقطة المركزية و $FT = 12$. جد TQ .



$$FT = \frac{2}{3}FQ$$

$$FT = \frac{2}{3}(FT + TQ)$$

$$12 = \frac{2}{3}(12 + TQ)$$

$$12 = 8 + \frac{2}{3}TQ$$

$$4 = \frac{2}{3}TQ$$

$$6 = TQ$$

$$FT = 12$$

خاصية التوزيع

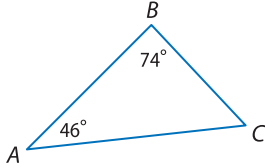
الطرح

الضرب

4-3 المتباينات في مثلث واحد

مثال 3

صتّف زوايا وأضلاع $\triangle ABC$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



a. جد أولاً قياس الزاوية المفقودة باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث.

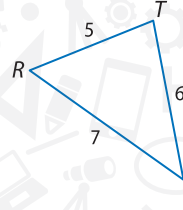
$$m\angle C = 180 - (46 + 74) = 60$$

لذا فالزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle A$ ، و $\angle C$ ، و $\angle B$.

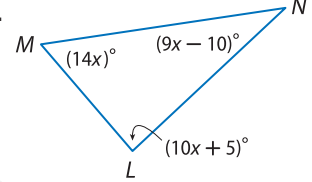
b. الأضلاع من الأقصر إلى الأطول هي $\overline{AC}$ ، و $\overline{AB}$ ، و $\overline{BC}$.

صتّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

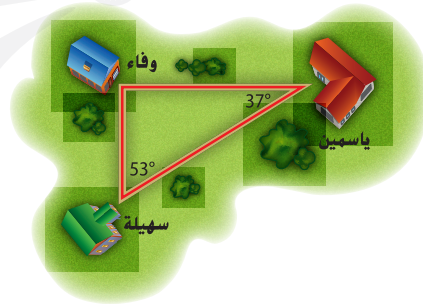
17.



18.



19. **الأحياء المجاورة** تعيش كل من ياسمين وسهيلة ووفاء عند تقاطعات ثلاثة طرق وهذا يشكّل المثلث الموضح. إذا أرادت الفتيات قضاء فترة ما بعد الظهر معاً، هل الطريق الأقصر لياسمين هو الذهاب إلى سهيلة وأخذها إلى بيت وفاء، أم الطريق الأقصر لسهيلة هو الذهاب إلى وفاء ثم الذهاب إلى بيت ياسمين؟



4-4 البرهان غير المباشر

مثال 4

اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

a. $\overline{XY} \not\cong \overline{JK}$

$\overline{XY} \cong \overline{JK}$

b. إذا كان $3x < 18$ ، فإن $x < 6$.

استنتاج العبارة الشرطية هو $x < 6$.
نفي الاستنتاج هو $x \geq 6$.

c. $\angle 2$ هي زاوية حادة.

إذا كان افتراض أن $\angle 2$ زاوية حادة خاطئ، فلا بد أن يكون افتراض أن $\angle 2$ زاوية غير حادة صحيحاً. هذا يعني أن افتراض $\angle 2$ زاوية منفرجة أو زاوية قائمة يجب أن يكون صحيحاً.

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

20. $m\angle A \geq m\angle B$

21. $\triangle FGH \cong \triangle MNO$

22. $\triangle KLM$ هو مثلث قائم الزاوية.

23. إذا كان $3y < 12$ ، فإن $y < 4$.

24. اكتب برهاناً غير مباشر يثبت أن الزاويتين المتتامتين لا تكون أي منهما زاوية قائمة.

25. **الأفلام** اشترى سالم أسطوانات DVD بتكلفة تجاوزت AED 50. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإثبات أن تكلفة إحدى أسطوانات (DVD) التي اشتراها تجاوزت AED 25.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

4-5 متباينة المثلث

المثال 5

هل يمكن تكوين مثلث بالأطوال 7 ft و 10 ft و 9 ft؟ وإن لم يكن كذلك، فاشرح السبب.

تحقق من كل متباينة.

$$\begin{array}{lll} 7 + 10 > 9 & 7 + 9 > 10 & 10 + 9 > 7 \\ 17 > 9 \checkmark & 16 > 10 \checkmark & 19 > 7 \checkmark \end{array}$$

بما أن مجموع كل زوج من أطوال الأضلاع أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 7 ft و 10 ft و 9 ft ستكون مثلثًا.

هل يمكن تكوين مثلث باستخدام الأطوال المعطاة؟ وإن لم يكن كذلك، فاشرح السبب.

26. 5, 6, 9

27. 3, 4, 8

احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياس ضلعيه الآخرين.

28. 5 ft, 7 ft

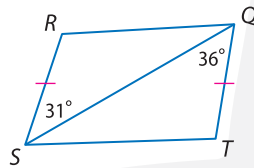
29. 10.5 cm, 4 cm

30. **الدراجات** يقود يوسف دراجته لزيارة سعيد. ونظروا لإغلاق الطريق السريع، فلا بد أن يسير 2 mi في الطريق الرئيسي والدوران لسير 3 mi إضافية في الطريق رقم 5. إذا رسمنا مثلثًا يحتوي على رأسين إحداهما ليوسف والأخرى لبنت سعيد، احسب مدى المسافة المحتملة بين يوسف وبنت سعيد عند السير مباشرة في الطريق السريع.

4-6 المتباينات في مثلثين

مثال 6

قارن بين القياسات المعطاة.

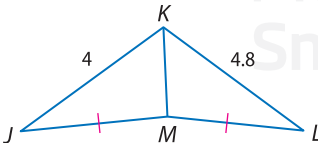


a. RQ و ST

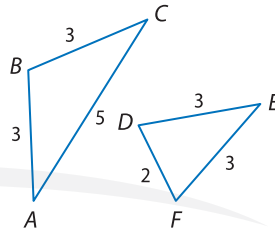
In $\triangle QRS$ و $\triangle STQ$, $\overline{RS} \cong \overline{TQ}$, $\overline{QS} \cong \overline{QS}$, و $\angle SQT > \angle RSQ$. بحسب نظرية المفصلة، $m\angle SQT < m\angle RSQ$ ، إذًا $RQ < ST$.

b. $m\angle JKM$ و $m\angle LKM$

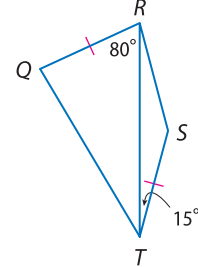
In $\triangle JKM$ و $\triangle LKM$, $\overline{JM} \cong \overline{LM}$, $\overline{KM} \cong \overline{KM}$, و $LK > JK$. بحسب عكس نظرية المفصلة، $\angle LKM > \angle JKM$.



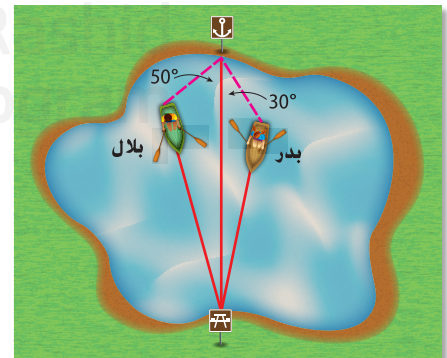
31. $m\angle ABC$, $m\angle DEF$

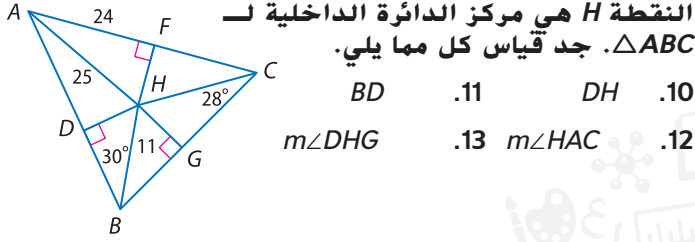


32. QT و RS



33. **الزوارق** يقوم كل من بدر وبلال بالتجديف حول بركة ويتجهان إلى نفس النقطة. هذه أول تجربة لهما في التجديف، لذا خرجوا عن المسار كما هو موضح في الرسم التخطيطي. بعد دقيقتين، قاموا بالتجديف لمسافة 50 yd من منهم الأقرب إلى وجهته؟





النقطة H هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$. جد قياس كل مما يلي.

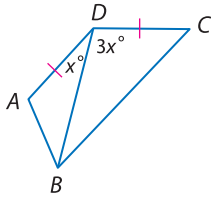
10. DH 11. BD 12. $m\angle HAC$ 13. $m\angle DHG$

14. الاختيار من متعدد إذا كان طولاً ضلعين في مثلث 5 أقدم 11 قدمًا، فما مدي الأطوال المحتملة للضلع الثالث؟

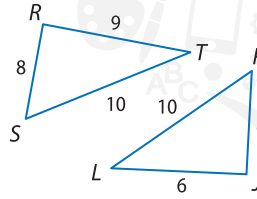
- F $6 < x < 10$ H $6 < x < 16$ G $5 < x < 11$ J $x < 5$ أو $x > 11$

قارن بين كل مما يأتي:

15. AB و BC



16. $\angle RST$ و $\angle JKL$



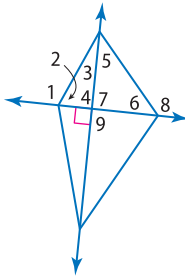
اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

17. إذا كان 8 هو عامل n ، إذا 4 هو عامل n .

18. $m\angle M > m\angle N$

19. إذا كان $3a + 7 \leq 28$ ، إذا $a \leq 7$.

استخدم الشكل لتحديد أكبر الزوايا قياسًا.

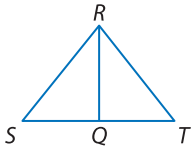


20. $\angle 1, \angle 5, \angle 6$

21. $\angle 9, \angle 8, \angle 3$

22. $\angle 4, \angle 3, \angle 2$

23. البرهان اكتب برهانًا من عمودين.



المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$.

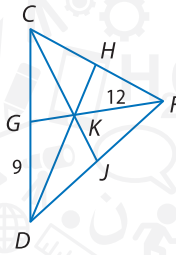
المطلوب: $m\angle SQR > m\angle SRQ$

احسب طول الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسيه الآخرين.

24. 10 ft, 16 ft

25. 23 m, 39 m

1. الحدائق تريد شريحة زراعة حوض للزهور داخل منطقة مثلثة محددة بثلاثة ممرات. ما نقطة الالتقاء المرتبطة بالمثلثات التي ستستخدمها لمركز الدائرة الأكبر الذي سيتناسب وضعه داخل المثلث؟



في $\triangle CDF$ ، النقطة المركزية K هو $DK = 16$. جد طول كل مما يلي.

2. KH

3. CD

4. FG

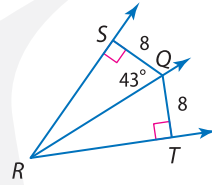
5. الإثبات اكتب إثباتًا غير مباشر.

المعطيات: $5x + 7 \geq 52$

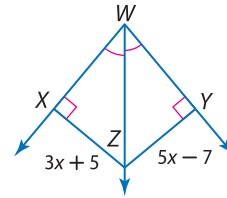
المطلوب: $x \geq 9$

جد قياس كل مما يلي.

6. $m\angle TQR$



7. XZ



8. الجغرافيا تبعد تونوبيا عن راوند ماونت نفس المسافة التي تبعد عنها عن وورم سبرينغز. والمسافة التي تفصل تونوبيا عن مدينة هونورن هي نفس المسافة التي تبعد عنها عن مدينة بيتي. حدّد المسافة الأكبر: راوند ماونت إلى هونورن أم من وورم سبرينغز إلى بيتي.



9. الاختيار من متعدد إذا كان قياس ضلعين في مثلث هو 3.1 ft و 4.6 ft، فما قياس أقل عدد كلي محتمل للضلع الثالث؟

A 1.6 ft

C 7.5 ft

B 2 ft

D 8 ft

التحضير للاختبارات المعيارية



استبعاد الإجابات غير المنطقية

يمكنك استبعاد الإجابات غير المنطقية لتحديد الإجابة الصحيحة عند حل بنود اختبار الاختيار من متعدد.



إستراتيجيات استبعاد الإجابات غير المنطقية

الخطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية لتحديد ما المطلوب منك لإجاده بدقة.

- ما المطلوب حله؟
- هل الإجابة الصحيحة عدد صحيح، أم كسر أم رقم عشري؟
- هل يجب عليّ استخدام رسماً بيانياً أم جدولاً؟
- ما الوحدات (إن وجدت) التي ستتضمنها الإجابة الصحيحة؟

الخطوة 2

أمعن النظر في كل اختيار إجابة ممكنة، وقوّمه لمعرفة مدى صحته.

لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.

- حدد أي خيارات إجابة تكون غير صحيحة بشكل واضح واستبعدوها.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تكون بتنسيق سليم.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تشمل وحدات صحيحة.

الخطوة 3

حل المسألة واختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المتبقية. تحقق من إجابتك.

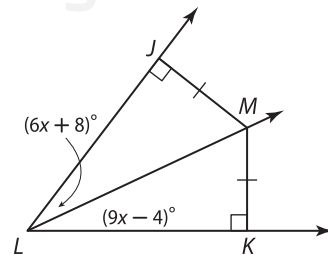
برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

ما قياس $\angle KLM$ ؟

- A 32
- B 44
- C 78
- D 94



اقرأ المسألة وادرس الشكل بعناية. المثلث KLM قائم الزاوية. بما أن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث هي 180° . إذاً يجب أن يكون $m\angle KLM + m\angle LMK$ يساوي 90° . وإلا سيتجاوز المجموع 180 درجة. بها أن خيار الإجابة D هو زاوية منفرجة، فيمكن استبعادها كإجابة غير منطقية. لا بد أن تكون الإجابة الصحيحة A، أو B، أو C.

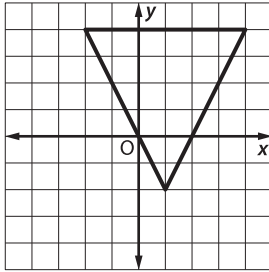
حل المسألة. وفقاً لعكس نظرية منصف الزاوية، إذا كانت هناك نقطة داخل زاوية معينة وتقع على مسافة واحدة من جوانب الزاوية، فإن النقطة تقع على منصف الزاوية. النقطة M تقع على مسافة واحدة من الشعاعين L و K، لذا فهي تقع على منصف $\angle LK$. لذا، يجب أن تكون $\angle JLM$ مطابقة لـ $\angle KLM$. كُن معادلة وحلها لـ x.

$$\begin{aligned} 6x + 8 &= 9x - 4 \\ -3x &= -12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

لذا فإن قياس $\angle KLM$ هو $[9(4) - 4]^\circ$ أو 32° . الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين

3. ما إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث أدناه؟



- A $(-\frac{3}{4}, -1)$ C $(1, \frac{5}{2})$
B $(-\frac{4}{3}, 1)$ D $(1, \frac{9}{4})$

4. إذا كان $\triangle ABC$ متساوي الساقين و $m\angle A = 94$ ، فأَي مما يلي ينبغي أن يكون صحيحاً؟

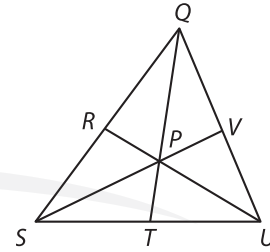
- F $m\angle B = 94$
G $m\angle B = 47$
H $AB = BC$
J $AB = AC$

5. أي مما يلي لا يمكن أن يمثل أبعاد مثلث؟

- A 1.9, 3.2, 4 C 3, 7.2, 7.5
B 1.6, 3, 4.6 D 2.6, 4.5, 6

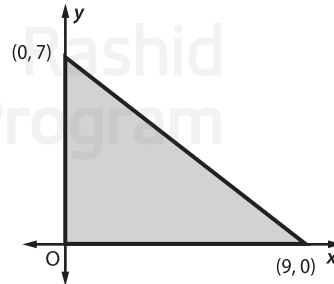
اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. النقطة P هي النقطة المركزية للمثلث QUS. إذا كان $QP = 14$ cm، فما طول QT ؟



- A 7 cm C 18 cm
B 12 cm D 21 cm

2. ما المساحة بالوحدات المربعة للمثلث الموضح أدناه؟



- F 8 H 31.5
G 27.4 J 63

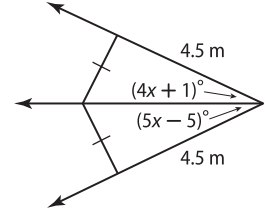
تدريب على الاختبار المعياري



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

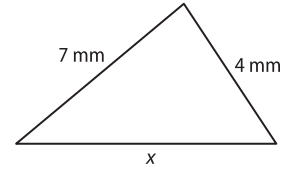
1. جد حل x .



- A 3
B 4

- C 5
D 6

2. أي مما يلي لا يمكن أن يمثل قيمة x ؟



- F 8 mm
G 9 mm

- H 10 mm
J 11 mm

3. يزعم أيوب أنك إذا كنت تعيش في أبو ظبي، فإنك تعيش مدينة العين. أي افتراض قد تحتاجه للوصول إلى برهان غير مباشر لهذا الزعم؟

- A لنفرض أن شخصاً ما يعيش في مدينة العين ولكن ليس في إمارة أبو ظبي.
B لنفرض أن شخصاً ما يعيش في مدينة العين وإمارة أبو ظبي.
C لنفرض أن شخصاً ما يعيش في إمارة أبو ظبي وفي مدينة العين.
D لنفرض أن شخصاً ما يعيش في إمارة أبو ظبي، ولكن ليس في مدينة العين.

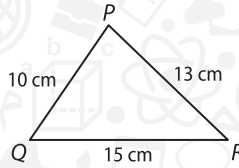
4. أي مما يلي يصف أقصر مسافة من إحدى رؤوس مثلث إلى الضلع المقابل؟

5. بدأ رشيد جز الأعشاب. لنفرض أن x يمثل عدد الأسابيع بعد بدء رشيد جز الأعشاب، و y يمثل عدد العملاء. استخدم النقطتين (3, 4) و (9, 6) لإيجاد معادلة مستقيم يمكن أن يتم استخدامها للتنبؤ بعدد العملاء الموجودين لدى رشيد بحلول نهاية أسبوع معين.

- A $y = \frac{1}{3}x$
B $y = \frac{1}{3}x + 3$
C $y = \frac{2}{3}x + 2$
D $y = \frac{2}{3}x$

6. ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$ ؟

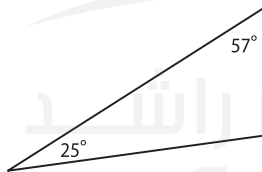
- F $m\angle R < m\angle Q < m\angle P$
G $m\angle R < m\angle P < m\angle Q$
H $m\angle Q < m\angle P < m\angle R$
J $m\angle P < m\angle Q < m\angle R$



7. أي افتراض قد تحتاجه من أجل بدء برهان غير مباشر للعبارة؟

- الزاوية S ليست منفرجة.
A $\angle S$ هي زاوية قائمة.
B $\angle S$ هي زاوية منفرجة.
C $\angle S$ هي زاوية حادة.
D $\angle S$ ليست زاوية حادة.

8. صتّف المثلث أدناه وفقاً لقياسات زواياه.



- F حاد
G متساوي الزوايا
H منفرج
J قائم الزاوية

نصيحة عند حل الاختبار

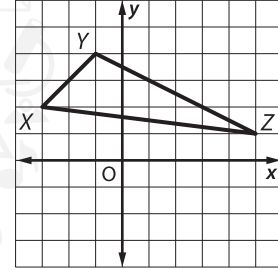
السؤال 2 يجب أن يكون مجموع أي ضلعين في مثلث أكبر من الضلع الثالث.

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

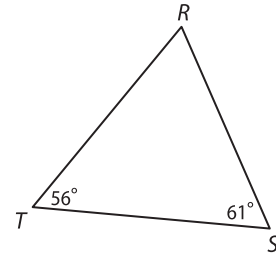
اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

9. إجابة شبكية إذا كان قياس ضلعين من مثلث 9 cm و 15 cm. فما أقل قياس محتمل للضلع الثالث بالسنتيمترات إذا كان القياس عددًا صحيحًا؟

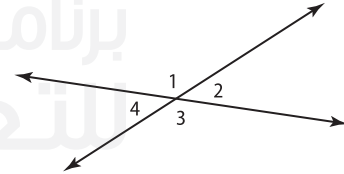
10. ما إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث أدناه؟



11. صنف أضلاع المثلث أدناه بالترتيب من الأقصر إلى الأطول.



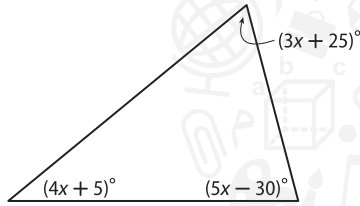
12. لنفرض أن مستقيمين يتقاطعان في مستوى إحداثي معين لتكوين أربع زوايا.



ما الذي تعرفه حول أزواج الزوايا المجاورة التي تكونت؟ اشرح.

13. عمر وعلي يأخذان مجموعة من المخبيمين للتنزه في الغابات. غادرت مجموعة عمر المعسكر وسارت ميلين باتجاه الشرق. ثم تحولت بمقدار 20° إلى الجنوب الشرقي وسارت 4 mi أخرى. غادرت مجموعة علي المعسكر وسارت ميلين باتجاه الغرب، ثم تحولت 30° إلى الشمال الغربي وسارت 4 mi أخرى. كم عدد الدرجات إلى الجنوب الشرقي التي احتاج عمر أن يتحولها لكي تكون مجموعته ومجموعته علي على نفس المسافة من المعسكر بعد جولتين من التنزه؟

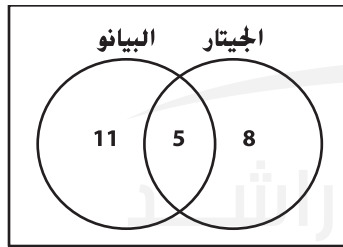
14. إجابة شبكية جد قيمة x في المثلث أدناه.



الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

15. ارجع إلى الشكل للإجابة على كل سؤال.



- a. كم عدد الطلاب الذين يعزفون على الجيتار؟
- a. كم عدد الطلاب الذين يعزفون على البيانو؟
- c. كم عدد الطلاب الذين يعزفون على كل من البيانو والجيتار؟