الوحدة 2

العلاقات والدوال التربيعية

السابق

- قمتَ بتمثيل المعادلات والمتباينات الخطية بيانيًا.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا.
  - حل المعادلات التربيعية.
  - إجراء العمليات على الأعداد المركبة.
  - حل المتباينات التربيعية وتمثيلها بيانيًا.

لماذا؟

- **الحركة** يمكن نمذجة المسار الذي تسلكه كرة القدم أو الألعاب النارية بدالة تربيعية، حيث يمكن للدوال التربيعية تخطيط مسار جسم متحرك. وفي هذه الوحدة، ستلقي نظرة على منجنيق اليقطين وألعاب الملاهي وحركة الغواص.

chapter sourced from Quadratic Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter © 2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

تدريب سريع

إذا كان $f(x) = 2x^2 + 4$ و $g(x) = -x^2 - 2x + 3$، فجد قيمة كل مما يلي.

1. $f(-1)$
2. $f(3)$
3. $f(0)$
4. $g(4)$
5. $g(0)$
6. $g(-3)$

7. **الأسماك** يسبح سمك التونة بسرعة ثابتة تصل إلى 9 كيلومترات في الساعة حتى يموت ولا يتوقف عن السباحة مطلقًا.
   a. اكتب دالة تمثل هذه الحالة.
   b. جد قيمة الدالة لتقدير المسافة التي تقطعها سمكة تونة عمرها سنتان.

8. **الميزانية** وضعت مايسة ميزانية قدرها AED 65 في اليوم للطعام خلال رحلة عمل. اكتب دالة تمثل هذه الحالة وجد قيمة ما تنفقه خلال رحلة عمل تستمر أسبوعين.

حلّل كثيرات الحدود التالية إلى عواملها الأولية. وإذا لم تكن قابلةً للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

9. $x^2 + 13x + 40$
10. $x^2 - 10x + 21$
11. $2x^2 + 7x - 4$
12. $2x^2 - 7x - 15$
13. $x^2 - 11x + 15$
14. $x^2 + 12x + 36$

15. **مخطط الأرضية** مساحة الحجرة مستطيلة الشكل الموضحة أدناه $x^2 + 14x + 48$ مترًا مربعًا. فإذا كان عرض الغرفة $(x + 6)$ أمتار، فما طولها؟

$A = (x^2 + 14x + 48)\text{m}^2$ $(x + 6)\text{m}$

مراجعة سريعة

مثال 1

إذا كان $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ و $g(x) = 3x^2 - 5$، فجد قيمة كل مما يلي.

a. $f(2)$

$f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ الدالة الأصلية

$f(2) = -2 \times (2)^2 + 3 \times (2) - 1$ عوّض بـ 2 عن x

$= -8 + 6 - 1$ أو -3 بسّط

b. $g(-2)$

$g(x) = 3x^2 - 5$ الدالة الأصلية

$g(-2) = 3 \times (-2)^2 - 5$ عوّض بـ -2 عن x.

$= 12 - 5$ أو 7 بسّط

مثال 2

حلّل $2x^2 - x - 3$ إلى عواملها الأولية. وإذا لم تكن قابلةً للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

لإيجاد معاملات حدود x، يجب إيجاد عددين ناتج ضربهما $2 \times (-3)$ أو -6، ومجموعهما -1 المعاملان هما 2 و-3 لأن $2 \times (-3) = -6$ و$-1 = -3 + 2$ أعد كتابة التعبير وحلّل بالتجميع.

$2x^2 - x - 3$

$= 2x^2 + 2x - 3x - 3$ عوّض بـ $-3x + 2x$ عن $-x$

$= (2x^2 + 2x) + (-3x - 3)$ خاصية التجميع

$= 2x(x + 1) + -3(x + 1)$ حلّل لإخراج العامل المشترك الأكبر

$= (2x - 3)(x + 1)$ خاصية التوزيع

يشير مصطلح المرابحة إلى مقدار الأموال المدفوعة أو المتحصلة عند اقتراض الأموال أو إقراضها.
إذا اقترض العميل من المصرف أموالًا، فسيدفع العميل للمصرف نسبة مرابحة نظير استخدامه لأموال المصرف. وإذا ادخر العميل أموالًا في حساب مصرفي، فسيدفع المصرف للعميل نسبة مرابحة نظير استخدامه لأموال العميل.
يسمى المبلغ المقترض أو المدّخر في البداية بالمبلغ الأساسي. ونسبة المرابحة هي نسبة مئوية تتم إضافتها أو خصمها خلال فترة زمنية معينة. والمرابحة البسيطة هي مقدار مبلغ المرابحة المُضاف أو المخصوم بعد تطبيق نسبة المرابحة على المبلغ الأساسي.
المرابحة البسيطة (I) هي ناتج ضرب ثلاث قيم هي: المبلغ الأساسي (P) ونسبة المرابحة كرقم عشري (r) والفترة الزمنية (t): $I = P \times r \times t$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

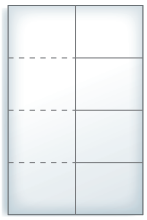
ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك لهذه الوحدة.
ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

منظّم الدراسة FOLDABLES

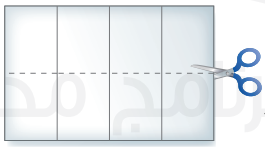
الدوال التربيعية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 2 عن العلاقات والدوال التربيعية.
ابدأ بورقة واحدة.

1 **اطوِ** الورقة بالنصف طوليًا.

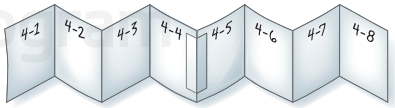
2 **اطوِ** الورقة إلى أرباع بالعرض.



3 **اقطع** الورقة على طول الطية الوسطى من الحافة إلى الثنية الأخيرة كما هو موضح في الشكل.



4 **أعد** طي الطية الطولية وألصق الجزء غير المقطوع من أعلى. عنون كل جزء برقم درس وأغلقه لتكوين كتيّب.



المفردات الجديدة

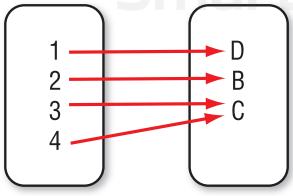
العربية	English
الحد التربيعي	quadratic term
الحد الخطي	linear term
الحد الثابت	constant term
الرأس	vertex
القيمة العظمى	maximum value
القيمة الصغرى	minimum value
معادلة تربيعية	quadratic equation
الصيغة القياسية	standard form
الجذر	root
الصفر	zero
الوحدة التخيلية	imaginary unit
العدد التخيلي البحت	pure imaginary number
العدد المركب	complex number
مرافقات مركبة	complex conjugates
إكمال المربع	completing the square
الصيغة التربيعية أو القانون العام	Quadratic Formula
المميز	discriminant
صيغة الرأس	vertex form
المتباينة التربيعية	quadratic inequality

مراجعة المفردات

المجال مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تمثل علاقة ما

الدالة علاقة يرتبط فيها كل إحداثي x بإحداثي y واحد فقط

المدى مجموعة الإحداثيات y للأزواج المرتبة التي تمثل علاقة ما



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 1-2

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

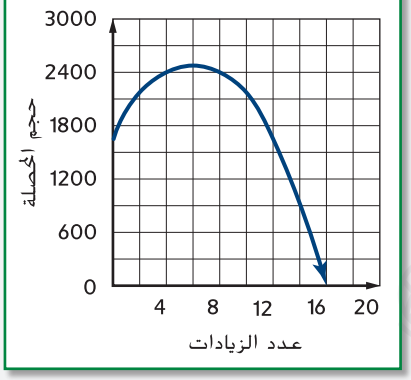
السابق
- لقد تعرّفتَ على التمثيلات البيانية للدوال واستخدمتَها.

الحالي
1. تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا.
2. إيجاد وتفسير القيم العظمى والصغرى للدالة التربيعية.

لماذا؟
- ينظم محمود سباقًا خيريًا، ويخطط لتحصيل رسوم اشتراك بقيمة AED 20 من كل لاعب من 80 لاعبًا. وقد قرر مؤخرًا زيادة رسوم الاشتراك بمقدار AED 5 فقلّ عدد اللاعبين المشتركين بمقدار 5 أفراد مع الزيادة. وقد استعان بهذه البيانات لتحديد عدد الزيادات اللازمة على الرسوم لتحقيق أكبر قيمة للأموال المجمّعة.

تمثل الدالة التربيعية الموجودة على اليسار هذه الحالة. لقد ازدادت محصلة جوائز السباق عند زيادة الرسوم في البداية، لكنها بدأت تنخفض في النهاية بسبب ارتفاع قيمة الرسوم.

محصلة جوائز السباق



1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

هذه الدوال **حدًّا تربيعيًّا** و**حدًّا خطيًّا** و**حدًّا ثابتًا**. وموضح أدناه الدالة التربيعية العامة.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ حيث } a \neq 0$$

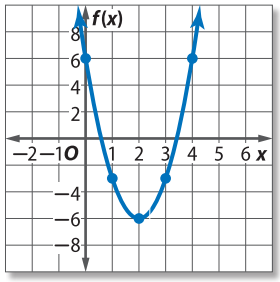
الحد التربيعي — الحد الخطي — الحد الثابت

يُطلق على التمثيل البياني للدالة التربيعية **القطع المكافئ**. ولتمثيل الدالة التربيعية بيانيًا، مثّل الأزواج المرتَّبة التي تحقق الدالة.

مثال 1 التمثيل البياني للدالة التربيعية باستخدام جدول

أنشئ جدول القيم لتمثيل الدالة $f(x) = 3x^2 - 12x + 6$ بيانيًا.

اختر قيمًا صحيحة لـ x ثم جد قيمة الدالة لكل قيمة. مثّل الأزواج الإحداثية الناتجة بيانيًا وصِل بين النقاط بمنحنى منتظم.



x	$3x^2 - 12x + 6$	$f(x)$	$(x, f(x))$
0	$3(0)^2 - 12(0) + 6$	6	(0, 6)
1	$3(1)^2 - 12(1) + 6$	-3	(1, -3)
2	$3(2)^2 - 12(2) + 6$	-6	(2, -6)
3	$3(3)^2 - 12(3) + 6$	-3	(3, -3)
4	$3(4)^2 - 12(4) + 6$	6	(4, 6)

تمرين موجّه

أنشئ جدول القيم لتمثيل كل دالة بيانيًا.

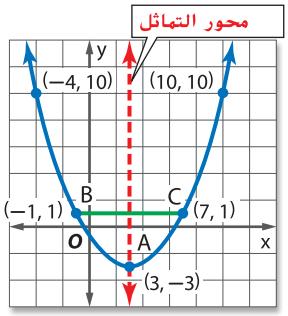
1A. $g(x) = -2x^2 + 8x - 3$

1B. $h(x) = 4x^2 - 8x + 1$

المفردات الجديدة
- الدالة التربيعية quadratic function
- الحد التربيعي quadratic term
- الحد الخطي linear term
- الحد الثابت constant term
- القطع المكافئ parabola
- محور التماثل axis of symmetry
- الرأس vertex
- القيمة العظمى maximum value
- القيمة الصغرى minimum value

ممارسات في الرياضيات
1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



لاحظ في المثال 1 أنّ ثمة نمط لقيم $f(x)$. وسبب ذلك هو محور تماثل القطوع المكافئة. و**محور التماثل** هو خط يمر بالتمثيل البياني للقطع المكافئ ليقسمه إلى نصفين متطابقين. ويمثل كل جانب في القطع المكافئ انعكاسًا للجانب الآخر.

يتقاطع محور التماثل مع القطعَ المكافئ في نقطة واحدة فقط، تُسمى **الرأس**. وتتمثل رأس التمثيل البياني على اليسار في النقطة $A(3, -3)$.

لاحظ أنّ إحداثيَّي x للنقطتين B وC يبعدان 4 وحدات عن الإحداثي x للرأس، كما أنّ لهما الإحداثي y نفسه. ويعود هذا إلى تماثل التمثيل البياني.

مراجعة المفردات

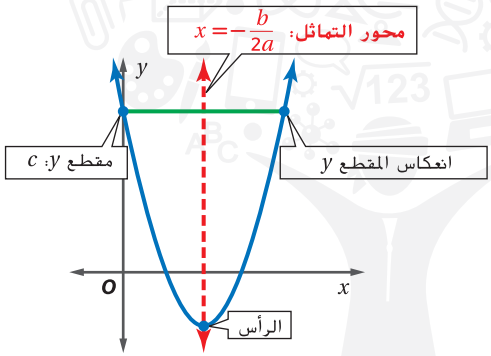
التماثل إذا كان الشيء متماثلًا، فإنّ جانبيه المتقابلين يمثلان صورتين مماثلتين بعضهما لبعض.

المفهوم الأساسي تمثيل الدالة التربيعية بيانيًا – القطع المكافئ

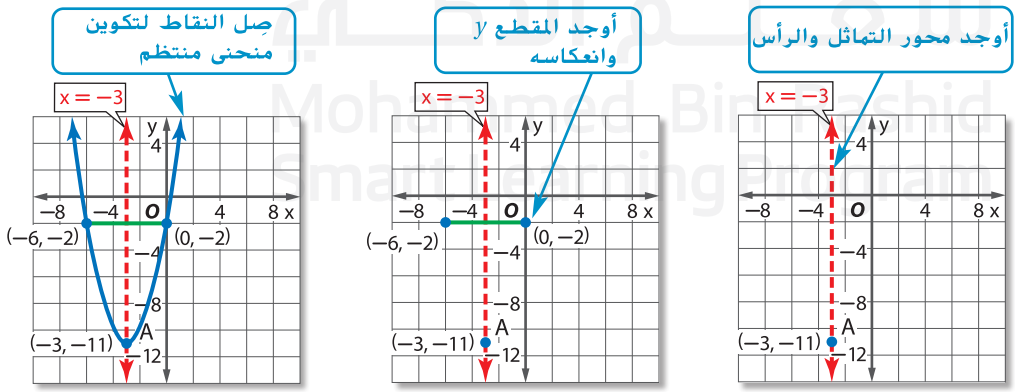
التعبير اللفظي فكّر في التمثيل البياني للدالة $y = ax^2 + bx + c$. حيث $a \neq 0$

- المقطع y هو c أو $a(0)^2 + b(0) + c$
- معادلة محور التماثل هي $x = -\frac{b}{2a}$.
- الإحداثي x للرأس هو $-\frac{b}{2a}$

النموذج



الآن يمكنك استخدام محور التماثل ليساعدك في رسم النقاط وتمثيل القطع المكافئ بيانيًا. بالنسبة إلى $y = x^2 + 6x - 2$ أدناه، يكون محور التماثل $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times (1)}$ أو $x = -3$



نصيحة دراسية

رسم الانعكاسات يمثل انعكاس نقطة ما صورتها المماثلة على الجانب الآخر من محور التماثل.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 2 محور التماثل والمقطع y والرأس

فكّر في الدالة $f(x) = x^2 + 4x - 3$

a. جد المقطع y ومعادلة محور التماثل والإحداثي x للرأس.

نظرًا لأن الدالة بالصيغة $f(x) = ax^2 + bx + c$، يمكننا تحديد كل من a وb وc.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$f(x) = 1x^2 + 4x - 3 \rightarrow a = 1, b = 4, c = -3$$

المقطع y هو $c = -3$

استخدم كلًا من a وb لإيجاد معادلة محور التماثل.

$$x = -\frac{b}{2a}$$
$$= -\frac{4}{2\times(1)}$$
$$= -2$$

معادلة محور التماثل هي $x = -2$ ومن ثم يكون الإحداثي x للرأس -2

b. أنشئ جدول القيم الذي يتضمن الرأس.

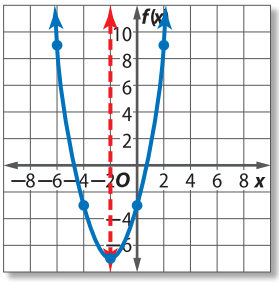
حدد خمس نقاط معينة بحيث تتوسطها نقطة الرأس ونقطتان من كل جانب، يشمل ذلك مقطع y وانعكاسه. استخدم التماثل لتحديد قيم y للانعكاسات.

x	$x^2 + 4x - 3$	$f(x)$	$(x, f(x))$
-6	$(-6)^2 + 4\times(-6) - 3$	9	(-6, 9)
-4	$(-4)^2 + 4\times(-4) - 3$	-3	(-4, -3)
-2	$(-2)^2 + 4\times(-2) - 3$	-7	(-2, -7)
0	$(0)^2 + 4\times(0) - 3$	-3	(3, -0)
2	$(2)^2 + 4\times(2) - 3$	9	(2, 9)

c. استخدم هذه المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا.

مثّل النقاط من الجدول بيانيًا ثم صل بينها بمنحنى منتظم.

ارسم محور التماثل، $x = -2$، في صورة خط متقطع. يجب أن يكون التمثيل البياني متماثلًا حول هذا الخط.



نصيحة دراسية

القانون العام تأكد من أن الدالة بالصيغة القياسية التربيعية، $y = ax^2 + bx + c$، قبل التمثيل البياني.

نصيحة دراسية

الكسور عندما يكون الإحداثي x للرأس كسرًا، حدد أقرب عدد صحيح للنقطة التالية لتجنّب استخدام الكسور وتبسيط العمليات الحسابية.

تمرين موجّه

2. فكّر في الدالة $f(x) = -5x^2 - 10x + 6$

A. جد المقطع y ومعادلة محور التماثل والإحداثي x للرأس.

B. أنشئ جدول القيم الذي يتضمن الرأس.

C. استخدم هذه المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 القيم العظمى والصغرى

يمثل الإحداثي y للرأس في الدالة التربيعية **القيمة العظمى** أو **القيمة الصغرى** للدالة. وتمثل هاتان القيمتان أكبر أو أقل قيمة ممكنة يمكن أن تصل إليها الدالة.

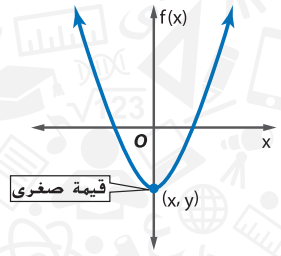
المفهوم الأساسي القيمة العظمى والصغرى

التعبير اللفظي يكون التمثيل البياني للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$

- مفتوحًا لأعلى وله قيمة صغرى إذا كانت $a > 0$ و
- مفتوحًا لأسفل وله قيمة عظمى إذا كانت $a < 0$

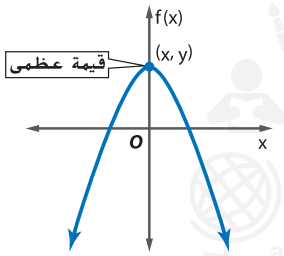
النموذج

a موجبة.



الإحداثي y
القيمة الصغرى.

a سالبة.



الإحداثي y
القيمة العظمى.

انتبه!

القيم العظمى والقيم الصغرى إنّ مصطلحَي *النقطة الصغرى* و*القيمة الصغرى* ليسا مترادفين. حيث تمثل النقطة الصغرى على التمثيل البياني للدالة التربيعية الزوج المرتب الذي يصف موقع الرأس. في حين تمثل القيمة الصغرى للدالة الإحداثي y للنقطة الصغرى. وهي أقل قيمة تنتج عند إيجاد قيمة $f(x)$ بالنسبة إلى جميع قيم x.

مثال 3 القيم العظمى أو الصغرى

فكّر في الدالة $f(x) = -4x^2 + 12x + 18$

a. حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم صغرى.

بالنسبة إلى هذه الدالة، $a = -4$. ومن ثَم يكون التمثيل البياني مفتوحًا لأسفل ويكون للدالة قيمة عظمى.

b. حدد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

القيمة العظمى للدالة هي الإحداثي y للرأس.

الإحداثي x للرأس هو $-\frac{12}{2\times(-4)}$ أو 1.5

جد الإحداثي y للرأس من خلال إيجاد قيمة الدالة عند $x = 1.5$

$$f(x) = -4x^2 + 12x + 18$$
$$= -4 \times (1.5)^2 + 12 \times (1.5) + 18$$
$$= -9 + 18 + 18 \text{ أو } 27$$

c. عيّن مجال الدالة ومداها.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية. والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الأقل من القيمة العظمى أو المساوية لها، أو $\{f(x) \mid f(x) \leq 27\}$

نصيحة دراسية

المجال والمدى يكون مجال الدالة التربيعية دائمًا جميع الأعداد الحقيقية. أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية الأقل من القيمة العظمى أو المساوية لها، أو جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من القيمة الصغرى أو المساوية لها.

تمرين موجّه

3. فكّر في $f(x) = 4x^2 - 24x + 11$

A. حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم صغرى.

B. حدد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

C. عيّن مجال الدالة ومداها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 من الحياة اليومية المعادلات التربيعية في الحياة اليومية

السباق الخيري راجع بداية الدرس.

a. ما مقدار الرسوم التي يجب على محمود تحديدها لتحقيق أعلى إيراد من السباق الخيري؟

التعبير اللفظي: الإجمالي يساوي الرسوم مضروبة في عدد المشاركين.

المتغير: افترض أن x = عدد الزيادات في الرسوم.
افترض أن $P(x)$ = المحصلة الكلية في صورة دالة لـ x.

المعادلة: $P(x) = (20 + 5x) \cdot (80 - 5x)$

قم بالحلّ لإيجاد قيمة x للرأس.

$$\begin{aligned} P(x) &= (20 + 5x) \cdot (80 - 5x) \\ &= 20 \times (80) + 20 \times (-5x) + 5x(80) + 5x(-5x) \\ &= 1600 - 100x + 400x - 25x^2 \\ &= 1600 + 300x - 25x^2 \\ &= -25x^2 + 300x + 1600 \end{aligned}$$

استخدم صيغة محور التماثل، $x = -\frac{b}{2a}$ لإيجاد الإحداثي x.

$x = -\frac{300}{2\times(-25)}$ أو 6

يحتاج محمود إلى زيادة الرسوم ست مرات، لذلك ينبغي أن تكون الرسوم $20 + 6 \times (5)$ أو AED 50.

b. كم ستكون القيمة العظمى للمحصلة؟

جد القيمة العظمى للدالة التربيعية $P(x)$ من خلال إيجاد قيمة $P(6)$

$$P(x) = -25x^2 + 300x + 1600$$

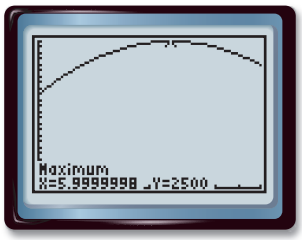
$$P(6) = -25(6)^2 + 300(6) + 1600$$

$$= -900 + 1800 + 1600 \text{ أو } 2500$$

ومن ثم تكون القيمة العظمى لمحصلة الجوائز AED 2500 بعد إضافة 6 زيادات على الرسوم.

تحقّق مثّل الدالة بيانيًا على حاسبة التمثيل البياني واستخدم دالة **CALC:maximum** للتأكد من الحل.

حدد الحد الأيسر يساوي 0 والحد الأيمن يساوي 10 وستعرض الحاسبة إحداثيّي القيمة العظمى أسفل الشاشة.

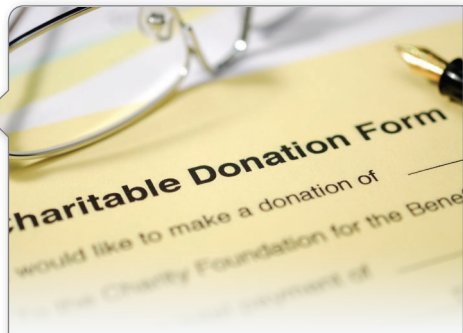


[0, 10] scl: 1 by [0, 2500] scl: 100

المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$ حيث لا يمكن أن تكون زيادة الرسوم سالبة. المدى هو $\{y \mid 0 \leq y \leq 2500\}$ حيث لا يمكن أن تكون القيمة النقدية لمحصلة الجوائز سالبة.

تمرين موجّه

4. افترض سباقًا آخر ينظمه محمود يتكوّن من 120 لاعبًا ورسوم الاشتراك AED 40. وفي كل مرة يرفع فيها الرسوم بمقدار AED 5، يفقد 10 لاعبين. حدد رسوم الاشتراك التي تحقق أعلى قيمة للمحصلة.



الربط بالحياة اليومية

بدايةً من عام 2006، أُقيم في الولايات المتحدة ما يقرب من 900,000 مؤسسة خيرية عامة.

المصدر: المركز القومي للإحصاءات الخيرية

نصيحة دراسية

النمذجة استخدم المنطق مع المعلومات المعطاة في المسألة لتحديد المجال والمدى المناسبين للحالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحقق من فهمك

المثالان 1 و2

أكمل الأجزاء a إلى c لكل دالة تربيعية.

a. جد المقطع y ومعادلة محور التماثل والإحداثي x للرأس.

b. أنشئ جدول القيم الذي يتضمن الرأس.

c. استخدم هذه المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا.

1. $f(x) = 3x^2$

2. $f(x) = -6x^2$

3. $f(x) = x^2 - 4x$

4. $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

5. $f(x) = 4x^2 - 6x - 3$

6. $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

مثال 3

حدد ما إذا كان لكل دالة قيمة عظمى أو صغرى وجد هذه القيمة. ثم عيّن مجال الدالة ومداها.

7. $f(x) = -x^2 + 6x - 1$

8. $f(x) = x^2 + 3x - 12$

9. $f(x) = 3x^2 + 8x + 5$

10. $f(x) = -4x^2 + 10x - 6$

مثال 4

11. الأعمال يؤجّر أحد المتاجر 1400 شريط فيديو في الأسبوع مقابل AED 2.25 لكل شريط فيديو. ويقدّر المالك أنّ عدد شرائط الفيديو التي يؤجرها سيقل بمقدار 100 شريط فيديو لكل زيادة قدرها AED 0.25 في سعر التأجير. فما السعر الذي سيحقق أعلى إيراد للمتجر؟

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R4.

المثالان 1 و2

أكمل الأجزاء a إلى c لكل دالة تربيعية.

a. جد المقطع y ومعادلة محور التماثل والإحداثي x للرأس.

b. أنشئ جدول القيم الذي يتضمن الرأس.

c. استخدم هذه المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا.

12. $f(x) = 4x^2$

13. $f(x) = -2x^2$

14. $f(x) = x^2 - 5$

15. $f(x) = x^2 + 3$

16. $f(x) = 4x^2 - 3$

17. $f(x) = -3x^2 + 5$

18. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

19 $f(x) = x^2 - 3x - 10$

20. $f(x) = -x^2 + 4x - 6$

21. $f(x) = -2x^2 + 3x + 9$

مثال 3

حدد ما إذا كان لكل دالة قيمة عظمى أو صغرى وجد هذه القيمة. ثم عيّن مجال الدالة ومداها.

22. $f(x) = 5x^2$

23. $f(x) = -x^2 - 12$

24. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

25. $f(x) = -x^2 - 7x + 1$

26. $f(x) = 8x - 3x^2 + 2$

27. $f(x) = 5 - 4x - 2x^2$

28. $f(x) = 15 - 5x^2$

29. $f(x) = x^2 + 12x + 27$

30. $f(x) = -x^2 + 10x + 30$

31. $f(x) = 2x^2 - 16x - 42$

مثال 4

32. النمذجة قدّر أحد المحللين الماليين أنّ تكلفة إنتاج إطارات الدراجات، بآلاف الدراهم، هي $C = 0.000025f^2 - 0.04f + 40$، حيث تمثل f عدد الإطارات التي يتم إنتاجها.

a. جد عدد الإطارات التي تقلل التكلفة إلى أدنى حد.

b. ما إجمالي تكلفة إنتاج هذا العدد من الإطارات؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

أكمل الأجزاء a إلى c لكل دالة تربيعية.

a. جد المقطع y ومعادلة محور التماثل والإحداثي x للرأس.

b. أنشئ جدول القيم الذي يتضمن الرأس.

c. استخدم هذه المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا.

33. $f(x) = 2x^2 - 6x - 9$

34. $f(x) = -3x^2 - 9x + 2$

35. $f(x) = -4x^2 + 5x$

36. $f(x) = 2x^2 + 11x$

37. $f(x) = 0.25x^2 + 3x + 4$

38. $f(x) = -0.75x^2 + 4x + 6$

39. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2}$

40. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 9$

41. المعرفة المالية يستوعب أحد أندية مجالسة الأطفال 50 أسرة مختلفة. ويرغب القائمون عليه في زيادة السعر الحالي AED 9.50 في الساعة. وبعد استطلاع رأي الأسر، وجد النادي أنّ عدد الأسر سينخفض بمقدار أسرتين مع كل زيادة قدرها AED 0.50 على سعر الساعة.

a. اكتب الدالة التربيعية التي تمثل هذه الحالة.

b. عيّن مجال هذه الدالة ومداها عند تطبيقها على هذه الحالة.

c. ما مقدار سعر الساعة الذي سيحقق أعلى إيراد للنادي؟ هل هذا منطقي؟

d. ما مقدار أعلى إيراد يتوقع النادي تحقيقه؟

42. الأنشطة في العام الماضي، حضر 300 شخص مسرحية الشتاء في نادي الدراما بمدرسة فرانكلين الثانوية، وكان سعر التذكرة AED 8. وقد قدّر المستشار أنّ عدد الحضور سيقل بمقدار 20 شخصًا مع كل زيادة بمقدار AED 1 في سعر التذكرة.

a. ما سعر التذكرة الذي سيحقق أعلى إيراد لنادي الدراما؟

b. إذا رفع نادي الدراما سعر التذكرة إلى هذا الرقم، فما مقدار الإيراد الذي يتوقع تحقيقه؟

أدوات استخدم الحاسبة لإيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لكل دالة، مع التقريب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

43. $f(x) = -9x^2 - 12x + 19$

44. $f(x) = 12x^2 - 21x + 8$

45. $f(x) = -8.3x^2 + 14x - 6$

46. $f(x) = 9.7x^2 - 13x - 9$

47. $f(x) = 28x - 15 - 18x^2$

48. $f(x) = -16 - 14x - 12x^2$

حدد ما إذا كان لكل دالة قيمة عظمى أو صغرى وجد هذه القيمة. ثم عيّن مجال الدالة ومداها.

49. $f(x) = -5x^2 + 4x - 8$

50. $f(x) = -4x^2 - 3x + 2$

51. $f(x) = -9 + 3x + 6x^2$

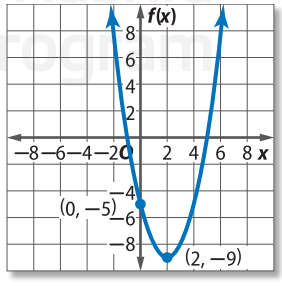
52. $f(x) = 2x - 5 - 4x^2$

53. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 6x - 10$

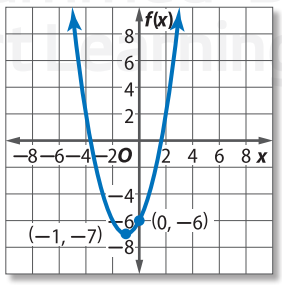
54. $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 4x - 8$

حدد الدالة التي يمثلها كل تمثيل بياني.

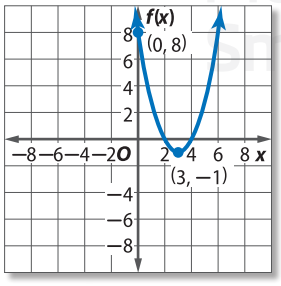
55.



56.



57.



برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

58. التمثيلات المتعددة فكّر في $f(x) = x^2 - 4x + 8$ و $g(x) = 4x^2 - 4x + 8$

a. جدوليًّا أنشئ جدول القيم لكل من $f(x)$ و $g(x)$ إذا كان $-4 \le x \le 4$

b. بيانيًّا مثّل كلًا من $f(x)$ و $g(x)$ بيانيًا.

c. لفظيًّا اشرح الاختلاف في شكلَي التمثيلين البيانيَّين لكل من $f(x)$ و $g(x)$ ما القيمة التي تغيرت فتسببت في هذا الاختلاف؟

d. تحليليًا توقّع شكل التمثيل البياني للدالة $h(x) = 0.25x^2 - 4x + 8$ تحقّق من توقعك من خلال تمثيل الدوال الثلاث بيانيًا إذا كان $-10 \le x \le 10$

59. ماكينات البيع الآلية يمتلك عمر ماكينة بيع آلية في إحدى صالات البولينغ. ويبيع حاليًا 600 عبوة مياه غازية أسبوعيًا بسعر 0.65 AED للعبوة. ويرى أنه سيفقد 100 زبون لكل زيادة قدرها 0.05 AED في السعر وسيكسب 100 زبون لكل خفض قدره 0.05 AED في السعر. (*تلميح:* يجب أن يكون السعر المحدد من مضاعفات 5).

a. اكتب المعادلة التربيعية المرتبطة لزيادة السعر ومثّلها بيانيًا.

b. إذا خفض عمر السعر، فما القيمة اللازمة لتحقيق أعلى إيراد له؟

c. كم سيكون إيراده الأسبوعي من ماكينة البيع الآلي؟

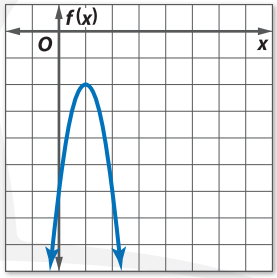
60. البيسبول تلقي لميس كرة البيسبول في الهواء، ويُحدد ارتفاع الكرة h بالأمتار عند زمن معين t بالثواني، بعد إطلاق الكرة، من خلال الدالة $h(t) = -16t^2 + 30t + 5$

a. حدّد المجال والمدى لهذه الحالة.

b. جد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

61. النقد يعتقد فهد أنّ الدالة $f(x)$ الممثَّلة بيانيًا أدناه والدالة $g(x)$ الموصوفة بجوارها لهما القيمة العظمى نفسها. في حين يعتقد سالم أن $g(x)$ لها قيمة عظمى أكبر. هل أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.



$g(x)$ دالة تربيعية جذراها 4 و2 ومقطع y هو -8

62. التبرير حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة *على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

في الدالة التربيعية، إذا كان إحداثيًا x على مسافة واحدة من محور التماثل، فسيكون لهما الإحداثي y نفسه.

63. تحفيز يمثل الجدول على اليسار بعض النقاط على التمثيل البياني للدالة التربيعية.

x	y
-20	-377
c	-13
-5	-2
-1	22
d - 1	a
5	a - 24
7	b
15	-202
4 - c	-377

a. جد القيم a و b و c و d.

b. جد الإحداثي x للرأس.

c. هل للدالة قيمة عظمى أم صغرى؟

64. مسألة مفتوحة اذكر مثالًا لدالة تربيعية بها

a. القيمة العظمى 8 **b.** القيمة الصغرى -4 **c.** الرأس $(-2, 6)$.

65. الكتابة في الرياضيات صِف كيف تحدد ما إذا كانت الدالة تربيعية أم لا وما إذا كان لها قيمة عظمى أم صغرى.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

66. ما التعبير المكافئ لـ $\frac{8!}{5!}$؟

A $\frac{8}{5}$

B $8 \times 7 \times 6$

C $3!$

D $8 \times 7 \times 6 \times 5$

67. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول يُقدَّر سعر الشاي بمبلغ d من الدراهم لكل 6 جرامات، ويصنع كل جرام عدد c من أكواب الشاي. فبدلالة كل من c وd، كم تكلفة حبيبات الشاي اللازمة لعمل كوب واحد من الشاي؟

F $\frac{cd}{6}$

G $\frac{6c}{d}$

H $\frac{6}{cd}$

J $6cd$

K $\frac{d}{6c}$

68. إجابة مختصرة إذا كان طول كل جانب من قاعدة هرم مربعة 20 مترًا وارتفاع الهرم 90 مترًا، فما حجم الهرم؟

69. ما الزوج المرتب الذي يمثل حل نظام المعادلات التالي؟

$$3x - 5y = 11$$
$$3x - 8y = 5$$

A (2, 1)

B (7, −2)

C (7, 2)

D $\left(\frac{1}{3}, -2\right)$

مراجعة شاملة

جد معكوس كل مصفوفة، إن وُجد.

70. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

71. $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

72. $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

جد قيمة المحدِّدة.

73. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

74. $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$

75. $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

76. التصنيع تصنع لجنة الخدمة المجتمعية حقائب كبيرة قماشية وحقائب كبيرة جلدية لجمع التبرعات، وستقوم بتبطين كلا نوعَي الحقائب بالقماش واستخدام يد من الجلد في كليهما. بالنسبة إلى الحقائب القماشية، ستحتاج إلى 4 m من القماش ومتر واحد من الجلد، وبالنسبة إلى الحقائب الجلدية، ستحتاج إلى 3 m من الجلد ومترين من القماش. واشترى قائد اللجنة 56 mw من الجلد و104 أمتار من القماش.

a. افترض أن c تمثل عدد الحقائب القماشية وℓ تمثل عدد الحقائب الجلدية. اكتب نظام المتباينات لعدد الحقائب التي يمكن صنعها.

b. ارسم التمثيل البياني الذي يوضح منطقة الحل.

c. جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

d. إذا كانت اللجنة تخطط لبيع الحقائب القماشية بمعدل ربح 20 AED في الحقيبة الواحدة والحقائب الجلدية بمعدل ربح 35 AED في الحقيبة الواحدة، فاكتب الدالة التي تمثل إجمالي أرباح الحقائب.

e. كيف يمكن أن تحقق اللجنة أعلى ربح؟

f. ما قيمة أعلى ربح؟

حدد ما إذا كانت كل دالة خطيةً أم لا. اكتب نعم أو لا. اشرح.

77. $y = 4x^2 - 3x$

78. $y = -2x - 4$

79. $y = 4$

مراجعة المهارات

جد قيمة كل دالة عند القيمة المعطاة.

80. $f(x) = 3x^2 - 4x + 6,\ x = -2$

81. $f(x) = -2x^2 + 6x - 5,\ x = 4$

82. $f(x) = 6x^2 + 18,\ x = -5$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 2-1

مختبر تقنية التمثيل البياني
نمذجة بيانات من الحياة اليومية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل نقاط البيانات التي يكون المنحنى الأفضل لها دالة تربيعية.

ممارسات في الرياضيات
5 استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

المياه توجد زجاجة مملوءة بالمياه، وتتسرب المياه عبر ثقب قريب من قاع الزجاجة. يعرض الجدول مستوى المياه y المقيس بالسنتيمترات من قاع الزجاجة بعد x من الثواني.

الزمن (s)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
مستوى المياه (cm)	42.6	40.7	38.9	37.2	35.8	34.3	33.3	32.3	31.5	30.8	30.4	30.1

جد كلًا من معادلة الانحدار الخطي ومعادلة الانحدار التربيعي ومثّلهما بيانيًا.
حدد أيًا من المعادلتين يتوافق مع البيانات بشكل أفضل.

النشاط

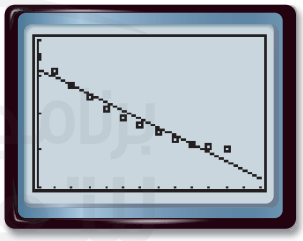
الخطوة 1 **إيجاد معادلة الانحدار الخطي وتمثيلها بيانيًا.**

- أدخل الأزمنة في **L1** ومستويات المياه في **L2**. ثم جد معادلة الانحدار الخطي.

خطوات العملية على الحاسبة: *راجع الدرس 2-5.*

- استخدم STAT PLOT لتمثيل مخطط الانتشار بيانيًا. انسخ المعادلة إلى القائمة Y= ومثّلها بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: *راجع المخططات الإحصائية وتمثيل معادلة الانحدار بيانيًا في الدرس 2-5.*



[0, 260] scl: 20 by [25, 45] scl: 5

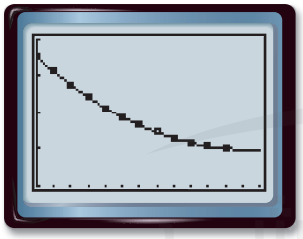
الخطوة 2 **إيجاد معادلة الانحدار التربيعي وتمثيلها بيانيًا.**

- جد معادلة الانحدار التربيعي. ثم انسخ المعادلة إلى القائمة Y= ومثّلها بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة:

STAT ▶ 5 ENTER Y=

VARS 5 ▶ ▶ ENTER GRAPH



[0, 260] scl: 20 by [25, 45] scl: 5

لاحظ أنّ التمثيل البياني لمعادلة الانحدار الخطي يمر بنقطتَي بيانات فقط، في حين يتوافق التمثيل البياني لمعادلة الانحدار التربيعي مع البيانات بشكل جيد.

تمارين

راجع الجدول.

1. جد كلًا من معادلة الانحدار الخطي ومعادلة الانحدار التربيعي للبيانات ومثّلهما بيانيًا. حدد أيًا من المعادلتين يتوافق مع البيانات بشكل أفضل.
2. قدّر ارتفاع أقدام اللاعب بعد ثانية واحدة و1,5 ثانية. استخدم الرياضيات الذهنية للتحقق من مدى صحة تقديراتك.
3. قارن وقابل بين التقديرات التي توصلت إليها في التمرين 2.
4. ما مدى تأثير اختيار معادلة الانحدار التي لا تتوافق مع البيانات في التوقعات التي تمت باستخدام تلك المعادلة؟

ارتفاع أقدام اللاعبين فوق الأرض

الزمن (s)	الارتفاع (cm)
0.1	3.04
0.2	5.76
0.3	8.16
0.4	10.24
0.5	12
0.6	13.44
0.7	14.56

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 2-2

حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

السابق

- قمتَ بحل أنظمة المعادلات باستخدام التمثيل البياني.

الحالي

1 حل المعادلات التربيعية باستخدام التمثيل البياني.

2 تقدير حلول المعادلات التربيعية باستخدام التمثيل البياني.

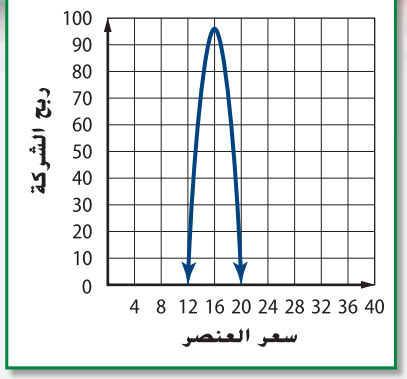
لماذا؟

- تعمل ليلى في قسم التسويق في أحد المتاجر الكبرى للبيع بالتجزئة. ووظيفتها هي تحديد أسعار المنتجات الجديدة التي تباع في المتاجر. وحددت ليلى أنه بالنسبة إلى أي منتج معين، تحدد الدالة $f(p) = -6p^2 + 192p - 1440$ الربح $f(p)$ المحقق عند السعر p.

تستطيع ليلى تحديد نطاق السعر من خلال إيجاد الأسعار التي يساوي الربح فيها AED 0. ويمكن القيام بذلك عن طريق إيجاد حلول للمعادلة التربيعية المرتبطة $0 = -6p^2 + 192p - 1440$

يشير التمثيل البياني للدالة إلى أن الربح يساوي صفرًا عند 12 و20. وبالتالي يقع نطاق السعر المربح للعنصر بين AED 12 وAED 20.

دالة الربح



1 حل المعادلات التربيعية

المعادلات التربيعية عبارة عن دوال تربيعية تساوي قيمة ما. و**الصيغة القياسية** للمعادلة التربيعية هي $ax^2 + bx + c = 0$. حيث $a \neq 0$ وa وb وc أعداد صحيحة.

تُسمى حلول المعادلة التربيعية **جذور** المعادلة. وتتمثل إحدى طرق إيجاد جذور المعادلة التربيعية في إيجاد **أصفار** الدالة التربيعية المرتبطة.

أصفار الدالة هي مواقع مقاطع المحور **x** في التمثيل البياني لها.

الدالة التربيعية

$f(x) = x^2 - x - 6$

$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6$ أو 0

$f(3) = 3^2 - 3 - 6$ أو 0

2− و3 هما أصفار الدالة.

المعادلة التربيعية

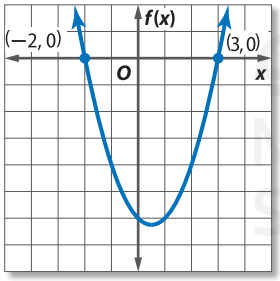
$x^2 - x - 6 = 0$

$(-2)^2 - (-2) - 6$ أو 0

$3^2 - 3 - 6$ أو 0

2− و3 هما جذور المعادلة.

التمثيل البياني للدالة



تقاطع x هي 2− و3.

المفردات الجديدة

المعادلة التربيعية quadratic equation

الصيغة القياسية standard form

الجذر root

الصفر zero

ممارسات في الرياضيات

3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

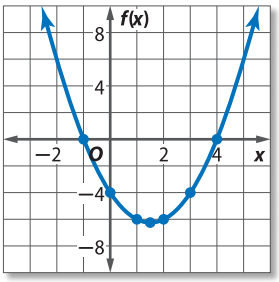
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 حلان حقيقيان

حُـــلّ المعادلة: $x^2 - 3x - 4 = 0$ باستخدام التمثيل البياني.

مثِّل الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 - 3x - 4$ بيانيًا. معادلة محور التماثل هي $x = -\frac{-3}{2(1)}$ أو 1.5 أنشئ جدولًا مستخدمًا قيم x حول 1.5، ثم مثِّل كل نقطة بيانيًا.

x	−1	0	1	1.5	2	3	4
$f(x)$	0	−4	−6	−6.25	−6	−4	0



أصفار الدالة هي 1− و4، ومن ثَمّ تكون حلول المعادلة 1− و4 أو $\{x \mid x = -1, 4\}$

تمرين موجّه

حُـــلّ المعادلة كل معادلة باستخدام التمثيل البياني.

1A. $x^2 + 2x - 15 = 0$ **1B.** $x^2 - 8x = -12$

للتمثيل البياني للدالة المرتبطة في المثال 1 صفران؛ ومن ثَمّ يكون للمعادلة التربيعية حلان حقيقيان. وهذه هي إحدى النتائج الثلاث المحتملة عند حل معادلة تربيعية.

نصيحة دراسية

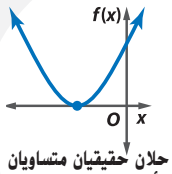
ترميز بناء المجموعة

في الدرس 5-1، تعلمتَ كيفية التعبير عن مجموعة حل متباينة ما باستخدام ترميز بناء المجموعة. ويمكن أيضًا التعبير عن حلول المعادلة بترميز بناء المجموعة. فعلى سبيل المثال، يمكن التعبير عن حلول $x^2 = 25$ في الصورة $\{x \mid x = -5, 5\}$

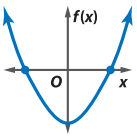
المفهوم الأساسي حلول المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي يمكن أن يكون للمعادلة التربيعية حل حقيقي واحد أو حلان حقيقيان أو ليس لها حلول حقيقية.

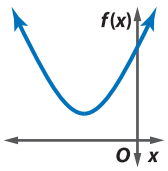
النماذج



حلان حقيقيان متساويان أو حل حقيقي واحد



حلان حقيقيان مختلفان



لا توجد حلول حقيقية

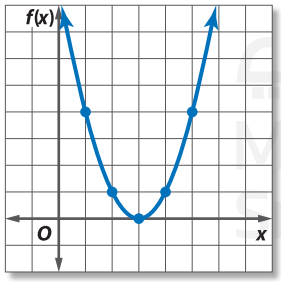
مثال 2 حل حقيقي واحد

حُـــلّ المعادلة: $14 - x^2 = -6x + 23$ بالتمثيل البياني.

$14 - x^2 = -6x + 23$	المعادلة الأصلية
$14 = x^2 - 6x + 23$	أضف x^2 إلى كل طرف
$0 = x^2 - 6x + 9$	اطرح 14

مثِّل الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 - 6x + 9$ بيانيًا.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	0	1	4



للدالة صفر واحد فقط، هو 3، ومن ثَم يكون الحل 3 أو $\{x \mid x = 3\}$

نصيحة دراسية

تمثيل بياني اختياري

يمكن تمثيل $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ بيانيًا أيضًا لهذا المثال. سيبدو التمثيل البياني مختلفًا، ولكن سيكون به الحل نفسه.

تمرين موجّه

حُـــلّ كل معادلة باستخدام التمثيل البياني.

2A. $x^2 + 5 = -8x - 11$ **2B.** $12 - x^2 = 48 - 12x$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 3 لا توجد حلول حقيقية

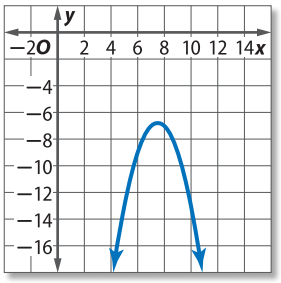
نظرية الأعداد **استخدم معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين مجموعهما 15 وناتج ضربهما 63**

استيعاب المسألة افترض أن x يُمثّل أحد العددين، وعندئذ يكون $15 - x$ العدد الآخر.

التخطيط

ناتج ضرب العددين يساوي 63	$x(15 - x) = 63$
خاصية التوزيع	$15x - x^2 = 63$
اطرح 63	$-x^2 + 15x - 63 = 0$

الحل مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا.



لا يتضمن التمثيل البياني مقاطع x. ويعني هذا أن المعادلة الأصلية ليس لها حل حقيقي. ومن ثَم لا يمكن أن يكون هناك عددان حقيقيان مجموعهما 15 وناتج ضربهما 63

التحقق حاول إيجاد ناتج ضرب عدة أزواج من الأعداد مجموعهم 15 هل كل ناتج ضرب أقل من 63 كما يشير التمثيل البياني؟+

تمرين موجّه

3. جد عددين حقيقيين مجموعهما 6 وناتج ضربهما -55 أو اثبت أنه لا يوجد مثل هذين العددين.

2 تقدير الحلول

في كثير من الأحيان، لا يمكن إيجاد الجذور الدقيقة باستخدام التمثيل البياني. يمكنك تقدير الحلول عن طريق ذكر الأعداد الصحيحة التي توجد بينها الجذور.

انتبه!
الأصفار ستلاحظ في الوحدات اللاحقة أن العديد من الأصفار يمكن أن تظهر ضمن فترات صغيرة.

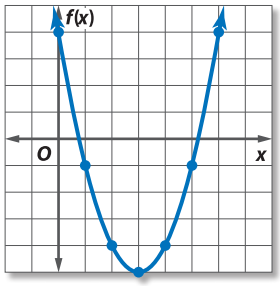
عندما تكون قيمة الدالة موجبة لقيمة واحدة وسالبة لقيمة ثانية، يكون هناك صفر واحد على الأقل بين هاتين القيمتين.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	12	3	−6	−2	4	8	14

صفر صفر

مثال 4 تقدير الجذور

حُـــلّ المعادلة: $x^2 - 6x + 4 = 0$ باستخدام التمثيل البياني. إذا تعذر إيجاد الجذور الدقيقة، فاذكر الأعداد الصحيحة المتتالية التي توجد بينها الجذور.



x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	−1	−4	−5	−4	−1	4

تشير مقاطع x للتمثيل البياني إلى وجود أحد الحلول بين 0 و1 والحل الآخر بين 5 و6

تمرين موجّه

4. حُـــلّ المعادلة: $x^2 - x - 10 = 0$ بالتمثيل البياني. إذا تعذر إيجاد الجذور الدقيقة، فاذكر الأعداد الصحيحة المتتالية التي توجد بينها الجذور.

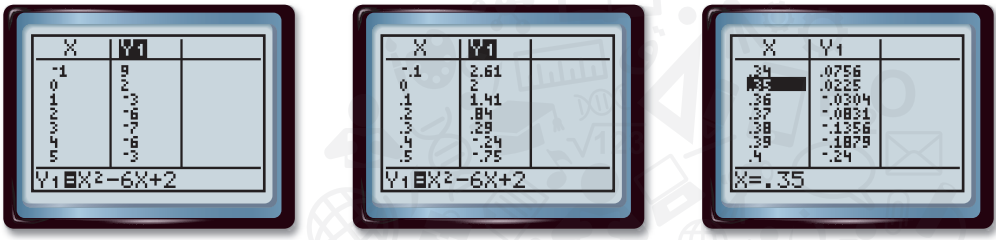
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك أيضًا استخدام الجداول لحل المعادلات التربيعية. فبَعد إدخال المعادلة في الحاسبة، تنقل عبر الجدول لتحديد مكان الحلول.

مثال 5 الحل باستخدام جدول

حُـــلّ المعادلة: $x^2 - 6x + 2 = 0$

أدخل $Y1 = x^2 - 6x + 2$ في حاسبة التمثيل البياني. استخدم نافذة **TABLE** لمعرفة أين تتغير إشارة **Y1**. غيّر **Tbl**$\triangle$ إلى 0,1 وانظر مجددًا لتغيُّر الإشارة. كرر العملية باستخدام 0,01 و0,001 للحصول على موضع أكثر دقة للصفر.

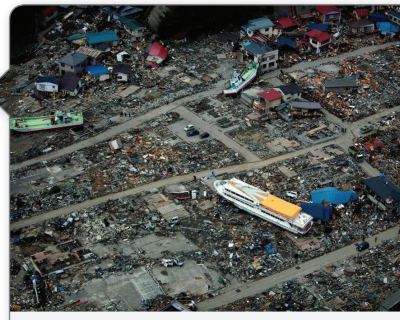


أحد الحلول 0.354 تقريبًا.

تمرين موجّه

5. حدد موضع الصفر الثاني للدالة أعلاه مع التقريب إلى أقرب جزء من ألف.

يمكن حل المعادلات التربيعية باستخدام الحاسبة أيضًا. بعد إدخال المعادلة، استخدم خاصية **zero** في قائمة **CALC**.



الربط بالحياة اليومية

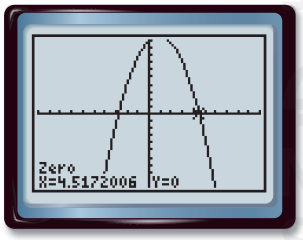
في كل عام، يستجيب الصليب الأحمر الأمريكي لأكثر من 70,000 حالة من حالات الكوارث التي تتراوح بين حرائق المنازل والكوارث الطبيعية مثل الأعاصير والزلازل.

مثال 6 من الحياة اليومية الحل باستخدام حاسبة

إغاثة ألقت طائرة مروحية حزمة من المستلزمات من ارتفاع 20 مترًا. يتم تمثيل ارتفاع الحزمة على الأرض بالعلاقة $h(t) = -16t^2 + 28t + 200$، حيث t الزمن بالثواني بعد إلقائها. ما المدة التي تستغرقها الحزمة للوصول إلى الأرض؟

نحتاج إلى إيجاد t عندما يساوي $h(t)$ صفرًا. حُل $0 = -16t^2 + 28t + 200$. ثم مثّل الدالة المرتبطة $f(t) = -16t^2 + 28t + 200$ بيانيًا على حاسبة التمثيل البياني.

- استخدم خاصية **zero** في قائمة **CALC** لإيجاد الصفر الموجب للدالة، لأن الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا.
- استخدم مفاتيح الأسهم لتحديد الحد الأيسر واضغط على ENTER.
- حدد موضع الحد الأيمن واضغط على ENTER مرتين.
- الصفر الموجب للدالة 4.52 تقريبًا تستغرق الحزمة حوالي 4.52 ثوانٍ للوصول إلى الأرض.



[−10, 10] scl: 1 by [−200, 200] scl: 20

تمرين موجّه

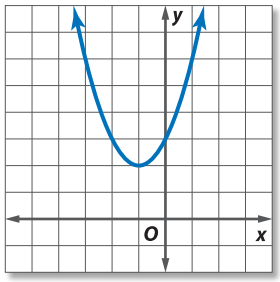
6. ما المدة المستغرَقة للوصول إلى الأرض إذا تم تمثيل الارتفاع بالعلاقة $h(t) = -16t^2 + 48t + 400$؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

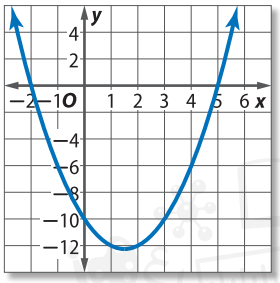
تحقق من فهمك

مثال 1 **استخدم التمثيل البياني المرتبط بكل معادلة لتحديد حلولها.**

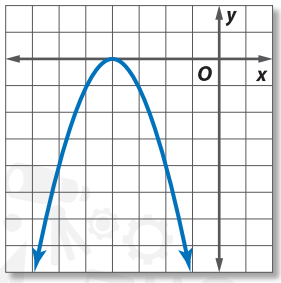
1. $x^2 + 2x + 3 = 0$



2. $x^2 - 3x - 10 = 0$



3. $-x^2 - 8x - 16 = 0$



الأمثلة 2–5 **الضبط** **حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية. إذا تعذر إيجاد الجذور الدقيقة، فاذكر الأعداد الصحيحة المتتالية التي توجد بينها الجذور.**

4. $x^2 + 8x = 0$

5 $x^2 - 3x - 18 = 0$

6. $4x - x^2 + 8 = 0$

7. $-12 - 5x + 3x^2 = 0$

8. $x^2 - 6x + 4 = -8$

9. $9 - x^2 = 12$

10. $5x^2 + 10x - 4 = -6$

11. $x^2 - 20 = 2 + x$

12. نظرية الأعداد استخدم معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين مجموعهما 2 وناتج ضربهما -24

مثال 6

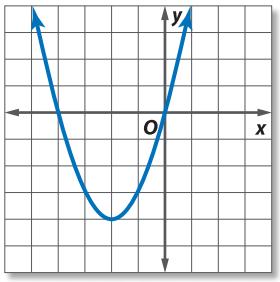
13. الفيزياء ما المدة التي يستغرقها جسم للسقوط من كرسي يعلو عن الأرض بمقدار 400 cm؟ استخدم الصيغة $h(x) = -16t^2 + h_0$، حيث t الزمن بالثواني والارتفاع الابتدائي h_0 بالسنتيمترات.

التمرين وحل المسائل

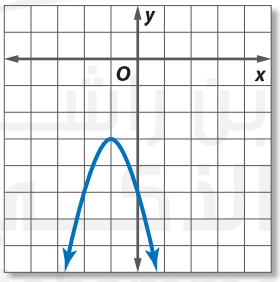
يوجد تمرين إضافي في الصفحة R4.

مثال 1 **استخدم التمثيل البياني المرتبط بكل معادلة لتحديد حلولها.**

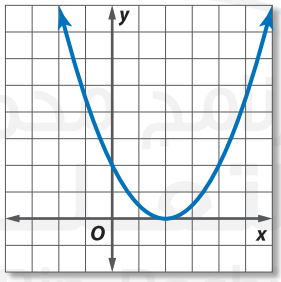
14. $x^2 + 4x = 0$



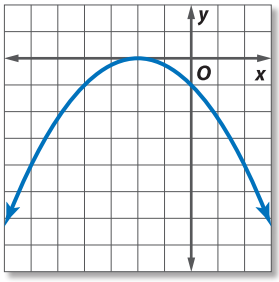
15. $-2x^2 - 4x - 5 = 0$



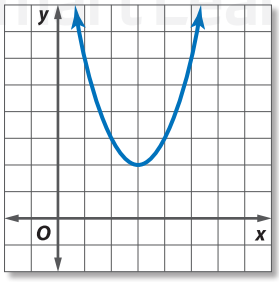
16. $0.5x^2 - 2x + 2 = 0$



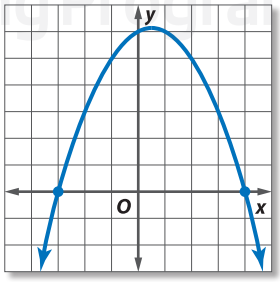
17. $-0.25x^2 - x - 1 = 0$



18. $x^2 - 6x + 11 = 0$



19. $-0.5x^2 + 0.5x + 6 = 0$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الأمثلة 2–4 **حُلّ كل معادلة من المعادلات التالية. إذا تعذر إيجاد الجذور الدقيقة، فاذكر الأعداد الصحيحة المتتالية التي توجد بينها الجذور.**

20. $x^2 = 5x$

21. $-2x^2 - 4x = 0$

22. $x^2 - 5x - 14 = 0$

23. $-x^2 + 2x + 24 = 0$

24. $x^2 - 18x = -81$

25. $2x^2 - 8x = -32$

26. $2x^2 - 3x - 15 = 4$

27. $-3x^2 - 7 + 2x = -11$

28. $-0.5x^2 + 3 = -5x - 2$

29. $-2x + 12 = x^2 + 16$

مثال 5 **استخدام الجداول لتحديد موقع الأصفار لكل دالة تربيعية.**

30.

x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$	−8	−1	4	4	−1	−8	−22	−48

31.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	32	14	2	−3	−3	2	14	32

32.

x	−6	−3	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	−6	−1	3	5	3	−1	−6	−14

مثال 6 **نظرية الأعداد** **استخدم معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كل حالة أو اثبت عدم وجود مثل هذين العددين.**

33 مجموعهما 15− وناتج ضربهما 54−

34. مجموعهما 4 وناتج ضربهما 117−

35. مجموعهما 12 وناتج ضربهما 84−

36. مجموعهما 13− وناتج ضربهما 42

37. مجموعهما 8− وناتج ضربهما 209−

النمذجة **للتمارين 40–38، استخدم الصيغة $h(t) = v_0t - 16t^2$، حيث $h(t)$ ارتفاع الجسم بالأقدام وv_0 السرعة المتجهة الابتدائية للجسم بالأقدام في الثانية وt الزمن بالثواني.**

38. البيسبول تُضرَب كرة بيسبول بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ 80 ft/s. إذا تجاهلت طول لاعب كرة البيسبول، فما المدة التي تستغرقها الكرة لتصطدم بالأرض؟

39. المدافع تُطلَق قذيفة مدفعية بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ 55 ft/s.
إذا تجاهلت ارتفاع المدفع، فما المدة التي تستغرقها القذيفة المدفعية للاصطدام بالأرض؟

40. الجولف تُضرَب كرة جولف بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ 100 ft/s. ما المدة التي تستغرقها الكرة للاصطدام بالأرض؟

حُل كل معادلة من المعادلات التالية. إذا تعذر إيجاد الجذور الدقيقة، فاذكر الأعداد الصحيحة المتتالية التي توجد بينها الجذور.

41. $2x^2 + x = 15$

42. $-5x - 12 = -2x^2$

43. $4x^2 - 15 = -4x$

44. $-35 = -3x - 2x^2$

45. $-3x^2 + 11x + 9 = 1$

46. $13 - 4x^2 = -3x$

47. $-0.5x^2 + 18 = -6x + 33$

48. $0.5x^2 + 0.75 = 0.25x$

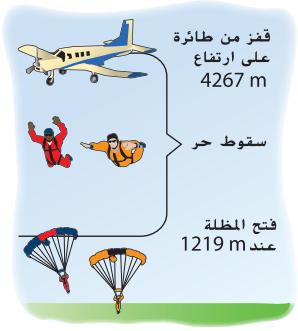
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

49. بالون مياه يريد طارق أن يُسقط بالون مياه بحيث ينسكب على أخيه. استخدم الصيغة $h(t) = -16t^2 + h_0$. حيث t الزمن بالثواني ويكون الارتفاع الابتدائي h_0 بالأقدام. لتحديد مسافة ابتعاد أخيه عن الهدف عندما يحرر طارق البالون.

50. خراطيم إطفاء الحريق تتدفق المياه من خرطوم إطفاء الحريق بسرعة متجهة ابتدائية قدرها 40 ft/s. استخدم الصيغة $h(t) = v_0t - 16t^2$. حيث $h(t)$ ارتفاع المياه بالأقدام وv_0 السرعة المتجهة الابتدائية بالأقدام في الثانية و t الزمن بالثواني.

a. ما المدة التي تستغرقها المياه كي تصطدم بالفوهة في طريقها إلى النزول؟

b. بفرض أن ارتفاع الفوهة 5 ft. فما الحد الأقصى لارتفاع المياه؟



51. القفز بالمظلات عام 2003، أصبح خميس وخالد أول قافزَي مظلات من فاقدي البصر يقومان بالسقوط الحر معًا. فلقد قفزا من ارتفاع 4267 ft وسقطا سقوطًا حرًا حتى ارتفاع 1219 m قبل فتح مظلتيهما. بتجاهل مقاومة الهواء وباستخدام الصيغة $h(t) = -16t^2 + h_0$. حيث t الزمن بالثواني والارتفاع الابتدائي h_0 بالأمتار، حدد مدة السقوط الحر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. النقد طُلب من حكيم وأسماء تحديد موقع جذور الدالة التربيعية التي يمثلها الجدول. هل أي منهما صحيح؟ اشرح ذلك.

x	−4	−2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	52	26	8	−2	−4	2	16	38

حكيم

الجذور بين 4 و6 نظرًا لتوقف تناقص $f(x)$ وبدء الزيادة بين $x =$ 4 و$x =$ 6

أسماء

الجذور بين 2- و0 نظرًا لتغيُّر إشارات x عند هذا الموضع.

53. تحفيز جد قيمة العدد الصحيح الموجب k بحيث تكون جذور $f(x) = x^2 - 2kx + 55$ عند $k + 3$ و $k - 3$

54. التبرير إذا كان للدالة التربيعية قيمة صغرى عند $(-6, -14)$ وجذر عند $x = -17$. فما الجذر الآخر؟ اشرح استنتاجك.

55. مسألة مفتوحة اكتب دالة تربيعية لها قيمة صغرى عند $(3, 125)$ وجذور عند 2− و8

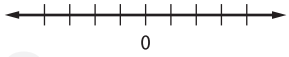
56. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية حل معادلة تربيعية بالتمثيل البياني لدالتها التربيعية المرتبطة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

57. إجابة مختصرة يحتوي كيس على خمس كرات زجاجية مختلفة الألوان. وألوانها هي الأسود والفضي والأحمر والأخضر والأزرق. يختار أحد الطلاب كرة زجاجية بشكل عشوائي. وبعد ذلك، ودون إعادة الكرة التي اختارها، يختار كرة زجاجية ثانية. ما احتمال أن يختار الطالب الكرة الزجاجية الحمراء ثم الخضراء؟

58. أي عدد سيكون أقرب إلى الصفر على خط الأعداد؟



A -0.6
B $\frac{2}{5}$
C 0.5
D $\frac{\sqrt{2}}{2}$

59. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول يتكون إجمالي الراتب الشهري لمندوب مبيعات من AED 3500 بالإضافة إلى 20 بالمئة من مقدار مبيعاته بالدرهم. إذا كان راتبه الإجمالي لمدة شهر AED 15,500، فما مقدار مبيعاته بالدرهم لهذا الشهر؟

F AED 12,000
G AED 16,000
H AED 60,000
J AED 70,000
K AED 77,500

60. جد الحد التالي في المتتالية أدناه.

$\frac{2x}{5}, \frac{3x}{5}, \frac{4x}{5}, \ldots$

A x
B $5x$
C $\frac{x}{5}$
D $\frac{5x}{4}$

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان لكل دالة قيمة عظمى أو صغرى وجد هذه القيمة. ثم عيّن مجال الدالة ومداها.

(الدرس 1-2)

61. $f(x) = -4x^2 + 8x - 16$

62. $f(x) = 3x^2 + 12x - 18$

63. $f(x) = 4x + 13 - 2x^2$

حدد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات معكوسًا لبعضه البعض.

64. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{26} & -\frac{2}{13} \end{bmatrix}$

65. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$

66. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

67. المبيعات يتولى حمد مسؤولية تخزين القمصان في كشك بيع في مباراة كرة القدم بالمدرسة الثانوية. ويوجد في المصفوفة أعداد القمصان اللازمة لمباراة عادية. ويخطط حمد لمضاعفة عدد القمصان المخزَّنة للمباراة الفاصلة.

الحجم	صغير	متوسط	كبير
طفل	10	10	15
بالغ	25	35	45

a. اكتب مصفوفة A تمثّل مخزون المباراة العادية.

b. ما العدد الثابت الذي يمكن استخدامه لتحديد مصفوفة M بحيث تمثّل الأعداد الجديدة؟ جد M.

c. جد $M - A$. ماذا تمثل في هذه الحالة؟

حُـــلّ كل نظام من أنظمة المعادلات التالية.

68. $4x - 7y = -9$
$5x + 2y = -22$

69. $8y - 2x = 38$
$5x - 3y = -27$

70. $3x + 8y = 24$
$-16y - 6x = 48$

حُـــلّ كل متباينة من المتباينات التالية.

71. $3x - 6 \leq -14$

72. $6 - 4x \leq 2$

73. $-6x + 3 \geq 3x - 16$

مراجعة المهارات

جد العامل المشترك الأكبر لكل مجموعة أعداد.

74. 128 ,48 ,16

75. 49 ,21 ,15

76. 36 ,28 ,12

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التوسع 2-2

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات التربيعية.

النشاط حل المعادلات التربيعية

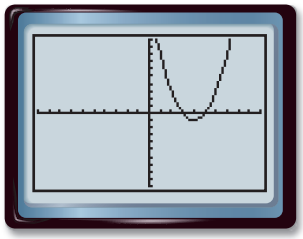
حُـــلّ المعادلة: $x^2 - 8x + 15 = 0$

الخطوة 1 افترض أن $Y1 = x^2 - 8x + 15$ و $Y2 = 0$

الخطوة 2 مثِّل Y1 وY2 بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= X,T,θ,n x^2 (−) 8 X,T,θ,n + 15 ENTER 0 ZOOM 6



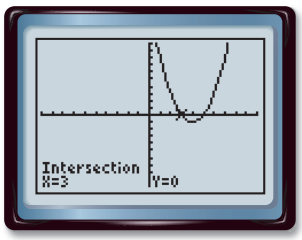
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 3 لإيجاد مقاطع x، حدّد النقاط حيث $Y1 = Y2$.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [CALC] 5

اضغط على ENTER للمعادلة الأولى. اضغط على ENTER للمعادلة الثانية.

حرّك المؤشر بالقرب من مقطع x الأيسر واضغط على ENTER.



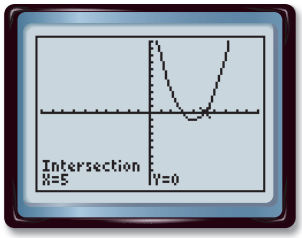
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

جد مقطع x الثاني.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [CALC] 5

اضغط على ENTER للمعادلة الأولى. اضغط على ENTER للمعادلة الثانية.

حرّك المؤشر بالقرب من مقطع x الأيمن واضغط على ENTER.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

مقاطع x هي 3 و5. ومن ثَم $x = 3$ و $x = 5$

تمارين

حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

1. $x^2 - 7x + 12 = 0$
2. $x^2 + 5x + 6 = 0$
3. $x^2 - 3 = 2x$
4. $x^2 + 5x + 6 = 12$
5. $x^2 + 5x = 0$
6. $x^2 - 4 = 0$
7. $x^2 + 8x + 16 = 0$
8. $x^2 - 10^x = -25$
9. $9x^2 + 48x + 64 = 0$
10. $2x^2 + 3x - 1 = 0$
11. $5x^2 - 7x = -2$
12. $6x^2 + 2x + 1 = 0$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 2-3

حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

السابق:
- تعلّمت إيجاد العامل المشترك الأكبر لمجموعات من الأعداد.

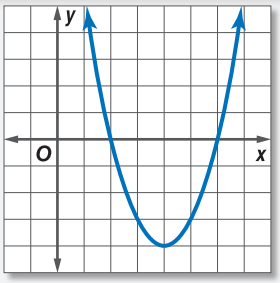
الحالي:
1. كتابة معادلات تربيعية بالصيغة القياسية.
2. حل المعادلات التربيعية باستخدام التحليل إلى العوامل.

لماذا؟
- **الصيغة التحليلية** لمعادلة تربيعية هي $a(x - p)(x - q) = 0$. في المعادلة، يمثل p و q المقطع من محور x للتمثيل البياني للمعادلة.

المقطع من محور x للتمثيل البياني الموضح على اليسار هي 2 و6 في هذا الدرس. ستتعلّم كيفية تغيير معادلة تربيعية من الصيغة التحليلية إلى الصيغة القياسية والعكس.

الصيغة القياسية	الصيغة التحليلية
$0 = x^2 - 8x + 12$	$0 = (x - 6)(x - 2)$

العوامل



التمثيل البياني المرتبط. 2 و6 هما مقاطع x.

المفردات الجديدة
- **الصيغة التحليلية** factored form
- **طريقة التوزيع بالترتيب** FOIL method

ممارسات في الرياضيات
2 التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 الصيغة القياسية

يمكنك استخدام طريقة التوزيع بالترتيب لكتابة المعادلة التربيعية التي بالصيغة التحليلية بالصيغة القياسية. تستخدم **طريقة التوزيع بالترتيب** خاصية التوزيع لضرب ثنائيات الحدود.

المفهوم الأساسي طريقة التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيات الحدود

التعبير اللفظي لضرب ثنائيتي حد، جد مجموع كل من ناتج ضرب الحدّين الأولين وناتج ضرب الحدّين في الطرفين وناتج ضرب الحدّين الأوسطين وناتج ضرب الحدّين الأخيرين.

أمثلة

ناتج ضرب الحدّين الأولين	ناتج ضرب الحدّين في الطرفين	ناتج ضرب الحدّين الأوسطين	ناتج ضرب الحدّين الأخيرين
$(x)(x)$	$(x)(-2)$	$(-6)(x)$	$(-6)(-2)$

$$(x - 6)(x - 2) = (x)(x) + (x)(-2) + (-6)(x) + (-6)(-2)$$

$$= x^2 - 2x - 6x + 12 \text{ أو } x^2 - 8x + 12$$

مثال 1 تحويل الجمل إلى معادلات

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-\frac{1}{3}$ و6 بالصيغة القياسية.

اكتب النمط	$(x - p)(x - q) = 0$
عوّض عن p بـ $-\frac{1}{3}$ و q بـ 6	$\left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right](x - 6) = 0$
بسّط	$\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 6) = 0$
اضرب	$x^2 - \frac{17}{3}x - 2 = 0$
اضرب كل طرف في 3 بحيث يكون b و c أعدادًا صحيحة	$3x^2 - 17x - 6 = 0$

تمرين موجّه

1. اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{3}{4}$ و-5 بالصيغة القياسية.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

يُعد حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل تطبيقًا لخاصية ناتج الضرب الصفري.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج الضرب الصفري

التعبير اللفظي لأي عدد حقيقي a وb، إذا كان $ab = 0$، فإما $a = 0$ أو $b = 0$ أو كلًا من a وb يساوي صفرًا.

مثال إذا كان $(x + 3)(x - 5) = 0$، فإن $x + 3 = 0$ أو $x - 5 = 0$

مثال 2 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

حُـــلّ المعادلة $16x^2 + 8x = 0$

$16x^2 + 8x = 0$	المعادلة الأصلية
$8x(2x) + 8x\ (1) = 0$	إخراج العامل المشترك الأكبر
$8x(2x + 1) = 0$	خاصية التوزيع
$8x = 0$ وأ $2x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 0$ $\quad 2x = -1$	حل المعادلتين
$x = -\frac{1}{2}$	

تمرين موجّه حُل كل معادلة من المعادلات التالية.

2A. $20x^2 + 15x = 0$ **2B.** $4y^2 + 16y = 0$ **2C.** $6a^5 + 18a^4 = 0$

مراجعة المفردات

المربع الكامل عدد جذره التربيعي الموجب عدد كلي

ثلاثيات الحدود وثنائيات الحدود التي تشكّل مربعات كاملة لها قواعد خاصة للتحليل. ولاستخدام هذه القواعد، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير.

مثال 3 المربعات الكاملة والفرق بين مربعين

حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية.

a. $x^2 + 16x + 64 = 0$

$x^2 = (x)^2;\ 64 = (8)^2$	الحدّان الأول والأخير مربعان كاملان
$16x = 2(x)(8)$	الحد الأوسط يساوي $2ab$

$x^2 + 16x + 64$ عبارة عن ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.

$x^2 + 16x + 64 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 8)^2 = 0$	حلّل باستخدام النمط
$x + 8 = 0$	احسب الجذر التربيعي لكل طرف
$x = -8$	جد الحل

b. $x^2 = 64$

$x^2 = 64$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 64 = 0$	اطرح 64 من كل طرف
$x^2 - (8)^2 = 0$	اكتب بالصيغة $a^2 - b^2$
$(x + 8)(x - 8) = 0$	حلّل الفرق بين مربعين
$x + 8 = 0$ أو $x - 8 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = -8$ $\quad x = 8$	جد الحل

تمرين موجّه

3A. $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **3B.** $81x^2 - 9x = 0$ **3C.** $6a^2 - 3a = 0$

نصيحة دراسية

الجذر التربيعية بالفحص تلاحظ أن الجذرين التربيعيين لـ 64 هما -8 و8 أيضًا بالنسبة إلى $x^2 = 4$، تكون الحلول -2 و2

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

البنية في حالة وجود قيم m وp، يمكن دائمًا تحليل ثلاثية الحدود.

هناك نمط خاص يُستخدم عند تحليل ثلاثية الحدود التي بالصيغة $ax^2 + bx + c$. أولًا، اضرب قيم a وc، ثم جد القيمتين m وp، بحيث *ناتج ضربهما يساوي* ac ومجموعهما يساوي b.

فكّر في $ac = 6 \times (-5) = -30$: $6x^2 + 13x - 5$.

عوامل -30	المجموع	عوامل -30	المجموع
$1, -30$	-29	$-1, 30$	29
$2, -15$	-13	**$-2, 15$**	**13**
$3, -10$	-7	$-3, 10$	7
$5, -6$	-1	$-5, 6$	1

الآن، يمكن إعادة كتابة الحد الأوسط، $13x$، في صورة $-2x + 15x$.

يمكن تحليل كثيرة الحدود هذه بالتجميع.

$6x^2 + 13x - 5 = 6x^2 + mx + px - 5$	اكتب النمط
$= 6x^2 - 2x + 15x - 5$	$p = 15$ و$m = -2$
$= (6x^2 - 2x) + (15x - 5)$	جمّع الحدود
$= 2x(3x - 1) + 5(3x - 1)$	حلّل بإخراج العامل المشترك الأكبر
$= (2x + 5)(3x - 1)$	خاصية التوزيع

مثال 4 تحليل ثلاثيات الحدود

حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية.

a. $x^2 + 9x + 20 = 0$

$ac = 20$ $a = 1, c = 20$

عوامل 20	المجموع	عوامل 20	المجموع
$1, 20$	21	$-1, -20$	-21
$2, 10$	12	$-2, -10$	-12
$4, 5$	**9**	$-4, -5$	-9

$x^2 + 9x + 20 = 0$	التعبير الأصلي
$x^2 + mx + px + 20 = 0$	اكتب النمط
$x^2 + 4x + 5x + 20 = 0$	$p = 5$ و$m = 4$
$(x^2 + 4x) + (5x + 20) = 0$	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
$x(x + 4) + 5(x + 4) = 0$	أخرج العامل المشترك الأكبر من كل تجميع
$(x + 5)(x + 4) = 0$	خاصية التوزيع
$x + 5 = 0$ أو $x + 4 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = -5$ $x = -4$	حل كل معادلة

b. $6y^2 - 23y + 20 = 0$

$ac = 120$ $a = 6, c = 20$

$m = -8, p = -15$ $-8 \times (-15) = 120; -8 + (-15) = -23$

$6y^2 - 23y + 20 = 0$	المعادلة الأصلية
$6y^2 + my + py + 20 = 0$	اكتب النمط
$6y^2 - 8y - 15y + 20 = 0$	$p = -15$ و$m = -8$
$(6y^2 - 8y) + (-15y + 20) = 0$	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
$2y(3y - 4) - 5(3y - 4) = 0$	أخرج العامل المشترك الأكبر من كل تجميع
$(2y - 5)(3y - 4) = 0$	خاصية التوزيع
$2y - 5 = 0$ أو $3y - 4 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$2y = 5$ $3y = 4$	حل المعادلتين
$y = \frac{5}{2}$ $y = \frac{4}{3}$	

نصيحة دراسية

ثلاثيات الحدود لا يشكل تبديل قيم m وp عند التجميع أهمية كبيرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

4A. $x^2 - 11x + 30 = 0$

4B. $x^2 - 4x - 21 = 0$

4C. $15x^2 - 8x + 1 = 0$

4D. $-12x^2 + 8x + 15 = 0$

الربط بالحياة اليومية

حطمت اللاعبة الكوبية أوسليديز مينديه الرقم العالمي لرمي الرمح عام 2002 وحققت الرقم القياسي 71.5 مترًا.

المصدر: *New York Times*

مثال 5 من الحياة اليومية حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

ألعاب القوى يتم تمثيل ارتفاع الرمح بالأقدام بالعلاقة $h(t) = -16t^2 + 79t + 5$، حيث t الزمن بالثواني بعد رمي الرمح. ما المدة التي يستغرقها الرمح في الهواء؟

لتحديد المدة التي يستغرقها الرمح في الهواء، نحتاج إلى تحديد الزمن الذي يكون فيه الارتفاع صفرًا. يمكننا القيام بذلك من خلال حل المعادلة $-16t^2 + 79t + 5 = 0$

$-16t^2 + 79t + 5 = 0$	المعادلة الأصلية
$m = 80;\ p = -1$	$-16 \times (5) = -80,\ 80 \times (-1) = -80,\ 80 + (-1) = 79$
$-16t^2 + 80t - t + 5 = 0$	اكتب النمط
$(-16t^2 + 80t) + (-t + 5) = 0$	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
$16t(-t + 5) + 1(-t + 5) = 0$	أخرج العامل المشترك الأكبر من كل مجموعة
$(16t + 1)(-t + 5) = 0$	خاصية التوزيع
$16t + 1 = 0$ أو $-t + 5 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$16t = -1$ $\quad -t = -5$	حل المعادلتين
$t = -\frac{1}{16}$ $\quad t = 5$	حُل

تحقق لدينا حلان.

- الحل الأول سالب ونظرًا لأن الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا، يمكن استبعاد هذا الحل.
- الحل الثاني وهو 5 ثوانٍ يبدو منطقيًا بالنسبة إلى الزمن الذي يستغرقه الرمح في الهواء.
- يمكن التأكد من الإجابة بالتعويض مرة أخرى في المعادلة الأصلية.

$$-16t^2 + 79t + 5 = 0$$
$$-16 \times (5)^2 + 79 \times (5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$-400 + 395 + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

يظل الرمح في الهواء لمدة 5 ثوانٍ.

تمرين موجّه

5. القفز بالحبال سجّل جمال قفز أخيه بالحبل من ارتفاع 300 ft. وعندما رفع الحبل أخاه لأعلى مرة أخرى، كان على ارتفاع 23 ft عن الأرض. فإذا كان جمال قد بدأ التسجيل بمجرد بدء أخيه في الهبوط، فما هو الزمن المنقضي حتى ارتداد الحبل مرة أخرى؟ استخدم $f(t) = -16t^2 + c$، حيث c هي الارتفاع بالأقدام.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحقق من فهمك

مثال 1 اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية من الجذور المعطاة.

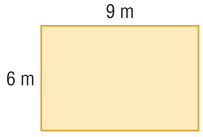
1. $5, -8$
2. $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$
3. $-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$

الأمثلة 4-2 حلل كل كثيرة حدود مما يلي إلى العوامل.

4. $35x^2 - 15x$
5. $18x^2 - 3x + 24x - 4$
6. $x^2 - 12x + 32$
7. $x^2 - 4x - 21$
8. $2x^2 + 7x - 30$
9. $16x^2 - 16x + 3$

مثال 5 حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية.

10. $x^2 - 36 = 0$
11. $12x^2 - 18x = 0$
12. $12x^2 - 2x - 2 = 0$
13. $x^2 - 9x = 0$
14. $x^2 - 3x - 28 = 0$
15. $2x^2 - 24x = -72$



16. **التفكير المنطقي** تريد سالي مضاعفة مساحة حديقتها بزيادة الطول والعرض بالمقدار نفسه. فماذا ستكون أبعاد حديقتها؟

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R4.

مثال 1 اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية من الجذور المعطاة.

17. 7
18. $-5, \frac{1}{2}$
19. $\frac{1}{5}, 6$

الأمثلة 4-2 حلل كل كثيرة حدود مما يلي إلى العوامل.

20. $40a^2 - 32a$
21. $51c^3 - 34c$
22. $32xy + 40bx - 12ay - 15ab$
23. $3x^2 - 12$
24. $15y^2 - 240$
25. $48cg + 36cf - 4dg - 3df$
26. $x^2 + 13x + 40$
27. $x^2 - 9x - 22$
28. $3x^2 + 12x - 36$
29. $15x^2 + 7x - 2$
30. $4x^2 + 29x + 30$
31. $18x^2 + 15x - 12$
32. $8x^2z^2 - 4xz^2 - 12z^2$
33. $9x^2 - 25$
34. $18x^2y^2 - 24xy^2 + 36y^2$

مثال 5 حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية.

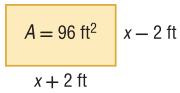
35. $15x^2 - 84x - 36 = 0$
36. $12x^2 + 13x - 14 = 0$
37. $12x^2 - 108x = 0$
38. $x^2 + 4x - 45 = 0$
39. $x^2 - 5x - 24 = 0$
40. $x^2 = 121$
41. $x^2 + 13 = 17$
42. $-3x^2 - 10x + 8 = 0$
43. $-8x^2 + 46x - 30 = 0$

44. **الهندسة** إذا كان وتر المثلث القائم أطول من أحد الأضلاع بمقدار سنتيمتر واحد وأطول من ثلاثة أمثال الضلع الآخر بمقدار 4 cm، فجد أبعاد هذا المثلث.

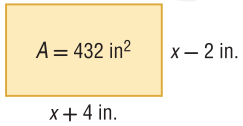
45. **نظرية الأعداد** جد عددين صحيحين زوجيين متتالين ناتج ضربهما 624

الهندسة جد قيمة x وأبعاد كل مستطيل.

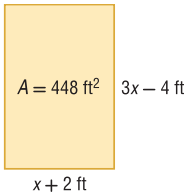
46.



47.



48.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

حُـــلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

49. $12x^2 - 4x = 5$ **50.** $5x^2 = 15x$ **51.** $16x^2 + 36 = -48x$

52. $75x^2 - 60x = -12$ **53.** $4x^2 - 144 = 0$ **54.** $-7x + 6 = 20x^2$

55. دار السينما تخطط إحدى الشركات لبناء سينما متعددة القاعات. وأخبر المحلل المالي مدير السينما أن دالة ربح السينما هي $P(x) = -x^2 + 48x - 512$، حيث x عدد الشاشات و $P(x)$ هي الأرباح المكتسبة بآلاف الدراهم. حدّد مدى إنتاج الشاشات الذي يضمن ألا تخسر الشركة أموالها.

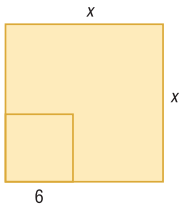
اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية من الجذور المعطاة.

56. $-\frac{4}{7}, \frac{3}{8}$ **57.** 3.4, 0.6 **58.** $\frac{2}{11}, \frac{5}{9}$

حُـــلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

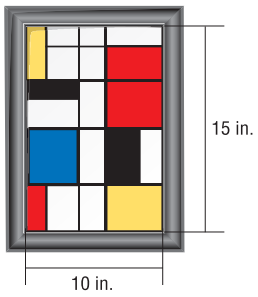
59. $10x^2 + 25x = 15$ **60.** $27x^2 + 5 = 48x$ **61.** $x^2 + 0.25x = 1.25$

62. $48x^2 - 15 = -22x$ **63.** $3x^2 + 2x = 3.75$ **64.** $-32x^2 + 56x = 12$



65. التصميم تم قطع مربع من الشكل الموضح على اليسار. اكتب تعبيرًا يمثل مساحة الشكل المتبقي ثم حلّل هذا التعبير إلى العوامل.

66. المثابرة بعد تحليل السوق، قررت إحدى الشركات التي تبيع مواقع الويب أن تتمثل أرباح منتجها في العلاقة $P(x) = -16x^2 + 368x - 2035$، حيث x سعر كل موقع ويب و $P(x)$ أرباح الشركة. حدّد نطاق سعر مواقع الويب الذي يحقق أرباحًا للشركة.



67. الرسومات تريد إيمان إضافة حد لرسمتها يكون موزعًا بالتساوي، وله مساحة الرسمة نفسها. ما أبعاد الرسمة مع تضمين الحد؟

68. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستدرس $a(x - p)(x - q) = 0$

a. بيانيًّا مثّل بيانيًا الدالة ذات الصلة إذا كان $a = 1$ و $p = 2$ و $q = -3$

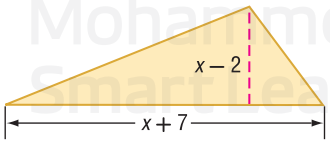
b. تحليليًّا ما حلول هذه المعادلة؟

c. بيانيًّا مثّل بيانيًا الدوال ذا ت الصلة إذا كان $a = 4$ و-3 و$\frac{1}{2}$ على التمثيل البياني نفسه.

d. لفظيًّا ما أوجه الشبه والاختلاف بين التمثيلات البيانية؟

e. لفظيًّا ما الاستنتاج الذي يمكنك تكوينه عن العلاقة بين الصيغة التحليلية للمعادلة التربيعية وحلولها؟

69. الهندسة إذا كانت مساحة المثلث $26\ cm^2$، فجد طول القاعدة.



McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

70. كرة القدم عند ركل الكرة في الهواء، يمكن تمثيل ارتفاعها فوق الأرض بالأمتار بالعلاقة $h(t) = -4.9t^2 + 14.7t$ وتمثيل المسافة التي تقطعها بالعلاقة $d(t) = 16t$، حيث t الزمن بالثواني.

a. ما مدة بقاء الكرة في الهواء؟

b. ما المسافة التي تقطعها قبل أن تصطدم بالأرض؟ (تلميح: تجاهل مقاومة الهواء).

c. ما أقصى ارتفاع للكرة؟

حلل كل كثيرة حدود مما يلي إلى العوامل.

71. $18a - 24ay + 48b - 64by$

72. $3x^2 + 2xy + 10y + 15x$

73 $6a^2b^2 - 12ab^2 - 18b^3$

74. $12a^2 - 18ab + 30ab^3$

75. $32ax + 12bx - 48ay - 18by$

76. $30ac + 80bd + 40ad + 60bc$

77. $5ax^2 - 2by^2 - 5ay^2 + 2bx^2$

78. $12c^2x + 4d^2y - 3d^2x - 16c^2y$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

79. تحليل الخطأ تقوم ليلى وهدى بحل المعادلة $-12x^2 + 5x + 2 = 0$، هل أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.

هدى	ليلى
$-12x^2 + 5x + 2 = 0$	$-12x^2 + 5x + 2 = 0$
$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$	$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$
$4x(-3x + 2) - (3x + 2) = 0$	$4x(-3x + 2) + (-3x + 2) = 0$
$(4x - 1)(3x + 2) = 0$	$(4x + 1)(-3x + 2) = 0$
$x = \frac{1}{4}$ أو $-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$ أو $\frac{2}{3}$

80. تحفيز حُل $3x^6 - 39x^4 + 108x^2 = 0$ بالتحليل إلى العوامل.

81. تحفيز موضح أدناه قاعدة تحليل الفرق بين مكعبين. استخدم هذه القاعدة لتحليل $40x^5 - 135x^2y^3$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

82. مسألة مفتوحة اختر عددين صحيحين، ثم اكتب معادلة بالصيغة القياسية لها هذان الجذران. كيف ستختلف المعادلة إذا تغيرت إشارة الجذرين؟

83. تحفيز بالنسبة إلى المعادلة التربيعية التي بالصيغة $(x - p)(x - q) = 0$، أثبت أن محور التماثل للدالة التربيعية ذات الصلة يوجد في المنتصف بين مقطعي x لـ p و q.

84. كتابة سؤال يستخدم أحد الزملاء إستراتيجية التخمين والتحقق لتحليل ثلاثيات الحدود التي بالصيغة $x^2 + bx + c$. اكتب سؤالًا تساعده في التفكير في طريقة لاستخدام هذه الإستراتيجية مع $ax^2 + bx + c$.

85. الفرضيات حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة على *الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

في المعادلة التربيعية التي بالصيغة القياسية وبها a وb وc أعداد صحيحة، إذا كان b عدد فرديًا، فلا يمكن أن تكون المعادلة ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملًا.

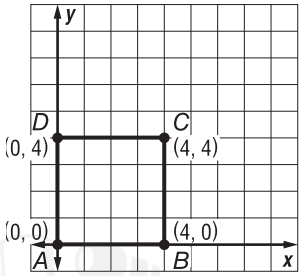
86. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية تحليل ثلاثية حدود بالصيغة القياسية حيث $a > 1$

برنامج محمد بن راشد للذكاء
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

87. إجابة مختصرة في حالة تحويل $ABCD$ بمقدار $(x, y) \rightarrow (3x, 4y)$، حدد مساحة $A'B'C'D'$.



88. بالنسبة إلى $y = 2|6 - 3x| + 4$، فأي مجموعة تصف x عندما $y < 6$؟

A $\left\{x \middle| \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}\right\}$

B $\left\{x \middle| x < \frac{5}{3} \text{ أو } x > \frac{7}{3}\right\}$

C $\left\{x \middle| x < \frac{5}{3}\right\}$

D $\left\{x \middle| x > \frac{7}{3}\right\}$

89. الاحتمال كلمة مرور بها 5 أحرف وقد تتمثل هذه الأحرف في الأعداد من 0 إلى 9 و26 حرفًا من الأحرف الأبجدية. ولا يمكن تكرار أي حرف. ما احتمال أن تبدأ كلمة المرور بحرف ساكن؟

F $\frac{21}{26}$

G $\frac{21}{35}$

H $\frac{21}{36}$

J $\frac{5}{36}$

90. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول إذا كان $c = \frac{8a^3}{b}$، فماذا يحدث لقيمة c عند مضاعفة كل من a وb؟

A لن تتغير c.

B تقل c إلى النصف.

C تتضاعف c.

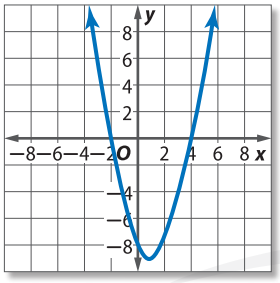
D تتضاعف c أربع مرات.

E تتضاعف c ثماني مرات.

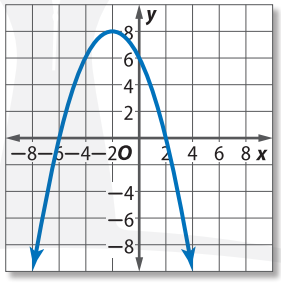
مراجعة شاملة

استخدم التمثيل البياني ذا الصلة لكل معادلة لتحديد حلولها. (الدرس 2-2)

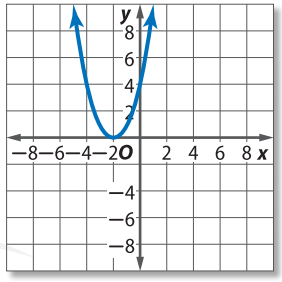
91. $x^2 - 2x - 8 = 0$



92. $x^2 + 4x = 12$



93. $x^2 + 4x + 4 = 0$



مثّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 1-2)

94. $f(x) = x^2 - 6x + 2$

95. $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

96. $f(x) = (x - 3)(x + 4)$

97. جمع التبرعات تبيع المدرسة الثانوية الشمالية أوراق تغليف وبطاقات في صناديق من أجل جمع التبرعات. فإذا كانت المدرسة تحصل على AED 1.00 من كل لفة من ورق التغليف يتم بيعها و AED 0.50 من كل صندوق بطاقات يتم بيعه.

a. اكتب مصفوفة تمثل الكميات المباعة لكل صف دراسي ومصفوفة تمثل مقدار الأموال التي تكسبها المدرسة من كل عنصر مباع.

b. اكتب مصفوفة توضح مقدار ما ربحه كل صف دراسي.

c. ما الصف الدراسي الذي حقق أعلى ربح؟

d. ما إجمالي الأموال التي حققتها المدرسة من جمع التبرعات.

إجمالي المبالغ التي حققها كل صف دراسي

الصف الدراسي	ورق التغليف	البطاقات
طلاب الصف الأول	72	49
طلاب الصف الثاني	68	63
طلاب الصف قبل الأخير	90	56
طلاب الصف الأخير	86	62

مراجعة المهارات

حوّل إلى أبسط صورة.

98. $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$

99. $\sqrt{8} \times \sqrt{32}$

100. $2\sqrt{3} \times \sqrt{27}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

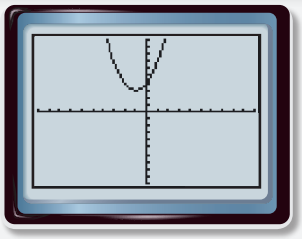
الدرس 2-4

الأعداد المركبة

السابق:
- لقد قمتَ بتبسيط الجذور التربيعية.

الحالي:
1 إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.
2 إجراء العمليات على الأعداد المركبة.

لماذا؟
- فكّر في التمثيل البياني لـ $y = x^2 + 2x + 4$ على اليسار. لاحظ كيف لا يحتوي هذا التمثيل البياني على مقاطع x ومن ثَم لا يحتوي على أي جذور. هل يعني هذا أنه لا توجد حلول للمعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$؟



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

استخدم وظيفة Solver الموجودة في قائمة MATH في حاسبة التمثيل البياني. أدخل المعادلة واختر $x = 2$ أثناء تخمين الحل.

اضغط على ALPHA ENTER وستحاول الحاسبة حل المعادلة. تشير الحاسبة إلى عدم وجود حل بظهور رسالة الخطأ.

ومن ثَم لا توجد حلول حقيقية، لكن توجد حلول تخيلية.

المفردات الجديدة

الوحدة التخيلية
imaginary unit
العدد التخيلي البحت pure imaginary number
العدد المركب complex number
مرافقات مركبة complex conjugates

ممارسات في الرياضيات
6 مراعاة الدقة.

1 الأعداد التخيلية البحتة

خلال دراستك للرياضيات حتى الآن، تعاملتَ مع الأعداد الحقيقية. لكن قادت المعادلات المشابهة للمعادلة السابقة علماء الرياضيات إلى تعريف الأعداد التخيلية. وتُعرف **الوحدة التخيلية** i بأنها $i^2 = -1$. العدد i هو الجذر التربيعي الرئيس لـ -1؛ أي $i = \sqrt{-1}$.

تسمى الأعداد التي بالصورة $6i$ و $-2i$ و $i\sqrt{3}$ **الأعداد التخيلية البحتة**، وهي الجذور التربيعية للأعداد الحقيقية السالبة. لأي عدد حقيقي موجب مثل b، يكون $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{-1}$ أو bi.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

حوّل إلى أبسط صورة.

a. $\sqrt{-27}$

$$\sqrt{-27} = \sqrt{-1 \times 3^2 \times 3}$$
$$= \sqrt{-1} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$$
$$= i \times 3 \times \sqrt{3} \text{ أو } 3i\sqrt{3}$$

b. $\sqrt{-216}$

$$\sqrt{-216} = \sqrt{-1 \times 6^2 \times 6}$$
$$= \sqrt{-1} \times \sqrt{6^2} \times \sqrt{6}$$
$$= i \times 6 \times \sqrt{6} \text{ أو } 6i\sqrt{6}$$

تمرين موجّه

1A. $\sqrt{-18}$

1B. $\sqrt{-125}$

تنطبق خاصية التبديل وخاصية التجميع للضرب على الأعداد التخيلية البحتة. ويوضح الجدول أدناه بعض القوى الأولى للوحدة التخيلية i.

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \times i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \times i = i$	$i^6 = i^4 \times i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \times i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 نواتج ضرب الأعداد التخيلية البحتة

حوّل إلى أبسط صورة.

a. $-5i \times 3i$

$-5i \times 3i = -15i^2$ اضرب

$= -15 \times (-1)$ $i^2 = -1$

$= 15$ بسّط

b. $\sqrt{-6} \times \sqrt{-15}$

$\sqrt{-6} \times \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \times i\sqrt{15}$ $i = \sqrt{-1}$

$= i^2\sqrt{90}$ اضرب

$= -1 \times \sqrt{9} \times \sqrt{10}$ بسّط

$= -3\sqrt{10}$ اضرب

تمرين موجّه

2A. $3i \times 4i$ **2B.** $\sqrt{-20} \times \sqrt{-12}$ **2C.** i^{31}

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستخدام **خاصية الجذر التربيعي**. على غرار الفرق بين مربعين، يمكن تحليل مجموع المربعين باستخدام الأعداد المركبة.

مثال 3 معادلة ذات حلول تخيلية بحتة

حُـــل المعادلة: $x^2 + 64 = 0$

الطريقة 1 خاصية الجذر التربيعي

$x^2 + 64 = 0$

$x^2 = -64$

$x = \pm\sqrt{-64}$

$x = \pm 8i$

الطريقة 2 التحليل إلى العوامل

$x^2 + 64 = 0$

$x^2 + 8^2 = 0$

$x^2 - (-8^2) = 0$

$(x + 8i)(x - 8i) = 0$

$(x + 8i) = 0$ أو $(x - 8i) = 0$

$x = -8i$ $x = 8i$

تمرين موجّه

حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية.

3A. $4x^2 + 100 = 0$ **3B.** $x^2 + 4 = 0$

مهنة من الحياة اليومية

المهندس الكهربائي

يصمم المهندسون الكهربائيون ويطورون ويختبرون ويشرفون على صنع المعدات الكهربائية مثل مشغلات الموسيقى الرقمية والمحركات الكهربائية والإضاءة والرادار ونظم الملاحة. والحصول على درجة البكالوريوس في الهندسة مطلوب تقريبًا لجميع وظائف الهندسة للمبتدئين.

2 العمليات على الأعداد المركبة

فكّر في $3i + 2$. نظرًا لأن 2 عدد حقيقي و$3i$ عدد تخيلي بحت، فإن الحدود غير متشابهة ولا يمكن جمعها. يسمى هذا النوع من التعبير **العدد المركب**.

المفهوم الأساسي الأعداد المركبة

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته في صورة $a + bi$، حيث a وb أعداد حقيقية و i هي الوحدة التخيلية. تسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

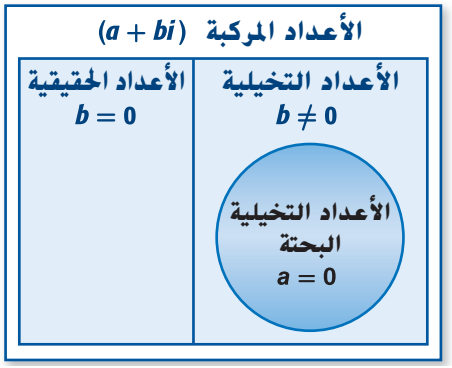
أمثلة: $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يوضح مخطط فِن مجموعة الأعداد المركبة.

- إذا كانت $b = 0$، فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا.
- إذا كانت $b \neq 0$، فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا.
- إذا كانت $a = 0$، فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا بحتًا.



يكون العددان المركبان متساويين إذا تساوى الجزءان الحقيقيان والجزءان التخيليان، أي أن، $a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كانت $a = c$ و $b = d$.

نصيحة دراسية

الأعداد المركبة في حين أن كل الأعداد الحقيقية هي مركبة أيضًا، فإن مصطلح *العدد المركب* يشير عادة إلى عدد غير حقيقي.

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

جد قيمتي x و y اللتين تجعلان المعادلة $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

ساوِ بين الجزأين الحقيقين وساوِ بين الجزأين التخيليين.

$3x - 5 = 7$	الجزءان الحقيقيان	$y - 3 = 6$	الجزءان التخيليان
$3x = 12$	اجمع 5 على كل طرف	$y = 9$	اجمع 3 على كل طرف
$x = 4$	اقسم كل طرف على 3		

تمرين موجّه

4. جد قيمتي x و y اللتين تجعلان المعادلة $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

تنطبق خواص التبديل والتجميع والتوزيع للضرب والجمع على الأعداد المركبة. لجمع الأعداد المركبة أو طرحها، جمّع الحدود المتشابهة، أي، جمّع الأجزاء الحقيقية معًا والأجزاء التخيلية معًا.

مثال 5 جمع الأعداد المركبة وطرحها

حوّل إلى أبسط صورة.

a. $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$ خاصيتا التجميع والتبديل

$= 7 - 3i$ بسّط

b. $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$ خاصيتا التجميع والتبديل

$= 1 - 2i$ بسّط

تمرين موجّه

5A. $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ **5B.** $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

نصيحة دراسية

قراءة في الرياضيات يستخدم المهندسون الكهربائيون j كوحدة تخيلية لتجنب الالتباس مع i التي تمثل التيار الكهربائي.

تُستخدم الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء. ففي هذه المسائل، تُمثل j عادة الوحدة التخيلية. وفي دارة التيار المتناوب، يمكن تمثيل الجهد والتيار والمقاومة أو المعاوقة بأعداد مركبة. ولضرب هذه الأعداد، تُستخدم طريقة التوزيع بالترتيب.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 6 من الحياة اليومية ضرب الأعداد المركبة

الكهرباء في دارة التيار المتناوب، يرتبط كل من فرق الجهد V والتيار الكهربائي C والمعاوقة I من خلال الصيغة $V = C \cdot I$. جد فرق الجهد في دارة بها تيار $2 + 4j$ amps ومعاوقة $9 - 3j$ ohms

$V = C \cdot I$	الصيغة الكهربائية
$= (2 + 4j) \times (9 - 3j)$	$C = 2 + 4j$ و $I = 9 - 3j$
$= 2(9) + 2(-3j) + 4j(9) + 4j(-3j)$	طريقة التوزيع بالترتيب
$= 18 - 6j + 36j - 12j^2$	اضرب
$= 18 + 30j - 12(-1)$	$j^2 = -1$
$= 30 + 30j$	اجمع

فرق الجهد $30 + 30j$ فولت.

تمرين موجّه

6. جد فرق الجهد في دارة بها تيار $2 - 4j$ amps ومعاوقة $3 - 2j$ ohms

الربط بالحياة اليومية

تعد أضواء الزينة من أمثلة درات التوالي، ويؤثر عدد مصابيح الدارة في شدة التيار، مما يؤثر بدوره في سطوع الأضواء.

المصدر: *Popular Science*

يسمى العددان المركّبان بالصورة $a + bi$ و $a - bi$ **عددين مركبين مترافقين**. وناتج ضربهما عدد حقيقي دائمًا. يمكنك استخدام هذه الحقيقة لتبسيط ناتج قسمة عددين مركبين.

مثال 7 قسمة الأعداد المركبة

حوّل إلى أبسط صورة.

a. $\frac{2i}{3 + 6i}$

$\frac{2i}{3 + 6i} = \frac{2i}{3 + 6i} \times \frac{3 - 6i}{3 - 6i}$	$3 + 6i$ و $3 - 6i$ مترافقان مركّبان
$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$	اضرب
$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$	$i^2 = -1$
$= \frac{6i + 12}{45}$	بسّط
$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$	الصيغة $a + bi$

b. $\frac{4 + i}{5i}$

$\frac{4 + i}{5i} = \frac{4 + i}{5i} \times \frac{i}{i}$	اضرب في $\frac{i}{i}$
$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$	اضرب.
$= \frac{4i - 1}{-5}$	$i^2 = -1$
$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$	الصيغة $a + bi$

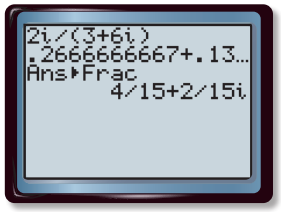
تمرين موجّه

7A. $\frac{-2i}{3 + 5i}$

7B. $\frac{2 + i}{1 - i}$

نصيحة دراسية

التكنولوجيا يمكن إجراء العمليات على الأعداد المركبة باستخدام حاسبة التمثيل البياني TI-84/83 Plus. استخدم الوظيفة [i] 2nd لإدخال التعبير، ثم اضغط على MATH ENTER لعرض الإجابة.



برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحقق من فهمك

المثالان 1 و2 حوّل إلى أبسط صورة.

1. $\sqrt{-81}$
2. $\sqrt{-32}$
3. $(4i)(3-i)$
4. $3\sqrt{-24}\times 2\sqrt{-18}$
5. i^{40}
6. i^{63}

مثال 3 حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية.

7. $4x^2 + 32 = 0$
8. $x^2 + 1 = 0$

مثال 4 جد قيم a و b التي تجعل كل معادلة صحيحة.

9. $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$
10. $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

المثالان 5 و7 حوّل إلى أبسط صورة.

11. $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$
12. $(7 + 4i) - (1 + 2i)$
13. $(6 - 8i)(9 + 2i)$
14. $(3 + 2i)(-2 + 4i)$
15. $\frac{3-i}{4+2i}$
16. $\frac{2+i}{5+6i}$

مثال 6

17. **الكهرباء** إذا كانت شدة التيار في الجزء الأول من دارة التوالي $-5 - 3j$ amps، وشدة التيار في الجزء الآخر من الدارة $7 + 9j$ amps. فاجمع هذين العددين المركبين لإيجاد إجمالي التيار في الدارة.

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R4.

المثالان 1 و2 **البنية** حوّل إلى أبسط صورة.

18. $\sqrt{-121}$
19. $\sqrt{-169}$
20. $\sqrt{-100}$
21. $\sqrt{-81}$
22. $(-3i)(-7i)(2i)$
23. $4i(-6i)^2$
24. i^{11}
25. i^{25}
26. $(10 - 7i) + (6 + 9i)$
27. $(-3 + i) + (-4 - i)$
28. $(12 + 5i) - (9 - 2i)$
29. $(11 - 8i) - (2 - 8i)$
30. $(1 + 2i)(1 - 2i)$
31. $(3 + 5i)(5 - 3i)$
32. $(4 - i)(6 - 6i)$
33. $\frac{2i}{1+i}$
34. $\frac{5}{2+4i}$
35. $\frac{5+i}{3i}$

مثال 3 حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية.

36. $4x^2 + 4 = 0$
37. $3x^2 + 48 = 0$
38. $2x^2 + 50 = 0$
39. $2x^2 + 10 = 0$
40. $6x^2 + 108 = 0$
41. $8x^2 + 128 = 0$

مثال 4 جد قيم x و y التي تجعل كل معادلة صحيحة.

42. $9 + 12i = 3x + 4yi$
43. $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$
44. $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$
45. $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$
46. $a + 3b + (3a - b)i = 6 + 6i$
47. $(2a - 4b)i + a + 5b = 15 + 58i$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثالان 5 و7 **حوّل إلى أبسط صورة.**

48. $\sqrt{-10}\times\sqrt{-24}$ **49.** $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$ **50.** i^{41}

51. $(4 - 6i) + (4 + 6i)$ **52.** $(8 - 5i) - (7 + i)$ **53.** $(-6 - i)(3 - 3i)$

54. $\frac{(5+i)^2}{3-i}$ **55.** $\frac{6-i}{2-3i}$ **56.** $(-4 + 6i)(2 - i)(3 + 7i)$

57. $(1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i)$ **58.** $\frac{4-i\sqrt{2}}{4+i\sqrt{2}}$ **59.** $\frac{2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$

مثال 6

60. الكهرباء إذا كانت المعاوقة في الجزء الأول من دارة التوالي $7 + 8j$ أوم، والمعاوقة في الجزء الآخر من الدارة $13 - 4j$ أوم، فاجمع هذين العددين المركبين لإيجاد إجمالي المعاوقة في الدارة.

الكهرباء استخدم القانون $V = C \cdot I$.

61. إذا كانت شدة التيار في الدارة $3 + 6j$ أمبير، والمعاوقة $5 - j$ أوم، فجد فرق الجهد.

62. إذا كان فرق الجهد في الدارة $20 - 12j$ فولت، والمعاوقة $6 - 4j$ أوم، فجد شدة التيار.

63. جد مجموع $ix^2 - (4 + 5i)x + 7$ و $3x^2 + (2 + 6i)x - 8i$.

64. حوّل إلى أبسط صورة $[(-3 + 4i)x^2 + (5 - 5i)x - 6] - [(2 + i)x^2 - ix + 5 + i]$.

65. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف المعادلات التربيعية التي لها جذور مركبة.

a. جبريًا اكتب معادلة تربيعية جذراها $3i$ و $-3i$ بالصيغة القياسية.

b. بيانيًا مثّل المعادلة التربيعية الناتجة من الجزء **a** بيانيًا من خلال تمثيل الدالة المرتبطة بها بيانيًا.

c. جبريًا اكتب معادلة تربيعية جذراها $i + 2$ و $i - 2$ بالصيغة القياسية.

d. بيانيًا مثّل المعادلة التربيعية الناتجة من الجزء **c** بيانيًا من خلال تمثيل الدالة المرتبطة بها بيانيًا.

e. تحليليًا كيف تعرف أن للمعادلة التربيعية حلولًا مركبة فقط؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. النقد يقوم حميد وفهد بتبسيط $(4i)(3i)(2i)$. هل أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.

حُميد	فهد
$24i^3 = -24$	$24i^3 = -24i$

67. تحدٍّ حوّل إلى أبسط صورة $(1 + 2i)^3$.

68. الاستنتاج حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة *على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

يتكوّن كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي.

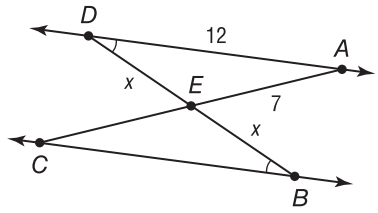
69. مسألة مفتوحة اكتب عددين مركبين ناتج ضربهما 20

70. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية ارتباط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

71. إجابة موسعة راجع الشكل للإجابة عما يلي.



a. اذكر مثلثين متطابقين مع كتابة الرؤوس بالترتيب الصحيح.

b. اشرح سبب تطابق المثلثين.

c. ما طول $\overline{EC}$ اشرح إجراءاتك.

72. $(3 + 6)^2 =$

A $2 \times 3 + 2 \times 6$

B 9^2

C $3^2 + 6^2$

D $3^2 \times 6^2$

73. اختبار SAT/ACT يبيع المتجر البنطال بمبلغ **AED 49**. وهذا المبلغ أكبر من المبلغ الذي يدفعه المتجر لشراء البنطال بنسبة **40%** بعد التخفيض، من حق أي موظف شراء أي بنطال متبقٍ بأقل من تكلفة المتجر بنسبة **30%** كم سيدفع الموظف لشراء البنطال بعد التخفيض؟

F AED 10.50

G AED 12.50

H AED 13.72

J AED 24.50

K AED 35.00

74. ما قيم x و y عندما تكون $(5 + 4i) - (x + yi) = (-1 - 3i)$؟

A $x = 6, y = 7$

B $x = 4, y = i$

C $x = 6, y = i$

D $x = 4, y = 7$

مراجعة شاملة

حُـــلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 3-2)

75. $2x^2 + 7x = 15$

76. $4x^2 - 12 = 22x$

77. $6x^2 = 5x + 4$

نظرية الأعداد **استخدم معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كل حالة أو اثبت عدم وجود مثل هذين العددين.** (الدرس 2-2)

78. مجموعهما 3− وناتج ضربهما 40−

79. مجموعهما 19 وناتج ضربهما 48

80. مجموعهما 15−، وناتج ضربهما 56

81. مجموعهما 21−، وناتج ضربهما 108

82. الترفيه راجع الجدول.

رسوم الدخول اليومية		
المقيمون الوقت من اليوم	طفل	بالغ
قبل السادسة مساءً	AED 3.00	AED 4.50
بعد السادسة مساءً	AED 2.00	AED 3.50
غير المقيمين الوقت من اليوم	طفل	بالغ
قبل السادسة مساءً	AED 4.50	AED 6.75
بعد السادسة مساءً	AED 3.00	AED 5.25

a. اكتب مصفوفة تمثل تكلفة الدخول للمقيمين ومصفوفة أخرى تمثل تكلفة الدخول لغير المقيمين.

b. اكتب مصفوفة تمثل التكلفة الإضافية لغير المقيمين.

c. اكتب مصفوفة تمثل الفرق في التكلفة في حالة ذهاب طفل أو شخص بالغ بعد السادسة مساءً. وليس قبل السادسة مساءً.

83. وظائف بدوام جزئي يحصل طارق على AED 10 في الساعة مقابل قطع الحشائش و AED 12 في الساعة مقابل جمع أوراق الشجر. ولا يمكنه العمل أكثر من 15 ساعة في الأسبوع. مثّل بيانيًا متباينتين يمكن لطارق استخدامهما لتحديد عدد الساعات التي يحتاجها للعمل في كل وظيفة إذا كان يريد كسب AED 120 على الأقل في الأسبوع.

مراجعة المهارات

حدّد هل كل ثلاثية حدود مما يلي تمثل مربعًا كاملًا. اكتب نعم أو لا.

84. $x^2 + 16x + 64$

85. $x^2 - 12x + 36$

86. $x^2 + 8x - 16$

87. $x^2 - 14x - 49$

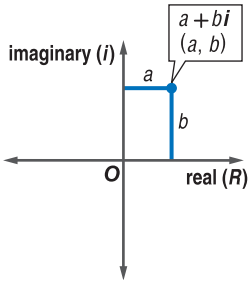
88. $x^2 + x + 0.25$

89. $x^2 + 5x + 6.25$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر الجبر
المستوى المركب

يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ في **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال مع المستوى الإحداثي، يتكوّن المستوى المركب من محورين. يعيّن الجزء الحقيقي على **المحور الحقيقي**، ويكون أفقيًا، في حين يعيّن الجزء التخيلي على **المحور التخيلي**، ويكون رأسيًا. قد يُشار إلى المستوى المركب أيضًا **بمستوى أرجاند**.



مثال 1 التمثيل البياني في المستوى المركب

مثّل بيانيًا $z = 3 + 4i$ في المستوى المركب.

الخطوة 1 مثّل z بالنقطة (a, b).

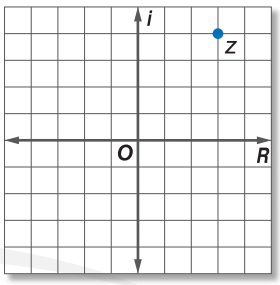
الجزء الحقيقي a من z هو 3.

والجزء التخيلي bi من z هو $4i$

يمكن تمثيل z بالنقطة (a, b) أو $(3, 4)$.

الخطوة 1 مثّل بيانيًا z في المستوى المركب.

أنشئ المستوى المركب وعيّن النقطة $(3, 4)$.



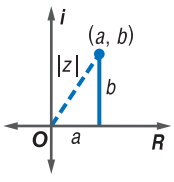
تذكّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي، هي بُعده عن الصفر على خط الأعداد. وبالمثل، **القيمة المطلقة** لعدد مركب هي بُعده عن نقطة الأصل في المستوى المركب. عند تمثيل $a + bi$ بيانيًا في المستوى المركب، تكون القيمة المطلقة لـ $a + bi$ هي المسافة من (a, b) إلى نقطة الأصل. ويمكن إيجادها باستخدام قانون المسافة.

$$\sqrt{a^2 + b^2} \text{ أو } \sqrt{(a - 0)^2 + (b - 0)^2}$$

المفهوم الأساسي القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ تكون

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



المستوى المركب تابع

مثال 2 القيمة المطلقة لعدد مركب

جد القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$

الخطوة 1 حدّد قيم a و b.

الجزء الحقيقي a من z هو -5، والجزء التخيلي bi من z هو $12i$

ومن ثَم $a = -5$ و $b = 12$.

الخطوة 2 جد القيمة المطلقة لـ z.

القيمة المطلقة لعدد مركب

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$b = 12$ و $a = -5$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$$

بسّط

$$= \sqrt{169} = 13$$

القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$ هي 13

يمكن تمثيل جمع وطرح الأعداد المركبة بيانيًا.

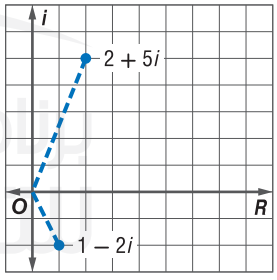
مثال 3 بسّط باستخدام التمثيل البياني

بسّط $(5i - 2) - (-2) + (1 - 2i)$ باستخدام التمثيل البياني.

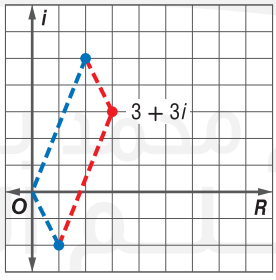
الخطوة 1 اكتب $(5i - 2) - (-2) + (1 - 2i)$ في صورة $(2 + 5i) + (1 - 2i)$.

الخطوة 2 مثّل بيانيًا $2i - 1$ و $5i + 2$ على المستوى المركب نفسه. صِل كل نقطة بنقطة الأصل باستخدام قطعة مستقيمة منقطة.

الخطوة 3 أكمل متوازي الأضلاع الذي تكون القطعتان المستقيمتان ضلعين فيه. ارسم النقطة التي يتقاطع فيها الضلعان الآخران. حل $(5i - 2) - (-2) + (1 - 2i)$ هو $3 + 3i$



الخطوة 2



الخطوة 3

التمارين

مثّل كل عدد في المستوى المركب.

1. $z = 3 + i$
2. $z = -4 - 2i$
3. $z = 2 - i$

جد القيمة المطلقة لكل عدد مركب.

4. $z = -4 - 3i$
5. $z = 7 - 2i$
6. $z = -6 - i$

بسّط باستخدام التمثيل البياني.

7. $(6 + 5i) + (-2 - 3i)$
8. $(8 - 2i) - (4 + 7i)$
9. $(5 + 6i) + (-4 + 3i)$

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 2–1 إلى 2–4

1. جد التقاطع مع y ومعادلة محور التماثل والإحداثي x للرأس في الدالة $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$ ثم أنشئ جدول القيم لتمثيل الدالة بيانيًا. (الدرس 2–1)

2. **الاختيار من متعدد** ما المعادلة التي يكون فيها محور التماثل $x = 5$؟ (الدرس 2–1)

   A $f(x) = x^2 - 5x + 3$

   B $f(x) = x^2 - 10x + 7$

   C $f(x) = x^2 + 10x - 3$

   D $f(x) = x^2 + 5x + 2$

3. حدد هل للدالة $f(x) = 5 - x^2 + 2x$ قيمة عظمى أم صغرى. ثم جد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى وعيّن مجال الدالة ومداها. (الدرس 2–1)

4. **العلوم الفيزيائية** ألقت مايا كرة إلى أعلى، من مكان يعلو سطح الأرض بمقدار 4 ft، وبسرعة متجهة 18 *ft/s*. ويحدَّد ارتفاع الكرة $h(t)$ بعد مرور t من الثواني من إلقاء مايا للكرة بالمعادلة $h(t) = -16t^2 + 18t + 4$. جد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة والزمن المستغرق للوصل إلى هذا الارتفاع. (الدرس 2–1)

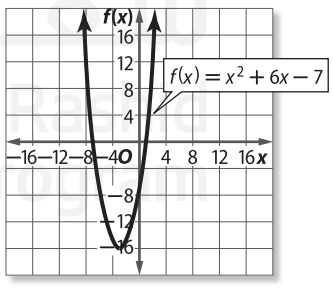
5. حُل $3x^2 - 17x + 5 = 0$ باستخدام التمثيل البياني. إذا تعذر إيجاد الجذور الدقيقة، فاذكر الأعداد الصحيحة المتتالية التي توجد بينها الجذور. (الدرس 2–2)

استخدم معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كل حالة أو اثبت عدم وجود مثل هذين العددين. (الدرس 2–2)

6. مجموعهما 15 وناتج ضربهما 36

7. مجموعهما 7 وناتج ضربهما 15

8. **الاختيار من متعدد** باستخدام التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 + 6x - 7$، جد حلول المعادلة $x^2 + 6x - 7 = 0$؟ (الدرس 2–2)



F $-1, 6$

G $1, -6$

H $-1, 7$

J $1, -7$

9. **البيسبول** قُذفت كرة بيسبول إلى أعلى بسرعة متجهة 40 m/s. إذا تجاهلت طول لاعب كرة البيسبول، فما المدة التي تستغرقها الكرة لتسقط على الأرض؟ استخدم الصيغة $h(t) = v_0t - 16t^2$ حيث $h(t)$ ارتفاع الجسم بالأمتار وv_0 السرعة الابتدائية للجسم بالمتر في الثانية و t الزمن بالثواني. (الدرس 2–2)

حُل كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 2–3)

10. $x^2 - x - 12 = 0$

11. $3x^2 + 7x + 2 = 0$

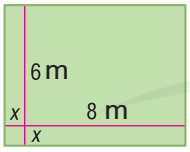
12. $x^2 - 2x - 15 = 0$

13. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

14. اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية جذراها -6 و$\frac{1}{4}$ (الدرس 2–3)

15. **المثلثات** جد أبعاد المثلث إذا كانت قاعدته $\frac{2}{3}$ قياس الارتفاع ومساحته 12 سنتيمترًا مربعًا. (الدرس 2–3)

16. **الفناء المرصوف** يضع علي لوحًا خرسانيًا في الفناء الخاص به. وكان بُعدا اللوح الأصلي 8 m في 6 m. فقرر صُنع لوح أكبر بإضافة x مترًا في كل جانب. وأصبحت مساحة اللوح الجديد $120\ m^2$. (الدرس 2–3)



a. اكتب معادلة تربيعية تمثل مساحة اللوح الجديد.

b. جد الأبعاد الجديدة للوح.

حوّل إلى أبسط صورة. (الدرس 2–2)

17. $\sqrt{-81}$

18. $\sqrt{-25x^4y^5}$

19. $(15 - 3i) - (4 - 12i)$

20. i^{37}

21. $(5 - 3i)(5 + 3i)$

22. $\frac{3 - i}{2 + 5i}$

23. إذا كانت المعاوقة في جزء من دارة توالٍ $3 + 4j$ أوم والمعاوقة في جزء آخر من الدارة $6 - 7j$ أوم، فاجمع هذين العددين المركبين لإيجاد إجمالي المعاوقة في الدارة. (الدرس 2–2)

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

الدرس 5-2

إكمال المربع

السابق	الحالي	لماذا؟
لقد حللتَ ثلاثيات الحدود التي تشكّل مربعًا كاملًا.	1 حَـــلّ المعادلات التربيعية باستخدام خاصية الجذر التربيعي. 2 حَـــلّ المعادلات التربيعية بإكمال المربع.	يجب أن يُبطئ السائقون السرعة إلى 20 كيلومترًا في الساعة عند مرورهم بمنطقة مدارس. ويمكنهم زيادة سرعتهم بمجرد خروجهم من منطقة المدارس. افترض أن عُمر يغادر المدرسة للذهاب إلى المنزل لتناول طعام الغداء ويعيش على بُعد 500 متر من منطقة المدارس. إذا زادت سرعة عُمر بمعدل ثابت قدره 8 أمتار في الثانية المربعة، فستمثل المعادلة $t^2 + 2t + 8 = 16$ الزمن t الذي يستغرقه للوصول إلى المنزل. لحل هذه المعادلة، يمكنك استخدام خاصية الجذر التربيعي.

المفردات الجديدة

إكمال المربع completing the square

ممارسات في الرياضيات

7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 خاصية الجذر التربيعي

لقد تمكنت من حل معادلات مثل $x^2 - 25 = 0$ من خلال التحليل إلى العوامل. واستخدمت أيضًا خاصية الجذر التربيعي لحل مثل هذه المعادلات. يمكن أن تكون هذه الطريقة مفيدة في معادلات مثل تلك الموجودة أعلاه التي تصف سرعة السيارة.

مثال 1 معادلة جذورها نسبية

حُـــلّ المعادلة: $x^2 + 6x + 9 = 36$ باستخدام خاصية الجذر التربيعي.

$x^2 + 6x + 9 = 36$	المعادلة الأصلية
$(x + 3)^2 = 36$	حلّل المربع الكامل
$x + 3 = \pm\sqrt{36}$	خاصية الجذر التربيعي
$x + 3 = \pm 6$	$\sqrt{36} = 6$
$x = -3 \pm 6$	اطرح 3 من كل طرف
$x = -3 - 6$ أو $x = -3 + 6$	اكتب كمعادلتين
$= -9$ $= 3$	بسّط

مجموعة الحلول هي $\{-9, 3\}$ أو $\{x | x = -9, 3\}$

تحقق عوّض بالقيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 + 6x + 9 = 36$	المعادلة الأصلية	$x^2 + 6x + 9 = 36$
$3^2 + 6(3) + 9 \stackrel{?}{=} 36$	عوّض بـ 3 و -9	$(-9)^2 + 6(-9) + 9 \stackrel{?}{=} 36$
$9 + 18 + 9 \stackrel{?}{=} 36$	بسّط	$81 - 54 + 9 \stackrel{?}{=} 36$
$36 = 36$ ✓	الحلان صحيحان	$36 = 36$ ✓

تمرين موجّه

حُـــلّ كل معادلة باستخدام خاصية الجذر التربيعي.

1A. $x^2 - 12x + 36 = 25$

1B. $x^2 - 16x + 64 = 49$

برنامج محمد بن راشد للتعليم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن كتابة الجذور التي هي أعداد غير نسبية كإجابات دقيقة في صيغة جذرية أو كإجابات تقريبية في صيغة عشرية عند استخدام الحاسبة.

مثال 2 معادلة جذورها غير نسبية

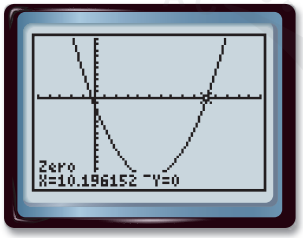
حُـــلّ $x^2 - 10x + 25 = 27$ باستخدام خاصية الجذر التربيعي.

$x^2 - 10x + 25 = 27$	المعادلة الأصلية
$(x - 5)^2 = 27$	حلّل ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملًا
$x - 5 = \pm\sqrt{27}$	خاصية الجذر التربيعي
$x = 5 \pm 3\sqrt{3}$	اجمع 5 على كل طرف $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
$x = 5 + 3\sqrt{3}$ أو $x = 5 - 3\sqrt{3}$	اكتب كمعادلتين
≈ 10.2 ≈ -0.2	استخدم حاسبة

الحلول الدقيقة لهذه المعادلة هي $5 + 3\sqrt{3}$ و $5 - 3\sqrt{3}$. والحلول التقريبية هي -0.2 و10.2 تحقق من هذه النتائج من خلال إيجاد الدالة التربيعية المرتبطة وتمثيلها بيانيًا.

$x^2 - 10x + 25 = 27$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 10x - 2 = 0$	اطرح 27 من كل طرف
$y = x^2 - 10x - 2$	الدالة التربيعية المرتبطة

تحقق استخدم دالة zero في حاسبة التمثيل البياني. الأصفار التقريبية للدالة المرتبطة هي -0.2 و10.2



[−5, 15] scl: 1 by [−30, 20] scl: 2

نصيحة دراسية
زائد أم ناقص عند استخدام خاصية الجذر التربيعي، تذكّر وضع علامة ± قبل الجذر.

تمرين موجّه

حُـــلّ كل معادلة باستخدام خاصية الجذر التربيعي.

2A. $x^2 + 8x + 16 = 20$

2B. $x^2 - 6x + 9 = 32$

2 إكمال المربع

يمكن حل جميع المعادلات التربيعية باستخدام خاصية الجذر التربيعي من خلال معالجة المعادلة حتى يصبح أحد الأطراف مربعًا كاملًا. وتُسمى هذه الطريقة **إكمال المربع**.

فكّر في $x^2 + 16x = 9$ تذكّر إجراء كل عملية على كل طرف من المعادلة.

$x^2 + 16x + \blacksquare = 9$	ما القيمة اللازمة للمربع الكامل؟
$x^2 + 16x + 64 = 9 + 64$	اجمع 64 على كل طرف $\left(\frac{16}{2}\right)^2 = 64$
$x^2 + 16x + 64 = 73$	بسّط
$(x + 8)^2 = 73$	يمكننا الآن استخدام خاصية الجذر التربيعي

استخدم نمط المعاملات هذا لإكمال مربع التعبير التربيعي.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي إكمال المربع

التعبير اللفظي لإكمال المربع لأي تعبيرٍ تربيعيٍ بالصيغة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1 جد نصف b، معامل x.

الخطوة 2 ربّع ناتج الخطوة 1

الخطوة 3 أضف ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$

الرموز $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

مثال 3 إكمال المربع

جد قيمة c التي تجعل $x^2 + 16x + c$ مربعًا كاملًا. ثم اكتب ثلاثية الحدود كمربع كامل.

الخطوة 1 جد نصف 16 $\frac{16}{2} = 8$

الخطوة 2 ربّع ناتج الخطوة 1 $8^2 = 64$

الخطوة 3 أضف ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + 16x$ $x^2 + 16x + 64$

يمكن كتابة ثلاثية الحدود $x^2 + 16x + 64$ بالصورة $(x + 8)^2$

تمرين موجّه

3. جد قيمة c التي تجعل $x^2 - 14x + c$ مربعًا كاملًا. ثم اكتب ثلاثية الحدود كمربع كامل.

يمكنك حل أي معادلة تربيعية بإكمال المربع. ونظرًا لأنك تحل معادلة، أضف القيمة التي تستخدمها لإكمال المربع إلى كل طرف.

مثال 4 حل معادلة بإكمال المربع

حُـــلّ المعادلة: $x^2 + 10x - 11 = 0$ بإكمال المربع.

$x^2 + 10x - 11 = 0$	لاحظ أن $x^2 + 10x - 11$ ليس مربعًا كاملًا
$x^2 + 10x = 11$	أعد الكتابة حتى يكون الطرف الأيسر بالصيغة $x^2 + bx$
$x^2 + 10x + 25 = 11 + 25$	نظرًا لأن $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$، اجمع 25 على كل طرف
$(x + 5)^2 = 36$	اكتب الطرف الأيسر كمربع كامل
$x + 5 = \pm 6$	خاصية الجذر التربيعي
$x = -5 \pm 6$	اطرح 5 من كل طرف
$x = -5 + 6$ أو $x = -5 - 6$	اكتب كمعادلتين
$= 1$ $\quad = -11$	بسّط

مجموعة الحلول هي $\{-11, 1\}$ أو $\{x | x = -11, 1\}$ تحقق من الناتج باستخدام التحليل إلى العوامل.

انتبه!

كل طرف عند حل المعادلات بإكمال المربع، لا تنسى إضافة $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلى كل طرف من المعادلة.

تمرين موجّه

حُـــلّ كل معادلة بإكمال المربع.

4A. $x^2 - 10x + 24 = 0$ **4B.** $x^2 + 10x + 9 = 0$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

عندما لا يكون معامل الحد التربيعي 1، يجب قسمة المعادلة على هذا المعامل قبل إكمال المربع.

مثال 5 معادلة بها $a \neq 1$

حُـــلّ المعادلة: $2x^2 - 7x + 5 = 0$ بإكمال المربع.

$2x^2 - 7x + 5 = 0$	لاحظ أن $2x^2 - 7x + 5$ ليس مربعًا كاملًا
$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} = 0$	اقسم على معامل الحد التربيعي، 2
$x^2 - \frac{7}{2}x = -\frac{5}{2}$	اطرح $\frac{5}{2}$ من كل طرف
$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = -\frac{5}{2} + \frac{49}{16}$	نظرًا لأن $\left(-\frac{7}{2} \div 2\right)^2 = \frac{49}{16}$، فاجمع $\frac{49}{16}$ على كل طرف
$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$	اكتب الطرف الأيسر كمربع كامل بالتحليل إلى العوامل وبسّط الطرف الأيمن
$x - \frac{7}{4} = \pm\frac{3}{4}$	خاصية الجذر التربيعي
$x = \frac{7}{4} \pm \frac{3}{4}$	اجمع $\frac{7}{4}$ على كل طرف
$x = \frac{7}{4} + \frac{3}{4}$ أو $x = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}$	اكتب كمعادلتين
$= \frac{5}{2}$ $= 1$	

مجموعة الحلول هي $\left\{1, \frac{5}{2}\right\}$ أو $\left\{x | x = 1, \frac{5}{2}\right\}$.

تمرين موجّه

حُـــلّ كل معادلة بإكمال المربع.

5A. $3x^2 + 10x - 8 = 0$ **5B.** $3x^2 + 14x - 16 = 0$

ليست جميع حلول المعادلات التربيعية أعدادًا حقيقية. ففي بعض الحالات، تكون الحلول أعدادًا مركبة بالصيغة $a + bi$، حيث $b \neq 0$.

مثال 6 معادلة ذات حلول تخيلية

حُـــلّ المعادلة: $x^2 + 8x + 22 = 0$ بإكمال المربع.

$x^2 + 8x + 22 = 0$	لاحظ أن $x^2 + 8x + 22$ ليس مربعًا كاملًا
$x^2 + 8x = -22$	أعد الكتابة حتى يكون الطرف الأيسر بالصيغة $x^2 + bx$
$x^2 + 8x + 16 = -22 + 16$	نظرًا لأن $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$، اجمع 16 على كل طرف
$(x + 4)^2 = -6$	اكتب الطرف الأيسر كمربع كامل
$x + 4 = \pm\sqrt{-6}$	خاصية الجذر التربيعي
$x + 4 = \pm i\sqrt{6}$	$\sqrt{-1} = i$
$x = -4 \pm i\sqrt{6}$	اطرح 4 من كل طرف

مجموعة الحلول هي $\{-4 + i\sqrt{6}, -4 - i\sqrt{6}\}$ أو $\{x | x = -4 + i\sqrt{6}, -4 - i\sqrt{6}\}$.

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة بإكمال المربع.

6A. $x^2 + 2x + 2 = 0$ **6B.** $x^2 - 6x + 25 = 0$

نصيحة دراسية

المثابرة يوضح التمثيل البياني للدالة المرتبطة أن المعادلة ليس لها أي حلول حقيقية نظرًا لأن التمثيل البياني ليس له مقاطع x. يجب التحقق من الحلول التخيلية جبريًا عن طريق التعويض بها في المعادلة الأصلية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحقق من فهمك

المثالان 1 و2 حُـــلّ كل معادلة باستخدام خاصية الجذر التربيعي، مع التقريب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

1. $x^2 + 12x + 36 = 6$
2. $x^2 - 8x + 16 = 13$
3. $x^2 + 18x + 81 = 15$
4. $9x^2 + 30x + 25 = 11$

5. **عرض ضوء الليزر** يتم معرفة المساحة A لعرض ضوء ليزر بالأمتار المربعة من العلاقة $A = 0.16d^2$، حيث d المسافة من الليزر إلى الشاشة بالأمتار. عند أي مسافة ستكون مساحة عرض ضوء الليزر $100\ m^2$؟

مثال 3 جد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مربعًا كاملًا. ثم اكتب ثلاثية الحدود كمربع كامل.

6. $x^2 - 10x + c$
7. $x^2 - 5x + c$

الأمثلة 4-6 حُـــلّ كل معادلة بإكمال المربع.

8. $x^2 + 2x - 8 = 0$
9. $x^2 - 4x + 9 = 0$
10. $2x^2 - 3x - 3 = 0$
11. $2x^2 + 6x - 12 = 0$
12. $x^2 + 4x + 6 = 0$
13. $x8 + {}^2x + 0 = 10$

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R4.

المثالان 1-2 حُـــلّ كل معادلة باستخدام خاصية الجذر التربيعي، مع التقريب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

14. $x^2 + 4x + 4 = 10$
15. $x^2 - 6x + 9 = 20$
16. $x^2 + 8x + 16 = 18$
17. $x^2 + 10x + 25 = 7$
18. $x^2 + 12x + 36 = 5$
19. $x^2 - 2x + 1 = 4$
20. $x^2 - 5x + 6.25 = 4$
21. $x^2 - 15x + 56.25 = 8$
22. $x^2 + 32x + 256 = 1$
23. $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 6$
24. $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 4$
25. $x^2 - 9x + \frac{81}{4} = \frac{1}{4}$

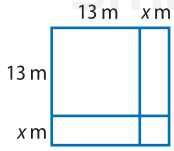
مثال 3 جد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مربعًا كاملًا. ثم اكتب ثلاثية الحدود كمربع كامل.

26. $x^2 + 8x + c$
27. $x^2 + 16x + c$
28. $x^2 - 11x + c$
29. $x^2 + 9x + c$

الأمثلة 4-6 حُـــلّ كل معادلة بإكمال المربع.

30. $x^2 - 4x + 12 = 0$
31. $x^2 + 2x - 12 = 0$
32. $x^2 + 6x + 8 = 0$
33. $x^2 - 4x + 3 = 0$
34. $2x^2 + x - 3 = 0$
35. $2x^2 - 3x + 5 = 0$
36. $2x^2 + 5x + 7 = 0$
37. $3x^2 - 6x - 9 = 0$
38. $x^2 - 2x + 3 = 0$
39. $x^2 + 4x + 11 = 0$
40. $x^2 - 6x + 18 = 0$
41. $x^2 - 10x + 29 = 0$
42. $3x^2 - 4x = 2$
43. $2x^2 - 7x = -12$
44. $x^2 - 2.4x = 2.2$
45. $x^2 - 5.3x = -8.6$
46. $x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{11}{5} = 0$
47. $x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{24}{5} = 0$

48. **النمذجة** يشير مخطط المهندس المعماري إلى أن مساحة المطعم 13 m في 13 m، ويريد العميل أن تكون غرفة الطعام على شكل مربع، ولكن بمساحة $250\ m^2$ ا. كم سيضيف إلى أبعاد الغرفة؟



حُـــلّ كل معادلة من المعادلات التالية، مع التقريب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

49. $4x^2 - 28x + 49 = 5$
50. $9x^2 + 30x + 25 = 11$
51. $x^2 + x + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
52. $x^2 + 1.2x + 0.56 = 0.91$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

53. الألعاب النارية يتحدّد بُعد الألعاب النارية d عن الأرض بالأقدام من العلاقة $d = -1.5t^2 + 25t$. حيث t عدد الثواني بعد إضاءة الألعاب النارية.

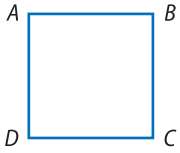
a. كم عدد الثواني التي تمر بعد إضاءة الألعاب النارية حتى انفجارها إذا كانت تنفجر عند أقصى ارتفاع لمسارها؟

b. ما ارتفاع الألعاب النارية عند انفجارها؟

جد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مربعًا كاملًا. ثم اكتب ثلاثية الحدود كمربع كامل.

54. $x^2 + 0.7x + c$ **55.** $x^2 - 3.2x + c$ **56.** $x^2 - 1.8x + c$

57. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستخدم المعادلات التربيعية لاستكشاف المستطيلات الذهبية والنسبة الذهبية.



a. هندسيًا

- ارسم المربع $ABCD$.
- حدد نقطة منتصف $\overline{CD}$، وسمّها P. ارسم $\overline{PB}$.
- أنشئ قوسًا نصف قطره $\overline{PB}$ من B في اتجاه عقارب الساعة مرورًا بأسفل المربع.
- قم بمد $\overline{CD}$ حتى يتقاطع مع القوس، وسمّ هذه النقطة Q.
- أنشئ المستطيل $ARQD$.

b. جبريًا افترض أن $AD = x$ و$CQ = 1$ استخدم إكمال المربع لحل $\frac{DQ}{AD} = \frac{QR}{CQ}$ لإيجاد x.

c. جدوليًا أنشئ جدول x وقيم $CQ = 2$ و3 و4

d. لفظيًا ماذا تلاحظ بشأن قيم x؟ اكتب معادلة يمكنك استخدامها لتحديد x لـ $CQ = n$، حيث n عدد حقيقي غير صفري.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

58. تحليل الخطأ يحل كل من حُميد وايمن $x^2 + 8x - 20 = 0$ بإكمال المربع. هل أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.

حُميد

$x^2 + 8x - 20 = 0$
$x^2 + 8x = 20$
$x^2 + 8x + 16 = 20 + 16$
$(x + 4)^2 = 36$
$x + 4 = \pm 6$
$x = -4 \pm 6$

ايمن

$x^2 + 8x - 20 = 0$
$x^2 + 8x = 20$
$x^2 + 8x + 16 = 20$
$(x + 4)^2 = 20$
$x + 4 = \pm \sqrt{20}$
$x = -4 \pm \sqrt{20}$

59. تحفيز جد حل $x^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع. ستكون إجابتك عبارة عن تعبير لـ x بدلالة b وc.

60. الفرضيات دون حل، حدّد عدد الحلول الفريدة الموجودة لكل معادلة. هل هي نسبية أم حقيقية أم مركبة؟ برر استنتاجك.

a. $(x + 2)^2 = 16$ **b.** $(x - 2)^2 = 16$ **c.** $-(x - 2)^2 = 16$

d. $36 - (x - 2)^2 = 16$ **e.** $16(x + 2)^2 = 0$ **f.** $(x + 4)^2 = (x + 6)^2$

61. مسألة مفتوحة اكتب معادلة ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملًا يكون فيها المعامل الخطي سالبًا والحد الثابت كسرًا. ثم حُل المعادلة.

62. الكتابة في الرياضيات اشرح معنى إكمال المربع، وصِف كل خطوة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

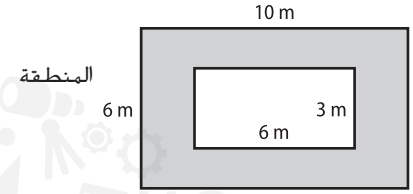
تدريب على الاختبار المعياري

63. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول إذا كان $x^2 + y^2 = 2xy$، فإن y يساوي

A $1-$ **C** 1 **E** x

B 0 **D** $-x$

64. الهندسة جد مساحة المنطقة المظللة.



F $14\ m^2$ **G** $18\ m^2$ **H** $42\ m^2$ **J** $60\ m^2$

65. إجابة مختصرة ما قيمة c التي يجب استخدامها لحل المعادلة التالية بإكمال المربع؟

$5x^2 - 50x + c = 12 + c$

66. إذا كان $3i - 5$ أحد حلول المعادلة $x^2 + ax + b = 0$، حيث a وb *عددان حقيقيان، فما قيمة* b؟

A 10 **C** 34

B 14 **D** 40

مراجعة شاملة

حوّل إلى أبسط صورة. (الدرس 4-2)

67. $(8 + 5i)^2$ **68.** $4(3 - i) + 6(2 - 5i)$ **69.** $\frac{5 - 2i}{6 + 9i}$

اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية من الجذور المعطاة. (الدرس 3-2)

70. $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$ **71.** $-\frac{2}{5}, 6$ **72.** $-\frac{1}{4}, -\frac{6}{7}$

73. السَفَر ستسافر هدى مع النادي الإسباني إلى كوستاريكا. واشترت 10 شيكات سياحية فئة AED 20 وAED 50 وAED 100 بإجمالي AED 370. وكان عدد الشيكات فئة AED 20 ضعف عدد الشيكات فئة AED 50. كم عدد شيكات كل فئة؟

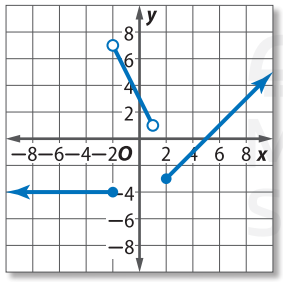
74. التسوق يبيع أحد المتاجر جميع أقراص DVD بسعر وجميع الكتب بسعر آخر. اشترى أيوب 4 أقراص DVD و6 كتب مقابل AED 170، بينما اشترى أيمن 3 أقراص DVD و8 كتب مقابل AED 180. فما تكلفة قرص الـ DVD الواحد والكتاب الواحد؟

مثّل كل متباينة بيانيًا.

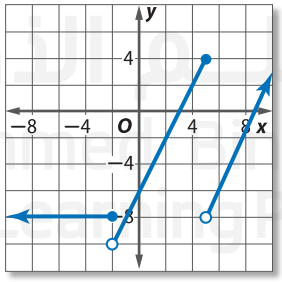
75. $y \geq 4x - 3$ **76.** $2x - 3y < 6$ **77.** $5x + 2y + 3 \leq 0$

اكتب الدالة متعددة التعريف المبينة في كل تمثيل بياني.

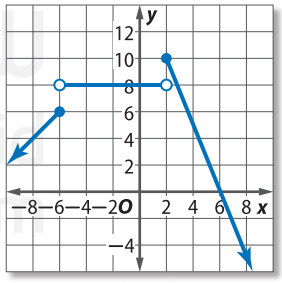
78.



79.



80.



مراجعة المهارات

جد قيمة $b^2 - 4ac$ لقيم a وb وc المعطاة.

81. $a = 5, b = 6, c = 2$ **82.** $a = -2, b = -7, c = 3$ **83.** $a = -5, b = -8, c = -10$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

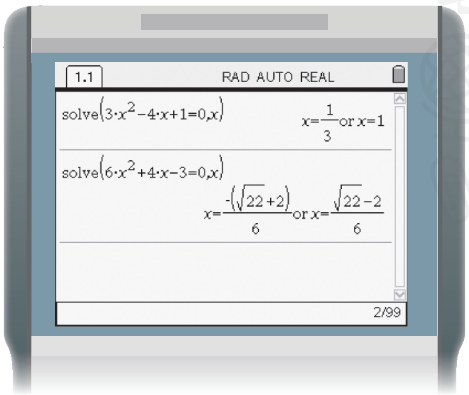
مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات التربيعية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات التربيعية.

النشاط إيجاد الجذور

حُلّ كل معادلة من المعادلات التالية.

a. $3x^2 - 4x + 1 = 0$



الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator** جديدة.

الخطوة 2 اختر الأداة **Solve** من القائمة **Algebra**.

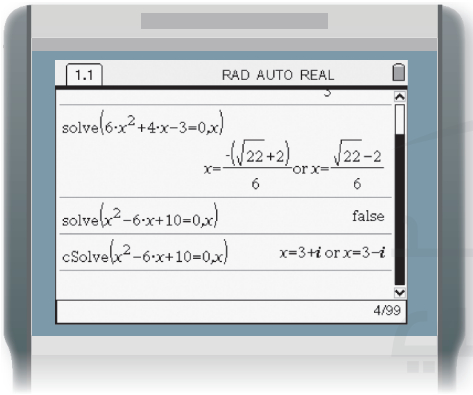
الخطوة 3 اكتب $3x^2 - 4x + 1 = 0$ وأتبع ذلك بفاصلة و x، ثم اضغط **enter**.
الحلول هي $x = \frac{1}{3}$ أو $x = 1$.

b. $6x^2 + 4x - 3 = 0$

الخطوة 1 اختر الأداة **Solve** من القائمة **Algebra**.

الخطوة 2 اكتب $6x^2 - 4x - 3 = 0$ وأتبع ذلك بفاصلة و x ثم اضغط **enter**.
الحلول هي $x = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{6}$.

c. $x^2 - 6x + 10 = 0$.



الخطوة 1 اختر الأداة **Solve** من القائمة **Algebra**.

الخطوة 2 اكتب $x^2 - 6x + 10 = 0$ وأتبع ذلك بفاصلة و x ثم اضغط **enter**.
تعرض الحاسبة القيمة ***false***، مما يعني أنه لا توجد حلول حقيقية.

الخطوة 3 من القائمة، اختر **Algebra** ثم **Complex** ثم **Solve**. وأعد إدخال المعادلة.
الحلول هي $x = 3 \pm i$.

تمارين

حُلّ كل معادلة من المعادلات التالية.

1. $x^2 - 2x - 24 = 0$
2. $-x^2 + 4x - 1 = 0$
3. $0 = -3x^2 - 6x + 9$
4. $x^2 - 2x + 5 = 0$
5. $0 = 4x^2 - 8$
6. $0 = 2x^2 - 4x + 1$
7. $x^2 + 3x + 8 = 5$
8. $25 + 4x^2 = -20x$
9. $x^2 - x = -6$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 6-2

القانون العام والمميز

السابق	الحالي	لماذا؟
لقد قمتَ بحل المعادلات من خلال إكمال المربع.	1 حُـــلّ المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام.	في مسابقة منجنيق اليقطين، يكوّن المتسابق منجنيقًا ويصوّب اليقطين نحو هدف ما.
	2 استخدام المميز لتحديد عدد ونوع جذور معادلة تربيعية.	ويمكن نمذجة مسار اليقطين من خلال الدالة التربيعية $h = -4.9t^2 + 117t + 42$. حيث h ارتفاع اليقطين و t عدد الثواني. لتوقّع زمن إصابة اليقطين للهدف، يمكنك حل المعادلة $0 = -4.9t^2 + 117t + 42$ سيصعب حل هذه المعادلة باستخدام التحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني أو إكمال المربع.

المفردات الجديدة

القانون العام Quadratic Formula

المميز discriminant

ممارسات في الرياضيات

8 البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 القانون العام

تمكنتَ سابقًا من حل بعض المعادلات التربيعية من خلال التمثيل البياني والتحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية الجذر التربيعي. ثمة صيغة إضافية يمكن استخدامها لحل أي معادلة تربيعية. ويمكن اشتقاق هذه الصيغة من حل معادلة تربيعية بالصورة القياسية.

	الحالة العامة	الحالة الخاصة
معادلة تربيعية قياسية	$ax^2 + bx + c = 0$	$2x^2 + 8x + 1 = 0$
اقسم كل طرف على a	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$
اطرح $\frac{c}{a}$ من كل طرف	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$
أكمل المربع	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
حلّل الطرف الأيسر إلى عوامله	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	$(x + 2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
بسّط الطرف الأيمن	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	$(x + 2)^2 = \frac{7}{2}$
خاصية الجذر التربيعي	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$
اطرح $\frac{b}{2a}$ من كل طرف	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
بسّط	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

تُعرف المعادلة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام**.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي القانون العام

التعبير اللفظي يمكن التوصل إلى حلول المعادلة التربيعية من الصورة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$. باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

نصيحة دراسية

القانون العام على الرغم من أنّ التحليل إلى العوامل يُعد أسهل طريقة لحل بعض المعادلات، إلا أنّه يمكن استخدام القانون العام لحل أي معادلة تربيعية.

مثال 1 جذران نسبيان

حُلّ المعادلة $x^2 - 10x = 11$ باستخدام القانون العام.

أولًا، اكتب المعادلة بالصورة $ax^2 + bx + c = 0$ وحدد قيم كل من a وb وc.

$$\begin{array}{ccccc} ax^2 & + & bx & + & c = 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1x^2 & - & 10x & - & 11 = 0 \end{array}$$

$x^2 - 10x = 11 \rightarrow$

ثم عوّض بهذه القيم في القانون العام.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانون العام
$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$	عوّض عن a بـ 1، وعن b بـ -10 وعن c بـ -11
$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$	اضرب
$= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$	بسّط
$= \frac{10 \pm 12}{2}$	$\sqrt{144} = 12$
$x = \frac{10 + 12}{2}$ أو $x = \frac{10 - 12}{2}$	اكتب على صورة معادلتين
$= 11$ $\quad = -1$	بسّط

الحلان هما -1 و11.

تحقق عوّض بالقيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 10x = 11$	$x^2 - 10x = 11$
$(-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$	$(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11$
$1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$	$121 - 110 \stackrel{?}{=} 11$
$11 = 11$ ✓	$11 = 11$ ✓

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

1A. $x^2 + 6x = 16$

1B. $2x^2 + 25x + 33 = 0$

مراجعة المفردات

المجذور القيمة الموجودة تحت إشارة الجذر.

عندما تكون قيمة ما تحت الجذر في القانون العام 0، يكون للمعادلة التربيعية جذر نسبي واحد فقط.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الربط بتاريخ الرياضيات

براهماجوبتا (598–668) قدّم العالم الرياضي الهندي، براهماجوبتا، أول حل عام للمعادلة التربيعية $ax^2 + bx = c$، والمعروف الآن بالقانون العام.

مثال 2 جذر نسبي واحد

حُـــل المعادلة: $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستخدام القانون العام.

حدد قيمة كل من a وb وc. ثم عوّض بهذه القيم في القانون العام.

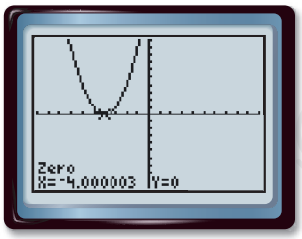
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بـ 1، وعن b بـ 8، وعن c بـ 16

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$ بسّط

$$= \frac{-8}{2} \text{ أو } -4$$ $\sqrt{0} = 0$

الحل هو -4



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تحقق يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة وجود حل واحد للمعادلة عند $x = -4$

تمرين موجّه

حُـــلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

2A. $x^2 - 16x + 64 = 0$

2B. $x^2 + 34x + 289 = 0$

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بشكل دقيق بكتابتها على الصورة الجذرية.

مثال 3 الجذور غير النسبية

حُـــلّ المعادلة $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستخدام القانون العام.

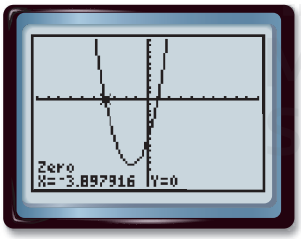
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$ عوّض عن a بـ 2، وعن b بـ 6، وعن c بـ -7

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$$ بسّط

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} \text{ أو } \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$$ $\sqrt{92} = \sqrt{4 \times 23}$ أو $2\sqrt{23}$

الحلول التقريبية هي -3.9 و0.9



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تحقق تحقق من هذه النتائج من خلال التمثيل البياني للدالة التربيعية المرتبطة، $y = 2x^2 + 6x - 7$ باستخدام خاصية **zero** في حاسبة التمثيل البياني، ستكون القيمتان التقريبيتان لصفرَي الدالة المرتبطة -3.9 و0.9

تمرين موجّه

حُـــلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

3A. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

3B. $x^2 - 8x + 9 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند استخدام القانون العام، إذا كانت قيمة المجذور سالبة، فستكون الحلول مركبة. تظهر الحلول المركبة في صورة أزواج مترافقة.

نصيحة دراسية

الأعداد المركبة تذكّر أن تكتب حلولك بالصورة $a + bi$، والتي تُسمى أحيانًا *الصيغة القياسية* للعدد المركب.

مثال 4 الجذور المركبة

حُـــلّ المعادلة $x^2 - 6x = -10$ باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

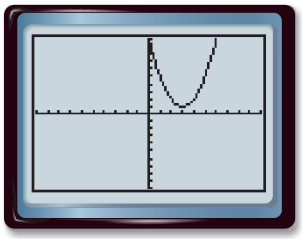
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بـ 1 وعن b بـ -6 وعن c بـ 10

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$ بسّط

$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times (-1)}$ أو $2i$

$$= 3 \pm i$$ بسّط

الحلان هما العددان المركبان $3 + i$ و $3 - i$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تحقق يُظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة أنّ الحلّين عددان مركبان لكن لا يساعدك في إيجادهما. للتحقق من الحلّين المركبين، عوض بهما في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 + i$
$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$	مربع المجموع؛ خاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$

$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 - i$
$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$	مربع المجموع؛ خاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$

تمرين موجّه

حُـــلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

4A. $3x^2 + 5x + 4 = 0$

4B. $x^2 - 4x = -13$

2 الجذور والمميز

في الأمثلة السابقة، لاحظ العلاقة بين قيمة التعبير أسفل الجذر وجذور المعادلة التربيعية. يُسمى التعبير $b^2 - 4ac$ **المميز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ← المميز

يمكن استخدام قيمة المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية ونوعها. يلخص الجدول في الصفحة التالية الأنواع الممكنة للجذور.

كما يمكن استخدام المميز للتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

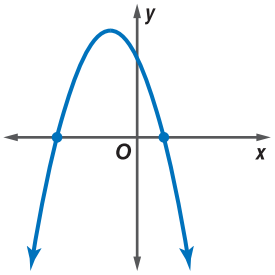
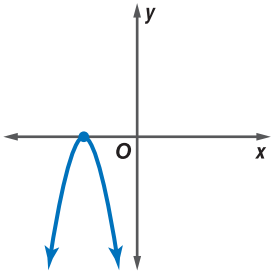
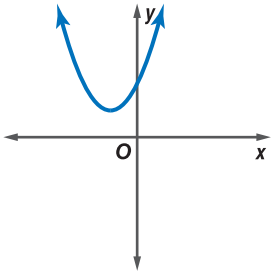
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

الجذور تذكّر أن حلول المعادلة تُسمى جذورًا أو *أصفارًا* وهي القيمة (القيم) التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور *x*.

المفهوم الأساسي المميز

فكّر في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث a وb وc أعداد نسبية و $a \neq 0$.

قيمة المميز	نوع الجذور وعددها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة
$b^2 - 4ac > 0$؛ التعبير $b^2 - 4ac$ مربع كامل.	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$؛ والتعبير $b^2 - 4ac$ *ليس* مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيَّين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر واحد حقيقي نسبي	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال 5 وصف الجذور

جد قيمة المميز في كل معادلة تربيعية. ثم صِف عدد جذور المعادلة ونوعها.

a. $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7, b = -11, c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب، ومن ثَم يوجد جذران مركبان.

b. $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1, b = 22, c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي 0، ومن ثَم يوجد جذر نسبي واحد.

تمرين موجّه

5A. $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

5B. $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
برنامج محمد بن راشد للتعليم الذكي

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

الكتيب الدراسي قد ترغب في نسخ قائمة الطرق هذه في كراسة الرياضيات أو المطوية للاحتفاظ بها كمرجع أثناء الدراسة.

درست في ما سبق مجموعة متنوعة من طرق حل المعادلات التربيعية. يلخص الجدول التالي هذه الطرق.

ملخص المفهوم حل المعادلات التربيعية

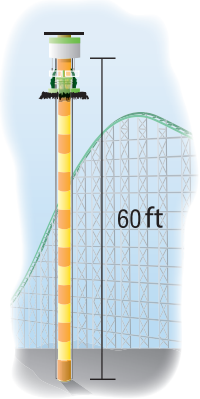
الطريقة	إمكانية استخدامها	حالات استخدامها
التمثيل البياني	أحيانًا	تُستخدم فقط عندما لا يُطلب إيجاد حل دقيق. ويتمثل أفضل استخدام لها في التحقق من مدى صحة الحلول التي يتم إيجادها جبريًا.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	تُستخدم الأقواس عندما يساوي الحد الثابت 0 تحليل العبارة التربيعية الثلاثية: $ax^2+bx+c=0$ أو عندما يسهل تحديد العوامل. **اخراج العامل المشترك** $x^2 - 7x = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	تُستخدم لحل المعادلات التي يساوي فيها المربع الكامل ثابتًا. **مثال** $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	تُستخدم مع المعادلات التي بالصورة $x^2 + bx + c = 0$. **مثال** $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	يُستخدم عند عدم إمكانية استخدام الطرائق الأخرى أو عندما يكون من الصعب استخدام الطرائق الأخرى. **مثال** $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تحقق من فهمك

الأمثلة 1–4 حُـــلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

1. $x^2 + 12x - 9 = 0$
2. $x^2 + 8x + 5 = 0$
3. $4x^2 - 5x - 2 = 0$
4. $9x^2 + 6x - 4 = 0$
5. $10x^2 - 3 = 13x$
6. $22x = 12x^2 + 6$
7. $-3x^2 + 4x = -8$
8. $x^2 + 3 = -6x + 8$

المثالان 3–4



9. **النمذجة** تصعد إحدى ألعاب الملاهي بالركاب إلى قمة البرج ثم تُسقطهم بسرعة تصل إلى 80 ft/s. وتمثل الدالة التالية حركة هذه اللعبة $h = -16t^2 - 64t + 60$. حيث h الارتفاع بالأقدام و t الزمن بالثواني. كم عدد الثواني التي يستغرقها الركاب تقريبًا للهبوط من ارتفاع 60 ft إلى 0 ft؟

مثال 5 أكمل الجزأين a وb لكل معادلة تربيعية.

a. جد قيمة المميز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

10. $3x^2 + 8x + 2 = 0$
11. $2x^2 - 6x + 9 = 0$
12. $-16x^2 + 8x - 1 = 0$
13. $5x^2 + 2x + 4 = 0$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 4–1 حُـــلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

14. $x^2 + 45x = -200$

15. $4x^2 - 6 = -12x$

16. $3x^2 - 4x - 8 = -6$

17. $4x^2 - 9 = -7x - 4$

18. $5x^2 - 9 = 11x$

19. $12x^2 + 9x - 2 = -17$

20. الغطس يقفز متنافسون في منافسة غوص من منصة ارتفاعها 10 m إلى أعلى مبتعدين عن المنصة قبل الغوص في حمام السباحة بالأسفل. يمكن تحديد القيمة التقريبية لارتفاع الغطاس h بالأمتار فوق سطح الحمام بعد مدة t بالثواني من خلال المعادلة $h = -4.9t^2 + 3t + 10$

a. حدد المجال والمدى المقبولين لهذه الدالة.

b. متى سيصل الغطاس إلى سطح الماء؟

مثال 5 أكمل الأجزاء a إلى c لكل معادلة تربيعية.

a. جد قيمة المميز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

c. جد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

21 $2x^2 + 3x - 3 = 0$

22. $4x^2 - 6x + 2 = 0$

23. $6x^2 + 5x - 1 = 0$

24. $6x^2 - x - 5 = 0$

25. $3x^2 - 3x + 8 = 0$

26. $2x^2 + 4x + 7 = 0$

27. $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

28. $x^2 - 6x = -9$

29. $-3x^2 - 7x + 2 = 6$

30. $-8x^2 + 5 = -4x$

31. $x^2 + 2x - 4 = -9$

32. $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

33. ألعاب الفيديو بينما كان صالح معاقبًا بالحبس في المنزل، أحضر له صديقه جاسم لعبة فيديو. وكان صالح واقفًا في نافذة غرفته في المنزل وجاسم واقفًا أسفل النافذة مباشرةً. فإذا ألقى جاسم حافظة اللعبة إلى صالح بسرعة ابتدائية 35 ft/s، فإن معادلة ارتفاع الحافظة h بالأقدام بعد مدة t من الثواني هي $h = -16t^2 + 35t + 5$

a. إذا كان ارتفاع النافذة فوق سطح الأرض 25 ft، فهل سيكون أمام صالح فرصة أم فرصتان أم لا توجد فرصة لالتقاط حافظة لعبة الفيديو؟

b. إذا لم يتمكن صالح من التقاط حافظة لعبة الفيديو، فمتى ستصل إلى الأرض؟

34. التفكير المنطقي يعمل مهندسون مدنيون على تصميم جزء من طريق ينخفض عن مستوى سطح البحر. يمكن نمذجة منحنى الطريق باستخدام المعادلة $y = 0.00005x^2 - 0.06x$، حيث x المسافة الأفقية بالأمتار بين النقطتين اللتين يكون عندهما الطريق في مستوى سطح البحر وتمثل y الارتفاع. يريد المهندسون وضع علامات توقف عند المواقع التي يكون ارتفاع الطريق عندها مساويًا لمستوى سطح البحر. فما المسافات الأفقية التي سيضعون عندها علامات التوقف؟

أكمل الأجزاء a إلى c لكل معادلة تربيعية.

a. جد قيمة المميز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

c. جد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

35. $5x^2 + 8x = 0$

36. $8x^2 = -2x + 1$

37. $4x - 3 = -12x^2$

38. $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$

39. $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$

40. $-4x^2 + 12 = -6x - 8$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

العام	الوفيات لكل 100,000
2000	91.8
2002	89.7
2004	85.5
2010	60.3
2015	؟
2017	؟

41 التدخين أدى انخفاض معدل التدخين في الولايات المتحدة إلى انخفاض معدلات الوفيات بسبب سرطان الرئة. يمكن تقدير العدد التقريبي للوفيات y لكل 100,000 شخص من خلال المعادلة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث تمثل x عدد الأعوام التالية لعام 2000

a. احسب عدد الوفيات لكل 100,000 شخص في عامَي 2015 و2017.

b. استخدم القانون العام لإيجاد x عند $y = 50$

c. وفقًا للدالة التربيعية، متى سيكون معدل الوفيات 0 لكل 100,000؟ هل تعتقد أن هذا التوقع معقول؟ لماذا أو لمَ لا؟

42. نظرية الأعداد يُحدَّد المجموع S للأعداد الصحيحة المتتالية $1, 2, 3, \ldots, n$ باستخدام الصيغة $S = \frac{1}{2}n(n+1)$ كم عدد الأعداد الصحيحة المتتالية بداية من العدد 1 التي يجب جمعها للحصول على المجموع 666؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. النقد يحدد كل من حمَد وماجد عدد الحلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$ هل أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.

حمد

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

نظرًا لأن المميز سالب، لا توجد حلول حقيقية.

ماجد

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

نظرًا لأن المميز موجب، يوجد جذران حقيقيان.

44. تحفيز جد حلول المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستخدام القانون العام.

45. الاستنتاج حدّد هل كل عبارة مما يلي صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

a. في المعادلة التربيعية التي بالصورة القياسية، إذا اختلفت إشارتا a وc، فستكون الحلول حقيقية.

b. إذا كان مميز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فسيكون الجذران عددين حقيقيين غير نسبيين.

46. مسألة مفتوحة ارسم التمثيل البياني المطابق وعيّن عدد الجذور ونوعها لكل مما يلي.

a. $b^2 - 4ac = 0$

b. دالة تربيعية لا يساوي $f(x)$ فيها صفرًا أبدًا.

c. دالة تربيعية فيها $f(b) = 0$ و $f(a) = 0$؛ $a \neq b$

d. المميز أقل من الصفر.

e. كل من a وb حلان ويمكن تمثيلهما ككسور.

47. تحفيز جد قيمة (قيم) m في المعادلة التربيعية $x^2 + x + m + 1 = 0$ بحيث يكون لها حل واحد.

48. الكتابة في الرياضيات صف ثلاث طرق متنوعة لحل المعادلة $x^2 - 2x - 15 = 0$ وأي طريقة تفضل، مع ذكر السبب؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

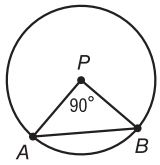
49. قدّرت إحدى الشركات أنّ قيمة الأرباح الشهرية P تحددها المعادلة $P = -8x^2 + 165x - 100$. حيث x سعر البيع لكل وحدة من المنتجات. فأي مما يلي يمثل أفضل تقدير لأعلى سعر للوحدة يمكن أن تحدده الشركة دون خسارة الأموال؟

A AED 10 **B** AED 20 **C** AED 30 **D** AED 40

50. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول في أي من مجموعات الأعداد التالية يكون المتوسط الحسابي أكبر من الوسيط؟

F {4, 5, 6, 7, 8}
G {4, 6, 6, 6, 8}
H {4, 5, 6, 7, 9}
J {3, 5, 6, 7, 8}
K {2, 6, 6, 6, 6}

51. إجابة مختصرة في الشكل أدناه، يمثل P مركز الدائرة التي نصف قطرها 15 cm. فما مساحة المثلث $\triangle APB$؟



52. 75٪ من العدد 88 هي نفسها 60٪ من العدد

A 100 **B** 101 **C** 108 **D** 110

مراجعة شاملة

جد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مربعًا كاملًا. ثم اكتب ثلاثية الحدود كمربع كامل. (الدرس 5-2)

53. $x^2 + 13x + c$

54. $x^2 + 2.4x + c$

55. $x^2 + \frac{4}{5}x + c$

حوّل إلى أبسط صورة. (الدرس 4-2)

56. i^{26}

57. $\sqrt{-16}$

58. $4\sqrt{-9} \cdot 2\sqrt{-25}$

59. تدريب الطيارين تتدرب علياء من أجل الحصول على رخصة الطيران. وتبلغ تكلفة تعليم الطيران AED 105 في الساعة، وتكلفة المحاكي AED 45 في الساعة. وقد زادت مدة تدريبها في الطيارة عن المحاكي بمقدار أربع ساعات. فإذا كانت علياء قد صرفت مبلغ AED 3870، فكم تكون المدة التي قضتها في التدريب في كل من الطيارة والمحاكي؟

60. الأعمال تمتلك السيدة أمل ثلاث مزارع للفاكهة تزرع فيها التفاح والخوخ والمشمش. وتبيع التفاح مقابل AED 22 للحقيبة والخوخ مقابل AED 25 للحقيبة والمشمش مقابل AED 18 للحقيبة.

عدد الحقائب في مخزون كل نوع من الفاكهة			
الفاكهة	مزرعة 1	مزرعة 2	مزرعة 3
التفاح	290	175	110
الخوخ	165	240	75
المشمش	210	190	0

a. اكتب مصفوفة مخزون لعدد الحقائب لكل نوع من الفاكهة في كل مزرعة ومصفوفة لتكلفة سعر الحقيبة لكل نوع من الفاكهة.

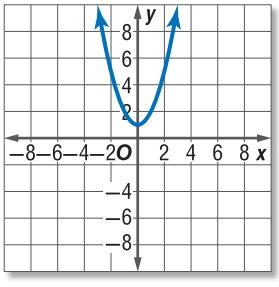
b. جد إجمالي عائد مزارع الفاكهة الثلاث في صورة مصفوفة.

c. ما قيمة إجمالي عائد مزارع الفاكهة الثلاث؟

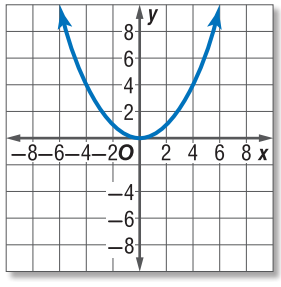
مراجعة المهارات

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.

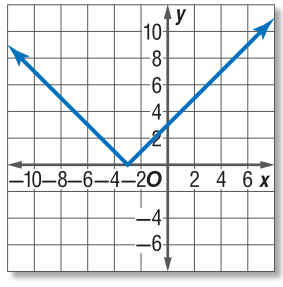
61.



62.



63.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2-7 مختبر تقنية التمثيل البياني
مجموعات القطوع المكافئة

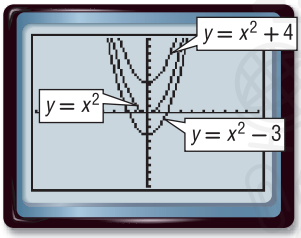
الصورة العامة لدالة القطع المكافئ هي $y = a(x - h)^2 + k$ يؤدي تغيير قيم كل من a وh وk إلى اختلاف القطوع المكافئة في مجموعة الدوال التربيعية. يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus لتحليل التأثيرات الناتجة عن تغيير كل من هذه المعلمات.

النشاط 1 التغير في k

مثّل كل مجموعة من الدوال بيانيًا على الشاشة نفسها في نافذة العرض القياسية. صِف أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

$$y = x^2,\ y = x^2 + 4,\ y = x^2 - 3$$

التمثيلات البيانية لها شكل واحد وجميعها مفتوحة لأعلى.
يقع رأس كل تمثيل بياني على المحور y. لكن لها مواضع رأسية مختلفة.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

يوضح النشاط 1 كيف يؤدي تغيير قيمة k في الدالة $y = a(x - h)^2 + k$ إلى إزاحة القطع المكافئ على طول المحور y. فإذا كان $k > 0$، فستتم إزاحة القطع المكافئ عدد k من الوحدات لأعلى، وإذا كان $k < 0$، فستتم إزاحة القطع المكافئ عدد $|k|$ من الوحدات لأسفل.

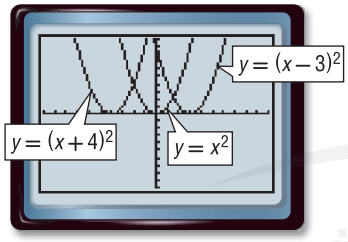
برأيك، كيف يؤثر تغير قيمة h في التمثيل البياني لـ $y = a(x - h)^2 + k$؟

النشاط 2 التغير في h

مثّل كل مجموعة من الدوال بيانيًا على الشاشة نفسها في نافذة العرض القياسية. صِف أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

$$y = x^2,\ y = (x + 4)^2,\ y = (x - 3)^2$$

هذه التمثيلات البيانية الثلاثة مفتوحة لأعلى ولها الشكل نفسه.
ويقع رأس كل تمثيل بياني على المحور x.
لكن لها مواضع أفقية مختلفة.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

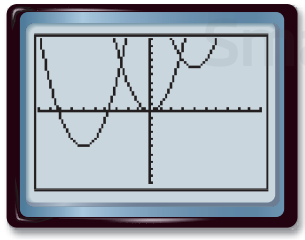
يوضح النشاط 2 كيف يؤدي تغيير قيمة h في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$ إلى إزاحة التمثيل البياني أفقيًا. فإذا كان $h > 0$، فستتم إزاحة التمثيل البياني إلى اليمين عدد h من الوحدات. وإذا كان $h < 0$، فستتم إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار عدد $|h|$ من الوحدات.

النشاط 3 التغير في كل من h وk

مثّل كل مجموعة من الدوال بيانيًا على الشاشة نفسها في نافذة العرض القياسية. صِف أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

$$y = x^2,\ y = (x + 6)^2 - 5,\ y = (x - 4)^2 + 6$$

هذه التمثيلات البيانية الثلاثة مفتوحة لأعلى ولها الشكل نفسه.
لكن لها مواضع أفقية ورأسية مختلفة.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

(يتبع في الصفحة التالية)

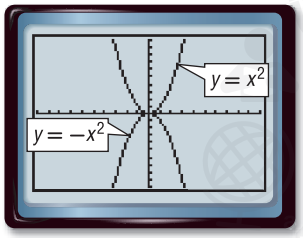
مختبر تقنية التمثيل البياني
مجموعات القطوع المكافئة تابع

كيف تؤثر قيمة a في التمثيل البياني لـ $y = a(x - h)^2 + k$؟

النشاط 4 التغيّر في a

مثّل كل مجموعة من الدوال بيانيًا على الشاشة نفسها في نافذة العرض القياسية. صِف أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

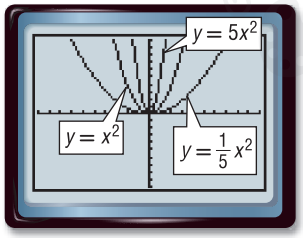
a. $y = x^2, y = -x^2$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التمثيلان البيانيان لهما الرأس نفسه والشكل نفسه. غير أن التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ مفتوح لأعلى والتمثيل البياني للدالة $y = -x^2$ مفتوح لأسفل.

b. $y = x^2, y = 5x^2, y = \frac{1}{5}x^2$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التمثيلات البيانية لها الرأس نفسه، (0, 0). لكنّ كلًا منها له شكل مختلف. والتمثيل البياني للدالة $y = 5x^2$ أضيق من التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ والتمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{5}x^2$ أوسع من التمثيل البياني للدالة $y = x^2$

يمكن أن يؤثر تغير قيمة a في الدالة $y = a(x - h)^2 + k$ في اتجاه فتحة التمثيل البياني وشكله. فإذا كان $a > 0$، فسيكون التمثيل البياني مفتوحًا لأعلى، وإذا كان $a < 0$، فسيكون التمثيل البياني مفتوحًا لأسفل أو منعكسًا على المحور x. وإذا كان $|a| > 1$، فسيتمدد التمثيل البياني رأسيًا ويكون أضيق من التمثيل البياني للدالة $y = x^2$. وإذا كان $|a| < 1$، فسينضغط التمثيل البياني رأسيًا ويكون أوسع من التمثيل البياني للدالة $y = x^2$. ومن ثم، ينتج عن تغيُّر قيمة a المطلقة تغيُّر أبعاد التمثيل البياني للدالة $y = x^2$

حلل النتائج

1. كيف يؤثر تغير قيمة h في $y = a(x - h)^2 + k$ في التمثيل البياني؟ اذكر مثالًا على ذلك.
2. كيف يؤثر تغير قيمة k في $y = a(x - h)^2 + k$ في التمثيل البياني؟ اذكر مثالًا على ذلك.
3. كيف يؤثر استخدام $-a$ بدلًا من a في $y = a(x - h)^2 + k$ في التمثيل البياني؟ اذكر مثالًا على ذلك.

افحص كل زوج من الدوال وتوقَّع أوجه الشبه والاختلاف في تمثيلاتها البيانية؟ استخدام حاسبة التمثيل البياني للتأكد من توقعاتك. واكتب عبارة أو اثنتين للمقارنة بين التمثيلين البيانيَّين.

4. $y = x^2, y = x^2 + 3.5$
5. $y = -x^2, y = x^2 - 7$
6. $y = x^2, y = 4x^2$
7. $y = x^2, y = -8x^2$
8. $y = x^2, y = (x + 2)^2$
9. $y = -\frac{1}{6}x^2, y = -\frac{1}{6}x^2 + 2$
10. $y = x^2, y = (x - 5)^2$
11. $y = x^2, y = 2(x + 3)^2 - 6$
12. $y = x^2, y = -\frac{1}{8}x^2 + 1$
13. $y = (x + 5)^2 - 4, y = (x + 5)^2 + 7$
14. $y = 2(x + 1)^2 - 4, y = 5(x + 3)^2 - 1$
15. $y = 5(x - 2)^2 - 3, y = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 6$

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

الدرس 7-2

تحويل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

السابق

- لقد قمتَ بتحويل التمثيلات البيانية للدوال.

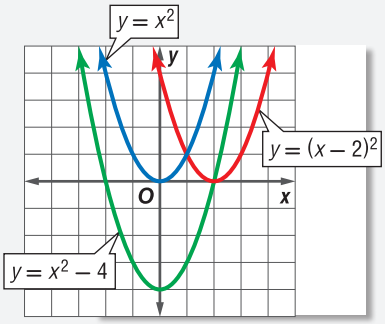
الحالي

1. كتابة دالة تربيعية بالصيغة $y = a(x - h)^2 + k$
2. تحويل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية التي بالصيغة $y = a(x - h)^2 + k$

لماذا؟

- تذكّر أن عائلة التمثيلات البيانية هي مجموعة التمثيلات البيانية التي تُظهر خاصية أو أكثر من الخصائص المتشابهة. ويُعد التمثيل البياني الأصلي أبسط تمثيل بياني في العائلة. بالنسبة إلى عائلة الدوال التربيعية، يمثل $y = x^2$ التمثيل البياني الأصلي.

يمكن رسم التمثيلات البيانية الأخرى في عائلة الدوال التربيعية، مثل $y = x^2 - 4$ و $y = (x - 2)^2$ من خلال تحويل التمثيل البياني للدالة $y = x^2$



المفردات الجديدة

صيغة الرأس vertex form

ممارسات في الرياضيات

7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 كتابة الدوال التربيعية بصيغة الرأس

كُتبت كل دالة من الدوال السابقة بصيغة **الرأس** $y = a(x - h)^2 + k$. حيث (h, k) رأس القطع المكافئ و $x = h$ محور التماثل ويحدد a شكل القطع المكافئ واتجاه فتحه.

عندما تكون الدالة التربيعية بالصيغة $y = ax^2 + bx + c$. يمكنك إكمال المربع لكتابة الدالة بصيغة الرأس. إذا لم يكن معامل الحد التربيعي 1، فقم بتحليل المعامل من الحدين التربيعي والخطي *قبل* إكمال المربع. بعد إكمال المربع وكتابة الدالة بصيغة الرأس، تشير k إلى قيمة صغرى إذا كان $a > 0$ أو قيمة عظمى إذا كان $a < 0$

مثال 1 كتابة الدوال بصيغة الرأس

اكتب كل دالة بصيغة الرأس.

a. $y = x^2 + 6x - 5$

$y = x^2 + 6x - 5$ — الدالة الأصلية

$y = (x^2 + 6x + 9) - 5 - 9$ — أكمل المربع

$y = (x + 3)^2 - 14$ — بسّط

b. $y = -2x^2 + 8x - 3$

$y = -2x^2 + 8x - 3$ — الدالة الأصلية

$y = -2(x^2 - 4x) - 3$ — جمّع $ax^2 + bx$ وحلّل بالقسمة على a

$y = -2(x^2 - 4x + 4) - 3 - (-2)(4)$ — أكمل المربع.

$y = -2(x - 2)^2 + 5$ — بسّط.

تمرين موجّه

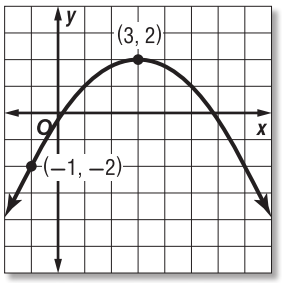
1A. $y = x^2 + 4x + 6$

1B. $y = 2x^2 - 12x + 17$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

في حالة معرفة الرأس ونقطة أخرى على التمثيل البياني للقطع المكافئ، يمكنك كتابة معادلة القطع المكافئ بصيغة الرأس.

مثال 2 على الاختبار المعياري كتابة معادلة بدلالة التمثيل البياني



أي مما يلي يمثل معادلة الدالة الموضَّحة في التمثيل البياني؟

A $y = -4(x - 3)^2 + 2$

B $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$

C $y = \frac{1}{4}(x + 3)^2 - 2$

D $y = 4(x + 3)^2 - 2$

قراءة فقرة الاختبار

تم إعطاؤك تمثيلًا بيانيًا لقطع مكافئ مع تحديد الرأس ونقطة على التمثيل البياني. وتحتاج إلى إيجاد معادلة القطع المكافئ.

حل فقرة الاختبار

يقع رأس القطع المكافئ عند $(3, 2)$، لذا $h = 3$ و$k = 2$. وبما أنّ $(-1, -2)$ نقطة على التمثيل البياني، فافترض $x = -1$ و$y = -2$ عوض بهاتين القيمتين في المعادلة التي بصيغة الرأس وحلها لإيجاد قيمة a.

$y = a(x - h)^2 + k$	صيغة الرأس
$-2 = a(-1 - 3)^2 + 2$	عوّض بـ -2 عن y وبـ -1 عن x وبـ 3 عن h وبـ 2 عن k
$-2 = a(16) + 2$	بسّط.
$-4 = 16a$	اطرح 2 من كل طرف
$-\frac{1}{4} = a$	اقسم كل طرف على 16

معادلة القطع المكافئ بصيغة الرأس هي $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$

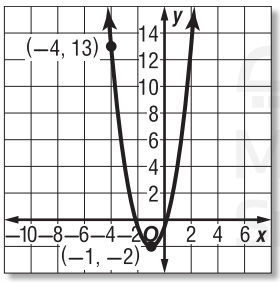
الإجابة هي B.

نصيحة عند حل الاختبار

معنى a لا تحدد إشارة a في صيغة الرأس اتساع القطع المكافئ. لكنها تشير إلى ما إذا كان القطع المكافئ مفتوحًا لأعلى أم لأسفل. لكن يُحدَّد مدى اتساع القطع المكافئ بالقيمة المطلقة لـ a.

تمرين موجّه

2. أي مما يلي يمثل معادلة الدالة الموضَّحة في التمثيل البياني؟



F $y = \frac{9}{25}(x - 1)^2 + 2$

G $y = \frac{3}{5}(x + 1)^2 - 2$

H $y = \frac{5}{3}(x + 1)^2 - 2$

J $y = \frac{25}{9}(x - 1)^2 + 2$

2 تحويل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

تعلمتَ في الدرس 7–2 كيف تؤثر التحويلات المختلفة في التمثيلات البيانية للدوال الأصلية. في ما يلي ملخص لتحويلات الدوال التربيعية.

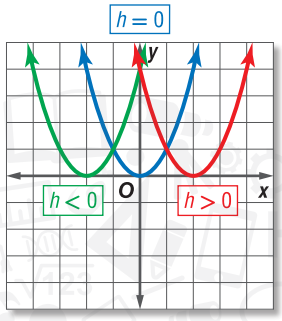
ملخص المفهوم تحويلات الدوال التربيعية

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

h، الإزاحة الأفقية

عدد h من الوحدات يمينًا إذا كانت h موجبة

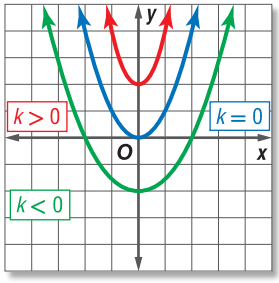
عدد $|h|$ من الوحدات يسارًا إذا كانت h سالبة



k، الإزاحة الرأسية

عدد k من الوحدات لأعلى إذا كانت k موجبة

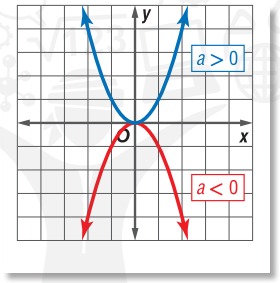
عدد $|k|$ من الوحدات لأسفل إذا كانت k سالبة



a، الانعكاس

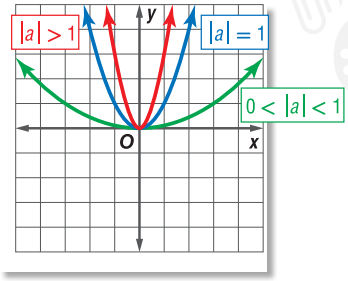
إذا كان $a > 0$، فسيكون التمثيل البياني مفتوحًا لأعلى.

إذا كان $a < 0$، فسيكون التمثيل البياني مفتوحًا لأسفل.



a، تغيير الأبعاد

إذا كان $|a| > 1$، فسيتمدد التمثيل البياني رأسيًا. إذا كان $0 < |a| < 1$، فسينضغط التمثيل البياني رأسيًا.



نصيحة دراسية

القيمة المطلقة

$0 < |a| < 1$ تعني أنّ a عدد نسبي بين 0 و1، مثل $\frac{3}{4}$ أو عدد نسبي بين 1− و0، مثل 0.3−

مثال 3 تمثيل المعادلات بيانيًا بصيغة الرأس

مثّل $y = 4x^2 - 16x - 40$ بيانيًا.

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بصيغة الرأس.

$y = 4x^2 - 16x - 40$ المعادلة الأصلية

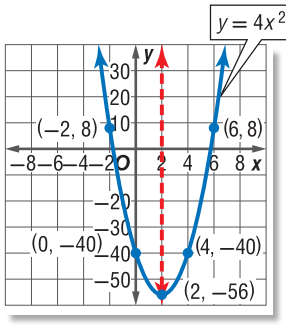
$y = 4(x^2 - 4x) - 40$ خاصية التوزيع

$y = 4(x^2 - 4x + 4) - 40 - 4(4)$ أكمل المربع

$y = 4(x - 2)^2 - 56$ بسّط

الخطوة 2 يقع الرأس عند $(2, -56)$. ومحور التماثل هو $x = 2$ نظرًا لأن $a = 4$، فإن التمثيل البياني أضيق من التمثيل البياني للدالة $y = x^2$

الخطوة 3 حدد نقاطًا إضافية لتساعدك على إكمال التمثيل البياني.



تمرين موجّه

3A. $y = (x - 3)^2 - 2$

3B. $y = 0.25(x + 1)^2$

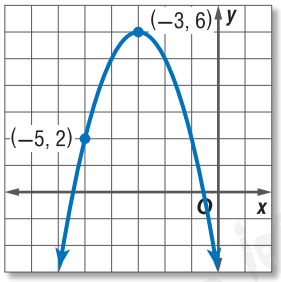
تحقق من فهمك

مثال 1 **اكتب كل دالة بصيغة الرأس.**

1. $y = x^2 + 6x + 2$
2. $y = -2x^2 + 8x - 5$
3. $y = 4x^2 + 24x + 24$

مثال 2

4. **الاختيار من متعدد** ما المعادلة الموضَّحة في التمثيل البياني؟



A $y = -(x + 3)^2 + 6$

B $y = -(x - 3)^2 - 6$

C $y = -2(x + 3)^2 + 6$

D $y = -2(x - 3)^2 - 6$

مثال 3 **مثِّل كل دالة بيانيًا.**

5. $y = (x - 3)^2 - 4$
6. $y = -2x^2 + 5$
7. $y = \frac{1}{2}(x + 6)^2 - 8$

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R4.

مثال 1 **اكتب كل دالة بصيغة الرأس.**

8. $y = x^2 + 9x + 8$
9. $y = x^2 - 6x + 3$
10. $y = -2x^2 + 5x$
11. $y = x^2 + 2x + 7$
12. $y = -3x^2 + 12x - 10$
13. $y = x^2 + 8x + 16$
14. $y = 2x^2 - 4x - 3$
15. $y = 3x^2 + 10x$
16. $y = x^2 - 4x + 9$
17. $y = -4x^2 - 24x - 15$
18. $y = x^2 - 12x + 36$
19. $y = -x^2 - 4x - 1$

مثال 2

20. **الألعاب النارية** أثناء عرض الألعاب النارية في يوم الاستقلال، يمكن نمذجة ارتفاع صاروخ معين h بالأمتار بعد مدة t من الثواني بواسطة الدالة $h = -4.9(t - 4)^2 + 80$ مثِّل الدالة بيانيًا.

21. **المعرفة المالية** يبلغ متوسط تأجير الدراجات في أحد المتاجر 120 دراجة في الأسبوع برسوم AED 25 يوميًا. ويقدّر المدير أن عدد الدراجات التي يتم تأجيرها سيزداد بمقدار 15 دراجة عند تقليل AED 1 من سعر التأجير. يمكن نمذجة أقصى عائد يمكن أن يتوقعه المدير بواسطة الدالة $y = -15x^2 + 255x + 3000$، حيث y العائد الأسبوعي وx عدد الدراجات التي يتم تأجيرها. اكتب هذه الدالة بصيغة الرأس. ثم مثّلها بيانيًا.

مثال 3 **مثِّل كل دالة بيانيًا.**

22. $y = (x - 5)^2 + 3$
23. $y = 9x^2 - 8$
24. $y = -2(x - 5)^2$
25. $y = \frac{1}{10}(x + 6)^2 + 6$
26. $y = -3(x - 5)^2 - 2$
27. $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$
28. $y = 2x^2 + 10$
29. $y = -(x + 3)^2$
30. $y = \frac{1}{6}(x - 3)^2 - 10$
31. $y = (x - 9)^2 - 7$
32. $y = -\frac{5}{8}x^2 - 8$
33. $y = -4(x - 10)^2 - 10$

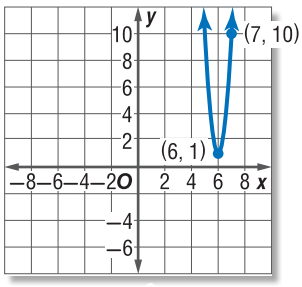
34. **النمذجة** تستخدم شركة تصنيع الألواح الشراعية عملية آلية لتصنيع السواري الخاصة بالألواح الشراعية التي تنتجها. وقامت ببرمجة الدالة $f(x) = \frac{1}{250}x^2 + \frac{3}{5}x$ في الكمبيوتر لصناعة هذا الساري.

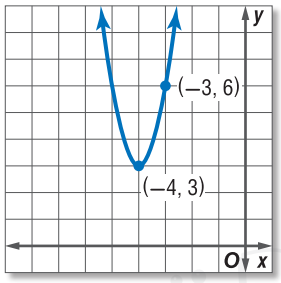
a. اكتب الدالة التربيعية بصيغة الرأس، ثم مثّلها بيانيًا.

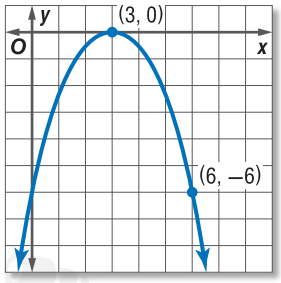
b. صِف كيف يمكن أن تعدّل شركة التصنيع الدالة لتكبير أو تصغير منحنيات الساري الذي تنتجه.

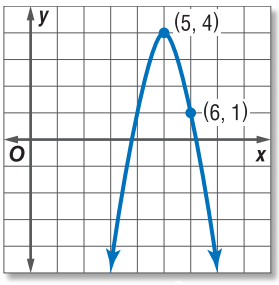
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

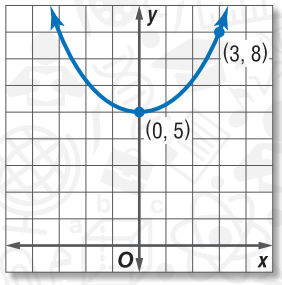
اكتب معادلةً بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ.

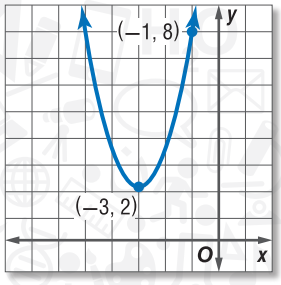
35. 

36. 

37. 

38. 

39. 

40. 

اكتب كل دالة بصيغة الرأس. ثم حدد الرأس ومحور التماثل واتجاه الفتح.

41. $3x^2 - 4x = 2 + y$

42. $-2x^2 + 7x = y - 12$

43. $-x^2 - 4.7x = y - 2.8$

44. $x^2 + 1.4x - 1.2 = y$

45. $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{9} = y$

46. $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = y$

47 **السيارات** يمكن استخدام الصيغة $S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ لتحديد الموقع $S(t)$ لجسم ما بعد t من الثواني بعجلة a وسرعة متجهة ابتدائية v_0. يمكن أن تتسارع سيارة رنا معدل $0.002\ \text{km/s}^2$.

a. عبّر عن $S(t)$ بصيغة الرأس إذا كانت تتسارع من $35\ \text{km/h}$ للسير على الطرق السريعة.

b. ما المدة التي تستغرقها رنا للوصول إلى متوسط سرعة السير على الطرق السريعة والتي تبلغ $68\ \text{km/h}$؟ (*تلميح:* استخدم *العجلة* × *الزمن* = *السرعة المتجهة*).

c. إذا كان طول الممر الفرعي للمدخل $\frac{1}{8}\ \text{km}$ ، فهل سيكون لدى رنا الوقت الكافي لتصل إلى متوسط سرعة الطرق السريعة؟ اشرح ذلك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. مسألة مفتوحة اكتب معادلة القطع المكافئ التي تم إزاحته وضغطه وعكسه حول المحور *x*.

49. تحفيز اشرح كيف يمكنك إيجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام إحداثيات ثلاث نقاط على التمثيل البياني.

50. تحفيز اكتب الصيغة القياسية للدالة التربيعية $y = ax^2 + bx + c$ بصيغة الرأس. حدد الرأس ومحور التماثل.

51. التبرير صِف التمثيل البياني للدالة $f(x) = a(x - h)^2 + k$ عند $a = 0$ هل التمثيل البياني هو نفسه الخاص بالدالة $g(x) = ax^2 + bx + c$ عند $a = 0$؟ اشرح ذلك.

52. الفرضيات وضّح كيف يمكن استخدام التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ لتمثيل أي دالة تربيعية. واذكر توضيحًا للتأثيرات الناتجة عن تغيير قيم كل من a وh وk في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$. إلى جانب المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ والتمثيل البياني للدالة $y = a(x - h)^2 + k$ باستخدام القيم التي اخترتها لكل من a وh وk.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

تدريب على الاختبار المعياري

53. تحتاج شجرات مزهرة إلى خليط يتكون من 70% تربة و30% فيرميكوليت. فكم دلوًا من الفيرميكوليت يلزمك إضافتها إلى 20 دلوًا من التربة؟

A 6.0 **C** 14.0

B 8.0 **D** 24.0

54. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول إذا كان مجموع العددين الصحيحين x وy هو 495، وكان ورقم الآحاد في x هو 0، وعند قسمة x على 10، يكون الناتج مساويًا للعدد y، فما قيمة x؟

F 40 **J** 250

G 45 **K** 450

H 245

55. ما مجموعة حلول المتباينة $|4x - 1| < 9$؟

A $\{x \mid 2.5 < x$ أو $x < -2\}$

B $\{x \mid x < 2.5\}$

C $\{x \mid x > -2\}$

D $\{x \mid -2 < x < 2.5\}$

56. إجابة مختصرة في متجرك، إذا اشتريتَ مفاتيح ربط بسعر AED 30.00 للدزينة، وبعتَ المفتاح الواحد بـ AED 3.50، فما النسبة المئوية للزيادة في سعر المفاتيح؟

مراجعة شاملة

حُلّ كل معادلة باستخدام الطريقة التي تختارها. جد الحلول الدقيقة. (الدرس 6-2)

57. $4x^2 + 15x = 21$

58. $-3x^2 + 19 = 5x$

59. $6x - 5x^2 + 9 = 3$

جد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مربعًا كاملًا. (الدرس 5-2)

60. $x^2 - 12x + c$

61. $x^2 + 0.1x + c$

62. $x^2 - 0.45x + c$

حدد ما إذا كان لكل دالة قيمة عظمى أو صغرى وجد هذه القيمة. (الدرس 7-2)

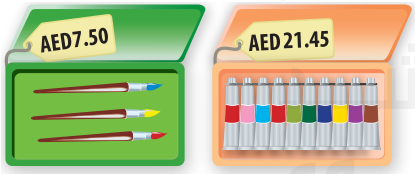
63. $f(x) = 6x^2 - 8x + 12$

64. $f(x) = -4x^2 + x - 18$

65. $f(x) = 3x^2 - 9 + 6x$

66. علم الآثار تم تطبيق شبكة إحداثيات على حفر أثري لتحديد موقع القطع الأثرية. تم الكشف جزئيًا عن ثلاثة أركان لمبنى عند النقاط $(-1, 6)$ و$(4, 5)$ و$(-1, -2)$. فإذا كانت مساحة كل مربع على الشبكة مترًا مربعًا، فقدّر مساحة أرضية المبنى.

67. فنون لا تستطيع سهى إنفاق أكثر من AED 225 على مستلزمات نادي الفن من الفرش والألوان. وهي تحتاج إلى 20 فرشة على الأقل و56 أنبوبة ألوان. مثّل المنطقة التي توضح عدد العلب التي يمكن شراؤها من كل عنصر.



حُـــلّ كل نظام من أنظمة المعادلات باستخدام التمثيل البياني.

68. $y = 3x - 4$
$y = -2x + 16$

69. $2x + 5y = 1$
$6y - 5x = 16$

70. $4x + 3y = -30$
$3x - 2y = 3$

جد قيمة كل دالة.

71. $f(3)$ إذا كان $f(x) = x^2 - 4x + 12$

72. $f(-2)$ إذا كان $f(x) = -4x^2 + x - 8$

73. $f(4)$ إذا كان $f(x) = 3x^2 + x$ if

مراجعة المهارات

حدّد ما إذا كانت القيمة المعطاة تحقق المتباينة أم لا.

74. $3x^2 - 5 > 6; x = 2$

75. $-2x^2 + x - 1 < 4; x = -2$

76. $4x^2 + x - 3 \leq 36; x = 3$

مختبر الجبر
الدوال التربيعية ومعدل التغير

لقد تعلمتَ أنّ الدالة الخطية لها معدل تغير ثابت. في هذه التجربة، ستستكشف معدل التغير في الدوال التربيعية.

النشاط تحديد معدل التغير

فكّر في $f(x) = 0.1875x^2 - 3x + 12$

الخطوة 1 أنشئ جدولًا مثل الوارد أدناه، واستخدم القيم من 0 إلى 16 لـ x.

x	0	1	2	...	3	...	16
y	12	9.1875	6.75				
المشتقة الأولى							
المشتقة الثانية							

الخطوة 2 أوجد كل قيم y. على سبيل المثال، عند $x = 1$، فإن $y = 0.1875(1)^2 - 3(1) + 12$ أو 9.1875

الخطوة 3 مثّل الأزواج المرتبة (x, y) بيانيًا. ثم صِل بين النقاط بمنحنى منتظم. لاحظ أن الدالة تتناقص عند $0 < x < 8$ وتتزايد عند $8 < x < 16$

الخطوة 4 يمكن إيجاد معدل التغير من نقطة إلى نقطة تالية باستخدام صيغة الميل. من (0, 12) إلى (1, 9.1875)، يكون الميل $\frac{9.1875 - 12}{1 - 0}$ أو -2.8125 وهذه هي المشتقة الأولى عند $x = 1$ أكمل الجدول لإيجاد جميع قيم المشتقة الأولى. صِف أي أنماط في المشتقات.

الخطوة 5 يمكن إيجاد المشتقات الثانية من خلال طرح المشتقات الأولى المتتالية. على سبيل المثال، يتم إيجاد المشتقة الثانية عند $x = 2$ من خلال طرح المشتقة الأولى عند $x = 1$ من المشتقة الأولى عند $x = 2$ صِف أي أنماط في المشتقات.

تمارين

أنشئ جدول قيم لقيم x المعطاة لكل دالة. ومثّل الدالة بيانيًا.
ثم حدد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية.

1. $y = -x^2 + 2x - 1$ عند $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

2. $y = 0.5x^2 + 2x - 2$ عند $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$

3. $y = -3x^2 - 18x - 26$ عند $x = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$

4. **التخمين** كرر النشاط مع الدالة التكعيبية. ما درجة المشتقة التي تتوقّع أن تكون $g(x) = x^4$ عندها ثابتًا؟ $h(x) = x^n$؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

الدرس 2-8

المتباينات التربيعية

السابق

- لقد تمكنتَ من حل المتباينات الخطية.

الحالي

1 تمثيل المتباينات التربيعية ذات المتغيرين بيانيًا.

2 حل المتباينات التربيعية بمتغير واحد.

لماذا؟

- يمكن تمثيل بالون مياه أُطلِق من مقلاع بالعديد من المعادلات والمتباينات التربيعية المختلفة.

افترض أنه يتم تمثيل ارتفاع بالون المياه $h(t)$ بالأمتار عن سطح الأرض بعد t ثوانٍ من إطلاقه بالدالة التربيعية $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$ يمكنك حل المتباينة التربيعية لتحديد الوقت الذي يستغرقه البالون على ارتفاع مسافة معينة عن الأرض.

المفردات الجديدة

المتباينة التربيعية
quadratic inequality

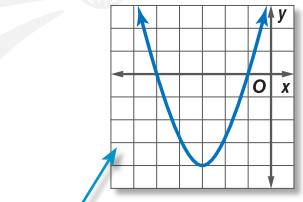
ممارسات في الرياضيات

1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 تمثيل المتباينات التربيعية بيانيًا

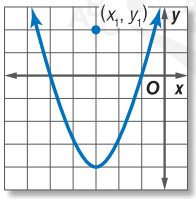
يمكنك تمثيل **المتباينات التربيعية** ذات المتغيرين بيانيًا باستخدام الأسلوب نفسه المستخدَم في تمثيل المتباينات الخطية ذات المتغيرين بيانيًا.

الخطوة 1 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا.



هل يجب أن يكون القطع المكافئ متصلًا أم متقطعًا؟

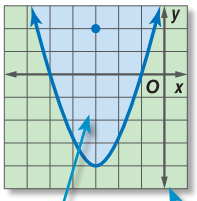
الخطوة 2 اختبر نقطة ليست على القطع المكافئ.



$y_1 \gtrless a(x_1)^2 + b(x_1) + c$

هل يُعدّ (x_1, y_1) حلًا؟

الخطوة 3 ظلّل تبعًا لذلك.



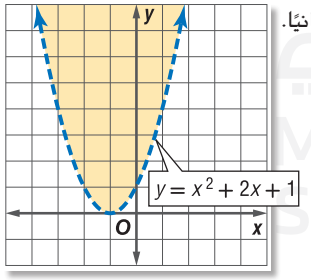
يُعدّ (x_1, y_1) حلًا.

(x_1, y_1) ليس حلًا.

مثال 1 تمثيل متباينة تربيعية بيانيًا

مثّل $y > x^2 + 2x + 1$ بيانيًا.

الخطوة 1 مثّل الدالة المرتبطة، $y = x^2 + 2x + 1$ بيانيًا. يجب أن يكون القطع المكافئ متقطعًا.



الخطوة 2 اختبر نقطة ليست على التمثيل البياني للقطع المكافئ.

$y > x^2 + 2x + 1$

$-1 \gtrless 0^2 + 2(0) + 1$

$-1 \not> 1$ لذا، $(0, -1)$ ليس حلًا للمتباينة.

الخطوة 3 ظلّل المنطقة التي لا تحتوي على النقطة $(0, -1)$.

تمرين موجّه

مثّل كل متباينة بيانيًا.

1A. $y \leq x^2 + 2x + 4$

1B. $y < -2x^2 + 3x + 5$

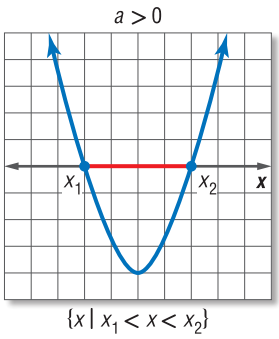
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حل المتباينات التربيعية يمكن حل المتباينات التربيعية ذات المتغير الواحد باستخدام التمثيلات البيانية للدوال التربيعية المرتبطة.

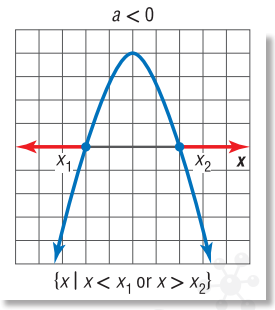
$ax^2 + bx + c < 0$

مثّل $y = ax^2 + bx + c$ بيانيًا وحدد قيم x التي يقع فيها التمثيل البياني *أسفل* المحور x.

بالنسبة إلى $\geq$، ضمّن مقاطع x في الحل.



$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$

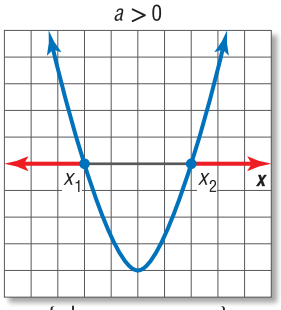


$\{x \mid x < x_1 \text{ or } x > x_2\}$

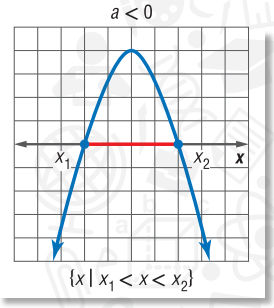
$ax^2 + bx + c > 0$

مثّل $y = ax^2 + bx + c$ بيانيًا وحدد قيم x التي يقع فيها التمثيل البياني *أعلى* المحور x.

بالنسبة إلى $\leq$، ضمّن مقاطع x في الحل.



$\{x \mid x < x_1 \text{ or } x > x_2\}$



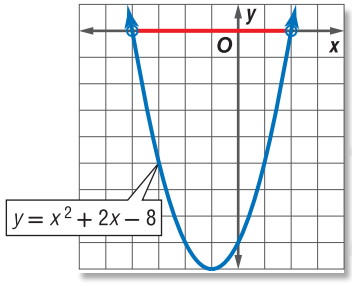
$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$

مثال 2 حل $ax^2 + bx + c < 0$ بالتمثيل البياني

حُـــلّ المتباينة: $x^2 + 2x - 8 < 0$ بالتمثيل البياني.

يتكوّن الحل من قيم x التي يكون عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة *أسفل* المحور x. ابدأ بإيجاد جذور الدالة المرتبطة.

المعادلة المرتبطة	$x^2 + 2x - 8 = 0$
حلل إلى العوامل	$(x - 2)(x + 4) = 0$
خاصية ناتج الضرب الصفري	$x + 4 = 0$ أو $x - 2 = 0$
حُل كل معادلة	$x = -4$ $\quad x = 2$



ارسم التمثيل البياني لقطع مكافئ لديه مقاطع عند x -4 و2 يجب أن يكون التمثيل البياني مفتوحًا لأعلى لأن $a > 0$

يقع التمثيل البياني أسفل المحور x بين $x = -4$ و$x = 2$ ومن ثَم تكون مجموعة الحل $\{x \mid -4 < x < 2\}$ أو $(-4, 2)$

تحقق اختبر قيمة واحدة لـ x أقل من -4 وقيمة بين -4 و2 وقيمة أكبر من 2 في المتباينة الأصلية.

اختبر $x = 5$	اختبر $x = 0$	اختبر $x = -6$
$x^2 + 2x - 8 < 0$	$x^2 + 2x - 8 < 0$	$x^2 + 2x - 8 < 0$
$5^2 + 2(5) - 8 \stackrel{?}{<} 0$	$0^2 + 2(0) - 8 \stackrel{?}{<} 0$	$(-6)^2 + 2(-6) - 8 \stackrel{?}{<} 0$
$27 < 0$ ✗	$-8 < 0$ ✓	$16 < 0$ ✗

نصيحة دراسية

حل المتباينات التربيعية باستخدام التمثيل البياني

التمثيل البياني الدقيق للدالة التربيعية المرتبطة ليس ضروريًا عند إيجاد أصفار الدالة جبريًا.

تمرين موجّه

حُـــلّ كل متباينة باستخدام التمثيل البياني.

2A. $0 > x^2 + 5x - 6$

2B. $-x^2 + 3x + 10 \leq 0$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 3 حَل $ax^2 + bx + c \geq 0$ بالتمثيل البياني.

حُـــلّ المتباينة: $2x^2 + 4x - 5 \geq 0$ بالتمثيل البياني.

يتكوّن الحل من قيم x التي يكون عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة *على* المحور x *وأعلاه*. ابدأ بإيجاد جذور الدالة المرتبطة.

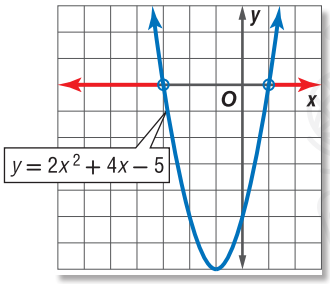
$2x^2 + 4x - 5 = 0$ — المعادلة المرتبطة

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — استخدم القانون العام

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$ — عوّض عن a بـ 4، وعن b بـ 2، وعن c بـ -5

$x = \frac{-4 + \sqrt{56}}{4}$ أو $x = \frac{-4 - \sqrt{56}}{4}$ — بسّط واكتب على صورة معادلتين

≈ 0.87 ≈ -2.87 — بسّط



ارسم التمثيل البياني لقطع مكافئ لديه مقاطع x عند -2.87 و0.87 يكون التمثيل البياني مفتوحًا لأعلى لأن $a > 0$ يقع التمثيل البياني على المحور x وأعلاه عند $x \leq -2.87$ و$x \geq 0.87$ تقريبًا. ومن ثَم يكون الحل $\{x \mid x \leq -2.87$ أو $x \geq 0.87\}$ أو $(-\infty, -2.87] \cup [0.87, \infty)$ تقريبًا

تمرين موجّه

حُـــلّ كل متباينة باستخدام التمثيل البياني.

3A. $x^2 - 6x + 2 > 0$

3B. $-4x^2 + 5x + 7 \geq 0$

يمكن حل المسائل من الحياة اليومية بتمثيل المتباينات التربيعية بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

يستغرق انفجار بالون المياه مللي ثوانٍ فقط. ويمكن للكاميرا عالية السرعة التقاط التأثير في السائل قبل أن تُسقطه الجاذبية.

المصدر: NASA

مثال 4 من الحياة اليومية حل متباينة تربيعية

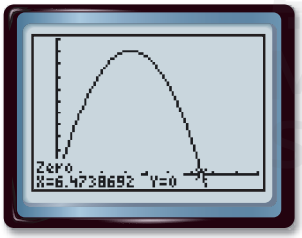
بالونات المياه راجع بداية الدرس. في أي وقت سيكون بالون المياه على بُعد 3 m من الأرض بعد إطلاقه؟

تصف الدالة $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$ ارتفاع بالون المياه. ومن ثَم تريد إيجاد قيم t التي تكون عندها $h(t) \leq 3$.

$h(t) \leq 3$ — المتباينة الأصلية

$-4.9t^2 + 32t + 1.2 \leq 3$ — $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$

$-4.9t^2 + 32t - 1.8 \leq 0$ — اطرح 3 من كل طرف



$[-1, 9]$ scl: 1 by $[-5, 55]$ scl: 5

مثّل الدالة المرتبطة $y = -4.9x^2 + 32x - 1.8$ بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني. أصفار الدالة هي 0.06 و6.47 تقريبًا ويقع التمثيل البياني أسفل المحور x عندما يكون $x < 0.06$ و$x > 6.47$

لذا، يكون بالون المياه على بُعد 3 m من الأرض خلال أول 0.06 s بعد إطلاقه ومرة أخرى بعد حوالي 6.47 s حتى يرتطم بالأرض.

تمرين موجّه

4. الصواريخ إذا تم تمثيل ارتفاع $h(t)$ لنموذج صاروخ بالأمتار بعد t ثانية من إطلاقه بالدالة $h(t) = -16t^2 + 82t + 0.25$. ففي أي فترة يرتفع الصاروخ عن الأرض بمقدار 100 m على الأقل؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

حل المتباينات التربيعية جبريًا

إذا كانت جذور المعادلة التربيعية المرتبطة أعدادًا مركبة، فسيكون حل المتباينة جميع الأعداد الحقيقية أو المجموعة الخالية. وسيساعدك اختبار نقطة واحدة في تحديد الحل.

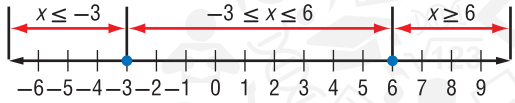
مثال 5 حل متباينة تربيعية جبريًا

حُـــلّ المتباينة: $x^2 - 3x \leq 18$ جبريًا.

الخطوة 1 حُل المعادلة التربيعية المرتبطة $x^2 - 3x = 18$

$x^2 - 3x = 18$	المعادلة التربيعية المرتبطة
$x^2 - 3x - 18 = 0$	اطرح 18 من كل طرف
$(x + 3)(x - 6) = 0$	حلل إلى العوامل
$x + 3 = 0$ أو $x - 6 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = -3$ $\quad$ $x = 6$	حُل كل معادلة

الخطوة 2 حدد -3 و6 على خط الأعداد، واستخدم النقاط لأن هذه القيم هي حلول المتباينة الأصلية. لاحظ أن خط الأعداد مقسم إلى ثلاث فترات.



الخطوة 3 اختبر قيمة من كل فترة لمعرفة ما إذا كانت تحقق المتباينة الأصلية.

$x \geq 6$	$-3 \leq x \leq 6$	$x \leq -3$
اختبر $x = 8$	اختبر $x = 0$	اختبر $x = -5$
$x^2 - 3x \leq 18$	$x^2 - 3x \leq 18$	$x^2 - 3x \leq 18$
$(8)^2 - 3(8) \stackrel{?}{\leq} 18$	$(0)^2 - 3(0) \stackrel{?}{\leq} 18$	$(-5)^2 - 3(-5) \stackrel{?}{\leq} 18$
$40 \not\leq 18$	$0 \leq 18$	$40 \not\leq 18$

مجموعة الحل هي $\{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$ أو $[-3, 6]$.

تمرين موجّه

حُـــلّ كل متباينة جبريًا.

5A. $x^2 + 5x < -6$

5B. $x^2 + 11x + 30 \geq 0$

x x x

تحقق من فهمك

مثال 1 **مثّل كل متباينة بيانيًا.**

1. $y \leq x^2 - 8x + 2$ **2.** $y > x^2 + 6x - 2$ **3.** $y \geq -x^2 + 4x + 1$

المثالان 3–2 **التفكير المنطقي حُلّ كل متباينة باستخدام التمثيل البياني.**

4. $0 < x^2 - 5x + 4$ **5.** $x^2 + 8x + 15 < 0$

6. $-2x^2 - 2x + 12 \geq 0$ **7.** $0 \geq 2x^2 - 4x + 1$

مثال 4 **8. كرة القدم** يركل لاعب الوسط الكرة باتجاه المرمى أثناء المباراة. يمكن تمثيل ارتفاع الكرة بالأمتار فوق الأرض $h(t)$ عند الزمن t بالدالة $h(t) = -0.1t^2 + 2.4t + 1.5$. فإذا كان ارتفاع المرمى 8 m. ففي أي وقت خلال الركلة ستستطيع الكرة دخول المرمى؟

مثال 5 **حُـــلّ كل متباينة جبريًا.**

9. $x^2 + 6x - 16 < 0$ **10.** $x^2 - 14x > -49$

11 $-x^2 + 12x \geq 28$ **12.** $x^2 - 4x \leq 21$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R4.

مثال 1 **مثّل كل متباينة بيانيًا.**

13. $y \geq x^2 + 5x + 6$
14. $x^2 - 2x - 8 < y$
15. $y \leq -x^2 - 7x + 8$
16. $-x^2 + 12x - 36 > y$
17. $y > 2x^2 - 2x - 3$
18. $y \geq -4x^2 + 12x - 7$

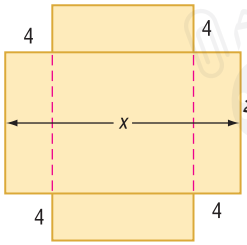
المثالان 2-3 **حُـــلّ كل متباينة باستخدام التمثيل البياني.**

19. $x^2 - 9x + 9 < 0$
20. $x^2 - 2x - 24 \leq 0$
21. $x^2 + 8x + 16 \geq 0$
22. $x^2 + 6x + 3 > 0$
23. $0 > -x^2 + 7x + 12$
24. $-x^2 + 2x - 15 < 0$
25. $4x^2 + 12x + 10 \leq 0$
26. $-3x^2 - 3x + 9 > 0$
27. $0 > -2x^2 + 4x + 4$
28. $3x^2 + 12x + 36 \leq 0$
29. $0 \leq -4x^2 + 8x + 5$
30. $-2x^2 + 3x + 3 \leq 0$

مثال 4

31. **الهندسة المعمارية** تم تشكيل مدخل مقوس لأحد المباني على شكل قطع مكافئ يمكن تمثيله بالمعادلة $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ كم يبعد ارتفاعه الذي يبلغ 7 m على الأقل عن جانبَي القوس؟

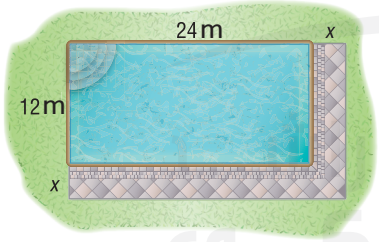
32. **التصنيع** تم تشكيل صندوق عن طريق قطع مربعات طول ضلعها 4 cm من كل زاوية من قطعة مربعة من الورق المقوى ثم طي الجوانب. إذا كانت $V(x) = 4x^2 - 64x + 256$ تمثل حجم الصندوق. فما أبعاد القطعة الأصلية للورق المقوى إذا كان حجم الصندوق لا يمكن أن يتجاوز $750\ cm^3$؟



مثال 5 **حُلّ كل متباينة جبريًا.**

33. $x^2 - 9x < -20$
34. $x^2 + 7x \geq -10$
35. $2 > x^2 - x$
36. $-3 \leq -x^2 - 4x$
37. $-x^2 + 2x \leq -10$
38. $-6 > x^2 + 4x$
39. $2x^2 + 4 \geq 9$
40. $3x^2 + x \geq -3$
41. $-4x^2 + 2x < 3$
42. $-11 \geq -2x^2 - 5x$
43. $-12 < -5x^2 - 10x$
44. $-3x^2 - 10x > -1$

45. **المثابرة** تضيف عائلة سعيد لوحًا على طول جانبَين من جوانب حمام السباحة. سيتماثل عرض اللوح في كلا الجانبين ولا يمكن أن يتجاوز إجمالي مساحة حمام السباحة واللوح $750\ m^2$.

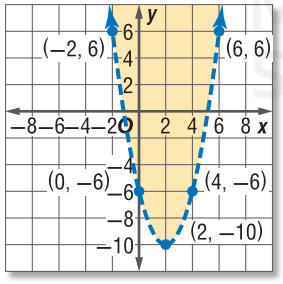


a. مثّل المتباينة التربيعية بيانيًا.

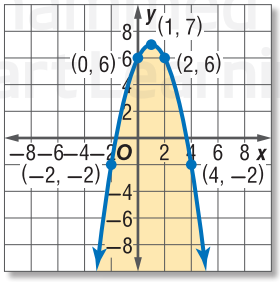
b. حدد العروض الممكنة للوح.

اكتب متباينة تربيعية لكل تمثيل بياني.

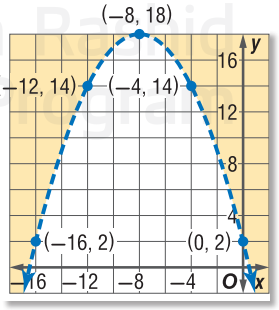
46.



47.



48.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

حُلّ كل متباينة تربيعية باستخدام التمثيل البياني أو الجدول أو جبريًا.

49. $-2x^2 + 12x < -15$ **50.** $5x^2 + x + 3 \geq 0$ **51** $11 \leq 4x^2 + 7x$

52. $x^2 - 4x \leq -7$ **53.** $-3x^2 + 10x < 5$ **54.** $-1 \geq -x^2 - 5x$

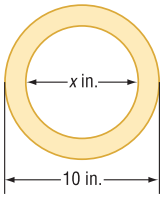
55. الأعمال تستخدم إحدى الشركات المصنعة للإلكترونيات الدالة $P(x) = x(-27.5x + 3520) + 20{,}000$ لتمثيل أرباحها الشهرية عند بيع x ألف مشغل صوتي رقمي.

a. مثّل المتباينة التربيعية لربح شهري مقداره AED 100,000 على الأقل.

b. كم عدد المشغلات الصوتية الرقمية التي يجب أن تبيعها الشركة المصنعة لتحصل على ربح مقداره AED 100,000 على الأقل في الشهر؟

c. افترض أن الشركة المصنعة لديها مصاريف شهرية إضافية بقيمة AED 25,000. اشرح كيف يؤثر ذلك في التمثيل البياني لدالة الربح. ثم حدد عدد المشغلات الصوتية الرقمية التي تحتاج الشركة المصنعة إلى بيعها لتحقق أرباحًا قدرها AED 100,000 على الأقل.

56. الخدمات يعمل مقاول على تركيب أنابيب صرف لموقف سيارات خاص بأحد مراكز التسوق. والقطر الخارجي للأنبوب 10 إنش. ويجب أن تكون مساحة المقطع العرضي للأنبوب 35 إنشًا مربعًا على الأقل وألا تزيد عن 42 إنشًا مربعًا.



a. مثّل المتباينات التربيعية بيانيًا.

b. ما سُمك أنبوب الصرف الذي يمكن أن يستخدمه المقاول؟

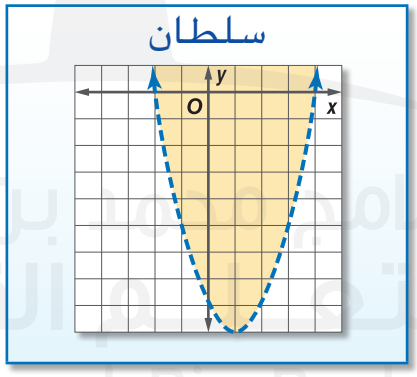
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

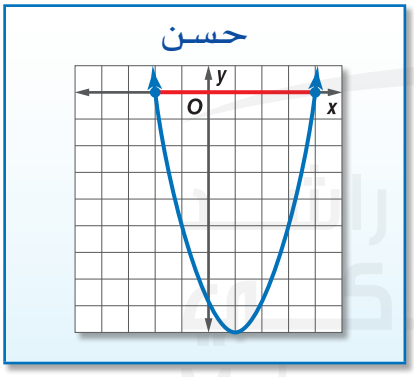
57. مسألة مفتوحة اكتب متباينة تربيعية لكل حالة.

a. مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية.

b. مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

58. النقد استخدم سلطان وحسن تمثيلًا بيانيًا لحل المتباينة التربيعية $x^2 - 2x - 8 > 0$ هل أي منهما صحيح؟ اشرح ذلك.





59. التبرير هل حدود مجموعة حل $x^2 + 4x - 12 \leq 0$ ضعف قيمة حدود $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \leq 0$؟ اشرح ذلك.

60. التبرير حدّد إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة *على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

إن تقاطع $y \leq -ax^2 + c$ و $y \geq ax^2 - c$ *هو المجموعة الخالية.*

61. تحفيز مثّل تقاطع التمثيلات البيانية لـ $y \leq -x^2 + 4$ و $y \geq x^2 - 4$

62. الكتابة في الرياضيات ما أوجه الشبه والاختلاف بين الأساليب المستخدمة عند حل المتباينات التربيعية والمعادلات التربيعية؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

63. إجابة شبكية تحتاج إلى نثر البذور في مساحة تبلغ 80 m في 40 m. ويمكن أن يغطي كل كيس بذور $25\ m^2$ من الأرض. فكم عدد أكياس البذور التي ستحتاج إليها؟

64. اختبار SAT/ACT
إذا كان ناتج ضرب عددين صحيحين بين 107 و116، فأي مما يلي *لا* يمكن أن يكون أحد العددين الصحيحين؟

A 5
B 10
C 12
D 15
E 23

65 احتمال يتم ترتيب خمسة طلاب جنبًا إلى جنب بحيث يكون أطول طالب في المنتصف وأقصر طالبين على الأطراف. فإذا لم يكن هناك طالبان بالطول نفسه، فكم عدد الترتيبات المختلفة المحتملة؟

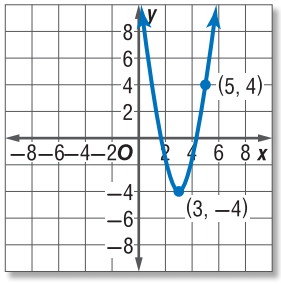
F 2
G 4
H 5
J 6

66. إجابة مختصرة حوّل إلى أبسط صورة $\frac{5+i}{6-3i}$.

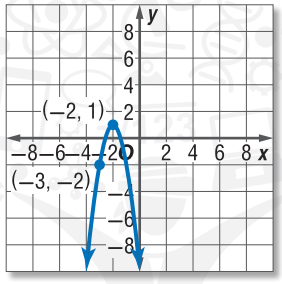
مراجعة شاملة

اكتب معادلةً بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ. (الدرس 7-2)

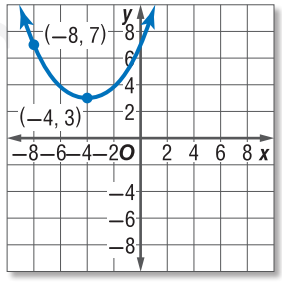
67.



68.



69.



أكمل الجزأين a وb لكل معادلة تربيعية.

a. **قيمة المميز.**

b. **صِف عدد الجذور ونوعها.** (الدرس 6-2)

70. $4x^2 + 7x - 3 = 0$

71. $-3x^2 + 2x - 4 = 9$

72. $6x^2 + x - 4 = 12$

قم بإجراء العملية المشار إليها. إذا كانت المصفوفة غير موجودة، فاكتب مستحيلًا

73. $4\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

74. $-2\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

75. $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

76. تمرين راجع الرسم.

a. بالنسبة إلى كل خيار، اكتب معادلة تمثل تكلفة الانضمام إلى الصالة الرياضية.

b. مثّل المعادلات بيانيًا. قدّر نقطة التعادل لعضويات الصالة الرياضية.

c. اشرح معنى نقطة التعادل.

d. إذا كنت تخطط لزيارة الصالة الرياضية مرة واحدة على الأقل في الأسبوع خلال السنة، فما الخيار الذي يجب أن تختاره؟

مراجعة المهارات

استخدم خاصية التوزيع لإيجاد كل ناتج ضرب.

77. $-6(x - 4)$

78. $8(w + 3x)$

79. $-4(-2y + 3z)$

80. $-1(c - d)$

81. $0.5(5x + 6y)$

82. $-3(-6y - 4z)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر تقنية التمثيل البياني
نمذجة الحركة

إعداد التجربة

- ضع لوحًا على كومة من الكتب لإنشاء منحدر.
- صِل جهاز جمع البيانات بحاسبة التمثيل البياني. ضعه أعلى المنحدر حتى يتمكّن من قراءة حركة السيارة على المنحدر.
- ثبّت السيارة في الأعلى على بُعد حوالي 6 سنتيمترات من أسفل المنحدر وصفِّر جهاز الجمع.

النشاط

الخطوة 1 يجب على أحد أعضاء المجموعة الضغط على الزر لبدء جمع البيانات.

الخطوة 2 يضع عضو آخر من المجموعة السيارة أسفل المنحدر. بعد بدء جمع البيانات، ادفع السيارة بلطف لكن بسرعة بحيث تتحرك صاعدةً المنحدر نحو كاشف الحركة.

الخطوة 3 توقف عن جمع البيانات عندما تعود السيارة إلى أسفل المنحدر. واحفظ البيانات باسم المحاولة 1.

الخطوة 4 قم بإزالة كتاب واحد من الكومة، ثم كرر التجربة. واحفظ البيانات باسم المحاولة 2. وبالنسبة إلى التجربة 3، أنشئ منحدرًا أكثر انحدارًا وكرر التجربة.

حلل النتائج

المحاولة	الرأس (h, k)	النقطة (x, y)	المعادلة
1			
2			
3			

1. ما نوع الدالة التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات؟ برر إجابتك.
2. استخدم قائمة **CALC** لإيجاد رأس التمثيل البياني. وسجّل الإحداثيات في جدول مثل الموجود على اليسار.
3. استخدم ميزة **TRACE** في الحاسبة لإيجاد إحداثيات نقطة أخرى على التمثيل البياني. ثم استخدم إحداثيات الرأس والنقطة لإيجاد معادلة التمثيل البياني.
4. معادلة لكل من التمثيلات البيانية للمحاولتين 2 و3.
5. قارن بين معادلات المحاولات 1 و2 و3. ما التمثيل البياني الأوسع وما الأكثر ضيقًا؟ اشرح ما يمثله هذا في سياق الحالة. كيف يُمثَّل هذا في المعادلات؟
6. ما الذي تمثله مقاطع x والرأس لكل تمثيل بياني؟
7. لماذا اختلفت قيم h وk في كل محاولة؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا (الدرس 2-1)

- يكون التمثيل البياني لـ $y = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$ مفتوحًا لأعلى ويكون للدالة قيمة صغرى عند $a > 0$، ويكون التمثيل البياني مفتوحًا لأسفل وللدالة قيمة صغرى عند $a < 0$

حل المعادلات التربيعية (الدرسان 2-2 و2-3)

- جذور المعادلة التربيعية هي أصفار الدالة التربيعية المرتبطة. ويمكنك إيجاد أصفار الدالة التربيعية من خلال إيجاد مقاطع x للتمثيل البياني.

الأعداد المركبة (الدرس 2-4)

- i هو الوحدة التخيلية؛ $i^2 = -1$ و$i = \sqrt{-1}$.

حل المعادلات التربيعية (الدرسان 2-5 و2-6)

- إكمال المربع: **الخطوة 1** جد نصف b، معامل x. **الخطوة 2** ربّع ناتج الخطوة 1. **الخطوة 3** أضف ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.
- القانون العام: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال التربيعية (الدرس 2-7)

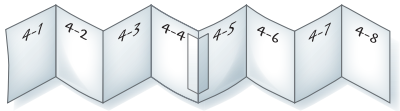
- التمثيل البياني لـ $y = (x - h)^2 + k$ هو التمثيل البياني لـ $y = x^2$ مزاحًا $|h|$ وحدات إلى اليسار إذا كانت قيمة h سالبة أو مُزاحًا h وحدات إلى اليمين إذا كانت قيمة h موجبة أو مُزاحًا k وحدات لأعلى إذا كانت قيمة k موجبة أو مزاحًا $|k|$ وحدات لأسفل إذا كانت قيمة k سالبة.
- فكّر في $y = a(x - h)^2 + k$ حيث $a \neq 0$ إذا كان $a > 0$. فسيكون التمثيل البياني مفتوحًا لأعلى؛ وإذا كان $a < 0$، فسيكون التمثيل البياني مفتوحًا لأسفل. إذا كان $|a| > 1$، فسيكون التمثيل البياني أضيق من التمثيل البياني لـ $y = x^2$ وإذا كان $|a| < 1$. فسيكون التمثيل البياني أوسع من التمثيل البياني لـ $y = x^2$

المتباينات التربيعية (الدرس 2-8)

- مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا واختبر نقطة *ليست* موجودة على القطع المكافئ وحدد ما إذا كانت حلًا وظلّل تبعًا لذلك.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في مطويتك.



المفردات الأساسية

محور التماثل	العدد التخيلي البحت
إكمال المربع	معادلة تربيعية
مرافقات مركبة	القانون العام
العدد المركب	الدالة التربيعية
الحد الثابت	المتباينة التربيعية
المميز	الحد التربيعي
الصيغة التحليلية	الجذر
طريقة التوزيع بالترتيب	خاصية الجذر التربيعي
الوحدة التخيلية	الصيغة القياسية
الحد الخطي	الرأس
القيمة العظمى	صيغة الرأس
القيمة الصغرى	صفر
القطع المكافئ	

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي *صوابًا* أم *خطأً*. إذا كانت *خطأً*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خطّ بحيث تصبح الجملة صحيحة.

1. الصيغة التحليلية للمعادلة التربيعية هي $ax^2 + bx + c = 0$. حيث $a \neq 0$ وa وb وc أعداد صحيحة.
2. يُطلق على التمثيل البياني للدالة التربيعية القطع المكافئ.
3. صيغة الرأس للدالة التربيعية هي $y = a(x - p)(x - q)$.
4. يتقاطع محور التماثل مع القطع المكافئ في نقطة واحدة تُسمى الرأس.
5. تُستخدم طريقة تُسمى التوزيع بالترتيب لجعل التعبير التربيعي مربعًا كاملًا لحل المعادلة المرتبطة.
6. تُعرف المعادلة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ باسم المميز.
7. يُسمى العدد $6i$ العدد التخيلي البحت.
8. يُسمى العددان $3i + 2$ و$3i - 2$ المرافقَين المركبَين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

2-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

أكمل الأجزاء a إلى c لكل دالة تربيعية.

a. جد مقطع y ومعادلة محور التماثل والإحداثي x للرأس.

b. أنشئ جدول القيم الذي يتضمن الرأس.

c. استخدم هذه المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا.

9. $f(x) = x^2 + 5x + 12$

10. $f(x) = x^2 - 7x + 15$

11. $f(x) = -2x^2 + 9x - 5$

12. $f(x) = -3x^2 + 12x - 1$

حدد ما إذا كان لكل دالة قيمة عظمى أم صغرى وجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى. ثم عيّن مجال الدالة ومداها.

13. $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

14. $f(x) = -3x^2 - 4x + 5$

15. **الأعمال** يبيع متجر سالم للقمصان 100 قميص أسبوعيًا بسعر AED 10 لكل قميص. ويقدر سالم أن المبيعات ستقل 5 قمصان لكل زيادة في السعر بمقدار AED 1. ما السعر الذي سيرفع دخل سالم من القمصان لأقصى حد؟

مثال 1

فكّر في الدالة التربيعية $f(x) = x^2 - 4x + 11$ جد مقطع y ومعادلة محور التماثل والإحداثي x للرأس.

في الدالة، $a = 1$ و $b = -4$ و $c = 11$ والمقطع y هو $c = 11$

استخدم كلًا من a و b لإيجاد معادلة محور التماثل.

$x = -\frac{b}{2a}$ معادلة محور التماثل

$= -\frac{-4}{2(1)}$ $a = 1$ و $b = -4$

$= 2$ بسّط

معادلة محور التماثل هي $x = 2$ ومن ثَم يكون الإحداثي x للرأس 2

2-2 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

حُـــلّ كل معادلة باستخدام التمثيل البياني. إذا تعذر إيجاد الجذور الدقيقة، فاذكر الأعداد الصحيحة المتتالية التي توجد بينها الجذور.

16. $x^2 - x - 20 = 0$

17. $2x^2 - x - 3 = 0$

18. $4x^2 - 6x - 15 = 0$

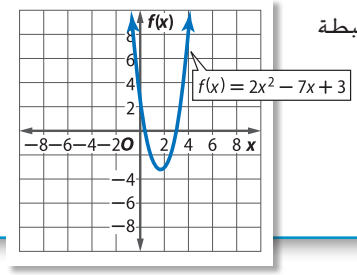
19. **الكرة** تُقذف كرة لأعلى بسرعة 120 ft/s. استخدم الصيغة $h(t) = v_0 t - 16t^2$. حيث $h(t)$ ارتفاع الجسم بالأقدام و v_0 السرعة المتجهة الابتدائية للجسم بالقدم في الثانية و t الزمن بالثواني. إذا تجاهلت ارتفاع الكرة عند قذفها، فما المدة التي تستغرقها الكرة لتصطدم بالأرض؟

مثال 2

حُلّ المعادلة: $2x^2 - 7x + 3 = 0$ باستخدام التمثيل البياني.

معادلة محور التماثل هي $-\frac{-7}{2(2)}$ أو $x = \frac{7}{4}$.

x	0	1	$\frac{7}{4}$	2	3
$f(x)$	3	−2	$-2\frac{5}{8}$	−3	0



صفرا الدالة المرتبطة هما $\frac{1}{2}$ و 3 ومن ثَم حلا المعادلة هما $\frac{1}{2}$ و 3

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

2-3 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية من الجذور المعطاة.

20. 5, 6

21. −3, −7

22. −4, 2

23. $-\frac{2}{3}$, 1

24. $\frac{1}{6}$, 5

25. $-\frac{1}{4}$, −1

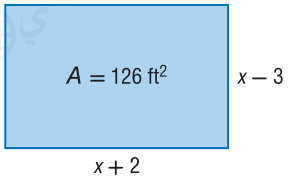
حُـــلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

26. $2x^2 - 2x - 24 = 0$

27. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

28. $3x^2 - 16x + 5 = 0$

29. جد قيمة x وأبعاد المستطيل أدناه.



مثال 3

اكتب معادلة تربيعية جذراها $-\frac{1}{2}$ و4 بالصيغة القياسية.

$(x - p)(x - q) = 0$	اكتب النمط
$\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right](x - 4) = 0$	عوّض عن p بـ $-\frac{1}{2}$ وعن q بـ 4
$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 4) = 0$	بسّط
$x^2 - \frac{7}{2}x - 2 = 0$	اضرب
$2x^2 - 7x - 4 = 0$	اضرب كل طرف في 2 بحيث يكون b وc عددين صحيحين

مثال 4

حُلّ المعادلة $2x^2 - 3x - 5 = 0$ بالتحليل إلى العوامل.

$2x^2 - 3x - 5 = 0$	المعادلة الأصلية
$(2x - 5)(x + 1) = 0$	حلل ثلاثية الحدود
$2x - 5 = 0$ أو $x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = \frac{5}{2}$ $\quad x = -1$	

مجموعة الحل هي $\left\{x \mid x = -1, \frac{5}{2}\right\}$ أو $\left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$.

2-4 الأعداد المركبة

حوّل إلى أبسط صورة.

30. $\sqrt{-8}$

31. $(2 - i) + (4 + 13i)$

32. $(2 + 6i) - (3 - 4i)$

33. $(5 + 6i)(2 - 3i)$

34. الكهرباء إذا كانت المعاوقة في أحد أجزاء دارة توالٍ $2j + 3$ أوم والمعاوقة في الجزء الآخر من الدارة $3j - 4$ أوم. فاجمع هذين العددين المركبين لإيجاد إجمالي المعاوقة في الدارة.

حُلّ كل معادلة من المعادلات التالية:

35. $2x^2 + 50 = 0$

36. $4x^2 + 16 = 0$

37. $3x^2 + 15 = 0$

38. $8x^2 + 16 = 0$

39. $4x^2 + 1 = 0$

مثال 5

بسّط. $(12 + 3i) - (-5 + 2i)$

$(12 + 3i) - (-5 + 2i)$	
$= [12 - (-5)] + (3 - 2)i$	جمّع الأجزاء الحقيقية والتخيلية
$= 17 + i$	بسّط

مثال 6

حُلّ المعادلة: $3x^2 + 12 = 0$

$3x^2 + 12 = 0$	المعادلة الأصلية
$3x^2 = -12$	اطرح 12 من كل طرف
$x^2 = -4$	اقسم كل طرف على 3
$x = \pm\sqrt{-4}$	خاصية الجذر التربيعي
$x = \pm 2i$	$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2-5 إكمال المربع

جد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مربعًا كاملًا. ثم اكتب ثلاثية الحدود كمربع كامل.

40. $x^2 + 18x + c$

41. $x^2 - 4x + c$

42. $x^2 - 7x + c$

43. $x^2 + 2.4x + c$

44. $x^2 - \frac{1}{2}x + c$

45. $x^2 + \frac{6}{5}x + c$

حُلّ كل معادلة بإكمال المربع.

46. $x^2 - 6x - 7 = 0$

47. $x^2 - 2x + 8 = 0$

48. $2x^2 + 4x - 3 = 0$

49. $2x^2 + 3x - 5 = 0$

50. مخطط الأرضية إذا طول غرفة المعيشة الخاصة بأحمد يزيد عن عرضها بمقدار 6 m، ومساحتها $280\ m^2$، فما أبعاد غرفة معيشته؟

مثال 7

جد قيمة c التي تجعل $x^2 + 14x + c$ مربعًا كاملًا. ثم اكتب ثلاثية الحدود كمربع كامل.

الخطوة 1 جد نصف 14

الخطوة 2 ربّع ناتج الخطوة 1.

الخطوة 3 أضف ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + 14x$.

يمكن كتابة ثلاثية الحدود $x^2 + 14x + 49$ في صورة $(x + 7)^2$.

مثال 8

حُلّ المعادلة $x^2 + 12x - 13 = 0$ بإكمال المربع.

$$x^2 + 12x - 13 = 0$$
$$x^2 + 12x = 13$$
$$x^2 + 12x + 36 = 13 + 36$$
$$(x + 6)^2 = 49$$
$$x + 6 = \pm 7$$
$$x + 6 = 7 \quad \text{أو} \quad x + 6 = -7$$
$$x = 1 \qquad x = -13$$

مجموعة الحل هي $\{-13, 1\}$ أو $\{x \mid x = -13, 1\}$

2-6 القانون العام والمميز

أكمل الأجزاء a إلى c لكل معادلة تربيعية.

a. جد قيمة المميز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

c. جد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

51. $x^2 - 10x + 25 = 0$

52. $x^2 + 4x - 32 = 0$

53. $2x^2 + 3x - 18 = 0$

54. $2x^2 + 19x - 33 = 0$

55. $x^2 - 2x + 9 = 0$

56. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

57. $2x^2 + 5x + 9 = 0$

58. العلوم الفيزيائية تُلقي لميس الكرة بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ 40 ft/s. ومعادلة ارتفاع الكرة هي $h = -16t^2 + 40t + 5$، حيث تمثل h الارتفاع بالأقدام وتمثل t الزمن بالثواني. متى سترتطم الكرة بالأرض؟

مثال 9

حُلّ المعادلة: $x^2 - 4x - 45 = 0$ باستخدام القانون العام.

في $x^2 - 4x - 45 = 0$، $a = 1$ و $b = -4$ و $c = -45$

القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$$
$$= \frac{4 \pm 14}{2}$$

اكتب على صورة معادلتين.

$$x = \frac{4 + 14}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{4 - 14}{2}$$
$$= 9 \qquad = -5$$

مجموعة الحل هي $\{-5, 9\}$ أو $\{x \mid x = -5, 9\}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2-7 تحويلات التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

اكتب كل دالة تربيعية بصيغة الرأس، إذا لم تكن بالفعل بهذه الصيغة. ثم حدد الرأس ومحور التماثل واتجاه الفتح. ثم مثّلها بيانيًا.

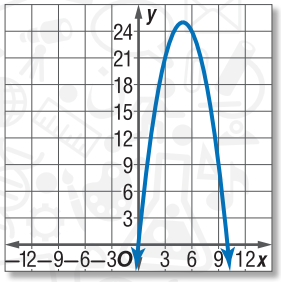
59. $y = -3(x - 1)^2 + 5$

60. $y = 2x^2 + 12x - 8$

61. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 12$

62. $y = 3x^2 + 36x + 25$

63. يوضح التمثيل البياني على اليمين ناتج ضرب عددين مجموعهما 10. جد دالة تمثل ناتج الضرب هذا واستخدمه لتحديد عددين يعطيان أقصى ناتج ضرب.



مثال 10

اكتب الدالة التربيعية $y = 3x^2 + 24x + 15$ بصيغة الرأس. ثم حدد الرأس ومحور التماثل واتجاه الفتح.

$y = 3x^2 + 24x + 15$	المعادلة الأصلية
$y = 3(x^2 + 8x) + 15$	قم بالتجميع والتحليل إلى العوامل
$y = 3(x^2 + 8x + 16) + 15 - 3(16)$	أكمل المربع
$y = 3(x + 4)^2 - 33$	أعد كتابة $x^2 + 8x + 16$ كمربع كامل

ومن ثَم، فإن $a = 3$ و $h = -4$ و $k = -33$ ونقع الرأس عند (-4, -33) ومحور التماثل هو x = -4 ونظرًا لأن قيمة a موجبة، فسيكون التمثيل البياني مفتوحًا لأعلى.

2-8 المتباينات التربيعية

مثّل كل متباينة تربيعية بيانيًا.

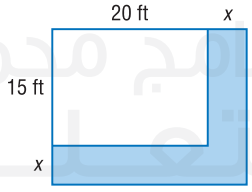
64. $y \geq x^2 + 5x + 4$

65. $y < -x^2 + 5x - 6$

66. $y > x^2 - 6x + 8$

67. $y \leq x^2 + 10x - 4$

68. يريد سليمان أن يضع لوحًا على طول جانبين من جوانب مطعمه. سيتماثل عرض اللوح في كلا الجانبين ولا يمكن أن يتجاوز إجمالي مساحة المطعم واللوح 500 m^2. ما عرض اللوح؟



حُلّ كل متباينة باستخدام التمثيل البياني أو جبريًا.

69. $x^2 + 8x + 12 > 0$

70. $6x + x^2 \geq -9$

71. $2x^2 + 3x - 20 > 0$

72. $4x^2 - 3 < -5x$

73. $3x^2 + 4 > 8x$

مثال 11

مثّل $y > x^2 + 3x + 2$ بيانيًا.

الخطوة 1 مثّل الدالة المرتبطة، $y > x^2 + 3x + 2$ ، بيانيًا. نظرًا لاستخدام رمز المتباينة >، يجب أن يكون القطع المكافئ متقطعًا.

الخطوة 2 اختبر نقطة ليست على التمثيل البياني للقطع المكافئ مثل (0, 0).

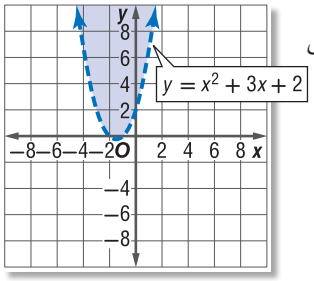
$y > x^2 + 3x + 2$

$(0) \overset{?}{>} (0)^2 + 3(0) + 2$

$0 \not> 2$

لذا لا تُعدّ (0, 0) حلًا للمتباينة.

الخطوة 3 ظلّل المنطقة التي لا تحتوي على النقطة (0, 0).



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار

أكمل الأجزاء a إلى c لكل دالة تربيعية.

a. جد المقطع y ومعادلة محور التماثل والإحداثي x للرأس.

b. أنشئ جدول القيم الذي يتضمن الرأس.

c. استخدم هذه المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا.

1. $f(x) = x^2 + 4x - 7$
2. $f(x) = -2x^2 + 5x$
3. $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

حدد ما إذا كان لكل دالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى. واذكر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لكل دالة.

4. $f(x) = x^2 + 10x + 25$
5. $f(x) = -x^2 + 6x$

حُل كل معادلة باستخدام الطريقة التي تختارها. وجد الحلول الدقيقة.

6. $x^2 - 8x - 9 = 0$
7. $-4.8x^2 + 1.6x + 24 = 0$
8. $12x^2 + 15x - 4 = 0$
9. $x^2 - 7x - \frac{17}{4} = 0$
10. $4x^2 + x = 3$
11. $-9x^2 + 40x + 84 = 0$

12. **العلوم الفيزيائية** يُلقي عبد العزيز الكرة من أعلى أحد المباني، وارتفاع المبنى 350 قدمًا والسرعة المتجهة الابتدائية للكرة 30 ft/s. جد المدة التي ستستغرقها الكرة للارتطام بالأرض وذلك بحل المعادلة $-16t^2 - 30t + 350 = 0$

13. **الاختيار من متعدد** أي المعادلات التالية جذراها -6 و $\frac{1}{5}$؟

A $0 = 5x^2 - 29x - 6$

B $0 = 5x^2 + 31x + 6$

C $0 = 5x^2 + 29x - 6$

D $0 = 5x^2 - 31x + 6$

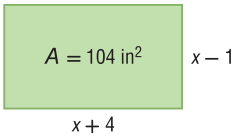
14. **الفيزياء** قُذفت كرة في الهواء رأسيًا بسرعة متجهة 112 ft/s. وتحررت الكرة على ارتفاع 6 ft عن الأرض. يتم تمثيل الارتفاع عن الأرض بعد t s من الإطلاق بالدالة $h(t) = -16t^2 + 112t + 6$.

a. متى ستصل الكرة إلى ارتفاع 130 ft؟

b. هل ستصل الكرة إلى ارتفاع 250 ft؟ اشرح ذلك.

c. خلال كم ثانية سترتطم الكرة بالأرض بعد تحريرها؟

15. تبلغ مساحة المستطيل أدناه $104\ \text{cm}^2$. جد قيمة x وأبعاد المستطيل.



حوّل إلى أبسط صورة.

16. $(3 - 4i) - (9 - 5i)$
17. $\frac{4i}{4 - i}$

18. **الاختيار من متعدد** ما قيمة c التي تجعل ثلاثية الحدود $x^2 - 12x + c$ مربعًا كاملًا؟

F 6

G 12

H 36

J 144

أكمل الأجزاء a إلى c لكل معادلة تربيعية.

a. جد قيمة المميز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

c. جد الحل الدقيق باستخدام القانون العام.

19. $6x^2 + 7x = 0$
20. $5x^2 = -6x + 1$
21. $2x^2 + 5x - 8 = -13$

اكتب كل دالة تربيعية بصيغة الرأس. ثم حدد الرأس ومحور التماثل واتجاه الفتح.

22. $3x^2 + 6x = 2 + y$
23. $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = y$
24. مثّل المتباينة التربيعية $0 < -3x^2 + 4x + 10$ بيانيًا.

حُل كل متباينة باستخدام التمثيل البياني أو جبريًا.

25. $x^2 + 6x > -5$
26. $4x^2 - 19x \leq -12$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام التمثيل البياني

يساعدك استخدام التمثيل البياني في حل أنواع مختلفة من المسائل في الاختبارات المعيارية. كما يمكن أن تساعدك التمثيلات البيانية في حل المعادلات وإيجاد قيم الدوال وتفسير حلول مسائل من الحياة اليومية.

استراتيجيات استخدام التمثيل البياني

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب مني حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- كيف يمكن أن يساعدني التمثيل البياني في حل المسألة؟

الخطوة 2

ارسم التمثيل البياني.

- ارسم التمثيل البياني على ورقة إن أمكن.
- يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني في إنشاء التمثيل البياني إذا كان مسموحًا بها.

الخطوة 3

حُل المسألة.

- استخدم التمثيل البياني لمساعدتك في نمذجة المسألة وحلها.
- تحقق لتتأكد من منطقية إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدام المعلومات الموجودة في المسألة لحلها.

يقوم الطلاب في حصة الفيزياء مع المعلم خالد ببناء نموذج لصاروخ. ويتم إطلاق الصاروخ في حقل كبير بسرعة ابتدائية لأعلى مقدارها 128 ft/s. وتمثل $h(t) = -16t^2 + 128t$ ارتفاع الصاروخ عن الأرض (بالأقدام) بعد t ثوانٍ من إطلاقه. ما المدة التي يستغرقها الصاروخ للوصول إلى أقصى ارتفاع؟

A 4 s

B 5 s

C 6 s

D 8 s

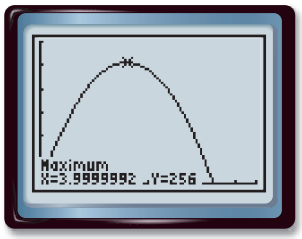
يسمح لك التمثيل البياني للدالة التربيعية بتحديد أقصى ارتفاع للصاروخ ووقت الوصول إليه. ويمكن أن تساعدك حاسبة التمثيل البياني في تمثيل الدالة بيانيًا وتحليلها بسرعة.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= (–) 16 X,T,θ,n x^2 + 128 X,T,θ,n GRAPH

بعد تمثيل المعادلة بيانيًا، استخدم خاصية **maximum** في قائمة **CALC**.

اضغط على 4 [**CALC**] 2nd. ثم استخدم ◀ لوضع المؤشر على يسار أقصى نقطة واضغط على ENTER. استخدم ▶ لوضع المؤشر على يمين أقصى نقطة واضغط على ENTER ENTER.

يوضح التمثيل البياني أن الصاروخ يستغرق 4 ثوانٍ للوصول إلى أقصى ارتفاع له وهو 256 مترًا. الإجابة الصحيحة هي A.



[0, 10] scl: 1 by [0, 300] scl: 50

التمارين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدام المعلومات الموجودة في المسألة لحلها.

1. ما جذور المعادلة $y = 2x^2 + 10x - 48$؟

A $-5, 4$

B $-6, 1$

C $-8, 3$

D $2, 3$

2. ما عدد مرات تقاطع التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ مع المحور x؟

F 0 **H** 2

G 1 **J** 3

3. ما العبارة التي تمثل أفضل وصف للتمثيلات البيانية للمعادلتين التاليتين؟

$$16x - 2y = 24$$
$$12x = 3y - 36$$

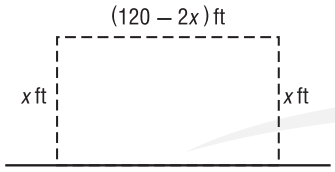
A المستقيمان متوازيان.

B المستقيمان واحد.

C يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة فقط.

D يتقاطع المستقيمان في أكثر من نقطة، لكنهما ليسا واحدًا.

4. يستخدم أحمد 120 مترًا من السياج لإحاطة منطقة مستطيلة للخيول. وسيكون أحد جوانب المنطقة المحاطة اسطبلًا.



منزل

تمثل الدالة $f(x) = x(120 - 2x)$ مساحة المنطقة المحاطة بالسياج. ما أقصى مساحة يستطيع أحمد إحاطتها بالسياج؟

F 1650 m^2 **H** 1980 m^2

G 1800 m^2 **J** 2140 m^2

5. في أي معادلة مما يلي، يكون إحداثي x للرأس عند 4؟

A $f(x) = x^2 - 8x + 15$ **C** $f(x) = x^2 + 6x + 8$

B $f(x) = -x^2 - 4x + 12$ **D** $f(x) = -x^2 - 2x + 2$

6. عند أي قيمة لـ x تصل $f(x) = x^2 + 5x + 6$ إلى قيمتها الصغرى؟

F -5 **H** $-\frac{5}{2}$

G -3 **J** -2

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

الوحدة 2
تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي، الوحدات من 1 إلى 2

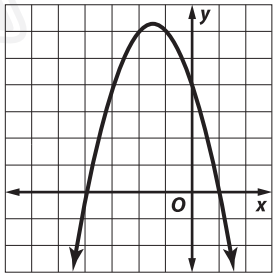
الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. يحدد متجر تأجير مبلغ AED 32 في اليوم لتأجير الدراجة. ووفقًا لهذا السعر، يؤجر المتجر حوالي 200 دراجة شهريًا. ويقدر مالك المتجر أن عدد الدراجات التي يؤجرها في الشهر سيقل بمقدار 5 دراجات مع كل زيادة قدرها AED 2 في سعر التأجير. فما السعر الذي سيحقق أعلى إيراد للمتجر؟

A AED 46
C AED 55
B AED 51
D AED 56

2. ما حلّا المعادلة التربيعية الممثلة بيانيًا أدناه؟



F $-4, -1$
H $-1, 4$
G $1, 4$
J $-4, 1$

3. تعمل آمنة مربية أطفال. وتتقاضى AED 10 على الأقل مقابل الذهاب للمنزل و AED 10.50 في الساعة. ما المتباينة التي تمثل العلاقة بين عدد ساعات العمل n والمبلغ الإجمالي c بأفضل صورة؟

A $c \geq 10 + 10.50n$
B $c \geq 10.50 + 10n$
C $c \leq 10.50 + 10$
D $c \leq 10n + 10.50n$

4. يبيع عبيد قمصانًا في أحد أماكن السباحة المحلية. ويكلفه إعداد طاولة العرض وتأجير الماكينة AED 250. كما تكلفه صناعة كل قميص AED 5 إضافية. فإذا كان يبيع القميص مقابل AED 15. فكم عدد القمصان الذي يلزمه بيعها قبل أن يبدأ في جني أرباح؟

F 10
H 25
G 15
J 50

5. حل المعادلة $x^2 + 2x + 15 = 0$ بإكمال المربع.

A $-4, -1$
C $-2, 3$
B $-3, 5$
D $5, 7$

6. أُزيح التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x + 2$ للأسفل 5 وحدات ليشكّل التمثيل البياني للدالة $h(x)$ فأي مما يلي يمكن أن يكون $h(x)$؟

F $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x + 7$
G $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x - 3$
H $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 9x + 2$
J $h(x) = \frac{2}{5}x^2 + x + 2$

7. أي من النقاط التالية لا يمثل الرأس بالنسبة إلى منطقة الحل الممكنة لنظام المتباينات الخطية أدناه؟

$$x \geq 0, y \geq 0$$
$$y \leq 2-x + 6$$

A $(0, 0)$
B $(0, 3)$
C $(0, 6)$
D $(3, 0)$

8. يمكن استخدام الدالة $P(t) = -0.068t^2 + 7.85t + 56$ لتقدير عدد السكان بالآلاف لمدينة ما بين عامي 1960 و2000. يتمثل المجال t للدالة في عدد الأعوام التي تلت 1960. وفقًا للنموذج، في أي عام بلغ عدد سكان المدينة 200,000 نسمة؟

F 1974
H 1981
G 1977
J 1983

نصيحة عند حل الاختبار

سؤال 1 اضرب تعبيرات السعر الجديد في عدد العملاء الجدد بعد عدد x من الزيادات في السعر لكتابة المعادلة التربيعية.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

إجابة مختصرة/إجابة شبكية

دوّن إجابتك في ورقة الإجابات التي زوّدك بها المعلّم أو أي ورقة عادية.

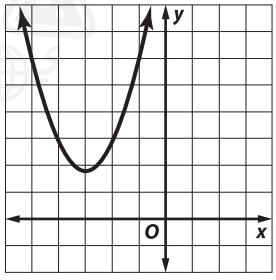
9. إجابة شبكية ما الإحداثي y في حل نظام المعادلات أدناه؟

$$y = 4x - 7$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

10. إجابة شبكية حوّل $-2i \times 5i$ إلى أبسط صورة.

11. استخدم الدالة التربيعية أدناه للإجابة عن كل سؤال.



a. كم عدد الجذور الحقيقية للدالة التربيعية؟

b. كم عدد الجذور المركبة للدالة؟

c. ماذا تعرف عن مميز المعادلة التربيعية؟ اشرح ذلك.

12. إذا كان أحد جذور المعادلة $x^2 + kx - 12 = 0$ هو 4، فما قيمة k؟

13. صف مقدار إزاحة التمثيل البياني للدالة $y = (x + 5)^2 - 1$ إلى التمثيل البياني للدالة $y = (x - 1)^2 + 3$

إجابة موسعة

سجّل إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

14. في المعادلة التربيعية $y = ax^2 + bx + c$، صف ما تستنتجه من خلال المميز $b^2 - 4ac$ حول جذور المعادلة.

15. يتحقق زايد من وصول شحنة مكوّنة من طابعات نفث الحبر تكلفة كل منها AED 200 وطابعات ليزر تكلفة كل منها AED 500. وتحتوي الشحنة على 40 صندوقًا ويبلغ إجمالي الفاتورة AED 11,600.

a. اكتب نظام معادلات يمثل الحالة. افترض أن x يمثل عدد طابعات نفث الحبر و y يمثل عدد طابعات الليزر.

b. اكتب معادلة مصفوفة يمكن استخدامها لحل نظام المعادلات الذي كتبته في الجزء **a**.

c. جد معكوس مصفوفة المعاملات وحل معادلة المصفوفة. كم عدد كل من طابعات نفث الحبر وطابعات الليزر في الشحنة؟

16. إذا ركل رشيد كرة قدم لأعلى مباشرة في الهواء بسرعة ابتدائية 100 متر في الثانية، وكانت الدالة $h(t) = -16t^2 + 100t$ تحدد ارتفاع الكرة بالأمتار بعد t من الثواني.

a. مثل الدالة التربيعية بيانيًا على شبكة إحداثيات.

b. ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ قرّب إلى أقرب متر.

c. ما المدة التي تستغرقها الكرة في الهواء قبل أن تصل إلى الأرض؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

هل تحتاج إلى مساعدة؟

إذا أخطأت في السؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
فانتقل إلى الدرس...	2-1	2-2	2-4	1-3	2-5	2-7	3-3	2-6	3-1	2-4	2-2	2-2	2-7	2-6	3-8	2-1