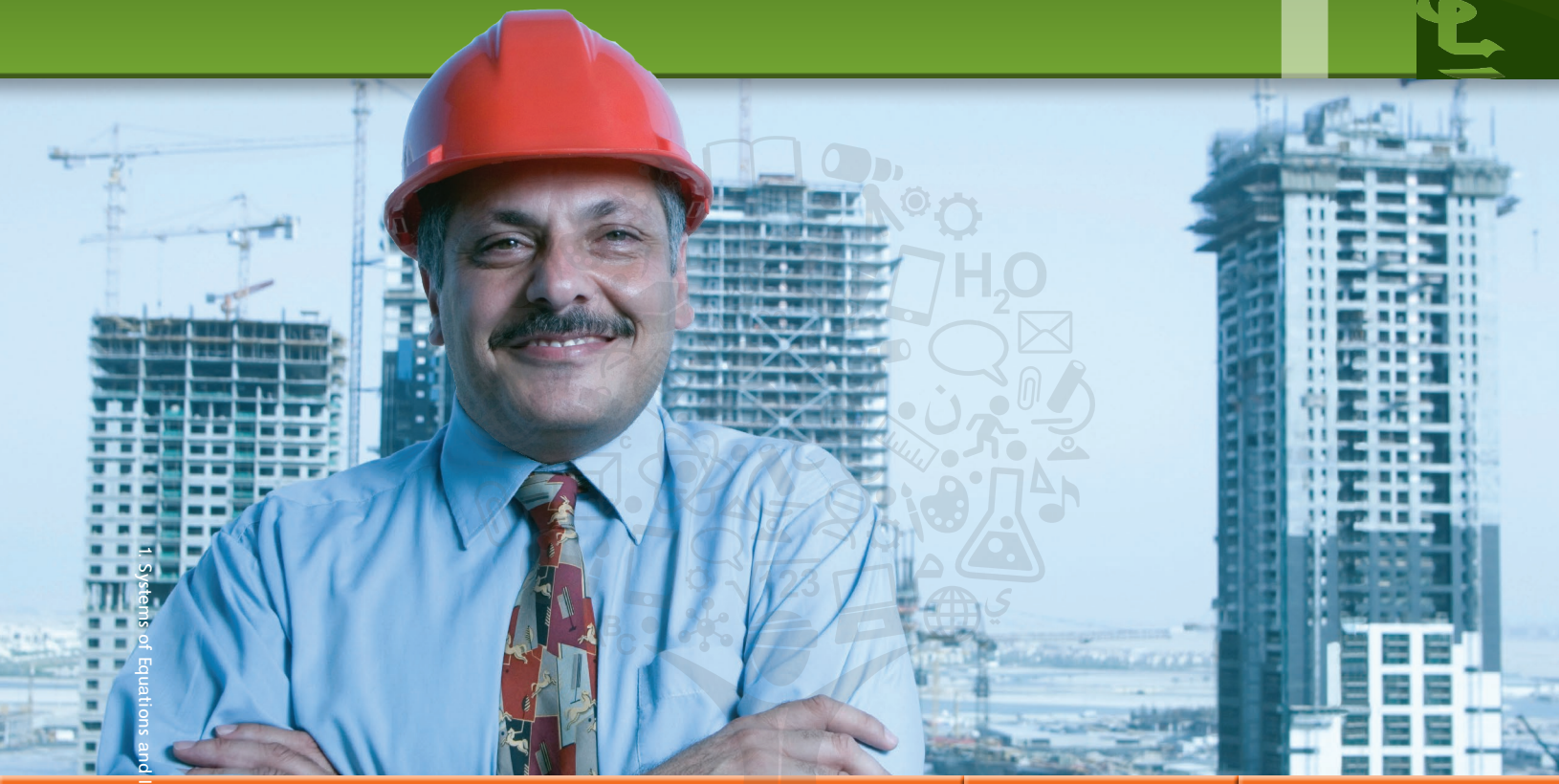
الوحدة 1

الأنظمة الخطية والمصفوفات



السابق

- قمت بتمثيل معادلات المستقيمات بيانيًا، بالإضافة إلى تحويل الدوال وحل المعادلات.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - حل أنظمة المعادلات الخطية والمتباينات الخطية.
  - حل المسائل باستخدام البرمجة الخطية.
  - إجراء العمليات باستخدام المصفوفات والمحددات.

لماذا؟

- **الأعمال** أن تكون ناجحاً في مجال الاعمال يعني ان تكون لديك مهارات رياضيات جيدة في معظم الوقت. سوف تتعلم كيفية تحقيق أقصى قدر من الارباح وتقليل التكاليف الخاصة بك في هذه الوحدة. سوف تكسب أكبر قدر ممكن من المال من خلال القيام بذلك.

1 Systems of Equations and Inequalities, from Algebra 2 Chapter 3 © 2014 & Matrices, from Algebra 2 Chapter 4 lesson 1 © 2010
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد | لديك خياران للتحقق من المهارات المطلوبة.

1 خيار الكتاب المدرسي

قم بالتمرين السريع أدناه وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

تمرين سريع

مثّل كل معادلة بيانيًا.

1. $x = 4y$
2. $y = \frac{1}{3}x + 5$
3. $x + 2y = 4$
4. $y = -x + 6$
5. $3x + 5y = 15$
6. $3y - 2x = -12$

7. **الأعمال** يبيع المتحف تذاكر البالغين بسعر AED 8.50 وتذاكر الصغار بسعر AED 5.25. وفي يوم الجمعة جنى المتحف AED 650.

   a. اكتب معادلة يمكن استخدامها لتمثيل مبيعات التذاكر.

   b. مثّل المعادلة بيانيًا.

مثّل كل متباينة بيانيًا.

8. $y < 3$
9. $x + y \geq 1$
10. $3x - y > 6$
11. $x + 2y \leq 5$
12. $y > 4x - 1$
13. $5x - 4y < 12$

14. **جمع التبرعات** يقوم مجلس الطلبة ببيع قمصان بسعر AED 15 وقمصان ثقيلة بسعر AED 25. يجب عليهم جمع AED 2500 لتغطية النفقات. اكتب متباينة ومثّلها بيانيًا لإظهار عدد القمصان والقمصان الثقيلة التي يجب أن يبيعوها.

مراجعة سريعة

مثال 1

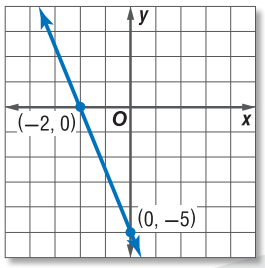
مثّل بيانيًا $2y + 5x = -10$.

جد التقاطع مع المحورين *الرأسي* و*الأفقي*.

$2y + 5(0) = -10$
$2y = -10$
$y = -5$

$2(0) + 5x = -10$
$5x = -10$
$x = -2$

يقطع التمثيل البياني المحور x بالنقطة $(-2, 0)$ والمحور y بالنقطة $(0, -5)$. استخدم هذه الأزواج المرتبة لتمثيل المعادلة بيانيًا.



مثال 2

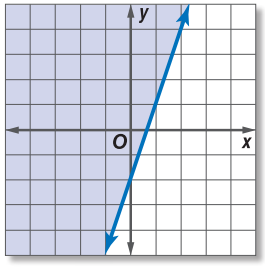
مثّل بيانيًا $y \geq 3x - 2$.

الحد هو التمثيل البياني لـ $y = 3x - 2$. وبما أن رمز المتباينة هو $\geq$، فإن الحد سيكون خطًا متصلًا.

اختبر النقطة $(0, 0)$.

$(x, y) = (0, 0)$
$0 \stackrel{?}{\geq} 3(0) - 2$
$0 \geq -2$ ✓

ظلل المنطقة التي تتضمن $(0, 0)$.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

البدء في هذه الوحدة

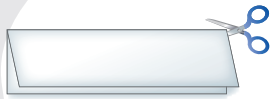
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك هذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك. ويمكنك العودة إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

المطويات منظّم الدراسة

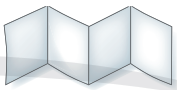
أنظمة المعادلات والمتباينات اصنع هذه المطوية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة حول أنظمة المعادلات والمتباينات. ابدأ بورقة أبعادها 22 cm في 28 cm.

1 **اطوِ** الورق إلى نصفين بالطول.

2 **قص** بطول الطية.

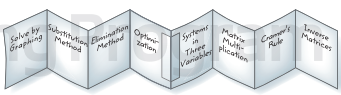


3 **اطوِ** كل ورقة بالعرض إلى أرباع.



4 **الصق** أطراف كل ورقتين معًا.

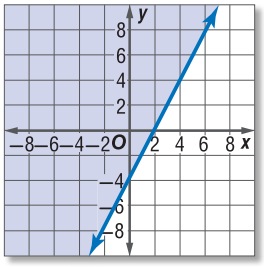
5 **قم بتسمية** التبويبات بكلٍ من: *الحل بالتمثيل البياني، وطريقة التعويض، وطريقة الحذف، والبحث عن الحل الأمثل، والأنظمة بثلاثة متغيرات، وضرب المصفوفة، وقاعدة كرامر، والمصفوفات العكسية.*



المفردات الجديدة

break-even point	نقطة التعادل
consistent	متوافق
inconsistent	غير متوافق
independent	مستقل
dependent	غير مستقل
substitution method	طريقة التعويض
elimination method	طريقة الحذف
feasible region	منطقة الحلول الممكنة
bounded	محدود
unbounded	غير محدودة
optimize	بحث عن الحل الأمثل
determinant	مُحَدّد
Cramer's Rule	قاعدة كرامر
coefficient matrix	مصفوفة المعاملات
identity matrix	مصفوفة محايدة
square matrix	مصفوفة مربعة
inverse matrix	مصفوفة عكسية
variable matrix	مصفوفة المتغير
constant matrix	مصفوفة الثابت

مراجعة المفردات



المتباينة هي جملة مفتوحة تحتوي على الرمز $<$، $\leq$، أو $>$، أو $\geq$.

المعادلة الخطية هي معادلة ليس فيها أي عمليات بخلاف جمع وطرح وضرب متغير في ثابت.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مختبر تقنية التمثيل البياني
تقاطع التمثيلات البيانية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد نقاط تقاطع أي تمثيلين بيانيين. يمكنك استخدام القائمة Y= لتمثيل كل معادلة بيانيًا على نفس مجموعة المحاور.

مثال تقاطع تمثيلين بيانيين

مثّل كلتا المعادلتين بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

$3x + y = 9$
$x - y = -1$

الخطوة 1 اكتب كل معادلة في الصيغة $y = mx + b$.

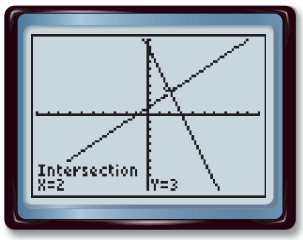
$3x + y = 9$
$y = -3x + 9$

$x - y = 1$
$-y = -x - 1$
$y = x + 1$

الخطوة 2 أدخل $y = -3x + 9$ في صورة **Y1** و $y = x + 1$ في صورة **Y2**. ثم مثّل المستقيمين بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= (−) 3 X,T,θ,n + 9 ENTER

X,T,θ,n + 1 ENTER ZOOM 6



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 3 جد نقاط تقاطع المستقيمات.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [CALC] 5 ENTER ENTER ENTER

نقطة التقاطع تقع عند (2, 3).

تمارين

استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد نقاط تقاطع كل زوج من التمثيلات البيانية.

1. $2x + 4y = 36$
   $10y - 5x = 0$

2. $2y - 3x = 7$
   $5x = 4y - 12$

3. $4x - 2y = 16$
   $7x + 3y = 15$

4. $2x + 4y = 4$
   $x + 3y = 13$

5. $5x + y = 13$
   $3x = 15 - 3y$

6. $4y - 5 = 20 - 3x$
   $4x - 7y + 16 = 0$

7. $\frac{1}{4}x + y = \frac{11}{4}$
   $x - \frac{1}{2}y = 2$

8. $3x + 2y = -3$
   $x + \frac{1}{3}y = -4$

9. $3x - 6y = 6$
   $2x - 4y = 4$

10. $6x + 8y = -16$
    $3x + 4y = 12$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

1-1 حل أنظمة المعادلات

السابق:
- مثلث المعادلات الخطية بيانيًا وجدت حلها.

الحالي:
1. حل أنظمة المعادلات الخطية بالتمثيل البياني وتصنيفها وفق عدد الحلول.
2. حل أنظمة المعادلات الخطية جبريًا.

لماذا؟
- اقترض خليفة AED 450 لإنشاء شركة لجز العشب. وهو يتقاضى AED 35 لكل حديقة ويتكبد AED 8 في تكاليف التشغيل لكل حديقة. يمكن استخدام نظام معادلات لتحديد نقطة التعادل. **نقطة التعادل** هي النقطة التي يتساوى فيها الدخل مع التكلفة.

1 حل الأنظمة بالتمثيل البياني

نظام المعادلات هو معادلتان أو أكثر لهما نفس المتغيرات. ولحل نظام معادلات به اثنين من المتغيرات، وإيجاد الزوج المرتّب الذي يحقق جميع المعادلات.

لحل نظام معادلات باستخدام جدول، قم أولًا بكتابة كل معادلة في صيغة الميل والمقطع. ثم عوّض بقيم مختلفة عن x وجد الحل لقيم y المقابلة. ولتسهيل الاستخدام، اختر 0 و 1 كأول قيم تعوض بها عن x.

$y_1 = -2x + 8$
$y_2 = 4x - 7$

x	y_1	y_2	حاصل الطرح
0	8	−7	15
1	6	−3	9
2	4	1	3
3	2	5	−3

ولأن الفارق بين قيم y يكون أقرب لـ 0 حيث $x = 1$ مقارنةً بـ $x = 0$، ينبغي تجربة قيمة أكبر من 1 بعد ذلك.

ولأن الفارق بين قيم y قد غير الإشارات من $x = 2$ إلى $x = 3$، ينبغي تجربة قيمة تقع بين هاتين القيمتين بعد ذلك.

يقع الحل بين 2 و 3.

مثال 1 الحل باستخدام جدول

حُلّ نظام المعادلات.

$3x + 2y = -2$
$-4x + 5y = -28$

اكتب كل معادلة بصيغة الميل والمقطع.

$3x + 2y = -2 \rightarrow y = -1.5x - 1$
$-4x + 5y = -28 \rightarrow y = 0.8x - 5.6$

استخدم جدولًا لإيجاد حل يحقق كلتا المعادلتين.

x	y_1	y_2	(x, y_1)	(x, y_2)
0	−1	−5.6	(0, −1)	(0, −5.6)
1	−2.5	−4.8	(1, −2.5)	(1, −4.8)
2	**−4**	**−4**	**(2, −4)**	**(2, −4)**

حل النظام هو (2, −4).

تمرين موجّه

1A. $2x - 5y = 11$
$-3x + 4y = -13$

1B. $4x + 3y = -17$
$-7x - 2y = 20$

المفردات الجديدة
- **نقطة التعادل** break-even point
- **نظام المعادلات**
- **متوافق** consistent
- **غير متوافق** inconsistent
- **مستقل** independent
- **غير مستقل** dependent
- **طريقة التعويض** substitution method
- **طريقة الحذف** elimination method

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
مراعاة الدقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

هناك طريقة أخرى لحل نظام المعادلات وهي تمثيل المعادلات بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي. ونقطة التقاطع تمثل الحل.

مثال 2 الحل باستخدام التمثيل البياني

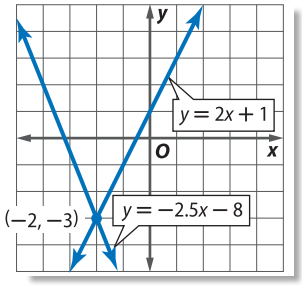
حُلّ نظام المعادلات باستخدام التمثيل البياني.

$2x - y = -1$ $\qquad$ $2y + 5x = -16$

اكتب كل معادلة بصيغة الميل والمقطع.

$2x - y = -1 \rightarrow y = 2x + 1$

$2y + 5x = -16 \rightarrow y = -2.5x - 8$



يتقاطع التمثيلان البيانيان للمستقيمين عند النقطة $(-2, -3)$.

التحقق قم بالتعويض عن الإحداثيات في كل معادلة أصلية.

المعادلات الأصلية	$2y + 5x = -16$	$2x - y = -1$
$y = -3$ و $x = -2$	$2(-3) + 5(-2) \stackrel{?}{=} -16$	$2(-2) - (-3) \stackrel{?}{=} -1$
بسّط.	$-16 = -16$ ✓	$-1 = -1$ ✓

حل النظام هو $(-2, -3)$.

نصيحة دراسية

التحقق من الحلول تحقق دائمًا لمعرفة إذا ما كانت القيم تلائم **كلتا** المعادلتين الأصليتين.

تمرين موجّه

2A. $4x + 3y = 12$
$-6x + 4y = -1$

2B. $-3y + 8x = 36$
$6x + y = -21$

يمكن تصنيف أنظمة المعادلات حسب عدد الحلول. حيث يكون النظام **متوافقًا** إذا كان له حل واحد على الأقل ويكون **غير متوافق** إذا لم تكن له أي حلول. وإذا كان له حل واحد بالضبط، يكون **مستقلًا**. ولكن إذا كان له عدد لا نهائي من الحلول، يكون **غير مستقل**.

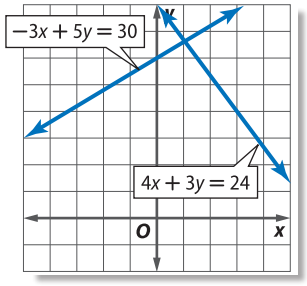
نصيحة دراسية

الميل وتصنيف الأنظمة إذا كان للمعادلات درجات ميل مختلفة، يكون النظام عندئذٍ متوافقًا ومستقلًا.

مثال 3 تصنيف الأنظمة

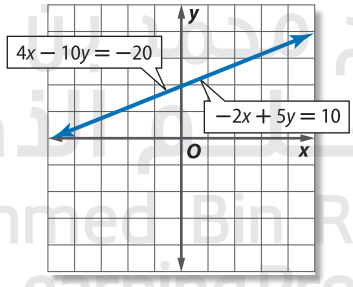
مثّل كل نظام معادلات بيانيًا وصفه من حيث كونه متوافقًا ومستقلًا، أو متوافقًا وغير مستقل، أو غير متوافق.

a. $4x + 3y = 24$
$-3x + 5y = 30$



يتقاطع التمثيلان البيانيان للمستقيمين عند نقطة واحدة، لذا فهناك حل واحد. ويكون النظام متوافقًا ومستقلًا.

b. $-2x + 5y = 10$
$4x - 10y = -20$



نظرًا لأن المعادلتين متكافئتين، يكون تمثيلهما البياني هو الخط نفسه. ويكون النظام متوافقًا وغير مستقل.

تمرين موجّه

3A. $6x - 4y = 15$
$-6x + 4y = 18$

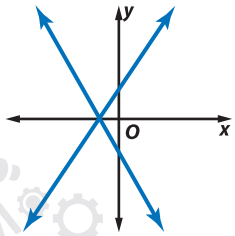
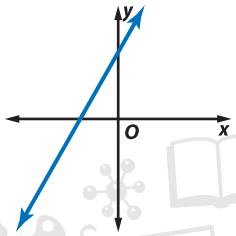
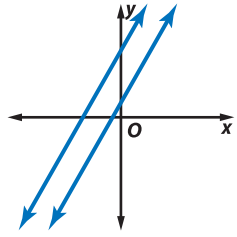
3B. $-4x + 5y = -17$
$-4x - 2y = 15$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وفيما يلي تلخيص للعلاقة بين التمثيل البياني وحلول النظام.

ملخص المفهوم خصائص الأنظمة الخطية

متوافق ومستقل	متوافق وغير مستقل	غير متوافق
		
مستقيمان متقاطعان؛ حل واحد	نفس المستقيم؛ عدد لا نهائي من الحلول	مستقيمان متوازيان؛ لا يوجد حل

2 حل الأنظمة جبريًا

تستخدم الطرق الجبرية لإيجاد حلول دقيقة لأنظمة المعادلات. وإحدى الطرق الجبرية تُدعى **طريقة التعويض**.

المفهوم الأساسي طريقة التعويض

الخطوة 1 حل معادلة واحدة لأحد المتغيرين.

الخطوة 2 عوّض بالتعبير الناتج في المعادلة الأخرى لاستبدال المتغير. ثم جد حل المعادلة.

الخطوة 3 عوّض لإيجاد الحل للمتغير الآخر.

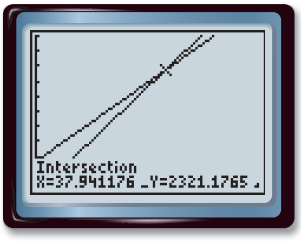
يمكن استخدام أنظمة المعادلات لحل العديد من المسائل من الحياة اليومية التي تتضمن قيودًا ويتم تمثيلها باستخدام دالتين مختلفتين أو أكثر.

مثال من الحياة اليومية 4 استخدام طريقة التعويض

الأعمال **لدى أحمد شركة لدعم أجهزة الكمبيوتر. وهو يقدر أن تكلفة تشغيل أعمال شركته يمكن أن تمثلها المعادلة $y = 48x + 500$، حيث x هي عدد العملاء. وهو يقدّر أيضًا أن دخله يمكن أن تمثله المعادلة $y = 65x - 145$. فكم عدد العملاء الذين سيحتاج إليهم أحمد من أجل الوصول لنقطة التعادل؟ وما أرباحه إذا كان لديه 60 عميلًا؟**

$y = 65x - 145$	معادلة الدخل
$48x + 500 = 65x - 145$	عوّض عن $48x + 500$ بـ y.
$500 = 17x - 145$	اطرح $48x$ من كل طرف.
$645 = 17x$	اجمع 145 على كل طرف.
$37.9 \approx x$	اقسم كل طرف على 17.

يحتاج أحمد إلى 38 عميلًا ليصل لنقطة التعادل. وإذا كان لديه 60 عميلًا. فسيبلغ دخله $65(60) - 145$ أو AED 3755.
وستبلغ التكلفة الواقعة عليه $48(60) + 500$ أو AED 3380.
لذا فسيبلغ ربحه $3755 - 3380$ أو AED 375.



[0, 65] scl: 5 by [0, 3000] scl: 300

التحقق يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني للتحقق من هذا الحل. وتقع نقطة التعادل بالقرب من (37.9, 2321.2).
استخدم دالة **CALC** لإيجاد التكلفة والدخل لـ 60 عميلًا.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

تمرين موجّه

استخدم التعويض لحل كل نظام من أنظمة المعادلات.

4A. $5x - 3y = 23$
$2x + y = 7$

4B. $x - 7y = 11$
$5x + 4y = -23$

4C. $-6x - y = 27$
$3x + 8y = 9$

يمكنك استخدام **طريقة الحذف** لحل أحد الأنظمة عندما يكون لأحد المتغيرين نفس المعامل في كلتا المعادلتين.

المفهوم الأساسي طريقة الحذف

الخطوة 1 اضرب إحدى المعادلتين أو كلتيهما في عدد لينتج معادلتين تحتويان على حدين متعاكسين.

الخطوة 2 اجمع المعادلتين، مما سيحذف متغيرًا واحدًا. ثم جد حل المعادلة.

الخطوة 3 عوّض لإيجاد الحل للمتغير الآخر.

ويمكن حذف المتغيرين عن طريق الجمع أو الطرح.

مثال 5 الحل باستخدام الحذف

استخدم طريقة الحذف لحل نظام المعادلات.

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= -19 \\ 8x + 3y &= -25 \end{aligned}$$

لاحظ أن الحل باستخدام التعويض يتضمن كسورًا.

الخطوة 1 اضرب معادلة واحدة في -1 بحيث تحتوي المعادلة على $3y$ و $-3y$.

$8x + 3y = -25$ ← اضرب في -1. ← $-8x - 3y = 25$

الخطوة 2 اجمع المعادلتين لحذف متغير واحد.

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= -19 && \text{المعادلة 1} \\ (+)\ -8x - 3y &= 25 && \text{المعادلة 2 } \times(-1) \\ -3x &= 6 && \text{اجمع المعادلتين.} \\ x &= -2 && \text{اقسم كل طرف على } -3. \end{aligned}$$

الخطوة 3 عوّض بـ -2 عن x في أيٍ من المعادلتين الأصليتين.

$$\begin{aligned} 8x + 3y &= -25 && \text{المعادلة 2} \\ 8(-2) + 3y &= -25 && x = -2 \\ -16 + 3y &= -25 && \text{اضرب.} \\ 3y &= -9 && \text{أضف 16 إلى كل طرف.} \\ y &= -3 && \text{اقسم كل طرف على 3.} \end{aligned}$$

الحل هو $(-2, -3)$.

تمارين موجّهة

5A. $4x - 3y = -22$
$2x + 3y = 16$

5B. $6x - 5y = -8$
$4x - 5y = -12$

5C. $2x - 9y = 34$
$-2x + 6y = -28$

في بعض الأحيان، لن يؤدي جمع أو طرح المعادلتين إلى حذف أيٍ من المتغيرين. ويمكنك استخدام الضرب والمضاعف المشترك الأصغر لإيجاد معامل مشترك.

نصيحة دراسية

المثابرة تذكر عندما تجمع أو تطرح إحدى المعادلتين من الأخرى بأن تقوم بجمع أو طرح كل حد، بما في ذلك الثابت الموجود على الطرف الآخر من علامة يساوي.

مراجعة المفردات

المضاعف المشترك الأصغر هو أصغر عدد يمثل مضاعفًا مشتركًا لعددين أو أكثر

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 6 على الاختبار المعياري لا يوجد حل ويوجد عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ نظام المعادلات.

$5x + 3y = 52$

$15x + 9y = 54$

A (3, 1) **B** (8, 4) **C** لا يوجد حل **D** عدد لا نهائي من الحلول

قراءة فقرة الاختبار

يتم إعطاؤك نظام مكون من معادلتين خطيتين ويُطلب منك إيجاد الحل.

حُلّ فقرة الاختبار

لا يوجد معامل لأي من المتغيرين. ومعاملا متغيري y هما 3 و 9 والمضاعف المشترك الأصغر لهما هو 9.
لذا فاضرب كل معادلة في القيمة التي ستجعل معامل y يكون 9.

$5x + 3y = 52$ ← بالضرب في 3. ← $15x + 9y = 156$

$15x + 9y = 54$ ← $\underline{(-)\ 15x + 9y = 54}$

$0 = 102$ ← اطرح المعادلتين.

نظرًا لأن $0 = 102$ غير صحيح، فإن هذا النظام ليس له حل.

الإجابة الصحيحة هي C.

تمرين موجّه

6. حل نظام المعادلات. $2x + 3y = 5$ ، $6x + 9y = 15$

F (−2, 3) **G** (7, 3) **H** لا يوجد حل **J** عدد لا نهائي من الحلول

نصيحة دراسية

جمع المعادلات وطرحها إذا جمعت أو طرحت معادلتين في نظام وكانت النتيجة هي معادلة غير صحيحة على الإطلاق، فإن النظام يكون غير متوافق. وعند جمع أو طرح معادلتين في نظام مع كون النتيجة معادلة صحيحة دائمًا، فإن النظام يكون غير مستقل.

يُلخص ما يلي الطرق المختلفة لحل الأنظمة.

ملخص المفهوم حل أنظمة المعادلات

الطريقة	التوقيت الأمثل للاستخدام
الجدول	لتقدير الحل، بما أن الجدول قد لا يعطي حلًا دقيقًا
التمثيل البياني	لتقدير الحل، بما أن التمثيل البياني لا يعطي حلًا دقيقًا عادة
التعويض	إذا كان أحد المتغيرات في أي من المعادلتين له معامل 1 أو −1
الحذف باستخدام الجمع	إذا كان أحد المتغيرات له معاملات متعاكسة في المعادلتين
الحذف باستخدام الطرح	إذا كان أحد المتغيرات له المعامل نفسه في المعادلتين
الحذف باستخدام الضرب	إن لم يكن أي من المعاملات يساوي 1 أو −1 ولا يمكن حذف أي من المتغيرات ببساطة بجمع المعادلات أو طرحها

الربط بتاريخ الرياضيات

نينا كارلوفنا باري

(1901–1961) اعتبرت عالمة الرياضيات الروسية نينا كارلوفنا باري الرائدة الأولى بالرياضيات في جامعة موسكو الحكومية، الظاهرة أعلاه. وهي تشتهر بكتابيها المدرسيين *Higher Algebra* و *The Theory of Series*.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **حُلّ كل نظام معادلات باستخدام جدول.**

1. $y = 3x - 4$
$y = -2x + 11$

2. $4x - y = 1$
$5x + 2y = 24$

مثال 2 **حُلّ كل من أنظمة المعادلات باستخدام التمثيل البياني.**

3. $y = -3x + 6$
$2y = 10x - 36$

4. $y = -x - 9$
$3y = 5x + 5$

5. $y = 0.5x + 4$
$3y = 4x - 3$

6. $-3y = 4x + 11$
$2x + 3y = -7$

7 $4x + 5y = -41$
$3y - 5x = 5$

8. $8x - y = 50$
$x + 4y = -2$

الصور الرقمية
المتجر على الإنترنت
AED 3 لكل صورة +
AED 20 مصاريف شحن
المتجر المحلي
AED 5 لكل صورة

9. تمثيل النماذج راجع الجدول الظاهر على اليمين.

a. اكتب معادلات تمثّل تكلفة طباعة الصور الرقمية في كل معمل تحميض.

b. تحت أي ظروف قد تصبح تكلفة طباعة الصور الرقمية هي نفسها في كلا المتجرين؟

c. متى يكون من الأفضل استخدام المتجر على الإنترنت ومتى يكون من الأفضل استخدام المتجر المحلي؟

مثال 3 ***مثّل كل نظام معادلات بيانيًا وصفه من حيث كونه متوافقًا ومستقلًا، أو متوافقًا وغير مستقل، أو غير متوافق.***

10. $y + 4x = 12$
$3y = 8 - 12x$

11. $-2x - 3y = 9$
$4x + 6y = -18$

12. $9x - 2y = 11$
$5x + 4y = 13$

مثال 4 **حُلّ كل نظام من أنظمة المعادلات باستخدام التعويض.**

13. $x + 5y = 3$
$3x - 2y = -8$

14. $y = 2x - 10$
$y = -4x + 8$

15 $2a + 8b = -8$
$3a - 5b = 22$

16. $a - 3b = -22$
$4a + 2b = -4$

17. $6x - 7y = 23$
$8x + 4y = 44$

18. $9c - 3d = -33$
$6c + 5d = -8$

المثالان 5–6 **حُلّ كل نظام من أنظمة المعادلات باستخدام الحذف.**

19. $-6w - 8z = -44$
$3w + 6z = 36$

20. $4x - 3y = 29$
$4x + 3y = 35$

21. $3a + 5b = -27$
$4a + 10b = -46$

22. $8a - 3b = -11$
$5a + 2b = -3$

23. $5a + 15b = -24$
$-2a - 6b = 28$

24. $6x - 4y = 30$
$12x + 5y = -18$

25. الاختيار من متعدد ما هو حل النظام الخطي؟

$4x + 3y = 2$
$4x - 2y = 12$

A $(8, -10)$ **B** $(2, -2)$ **C** $(-10, 14)$ **D** لا يوجد حل

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حُلّ كل نظام معادلات باستخدام جدول.**

26. $y = 5x + 3$
$y = x - 9$

27. $3x - 4y = 16$
$-6x + 5y = -29$

28. $2x - 5 = y$
$-3x + 4y = 0$

29. جمع التبرعات لجمع المال للزي الرسمي الجديد، قام مشجعو الفريق ببيع القمصان والقبعات. ويتم عرض تكلفة وسعر بيع كل قطعة. وقد أنفق المشجعون ما مجموعه AED 2000 على القمصان والقبعات. وقد باعوا جميع البضائع، وجنوا AED 3375. فكم عدد القمصان التي قاموا ببيعها؟

السلعة	سعر التكلفة AED	سعر البيع AED
قميص	AED 60	AED 100
قبعة	AED 40	AED 70

مثال 2 **حُلّ كل نظام معادلات بالتمثيل البياني.**

30. $-3x + 2y = -6$
$-5x + 10y = 30$

31. $4x + 3y = -24$
$8x - 2y = -16$

32. $6x - 5y = 17$
$6x + 2y = 31$

33. $-3x - 8y = 12$
$12x + 32y = -48$

34. $y - 3x = -29$
$9x - 6y = 102$

35. $-10x + 4y = 7$
$2x - 5y = 7$

36. تمثيل النماذج تمتلك هداية قسيمة بقيمة AED 10 وقسيمة خصم بنسبة 15% لمتجرها المفضل. والمتجر لديه سياسة تنص على عدم إمكانية استخدام أكثر من قسيمة واحدة لكل عملية شراء. فمتى يكون من الأفضل لهداية استخدام القسيمة بقيمة AED 10، ومتى يكون من الأفضل لها استخدام قسيمة الخصم بنسبة 15%؟

مثال 3 ***مثّل كل نظام معادلات بيانيًا وصِفه من حيث كونه متوافقًا ومستقلًا، أو متوافقًا وغير مستقل، أو غير متوافق.***

37. $y = 3x - 4$
$y = 6x - 8$

38. $y = 2x - 1$
$y = 2x + 6$

39. $2x + 5y = 10$
$-4x - 10y = 20$

40. $x - 6y = 12$
$3x + 18y = 14$

41. $-5x - 6y = 13$
$12y + 10x = -26$

42. $8y - 3x = 15$
$-16y + 6x = -30$

مثال 4 **حُلّ كل نظام من أنظمة المعادلات باستخدام التعويض.**

43. $9y + 3x = 18$
$-3y - x = -6$

44. $5x - 20y = 70$
$6x + 5y = -32$

45. $-4x - 16y = -96$
$7x + 3y = 68$

46. $-4a - 5b = 14$
$9a + 3b = -48$

47. $-9c - 4d = 31$
$6c + 6d = -24$

48. $8f + 3g = 12$
$-32f - 12g = 48$

49. التنس في أحد المتنزهات، هناك 38 شخصًا يلعبون التنس. البعض يلعب مباراة زوجية، والبعض يلعب مباراة فردية. وتجرى 13 مباراة. حيث تتطلب المباراة الزوجية 4 لاعبين، وتتطلب المباراة الفردية اثنين من اللاعبين.

a. اكتب نظامًا من معادلتين يمثّل عدد المباريات الفردية والزوجية التي يجري لعبها.

b. ما عدد المباريات المقامة من كل نوع؟

المثالان 5–6 **حُلّ كل نظام من أنظمة المعادلات باستخدام الحذف.**

50. $8x + y = 27$
$-3x + 4y = 3$

51. $2a - 5b = -20$
$2a + 5b = 20$

52. $6j + 4k = -46$
$2j + 4k = -26$

53. $3x - 8y = 24$
$-12x + 32y = 96$

54. $5a - 2b = -19$
$8a + 5b = -55$

55. $r - 6t = 44$
$9r + 12t = 0$

56. $6d + 5f = -32$
$5d - 9f = 26$

57. $11u = 5v + 35$
$8v = -6u + 62$

58. $-1.2c + 3.4d = 6$
$6c = -30 + 17d$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل كل نظام من أنظمة المعادلات. قرّب إحداثيات التقاطع لأقرب جزء من مئة.

59. $12y = 5x - 15$
$4.2y + 6.1x = 11$

60. $-3.8x + 2.9y = 19$
$6.6x - 5.4y = -23$

61. $5.8x - 6.3y = 18$
$-4.3x + 8.8y = 32$

حُلّ كل نظام من أنظمة المعادلات.

62. $11p + 3q = 6$
$-0.75q - 2.75p = -1.5$

63. $8r - 5t = -60$
$6r + 3t = -18$

64. $10t + 4v = 13$
$-4t - 7v = 11$

65. $6w = 12 - 4x$
$6x = -9w + 18$

66. $\frac{3}{2}y + z = 3$
$-y - \frac{2}{3}z = -2$

67. $\frac{5}{2}a - \frac{3}{4}b = 46$
$-\frac{7}{8}a - 3b = 10$

68. التجديف يمكن لعلياء التجديف بقارب مسافة 1 km عكس التيار (ضد التيار) في 24 دقيقة. وقالت إنه يمكنها التجديف لنفس المسافة في اتجاه التيار في 13 دقيقة. بافتراض أن كلًا من سرعة التجديف وسرعة التيار ثابتة.

a. جد السرعة التي تجدف بها علياء وسرعة التيار.

b. إذا كانت علياء تخطط للقاء أصدقائها على مسافة 3 km عكس التيار بعد ساعة من الآن، فهل ستصل في الوقت المحدد؟ اشرح.

69. تمثيل النماذج يُظهر الجدول التوقيتات الفائزة بالثواني لسباق الـ 100 m في الأولومبياد بين 1964 و 2008.

السنوات منذ 1964, x	المدة الزمنية للفائز بالميدالية الذهبية من الرجال	المدة الزمنية للفائز بالميدالية الذهبية من النساء
0	10.0	11.4
4	9.90	11.0
8	10.14	11.07
12	10.06	11.08
16	10.25	11.06
20	9.99	10.97
24	9.92	10.54
28	9.96	10.82
32	9.84	10.94
36	9.87	10.75
40	9.85	10.93
44	9.69	10.78

a. اكتب المعادلتين اللتين تمثلات المدتين الزمنيتين للفائزين من الرجال والنساء منذ عام 1964. بافتراض أن كلا التوقيتين استمرا في نفس الاتجاه.

b. مثّل كلتا المعادلتين بيانيًا. قدّر متى سيلحق أداء النساء بأداء الرجال. وهل تعتقد أن توقعك منطقي؟ اشرح.

70. وظائف لدى عبد الكريم عرض عمل سيحصل فيه على AED 800 شهريًا بالإضافة إلى عمولة 2% من السعر الإجمالي للسيارات التي يبيعها. وفي وظيفته الحالية، يحصل عبد الكريم على AED 1200 شهريًا بالإضافة إلى عمولة 1.5% من إجمالي مبيعاته. كم يجب أن يبيع شهريًا لجعل العمل الجديد صفقة أفضل؟

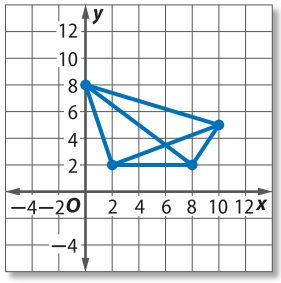
71. السفر انطلق مجموعة من الشباب في رحلة إلى مدينة ملاهي، مسافرين في سيارتين. يعرض الجدول عدد الأشخاص في كل سيارة وإجمالي تكلفة الدخول. جد سعر الدخول للبالغين وللطلاب.

السيارة	البالغون	الطلاب	التكلفة الإجمالية
A	2	5	AED 77
B	2	7	AED 95

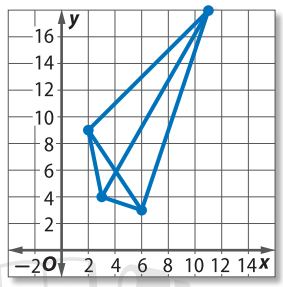
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الهندسة جد النقطة التي يتقاطع عندها أقطار الشكل الرباعي.

72.



73



74. **الانتخابات** في انتخابات مجلس الطلاب، حصل المرشح A على 55% من مجموع الأصوات، في حين حصل المرشح B على 1541 صوتًا. فإذا حصل المرشح C على 40% من الأصوات التي حصل عليها المرشح A، فما عدد إجمالي التصويتات؟

75. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف أنظمة تتضمن ثلاث معادلات خطية ومتغيرين.

$$3y + x = 16$$
$$y - 2x = -4$$
$$y + 5x = 10$$

a. **جدوليًا** قم بعمل جدول بقيم x و y لكل معادلة.

b. **تحليليًا** ما القيم الموجودة في الجدول التي تشير إلى التقاطعات؟ هل هناك حل يحقق جميع المعادلات الثلاثة؟

c. **بيانيًا** مثّل المعادلات الثلاث بيانيًا على مستوى إحداثي واحد.

d. **لفظيًا** ما الشروط التي يجب تحقيقها في نظام مكون من ثلاث معادلات بمتغيرين ليكون له حل؟ ما الشروط التي تؤدي إلى عدم وجود حل؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

76. **التعليق** تقوم غاية وهدى بحل النظام $6x - 4y = 26$ و $-3x + 4y = -17$.
هل أي منهما صحيحًا؟ اشرح الاستنتاج.

غاية

$6(3) - 4y = 26$
$18 - 4y = 26$
$-4y = 8$
$y = -2$

$6x - 4y = 26$
$-3x + 4y = -17$
$3x = 9$
$x = 3$

الحل هو $(3, -2)$.

هدى

$6(-3) - 4y = 26$
$-18 - 4y = 26$
$-4y = 44$
$y = -11$

$6x - 4y = 26$
$-3x + 4y = -17$
$3x = -9$
$x = -3$

الحل هو $(-3, -11)$.

77. **تحدٍّ** جد قيمتي a و b التي يكون للنظام التالي عندها الحل $(b - 1, b - 2)$.

$$-8ax + 4ay = -12a$$
$$2bx - by = 9$$

78. **الاستنتاج** إذا كان a متوافقًا وغير مستقل عن b، و b متوافقًا مع c، و c متوافقًا ومستقلًا عن d، فإن a سيكون *أحيانًا*، أو *دائمًا*، أو *لا يكون مطلقًا* متوافقًا ومستقلًا عن d. اشرح استنتاجك.

79. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب نظام معادلات يلزم فيه ضرب إحدى المعادلتين في 3 ويلزم ضرب الأخرى في 4 من أجل حل النظام عن طريق الحذف. ثم حل النظام الخاص بك.

80. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يعد التعويض في بعض الأحيان أكثر إفادة من الحذف، والعكس صحيح؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

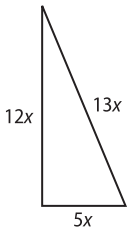
81. إجابة قصيرة بسّط $3y(4x + 6y - 5)$.

82. SAT/ACT أي مما يلي يصف التمثيل البياني للمعادلات بأفضل شكل؟

$$4y = 3x + 8$$
$$-6x = -8y + 24$$

A المستقيمات متوازيان.
B المستقيمان متعامدان.
C للمستقيمين نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x نفسها.
D للمستقيمين نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y نفسها.
E المستقيمات متماثلان.

83. الهندسة أي مجموعة من الأبعاد تتوافق مع مثلث يشبه ذلك الذي يظهر على اليمين؟



F وحدة واحدة، وحدتان، 3 وحدات
G 7 وحدات، 11 وحدة، 12 وحدة
H 10 وحدات، 23 وحدة، 24 وحدة
J 20 وحدة، 48 وحدة، 52 وحدة

84. سيؤجر سعيد شاحنة متحركة بسعر AED 100 بالإضافة إلى AED 0.10 لكل كيلومتر تتم قيادتها فيه. فما هي المعادلة التي يمكن استخدامها لإيجاد C، تكلفة استئجار شاحنة متحركة وقيادتها مسافة m من الكيلومترات؟

A $C = 0.1(100 + m)$
B $C = 100 + 0.1m$
C $C = 100m + 0.1$
D $C = 100(m + 0.1)$

مراجعة شاملة

85. الحِرَف اليدوية تبيع أماني الحيوانات المحنطة في معرض محلي للحرف اليدوية. تبيع الحيوان الصغير مقابل AED 10 والحيوان الكبير مقابل AED 15. ولتغطية نفقاتها، تحتاج لبيع حيوانات تكفي لجني ما لا يقل عن AED 350. (الدرس 7-2)

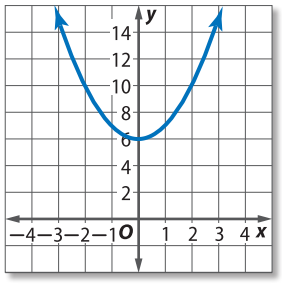
a. اكتب متباينة لهذه الحالة.

b. مثّل المتباينة بيانيًا.

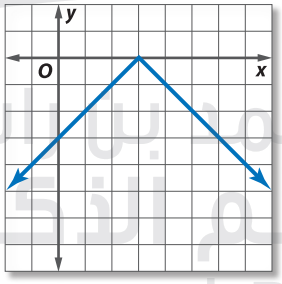
c. إذا باعت 10 حيوانات صغيرة و 15 حيوانًا كبيرًا، فهل ستغطي نفقاتها؟

اكتب معادلة لكل دالة. (الدرس 6-2)

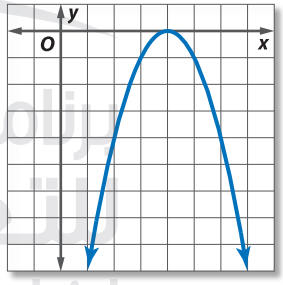
86.



87.



88.



حُلّ كل معادلة مما يلي. وتحقق من حلّك. (الدرس 3-1)

89. $2p = 14$

90. $-14 + n = -6$

91. $7a - 3a + 2a - a = 16$

92. $x + 9x - 6x + 4x = 20$

93. $27 = -9(y + 5) + 6(y + 8)$

94. $-7(p + 7) + 3(p - 4) = -17$

مراجعة المهارات

حدّد إذا ما كانت النقطة المعطاة تحقق كل متباينة.

95. $4x + 5y \leq 15$; (2, −2)

96. $3x + 5y \geq 8$; (1, 1)

97. $6x + 9y < -1$; (0, 0)

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 1-2
حل أنظمة المتباينات بالتمثيل البياني

السابق
- لقد قمت بحل أنظمة المعادلات الخطية بيانيًا وجبريًا.

الحالي
1. حل أنظمة المتباينات بالتمثيل البياني.
2. تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة التي يشكلها التمثيل البياني لنظام متباينات.

لماذا؟
- يتعين تحقيق العديد من الظروف الجوية قبل إطلاق مكوك الفضاء. حيث يجب أن تكون درجة الحرارة أعلى من C -1.12 وأقل من C 37.78 ولا يمكن أن تتجاوز سرعة الرياح 30 عقدة. ويمكن استخدام نظام متباينات لإظهار هذه الظروف الثلاثة.

المفردات الجديدة
نظام المتباينات
system of inequalities

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 أنظمة المتباينات حل **نظام متباينات** يعني إيجاد الأزواج المرتبة التي تحقق جميع المتباينات في النظام.

المفهوم الأساسي حل أنظمة المتباينات

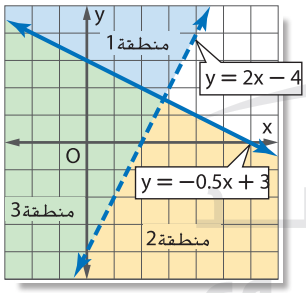
الخطوة 1 مثّل كل متباينة بيانيًا، مع تظليل المنطقة الصحيحة.

الخطوة 2 حدّد المنطقة المظللة لجميع المتباينات. وهذا هو حل النظام.

مثال 1 المناطق المتقاطعة

حُلّ أنظمة المتباينات.

$y > 2x - 4$
$y \leq -0.5x + 3$



حل $y > 2x - 4$ ← هو المنطقتان 1 و 3

حل $y \leq -0.5x + 3$ ← هو المنطقتان 2 و 3

المنطقة 3 هي جزء من الحل لكلا المتباينتين.
لذا فهي حل النظام.

التحقق لاحظ أن نقطة الأصل هي جزء من حل النظام. ويمكن استخدام نقطة الأصل كنقطة اختبار. ويمكنك اختبار الحل بالتعويض بـ (0, 0) لـ x و y في كل معادلة.

$y > 2x - 4$
$0 \stackrel{?}{>} 2(0) - 4$
$0 \stackrel{?}{>} 0 - 4$
$0 > -4$ ✓

$y \leq -0.5x + 3$
$0 \stackrel{?}{\leq} -0.5(0) + 3$
$0 \stackrel{?}{\leq} 0 + 3$
$0 \leq 3$ ✓

تمرين موجّه

1A. $y \leq -2x + 5$
$y > -\frac{1}{4}x - 6$

1B. $y \geq |x|$
$y < \frac{4}{3}x + 5$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

من الممكن ألا تتقاطع المناطق. وعندما يحدث هذا، لا يوجد حل للنظام أو تكون مجموعة الحل مجموعة خالية.

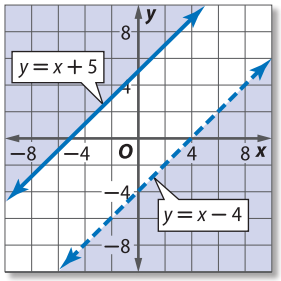
قراءة في الرياضيات

المجموعة الخالية يُطلق على المجموعة الخالية أيضًا اسم *المجموعة الفارغة*. ويمكن أن يتم تمثيلها باستخدام Ø أو { }.

مثال 2 المناطق المنفصلة

حُلّ نظام المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$$y \geq x + 5$$
$$y < x - 4$$



مثل كلتا المتباينتين بيانيًا.

وبما أن التمثيلين البيانيين للمتباينتين لا يتداخلان، فلا توجد نقاط مشتركة ولا يوجد حل للنظام.

مجموعة الحل هي مجموعة خالية.

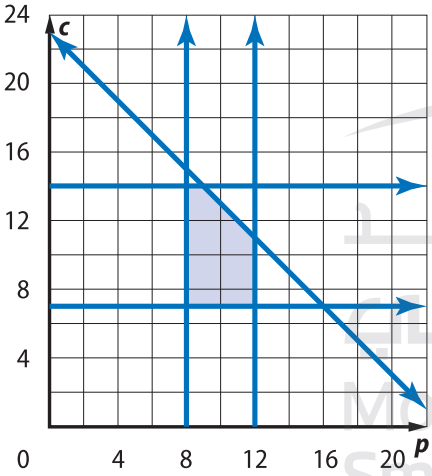
تمرين موجّه

2A. $y \geq -4x + 8$
$y < -4x + 4$

2B. $y \geq |2x|$
$y < 2x - 24$

مثال 3 من الحياة اليومية كتابة نظام متباينات واستخدامه

إدارة الوقت **ستخضع بدرية للامتحانات النهائية في التفاضل والتكامل، والفيزياء، والتاريخ. ولديها ما يصل إلى 25 ساعة للدراسة استعدادًا للامتحانات. وهي تخطط لدراسة التاريخ لمدة ساعتين. وتحتاج إلى قضاء 7 ساعات على الأقل في الدراسة استعدادًا لامتحان حساب التفاضل والتكامل، ولكن أكثر من 14 سيكون أكثر من اللازم. وهي تأمل أن تقضي ما بين 8 و 12 ساعة في دراسة الفيزياء. اكتب نظام متباينات لتمثيل الوضع ومثله بيانيًا.**



حساب التفاضل والتكامل: 7 ساعات على الأقل، ولكن ما لا يزيد عن 14

$$7 \leq c \leq 14$$

الفيزياء: 8 ساعات على الأقل، ولكن ما لا يزيد عن 12

$$8 \leq p \leq 12$$

لدى بدرية 25 ساعة، وستقضي منها ساعتين في دراسة التاريخ. ولديها ما يصل إلى 23 ساعة متبقية لدراسة حساب التفاضل والتكامل والفيزياء.

$$c + p \leq 23$$

مثّل جميع المتباينات بيانيًا. أي زوج مرتّب في التقاطع يعتبر حلًا للنظام. أحد الحلول هو 10 ساعات للفيزياء و 12 ساعة لحساب التفاضل والتكامل.

الربط بالحياة اليومية

سوف يقضي الطلاب الجدد المبتدئون عادةً أكثر من 3 أضعاف عدد ساعات الدراسة في الكلية منها في المدرسة الثانوية.

المصدر: *الاستبيان المحلي حول دراسة الطلاب*

تمرين موجّه

3. السفر ينطلق يوسف ووفاء في رحلة بالسيارة عبر البلاد مع طفليهما. وهما يخططان للقيادة لمدة 10 ساعات كحد أقصى في اليوم. ويريد السيد يوسف أن يقود لمدة 4 ساعات على الأقل في اليوم ولكن ليس أكثر من 8 ساعات في اليوم. ويمكن لوفاء أن تقود ما بين ساعتين و 5 ساعات يوميًا. اكتب نظام متباينات يمثل هذه المعلومات ومثله بيانيًا.

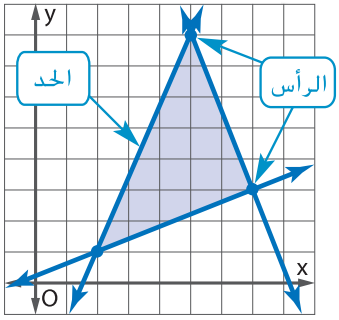
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

الحدود إذا كانت المتباينة التي تشكّل الحد هي $<$ أو $>$، فعندئذٍ لا يكون الحد جزءًا من الحل، وينبغي أن يكون المستقيم متقطعًا.

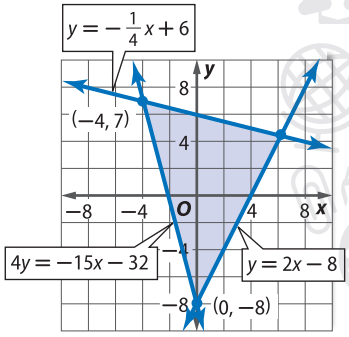
2 إيجاد رؤوس من منطقة مغلقة

أحيانًا ينتج التمثيل البياني لنظام متباينات منطقة مغلقة في شكل مضلع. ولإيجاد رؤوس المنطقة، حدد إحداثيات النقاط التي تتقاطع عندها الحدود.



مثال 4 إيجاد الرؤوس

جد إحداثيات رؤوس المثلث الذي يتكوّن من $y \geq 2x - 8$، و $y \leq -\frac{1}{4}x + 6$، و $4y \geq -15x - 32$.



الخطوة 1 مثّل كل متباينة بيانيًا. يمكن تحديد الإحداثيات $(-4, 7)$ و $(0, -8)$ من التمثيل البياني. لإيجاد إحداثيات الرأس الثالثة، جد حل نظام المعادلات $y = 2x - 8$ و $y = -\frac{1}{4}x + 6$.

الخطوة 2 قم بالتعويض عن y في المعادلة الثانية.

$2x - 8 = -\frac{1}{4}x + 6$ عوّض عن y بـ $2x - 8$.

$2x = -\frac{1}{4}x + 14$ أضف 8 إلى كل طرف.

$\frac{9}{4}x = 14$ أضف $\frac{1}{4}x$ إلى كل طرف.

$x = \frac{56}{9}$ أو $6\frac{2}{9}$ اقسم كل طرف على $\frac{9}{4}$.

الخطوة 3 جد قيمة y.

$y = 2\left(6\frac{2}{9}\right) - 8$ عوّض عن x بـ $6\frac{2}{9}$.

$= 12\frac{4}{9} - 8$ خاصية التوزيع

$= 4\frac{4}{9}$ بسّط.

تحقق قارن الإحداثيات بالإحداثيات الموجودة على التمثيل البياني. يقع الإحداثي x للرأس الثالثة بين 6 و 7. إذًا $6\frac{2}{9}$ منطقية. ويقع الإحداثي y للرأس الثالثة بين 4 و 5. إذًا $4\frac{4}{9}$ منطقية.

تقع رؤوس المثلث عند $(-4, 7)$ و $(0, -8)$ و $\left(6\frac{2}{9}, 4\frac{4}{9}\right)$.

تمرين موجّه

جد إحداثيات رؤوس المثلث الذي تشكل من كل نظام متباينات

4A. $y \geq -3x - 6$
$2y \geq x - 16$
$11y + 7x \leq 12$

4B. $5y \leq 2x + 9$
$y \leq -x + 6$
$9y \geq -2x + 5$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **حُلّ كل نظام من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.**

1. $y \leq 6$
$y > -3 + x$

2. $y \leq -3x + 4$
$y \geq 2x - 1$

3. $y > -2x + 4$
$y \leq -3x - 3$

مثال 3

4. الاستنتاج أقصى ما يمكن لعلياء أن تنفقه على النقانق والشطائر لحفل الشواء الذي تقيمه هو 35 درهمًا. وتتكلف عبوة من 10 نقانق 3.50 دراهم. بينما تتكلف عبوة شطائر 2.50 درهم وتحتوي على 8 شطائر. وهي تحتاج لشراء ما لا يقل عن 40 قطعة نقانق و 40 شطيرة.

a. مثّل المنطقة التي تظهر عدد العبوات التي يمكن شراؤها من كل عنصر بيانيًا.

b. أعطِ مثالًا لثلاثة مشتريات مختلفة يمكنها أن تقوم بها.

مثال 4 **جد إحداثيات رؤوس المثلث الذي تشكل من كل نظام متباينات.**

5. $y \geq 2x + 1$
$y \leq 8$
$4x + 3y \geq 8$

6. $3y \geq -7x - 16$
$7y \leq x + 32$
$y \geq 15x - 40$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **حُلّ كل نظام من أنظمة المتباينات عن طريق التمثيل البياني.**

7. $x < 3$
$y \geq -4$

8. $y > 3x - 5$
$y \leq 4$

9. $y < -3x + 4$
$3y + x > -6$

10. $y \geq 0$
$y < x$

11. $6x - 2y \geq 12$
$3x + 4y > 12$

12. $-8x > -2y - 1$
$-4y \geq 2x - 5$

13. $5y < 2x + 10$
$y - 4x > 8$

14. $3y - 2x \leq -24$
$y \geq \frac{2}{3}x - 1$

15. $y > -\frac{2}{5}x + 2$
$5y \leq -2x - 15$

مثال 3

16. التسجيل يريد كاتب أن ينفق ما لا يزيد عن AED 575 لتسجيل أول كتاب صوتي له. ويتقاضى الاستوديو AED 35 في الساعة على الأقل للتسجيل. مثّل نظام متباينات بيانيًا لتمثيل هذه الحالة.

17. رحلة صيفية يحتاج سالم إلى ادخار ما لا يقل عن AED 925 للذهاب إلى روما مع فصل اللغة اللاتينية خلال 8 أسابيع. وهو يحصل على AED 9 في الساعة من العمل في مطعم البيتزا و AED 12 في الساعة من العمل في غسيل السيارات. ولا يستطيع أن يعمل أكثر من 25 ساعة في الأسبوع. مثّل بيانيًا اثنين من أنظمة المتباينات التي يمكن لمحمود استخدامها لتحديد عدد الساعات التي يحتاج أن يعمل فيها في كل وظيفة إذا كان يريد القيام بهذه الرحلة.

مثال 4 **جد إحداثيات رؤوس المثلث الذي يتكوّن من كل نظام متباينات.**

18. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + 2y < 4$

19. $y \geq 3x - 7$
$y \leq 8$
$x + y > 1$

20. $x \leq 4$
$y > -3x + 12$
$y \leq 9$

21. $-3x + 4y \leq 15$
$2y + 5x > -12$
$10y + 60 \geq 27x$

22. $8y - 19x < 74$
$38y + 26x \leq 119$
$54y - 12x \geq -198$

23. $6y - 24x \geq -168$
$8y + 7x > 10$
$20y - 2x \leq 64$

24. الخبز تريد هيام خبز بسكويت وكعك لمنفذ بيع المخبوزات. ويمكنها خبز 15 قطعة بسكويت في المرة الواحدة و 12 كعكة في المرة الواحدة. وهي تحتاج إلى صنع ما لا يقل عن 120 قطعة من المخبوزات، ولكن ليس أكثر من 360. وهي تريد أن يكون لديها ما لا يقل عن ثلاثة أضعاف عدد قطع البسكويت مقارنةً بالكعك. فما هي توافيق الدفعات التي يمكن لهيام صنعها؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

25. **الهواتف الخلوية** لدى أيوب 800 دقيقة بحدٍ أقصى على خطة هاتفه الخلوي والتي يمكنه استخدامها كل شهر. وتتكلف الدقائق نهارًا 0.15 درهم، بينما تتكلف الدقائق ليلًا 0.10 AED. ويخطط أيوب لاستخدام ما لا يقل عن ضعف عدد الدقائق نهارًا مقارنة بالدقائق ليلًا. فإذا استخدم فهد 200 دقيقة ليلًا على الأقل ولم يتعد الحد الموضوع له، فما أقصى قيمة لفاتورته؟ و أدنى قيمة لفاتورته؟

26. **الأشجار** تنقسم الأشجار إلى أربع فئات وفقًا للارتفاع ومحيط الجذع. ويرد في الجدول وصف بيانات الأشجار الموجودة في إحدى الغابات.

فئة الجزء العلوي	سائد	سائد مشترك	متوسط	قليل
الارتفاع (m)	أكبر من 72	56–72	40–55	أقل من 39
محيط الجذع (cm)	أكبر من 60	48–60	34–48	أقل من 33

المصدر: USDA Forest Service

a. اكتب نظام المتباينات الذي يمثل نطاق الارتفاعات h والمحيطات c لشجرة من نوع سائد مشترك ومثّله بيانيًا.

b. حدد فئة الجزء العلوي لشجرة زيزفون يبلغ ارتفاعها 48 ft. جد محيط الجذع المتوقع.

27. **الاستنتاج** في رحلة تخييم، يحتاج جاسم إلى 3 kg على الأقل من الطعام و 0.5 L من الماء في اليوم. بينما يحتاج مازن ما لا يقل عن 5 kg من الطعام و 0.5 L من الماء في اليوم. وتزن معدات جاسم 10 kg، بينما تزن معدات مازن 20 kg. ويزن لتر الماء حوالي 8 kg. وكلٍ منهما يحمل معداته الخاصة، ويستطيع جمال حمل 35 kg بينما يستطيع مازن حمل 50 kg.

a. مثّل المتباينات التي تمثل مقدار ما يمكنهما حمله بيانيًا.

b. كم عدد الأيام التي يمكنهم التخييم فيها، بافتراض أنهما سيحضران جميع مؤنهما في نفس الوقت؟

c. من الذي ستنفذ مؤنه أولًا؟

حُلّ كل من أنظمة المتباينات عن طريق التمثيل البياني.

28. $y \geq |2x + 4| - 2$
$3y + x \leq 15$

29. $y \geq |6 - x|$
$|y| \leq 4$

30. $|y| \geq x$
$y < 2x$

31. $y > -3x + 1$
$4y \leq x - 8$
$3x - 5y < 20$

32. $6y + 2x \leq 9$
$2y + 18 \geq 5x$
$y > -4x - 9$

33. $|x| > y$
$y \leq 6$
$y \geq -2$

34. $2x + 3y \geq 6$
$y \leq |x - 6|$

35. $8x + 4y < 10$
$y > |2x - 1|$

36. $y \geq |x - 2| + 4$
$y \leq [\![x]\!] - 3$

37. **الموسيقى** يحاول خالد أن يقرر ما يضعه على مشغل MP3 الخاص به. تمتد الكتب الصوتية لمدة 3 ساعات بينما تمتد الأغاني لمدة 2.5 دقيقة. وناصر لا يريد أكثر من 4 كتب صوتية على مشغل MP3 الخاص به، ولكن ما لا يقل عن عشر أغنيات وكتاب صوتي واحد. ويتكلف كل كتاب 15.00 درهمًا بينما تتكلف كل أغنية 0.95 درهم. ويمتلك خالد 63 درهمًا لإنفاقها على الكتب والموسيقى. مثّل المتباينات بيانيًا لإظهار التوافيق الممكنة من الكتب والأغاني التي يمكن لناصر امتلاكها.

38. **وظائف** يعمل أحمد بوظيفتين ولا يمكنه أن يعمل أكثر من 25 ساعة إجمالًا في الأسبوع. ويريد أن يكسب ما لا يقل عن 150 AED في الأسبوع. مثّل المتباينات بيانيًا لإظهار التوافيق الممكنة للساعات التي يتم العمل فيها بكل وظيفة والتي ستساعده على تحقيق هدفه.

العمل	الأجر
نادل	AED 6.50
كاتب	AED 8.00

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

39. إدارة الوقت يستغل منصور وقت فراغه لكتابة رواية وممارسة الرياضة. وقد رصد لذلك 35 ساعة في الأسبوع. ويريد أن يمارس الرياضة ما لا يقل عن 7 ساعات في الأسبوع ولكن بما لا يزيد عن 15 ساعة. ويأمل أيضًا أن يكتب ما بين 20 و 25 ساعة في الأسبوع. اكتب نظام متباينات يمثل هذا الوضع ومثّله بيانيًا.

جد إحداثيات رؤوس الشكل الذي تشكل من كل نظام متباينات.

40. $y \geq 2x - 12$
$y \leq -4x + 20$
$4y - x \leq 8$
$y \geq -3x + 2$

41. $y \geq -x - 8$
$2y \geq 3x - 20$
$4y + x \leq 24$
$y \leq 4x + 22$

42. $2y - x \geq -20$
$y \geq -3x - 6$
$y \leq -2x + 2$
$y \leq 2x + 14$

43. المعرفة المالية يستثمر السيد حميد 10,000 درهم في صندوقين. وسيعطي أحد الصندوقين مرابحة بنسبة 6%. بينما سيعطي الصندوق الثاني الأكثر خطورة مرابحة بنسبة 10%. فما هو أقل مبلغ يمكن أن يستثمره السيد عادل في الصندوق المحفوف بالمخاطر ولا يزال يكسب ما لا يقل عن AED 740 بعد سنة واحدة؟

44. كرة التفادي تختار مدرسة ثانوية فريق كرة تفادي ليلعب في فعالية لجمع التبرعات ضد منافسيهم. ويمكن أن يكون هناك ما بين 10 و 15 لاعبًا في الفريق. ويجب أن يكون هناك عدد أكبر من لاعبي الدفاع من المستخلصين في الفريق.

a. اكتب نظام متباينات لتمثيل الوضع ومثّله بيانيًا.

b. ضع قائمة بجميع التوافيق الممكنة للمستخلصين ولاعبي الدفاع في الفريق.

c. اشرح سبب وجود عدد لا حصر له من الاحتمالات.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. تحدٍّ جد مساحة المنطقة المحددة بالمتباينات التالية.

$y \geq -4x - 16$
$4y \leq 26 - x$
$3y + 6x \leq 30$
$4y - 2x \geq -10$

46. مسألة غير محددة الإجابة اكتب نظامًا من متباينتين يكون فيه الحل:

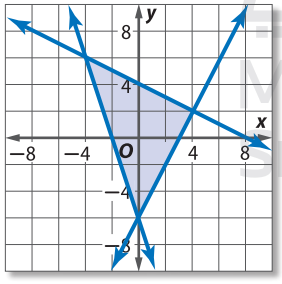
a. يقع فقط في الربع الثالث.

b. غير موجود.

c. يقع فقط على مستقيم.

d. يقع على نقطة واحدة بالضبط.

47. تحدٍّ اكتب نظام متباينات لتمثيل الحل الظاهر على اليمين. كم عدد النقاط ذات الإحداثيات الصحيحة تكون حلولًا للنظام؟



48. فرضيات حدد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فقدم مثالًا مضادًا.

يكون لنظام من متباينتين خطيتين إما عدد لا نهائي من النقاط في حله أو لا يكون له أي نقاط على الإطلاق.

49. الكتابة في الرياضيات اكتب دليلًا يشرح طريقة تحديد أماكن التظليل عند رسم تمثيل بياني لنظام متباينات.

50. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكنك إجراء اختبار لمعرفة إذا ما كانت (6 ,4−) حلًا لنظام متباينات.

برنامج محمد بن راشد للتعلم والذكاء
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

51. لكي يكون الطالب عضوًا في الفرقة الاستعراضية، يجب أن يكون متوسط درجاته في الصف 2.0 على الأقل وأن يكون قد حضر خمسة تمارين بعد الدوام المدرسي. اختر نظام المتباينات الذي يمثّل هذه الحالة بأفضل شكل.

A $x \geq 2$
$y \geq 5$

B $x \leq 2$
$y \leq 5$

C $x < 2$
$y < 5$

D $x > 2$
$y > 5$

52. SAT/ACT يُظهر الجدول الموجود على اليمين العلاقة بين x و y. ما المعادلة التي تمثل هذه العلاقة؟

x	y
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

F $y = 3x - 2$

G $y = 3x + 2$

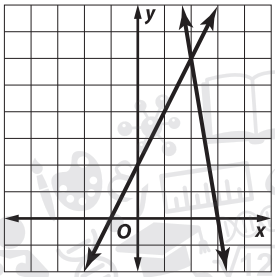
H $y = 4x + 1$

J $y = 4x + 2$

K $y = 4x - 1$

53. إجابة قصيرة إذا كانت $3x = 2y$ و $5y = 6z$، فما هي قيمة x بدلالة z؟

54. الهندسة انظر إلى التمثيل البياني أدناه. أي من هذه العبارات تصف العلاقة بين المستقيمين؟



A يتقاطعان عند (6, 2).

B يتقاطعان عند (0, 2).

C يتقاطعان عند (3.5, 0).

D يتقاطعان عند (2, 6).

مراجعة شاملة

55. الهندسة جد إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع الذي توجد أضلاعه ضمن المستقيمات التي لها المعادلات $y = 3$ و $y = 7$، و $y = 2x$، و $y = 2x - 13$. (الدرس 3-1)

مثل كل متباينة بيانيًّا. (الدرس 7-1)

56. $x + y \geq 6$

57. $4x - 3y < 10$

58. $5x + 7y \geq -20$

مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى. (الدرس 6-1)

59. $g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

60. $h(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq -1 \\ 2x, & x > -1 \end{cases}$

61. $h(x) = \begin{cases} -1, & x < -2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

62. نادي الكتاب لكل اجتماع من نادي كتاب في مدرسة ثانوية، يتم استقطاع AED 25 من حساب الأنشطة لشراء الوجبات الخفيفة والمواد. وبعد اجتماعهم السادس، سيكون هناك مبلغ AED 350 متبقيًا في حساب الأنشطة. (الدرس 4-1)

a. إذا لم تتم إعادة أي أموال إلى الحساب مرة أخرى، فما المعادلة التي يمكن استخدامها لإظهار مقدار الأموال المتبقية في حساب الأنشطة بعد إجراء عدد x من الاجتماعات؟

b. ما مقدار المال الذي كان موجودًا في الأصل في الحساب؟

c. بعد كم عدد من الاجتماعات لن يتبقى أي أموال في حساب الأنشطة؟

مراجعة المهارات

جد كل قيمة إذا كان $f(x) = 2x + 5$ و $g(x) = 3x - 4$.

63. $f(-3)$

64. $g(-2)$

65. $f(-1)$

66. $g(-0.5)$

67. $f(-0.25)$

68. $g(-0.75)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر تقنية التمثيل البياني
أنظمة المتباينات الخطية

يمكنك تمثيل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا بحاسبة التمثيل البياني باستخدام قائمة Y =. ويمكنك اختيار أنماط تمثيل بياني مختلفة لتظليل أعلى أو أسفل مستقيم.

مثال تقاطع تمثيلين بيانيين

مثّل نظام المتباينات في نافذة العرض القياسية.

$y \geq -3x + 4$
$y \leq 2x - 1$

الخطوة 1 أدخِل $-3x + 4$ في صورة Y1. لأن y أكبر من $-3x + 4$. وظلل أعلى المستقيم.

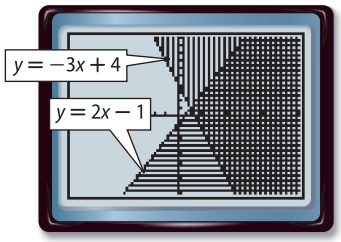
خطوات العملية على الحاسبة: Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ (–) 3 X,T,θ,n + 4 ENTER

الخطوة 2 أدخل $2x - 1$ في صورة Y2. لأن y أقل من $2x - 1$. وظلل أسفل المستقيم.

خطوات العملية على الحاسبة: ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2 X,T,θ,n – 1 ENTER

الخطوة 3 اعرض التمثيلات البيانية في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: ZOOM 6



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

لاحظ نمط التظليل أعلى المستقيم $y = -3x + 4$ ونمط التظليل أسفل المستقيم $y = 2x - 1$. تقاطع التمثيلين البيانيين هو المنطقة التي يتداخل بها النمطان. وتشمل هذه المنطقة جميع النقاط التي تحقق النظام $y \geq -3x + 4$ و $y \leq 2x - 1$.

التمارين

استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل كل نظام متباينات.

1. $y \geq 3$
   $y \leq -x + 1$

2. $y \geq -4x$
   $y \leq -5$

3. $y \geq 2 - x$
   $y \leq x + 3$

4. $y \geq 2x + 1$
   $y \leq -x - 1$

5. $2y \geq 3x - 1$
   $3y \leq -x + 7$

6. $y + 5x \geq 12$
   $y - 3 \leq 10$

7. $5y + 3x \geq 11$
   $3y - x \leq -8$

8. $10y - 7x \geq -19$
   $7y - 5x \leq 11$

9. $\frac{1}{6}y - x \geq -3$
   $\frac{1}{5}y + x \leq 7$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 3-1 إيجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية

السابق
- قمت بحل أنظمة المتباينات الخطية بالتمثيل البياني.

الحالي
1. إيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة على منطقة.
2. حل مسائل من الحياة اليومية حول إيجاد الحل الأمثل باستخدام البرمجة الخطية.

لماذا؟
- تنتج شركة إلكترونيات مشغلات صوت رقمية وهواتف. تظهر علامة على لوحة إعلانات الشركة.

إذا كان يجب إنتاج ما لا يقل عن 2000 منتج في كل نوبة عمل، فما عددما يجب إنتاجه من كل نوع لتقليل التكاليف؟

تواجه الشركة قيودًا أو معوقات، على الإنتاج بسبب طلب العملاء والشحن وإنتاجية مصنعها. ويمكن استخدام نظام المتباينات لتمثيل هذه القيود.

الحفاظ على التكاليف منخفضة: يمكننا أن نفعل ذلك!

هدفنا: الإنتاج في كل نوبة عمل			
الوحدة	الحد الأدنى	الحد لأقصى	التكلفة لكل وحدة
مشغل صوت	600	1500	AED 55
هاتف	800	1700	AED 95

1 القيمة العظمى والقيمة الصغرى

كثيرًا ما تحدث مواقف في مجال الأعمال تأمل فيها الشركة إما بتحقيق أقصى قدر من الأرباح أو تقليل التكاليف، وهناك الكثير من القيود التي يتعين وضعها في الاعتبار. ويمكن معالجة هذه المسائل في كثير من الأحيان عن طريق استخدام أنظمة المتباينات في البرمجة الخطية.

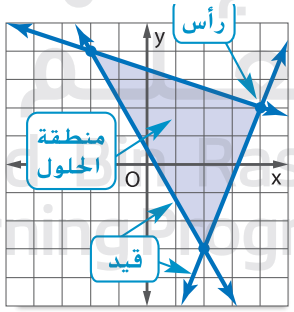
البرمجة الخطية هي طريقة لإيجاد القيم العظمى أو الصغرى لدالة ما على نظام معين من المتباينات حيث تمثل كل متباينة قيدًا. بعد تمثيل النظام بيانيًا والتعويض عن رؤوس مجموعة الحل، والتي تُسمى **منطقة الحلول الممكنة**، في الدالة، يمكنك تحديد القيمة العظمى والصغرى.

المفردات الجديدة

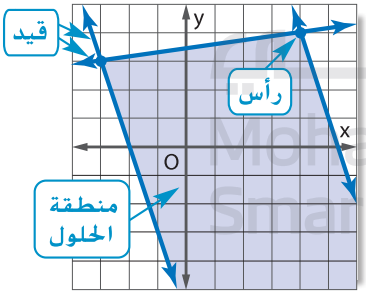
برمجة خطية linear programming
منطقة الحلول الممكنة feasible region
محدود bounded
غير محدودة unbounded
بحث عن الحل الأمثل optimize

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

المفهوم الأساسي مناطق الحلول الممكنة



تكون منطقة الحلول الممكنة محاطة أو **محدودة** بالقيود. *ودائمًا* ما تقع القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ذات الصلة عند إحدى رؤوس منطقة الحلول الممكنة.



تكون منطقة الحلول الممكنة مفتوحة ويمكن أن تستمر إلى الأبد. وهي **غير محدودة**. أما المناطق غير المحدودة فيكون لها إما قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

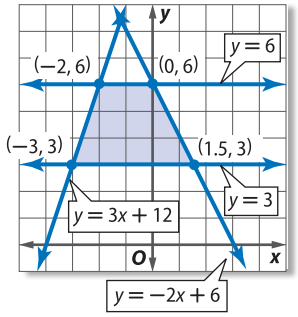
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 المنطقة المحدودة

مثّل نظام المتباينات بيانيًا. وعيّن إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة. وجد القيمة العظمى والصغرى لدالة هذه المنطقة.

$3 \le y \le 6$
$y \le 3x + 12$
$y \le -2x + 6$
$f(x, y) = 4x - 2y$

الخطوة 1 مثّل المتباينات بيانيًا وجد الرؤوس.



الخطوة 2 جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20

← العظمى
← الصغرى

القيمة العظمى هي 0 عند (1.5, 3). والقيمة الصغرى هي -20 عند $(-2, 6)$.

قراءة في الرياضيات

ترميز الدالة يستخدم الترميز $f(x, y)$ لتمثيل دالة ذات متغيرين، x و y. وتقرأ f من x و y.

تمرين موجّه

1A. $-2 \le x \le 6$
$1 \le y \le 5$
$y \le x + 3$
$f(x, y) = -5x + 2y$

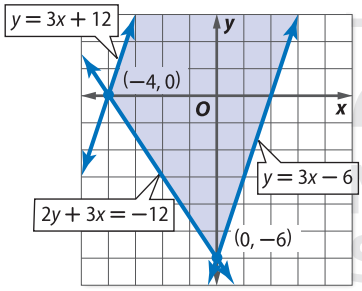
1B. $-6 \le y \le -2$
$y \le -x + 2$
$y \le 2x + 2$
$f(x, y) = 6x + 4y$

وعندما لا يشكل نظام متباينات منطقة مغلقة، فإنه يكون غير محدود.

مثال 2 المنطقة غير المحدودة

مثّل نظام المتباينات بيانيًا. وعيّن إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة. وجد القيمة العظمى والصغرى لدالة هذه المنطقة.

$2y + 3x \ge -12$
$y \le 3x + 12$
$y \ge 3x - 6$
$f(x, y) = 9x - 6y$



جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$9x - 6y$	$f(x, y)$
$(-4, 0)$	$9(-4) - 6(0)$	-36
$(0, -6)$	$9(0) - 6(-6)$	36

القيمة العظمى هي 36 عند $(0, -6)$. ولا توجد قيمة صغرى. لاحظ أن هناك نقطة أخرى في منطقة الحلول الممكنة، $(0, 8)$، تُنتج قيمة تبلغ -48، وهي أقل من -36.

انتبه!

الدقة لا تفترض عدم وجود قيمة عظمى إذا كانت منطقة الحلول الممكنة غير محدودة أعلى الرؤوس. ويلزم استخدام نقاط اختبار لتحديد إذا ما كانت هناك قيمة عظمى أو صغرى.

تمارين موجّهة

2A. $y \le 8$
$y \ge -x + 4$
$y \le -x + 10$
$f(x, y) = -6x + 8y$

2B. $y \ge x - 9$
$y \le -4x + 16$
$y \ge -4x - 4$
$f(x, y) = 10x + 7y$

برنامج محمد بن راشد للذكاء
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 إيجاد الحل الأمثل

أن **تجد الحل الأمثل** يعني أن تسعى للحصول على أفضل سعر أو مبلغ لتقليل التكاليف أو تحقيق أقصى أرباح. وغالبًا ما يتم الحصول على هذا باستخدام البرمجة الخطية.

المفهوم الأساسي إيجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية

الخطوة 1 حدد المتغيرات.

الخطوة 2 اكتب نظام متباينات.

الخطوة 3 مثّل نظام المتباينات بيانيًا.

الخطوة 4 جد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

الخطوة 5 اكتب دالة خطية مطلوب قيمتها العظمى أو الصغرى.

الخطوة 6 عوّض عن إحداثيات الرؤوس في الدالة.

الخطوة 7 اختر أكبر وأقل نتيجة. وأجب عن المسألة.

عند استخدام نظام متباينات لوصف قيود في مسائل من الحياة اليومية، فغالبًا ما ستكون حلول الأعداد الكلية فقط هي المنطقية.

مهنة من الحياة اليومية

مدير العمليات إدارة العمليات هي مجال الأعمال الذي يتعلق بإنتاج السلع والخدمات، وينطوي على مسؤولية ضمان أن العمليات التجارية تتسم بالكفاءة والفعالية. ويفضل امتلاك درجة ماجستير في إدارة الأعمال وخبرة في العمليات.

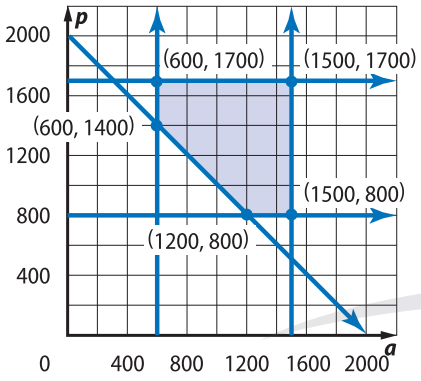
مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية

الأعمال **ارجع إلى التطبيق في بداية الدرس. حدد العدد الذي يلزم صنعه من كل نوع من الأجهزة في كل مناوبة عمل.**

الخطوة 1 افترض أن a = عدد مشغلات الصوت التي تم إنتاجها.
وافترض أن p = عدد الهواتف التي تم إنتاجها.

الخطوة 2
$$600 \le a \le 1500$$
$$800 \le p \le 1700$$
$$a + p \ge 2000$$

الخطوتان 3 و 4 يتم تمثيل النظام بيانيًا على اليمين. لاحظ رؤوس منطقة الحلول الممكنة.



الخطوة 5 الدالة المطلوب قيمتها الصغرى هي $f(a, p) = 55a + 95p$.

الخطوة 6

(a, p)	$55a + 95p$	$f(a, p)$	
(600, 1700)	55(600) + 95(1700)	194,500	
(600, 1400)	55(600) + 95(1400)	166,000	
(1500, 1700)	55(1500) + 95(1700)	244,000	← العظمى
(1500, 800)	55(1500) + 95(800)	158,500	
(1200, 800)	55(1200) + 95(800)	142,000	← الصغرى

الخطوة 6 يلزم إنتاج 1200 مشغل صوت و 800 هاتف لتقليل التكاليف.

نصيحة دراسية

مدى صحة الحل تحقق من مدى صحة الحل عن طريق التفكير في سياق المسألة.

تمرين موجّه

3. **المجوهرات** كل أسبوع، تستطيع موزة صنع 10 إلى 25 قلادة و 15 إلى 40 زوجًا من الأقراط. فإذا كانت تكسب أرباحًا تبلغ 3 دراهم على كل زوج من الأقراط و 5 دراهم على كل قلادة، وتخطط لبيع ما لا يقل عن 30 قطعة من المجوهرات، فكيف يمكن لها تحقيق أقصى أرباح؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **مثّل كل نظام متباينات بيانيًا. وعيّن إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة. وجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة لهذه المنطقة.**

1. $y \le 5$
$x \le 4$
$y \ge -x$
$f(x, y) = 5x - 2y$

2. $y \le -3x + 6$
$-y \le x$
$y \le 3$
$f(x, y) = 8x + 4y$

3. $y \ge -3x + 2$
$9x + 3y \le 24$
$y \ge -4$
$f(x, y) = 2x + 14y$

4. $-2 \le y \le 6$
$3y \le 4x + 26$
$y \le -2x + 2$
$f(x, y) = -3x - 6y$

5. $-3 \le y \le 7$
$4y \ge 4x - 8$
$6y + 3x \le 24$
$f(x, y) = -12x + 9y$

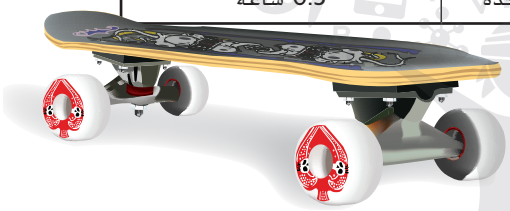
6. $y \le 2x + 6$
$y \ge 2x - 8$
$y \ge -2x - 18$
$f(x, y) = 5x - 4y$

مثال 3

7. الدقة إجمالي عدد ساعات العمال اليومية المتاحة للإنتاج في مصنع لألواح التزلج هو 85 ساعة. هناك 40 ساعة متاحة لزخرفة الأسطح ومراقبة الجودة كل يوم. ويبين الجدول عدد الساعات اللازمة في كل قسم لنوعين مختلفين من ألواح التزلج.

وقت تصنيع ألواح التزلج

نوع اللوح	وقت الإنتاج	زخرفة الأسطح/مراقبة الجودة
ألواح المحترفين	1.5 ساعة	ساعتان
ألواح المتخصصين	ساعة واحدة	0.5 ساعة



a. اكتب نظام متباينات لتمثيل الموقف.

b. ارسم التمثيل البياني الذي يُظهر منطقة الحلول الممكنة.

c. ضع قائمة بإحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

d. إذا كان الربح للوح المحترفين هو 50 درهمًا والربح على للوح المتخصصين هو 65 درهمًا. فاكتب دالة لإجمالي الربح على ألواح التزلج.

e. حدد عدد كل نوع من أنواع ألواح التزلج التي يجب أن تُصنع لتحقيق أقصى قدر من الأرباح. ما أقصى ربح؟

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **مثّل كل نظام متباينات بيانيًا. وعيّن إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة. وجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة لهذه المنطقة.**

8. $1 \le y \le 4$
$4y - 6x \ge -32$
$2y \ge -x + 4$
$f(x, y) = -6x + 3y$

9. $2 \ge x \ge -3$
$y \ge -2x - 6$
$4y \le 2x + 32$
$f(x, y) = -4x - 9y$

10. $-2 \le x \le 4$
$5 \le y \le 8$
$2x + 3y \le 26$
$f(x, y) = 8x - 10y$

11. $-8 \le y \le -2$
$y \le x$
$y \le -3x + 10$
$f(x, y) = 5x + 14y$

12. $x + 4y \ge 2$
$2x + 4y \le 24$
$2 \le x \le 6$
$f(x, y) = 6x + 7y$

13. $3 \le y \le 7$
$2y + x \le 8$
$y - 2x \le 23$
$f(x, y) = -3x + 5y$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المثالان 1 و 2 **مثّل كل نظام متباينات بيانيًا. وعيّن إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة. وجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة لهذه المنطقة.**

14. $-9 \le x \le -3$
$-9 \le y \le -5$
$3y + 12x \le -75$
$f(x, y) = 20x + 8y$

15 $x \ge -8$
$3x + 6y \le 36$
$2y + 12 \ge 3x$
$f(x, y) = 10x - 6y$

16. $y \ge |x - 2|$
$y \le 8$
$8y + 5x \le 49$
$f(x, y) = -5x - 15y$

17. $x \ge -6$
$y + x \le -1$
$2x + 3y \ge -9$
$f(x, y) = -10x - 12y$

18. $-5 \ge y \ge -17$
$y \le 3x + 19$
$y \le -4x + 15$
$f(x, y) = 8x - 3y$

19. $-8 \le x \le 16$
$y \ge 2x - 10$
$2y + x \le 80$
$f(x, y) = 12x + 15y$

20. $y \le x + 4$
$y \ge x - 4$
$y \le -x + 10$
$y \ge -x - 10$
$f(x, y) = -10x + 9y$

21. $-4 \le x \le 8$
$-8 \le y \le 6$
$y \ge x - 6$
$4y + 7x \le 31$
$f(x, y) = 12x + 8y$

22. $y \ge |x + 1| - 2$
$0 \le y \le 6$
$-6 \le x \le 2$
$x + 3y \le 14$
$f(x, y) = 5x + 4y$

مثال 3

23. الطبخ يصنع مخبز نوعين من الكعك: الكعك الأصفر، الذي يبلغ سعره 25 AED، وكعكة الفراولة، الذي يبلغ سعرها 35 AED. وكل من الكعكتين لهما نفس الحجم، ولكن وقت التزيين والتجميع المطلوب للكعكة الصفراء يبلغ ساعتين، في حين يبلغ هذا الوقت 3 ساعات لكعكة الفراولة. وهناك 450 ساعة من العمالة المتاحة للإنتاج. فما العدد الذي يجب أن يصنع من كل نوع من الكعك لتحقيق أقصى قدر من الإيرادات؟

24. الأعمال تقوم مديرة إحدى وكالات السفر بطباعة كتيبات ومنشورات للإعلان عن خصومات خاصة على أماكن لقضاء العطلات خلال أشهر الصيف. وتتكلف طباعة كل كتيب 0.08 AED، وطباعة كل منشور 0.04 AED. ويتطلب كل كتيب 3 صفحات، بينما يتطلب كل منشور صفحتين. والمديرة لا ترغب في استخدام أكثر من 600 صفحة، وهي تحتاج إلى 50 كتيبًا و 150 منشورًا على الأقل. فما العدد الذي ينبغي أن تطبعه من كلٍ منهما لتقليل التكلفة؟

25. الدقة لدى عبيد 20 يومًا لطلاء ما يمكنه من بيوت اللعب والمظلات. ويمكن طلاء هذه المظلات بمعدل 2.5 في اليوم، ويمكن طلاء بيوت اللعب بمعدل 2 في اليوم. ولديه 45 بناء يحتاج إلى طلائها.

a. اكتب نظام متباينات لتمثيل الطرق الممكنة التي يمكن لعبيد من خلالها طلاء الأبنية.

b. ارسم تمثيلًا بيانيًا يبين منطقة الحلول الممكنة وضع قائمة بإحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

c. إذا كان الربح يبلغ 26 AED لكل مظلة و 30 AED لكل بيت، فما العدد الذي ينبغي عليه طلاؤه من كلٍ منهما؟

d. ما أقصى ربح؟

26. السينما يعمل الموظفون في دار سينما محلي في نوبات عمل تبلغ 8 ساعات من الظهر إلى الساعة 8 صباحًا أو من الساعة 4 مساءً حتى منتصف الليل. ويوضح الجدول أدناه عدد الموظفين اللازمين وأجرهم المقابل. جد عدد العاملين بنوبة العمل الصباحية ونوبة العمل المسائية الذين ينبغي جدولتهم لتقليل التكلفة. ما هي أقل تكلفة؟

الوقت	الظهر حتى 4 مساءً	4 مساءً إلى 8 مساءً	8 مساءً إلى منتصف الليل
عدد الموظفين اللازمين	5 على الأقل	14 على الأقل	6
الأجر في الساعة	AED 5.50	AED 7.50	AED 7.50

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

27. الأعمال كل عربة على قطار الشحن يمكن أن تحمل 4200 kg من البضائع، وتبلغ سعتها $480\ m^3$. وتتعامل شركة خدمة الشحن مع نوعين من الطرود: صغيرة – والتي يزن كل منها 25 kg وتبلغ سعته $3\ m^3$، وكبيرة – ويزن كل منها 50 kg وتبلغ سعته $5\ m^3$. وتفرض شركة خدمة الشحن رسمًا يبلغ 5 AED لكل طرد صغير و 8 AED لكل طرد كبير.

a. جد عدد كل نوع من الطرود التي ينبغي وضعها في القطار لتحقيق أقصى قدر من الإيرادات.

b. ما أقصى قدر من الإيرادات لكل عربة قطار؟

c. في هذه الحالة، هل يعتبر تحقيق أقصى قدر من الإيرادات بالضرورة هو أفضل شيء يمكن للشركة القيام به؟ اشرح.

28. إعادة التدوير يقوم مصنع إعادة تدوير بمعالجة البلاستيك المستعمل لحاويات طعام وشراب. ويعالج المصنع ما يصل إلى 1200 طن من البلاستيك في الأسبوع. ويجب معالجة ما لا يقل عن 300 طن لحاويات المواد الغذائية، في حين يجب معالجة 450 طنًا على الأقل لحاويات الشراب. ويبلغ الربح 64 AED للطن لمعالجة حاويات المواد الغذائية و 73 AED للطن لمعالجة حاويات الشراب. فما هو الربح إذا قام المصنع بتحقيق أقصى قدر من المعالجة؟

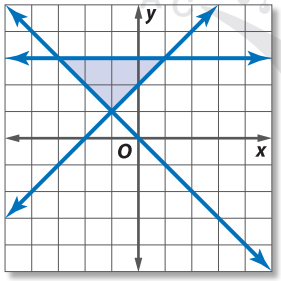
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

29. مسألة غير محددة الإجابة أنشئ مجموعة من المتباينات التي تشكل منطقة محدودة لها مساحة تبلغ 20 وحدة مربعة وتقع فقط في الربع الرابع.

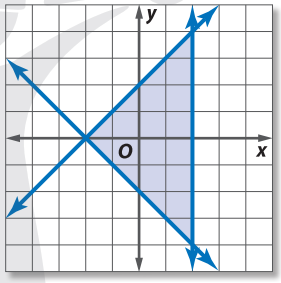
30. تحدٍّ جد مساحة المنطقة المحدودة التي تشكلها القيود التالية: $y \geq |x| - 3$ و $y \leq -|x| + 3$ و $x \geq |y|$.

31. فرضيات حدد نظام المتباينات الذي لا يشبه الأنظمة الثلاثة الأخرى. واشرح استنتاجك.

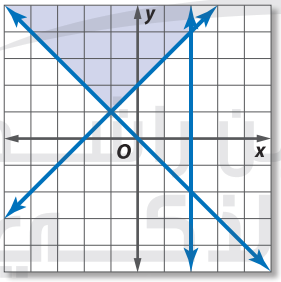
a.



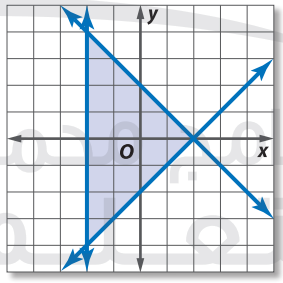
c.



b.



d.



32. الاستنتاج حدد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

لن تحتوي أي منطقة غير محدودة على قيمة عظمى وصغرى على حدٍ سواء.

33. الكتابة في الرياضيات عند تحديد منطقة حلول ممكنة محدودة، لاحظ عبد الله أن الرأسين A(−3, 4) و B(5, 2) لديهما نفس القيمة العظمى حيث $f(x, y) = 16y + 4x$. وأكد عمر أن القيود قد تم تمثيلها بيانيًا بشكل صحيح وأن الرؤوس كانت صحيحة. ثم قال إن هاتين النقطتين لم تكونا هما القيمتين العظمتين الوحيدتين في منطقة الحلول الممكنة. اشرح كيف يمكن لهذا أن يحدث.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

34. عمل حسين 350 ساعة خلال فصل الصيف وجنى AED 2978.50. وقد كان يجني AED 6.85 في الساعة عندما عمل في متجر للفيديو و AED 11 في الساعة كمتدرب في مجال التصميم المعماري. بافتراض أن x تمثل عدد الساعات التي عملها في متجر الفيديو و y تمثل عدد الساعات التي قضتها كمتدرب. أي من المعادلات تمثل هذه الحالة؟

A $x + y = 350$
$11x + 6.85y = 2978.50$

B $x + y = 350$
$6.85x + 11y = 2978.50$

C $x + y = 2978.50$
$6.85x + 11y = 350$

D $x + y = 2978.50$
$11x + 6.85y = 350$

35. إجابة قصيرة ذهبت عائلة مكونة من أربعة أفراد لتناول العشاء. وكانت قيمة فاتورتهم AED 60. وتركوا اكرامية للنادل بلغت 17% من التكلفة الإجمالية لفاتورتهم. فما التكلفة الإجمالية للعشاء شاملة الاكرامية؟

36. SAT / ACT للعبة تلعبها سارة، يجب عليها سحب بطاقة من مجموعة بطاقات لعب مكونة من 26 بطاقة، كل واحدة عليها حرف من حروف الأبجدية، ودحرجة حجر نرد. فما احتمال أن تقوم سارة بسحب حرف موجود باسمها وتوقف حجر النرد على عدد فردي؟

F $\frac{2}{3}$ **J** $\frac{1}{26}$

G $\frac{1}{13}$ **K** $\frac{1}{52}$

H $\frac{3}{52}$

37. الهندسة أي مما يلي يصف التمثيلين البيانيين لـ $y = 3x - 5$ و $4y = 12x + 16$؟

A الخطوط لها نقطة التقاطع نفسها مع المحور y.

B الخطوط لها نقطة التقاطع نفسها مع المحور x.

C الخطوط متعامدة.

D الخطوط متوازية.

مراجعة شاملة

حُلّ كل نظام من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني. (الدرس 2-1)

38. $3x + 2y \geq 6$
$4x - y \geq 2$

39. $4x - 3y < 7$
$2y - x < -6$

40. $3y \leq 2x - 8$
$y \geq \frac{2}{3}x - 1$

41. الأعمال في العام الماضي دفع فريق كرة القدم AED 7 لكل قبعة و AED 15 لكل قميص حيث بلغ إجمالي قيمة الشراء AED 330. وهذا العام أنفق الفريق AED 360 لشراء نفس العدد من القمصان والقبعات لأن القبعات أصبحت تتكلف الآن AED 8 والقمصان أصبحت تتكلف AED 16. اكتب وحل نظام من معادلتين تمثلان عدد القبعات والقمصان التي تم شراؤها كل عام. (الدرس 1-1)

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمستقيم الذي يحقق كل مجموعة من الشروط. (الدرس 4-1)

42. يمر بالنقطتين (1, 5) و (−4, 8)

43. يمر بالنقطتين (−3, 5) و (2, 3)

جد التقاطع مع المحور الأفقي *x* والتقاطع مع المحور الرأسي *y* في التمثيل البياني لكل معادلة. ثم مثّل المعادلة بيانيًا. (الدرس 1-2)

44. $5x + 3y = 15$

45. $2x - 6y = 12$

46. $3x - 4y - 10 = 0$

47. $2x + 5y - 10 = 0$

48. $y = x$

49. $y = 4x - 2$

مراجعة المهارات

جد قيمة كل تعبير إذا علمت أن $y = 3$ و $x = -1$ و $z = 7$.

50. $x + y + z$

51. $2x - y + 2z$

52. $-x + 4y - 3z$

53. $4x + 2y - z$

54. $5x - y + 4z$

55. $-3x - 3y + 3z$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

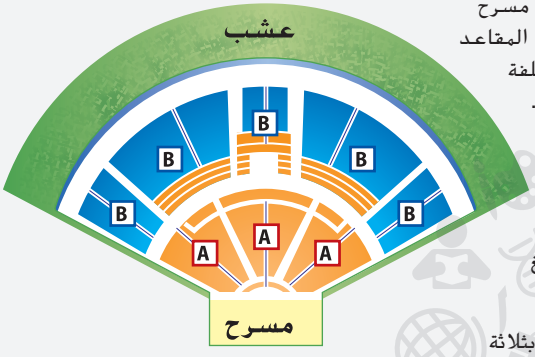
الدرس 1-4 أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات

السابق:
- قمت بإيجاد حل أنظمة المعادلات الخطية بمتغيرين.

الحالي:
1. حل أنظمة المعادلات الخطية بثلاثة متغيرات.
2. حل مسائل من الحياة اليومية باستخدام أنظمة المعادلات الخطية بثلاثة متغيرات.

لماذا؟
- تكلفة المقاعد القريبة من منصة مسرح مدرج دائري AED 30 . وتكلفة المقاعد في القسم التالي AED 25 وتكلفة المقاعد على العشب AED 20. يبلغ عدد المقاعد في القسم B ضعف عدد المقاعد في القسم A. وعندما يتم بيع جميع الـ 19,200 مقعد يحقق المسرح المدرج الدائري ربحًا يبلغ AED 456,000 .

يمكن استخدام نظام المعادلات بثلاثة متغيرات لتحديد عدد المقاعد في كل قسم.



المفردات الجديدة

مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتب) ordered triple

ممارسات في الرياضيات

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

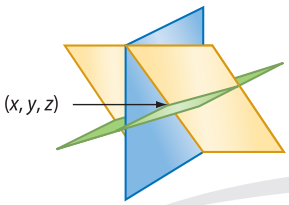
1 الأنظمة بثلاثة متغيرات

مثّل أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات، يمكن أن يكون للأنظمة بثلاثة متغيرات حل واحد أو عدد لا نهائي من الحلول أو لا يكون لها حل. يكون حل مثل هذا النظام عبارة عن **مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتب)** (x, y, z).

التمثيل البياني لمعادلة بثلاثة متغيرات هو تمثيل بياني ثلاثي الأبعاد على مستوى. تشكل التمثيلات البيانية لنظام معادلات بثلاثة متغيرات نظام من المستويات.

حل واحد

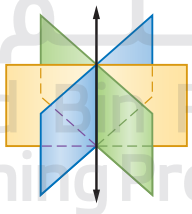
ثلاثة مستويات فردية تتقاطع عند نقطة محددة.



عدد لا نهائي من الحلول

تتقاطع المستويات عند مستقيم.

يمثل كل إحداثي على المستقيم حلًا بالنظام.

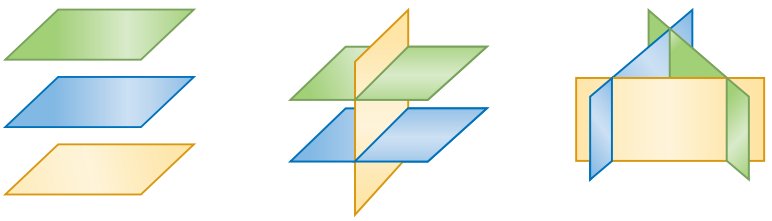


تتقاطع المستويات عند نفس المستوى.

كل معادلة متكافئة.

يمثل كل إحداثي بالمستوى حلًا بالنظام.

لا يوجد حل لا توجد نقاط مشتركة بين المستويات الثلاثة.



برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حل أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات يشابه حل أنظمة المعادلات بمتغيرين. استخدم إستراتيجيات التعويض والحذف لإيجاد المجموعة المرتبة ثلاثية العناصر (الثلاثي المُرتب) التي تمثل حل النظام.

مثال 1 نظام بحل واحد

حُلّ نظام المعادلات.

$$3x - 2y + 4z = 35$$
$$-4x + y - 5z = -36$$
$$5x - 3y + 3z = 31$$

يجعل معامل 1 في المعادلة الثانية y خيارًا جيدًا للحذف.

الخطوة 1 احذف متغيرًا واحدًا عن طريق استخدام زوجين من المعادلات.

$3x - 2y + 4z = 35$
$-4x + y - 5z = -36$ — اضرب في 2.

معادلة 1: $3x - 2y + 4z = 35$
معادلة 2 × 2: $(+)\ -8x + 2y - 10z = -72$
$-5x - 6z = -37$

$-4x + y - 5z = -36$
$5x - 3y + 3z = 31$ — اضرب في 3.

معادلة 2 × 3: $-12x + 3y - 15z = -108$
معادلة 3: $(+)\ 5x - 3y + 3z = 31$
$-7x - 12z = -77$

تم حذف الحدود y في كل معادلة. لدينا الآن نظام من معادلتين ومتغيرين x و z.

الخطوة 2 جد حل نظام المعادلتين.

$-5x - 6z = -37$
$-7x - 12z = -77$ — اضرب في −2.

$10x + 12z = 74$
$(+)\ -7x - 12z = -77$
$3x = -3$ — اختزل z.
$x = -1$ — اقسم على 3.

استخدم التعويض لحل z.

$-5x - 6z = -37$ — معادلة بمتغيرين
$-5(-1) - 6z = -37$ — قم بالتعويض
$5 - 6z = -37$ — اضرب.
$-6z = -42$ — اطرح 5 من كل طرف.
$z = 7$ — اقسم كل طرف على −6.

النتيجة هي $x = -1$ و $z = 7$.

الخطوة 3 قم بالتعويض عن القيمتين في إحدى المعادلات الأصلية لإيجاد y.

$-4x + y - 5z = -36$ — معادلة 1
$-4(-1) + y - 5(7) = -36$ — قم بالتعويض
$4 + y - 35 = -36$ — اضرب.
$y = -5$ — اجمع 31 على كل طرف.

التحقق

$-4x + y - 5z = -36$ — معادلة 2
$-4(-1) + (-5) - 5(7) \stackrel{?}{=} -36$ — $x = -1, y = -5, z = 7$
$4 + (-5) - 35 \stackrel{?}{=} -36$ — بسّط.
$-36 = -36$ ✓

الحل هو $(-1, -5, 7)$.

نصيحة دراسية
التحقق من الحلول قم بالتعويض عن إجابتك دائمًا في جميع المعادلات الأصلية للتأكد من إجابتك.

تمرين موجّه

1A. $2x + 4y - 5z = 18$
$-3x + 5y + 2z = -27$
$-5x + 3y - z = -17$

1B. $4x - 3y + 6z = 18$
$-x + 5y + 4z = 48$
$6x - 2y + 5z = 0$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

عند إيجاد حل نظام من ثلاث معادلات خطية بثلاثة متغيرات، فمن المهم التحقق من إجابتك باستخدام المعادلات الثلاث الأصلية جميعها. يكون هذا ضروريًا لأنه من المحتمل أن يكون أحد الحلول مناسبًا لمعادلتين ولكنه غير مناسب للثالثة.

مثال 2 لا يوجد حل ويوجد عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ كلٍّ من أنظمة المعادلات.

a. $5x + 4y - 5z = -10$
$-4x - 10y - 8z = -16$
$6x + 15y + 12z = 24$

إحذف x في ثاني معادلتين.

$-4x - 10y - 8z = -16$ ← اضرب في 3. ← $-12x - 30y - 24z = -48$

$6x + 15y + 12z = 24$ ← اضرب في 2. ← $(+)\ 12x + 30y + 24z = 48$
$0 = 0$

تكون المعادلة $0 = 0$ صحيحة دائمًا. ويشير هذا إلى أن آخر معادلتين يمثلان نفس المستوى. تحقق مما إذا كان هذا المستوى يتقاطع مع المستوى الأول.

$5x + 4y - 5z = -10$ ← بالضرب في 4. ← $20x + 16y - 20z = -40$

$-4x - 10y - 8z = -16$ ← اضرب في 5. ← $(+)\ -20x - 50y - 40z = -80$
$-34y - 60z = -120$

تتقاطع المستويات في مستقيم. لذا يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

b. $-6a + 9b - 12c = 21$
$-2a + 3b - 4c = 7$
$10a - 15b + 20c = -30$

اختزل x في أول معادلتين.

$-6a + 9b - 12c = 21$
$-2a + 3b - 4c = 7$ ← اضرب في −3. ←
$-6a + 9b - 12c = 21$
$(+)\ 6a - 9b + 12c = -21$
$0 = 0$

تكون المعادلة $0 = 0$ صحيحة دائمًا. ويشير هذا إلى أن أول معادلتين يمثلان نفس المستوى. تحقق مما إذا كان هذا المستوى يتقاطع مع آخر مستوى.

$-2a + 3b - 4c = 7$ ← اضرب في 5. ← $-10a + 15b - 20c = 35$
$10a - 15b + 20c = -30$
$(+)\ 10a - 15b + 20c = -30$
$0 = 5$

لا تكون المعادلة $0 = 5$ صحيحة أبدًا. لذا، لا يوجد حل لهذا النظام.

تمرين موجّه

2A. $-4x - 2y - z = 15$
$12x + 6y + 3z = 45$
$2x + 5y + 7z = -29$

2B. $3x + 5y - 2z = 13$
$-5x - 2y - 4z = 20$
$-14x - 17y + 2z = -19$

نصيحة دراسية

عدد لا نهائي من الحلول ولا يوجد حل عند حل نظام من أكثر من معادلتين، $5 = 0$ لن يكون لها حل دائمًا. بينما $0 = 0$ يمكن ألا يكون لها عدد لا نهائي من الحلول دائمًا.

2 مسائل من الحياة اليومية عند إيجاد حل مسائل تتضمن ثلاثة متغيرات، استخدم خطة الخطوات الأربع لمساعدتك في ترتيب المعلومات. حدد المتغيرات الثلاثة وما تمثله. ثم استخدم المعلومات الموجودة في المسألة لتكوين معادلة باستخدام المتغيرات. بمجرد أن تحصل على ثلاث معادلات ويتم تمثيل المتغيرات الثلاثة جميعها، يمكنك إيجاد حل المسألة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال من الحياة اليومية 3 كتابة نظام المعادلات وإيجاد حله

العروض راجع بداية الدرس. **اكتب نظام معادلات وقم بإيجاد حله لتحديد كم عدد المقاعد في كل قسم من المسرح المدرج الدائري.**

افهم حدد المتغيرات.

$x =$ المقاعد في القسم A
$y =$ المقاعد في القسم B
$z =$ المقاعد على العشب

خطط يوجد 19,200 مقعد.

$$x + y + z = 19{,}200$$

معادلة 1

درهم 456,000 يبلغ إجمالي العائد.

معادلة 2

$$30x + 25y + 20z = 456{,}000$$

يبلغ عدد المقاعد في القسم B ضعف عددها في القسم A.

معادلة 3

$$y = 2x$$

قم بإيجاد الحل قم بإيجاد حل النظام.

الخطوة 1 عوّض عن $y = 2x$ في أول معادلتين.

معادلة 1	$x + y + z = 19{,}200$
$y = 2x$	$x + 2x + z = 19{,}200$
اجمع.	$3x + z = 19{,}200$
معادلة 2	$30x + 25y + 20z = 456{,}000$
$y = 2x$	$30x + 25(2x) + 20z = 456{,}000$
بسّط.	$80x + 20z = 456{,}000$

الخطوة 2 قم بإيجاد حل نظام المعادلتين بمتغيرين.

$$3x + z = 19{,}200 \quad \xrightarrow{\text{اضرب في } -20} \quad -60x - 20z = -384{,}000$$
$$80x + 20z = 456{,}000$$

$$(+)\ 80x + 20z = 456{,}000$$
$$20x = 72{,}000$$
$$x = 3600$$

الخطوة 3 قم بالتعويض لإيجاد z.

المعادلة المتبقية بمتغيرين	$3x + z = 19{,}200$
$x = 3600$	$3(3600) + z = 19{,}200$
اضرب.	$10{,}800 + z = 19{,}200$
بسّط.	$z = 8400$

الخطوة 4 قم بالتعويض لإيجاد y.

معادلة 3	$y = 2x$
$x = 3600$	$y = 2(3600)$ أو 7200

الحل هو (3600, 7200, 8400). يوجد 3600 مقعد في القسم A و 7200 في القسم B و 8400 مقعد على العشب.

التحقق عوض عن القيم في أي معادلة من أول معادلتين.

تمرين موجّه

3. استثمرت غاية مبلغًا قدره AED 50,000 في ثلاثة حسابات. استثمرت في حساب بمرابحة تبلغ 8% ثلاثة أمثال المبلغ المالي المستثمر في حساب بمرابحة تبلغ 10%. وحصل الحساب الثالث على مرابحة تبلغ 12%. إذا حصلت على إجمالي AED 5160 بالمرابحة في عام، فكم ستستثمر في كل حساب؟

مهنة من الحياة اليومية

إدارة الرياضة

تتضمن إدارة الرياضة العمل كمدير للرياضيين. وتتضمن المهام الأخرى التفاوض مع الفرق. عادة ما يحصل المديرون على نسبة مئوية من دخل الرياضي. يلزم الحصول على شهادة بكالريوس عادة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

حُلّ أنظمة المعادلات التالية.

1. $-3a - 4b + 2c = 28$
$a + 3b - 4c = -31$
$2a + 3c = 11$

2. $3y - 5z = -23$
$4x + 2y + 3z = 7$
$-2x - y - z = -3$

3. $3x + 6y - 2z = -6$
$2x + y + 4z = 19$
$-5x - 2y + 8z = 62$

4. $-4r - s + 3t = -9$
$3r + 2s - t = 3$
$r + 3s - 5t = 29$

5. $3x + 5y - z = 12$
$-2x - 3y + 5z = 14$
$4x + 7y + 3z = 38$

6. $2a - 3b + 5c = 58$
$-5a + b - 4c = -51$
$-6a - 8b + c = 22$

مثال 3

7. التنزيل قامت نبيلة بتنزيل بعض المسلسلات التلفزيونية. يستهلك مسلسل هزلي 0.3 جيجا بايت من الذاكرة؛ ومسلسل درامي 0.6 جيجا بايت وبرنامج حواري 0.6 جيجا بايت. قامت بتنزيل 7 برامج بإجمالي 3.6 جيجا بايت. بلغت عدد حلقات المسلسل الدرامي مثلي حلقات المسلسل الهزلي.

a. اكتب نظام معادلات لعدد حلقات كل نوع من المسلسلات.

b. كم عدد حلقات كل مسلسل قامت بتنزيله؟

التمرين وحل المسائل

حُلّ أنظمة المعادلات التالية.

8. $-5x + y - 4z = 60$
$2x + 4y + 3z = -12$
$6x - 3y - 2z = -52$

9. $4a + 5b - 6c = 2$
$-3a - 2b + 7c = -15$
$-a + 4b + 2c = -13$

10. $-2x + 5y + 3z = -25$
$-4x - 3y - 8z = -39$
$6x + 8y - 5z = 14$

11. $4r + 6s - t = -18$
$3r + 2s - 4t = -24$
$-5r + 3s + 2t = 15$

12. $-2x + 15y + z = 44$
$4x + 3y + 3z = 18$
$-3x + 6y - z = 8$

13. $4x + 2y + 6z = 13$
$-12x + 3y - 5z = 8$
$-4x + 7y + 7z = 34$

14. $8x + 3y + 6z = 43$
$-3x + 5y + 2z = 32$
$5x - 2y + 5z = 24$

15. $-6x - 5y + 4z = 53$
$5x + 3y + 2z = -11$
$8x - 6y + 5z = 4$

16. $-9a + 3b - 2c = 61$
$8a + 7b + 5c = -138$
$5a - 5b + 8c = -45$

17. $2x - y + z = 1$
$x + 2y - 4z = 3$
$4x + 3y - 7z = -8$

18. $x + 2y = 12$
$3y - 4z = 25$
$x + 6y + z = 20$

19. $r - 3s + t = 4$
$3r - 6s + 9t = 5$
$4r - 9s + 10t = 9$

مثال 3

20. الاستنتاج المنطقي يرسل إليك صديق رسالة بريد إلكتروني بها نتائج لقاء سباحة. تنص رسالة البريد الإلكتروني على أن 24 فردًا أحرزوا مراكز. حاصلين على إجمالي 53 نقطة. حصل المركز الأول 3 نقاط والمركز الثاني نقطتين والمركز الثالث نقطة واحدة. كان عدد محرزي المركز الأول يساوي عدد محرزي المركز الثاني والثالث مجتمعين.

a. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات يمثل عدد الأشخاص أحرزوا كل مركز.

b. كم عدد السباحين في المركز الأول والثاني والثالث؟

c. افترض أن رسالة البريد الإلكتروني نصت على أن الرياضيين حصلوا على إجمالي 47 نقطة مجتمعين. اشرح سبب كون هذه العبارة خاطئة والحل غير منطقي.

21. مدن الملاهي ذهب عيسى إلى مدينة ملاهٍ لركوب الأفعوانية والسيارات المتصادمة والزحاليق المائية. بلغ وقت انتظار الأفعوانية ساعة وحدة ووقت انتظار السيارات المتصادمة 20 دقيقة ووقت انتظار الزحاليق المائية 15 دقيقة فقط. ركب عيسى 10 مرات بشكل إجمالي أثناء زيارته. لأنه يستمتع بالأفعوانية بأكبر قدر. فإن عدد مرات ركوبه للأفعوانية يساوي مجموع مرات ركوبه للعبتين الأخريين. إذا انتظر عماد في الصف لإجمالي 6 ساعات و 20 دقيقة. فكم عدد مرات ركوبه لكل لعبة؟

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

22. الأعمال التجارية يحصل راشد على أحد خيارات الصيانة الروتينية في مرآب عمرو. ومع ذلك أحتاج اليوم إلى توافيق مختلفة من الأعمال غير المدرجة.

a. افترض أن سعر الخيار يساوي سعر شراء كل غرض على حدة. جد أسعار تغيير الزيت وتنظيف المبرد بالماء المتدفق واستبدال دواسة الفرامل.

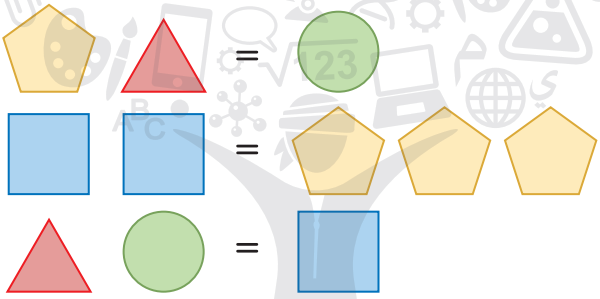
b. إذا كان راشد يرغب في استبدال لبادة المكابح الخاصة به وتنظيف مبرده بالماء المتدفق، فكم ينبغي أن يخطط ليدفع مقابل هذا؟

23 المعرفة المالية استثمرت هدى AED 100,000 في ثلاثة حسابات مختلفة. إذا استثمرت AED 30,000 أكثر في الحساب A عن الحساب C ويتوقع أن تحصل على مرابحة AED 6300، فكم استثمرت في كل حساب؟

الحساب	المرابحة المتوقعة
A	4%
B	8%
C	10%

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

24. الاستنتاج اكتب نظام معادلات لتمثيل صفوف الأشكال الثلاثة أدناه. استخدم النظام لإيجاد عدد المثلثات الحمراء التي ستوازن دائرة واحدة خضراء.



25. تحدٍ الصيغة العامة لمعادلة لقطع مكافئ هي $y = ax^2 + bx + c$.
حيث (x, y) هي نقطة على القطع المكافئ. إذا كانت ثلاث نقاط على القطع المكافئ هي $(2, -10)$ و $(5, -101)$ و $(6, -90)$، فحدد قيم a و b و c واكتب الصيغة العامة للمعادلة.

26. البرهان فكر في النظام التالي وبرهن على أنه إذا كان $b = c = -a$، فإن $ty = a$.

$$rx + ty + vz = a$$
$$rx - ty + vz = b$$
$$rx + ty - vz = c$$

27. مسألة غير محددة الإجابة اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية يكون حله $(-6, 2, 5)$. وضح أن المجموعة المرتبة ثلاثية العناصر تحقق المعادلات الثلاث جميعها.

28. الاستنتاج استخدم رسمًا تخطيطيًا لحلول نظام المعادلات بالصفحة 167 للتفكير في نظام متباينات بثلاثة متغيرات. قم بوصف حل مثل ذلك النظام.

29. الكتابة في الرياضيات استخدم معرفتك فيما يتعلق بحل نظام من ثلاث معادلات خطية بثلاثة متغيرات لشرح كيفية إيجاد حل نظام من أربع معادلات بأربعة متغيرات.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

30. حّل نظام المعادلات الموضح أدناه.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -5x + 3y - 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = 11 \end{cases}$$

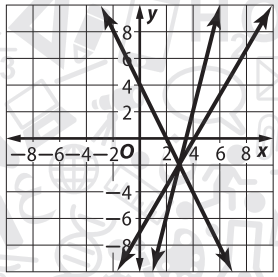
A (0, 3, 3)

B (2, 5, 3)

C لا يوجد حل

D عدد لا نهائي من الحلول

31. SAT/ACT ما نظام المعادلات الذي يوضحه التمثيل البياني؟



A $y + 14 = 4x$
$y = 4 - 2x$
$-7 = y - \frac{5}{3}x$

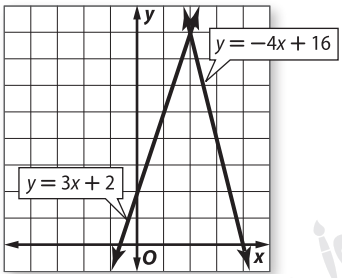
B $y - 14 = 4x$
$y = 4 + 2x$
$-7 = y + \frac{5}{3}x$

C $y + 14x = 4$
$-2y = 4 + y$
$-7 = y - \frac{5}{3}x$

D $y - 14x = 4$
$2x = 4 + y$
$7 = y - \frac{5}{3}x$

E $y - 4x = 14$
$y = 2x + 4$
$7 = y + \frac{5}{3}x$

32. إجابة موسعة استخدم التمثيل البياني لإيجاد حل نظام المعادلات. قم بوصف طريقة واحدة للتحقق من الحل.



33. أي مما يلي يمثل إجراءً صحيحًا لإيجاد حل كل معادلة؟

F $-3(x - 7) = -16$
$-3x - 21 = -16$
$-3x = 5$
$x = -\frac{5}{3}$

H $2(x - 4) = 20$
$2x - 8 = 20$
$2x = 12$
$x = 6$

G $7 - 4x = 3x + 27$
$7 - 7x = 27$
$-7x = -\frac{20}{7}$
$x = 20$

J $6(2x + 1) = 30$
$12x + 6 = 30$
$12x = 24$
$x = 2$

مراجعة شاملة

لدى منطقة ممكنة رؤوس عند (2, −3) و (3, 3) و (1, 6) و (−2, 2). جد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لكل دالة. (الدرس 3–1)

34. $f(x, y) = 2x - y$

35. $f(x, y) = x + 5y$

36. $f(x, y) = y - 4x$

37. $f(x, y) = -x + 3y$

38. نادي تزلج تبلغ ميزانية نادي التزلج في العام 4250 AED. ويُمكن للنادي العثور على ألواح تزلج بسعر 75 AED للزوج وأحذية ذات رقبة طويلة بسعر 40 AED للزوج. ويعلم أنه ينبغي عليه شراء أحذية ذات رقبة طويلة أكثر من ألواح التزلج لأنه يمكن ضبط ألواح التزلج على مقاسات مختلفة من الأحذية ذات الرقبة الطويلة. (الدرس 2–1)

a. اذكر مثالًا على ثلاث عمليات شراء مختلفة يمكن أي يجريها نادي التزلج.

b. افترض أن نادي التزلج يرغب في صرف ميزانية بأكملها. ما توافيق ألواح التزلج والأحذية ذات الرقبة العالية التي ينبغي عليه شراؤها؟

مراجعة المهارات

حُلّ كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

39. $x = y + 5$
$3x + y = 19$

40. $3x - 2y = 1$
$4x + 2y = 20$

41. $5x + 3y = 25$
$4x + 7y = -3$

42. $y = x - 7$
$2x - 8y = 2$

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 1-1 إلى 1-4

حُلّ كل نظام من المعادلات. (الدرس 1-1)

1. $2x - 3y = 9$
   $4x + 3y = 9$

2. $x + 2y = 7$
   $y = 5x - 2$

3. $-x + y = 2$
   $4x - 3y = -3$

4. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7$
   $\frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = -2$

حُلّ كل نظام من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني. (الدرس 1-2)

5. $x + y \leq 4$
   $y \geq x$

6. $2x + 3y > 12$
   $3x - y < 21$

7. $x - y > 0$
   $4 + y \leq 2x$

8. $2y - 5x \leq 6$
   $4x + y < -4$

9. **الاختيار من متعدد** أي العبارات تقدم الوصف الأفضل للتمثيلين البيانيين للمعادلتين؟ (الدرس 1-1)

$x + 4y = 8$
$3x + 12y = 2$

A المستقيمات متوازيات.

B المستقيمات متماثلان.

C المستقيمان يتقاطعان عند نقطة واحدة فقط.

D المستقيمان يتقاطعان عند أكثر من نقطة، ولكنهما ليس متماثلين.

استخدم طريقة الحذف في حل كل نظام من أنظمة المعادلات. (الدرس 1-4)

10. $x - 2y + 3z = 1$
    $4y - 4z = 12$
    $8y - 14z = 0$

11. $x + y + z = 4$
    $x + 3y + 3z = 10$
    $2x + y - z = 3$

12. $2x - y - 2z = 5$
    $10x + 8z = -4$
    $3x - y = 1$

13. $2x + 3y + z = 0$
    $3x + y = 1$
    $x - 2y + z = 9$

14. **الاختيار من متعدد** قامت سهيلة بتأجير طوافة من شركة ما. ودفعت 100 درهم لتأجير الطوافة و 25 درهمًا عن كل ساعة. قام ماجد بتأجير طوافة من شركة أخرى. ودفع 50 درهمًا لتأجير طوافة و 35 درهمًا عن كل ساعة. كم عدد الساعات التي ستتقاضى عنه شركتا الطوافات نفس المبلغ؟ (الدرس 1-1)

F 0

G 4

H 5

J 10

15. **النجارة** تصنع شركة صالح للنجارة طاولات ومقاعد. تتضمن العملية بعض الوقت المخصص للنجارة وبعض الوقت المخصص للصقل. يتم إدراج وقت النجارة ووقت الصقل في الجدول أدناه.

ناتج الضرب	وقت النجارة (ساعة)	وقت الصقل (ساعة)
مقعد	3	0.5
طاولة	2	1

يمكن أن تعمل شركة صالح للنجارة لمدة 108 ساعة للنجارة و 20 ساعة للصقل في اليوم. يبلغ الربح AED 35 عن كل طاولة و AED 25 عن كل مقعد. كم عدد الطاولات والمقاعد التي ينبغي صنعها كل يوم لتحقيق أقصى قدر من الأرباح؟ (الدرس 1-3)

a. باستخدام c لعدد المقاعد و t لعدد الطاولات. اكتب نظام متباينات لتمثيل هذا الموقف

b. قم برسم تمثيل بياني يوضح المنطقة الممكنة.

c. حدد عدد الطاولات والمقاعد اللازم لتحقيق أقصى قدر من الأرباح. ما أقصى قدر للربح؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

16. الدراما في ليلة افتتاح المسرحية الخاصة بنادي الدراما، حققوا أرباحًا تبلغ AED 1366. وباعوا 199 تذكرة بمعدل إجمالي. بلغت الرسوم AED 8.50 عن كل تذكرة للبالغين و AED 5.00 عن كل تذكرة للأطفال. اكتب نظام معادلات يمكن استخدامه لإيجاد عدد تذاكر البالغين وعدد تذاكر الأطفال المبيعة. (الدرس 1-1)

مثّل كل نظام متباينات بيانيًا. وعيّن إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة. وجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة. (الدرس 3-1)

17. $5 \geq y \geq -3$
$4x + y \leq 5$
$-2x + y \leq 5$
$f(x, y) = 4x - 3y$

18. $x \geq -10$
$1 \geq y \geq -6$
$3x + 4y \leq -8$
$2y \geq x - 10$
$f(x, y) = 2x + y$

19. الهندسة لدى شبه منحرف متساوي الساقين قاعدة أقصر يبلغ قياسها a وقاعدة أطول يبلغ قياسها c وساقان متطابقان يبلغ قياسهما b. يبلغ محيط شبه المنحرف 58 cm. ويبلغ متوسط القاعدتين 19 cmوتكون القاعدة الأطول ضعف الساق زائد 7. (الدرس 4-1)

a. جد أطوال أضلاع شبه المنحرف.

b. جد مساحة شبه المنحرف.

برنامج محمد بن راشد الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

الدرس 1-5 المصفوفات

التالي
- حللت نظام معادلات خطية بطرق عدة مختلفة.

الحالي
1. التعرف على المفاهيم الأساسية للمصفوفات.
2. التعرف على خاصية "تساوي مصفوفتين"

لماذا؟
- تُستخدَم المصفوفات في جمع البيانات من الحياة اليومية والتي يمكن أن تتضمن سمات الإنسان أو تعداد الحيوانات أو عادات الناس أو غير ذلك.

المفردات الجديدة

مصفوفة	(matrix)
عنصر	(element)
مدخلة	(entry)
بُعد	(dimension)

ممارسات في الرياضيات

1 مفاهيم "المصفوفات"

المصفوفة هي مجموعة مستطيلة من المتغيرات أو الثوابت في صفوف وأعمدة، عادة ما تكون محاطة بين قوسين. وفي المصفوفة، تكون الأعداد أو البيانات مرتبة بحيث يكون لكل موضع في المصفوفة غرض. ويُطلَق على كل قيمة في المصفوفة اسم **عنصر** أو **مدخلة**. وتُسمَّى المصفوفة عادة باستخدام حرفٍ كبير.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

1 عمود، 2، 3، 4

3 صفوف

4 أعمدة

العنصر 8− موجود بالصف 3، العمود 2، مصور بواسطة a_{32}.

العنصر 1− موجود بالصف 2، العمود 1، مصور بواسطة a_{21}.

يمكن وصف المصفوفة بواسطة **أبعادها**. المصفوفة التي تحتوي على m صفوف و n أعمدة هي مصفوفة $m \times n$ (تقرأ "m في n"). المصفوفة A أعلاه هي مصفوفة 3×4 لأن بها 3 صفوف و 4 أعمدة. a_{12} تشير إلى عنصر خاص بـ A، بينما b_{12} تشير إلى عنصر خاص بـ B.

مصفوفات خاصة

نوع المصفوفات	مثال على كل نوع
مصفوفة الصف	$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$
مصفوفة العمود	$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$
المصفوفة المربعة	$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
المصفوفة الصفرية	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 1 ترتيب البيانات في مصفوفة

كرة القدم استخدم فريق كرة القدم في مدرسة الشارقة الثانوية خمسة من المهاجمين طوال الموسم. أراد المدرب وليد مقارنة إحصائيات كل لاعب.

جمال: 11 مباراة، 72 تمريرة، 4390 متراً، 6 أهداف، 8 أخطاء

إبراهيم: 9 مباريات، 143 تمريرة، 10240 متراً، 7 أهداف، 12 خطأ

كرم: 11 مباراة، 164 تمريرة، 8850 متراً، 5 أهداف، 15 خطأ

سعد: 11 مباراة، 84 تمريرة، 5420 متراً، 6 أهداف، 7 أخطاء

أحمد: 10 مباريات، 151 تمريرة، 9660 متراً، 6 أهداف، 11 خطأ

برنامج محمد بن راشد للتعليم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

a. رتب البيانات في مصفوفة من أكبر عدد تمريرات إلى أقلها.

اللاعب	مباريات	تمريرات	أمتار	أهداف	أخطاء
كريم	11	164	8850	5	15
أحمد	10	151	9660	6	11
إبراهيم	9	143	10240	7	12
سعد	11	84	5420	6	7
جمال	11	72	4390	6	8

b. ما أبعاد المصفوفة؟ وما قيمة a_{32}؟

توجد خمسة صفوف وخمسة أعمدة، لذا تكون الأبعاد 5 × 5. تكون القيمة a_{32}، التي توجد في الصف الثالث والعمود الثاني 7

$$\begin{bmatrix} 15 & 5 & 8850 & 164 & 11 \\ 11 & 6 & 9660 & 151 & 10 \\ 12 & 7 & 10240 & 143 & 9 \\ 7 & 6 & 5420 & 84 & 11 \\ 8 & 6 & 4390 & 72 & 11 \end{bmatrix}$$

تمرين موجّه

ما أبعاد كل من المصفوفات الآتية:

1.a $\begin{bmatrix} 17 & -2 & 8 & -9 & 6 \\ 5 & 11 & 20 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

1.b $\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 10 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2 تساوي المصفوفات

يقال إن مصفوفتين متساويتان إذا وفقط إذا كانت لهما الأبعاد نفسها وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

مثال 2 المصفوفات المتساوية

المصفوفتان A و B متساويتان.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان C و D غير متساويتين لأن أبعادهما مختلفة.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

تمرين موجّه

يمكننا استخدام تساوي المصفوفات لايجاد قيم المتغيرات .

بمعرفة أن المصفوفات التالية متساوية، جد قيمة x, y و z.

$$\begin{bmatrix} x+3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & y \\ z-3 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

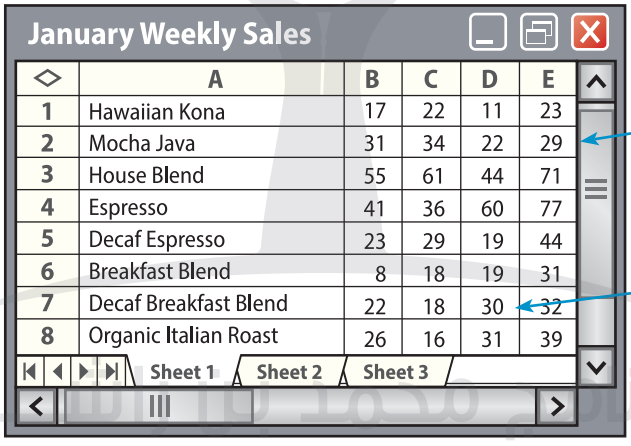
كثيرًا ما يستخدم الأشخاص في القوى العاملة **ورق البيانات** الخاص بجهاز الكمبيوتر لترتيب البيانات وعرضها وتحليلها. بشكل مشابه للمصفوفة، يتم إدخال البيانات في ورقة البيانات داخل صفوف وأعمدة. عندئذ يمكن استخدام البيانات لإنشاء تمثيلات بيانية أو إجراء حسابات.

مثال 3 ترتيب البيانات في مصفوفة

قام مدير متجر أطعمة فاخرة بجمع بيانات حول عدد أرطال كميات القهوة التي قاموا ببيعها كل أسبوع في يناير. أدخل البيانات داخل ورقة بيانات.

المبيعات الأسبوعية لشهر يناير				
القهوة	5/1	12/1	19/1	26/1
كونا هاواي	17	22	11	23
موكا جافا	31	34	22	29
هاوس بلند	55	61	44	71
الإسبرسو	41	36	60	77
الإسبرسو منزوع الكافيين	23	29	19	44
خليط الإفطار	8	18	19	31
خليط الإفطار منزوع الكافيين	22	18	30	32
بن عضوي إيطالي محمص	26	16	31	39

استخدم العمود A لأنواع القهوة والعمود B للمبيعات في الأسبوع الذي يبدأ من 5/1 والعمود C للمبيعات في الأسبوع الذي يبدأ من 12/1 والعمودين D و E للمبيعات في الأسبوعين اللذين يبدآن من 19/1و 26/1.



يحتوي كل **صف** على بيانات لنفس نوع القهوة. يمثل الصف 2 موكا جافا.

تحتوي كل **خلية** بورقة البيانات على قطعة واحدة من البيانات. تحتوي الخلية D7 على القيمة 30، التي تمثل عدد أرطال خليط الإفطار منزوع الكافيين المبيعة في أسبوع 1/19.

التمارين

1. اذكر أبعاد المصفوفة A إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 3 & 4 & 1 \\ 13 & 14 & 1 & 2 \end{bmatrix}$؟

a. 2×3 **b.** 3×2 **c.** 3×4 **d.** 4×3

2. ما هي المدخلة $(2,3)$ في المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 3 & 4 & 1 \\ 13 & 14 & 1 & 2 \end{bmatrix}$؟

a. 3 **b.** 4 **c.** 12 **d.** 14

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حدد أبعاد كل مصفوفة.

3. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -3 & 17 & -22 \\ 9 & 31 & 16 \\ 20 & -15 & 4 \end{bmatrix}$

9. اكتب مثالا لكل نوع من أنواع المصفوفات الآتية

a. مصفوفة الصف

b. مصفوفة العمود

c. المصفوفة مربعة بُعدها 4×4

10. حلل البيانات في المصفوفة

عداؤو المسافات الطويلة	ريفي	مضمار
البنات	17	19
الفتيان	15	22

لخص مدرب المدرسة عدد العدائين لهذا العام في الجدول.

a. رتب البيانات في مصفوفة.

b. اجمع عناصر كل صف وفسر النتائج.

c. اجمع عناصر كل عمود وفسر النتائج .

11. باعت جمعية خيرية تذاكر لحدث لجمع التبرعات لمدة 3 أيام. وتباع التذاكر فرديًا في علب هدايا على النحو الموضح في الجدول أدناه.

اليوم	التذاكر	علبة هدايا
اليوم 1	155	40
اليوم 2	208	96
اليوم 3	321	131

وتُباع التذكرة مقابل AED 3.00 وتباع علبة الهدايا مقابل AED 6.00. استخدم المصفوفة لتحديد إجمالي إيرادات الأيام الثلاثة.

12. جد قيمة a و b و c إذا كانت المصفوفتان التاليتان متساويتين.

$$\begin{bmatrix} a+3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & b \\ c-3 & 5 \end{bmatrix}$$

13. استخدم مصفوفة لتنظيم ومقارنة المعلومات التالية حول بعض قطارات الملاهي.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الواجب المنزلي المساعدة	
في التمارين	انظر الأمثلة
1	7–8
2	9–14
3	15–20

قطار الملاهي	A	B	C
السرعة (mph)	55	50	70
الارتفاع (قدم)	90	108	218
الطول (قدم)	2300	2562	1300

رتب المعلومات في مصفوفة.

14.

المحيط	المساحة (mi^2)	متوسط العمق (ft)
الهادئ	60,060,700	13,215
الأطلنطي	29,637,900	12,880
الهندي	26,469,500	13,002
الجنوبي	7,848,300	16,400
القطبي الشمالي	5,427,000	3,953

15.

أفضل حراس مرمى لعبة الهوكي				
حارس المرمى	ألعاب	الانتصارات	الخسارات	التعادل
خالد	1029	551	315	131
سلطان	971	447	330	172
سيف	837	435	247	146
حميد	886	423	306	152
هاني	906	407	326	163

16. تتسوق جميلة لشراء هاتف ذكي وتكتشف أنه تتوفر العديد من الخيارات المختلفة.

a. رتب البيانات في مصفوفة. قم بإدراج الخيارات في ترتيب تنازلي وقم بتسمية الأعمدة الخيارات والسعر والذاكرة واللون والواجهة على التوالي.

الخيار 1
AED 420
الذاكرة: 512، اللون: 24،
الواجهة: الأشعة تحت الحمراء

الخيار 2
AED 399
الذاكرة: 512، اللون: 24،
الواجهة: البلوتوث

الخيار 3
AED 315
الذاكرة: 256، اللون: 24،
الواجهة: الأشعة تحت الحمراء

الخيار 4
AED 289
الذاكرة: 128، اللون: 18،
الواجهة: الواي فاي

b. ما أبعاد المصفوفة؟ وما قيمة a_{23}؟

برنامج محمد بن راشد الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

17. $[4x \quad 3y] = [12 \quad -1]$

18. $[2x \quad 3 \quad 3z] = [5 \quad 3y \quad 9]$

19. $\begin{bmatrix} 4x \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 + x \\ 2y - 1 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} x + 3y \\ 3x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2x + y \\ x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 4x - 3 & 3y \\ 7 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 7 & 2z + 1 \end{bmatrix}$

23. ACT/SAT تُرتب نتائج اقتراع حديث في المصفوفة.

	مؤيد	معارض
المقترح 1	1553	771
المقترح 2	689	1633
المقترح 3	2088	229

بناءً على هذه النتائج، أي النتائج تكون غير صالحة؟

a. يوجد 771 تصويتًا ضد المقترَح 1.

b. عدد المصوتين ضد المقترَح 1 أكبر من عدد المصوتين للمقترَح 2.

c. فرصة فوز المقترَح 2 ضئيلة.

d. عدد المصوتين للمقترح 1 أكثر من عدد المصوتين للمقترح 3.

24. مراجعة يظهر المخطط تعبيرًا مقيَّمًا لأربع قيم مختلفة لـ x.

يستنتج طالب أنه لجميع قيم x, $x^2 + x + 1$ ينتج عدد أولي. حيث تخدم القيمة x كمثال معاكس لإثبات أن هذا الاستنتاج خاطئ؟

$x^2 + x + 1$	x
3	1
7	2
13	3
31	5

f. -4

g. -3

h. -2

j. 4

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

24. نشاط تتيح لك صيغة SUM إيجاد مجموع جميع المدخلات في عمود أو صف ضمن ورقة بيانات.

a. الصيغة =SUM(B1:B8) توجد مجموعة العمود B. أدخل صيغًا في الخلايا B9 و C9 و D9 و E9 لإيجاد مجاميع تلك الأعمدة. ما الذي تمثله مجاميع الأعمدة في هذا الموقف؟

b. أدخل صيغًا في الخلايا من F1 حتى F8 لإيجاد مجاميع الصفوف من 1 حتى 8. ما الذي تمثله مجاميع الصفوف في الموقف؟

c. جد مجموع الصف 9 ومجموع العمود F. ماذا تلاحظ؟ اشرح.

A. أدخل بيانات الهاتف الذكي من التمرين 1 داخل ورقة بيانات.

B. قارن بين كيفية ترتيب البيانات في ورقة بيانات وفي مصفوفة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-1 العمليات على المصفوفات

السابق:
- قمت بترتيب البيانات داخل المصفوفات

الحالي:
1. تحليل البيانات في المصفوفات.
2. إجراء عمليات جبرية على المصفوفات.

لماذا؟
- لدى شركة مبيعات ساحلية ثلاثة مواقع في فلوريدا. توضح المصفوفات أدناه متوسط الأجور اليومية والمبيعات السنوية لجميع الممثلين.

	دبي		الشارقة		أبو ظبي	
	الأجور	المبيعات	الأجور	المبيعات	الأجور	المبيعات
مبتدئ	900	145,000	900	122,000	1050	109,500
مساعد	2400	225,000	1800	145,500	1800	135,000
شريك	2700	290,000	1800	160,000	1800	150,500

المفردات الجديدة

كمية عددية (scalar)

ضرب الكميات العددية (scalar multiplication)

1 تحليل البيانات

يمكن تحليل البيانات المرتبة في مصفوفة وتفسيرها. في بعض الأحيان، يلزم إجراء المزيد من التحليل وفي أحيان أخرى تكون البيانات ليس لها معنى.

مثال من الحياة اليومية 1 تحليل البيانات بالمصفوفات

الأعمال التجارية **يرغب مدير الموقع في دبي في استخدام مصفوفة لإجراء مزيد من التحليل فيما يخص الممثلين.**

	الأجور	المبيعات
مبتدئ	900	145,000
مساعد	2400	225,000
شريك	2700	290,000

a. اجمع العناصر في كل عمود وفسر النتائج.

يبلغ مجموع أول عمود 6000. هذا هو إجمالي متوسط الأجور اليومية للثلاثة أنواع من الموظفين. يبلغ مجموع ثاني عمود 660,000. هذا هو إجمالي متوسط المبيعات السنوية التي حققها الموظفين.

b. يرغب المدير في تحديد متوسط الأجور لجميع الموظفين في الفرع بموقع دبي. قرر قسمة إجمالي أول عمود على ثلاثة، وهو عدد المناصب المختلفة. فما المتوسط؟

المتوسط هو 3 ÷ 6000 أو 2000.

c. هل هذا متوسط دقيق؟ اشرح.

إذا كان يوجد نفس العدد لكل نوع من الممثلين، فعندئذ يكون المتوسط دقيقًا. وإذا كان يوجد عدد أكثر لنوع واحد من الممثلين عن الآخرين، فعندئذ يكون المتوسط غير دقيق وسيلزم ترجيحه وفقًا لذلك.

d. هل جمع الصفوف يقدم أي بيانات ذات معنى إلى المدير؟

لا. مجموع الصفوف يتضمن شكلين مختلفين من البيانات والأجور والمبيعات.

تمرين موجّه

1. **عدد السكان** يعرض الجدول بيانات التعداد السكاني الأمريكي.

A. رتب البيانات في مصفوفة.

B. اجمع العناصر في الأعمدة وفسر النتائج.

C. اجمع العناصر في الصفوف وفسر النتائج.

D. هل إيجاد متوسط الصفوف أو الأعمدة يقدم أي بيانات ذات معنى؟

عدد السكان اللاتينيين في الولايات المتحدة الأمريكية (بالملايين)

العمر	ذكر	أنثى
0–19	7.1	6.6
20–39	6.8	5.9
40–59	3.2	2.2
60+	1.1	1.4

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 العمليات الجبرية يمكن إجراء بعض العمليات الجبرية على بيانات مرتبة في مصفوفات. يمكن جمع المصفوفات أو طرحها وفقط إذا كانت لها نفس الأبعاد.

المفهوم الأساسي جمع وطرح المصفوفات

الشرح لجمع أو طرح مصفوفتين بنفس الأبعاد، قم بجمع أو طرح عناصرهما المقابلة.

الرموز

$$A + B = A + B$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$A - B = A - B$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

مثال
$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$$

مثال 2 جمع المصفوفات وطرحها

جد كل مما يلي لـ $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$.

a. A + B

$$A + B = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$$ عوّض

$$= \begin{bmatrix} 16+(-4) & 2+(-1) \\ -9+(-3) & 8+(-7) \end{bmatrix}$$ اجمع العناصر المتناظرة.

$$= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$ بسّط.

b. B − C

$$B - C = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$ عوّض

بما أن أبعاد B وC مختلفة، لا يمكنك طرح المصفوفات.

c. B − A

$$B - A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$$ عوّض

$$= \begin{bmatrix} -4-16 & -1-2 \\ -3-(-9) & -7-8 \end{bmatrix}$$ اطرح العناصر المتناظرة.

$$= \begin{bmatrix} -20 & -3 \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$$ بسّط.

نصيحة دراسية
العناصر المقابلة تكون العناصر *مقابلة* إذا كانت في نفس الموضع في كل مصفوفة.

تمرين موجّه

2A. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

2B. $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

2C. $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & 2 \\ 10 & -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك ضرب أي مصفوفة في ثابت يسمى **كمية عددية**. عند قيامك بهذا، فأنت تضرب كل عنصر فردي في قيمة الكمية العددية. ويُطلق على هذه العملية اسم **ضرب الكمية العددية**.

المفهوم الأساسي الضرب في كمية عددية

الشرح لضرب مصفوفة في كمية عددية k، اضرب كل عنصر في k.

$$k \cdot A = kA$$

الرموز
$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال
$$-3\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

قراءة في الرياضيات
الكمية العددية فكر في الكمية العددية كمعامل لمتغير، ولكنه عوضًا عن هذا يكون كذلك لمصفوفة.

مثال 3 ضرب مصفوفة في كمية عددية

إذا كان $R = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$، **فجد** $5R$.

$5R = 5\begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$ عوّض

$= \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix}$ وزع الكمية العددية.

$= \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$ اضرب.

نصيحة دراسية
ضرب الكمية العددية
يتم التعامل مع قوس المصفوفة مثل رمز تجميع عادي. لذا عند ضرب كمية عددية، قم بالتوزيع بنفس الطريقة المتبعة مع رمز التجميع.

تمرين موجّه

3. إذا كان $T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$، فجد $-4T$.

العديد من خصائص الأعداد الحقيقية تكون حقيقية كذلك بالنسبة للمصفوفات. موضح أدناه ملخص لهذه الخصائص.

المفهوم الأساسي خصائص عمليات المصفوفات

بالنسبة لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون مجموع وناتج ضرب المصفوفة معرفين وأي كمية غير عددية k، تكون الخصائص التالية صحيحة.

خاصية التبديل في الجمع $A + B = B + A$

خاصية التجميع في الجمع $(A + B) + C = A + (B + C)$

خاصية توزيع الكمية العددية إلى اليسار $k(A + B) = kA + kB$

خاصية توزيع الكمية العددية إلى اليمين $(A + B)k = kA + kB$

يمكن إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات. يكون ترتيب هذه العمليات هو نفس ترتيبها مع الأعداد الحقيقية.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 العمليات متعددة الخطوات

إذا كان $A = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$، **فجد** $-4B - 3A$.

$$-4B - 3A = -4\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$ عوّض

$$= \begin{bmatrix} -4(-4) & -4(-8) \\ -4(2) & -4(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3(-9) & 3(12) \\ 3(2) & 3(-6) \end{bmatrix}$$ وزع الكمية العددية في كل مصفوفة.

$$= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$$ اضرب.

$$= \begin{bmatrix} 16 - (-27) & 32 - 36 \\ -8 - 6 & 12 - (-18) \end{bmatrix}$$ اطرح العناصر المتناظرة.

$$= \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -14 & 30 \end{bmatrix}$$ بسّط.

تمرين موجّه

4. إذا كان $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$، فجد $-6B + 7A$.

مهنة من الحياة اليومية

المخطط المالي

يستخدم المخططون الماليون المصفوفات لترتيب ووصف البيانات التي يستخدمونها في أغلب الأحيان. يحتاج المخططون الماليون إلى شهادة بكالريوس. عادة ما يكونون حاصلين على شهادات في المحاسبة أو الموارد المالية أو الاقتصاد أو الأعمال التجارية أو التسويق أو التجارة.

يمكن استخدام المصفوفات في العديد من التطبيقات على الأعمال التجارية.

مثال من الحياة اليومية 5 استخدم عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات

الأعمال التجارية **راجع التطبيق في أول الدرس. عبر عن متوسط الأجور والمبيعات للشركة بأكملها على مدار أسبوع من 5 أيام.**

لحساب المبيعات لمدة 5 أيام للشركة بأكملها، يلزم ضرب كل مصفوفة في 5 وجمع النواتج الإجمالية معًا.

$$5\begin{bmatrix} 900 & 145{,}000 \\ 2400 & 225{,}000 \\ 2700 & 290{,}000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 900 & 122{,}000 \\ 1800 & 145{,}500 \\ 1800 & 160{,}000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1050 & 109{,}500 \\ 1800 & 135{,}000 \\ 1800 & 150{,}500 \end{bmatrix}$$ اكتب المصفوفات.

$$= \begin{bmatrix} 4500 & 725{,}000 \\ 12{,}000 & 1{,}125{,}000 \\ 13{,}500 & 1{,}450{,}000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4500 & 610{,}000 \\ 9000 & 727{,}500 \\ 9000 & 800{,}000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5250 & 547{,}500 \\ 9000 & 675{,}000 \\ 9000 & 752{,}500 \end{bmatrix}$$ اضرب الكميات العددية.

$$= \begin{matrix} \\ \text{مبتدئ} \\ \text{مساعد} \\ \text{شريك} \end{matrix} \begin{matrix} \text{الأجور} & \text{المبيعات} \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 14{,}250 & 1{,}882{,}500 \\ 30{,}000 & 2{,}527{,}500 \\ 31{,}500 & 3{,}002{,}500 \end{bmatrix}$$ اجمع المصفوفات.

توضح المصفوفة الأخيرة متوسط المبيعات والأجور الأسبوعية لجميع ممثلي الشركة.

نصيحة دراسية

العناصر المتناظرة عند تمثيل الكميات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل الكميات المتناظرة.

تمرين موجّه

5. استخدم البيانات الموجودة أعلاه لحساب متوسط المبيعات والأجور السنوية للشركة، بافتراض 260 يوم عمل.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1

1. تمثيل النماذج استخدم الجدول الذي يوضح المدينة وعدد أميال الغاز بالطريق السريع لخمسة أنواع مختلفة من السيارات.

السيارة	سيارة رياضية متعددة الأغراض	شاحنة صغيرة	سيارة سيدان	سيارة مدمجة	سيارة لجميع الأغراض
المدينة	23	21	21	42	61
الطريق السريع	25	24	32	49	70

المصدر: Auto Hoppers

a. رتب أميال الغاز في مصفوفة.

b. اجمع عناصر كل صف وفسر النتائج.

c. اجمع عناصر كل عمود وفسر النتائج.

مثال 2

قم بإجراء العمليات الموضحة. إذا كانت المصفوفة غير موجودة، فاكتب *مستحيلة*.

2. $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 3

قم بإجراء العمليات الموضحة. إذا كانت المصفوفة غير موجودة، فاكتب *مستحيلة*.

6. $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

7. $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

مثال 4

استخدم المصفوفات *A* و *B* و *C* و *D* لإيجاد التالي.

$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

8. $4B - 2A$

9. $-8C + 3A$

10. $-5B - 2D$

11. $-4C - 5B$

مثال 5

12. الدرجات خضع سلطان وطارق وعبدالله إلى اختبارين في صف الرياضيات الخاص بهم. يوضح الجدول درجات الاختبار لكل طالب.

الطالب	اختبار 1	اختبار 2
سلطان	85	72
طارق	75	74
عبدالله	96	83

a. اكتب مصفوفة من المعلومات المستقاة من كل اختبار.

b. جد مجموع الدرجات من الاختبارين المعبر عنهما في شكل مصفوفة.

c. عبر عن الفرق في الدرجات من الاختبار 1 إلى الاختبار 2 في شكل مصفوفة.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

13. الأحذية صنفت شركة خدمات المستهلك عدة أزواج من الأحذية من حيث التكلفة ومستوى الراحة والمظهر وطول العمر باستخدام مقياس من 1-5، بحيث يكون 1 منخفض و5 مرتفع.

العلامة التجارية	التكلفة	الراحة	المظهر	طول العمر
A	3	2	2	1
B	4	3	2	3
C	5	5	4	4
D	1	5	5	2

a. اكتب مصفوفة 4 × 4 لترتيب هذه المعلومات.

b. أي حذاء ستشتري وفق هذه المعلومات، ولماذا؟

c. هل إيجاد مجموع الصفوف أو الأعمدة يقدم أي معلومات مفيدة؟ اشرح استنتاجك.

مثال 2

قم بإجراء العمليات الموضحة. إذا كانت المصفوفة غير موجودة، اكتب *مستحيلة*.

14. $\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثالان 3 و 4

16. الأعمال التجارية توضح على اليسار قائمة مشروبات أحد مطاعم الوجبات السريعة. قرر مالك المتجر أنه يجب زيادة جميع الأسعار بنسبة 10%.

المشروب	صغير	متوسط	كبير
المياه الغازية	AED 0.95	AED 1.00	AED 1.05
الشاي المثلج	AED 0.75	AED 0.80	AED 0.85
عصير الليمون	AED 0.75	AED 0.80	AED 0.85
القهوة	AED 1.00	AED 1.10	AED 1.20

a. اكتب المصفوفة C لتمثيل الأسعار الحالية.

b. ما الكمية العددية التي يمكن استخدامها لتحديد مصفوفة N لتمثيل الأسعار الجديدة؟

c. جد N.

d. ما ناتج $C - N$؟ وما الذي يمثله ذلك في هذا الموقف؟

استخدم المصفوفات B وA وC وD لإيجاد التالي.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ -3 & -17 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 1 & -9 & 15 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 0 \\ 4 & 13 & 1 \end{bmatrix}$$

17. $-3B + 2A$

18. $9C - 4D$

19. $2C + 11A$

20. $7A - 2B$

مثال 5

21. تمثيل النماذج تحتوي المكتبة A على 10,000 رواية و5000 سيرة ذاتية و5000 كتاب للأطفال. وتحتوي المكتبة B على 15,000 رواية و10,000 سيرة ذاتية و2500 كتاب للأطفال. وتحتوي المكتبة C على 4000 رواية و700 سيرة ذاتية و800 كتاب للأطفال.

a. عبر عن عدد الكتب بكل مكتبة في شكل مصفوفة. قمت بتسمية المصفوفات A و B و C.

b. جد العدد الإجمالي لكل نوع من الكتب في المكتبات الثلاث. عبر عنه في شكل مصفوفة.

c. كم عدد الكتب من كل نوع التي تحتوي عليها المكتبة A أكثر من المكتبة C؟

d. جد $A + B$. هل للمصفوفة معنى في هذا الموقف؟ اشرح.

قم بإجراء العمليات الموضحة. إذا كانت المصفوفة غير موجودة، اكتب *مستحيلة*.

22. $-2\begin{bmatrix} -9.2 & -8.4 \\ 5.6 & -4.3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 4.1 & -2.9 \\ 7.2 & -8.2 \end{bmatrix}$

23. $-\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

24. $-3\begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix}$

25. $8\begin{bmatrix} -a & 4b & c-b \\ -13 & 10 & -5c \end{bmatrix}$

26. $-4\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 \\ x-6 \\ 12 \end{bmatrix}$

27. $-5\left(\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\right)$

28. الطقس يوضح الجدول معدل سقوط الثلج بالسنتيمتر.

المدينة	معدل سقوط الثلج المعتاد			معدل سقوط الثلج في عام 2007		
	يناير	فبراير	مارس	يناير	فبراير	مارس
جراند رابيدز، ميشيجان	21.1	12.2	9.0	15.4	33.6	13.6
بوسطن، ماساتشوستس	13.3	11.3	8.3	1.0	4.6	10.2
بوفالو، نيويورك	26.1	17.8	12.4	15.5	33.5	5.4
بيتسبرج، بنسيلفانيا	12.3	8.5	7.9	11.3	14.0	9.3

المصدر: National Weather Service

a. عبر عن بيانات معدل سقوط الثلج المعتاد وبيانات عام 2007 في مصفوفتين 3×4.

b. اطرح مصفوفة البيانات المعتادة من مصفوفة بيانات عام 2007؟
ما الذي يمثله الفرق في سياق الموقف؟

c. اشرح معنى الأعداد الموجبة والسالبة في مصفوفة الفرق. ما الاتجاهات التي تلاحظها في البيانات؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29. **تمثيل النماذج** يوضح الجدول بعض من الأرقام القياسية العالمية والأولمبية للاتحاد العربي للسباحة الحرة للرجال.

المسافة (m)	العالمية	الأولمبية	الأمريكية
50	24.13 s	24.13 s	24.63 s
100	53.52 s	53.52 s	53.99 s
200	1:56.54 min	1:57.65 min	1:57.41 min
800	8:16.22 min	8:19.67 min	8:16.22 min

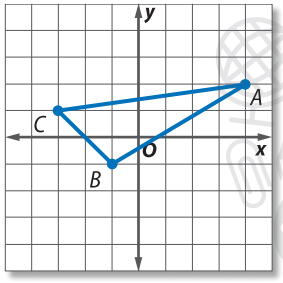
المصدر: USA Swimming

a. جد الفرق بين الرقم القياسي للاتحاد العربي والعالمي معبرًا عنه في شكل مصفوفة.

b. ما الذي يعنيه كل صف في العمود؟

c. في أي أحداث تم تسجيل أسرع الأوقات في الأولمبيات؟

30. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستقوم باستكشاف استخدام المصفوفات لتمثيل التحويلات.



a. **جبريًا** تمثل المصفوفة $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ مثلثًا برؤوس عند $(-3, 8)$ و$(-4, 6)$ و$(1, 0)$. اكتب مصفوفة لتمثيل $\triangle ABC$.

b. **هندسيًا** اضرب المصفوفة التي كتبتها في 2. ثم مثّل بيانيًا الشكل الذي تمثله المصفوفة الجديدة.

c. **تحليليًا** ما وجه المقارنة بين الأشكال؟ خمن نتيجة ضرب المصفوفة في 0.5. أثبت صحة تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **البرهان** برهن على أن جمع المصفوفة يُعد تبديليًا لمصفوفات 2×2.

32. **البرهان** برهن على أن جمع المصفوفة يُعد تجميعيًا لمصفوفات 2×2.

33. **تحدٍ** جد عناصر C إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ و } 3A - 4B + 6C = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}.$$

34. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة في بعض *الأحيان* أو *دائمًا* أو غير صحيحة *أبدًا* للمصفوفتين A و B. اشرح استنتاجك.

a. إذا كانت $A + B$ موجودة، فإن $A - B$ موجودة.

b. إذا كانت k عددًا حقيقيًا، فإن kA و kB موجودتين.

c. إذا كانت $B - A$ غير موجودة، فإن $A - B$ غير موجودة.

d. إذا كان لدى A و B نفس عدد العناصر، فإن $A + B$ موجودة.

e. إذا كانت kA موجودة و kB موجودة، فإن $kA + kB$ موجودة.

35. **مسألة غير محددة** أعط مثالًا على المصفوفتين A و B إذا كانت $4B - 3A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

36. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد $4D - 3C$ للمصفوفتين التي تم إعطاؤهما، C و D بنفس الأبعاد.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

37. ما حل نظام المعادلات؟

$$0.06p + 4q = 0.88$$
$$p - q = -2.25$$

A $(-0.912, -1.338)$
B $(0.912, -3.162)$
C $(-2, 0.25)$
D $(-2, -4.25)$

38. إجابات قصيرة جد $A + B$ إذا كان $A = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

39. SAT/ACT قم بالحل لإيجاد x و y.

$$x + 3y = 16$$
$$7 - x = 12$$

F $x = -5, y = 7$
G $x = 7, y = 3$
H $x = 7, y = 5$
J $x = 5, y = 7$
K $x = -5, y = 3$

40. الاحتمال يقدم مطعم فطائر بيتزا 5 أنواع مختلفة من إضافات اللحوم و6 أنواع مختلفة من إضافات الخضروات. قررت الحصول على نوعين من إضافات الخضروات ونوع واحد من إضافات اللحوم. فكم نوع من أنواع فطائر البيتزا المختلفة يمكنك طلبه؟

A 60
B 75
C 120
D 150

مراجعة شاملة

حُلّ كل نظام من المعادلات. (الدرس 4-1)

41. $2x + 3y - z = -1$
$5x + y + 4z = 30$
$-8x - 2y + 5z = -2$

42. $3x - 4y + 6z = 26$
$5x + 3y + 2z = 5$
$-2x + 5y - 3z = -9$

43. $5x + 2y - 4z = 22$
$6x + 3y + 5z = 5$
$-2x - 4y + z = 2$

44. التعبئة والتغليف يبيع مصنع الحلويات بسكويت شرائح الشوكولاتة وبسكويت زبدة الفول السوداني في عبواتٍ تجمع النوعين وتحتوي على ما بين ست إلى اثنتي عشرة قطعة بسكويت. وينبغي أن تضم العبوة ثلاث قطعٍ من كل نوع من البسكويت على الأقل. فكم قطعة من كل نوعٍ من البسكويت ينبغي أن يكون في كل عبوة لتحقيق أقصى قدر من الربح؟ (الدرس 3-1)

البسكويت	شرائح الشوكولاتة	زبدة الفول السوداني
التكلفة	AED 0.19	AED 0.13
السعر	AED 0.44	AED 0.39

جد حل جميع أنظمة المتباينات عن طريق التمثيل البياني (الدرس 2-1)

45. $x - 2y > -4$
$y < -2x - 3$

46. $y \geq -4x + 6$
$3y < 2x + 9$

47. $4x + 2y > 8$
$4y - 3x \leq 12$

48. كنس أوراق الشجر قد يتقاضى طالب AED 20 زائد AED 5 إضافية لقاء كل كيس قمامة يملأه بأوراق الشجر. اكتب معادلة وقم بإيجاد حلها لتحديد عدد الأكياس التي سيحتاج الطالب لملئها من أجل الحصول على AED 100.

49. الرياضات يوجد 4,279,000 لاعب كرة في الهند أكثر من ألمانيا. اكتب معادلة وحلّها لإيجاد عدد لاعبي كرة القدم في ألمانيا.

الدول التي تضم أكبر عدد من لاعبي كرة القدم في العالم	
الصين	26,166,000
الولايات المتحدة	24,473,000
الهند	20,588,000
ألمانيا	?

مراجعة المهارات

بسّط كل تعبير.

50. $4(2x - 3y) + 2(5x - 6y)$

51. $-3(2a - 5b) - 4(4b + a)$

52. $-7(x - y) + 5(y - x)$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

7-1 ضرب المصفوفات

السابق: قمت بضرب المصفوفات في كمية عددية

الحالي:
1 ضرب المصفوفات.
2 استخدام خصائص ضرب المصفوفة.

لماذا؟

يوضح الجدول ملخص أهداف ليزا ليزلي، متصدرة التهديف في WNBA على الدوام، خلال أكثر مواسم أحرزت أهداف فيها. يمكن تلخيص إجمالي الأهداف التي أحرزتها في مصفوفة الأهداف B. يمكن ترتيب قيم النقاط لكل نوع من الأهداف في مصفوفة قيمة النقاط P.

الأهداف المعتادة التي تحرزها ليزا ليزلي في الموسم			
النوع	2005	2006	2008	2009
هدف ميداني	197	249	184	143
هدف ميداني ثلاثي النقاط	7	8	4	1
رمية حرة	102	158	117	65

المصدر: WNBA

يمكنك استخدام ضرب المصفوفات لإيجاد النقاط المحرزة خلال كل موسم.

الأهداف **قيم نقاط**

$$B = \begin{bmatrix} 197 & 249 & 184 & 143 \\ 7 & 8 & 4 & 1 \\ 102 & 158 & 117 & 65 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1 ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات يمكنك ضرب مصفوفتين A و B و ايجاد AB فقط اذا كان عدد الأعمدة في A مساويًا لعدد الصفوف في B. عند ضرب مصفوفتين $A_{m \times r}$ و $B_{r \times t}$، تكون المصفوفة الناتجة AB مصفوفة $m \times t$.

$$\underset{m \times r}{A} \quad \underset{r \times t}{B} \quad = \quad \underset{m \times t}{AB}$$

متماثلة

أبعاد AB

مثال 1 أبعاد نواتج ضرب المصفوفة

حدد ما إذا كان كل ناتج ضربي لمصفوفة معرّفًا أم لا. إذا كان الأمر كذلك، حدد أبعاد ناتج الضرب.

a. $A_{3 \times 4}$ و $B_{4 \times 2}$

$$A \cdot B = AB$$

$3 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 3 \times 2$

الأبعاد الداخلية متساوية، لذا يكون ناتج الضرب معرّف. وأبعاده هي 3×2.

b. $A_{5 \times 3}$ و $B_{5 \times 4}$

$$A \cdot B$$

$5 \times 3 \quad 5 \times 4$

الأبعاد الداخلية غير متساوية، لذا يكون ناتج ضرب المصفوفة غير معرّف.

تمرين موجّه

1A. $A_{4 \times 6}$ و $B_{6 \times 2}$

1B. $A_{3 \times 2}$ و $B_{3 \times 2}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يتم إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين عن طريق ضرب الأعمدة والصفوف.

المفهوم الأساسي ضرب المصفوفات

الشرح العنصر في الصف ذو الترتيب m والعمود ذو الترتيب r بالمصفوفة AB هو مجموع ناتج ضرب العناصر المتناظرة في الصف m من المصفوفة A والعمود r من المصفوفة B.

الرموز

$$\begin{matrix} A & & B & & AB \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مثال 2 ضرب المصفوفات المربعة

جد XY إذا كان $X = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

$$XY = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الخطوة 1 اضرب الأعداد بالصف الأول من X في الأعداد بالعمود الأول Y، واجمع نواتج الضرب ووضّح النتيجة في الصف الأول، العمود الأول من XY.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6(-5)+(-3)(3)} & \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 اتبع نفس الإجراء كالخطوة 1 باستخدام أعداد الصف الأول والعمود الثاني. اكتب النتيجة في الصف الأول، العمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & \mathbf{6(-4)+(-3)(3)} \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 اتبع نفس الإجراء مع أعداد الصف الثاني والعمود الأول. اكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الأول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ \mathbf{-10(-5)+(-2)(3)} & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4 الإجراء هو نفسه الأعداد في الصف الثاني، العمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ -10(-5)+(-2)(3) & \mathbf{-10(-4)+(-2)(3)} \end{bmatrix}$$

الخطوة 5 بسّط المصفوفة الناتجة عن الضرب.

$$\begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ -10(-5)+(-2)(3) & -10(-4)+(-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

انتبه!

الحفاظ على موقعك من السهل أن تفقد موقعك عند ضربك للمصفوفات. من الممكن أن تساعدك تغطية الصفوف أو الأعمدة التي لا يتم ضربها بينما تقوم بإيجاد عناصر ناتج ضرب المصفوفة.

تمرين موجّه

2. جد UV إذا كان $U = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ و $V = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 من الحياة اليومية ضرب المصفوفات

لقاء سباحة **في لقاء سباحة معين، تم إعطاء 7 نقاط لكل إحراز للمركز الأول و4 نقاط للثاني ونقطتين للثالث. جد إجمالي عدد النقاط لكل مدرسة. أي مدرسة تفوز باللقاء؟**

المدرسة	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
محمد بن راشد	4	7	3
الأمير	8	9	1
الشارقة النموذجية	10	5	3
الراشدية	3	3	6

افهم يمكن إيجاد النتائج النهائية عن طريق ضرب نتائج السباحة لكل مدرسة من خلال النقاط المعطاة لكل إحراز للمركز الأول والثاني والثالث.

خطط اكتب نتائج كل سباق والنقاط المعطاة في شكل مصفوفة. قم بإعداد المصفوفات بحيث يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط مساويًا لعدد الأعمدة في مصفوفة النتائج.

النتائج

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

النقاط

$$P = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل اضرب المصفوفات.

$$RP = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$ اكتب معادلة.

$$= \begin{bmatrix} 4(7) + 7(4) + 3(2) \\ 8(7) + 9(4) + 1(2) \\ 10(7) + 5(4) + 3(2) \\ 3(7) + 3(4) + 6(2) \end{bmatrix}$$ اضرب الأعمدة في الصفوف.

$$= \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$ بسّط.

توضح المصفوفة الناتجة عن الضرب نتائج مدرسة محمد بن راشد ، الأمير ، الراشدية ، الشارقة النموذجية، على التوالي. فازت الشارقة النموذجية في لقاء السباحة بإجمالي 96 نقطة.

تحقق R هي مصفوفة 3×4 و P هي مصفوفة 1×3، لذا ينبغي أن يكون ناتج ضربهما مصفوفة 4×1.

تمرين موجّه

3. كرة السلة راجع بداية الدرس. استخدم ضرب المصفوفة لتحديد في أي موسم أحرزت ليزا ليزلي أكثر نقاط. كم عدد النقاط التي أحرزتها في ذلك الموسم؟

الربط بالحياة اليومية

يتكون لقاء السباحة من مباريات سباق وغوص. هناك 241,000 مدرسة ثانوية تشارك كل عام.

المصدر: National Federation of State High School Associations

2 خصائص الضرب

تذكر أن خصائص الأعداد الحقيقية تكون صحيحة كذلك لجمع المصفوفة. مع ذلك، بعض هذه الخصائص لا تكون صحيحة دائمًا لضرب المصفوفة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 اختبار خاصية التبديل

جد كل ناتج إذا كان $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ و $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

a. GH

$$GH = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$ قم بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 2-6-5 & 3-24-35 \\ 8+4+0 & 12+16+0 \end{bmatrix} \text{ أو } \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

b. HG

$$HG = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ قم بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 2+12 & 6-6 & -10+0 \\ -2-32 & -6+16 & 10+0 \\ 1+28 & 3-14 & -5+0 \end{bmatrix} \text{ أو } \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$ لاحظ أن $GH \neq HG$.

تمرين موجّه

4. حدد ما إذا كان $AB = BA$ صحيحة بالنسبة إلى $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$.

مثال 4 وضح أن خاصية التبديل في الضرب لا تصلح لضرب المصفوفة. الترتيب الذي تقوم به بضرب المصفوفات مهم جدًا.

نصيحة دراسية

البرهان والأمثلة المضادة

لتوضيح أن الخاصية لا تكون دائمًا صحيحة، تحتاج إلى إيجاد مثال مضاد واحد فقط.

مثال 5 اختبار خاصية التوزيع

جد كل ناتج ضرب إذا كان $J = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ و $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $L = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

a. $J(K + L)$

$$J(K+L) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)$$ قم بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$ اجمع.

$$= \begin{bmatrix} -2+8 & 2+12 \\ 5-4 & -5-6 \end{bmatrix} \text{ أو } \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$ اضرب.

b. $JK + JL$

$$JK + JL = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3)+4(-1) & 2(2)+4(3) \\ -5(3)+(-2)(-1) & -5(2)+(-2)(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(-4)+4(3) & 2(-1)+4(0) \\ -5(-4)+(-2)(3) & -5(-1)+(-2)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -13 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} \text{ أو } \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$ لاحظ أن $J(K + L) = JK + JL$.

تمرين موجّه

5. استخدم المصفوفات $R = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $S = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ و $T = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ لتحديد ما إذا كان $(S + T)R = SR + TR$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المثال السابق يقترح أن خاصة التوزيع حقيقية لضرب المصفوفة. يتم توضيح بعض خصائص ضرب المصفوفة أدناه.

المفهوم الأساسي خصائص ضرب المصفوفة

بالنسبة لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون ناتج ضرب المصفوفة لها معروف وأي كمية غير متجهة k. تنطبق الخصائص التالية.

خاصية التجميع في ضرب المصفوفة	$(AB)C = A(BC)$
خاصية التجميع في ضرب الكمية العددية	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع إلى اليسار	$C(A + B) = CA + CB$
خاصية التوزيع إلى اليمين	$(A + B)C = AC + BC$

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل ناتج لضرب المصفوفتين معرّفًا أم لا. إذا كان الأمر كذلك، حدد أبعاد ناتج الضرب.**

1. $A_{2\times 4} \cdot B_{4\times 3}$
2. $C_{5\times 4} \cdot D_{5\times 4}$
3. $E_{8\times 6} \cdot F_{6\times 10}$

المثالان 2–3 **جد كل ناتج ضرب، إن أمكن.**

4. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

12. **الاستنتاج المنطقي** الجدول يوضح أعداد الأشخاص المسجلين للتمرينات الهوائية للربع الأول.

صالة ألعاب رياضية		
طريقة الدفع	التمرينات الهوائية	التمرينات الهوائية بالدرج
حصة بحصة	35	28
قسيمة حضور 11 حصة	32	17
قسيمة حضور غير محدود	18	12

تفرض صالة ألعاب رياضية رسوم التسجيل التالية: حصة بحصة، AED165؛ جواز حضور 11 حصة، AED110؛ جواز حضور غير محدود، AED 239.

a. اكتب مصفوفة لرسوم التسجيل ومصفوفة لعدد الطلاب.

b. جد إجمالي المبلغ المالي الذي تلقته القاعة الرياضية من عمليات التسجيل للتمرينات الهوائية والتمرينات الهوائية بالدرج.

المثالان 4–5 **استخدم** $X = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ و $Z = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ **لتحديد ما إذا كانت المعادلتان التاليتان صحيحتين بالنسبة للمصفوفات المعطاة.**

13. $XY = YX$
14. $X(YZ) = (XY)Z$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل ناتج لضرب المصفوفتين معرّفًا أم لا. إذا كان الأمر كذلك، اذكر أبعاد ناتج الضرب.**

15. $P_{2\times 3}\cdot Q_{3\times 4}$

16. $A_{5\times 5}\cdot B_{5\times 5}$

17. $M_{3\times 1}\cdot N_{2\times 3}$

18. $X_{2\times 6}\cdot Y_{6\times 3}$

19. $J_{2\times 1}\cdot K_{2\times 1}$

20. $S_{5\times 2}\cdot T_{2\times 4}$

المثالان 2-3 **جد كل ناتج ضرب، إن أمكن.**

21. $\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-10\\6\end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -7\end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix}-3 & -7\\-2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\9 & -3\end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -3\\7 & -2\end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\-4 & -10 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & -7\\-2 & -9\end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix}-6 & 4 & -9\\2 & 8 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\2\\4\end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix}2 & 9 & -3\\4 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\-6 & 7\\-2 & 1\end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix}-4\\8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}$

29. السفر تمتلك عائلة ثلاثة نُزل للمبيت والإفطار في بقعة للعطلات. تكلفة الغرفة الفردية AED 220 في الليلة وتكلفة الغرفة المزودة بسريرين AED 250 في الليلة وتكلفة الجناح AED 360.

الغرف المتاحة في نُزل للمبيت والإفطار خاص بالعائلة			
مبيت إفطار	فردية	زوجية	جناح
1	3	2	2
2	3	2	1
3	4	3	0

a. اكتب مصفوفة لعدد كل نوع من أنواع الغرف في كل نُزل للمبيت والإفطار.
ثم اكتب مصفوفة لتكلفة الغرف.

b. اكتب مصفوفة لإجمالي الدخل اليومي، بافتراض أن جميع الغرف مؤجرة.

c. ما الدخل اليومي الإجمالي من جميع نُزل المبيت والإفطار الثلاثة، بافتراض أن جميع الغرف مؤجرة؟

المثالان 4-5 **استخدم** $P=\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$ و $Q=\begin{bmatrix}6 & 4\\-2 & -5\end{bmatrix}$ و $R=\begin{bmatrix}4 & 6\\-6 & 4\end{bmatrix}$ و $k=2$ **لتحديد ما إذا كانت المعادلات التالية صحيحة للمصفوفات المعطاة.**

30. $k(PQ)=P(kQ)$

31. $PQR=RQP$

32. $PR+QR=(P+Q)R$

33. $R(P+Q)=PR+QR$

34. الاستنتاج المنطقي يبيع المجلس الطلابي أزهارًا لعيد الأم. وقام بشراء 200 وردة و150 نرجسًا بريًا و100 زهرة أوركيد بأسعار الشراء الموضحة. وقام ببيع الأزهار بأسعار المبيعات الموضحة.

الزهرة	سعر الشراء	سعر المبيعات
الورد	AED 1.67	AED 3.00
النرجس البري	AED 1.03	AED 2.25
زهرة الأوركيد	AED 2.59	AED 4.50

a. رتب البيانات في مصفوفتين واستخدم ضرب المصفوفة لإيجاد المبلغ الإجمالي الذي تم دفعه مقابل الأزهار.

b. اكتب مصفوفتين واستخدم ضرب المصفوفة لإيجاد المبلغ الإجمالي الذي تلقاه المجلس الطلابي مقابل بيع الأزهار.

c. استخدم عمليات المصفوفة لإيجاد المبلغ الذي حققه المجلس الطلابي في مشروعه.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

35. مبيعات السيارات لدى مرآب سيارات أربعة مساعدين مبيعات. في نهاية كل عام، يحصل كل مساعد مبيعات على علاوة تبلغ AED 1000 عن كل سيارة جديدة قام ببيعها و AED 500 عن كل سيارة مستعملة قام ببيعها.

a. استخدم مصفوفة لتحديد أي مساعد مبيعات كسب أكبر قدر من المال.

b. ما المبلغ الإجمالي الذي أنفقه مرآب السيارات على العلاوات لمساعدي المبيعات هذا العام؟

السيارات المباعة بواسطة كل مساعد		
مساعد المبيعات	السيارات الجديدة	السيارات المستخدمة
مازن	27	49
محمود	35	36
عمر	9	56
حارب	15	62

استخدم المصفوفات $X=\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3y & -4.5 \end{bmatrix}$ **و** $Y=\begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ x+2 & y \\ 13 & 1.2 \end{bmatrix}$ **و** $Z=\begin{bmatrix} -3 \\ x+y \end{bmatrix}$ **لإيجاد كل من التالي. إذا كانت المصفوفة غير موجودة، فاكتب غير معرّفة.**

36. XY **37.** YX **38.** ZY **39.** YZ

40. $(YX)Z$ **41.** $(XZ)X$ **42.** $X(ZZ)$ **43.** $(XX)Z$

44. الكاميرات تعتمد أسعار الكاميرات الرقمية على مزايا مثل التكبير البصري والتكبير الرقمي وعدد الميجابكسل.

a. يتم بيع كاميرات 10-mp بخصم 20% والطرز الأخرى بخصم 10%. اكتب مصفوفة بالتكلفة.

b. اكتب مصفوفة جديدة تتيح وجود 6.25% ضريبة مبيعات على الأسعار المطبق عليها الخصم.

c. قم بوصف ما تمثله الاختلافات في هاتين المصفوفتين.

التكبير البصري	6 MP	7 MP	10 MP
من 3 إلى 4	AED 189.99	AED 249.99	AED 349.99
من 5 إلى 6	AED 199.99	AED 289.99	AED 399.99
من 10 إلى 12	AED 299.99	AED 399.99	AED 499.99

45. الأعمال التجارية تتوفر لدى استوديو كانجي حزم للصور الشخصية لكبار السن.

a. استخدم المصفوفات لتحديد إجمالي تكلفة كل حزمة.

b. يقدم الاستوديو خصم 15% للشراء أي حزمة مقدمًا. جد سعر الشراء مقدمًا لكل حزمة.

الحجم (السعر)	العبوات			
	A	B	C	D
4 × 5 (AED 7)	10	10	8	0
5 × 7 (AED 10)	4	4	4	4
8 × 10 (AED 14)	2	2	2	2
11 × 14 (AED 45)	1	1	1	0
16 × 20 (AED 95)	1	0	0	0
الحافظ (8 بسعر AED 13)	88	56	16	0

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

46. الاستنتاج إذا كان لدى المصفوفة الناتجة عن الضرب AB الأبعاد 8 × 5. ولدى A الأبعاد 6 × 5. ما أبعاد المصفوفة B؟

47. الفرضيات وضّح أن كل خاصية للمصفوفات صحيحة لكل مصفوفات 2 × 2.

a. خاصية توزيع الكمية العددية

b. خاصية توزيع المصفوفة

c. خاصية التجميع في الضرب

d. خاصية التجميع في ضرب الكمية العددية

48. مسألة غير محددة الإجابة اكتب مصفوفتين A و B بحيث يكون $AB = BA$.

49. تحدٍ جد القيم الناقصة في $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$

50. الكتابة في الرياضيات استخدم البيانات التي تم إيجادها فيما يتعلق بليزا ليزلي في بداية الدرس لشرح الكيفية التي يمكن بها استخدام المصفوفات في الإحصائيات الرياضية. قم بوصف مصفوفة تمثل إجمالي عدد النقاط التي أحرزتها خلال حياتها المهنية ومثالًا لرياضية تُستخدم فيها قيم مختلفة للنقاط في تسجيل الأهداف.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

51. إجابة شبكية متوسط (الوسط الحسابي) r و w و x و y هو 8، ومتوسط x و y هو 4. فما متوسط r و w؟

52. ذهبت رنا وسها وعلياء للتسوق للاستعداد للجامعة. يوضح في الجدول أدناه عمليات الشراء التي قمن بها وإجمالي المبالغ التي قمن بإنفاقها.

الشخص	القمصان	السراويل	الأحذية	إجمالي المبلغ المدفوع
رنا	3	4	2	AED 149.79
سها	5	3	3	AED 183.19
علياء	6	5	1	AED 181.14

افترض أن جميع هذه القمصان كانت بنفس السعر وجميع السراويل كانت بنفس السعر وجميع الأحذية كانت بنفس السعر. فكم كان سعر كل قطعة؟

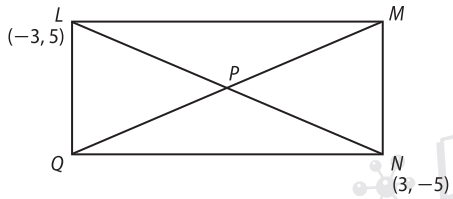
A القمصان، AED 12.95؛ السراويل، AED 15.99؛ الأحذية، AED 23.49

B القمصان، AED 15.99؛ السراويل، AED 12.95؛ الأحذية، AED 23.49

C القمصان، AED 15.99؛ السراويل، AED 23.49؛ الأحذية، AED 12.95

D القمصان، AED 23.49؛ السراويل، AED 15.99؛ الأحذية، AED 12.95

53. الهندسة لدى المستطيل $LMNQ$ خطوط قطرية عند نقطة P.



أي مما يلي يمثل النقطة P؟

F (2, 2)
G (1, 1)
H (0, 0)
J (−1, −1)

SAT/ACT 54. ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية الضرب الموضحة؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A 1×4
B 3×3
C 3×1
D 4×1
E 4×3

مراجعة شاملة

قم بإجراء العمليات الموضحة. إذا كانت المصفوفة غير موجودة، فاكتب مستحيلة. (الدرس 5-1)

55. $4\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

56. $5\left(2\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right)$

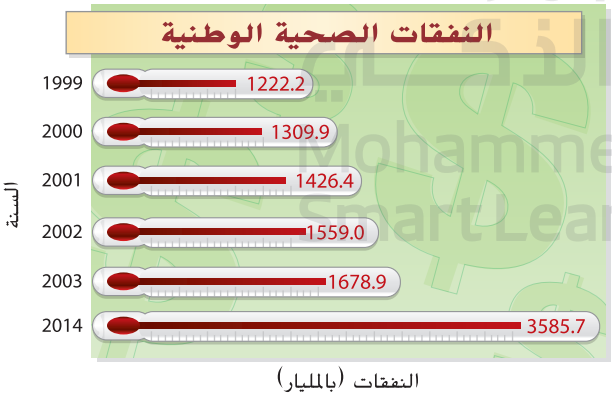
57. $-4\left(\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right)$

استخدم طريقة الاختزال في حل كل نظام من أنظمة المعادلات. (الدرس 4-1)

58.
$2x - 4y + 3z = -3$
$-7x + 5y - 4z = 11$
$x - y - 2z = -21$

59.
$-4x - 2y + 9z = -29$
$10x - 12y + 7z = 51$
$3x + 5y - 14z = 25$

60.
$-7x + 8y - z = 43$
$3x - 2y + 5z = -43$
$2x - 4y + 6z = -50$



61. الطب يوضح التمثيل البياني كم أنفق المواطنون الأمريكيون على زيارات الطبيب في بعض الأعوام الأخيرة وتوقع لعام 2014.

a. جد معادلة انحدار للبيانات واكتب القيمة التي يتم توقعها.

b. استخدم المعادلة الخاصة بك لتوقع نفقات عام 2014.

c. قارن توقعك بالتوقع المعطى في التمثيل البياني.

62. كم عدد الطرق المختلفة التي يمكننا ترتيب حروف كلمة العمليات وفقها؟

مراجعة المهارات

قم بوصف تحول كل دالة ثم مثّل الدالة بيانيًا.

63. $f(x) = |x - 4| + 3$

64. $f(x) = 2|x + 3| - 5$

65. $f(x) = (x + 2)^2 - 6$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر تقنية التمثيل البياني
العمليات على المصفوفات

يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني لإجراء عمليات على المصفوفات.

النشاط 1 إجراء العمليات

استخدم A و B و C لإيجاد التالي.

$$A = \begin{bmatrix} -3.2 & 1.7 \\ 0.4 & -5.8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4.9 & 0.3 \\ -7.1 & 2.6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5.6 & -6.1 & 2.1 \\ -8.2 & 7.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

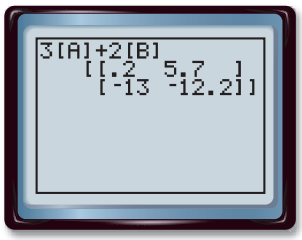
a. $3A + 2B$

ابدأ بإدخال المصفوفة A إلى حاسبة التمثيل البياني.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [MATRIX] ▶ ▶ ENTER 2 ENTER 2 ENTER (–) 3.2 ENTER 1.7 ENTER 0.4 ENTER (–) 5.8 ENTER 2nd [QUIT]

أدخل المصفوفة B إلى حاسبة التمثيل البياني باستخدام خطوات العملية على الحاسبة المشابهة. ثم، قم بإجراء العمليات الموضحة.

خطوات العملية على الحاسبة: 3 2nd [MATRIX] ENTER + 2 2nd [MATRIX] ▼ ENTER ENTER



$3A + 2B$ تساوي $\begin{bmatrix} 0.2 & 5.7 \\ -13 & -12.2 \end{bmatrix}$.

b. $4C + 3A$

أدخل المصفوفة C إلى حاسبة التمثيل البياني. قم بإجراء العمليات الموضحة. لاحظ أن الحاسبة تعرض رسالة خطأ عندما لا تسمح الأبعاد بإجراء العلميات.

تمارين

استخدم A و B و C و D لإيجاد التالي. إذا لم توجد مصفوفة، فاكتب *مستحيل*.

$$A = \begin{bmatrix} 4.5 & -9.0 \\ -7.4 & 9.4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.9 & -5.9 \\ 2.9 & 5.0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7.0 & 5.5 & -1.9 \\ 7.6 & -9.9 & 0.5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 8.5 & 8.0 \\ -1.2 & -5.9 \\ 0.7 & 8.9 \end{bmatrix}$$

1. $CD + 4A$
2. $-2B + 7A$
3. $4(DC)$
4. $6B + DC$
5. $2(AB) - 3B + 5A$
6. $-3(CD) + 4(BA) + 7A$

(يُتبع في الصفحة التالية)

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

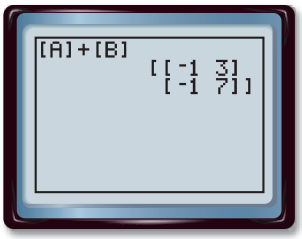
النشاط 2 استكشاف خواص عمليات على المصفوفة

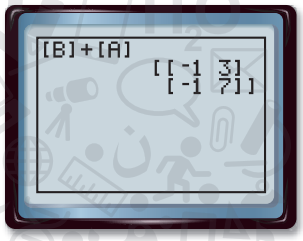
استخدم A و B و C لإيجاد التالي.

$$A=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 7 & 3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -8 & 4\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}11 & -3\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

a. $A+B$ و $B+A$

جد $A+B$.
ثم جد $B+A$.

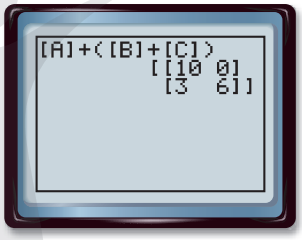




$A+B$ و $B+A$ كلتاهما يساوي $\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 7\end{bmatrix}$.

b. $(A+B)+C$ و $A+(B+C)$

جد $(A+B)+C$.
ثم جد $A+(B+C)$.



$(A+B)+C$ و $A+(B+C)$ كلتاهما يساوي $\begin{bmatrix}10 & 0\\ 3 & 6\end{bmatrix}$.

تحليل النتائج

ما الخاصية الموضحة في كل جزء من النشاط 2؟

7. الجزء A

8. الجزء B

جد كل مجموعة من نواتج الضرب. ما أوجه التشابه والاختلاف بينها؟ وما الخاصية التي يتم توضيحها

9. $(AB)C,\ A(BC)$

10. $3(AB),\ (3A)B,\ A(3B)$

11. المصفوفة الصفرية O هي مصفوفة $m \times n$ تساوي جميع عناصرها 0. إذا تم تحديد $A+O$، أثبت صحة خاصية محايد الجمع للمصفوفات، $A+O=A$.

12. تكون مصفوفتان معكوستين جمعيتين إذا كان مجموعهما المصفوفة الصفرية. جد المصفوفة E بحيث يكون $A+E$ معكوسين جمعيين. ثم أثبت صحة $A+E=O$.

13. جد المعكوس الجمعي للمصفوفة B والمصفوفة C.

14. **تحدٍ** ما الملاحظات التي يمكن إبدائها فيما يتعلق بالمصفوفة ومعكوسها الجمعي؟ جد المعكوس الجمعي لـ $\begin{bmatrix}w & -x\\ -y & z\end{bmatrix}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 8-1

حل أنظمة المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

السابق:
- أوجدت حلولًا لأنظمة المعادلات جبريًا.

الحالي:
1. إيجاد قيمة المحدد لمصفوفة مربعة.
2. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

لماذا؟
- قام عالم حيوانات بتمييز نمر مع جهاز تعقب GPS بحيث يمكن تحديد الأراضي المحيطة بالنمر. بعد عدة أيام، قرر عالم الحيوانات أن الأراضي المحيطة بالنمر كانت منطقة مثلثة. وباستخدام إحداثيات رؤوس هذا المثلث، يمكنها استخدام مصفوفات ومحددات لتحديد حجم الأراضي المحيطة بالنمر.

المفردات الجديدة

مُحَدّد	determinant
مُحَدّد الدرجة الثانية	second-order determinant
مُحَدّد الدرجة الثالثة	third-order determinant
قاعدة القطر	diagonal rule
قاعدة كرامر	Cramer's Rule
مصفوفة المعاملات	coefficient matrix

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 المحددات

كل مصفوفة مربعة لها **مُحَدّد**. مُحَدّد المصفوفة 2 × 2 يسمى **مُحَدّد الدرجة الثانية**.

المفهوم الأساسي محددة الدرجة الثانية

الشرح قيمة المحدد بترتيب ثان هو الفرق بين نواتج ضرب القطرين.

الرموز
$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال
$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (5)(-3) = 39$$

مثال 1 مُحَدّد الدرجة الثانية

جد قيمة كل محدد.

a. $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - (-4)(8)$ تعريف المحدد

$= 45 + 32$ بسّط.

$= 77$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 6(4)$ تعريف المحدد

$= 0 - 24$ بسّط.

$= -24$

تمرين موجّه

1A. $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

1B. $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مُحددات مصفوفات 3 × 3 تسمى **مُحددات الدرجة الثالثة**. يمكن إيجاد قيمها باستخدام **قاعدة القطر**.

نصيحة دراسية

قاعدة القطر يمكن استخدام قاعدة القطر فقط للمصفوفات 3 × 3.

المفهوم الأساسي قاعدة القطر

الخطوة 1 أعد كتابة أول عمودين إلى يمين المحدد.

الخطوة 2 ارسم الأقطار، بدءًا من العنصر الأيسر العلوي. اضرب العناصر في كل قطر. كرر العملية، بدءًا من العنصر الأيمن العلوي.

الخطوة 3 جد مجموع نواتج ضرب العناصر في كل مجموعة من الأقطار.

الخطوة 4 اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

مثال 2 استخدم الأقطار

جد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ **مستخدمًا الأقطار.**

الخطوة 1 أعد كتابة أول عمودين إلى يمين المحدد.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

الخطوة 2 جد نواتج ضرب عناصر الأقطار.

$$-4(2)(3) = -24$$
$$5(6)(4) = 120$$
$$9(-3)(-8) = 216$$

$$4(2)(9) = 72$$
$$-8(6)(-4) = 192$$
$$3(-3)(5) = -45$$

الخطوة 3 جد مجموع كل مجموعة.

$$-24 + 120 + 216 = 312$$
$$72 + 192 + (-45) = 219$$

الخطوة 4 اطرح مجموع المجموعة الثانية من مجموع المجموعة الأولى.

$$219 - 312 = -93$$

قيمة المحدد هي -93.

تمارين موجّهة

جد قيمة كل محدد.

2A. $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

2B. $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

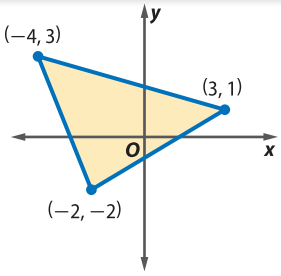
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

ويمكن أيضًا أن تستخدم المحددات لإيجاد مساحات المثلثات. إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معروفة، فيمكن استخدام الصيغة أدناه لحساب مساحة المثلث. لأن المنطقة لا يمكن أن تكون سلبية، استخدم القيمة المطلقة للمحدد.

المفهوم الأساسي مساحة المثلث

الشرح مساحة المثلث الذي رؤوسه هي (a, b) و (c, d) و (e, f) هي $|A|$ حيث

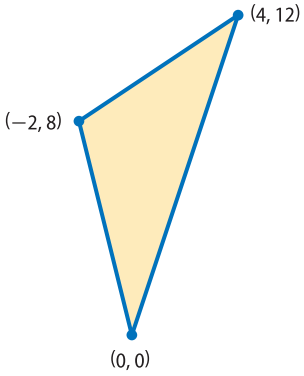
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}.$$



مثال

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال 3 من الحياة اليومية استخدم المحددات



علم الحيوانات راجع التطبيق في بداية الدرس. إحداثيات رؤوس شكل الأراضي المحيطة بالنمر تظهر إلى اليمين. استخدم المحددات لإيجاد منطقة الأراضي المحيطة بالنمر.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$(a, b) = (0, 0)$
$(c, d) = (4, 12)$
$(e, f) = (-2, 8)$

قاعدة القطر

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{matrix}$$

مجموع نواتج ضرب الأقطار

$0 + 0 + 32 = 32$ $\quad -24 + 0 + 0 = -24$

مساحة المثلث

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

بسّط.

$$= \left(\frac{1}{2}\right)[32 - (-24)] \text{ or } 28$$

مساحة الأرض المحيطة هي 28 km^2.

الربط بالحياة اليومية

تعد النمور حيوانات منعزلة ومتعلقة بالأرض للغاية. ويمكن أن تصل مساحة أراضيها إلى 100 كيلومتر مربع.

المصدر: *ناشيونال جيوجرافيك*

تمرين موجّه

3. **العروض الترويجية** قامت حليمة وعائشة وفاطمة بالإعلان عن متجرهم الجديد في ثلاث زوايا مختلفة من شارع في أحد الأحياء. على الخريطة، إحداثيات الزوايا هي (3, 15) و (4, 6) و (9, 11). كل وحدة تمثل 0.5 km. ما مساحة الحي الذين يقومون بالإعلان فيه؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قراءة في الرياضيات

المحددات يستخدم المحدد لتحديد ما إذا كان النظام له حل وحيد.

2 قاعدة كرامر

يمكنك استخدام المحددات لحل أنظمة المعادلات. إذا كان المحدد غير صفري، فإن النظام له حل وحيد. إذا كان المحدد يساوي 0، فإن النظام إما لا يكون له حل أو له حلول لا نهائية. هناك طريقة تسمى **قاعدة كرامر** تستخدم مصفوفة المعاملات. **مصفوفة المعاملات** هي مصفوفة تحتوي فقط على معاملات النظام.

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

افترض أن C تساوي مصفوفة معاملات النظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

حل هذا النظام هو x, y إذا كان $|C| \neq 0$ و $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}$.

نصيحة عند حل الاختبار

قاعدة كرامر عندما يكون محدد مصفوفة المعاملات C يساوي 0، لا يكون للنظام حل وحيد.

مثال 4 إيجاد حل أنظمة المعادلتين

حُلّ النظام باستخدام قاعدة كرامر.

$5x - 6y = 15$
$3x + 4y = -29$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{\lvert C \rvert}$	قاعدة كرامر	$y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{\lvert C \rvert}$
$= \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$	عوض القيم	$= \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$
$= \dfrac{15(4) - (-29)(-6)}{5(4) - (3)(-6)}$	جد قيمة	$= \dfrac{5(-29) - 3(15)}{5(4) - (3)(-6)}$
$= \dfrac{60 - 174}{20 + 18}$	اضرب.	$= \dfrac{-145 - 45}{20 + 18}$
$= -\dfrac{114}{38}$	أضف واطرح.	$= -\dfrac{190}{38}$
$= -3$	بسّط.	$= -5$

حل النظام هو $(-5, -3)$.

تحقق

$5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15$	$x = -3, y = -5$
$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$	بسّط.
$15 = 15$ ✓	
$3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29$	$x = -3, y = -5$
$-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$	بسّط.
$-29 = -29$ ✓	

تمرين موجّه

حُلّ كل نظام باستخدام قاعدة كرامر.

4A. $7x + 3y = 37$
$-5x - 7y = -41$

4B. $8x - 5y = 70$
$9x + 7y = 3$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكن استخدام قاعدة كرامر أيضًا لأنظمة الثلاث معادلات.

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر لنظام من ثلاث معادلات

افترض أن C تساوي مصفوفة معاملات النظام

$$\begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell z = p \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}.$$

حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ و $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$

مثال 5 إيجاد حل أنظمة ثلاث معادلات

حُلّ النظام باستخدام قاعدة كرامر.

$$\begin{aligned} 4x + 5y - 6z &= -14 \\ 3x - 2y + 7z &= 47 \\ 7x - 6y - 8z &= 15 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}} \qquad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}} \qquad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{3105}{621} \text{ أو } 5 \qquad = -\frac{1242}{621} \text{ أو } -2 \qquad = \frac{2484}{621} \text{ أو } 4$$

حل النظام هو (4, -2, 5).

تحقق

$4(5) + 5(-2) - 6(4) \stackrel{?}{=} -14$

$20 - 10 - 24 \stackrel{?}{=} -14$

$-14 = -14$ ✓

$3(5) - 2(-2) + 7(4) \stackrel{?}{=} 47$

$15 + 4 + 28 \stackrel{?}{=} 47$

$47 = 47$ ✓

$7(5) - 6(-2) - 8(4) \stackrel{?}{=} 15$

$35 + 12 - 32 \stackrel{?}{=} 15$

$15 = 15$ ✓

نصيحة دراسية

التحقق من الدقة عوض دائمًا إجاباتك في المعادلات الأولية لتأكيد الدقة.

تمرين موجّه

حُلّ كل نظام باستخدام قاعدة كرامر.

5A. $3x + 5y + 2z = -7$
$-4x + 3y - 5z = -19$
$5x + 4y - 7z = -15$

5B. $6x + 5y + 2z = -1$
$-x + 3y + 7z = 12$
$5x - 7y - 3z = -52$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 جد قيمة كل محدد.

1. $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

مثال 2 جد قيمة كل محدد باستخدام الأقطار.

5. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 7 & 9 & -4 \\ -6 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -5 & -6 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$

مثال 4 استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات.

13. $4x - 5y = 39$
$3x + 8y = -6$

14. $5x + 6y = 20$
$-3x - 7y = -29$

15. $-8a - 5b = -27$
$7a + 6b = 22$

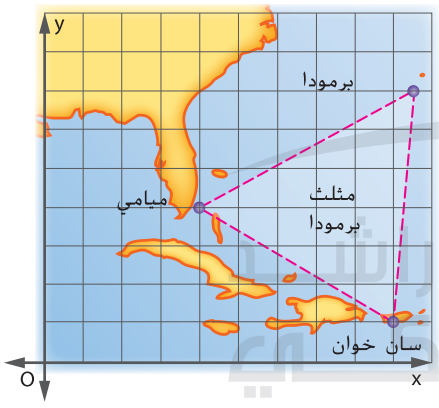
16. $10c - 7d = -59$
$6c + 5d = -63$

الأمثلة 3–5

17. **المثابرة** "مثلث برمودا" هو مساحة تقع قبالة ساحل جنوب شرق المحيط الأطلسي للولايات المتحدة، ومشهورة بتقارير لحالات الاختفاء الغامض للسفن والقوارب الصغيرة والطائرات.

a. جد مساحة المثلث على الخريطة.

b. لنفترض أن كل تمثيل بياني يمثل 282 km ما هي مساحة مثلث برمودا؟



استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات.

18. $4x - 2y + 7z = 26$
$5x + 3y - 5z = -50$
$-7x - 8y - 3z = 49$

19. $-3x - 5y + 10z = -4$
$-8x + 2y - 3z = -91$
$6x + 8y - 7z = -35$

20. $6x - 5y + 2z = -49$
$-5x - 3y - 8z = -22$
$-3x + 8y - 5z = 55$

21. $-9x + 5y + 3z = 50$
$7x + 8y - 2z = -60$
$-5x + 7y + 5z = 46$

22. $x + 2y = 12$
$3y - 4z = 25$
$x + 6y + z = 20$

23. $9a + 7b = -30$
$8b + 5c = 11$
$-3a + 10c = 73$

24. $2n + 3p - 4w = 20$
$4n - p + 5w = 13$
$3n + 2p + 4w = 15$

25. $x + y + z = 12$
$6x - 2y - z = 16$
$3x + 4y + 2z = 28$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **جد قيمة كل محدد.**

26. $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

459

32. $\begin{vmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} -8 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & -8 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 6 & 5 & -6 \\ -2 & -8 & 10 \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -8 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 10 & 12 & 9 \\ -6 & 0 & 13 \end{vmatrix}$

38. السفر قام الصف الدراسي الفني الخاص بالسيد أسامة برحلة بالحافلة إلى متحف الفن. قطعت الحافلة متوسط 65 km/h على الطريق السريع و 25 km/h في المدينة. يبعد متحف الفن مسافة 375 km عن المدرسة. واستغرق الصف الدراسي 7 ساعات للوصول إلى هناك. استخدم قاعدة كرامر لمعرفة عدد الساعات التي استغرقتها الحافلة على الطريق السريع وعدد الساعات التي تمت قيادتها في المدينة.

المثالان 4–5 **استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات.**

39. $6x - 5y = 73$
$-7x + 3y = -71$

40. $10a - 3b = -34$
$3a + 8b = -28$

41. $-4c - 5d = -39$
$5c + 8d = 54$

42. $-6f - 8g = -22$
$-11f + 5g = -60$

43. $9r + 4s = -55$
$-5r - 3s = 36$

44. $-11u - 7v = 4$
$9u + 4v = -24$

45. $5x - 4y + 6z = 58$
$-4x + 6y + 3z = -13$
$6x + 3y + 7z = 53$

46. $8x - 4y + 7z = 34$
$5x + 6y + 3z = -21$
$3x + 7y - 8z = -85$

47. الكعك المحلى قامت خولة بطلب كعك محلى لأجل حفلة للصف الدراسي. يحتوي الصندوق على دزينتي كعك محلى، بعضها عادي وبعضها محشوة بالمربى. تكلفة الكعك العادي AED 5.00 لكل كعكة وتكلفة الكعك المحشو بالمربى AED 6.00 لكل كعكة. إذا كانت التكلفة الإجمالية AED 126.00، فاستخدم قاعدة كرامر لايجاد عدد الكعك المحشو بالمربى الذي طلبته خولة.

المثالان 3–4

48. المثابرة تبلغ رواتب الإدارة العليا في اللجنة التوجيهية 5 ملايين درهم، ويتلقى كل من المساعدين مليون درهم. ويبلغ مجموع المبلغ المنفق على المرتبات 19 مليون درهم. إذا كان فريق العمل مكون من 7 أعضاء، فاستخدم قاعدة كرامر لايجاد عدد الإدارة العليا في اللجنة.

49. علم الآثار وجد علماء الآثار عظام حوت في الإحداثيات (0, 3) و (4, 7) و (5, 9). إذا كانت وحدات الإحداثيات بالمتر، فجد مساحة المثلث التي شكلتها هذه الاكتشافات.

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات.

50. $6a - 7b = -55$
$2a + 4b - 3c = 35$
$-5a - 3b + 7c = -37$

51. $3a - 5b - 9c = 17$
$4a - 3c = 31$
$-5a - 4b - 2c = -42$

52. $4x - 5y = -2$
$7x + 3z = -47$
$8y - 5z = -63$

53. $7x + 8y + 9z = -149$
$-6x + 7y - 5z = 54$
$4x + 5y - 2z = -44$

54. البستنة يريد مروان بناء حديقة زهور مثلثة. لكي يخطط حديقته استخدم شبكة إحداثيات حيث تمثل كل من المربعات $1\ m^2$. إحداثيات رؤوس حديقته هي $(-1, 7)$ و $(6, 2)$ و $(-3, 4)$. جد مساحة الحديقة.

55. المعرفة المالية يبيع أحد الباعة المشروبات الصغيرة مقابل AED 1.15، والمشروبات المتوسطة مقابل AED 1.75، والمشروبات الكبيرة مقابل AED 2.25. خلال أسبوع باع فيه مشروبات صغيرة ضعف عدد المشروبات المتوسطة، بلغ إجمالي مبيعاته AED 2.238.75 مقابل 1385 مشروبًا.

a. استخدم قاعدة كرامر لتحديد كم عدد المشروبات التي تم بيعها من كل نوع.

b. قرر البائع زيادة سعر المشروبات الصغيرة إلى AED 1.25 في الأسبوع المقبل. أما في الأسبوع التالي، باع 140 مشروب صغير أقل و 125 مشروب متوسط أكثر و 35 مشروب كبير أكثر. احسب مبيعاته لهذا الأسبوع.

c. هل كان قرار زيادة سعر المشروبات الصغيرة خطوة تجارية ناجحة؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

56. الاستنتاج بعض أنظمة المعادلات لا يمكن حلها باستخدام قاعدة كرامر.

a. جد قيمة $\begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$. متى تكون القيمة 0؟

b. اختر قيمًا لصالح a و b و f و g لجعل قيمة محدد مصفوفة المعاملات 0. ما هو نوع النظام المكون؟

57. الاستنتاج ما الذي يمكنك تحديده بشأن حل نظام المعادلات الخطية إذا كان محدد المعاملات يساوي 0؟

58. النقد أحمد وعمرو يجدان قيمة $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

أحمد

$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 - (-15)$
$= 31$

عمرو

$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 15$
$= 1$

هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

59. تحدٍ جد محدد المصفوفة 3 × 3 المعرفة بواسطة $a_{mn} = \begin{cases} 0 \text{ إذا كانت } m + n \text{ قيمة زوجية} \\ m + n \text{ إذا كانت } m + n \text{ قيمة فردية} \end{cases}$.

60. مسألة غير محددة الإجابة اكتب مصفوفة 2 × 2 بكل من السمات التالية.

a. المحدد يساوي 0.

b. المحدد يساوي 25.

c. جميع العناصر أعداد سالبة والمحدد يساوي -32.

61. الكتابة في الرياضيات صف التمثيلات البيانية المحتملة لنظام المعادلات الخطية 2 × 2 إذا كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي 0.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

62. دفع طارق AED 25.25 للعب ثلاث مباريات من الجولف المصغر واثنين من سباقات سيارات السباق الصغيرة. دفع بلال AED 25.75 لأربع مباريات من لعبة الجولف المصغر وواحد من سباقات سيارات السباق الصغيرة. كم تكلفة المباراة الواحدة من لعبة الجولف المصغر؟

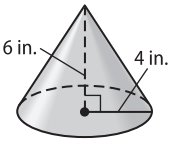
A AED 4.25
B AED 4.75
C AED 5.25
D AED 5.75

63. استخدم الطاولة لتحديد التعبير الذي يمثل عدد أوجه المنشور حيث توجد له قاعدة ذات n أضلاع.

قاعدة	أضلاع القاعدة	أوجه المناشير
المثلث	3	5
رباعي الأضلاع	4	6
خماسي الأضلاع	5	7
سداسي الأضلاع	6	8
سباعي الأضلاع	7	9
ثماني الأضلاع	8	10

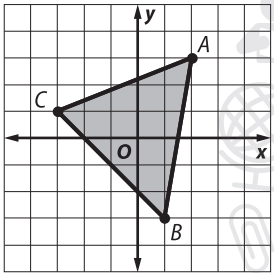
F $2(n - 1)$
G $2(n + 1)$
H $n + 2$
J $2n$

64. إجابة قصيرة مخروط دائري قائم له نصف قطر يبلغ 4 بوصة وارتفاع 6 بوصة.



ما المساحة الجانبية للمخروط؟ (المساحة الجانبية للمخروط $= \pi r\ell$. حيث ℓ = الارتفاع المائل)

65. SAT/ACT جد مساحة $\triangle ABC$.



A 10 وحدات مربعة
B 12 وحدة مربعة
C 13 وحدة مربعة
D 14 وحدة مربعة
E 16 وحدة مربعة

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان كل ناتج ضربي لمصفوفة محدد أم لا. إذا كان الأمر كذلك، حدد أبعاد ناتج الضرب. (الدرس 6-1)

66. $A_{4 \times 2} \cdot B_{2 \times 6}$
67. $C_{5 \times 4} \cdot D_{5 \times 3}$
68. $E_{2 \times 7} \cdot F_{7 \times 1}$

69. الأعمال يسرد الجدول الأسعار في متجر للشطائر. (الدرس 5-1)

الشطيرة	صغير	متوسط	كبير
تونة	AED 4.50	AED 6.75	AED 9.50
السلامي	AED 4.50	AED 6.75	AED 9.50
الخضروات	AED 4.00	AED 6.25	AED 8.75
كرات اللحم	AED 4.75	AED 7.50	AED 10.25

a. اسرد الأسعار في المصفوفة 3×4.
b. يقرر المدير خفض أسعار كل عنصر بنسبة 20%. اسرد مجموعة البيانات الجديدة هذه في المصفوفة 3×4.
c. اطرح المصفوفة الثانية من المصفوفة الأولى وحدد ما سيوفره العميل في كل شطيرة.

قم بتمثيل كل دالة بيانيًا.

70. $f(x) = 2|x - 3| - 4$
71. $f(x) = -3|2x| + 4$
72. $f(x) = |3x - 1| + 2$

مراجعة المهارات

حُـــلّ كلًّ من أنظمة المعادلات التالية.

73. $2x - 5y = -26$
$5x + 3y = -34$

74. $4y + 6x = 10$
$2x - 7y = 22$

75. $-3x - 2y = 17$
$-4x + 5y = -8$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

9-1 حل أنظمة المعادلات باستخدام معكوس المصفوفات

السابق:
- لقد قمت بحل أنظمة المعادلات الخطية جبريًا.

الحالي:
1. إيجاد المصفوفة العكسية لمصفوفة 2 × 2.
2. كتابة وحل معادلات المصفوفة لنظام معادلات.

لماذا؟
- يعرض متجر للشطائر ثلاث وجبات غداء كما هو موضح في الجزء الأيسر.

لتحديد كم تكلفة كل عنصر بمفرده، يمكنك حل معادلة المصفوفة التالية حيث يمثل الحرف w تكلفة إحدى الشطائر، و s يمثل تكلفة الطبق الجانبي و d يمثل تكلفة المشروب.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16.50 \\ 30.75 \end{bmatrix}$$

المفردات الجديدة

المصفوفة المحايدة	identity matrix
المصفوفة المربعة	square matrix
معكوس المصفوفات	inverse matrix
معادلة المصفوفة	matrix equation
مصفوفة المتغير	variable matrix
مصفوفة الثابت	constant matrix

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

1 المصفوفات المحايدة ومعكوس المصفوفات

تذكر أنه في الأعداد الحقيقية، يعد عددان معكوسين ضربيين إذا كان ناتج ضربهما هو المحايد الضربي، 1. وبالمثل، بالنسبة للمصفوفات، تعد **المصفوفة المحايدة** هي مصفوفة مربعة والتي، عند ضربها في مصفوفة أخرى، تساوي تلك المصفوفة نفسها. إن **المصفوفة المربعة** هي مصفوفة تتضمن نفس عدد الصفوف والأعمدة.

المصفوفة المحايدة 2 × 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المحايدة 3 × 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المفهوم الأساسي المصفوفة المحايدة للضرب

الشرح المصفوفة المحايدة للضرب I هي مصفوفة مربعة مع 1 لكل عنصر من القطر الرئيسي، من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، و0 في جميع المواضع الأخرى. لأي مصفوفة مربعة A من نفس البعد مثل $A \cdot I = I \cdot A = A$.

الرموز إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، إذًا $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بحيث

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

المصفوفتان $n \times n$ هما **متعاكستان** إذا كان ناتج ضربهما هو المصفوفة المحايدة. إذا كانت المصفوفة A لديها معكوس يرمز إليه بـ A^{-1}، فإن $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 التحقق من وجود معكوس للمصفوفات

حدد هل المصفوفتان في كل زوج متعاكستان أم لا.

a. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

إذا كانت A و B معكوسات، إذًا $A \cdot B = B \cdot A = I$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$ اكتب معادلة.

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ اضرب المصفوفة

حيث إن $A \cdot B \neq I$، فهما ليستا متعاكستين.

b. $F = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ و $G = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

إذا كانت F و G متعاكستين، فإن $F \cdot G = G \cdot F = I$.

$$F \cdot G = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$ اكتب معادلة.

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{15}{8}-\frac{15}{8} \\ -\frac{6}{4}+\frac{6}{4} & -\frac{10}{8}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} \text{ أو } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ اضرب المصفوفة

$$G \cdot F = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$ اكتب معادلة.

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{10}{8} & -\frac{15}{4}+\frac{30}{8} \\ \frac{3}{4}-\frac{6}{8} & -\frac{5}{4}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} \text{ أو } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ اضرب المصفوفة

حيث إن $F \cdot G = G \cdot F = I$ ، فالمصفوفتان متعاكستان.

تمرين موجّه

1. تحديد ما إذا كانت $X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ متعاكستين.

نصيحة دراسية

البنية

حيث إن ضرب المصفوفات ليس تبادليًا، فمن الضروري التحقق من ناتج الضرب في كل من الأمرين.

بعض المصفوفات ليس لديها معكوسات. يمكنك تحديد ما إذا كانت المصفوفة لها معكوس باستخدام المحدد.

المفهوم الأساسي معكوس مصفوفة 2 × 2

معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$، حيث $ad - bc \neq 0$.

لاحظ أن $ad - bc$ هي قيمة المحدد A. لذلك، إذا كانت قيمة المحدد لمصفوفة يساوي 0، لا يمكن أن يكون للمصفوفة معكوس.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

مثال 2 جد معكوس مصفوفة

جد معكوس كل مصفوفة، إن وجد.

a. $P = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10)$ أو 3 — جد المحدد.

حيث إن المحدد لا يساوي 0، فإن P^{-1} موجودة.

$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ — تعريف المعكوس

$= \frac{1}{7(-1) - (-5)(2)}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ — $a = 7, b = -5, c = 2, d = -1$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ — بسّط.

تحقق جد ناتج ضرب المصفوفتين. إذا كان ناتج الضرب يساوي I، فهما متعاكستان.

$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} + \frac{10}{3} & \frac{35}{3} - \frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & \frac{10}{3} - \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

b. $Q = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$ — جد المحدد.

حيث إن المحدد يساوي 0، فإن Q^{-1} غير موجودة.

تمرين موجّه

2A. $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

2B. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

الربط بتاريخ الرياضيات

سيكي كوا (1642–1708)
المعروفة باسم الحكيم الحسابي، كان سيكي كوا أول من طور نظرية المحددات.

2 معادلات المصفوفة

يمكن استخدام المصفوفات لتمثيل وحل أنظمة المعادلات. يمكنك كتابة **معادلة المصفوفة** لحل نظام المعادلات أدناه.

$$\begin{matrix} x + 2y = 9 \\ 3x - 6y = 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

اكتب الجانب الأيسر من معادلة المصفوفة كناتج ضرب مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغير. اكتب الجانب الأيمن كمصفوفة الثابت.

$$\underset{\text{مصفوفة المعاملات}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\substack{\text{مصفوفة المتغيرات} \\ \text{متغيرات النظام فقط}}}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\text{مصفوفة الثوابت} \\ \text{ثوابت النظام فقط}}}{\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ثم حل معادلة المصفوفة بنفس الطريقة التي كنت قد ستحل بها أي معادلة أخرى.

$ax = b$	اكتب المعادلة.	$AX = B$
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	اضرب كل طرف في المعكوس للمعامل، إن وجد.	$A^{-1}AX = A^{-1}B$
$1x = \frac{b}{a}$	$\left(\frac{1}{a}\right)a = 1, A^{-1}A = I$	$IX = A^{-1}B$
$x = \frac{b}{a}$	$1x = x, IX = X$	$X = A^{-1}B$

نصيحة دراسية

معكوس يمكنك استخدام هذه الطريقة لحل أنظمة المعادلات فقط إذا كانت A لها معكوس. إذا كانت A ليس لها معكوس، إذًا فالنظام إما ليس له حل أو له حلول متعددة لا نهائية.

لاحظ أن حل معادلة المصفوفة هو نتاج ضرب معكوس مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت.

مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد حل نظام المعادلات

السفر **توقفت حليمة للتزود بالبنزين مرتين خلال رحلة بالسيارة. وبلغ سعر البنزين في المحطة الأولى التي توقفت فيها AED 3.75 للتر الواحد. وفي المحطة الثانية، كان السعر AED 3.50 للتر الواحد. اشترت حليمة ما مجموعه 24.2 لترًا من البنزين وأنفقت AED 88.05. ما هو مقدار البنزين الذي اشترته حليمة في كل محطة وقود؟**

نظام معادلات لتمثيل الوضع هو كما يلي.

$$x + y = 24.2$$
$$3.75x + 3.50y = 88.05$$

معادلة الموصوفة هي $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.75 & 3.50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.2 \\ 88.05 \end{bmatrix}$.

الخطوة 1 جد معكوس مصفوفة المعاملات.

$$A^{-1} = \frac{1}{3.50 - 3.75}\begin{bmatrix} 3.50 & -1 \\ -3.75 & 1 \end{bmatrix} \text{ أو } -\frac{1}{0.25}\begin{bmatrix} 3.50 & -1 \\ -3.75 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 اضرب طرفي معادلة المصفوفة في المصفوفة العكسية.

$$-\frac{1}{0.25}\begin{bmatrix} 3.50 & -1 \\ -3.75 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.75 & 3.50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.25}\begin{bmatrix} 3.50 & -1 \\ -3.75 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24.2 \\ 88.05 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.25}\begin{bmatrix} -3.35 \\ -2.70 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.4 \\ 10.8 \end{bmatrix}$$

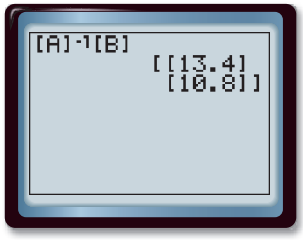
الحل هو (13.4, 10.8). حيث تمثل x كمية البنزين التي اشترتها حليمة في محطة البنزين الأولى، وتمثل y الكمية التي اشترتها في محطة البنزين الثانية.

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك عن طريق استخدام المعكوسات.

أدخل $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.75 & 3.50 \end{bmatrix}$ كالمصفوفة A.

أدخل $\begin{bmatrix} 24.2 \\ 88.05 \end{bmatrix}$ كالمصفوفة B.

اضرب معكوس A في B.



الربط بالحياة اليومية

ارتفع متوسط أسعار البنزين بمقدار خمسة أضعاف من AED 0.68 للتر في عام 1977 إلى AED 0.92 للتر في عام 2007.

المصدر: وزارة الطاقة بالولايات المتحدة

تمرين موجّه

3. **الكتب الهزلية** عاد حمدان وخالد للتو من متجر للكتب الهزلية التي تبيع الكتب الهزلية الجديدة والمستعملة. أنفق حمدان AED 11.25 على 3 كتب جديدة و 4 قديمة، وأنفق خالد AED 15.75 على 10 مستخدمة و 3 جديدة. إذا كان يتم بيع الكتب الهزلية من نوع واحد بنفس السعر، ما هو الثمن بالدولار للكتاب الهزلي الجديد؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد هل المصفوفتان في كل زوج متعاكستان أم لا.**

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

3. $F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. $H = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

مثال 2 **جد معكوس كل مصفوفة، إن وجد.**

5. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

مثال 3 **استخدم معادلة المصفوفة لحل كل نظام معادلات.**

9. $-2x + y = 9$
$x + y = 3$

10. $4x - 2y = 22$
$6x + 9y = -3$

11. $-2x + y = -4$
$3x + y = 1$

12. المال كان مع عمرو 25 قطعة معدنية منها قطع بقيمة 50 فلس وقطع بقيمة 25 فلس. وكانت القيمة الإجمالية لجميع القطع النقدية AED 7. كم عدد القطع بقيمة 50 فلس والقطع بقيمة 25 فلس التي بحوزة عمرو؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات متعاكسان.**

13. $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

14. $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. $P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 5 \end{bmatrix}$

16. $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

مثال 2 **جد معكوس كل مصفوفة، إن وجد.**

17. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

مثال 3 **26. الخبز** تجهز بدرية طبقة تزيين ملونة لكعكة. للحصول على الدرجة الدقيقة من الأرجواني، فهي تحتاج إلى 25 ملليلترًا من محلول تلوين الطعام بتركيز 44%. يحتوي المتجر على محلول تلوين طعام أحمر بتركيز 25% ومحلول تلوين طعام أزرق بتركيز 50%. كم ملليلتر من كل من محلول تلوين الطعام الأزرق ومحلول تلوين الطعام الأحمر يجب خلطهما للحصول على القدر اللازم من محلول تلوين الطعام الأرجواني؟

المثابرة **استخدم معادلة المصفوفة لحل كل نظام معادلات.**

27. $-x + y = 4$
$-x + y = -4$

28. $-x + y = 3$
$-2x + y = 6$

29. $x + y = 4$
$-4x + y = 9$

30. $3x + y = 3$
$5x + 3y = 6$

31. $y - x = 5$
$2y - 2x = 8$

32. $4x + 2y = 6$
$6x - 3y = 9$

33. $1.6y - 0.2x = 1$
$0.4y - 0.1x = 0.5$

34. $4y - x = -2$
$3y - x = 6$

35. $2y - 4x = 3$
$4x - 3y = -6$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

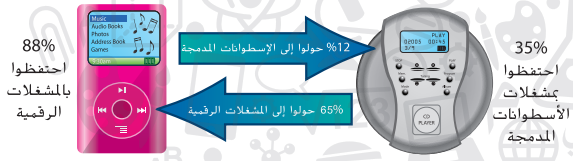
36. المجتمع الإحصائي يبين الرسم التخطيطي النسبة المئوية للهجرة السنوية بين المدينة وضواحيها.

a. اكتب مصفوفة لتمثيل التحولات من المجتمع الإحصائي في المدينة والضواحي.

b. يوجد حاليًا 16,275 شخصًا يعيشون في المدينة و 17,552 شخصًا يعيشون في الضواحي. على افتراض استمرار التوجهات على حالها، تنبأ بعدد الأشخاص الذين سيعيشون في الضواحي في العام المقبل.

c. استخدم معكوس المصفوفة من الجزء ***b*** لإيجاد عدد الأشخاص الذين عاشوا في المدينة العام الماضي.

37. الكتب المسموعة يبين الرسم التخطيطي الاتجاهات في ملكية مشغل الصوت الرقمي ومشغل الأقراص المدمجة المحمول على مدى السنوات الخمس الماضية في سنترال سيتي. كل شخص في سنترال سيتي لديه مشغل صوت رقمي أو مشغل أقراص مدمجة محمول. تتمتع سنترال سيتي بمجتمع إحصائي مستقر من 25.000 شخص، منهم 17,252 يمتلكون مشغلات الصوت الرقمية و 7,748 يمتلكون مشغلات الأقراص المدمجة المحمولة.



a. اكتب مصفوفة لتمثيل التحولات في ملكية المشغلات.

b. افترض أن الاتجاهات مستمرة. توقع عدد الأشخاص الذين سيملكون مشغلات الصوت الرقمية في العام المقبل.

c. استخدم معكوس المصفوفة من الجزء ***b*** لإيجاد عدد الأشخاص الذين امتلكوا مشغلات الصوت الرقمية العام الماضي.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

38. النقد تقوم أسماء وآمنة بإعداد معادلات المصفوفات للنظام $5x + 7y = 19$ و $3y + 4x = 10$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

أسماء

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

آمنة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

39. تحدٍ صف كيف تبدو معادلة مصفوفة بحلول لا نهائية.

40. الاستنتاج حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *دائمًا*، أم *أحيانًا* أم غير صحيحة *مطلقًا*. اشرح استنتاجك.

المصفوفة المربعة لها معكوس ضربي.

41. مسألة غير محددة الإجابة اكتب معادلة مصفوفة ليس لها حل.

42. الكتابة في الرياضيات متى تفضل حل نظام معادلات باستخدام طريقة جبرية ومتى تفضل استخدام المصفوفات؟ اشرح.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

43. يبيع متجر مشروب الزبادي المخاريط في ثلاثة أحجام: صغير، AED 0.89؛ ومتوسط، AED 1.19؛ وكبير، AED 1,39. في يوم واحد باع بدر 52 مخروطًا. باع عدد سبعة أكثر من المخاريط المتوسطة عن المخاريط الصغيرة. إذا باع بقيمة AED 58.98 في المخاريط، كم عدد المخاريط المتوسطة التي باعها؟

A 11 B 17 C 24 D 36

44. يظهر المخطط تعبير للقيم المختلفة لـ x.

x	x^2+x+1
1	3
2	7
3	13
4	21

يستنتج طالب أنه لجميع قيم x، ينتج $x^2 + x + 1$ عددًا أوليًا. حيث تخدم القيمة x كمثال معاكس لإثبات أن هذا الاستنتاج خاطئ؟

F -4 G -3 H 2 J 4

45. الإجابة القصيرة ما هو حل نظام المعادلات $6a + 8b = 5$ و $10a - 12b = 2$؟

46. SAT/ACT كل عام في مدرسة كابيتال الثانوية يصوت الطلاب لاختيار موضوع المعرض السنوي. تلقى موضوع "ليلة تحت النجوم" 225 صوتًا، و"وقت حياتي" تلقى 480 صوتًا. إذا صوتت نسبة 40% من طلاب الصف الحادي عشر لموضوع "ليلة تحت النجوم" و75% من طلاب الصف الثاني عشر صوتوا لموضوع "وقت حياتي"، كم عدد من صوت من طلاب الصف الحادي عشر والثاني عشر؟

A 176 طالبًا بالصف الثاني عشر و 351 طالبًا بالصف الحادي عشر

B 395 طالبًا بالصف الثاني عشر و 310 طالبًا بالصف الحادي عشر

C 380 طالبًا بالصف الثاني عشر و 325 طالبًا بالصف الحادي عشر

D 705 طالبًا بالصف الثاني عشر و 325 طالبًا بالصف الحادي عشر

E 854 طالبًا بالصف الثاني عشر و 176 طالبًا بالصف الحادي عشر

مراجعة شاملة

جد قيمة كل محدد. (الدرس 7-1)

47. $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$

49. $\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$

جد كل ناتج ضرب، إن أمكن. (الدرس 6-1)

50. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

51. $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

52. $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

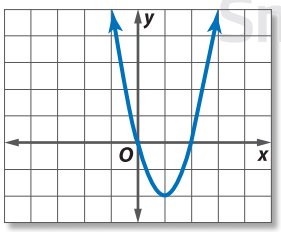
53. الحليب تنتج معمل منتجات ألبان بحد أقصى 200 L من الحليب خالي الدسم والحليب كامل الدسم كل يوم للتسليم إلى المخابز الكبيرة والمطاعم. يحتاج العملاء المنتظمين على الأقل 15 جالونًا من الحليب خالي الدسم و 21 L من الحليب كامل الدسم كل يوم. إذا كان الربح على لتر من الحليب خالي الدسم يبلغ AED 0.82 والربح على لترًا من الحليب كامل الدسم يبلغ AED 0.75، كم لترًا من كل نوع من الحليب يجب أن ينتج مصنع الألبان كل يوم لتحقيق أقصى قدر من الأرباح؟ (الدرس 4-1)

L L

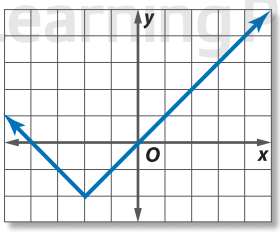
مراجعة المهارات

حدد نوع الدالة التي يمثلها كل تمثيل بياني.

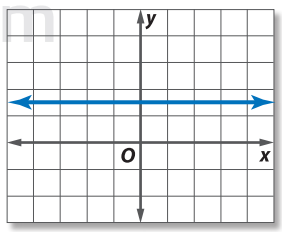
54.



55.



56.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر تقنية التمثيل البياني
المصفوفات الموسعة

باستخدام حاسبة تمثيل بياني، يمكنك حل نظام المعادلات الخطية باستخدام وظيفة مصفوفة. تحتوي **مصفوفة موسعة** على مصفوفة المعاملات مع عمود إضافي يحتوي على الحدود الثابتة. يمكنك استخدام حاسبة تمثيل بياني لتقليل المصفوفة الموسعة حتى يمكن تحديد حل أنظمة المعادلات بسهولة.

مثال

اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات التالي. ثم استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل النظام.

$2x + y + z = 1$
$3x + 2y + 3z = 12$
$4x + y + 2z = -1$

الخطوة 1 اكتب المصفوفة الموسعة وأدخلها في الحاسبة.

المصفوفة الموسعة $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$.

ابدأ بإدخال المصفوفة. **3** **4**

خطوات العملية على الحاسبة:

2nd [MATRIX] ▶ ▶ ENTER 3 ENTER 4 ENTER 2 ENTER 1
ENTER 1 ENTER 1 ENTER 3 ENTER 2 ENTER 3 ENTER 12
ENTER 4 ENTER 1 ENTER 2 ENTER (–) ENTER

الخطوة 2 جد صورة مستوى الصف المنخفض (rref) باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

خطوات العملية على الحاسبة:

2nd [QUIT] 2nd [MATRIX] ▶ ALPHA [B] 2nd [MATRIX]
ENTER) ENTER

ادرس مصفوفة المستوى المنخفض. أول ثلاثة أعمدة هي نفسها مثل مصفوفة محايدة 3 × 3. يمثل الصف الأول $x = -4$ ويمثل الصف الثاني $y = 3$ ويمثل الصف الثالث $z = 6$. الحل هو $(-4, 3, 6)$.

تمارين

اكتب مصفوفة موسعة لكل نظام معادلات. ثم قم بالحل باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

1. $3x + 2y = -4$
   $4x + 7y = 13$

2. $2x + y = 6$
   $6x - 2y = 0$

3. $2x + 2y = -4$
   $7x + 3y = 10$

4. $4x + 6y = 0$
   $8x - 2y = 7$

5. $6x - 4y + 2z = -4$
   $2x - 2y + 6z = 10$
   $2x + 2y + 2z = -2$

6. $5x - 5y + 5z = 10$
   $5x - 5z = 5$
   $5y + 10z = 0$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

أنظمة المعادلات والمتباينات (الدرسان 1–1 و 1–2)

- في طريقة التعويض، يتم حل معادلة لإيجاد متغير والتعويض لإيجاد قيمة متغير آخر. وفي طريقة الحذف، يتم حذف متغير عن طريق جمع المعادلات أو طرحها.
- يتم إيجاد حل لنظام من المتباينات من خلال التمثيل البياني للمتباينات وتحديد التقاطع بين التمثيلات البيانية.

البرمجة الخطية (الدرس 3–1)

- البرمجة الخطية هي طريقة لإيجاد القيم العظمى أو الصغرى لدالةٍ ما عبر نظام معين من المتباينات حيث تمثل كل متباينة قيدًا.

أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات (الدرس 4–1)

- يمكن حل نظام من المعادلات بثلاثة متغيرات جبريًا باستخدام طريقة التعويض أو طريقة الحذف.

العمليات على المصفوفات (الدرسان 6–1 و 7–1)

- يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لها نفس الأبعاد. اجمع أو اطرح العناصر المقابلة.
- يمكن ضرب مصفوفتين فقط إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

حل الأنظمة باستخدم قاعدة كرامر (الدرس 6–1)

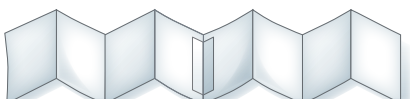
- إذا كان المحدِّد ليس صفرًا، فحينئذٍ يكون للنظام حل وحيد. أما إذا كان المحدِّد 0، فحينئذٍ إما أن النظام ليس له أي حل أو له حلول لا نهائية.

حل الأنظمة باستخدام معكوس المصفوفات (الدرس 9–1)

- المصفوفة المحايدة هي مصفوفة تربيعية يمثل العدد واحد جميع أعداد قطرها الرئيسي وتوجد أصفار في المواضع الأخرى.
- تكون المصفوفتان معكوسان لبعضهما البعض إذا كان ناتج ضربهما مصفوفة محايدة.
- لحل معادلة مصفوفة، جد معكوس مصفوفة المعامل. ثم اضرب كل حد من المعادلة في معكوس مصفوفة المعامل.

منظّم الدراسة مطويات

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

bounded محدودة	inconsistent غير متوافق
break-even point نقطة التعادل	independent مستقل
coefficient matrix مصفوفة المعاملات	inverse matrices مصفوفات المعكوس
consistent متوافق	matrix مصفوفة
constant matrix مصفوفة الثوابت	matrix equation معادلة المصفوفة
Cramer's Rule قاعدة كرامر	optimize البحث عن الحل الأمثل
dependent غير مستقل	ordered triple مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر
determinant محدِّد	scalar كمية عددية
diagonal rule قاعدة القطر	scalar multiplication ضرب الكميات العددية
dimensions أبعاد	substitution method طريقة التعويض
elimination method طريقة الحذف	unbounded غير محدود
feasible region منطقة الحلول الممكنة	variable matrix مصفوفة المتغير
identity matrix مصفوفة محايدة	

مراجعة المفردات

اختر من بين المصطلحات الموجودة أعلاه لإكمال كل جملة.

1. تُسمى منطقة الحلول الممكنة المفتوحة والتي يمكن أن تستمر إلى الأبد _____.
2. _____ يُقصد به البحث عن أفضل سعر أو ربح باستخدام البرمجة الخطية.
3. تُسمى المصفوفة التي تحتوي على ثوابت في نظام معادلات معين _____.
4. تسمى المصفوفة التي يمكن ضربها في ثابت _____.
5. _____ مصفوفة مكونة من 4 صفوف و 3 أعمدة هي 4×3.
6. يكون نظام المعادلات _____ إذا كان له حل واحد على الأقل.
7. المصفوفة _____ هي مصفوفة تربيعية، عندما تضرب في مصفوفة أخرى، تساوي نفس تلك المصفوفة.
8. _____ هي النقطة التي يتساوى فيها الدخل مع التكلفة.
9. يكون نظام المعادلات _____ إذا لم يكن له أي حلول.
10. إذا كان ناتج ضرب مصفوفتين مصفوفة محايدة، فإنهما يكونان _____.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

مراجعة درس بدرس

1-1 حل أنظمة المعادلات

حلّ كل من أنظمة المعادلات باستخدام التمثيل البياني.

11. $3x + 4y = 8$
$x - 3y = -6$

12. $x + \frac{8}{3}y = 12$
$\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}y = 6$

13. $y - 3x = 13$
$y = \frac{1}{3}x + 5$

14. $6x - 14y = 5$
$3x - 7y = 5$

15. **قص العشب** يعمل كل من خالد وجاسم بقص العشب. يتقاضى خالد رسوم خدمة تبلغ AED 30 و AED 10 للساعة. ويتقاضى جاسم رسوم خدمة تبلغ AED 10 و AED 15 للساعة. بعد كم ساعة سيأخذ خالد وجاسم نفس المبلغ؟ 4 ساعات

حلّ كل نظام معادلات باستخدام التعويض أو الحذف. 18. (5.25, –1.75)

16. $x + y = 6$
$3x - 2y = -2$

17. $5x - 2y = 4$
$-2y + x = 12$

18. $x + y = 3.5$
$x - y = 7$

19. $3y - 5x = 0$
$2y - 4x = -2$

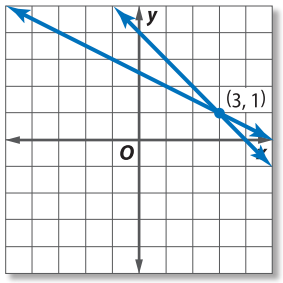
20. **المستلزمات المدرسية** في متجر للمستلزمات المكتبية، اشترى جمال 3 دفاتر و 5 أقلام بمبلغ AED 13.75. فإذا كان سعر الدفتر يزيد بمقدار AED 1.25 عن القلم، فكم سعر الدفتر؟ وكم سعر القلم؟ الدفتر: 2.50 درهم؛ القلم: 1.25 درهم

مثال 1

حل نظام المعادلات باستخدام التمثيل البياني.

$x + y = 4$

$x + 2y = 5$



تمثيل كلا المعادلتين على المستوى الإحداثي.

حل النظام هو (3, 1).

مثال 2

حلّ نظام المعادلات باستخدام التعويض أو الحذف.

$3x + 2y = 1$

$y = -x + 1$

عوّض بالمقدار $-x + 1$ عن y في المعادلة الأولى. ثم جد قيمة y.

$y = -x + 1$
$= -(-1) + 1$
$= 2$

$3x + 2y = 1$
$3x + 2(-x + 1) = 1$
$3x - 2x + 2 = 1$
$x + 2 = 1$
$x = -1$

الحل هو (−1, 2).

1-2 حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني

حلّ كل من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

21. $y < 2x - 3$
$y \geq 4$

22. $|y| > 2$
$x > 3$

23. $y \geq x + 3$
$2y \leq x - 5$

24. $y > x + 1$
$x < -2$

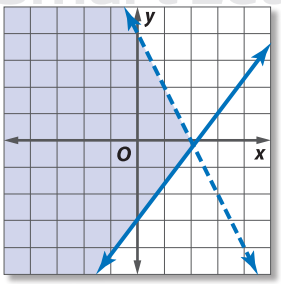
25. **المجوهرات** تصنع بدرية المجوهرات لبيعها في متجر الملابس الخاص بوالدتها. تستغرق بدرية ما لا يزيد عن 3 ساعات لصنع المجوهرات في أيام السبت. إنها تستغرق 15 دقيقة لإعداد لوازمها و 25 دقيقة لصنع كل سوار. ارسم رسمًا بيانيًا يمثل هذا.

مثال 3

حل نظام المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$y \geq \frac{3}{2}x - 3$

$y < 4 - 2x$



حل النظام هو المنطقة التي تستوفي كلا المتباينتين. وحل هذا النظام هو المنطقة المظللة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

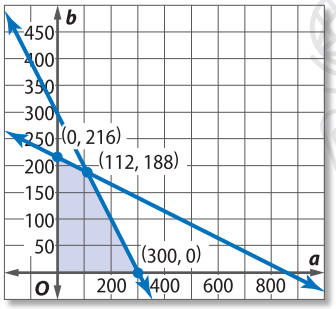
1-3 ايجاد الحل الأمثل بالبرمجة الخطية

26. الزهور يمكن لبائع زهور تجهيز باقة كبيرة خلال 18 دقيقة أو باقة بسيطة خلال 10 دقائق. يجهز بائع الزهور من الباقات البسيطة ما لا يقل عن ضعف عدد الباقات الكبيرة. يستطيع بائع الزهور أن يعمل لمدة 40 ساعة في الأسبوع فقط. يكون الربح في الباقات البسيطة 10 AED وفي الباقات الكبيرة 25 AED. جد عدد ونوع الباقات التي يجب أن يجهزها بائع الزهور لتحقيق أقصى قدر من الربح. 126 باقة بسيطة و 63 باقة كبيرة

27. الصناعة إحدى شركات الأحذية تصنع أحذية كرة قدم خارجية وداخلية. هناك عملية مكونة من خطوتين لكلا نوعي الأحذية. يتطلب كل زوج من الأحذية الخارجية ساعتين في الخطوة الأولى وساعة في الخطوة الثانية، ويحقق ربحًا قدره 20 درهمًا. ويتطلب كل زوج من الأحذية الداخلية ساعة في الخطوة الأولى و 3 ساعات في الخطوة الثانية، ويحقق ربحًا قدره 15 AED. يوجد لدى الشركة 40 ساعة عمل متاحة يوميًا للخطوة الأولى و 60 ساعة متاحة للخطوة الثانية. ما هو أقصى ربح للشركة المصنعة؟ ما مزيج الأحذية الذي يحقق هذا الربح؟ 480 AED؛ 12 حذاء خارجي، 16 حذاء داخلي

مثال 4

بستاني يزرع نوعين من الأعشاب في حديقة مساحتها 5,184 in^2. يتطلب العشب "A" مساحة قدرها 6 in^2، ويتطلب العشب "B" مساحة قدرها 24 in^2. لن يزرع البستاني أكثر من 300 نبات. إذا كان يمكن بيع العشب "A" مقابل 8 AED ويمكن بيع العشب "B" مقابل 12 AED. فكم يجب أن يباع من كل عشب لتحقيق أقصى قدر من الدخل؟



افترض أن a = عدد العشب "A" و b = عدد العشب "B".

$a \geq 0, b \geq 0,$
$6a + 24b \leq 5184,$
$a + b \leq 300$

التمثيل البياني للمتباينات. رؤوس منطقة الحلول الممكنة هي (0, 0) و (300, 0) و (0, 216) و (112, 188)

دالة الربح هي $f(a, b) = 8a + 12b$.

تحدث القيمة العظمى البالغة 3152 AED في (112, 188). إذًا يجب أن يزرع البستاني 112 من العشب "A" و 188 من العشب "B".

1-4 أنظمة المعادلات بثلاثة متغيرات

حلّ كلٍّ من أنظمة المعادلات.

28.
$a - 4b + c = 3$
$b - 3c = 10$
$3b - 8c = 24$

29.
$2x - z = 14$
$3x - y + 5z = 0$
$4x + 2y + 3z = -2$

30. مدن الملاهي ذهب حارب وإسماعيل ومروان إلى مدينة ملاهي. اشتروا وجبات خفيفة من نفس البائع. يوضح الجدول الوجبات الخفيفة والنقود التي دفعوها. كم كانت تكلفة كل وجبة؟

الاسم	الشطائر	الغشار	المياه الغازية	السعر
حارب	1	2	3	AED 15.25
اسماعيل	2	0	3	AED 14.00
حميد	1	2	1	AED 10.25

مثال 5

حلّ نظام المعادلات.

$x + y + 2z = 6$
$2x + 5z = 12$
$x + 2y + 3z = 9$

$2x + 2y + 4z = 12$
$(-)\ x + 2y + 3z = 9$
$x + z = 3$

المعادلة 1 × 2
المعادلة 3
اطرح.

$2x + 5z = 12$
$(-)\ 2x + 2z = 6$
$3z = 6$
$z = 2$

المعادلة 2
$2 \times (x + z = 3)$
اطرح.
اقسم الطرفين على 3.

جد حل نظام المعادلتين.

عوّض بالعدد 2 عن z في إحدى المعادلات التي تحتوي على متغيرين، وجد قيمة y. ثم عوّض بالعدد 2 عن z وقيمة y التي حصلت عليها في معادلة من النظام الأصلي لإيجاد قيمة x.

الحل هو (1, 1, 2).

برنامج محمد بن راشد للتعليم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

1-6 العمليات على المصفوفات

قم بإجراء العمليات الموضحة. إذا كانت المصفوفة غير موجودة، اكتب *مستحيلة*.

31. $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\right)$

32. $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

33. البيع بالتجزئة يشتري متجر الأزياء العصرية القمصان والبنطلونات الجينز والأحذية من إحدى الشركات المصنعة، ويضع هامش ربح، ثم يبيعها. يوضح الجدول سعر الشراء وسعر البيع.

العنصر	سعر الشراء	سعر البيع
القمصان	AED 15	AED 35
البنطلون الجينز	AED 25	AED 55
الحذاء	AED 30	AED 85

A. اكتب مصفوفة لسعر الشراء.

B. اكتب مصفوفة لسعر البيع.

C. استخدم عمليات المصفوفة لإيجاد الربح لكل قميص وبنطلون جينز وحذاء.

مثال 6

جد ناتج $2A + 3B$ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

$2B = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$

$3A = 3\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$2B + 3A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$

مثال 7

جد ناتج $3C - 5D$ إذا كانت $C = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ و $D = [9 \quad 8]$

$3C - 5D = 3\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix} - 5[9 \quad 8]$.

لأن الأبعاد مختلفة، لا يمكنك طرح المصفوفات.

1-7 ضرب المصفوفات

جد كل ناتج ضرب، إن أمكن.

34. $[3 \quad -7] \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 0 & -3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 8 & -5 \\ 12 & 0 & 9 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

37. البقالة اشترى محمود لتر من الحليب وتفاحتين و 4 وجبات عشاء مجمدة وعبوة حبوب. توضح المصفوفة التالية أسعار كل عنصر، على الترتيب.

[AED 3.99 AED 5.25 AED 0.49 AED 2.59]

استخدم ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الإجمالي الذي أنفقه محمود في البقالة.

مثال 8

جد XY إذا كانت $X = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

$XY = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ اكتب معادلة.

$= \begin{bmatrix} 0(8) + (-6)(-1) \\ 3(8) + 5(-1) \end{bmatrix}$ اضرب الأعمدة في الصفوف.

$= \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix}$ بسّط.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1-8 حل أنظمة المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

جد قيمة كل محدد.

38. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات.

40. $3x - y = 0$
$5x + 2y = 22$

41. $5x + 2y = 4$
$3x + 4y + 2z = 6$
$7x + 3y + 4z = 29$

42. المجوهرات دفعت أماني AED 98.25 مقابل 3 قلائد وقرطين. ودفعت وفاء AED 133.50 مقابل قلادتين و 4 أقراط. استخدم قاعدة كرامر لإيجاد تكلفة قلادة واحدة وتكلفة قرط واحد.

مثال 9

جد القيمة $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - (-6)(2)$ تعريف المحدّد

$= 20 + 12$ or 32 بسّط.

مثال 10

استخدم قاعدة كرامر لحل المعادلة $2a + 6b = -1$ **و** $a + 8b = 2$.

$a = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر $b = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$

$= \dfrac{-8 - 12}{16 - 6}$ جد قيمة كل محدد. $= \dfrac{4 + 1}{16 - 6}$

$= \dfrac{-20}{10}$ or -2 بسّط. $= \dfrac{5}{10}$ or $\dfrac{1}{2}$

الحل هو $\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$.

1-9 حل أنظمة المعادلات باستخدام معكوسات المصفوفات

جد معكوس كل مصفوفة، إن وجد.

43. $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

45. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

استخدم معادلة المصفوفة لحل كل نظام معادلات.

46. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

47. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

48. الغذاء الصحي يبيع محمد المكسرات والزبيب بالرطل. اشترت سها 2 رطل من المكسرات و 2 رطل من الزبيب مقابل AED 23.50. واشترت سالي 3 رطل من المكسرات ورطل من الزبيب مقابل AED 22.25. ما تكلفة الرطل من المكسرات والرطل من الزبيب؟

مثال 11

جد حلّ $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$.

الخطوة 2 جد معكوس مصفوفة المعاملات.

$A^{-1} = \dfrac{1}{-12 - (-15)} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ أو $\dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

الخطوة 2 اضرب كل حد في معكوس المصفوفة.

$\dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 90 \\ 27 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار

حُلّ كل نظام معادلات باستخدام التعويض أو الحذف.

1. $y = x + 4$
$x + y = -12$

2. $3x + 5y = -7$
$6x - 4y = 0$

3. $5x + 2y = 4$
$3y - 4x = -40$

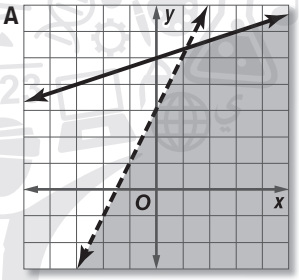
4. $8x - 3y = -13$
$-3x + 5y = 1$

5. الاختيار من متعدد ما التمثيل البياني الذي يوضح حل نظام المتباينات؟

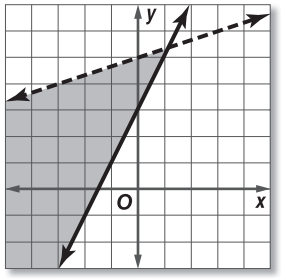
$y \leq 2x + 3$

$y < \frac{1}{3}x + 5$

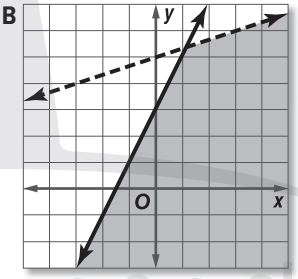
A



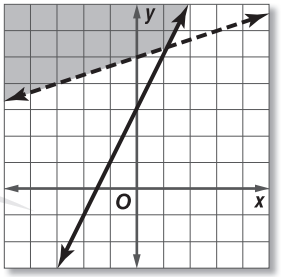
C



B



D



حّل كل نظام من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

6. $x + y > 6$
$x - y < 0$

7. $y \geq 2x - 5$
$y \leq x + 4$

8. $3x + 4y \leq 12$
$6x - 3y \geq 18$

9. $5y + 2x \leq 20$
$4x + 3y > 12$

10. الصالونات تعمل سمية خبيرة تجميل أظافر. و تخصص 20 دقيقة للمانيكير و 45 دقيقة للباديكير في عملها الذي يستغرق 7 ساعات يوميًا. لا يمكن حجز أكثر من 5 جلسات باديكير كل يوم. تبلغ الأسعار 18 درهمًا للمانيكير و 45 درهمًا للباديكير. كم عدد جلسات المانيكير والباديكير التي يجب أن تحجزها الآنسة سمية لتحقيق أقصى دخل لها يوميًا؟ ما أقصى دخل يومي لها؟

11. كرة القدم الجامعية فاز أحمد صلاح بالمركز الثاني بشكل عام في تصويت كأس بطولة. يتم منح اللاعبين 3 نقاط لكل صوت للمركز الأول، ونقطتين لكل صوت للمركز الثاني، ونقطة واحدة لكل صوت للمركز الثالث. حصل أحمد صلاح على إجمالي 490 صوت للمركز الأول والثاني والثالث بإجمالي 878 نقطة. فإذا حصل في المركز الثاني على أكثر من ضعف عدد أصوات المركز الثالث بعدد 4 أصوات، فكم عدد الأصوات التي حصل عليها لكل مركز؟

قم بإجراء العمليات الموضحة. إذا كانت المصفوفة غير موجودة، اكتب *مستحيلة*.

12. $-3\begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. الاختيار من متعدد ما قيمة

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}?$$

F -44

H $\frac{1}{44}$

G $-\frac{1}{44}$

J 44

جد معكوس كل مصفوفة، إن وجد.

17. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات.

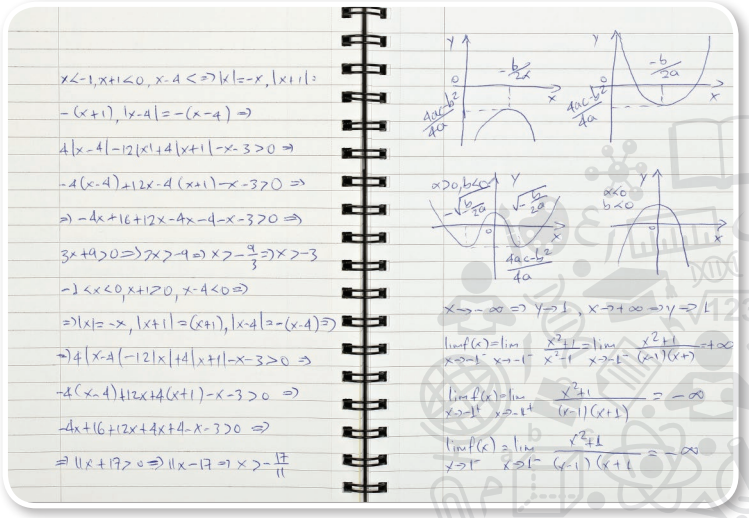
21. $2x - y = -9$
$x + 2y = 8$

22. $x - y + 2z = 0$
$3x + z = 11$
$-x + 2y = 0$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحضير للاختبارات المعيارية



الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

تتطلب منك الأسئلة ذات الإجابات القصيرة تقديم حل للمسألة إلى جانب الأسلوب و/أو التفسير و/أو التعليل المستخدم للوصول إلى الحل.

إستراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

يتم تصنيف الأسئلة ذات الإجابات القصيرة باستخدام **معيار**، أو دليل رصد الدرجات. وفيما يلي مثال على معيار رصد درجات سؤال قصير الإجابة.

معايير رصد الدرجات	
المعايير	**الدرجات**
درجة كاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
الدرجات الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.	1
لن يتم منح درجات: إما أن الإجابة غير مكتوبة أو غير منطقية.	0

عند حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة، تذكر...

- اشرح استنتاجك أو اذكر أسلوبك لحل المسألة.
- اعرض كل عملك أو خطواتك.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات المعطاة في المسألة لحلها.

تفرض الشركة "A" رسومًا شهرية بقيمة AED 14.50 بالإضافة إلى AED 0.05 في الدقيقة لخدمة الهاتف الجوال. وتفرض الشركة "B" رسومًا شهرية بقيمة AED 20.00 بالإضافة إلى AED 0.04 في الدقيقة. هو عدد الدقائق التي يمكن أن يكون فيها مجموع الرسوم الشهرية هو نفسه مع كل شركة؟

اقرأ المسألة بعناية. لقد تم إعطاؤك معلومات عن شركتي هواتف جوالة مختلفتين ورسومهما الشهرية. وبما أن الوضع ينطوي على مبلغ ثابت وسعر متغير، فيمكنك إنشاء نظام معادلات وحله.

مثال على إجابة من نقطتين:

كتابة نظام معادلات وإيجاد حله.

الرسوم الثابتة + السعر × الدقائق = إجمالي الرسوم

y = إجمالي الرسوم، x = الدقائق المستهلكة

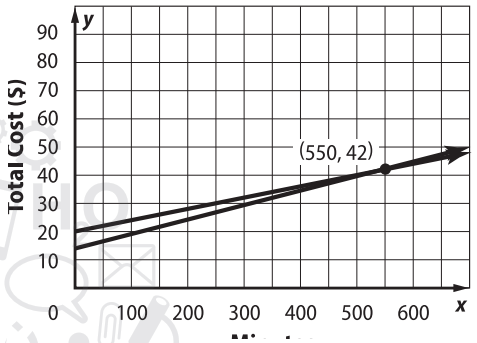
$y = 14.5 + 0.05x$ (الشركة "A")

$y = 20 + 0.04x$ (الشركة "B")

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حل النظام باستخدام التمثيل البياني.



الحل هو (42 ,550). إذًا، مع كل شركة، إذا كان العميل يستهلك 550 دقيقة فسيكون إجمالي الرسوم الشهرية 42 درهمًا.

تم ذكر الخطوات والحسابات والاستنتاج بوضوح. وقد وصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

تمارين

اقرأ كل مسألة. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. اقترض حارب وحسن AED 1,400 لبدء أعمال جز العشب. إنهما يأخذان من عملائهما AED 45 لكل حديقة، ومع كل حديقة يقومان بجز عشبها، يتكبدان AED 10.50 في نفقات التشغيل. كم عدد الحدائق التي يجب عليهما جزها من أجل البدء في تحقيق الربح؟

2. دائرة نصف قطرها r محيطة بمربع. ما هي النسبة الدقيقة لمساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟

3. يستطيع السيد حمد إنفاق ما لا يزيد عن 50 درهمًا على المستلزمات الفنية. تبلغ تكلفة عبوات فرش الطلاء AED 4.75 لكل منها، وتبلغ تكلفة علب أقلام الرصاص الملونة AED 6.50 لكل منها. وهو يريد شراء عبوتين على الأقل من كل نوع من المستلزمات. اكتب نظامًا من المتباينات وعيّن منطقة الحلول الممكنة على شبكة إحداثيات. قدم ثلاثة حلول مختلفة للنظام.

4. تبيع بثينة القلائد المنقوشة عبر الإنترنت. وتقوم بشراء 50 قلادة مقابل AED 400، وتكلفها 3 دراهم إضافية مقابل كل نقش مخصص. فإذا كانت تتقاضى AED 20 لكل قلادة، فكم عدد القلائد التي تحتاج إلى بيعها من أجل تحقيق ربح لا يقل عن AED 225؟

5. باع معرض سيارات 7,378 سيارة خلال عام 2011. وقد مثل هذا زيادة بنسبة بلغت 8.5% عن عدد السيارات التي تم بيعها خلال عام 2010. ما الزيادة في عدد السيارات المبيعة في عام 2011؟

6. تبلغ النسبة بين أضلاع مثلثين متشابهين 3:5. فإذا كانت مساحة المثلث الأكبر $600\ cm^2$. فما مساحة المثلث الأصغر؟

cm^2

7. كان لدى جاسم 35 درهمًا في حساب ادخار وبدأ يضيف AED 25 في الأسبوع. في نفس الوقت، كان لدى شقيقته سندية AED 365 في حسابها وبدأت في إنفاق AED 30 في الأسبوع. بعد كم أسبوع سيكون لدى جاسم وسندية نفس المبلغ في حسابي الادخار الخاصين بهما؟

8. يرغب أحد مخططي المدينة في إنشاء رصيف بشكل قُطري عبر حديقة مستطيلة الشكل. تبلغ مساحة الحديقة 140 m في 225 m. ستبلغ تكلفة إنشاء الرصيف AED 30 لكل متر. كم ستكون التكلفة الإجمالية للرصيف؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

اختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. توضح المصفوفة L متوسط درجات الحرارة المنخفضة، بدرجات سليزيوس، لكل شهر في المكان الذي يعيش فيه طارق. وتوضح المصفوفة H متوسط درجات الحرارة المرتفعة شهريًا.

$$L = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

أي عملية سوف تستخدم لإيجاد الفرق بين متوسط درجات الحرارة المرتفعة ومتوسط درجات الحرارة المنخفضة كل شهر؟

A $L + H$

B $H - L$

C $H \times L$

D $L - H$

2. أوجد قيمة $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [3 \quad 1]$، إن أمكن.

F $[-3]$

G $[11]$

H $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

J غير محددة

3. ما المعادلة المكافئة للمعادلة $4x - 3(2x + 7) = 5x$؟

A $-2x - 21 = 5x$

B $-2x + 7 = 5x$

C $-2x + 21 = 5x$

D $6x - 7 = 5x$

4. مثلث DEF تكون رؤوسه $D(-6, 2)$، و $E(3, 5)$، و $F(8, -7)$. قيّم المحدّد الوارد أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

f 54.5 وحدة مربعة

G 58 وحدة مربعة

H 60 وحدة مربعة

J 61.5 وحدة مربعة

5. افرض أن أسامة يبيع التفاح والطماطم في متجر أحد الفلاحين. إذا باع 280 وحدة في الصباح وربح 65.20 درهمًا، فكم تفاحة باعها؟

العنصر	التكلفة
التفاح	AED 0.25
طماطم	AED 0.20

A 96

B 126

C 168

D 184

6. ما هي أبعاد $D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$؟

f 4×2

G 2×4

H 4×8

J 8×4

7. ما هي مجموعة حل $-2 \le |x + 7| - 6$؟

A $\{x \mid -15 \le x \le 1\}$

B $\{x \mid -1 \le x \le 3\}$

C $\{x \mid x \le -1$ أو $x \ge 3\}$

D $\{x \mid x \le -15$ أو $x \ge 1\}$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 حاصل ضرب مصفوفة 1 في 2 ومصفوفة 2 في 1 هو مصفوفة 1 في 1. لذلك، يمكن تجاهل اختيارات الإجابة "g" و "h".

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة مختصرة/إجابة شبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها لك معلمك أو في ورقة أخرى.

8. هل يوجد معكوس للمصفوفة B؟ اشرح لِمَ أو لِمَ لا.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

9. إجابة شبكية قيّم محدّد

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. يوجد لدى سها 14 قطعة نقدية من فئة 25 فلس والعشر فلسات. تبلغ القيمة الإجمالية لجميع القطع النقدية 2.75 درهم. استخدم هذه المعلومات للإجابة على كل سؤال.

أ. افرض أن a تمثل عدد القطع فئة 10 فلسات التي لدى سها، وافرض أن b تمثل عدد القطع فئة 25 فلس. اكتب نظام معادلات لتمثيل هذه الحالة.

ب. اكتب مصفوفة معادلات يمكن استخدامها لحل a و b.

ج. حل معادلة المصفوفة باستخدام المعكوسات. كم عدد القطع فئة 10 فلسات والقطع فئة 25 فلس التي لدى سها؟

11. إجابة شبكية تستخدم أسماء شبكة إحداثية لتصميم أرضية جديدة في الفناء الخلفي. يتم تمثيل الأرضية بتقاطع $y \leq 20$ و $x \leq 16$، و $y \geq 0$، و $x \geq 0$ و $y \leq -x + 32$. فإذا كانت كل وحدة من الشبكة الإحداثية تمثل واحد متر، فما مساحة الأرضية؟ عبر عن إجابتك بالمتر المربع.

12. ما هي إحداثيات تقاطعات المحورين x و y للتمثيل البياني للعدد $2y = 4x + 3$؟

الإجابة الموسعة

سجّل إجاباتك في ورقة، واكتب الحل هنا.

13. افرض أن لميس تعمل على خبز البسكويت والكعك في منفذ بيع مخبوزات. تستهلك كل صينية من البسكويت 5 أكواب من الدقيق وكوبين من السكر. وتستهلك كل صينية من الكعك 5 أكواب من الدقيق وكوب من السكر. يوجد لدى لميس 40 كوبًا من الدقيق و 15 كوبًا من السكر من أجل الخبز. سوف تحصل ليلى على ربح يبلغ 12 درهمًا من كل صينية بسكويت يتم بيعها و 8 درهمًا من كل صينية كعك يتم بيعها.

أ. افرض أن x تمثل عدد صواني البسكويت المخبوزة، وافرض أن y تمثل عدد صواني الكعك المخبوزة. اكتب نظام متباينات لتمثيل العدد المختلف من الصواني التي تستطيع لميس خبزه.

ب. مثل بيانيًا نظام المتباينات لتوضيح منطقة الحلول الممكنة. ضع قائمة بإحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

ج. اكتب دالة ربح لبيع x صواني من البسكويت و y صواني من الكعك.

د. كم عدد صواني البسكويت والكعك التي يجب أن تخبزها لميس لتحقيق أقصى قدر من الربح؟ كم سيكون الربح الإجمالي؟

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education