12-0 مقاييس المركز والتغير والموقع

الهدف

- إيجاد مقاييس النزعة المركزية والتغير والموقع.

المتغير هو سمة مجموعة من الأفراد أو الأشياء التي يمكن أن تحمل قيمًا مختلفة تُسمى **البيانات**. وتُعرف البيانات التي لها وحدات ويمكن قياسها باسم **القياس** أو **بيانات كمية**. أما البيانات التي يمكن تصنيفها إلى فئات مختلفة فتُعرف باسم **بيانات فئوية** أو **نوعية**. بعض الأمثلة على كلا نوعي البيانات موضح أدناه.

البيانات الكميّة	البيانات النوعية
المدد الزمنية: 15 s, 20 s, 45 s, 19 s	**اللون المفضل:** أزرق، أحمر، قرمزي، أخضر
الأعمار: 10 yr, 15 yr, 14 yr, 16 yr	**لون الشعر:** أسود، أشقر، بني
المسافة: 5 mi, 30 mi, 18 mi	**أرقام الهاتف:** 555-1234, 555-5678

البيانات الكميّة في أحد المتغيرات تُسمى **بيانات أحادية المتغير** وغالبًا ما يتم تلخيصها باستخدام عدد منفرد ليمثل المتوسط أو المعتاد. قياسات المتوسط تُسمى أيضًا **مقياس المركز** أو **النزعة المركزية**. ومقاييس المركز الأكثر شيوعًا هي المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

مفهوم أساسي مقاييس النزعة المركزية

- **المتوسط الحسابي** هو مجموع القيم في مجموعة بيانات مقسومًا على إجمالي عدد القيم فيها.
- **الوسيط** القيمة الوسطى أو متوسط اثنتين من القيم الوسطى في مجموعة بيانات عند ترتيب البيانات ترتيبًا عدديًا.
- **المنوال** هو القيمة أو القيم الأكثر تكرارًا في مجموعة من البيانات. يمكن ألا يكون هناك منوالٌ لمجموعة البيانات وقد يكون هناك منوالٌ واحدٌ أو أكثر من منوال.

مثال 1 مقاييس المركز

كرة البيسبول يعرض الجدول عدد الضربات التي حققها مازن لفريقه. أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

فريق المباراة	الضربات
بادجرز	3
هورنيتس	6
بولدوغز	5
فايكينغز	2
رينجرز	3
بانثرز	7

المتوسط الحسابي: لإيجاد المتوسط الحسابي، أوجد مجموع كل الضربات واقسم على عدد المباريات التي حقق فيها هذه الضربات.

المتوسط الحسابي

$$= \frac{3+6+5+2+3+7}{6} = \frac{26}{6}$$

= حوالي 4 ضربات

الوسيط: لإيجاد الوسيط، قم بترتيب الأعداد من الأصغر إلى الأكبر وأوجد القيمة أو القيم المتوسطة.

2, 3, 3, 5, 6, 7

$\frac{5+3}{2}$ أو 4 ضربات

بما أن هناك عددًا زوجيًا من القيم، أوجد المتوسط الحسابي للعددين الموجودين في الوسط.

المنوال: من ترتيب قيم البيانات، يمكننا رؤية أن القيمة الأكثر تكرارًا في المجموعة هي 3، ولذلك فمنوال مجموعة البيانات هو 3 ضربات.

كان المتوسط الحسابي والوسيط لعدد ضربات مازن في هذه المباريات هو 4 وكان منواله 3 ضربات.

مفردات جديدة

المتغير (variable)
البيانات (data)
بيانات القياس أو البيانات الكميّة (measurement or quantitative data)
البيانات الفئوية أو النوعية
البيانات أحادية المتغير (univariate data)
مقاييس المركز أو النزعة المركزية (measures of center orcentral tendency)
المتوسط الحسابي (mean)
الوسيط (median)
المنوال (mode)
مقاييس الانتشار أو التغير (measures of spread or variation)
المدى (range)
الربع (range)
مقاييس الموقع (measures of position)
الربع الأدنى (lower quartile)
الربع الأعلى (upper quartile)
ملخص الخمسة أرقام (five-number summary)
المدى الأرباعي (interquartile range)
القيمة المتطرفة (outlier)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن أن يكون لمجموعتين مختلفتين للغاية من البيانات المتوسط الحسابي نفسه، ولذلك تستخدم الإحصاءات أيضًا **مقاييس الانتشار** أو **التغير** لوصف مدى تغير قيم البيانات. من بين هذه المقاييس **المدى**، وهو الفارق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.

مثال 2 المدى

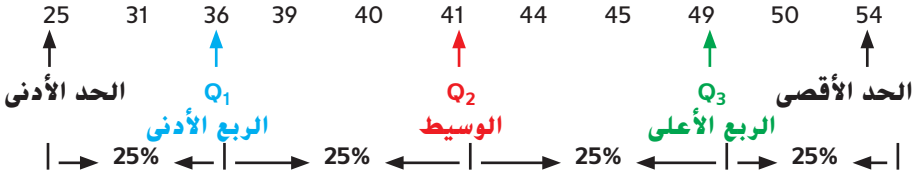
السير المدد التي استغرقتها أسماء بالدقائق للسير إلى المدرسة كل يوم في هذا الأسبوع هي 18 و15 و15 و12 و14. أوجد المدى.

تعريف المدى: المدى = أكبر قيمة − أقل قيمة

أكبر قيمة هي 18 وأقل قيمة هي 12. $= 18 - 12 = 6$

مدى المدد هو 6 دقائق.

غالبًا ما يتحدث الإحصائيون عن موقع قيمة بالنسبة إلى قيم أخرى في مجموعة. **الأرباع** هي **مقاييس موقع** مشتركة تقسم مجموعة البيانات المرتبة تصاعديًا إلى أربع مجموعات تحتوي كل منها على ربع البيانات أو 25% منها تقريبًا. يشير الوسيط إلى الربع الثاني Q_2، ويقسم البيانات إلى نصفين علوي وسفلي. الربع الأول أو **الربع الأدنى** Q_1 هو وسيط النصف السفلي بينما الربع الثالث أو **الربع الأعلى** Q_3 هو وسيط النصف العلوي.



الأرباع الثلاثة إلى جانب قيمتي الحد الأدنى والحد الأقصى تُسمى **ملخص الأعداد الخمسة** لمجموعة البيانات.

نصيحة دراسية

حساب الأرباع عندما يكون عدد القيم في مجموعة بيانات فرديًا، لا يتم تضمين الوسيط في أي من نصفي البيانات عند حساب Q_1 أو Q_3.

مثال 3 ملخص الأعداد الخمسة

جمع التبرعات عدد صناديق الحلوى التي باعها أسامة لجمع التبرعات كل يوم في آخر 11 يومًا كانت 22 و16 و35 و26 و14 و17 و28 و29 و21 و17 و20. أوجد الحد الأدنى والربع الأدنى والوسيط والربع الأعلى والحد الأقصى لمجموعة البيانات. ثم فسّر هذا الملخص المعني بالأعداد الخمسة.

رتّب البيانات من الأصغر إلى الأكبر. استخدم القائمة لتحديد الأرباع.

14, 16, 17, 17, 20, 21, 22, 26, 28, 29, 35

الحد الأدنى Q_1 Q_2 Q_3 الحد الأقصى

الحد الأدنى 14 والربع الأدنى 17 والوسيط 21 والربع الأعلى 28 والحد الأقصى 35. على مدار 11 يومًا، باع أسامة 14 صندوقًا بحد أدنى و35 صندوقًا بحد أقصى. باع أقل من 17 صندوقًا في 25% من الوقت وأقل من 21 صندوقًا في 50% من الوقت وأقل من 28 صندوقًا في 75% من الوقت.

الفارق بين الربعين الأعلى والأدنى يُسمى **المدى الأرباعي**. يحتوي المدى الأرباعي أو IQR على 50% تقريبًا من القيم.

14, 16, 17, 17, 20, 21, 22, 26, 28, 29, 35

Q_1 Q_3

$IQR = Q_1 - Q_3 = 11$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قبل تحديد مقياس المركز الذي يصف مجموعة بيانات بالشكل الأمثل، تحقق من القيم المتطرفة. **القيمة المتطرفة** هي قيمة شديدة الارتفاع أو شديدة الانخفاض عند مقارنتها ببقية القيم في المجموعة. للتحقق من القيم المتطرفة، ابحث عن قيم البيانات التي تقع بعد الربعين الأعلى أو الأدنى بأكثر من 1.5 ضعف المدى الأرباعي.

مثال 2 أثر القيم المتطرفة

درجات الاختبار تلقى الطلاب الذين خاضوا اختبارًا في التزيين الدرجات التالية: 88 و79 و94 و90 و45 و71 و82 و88.

a. حدد أي قيم متطرفة في البيانات.

حدد أولاً الوسيط والربعين الأعلى والأدنى في البيانات.

45, 71, 79, 82, 88, 88, 90, 94

$Q_1 = \frac{71 + 79}{2} = 75$ $Q_2 = \frac{82 + 88}{2} = 85$ $Q_3 = \frac{88 + 90}{2} = 89$

أوجد المدى الأرباعي.

$IQR = Q_3 - Q_1 = 89 - 75 = 14$

استخدم المدى الأرباعي لإيجاد القيم التي قد تقع وراءها أي قيم متطرفة.

القيم التي تقع وراءها القيم المتطرفة	$Q_3 + 1.5(IQR)$	و	$Q_1 - 1.5(IQR)$
$Q_1 = 75, Q_3 = 89, QR = 14$	$89 + 1.5(14)$		$75 - 1.5(14)$
حوّل لأبسط صورة.	110		54

لا توجد درجات أكبر من 110، لكن هناك درجة واحدة أقل من 54. يمكن اعتبار درجة 45 قيمة متطرفة لمجموعة البيانات هذه.

b. أوجد المتوسط الحسابي والوسيط لمجموعة البيانات مع القيمة المتطرفة أو بدونها. صف ما يحدث.

مجموعة البيانات	المتوسط الحسابي	الوسيط
مع القيمة المتطرفة	حوالي $79.6 = \frac{88 + 79 + 94 + 90 + 45 + 71 + 82 + 88}{8}$	85
بدون القيمة المتطرفة	حوالي $84.6 = \frac{88 + 79 + 94 + 90 + 71 + 82 + 88}{7}$	88

تؤدي إزالة القيمة المتطرفة إلى زيادة المتوسط الحسابي والوسيط، لكن لاحظ أن المتوسط الحسابي يتأثر بإزالة القيمة المتطرفة أكثر من الوسيط.

نصيحة دراسية

المدى الأرباعي عندما يكون المدى الأرباعي قيمة صغيرة، تكون البيانات في المجموعة متقاربة. فيعني الأرباعي الكبير فيعني أن البيانات منتشرة.

تمرينات

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى لكل مجموعة بيانات.

1. عدد الطلاب الذين يساعدون في كشك البسكويت كل ساعة: 3، 5، 8، 1، 4، 13، 11
2. وزن الصناديق التي تم تحميلها على الشاحنة الصغيرة بالرطل: 102، 102، 002، 991، 991
3. سرعات السيارات بالميل في الساعة حسب مراقبة ضابط دورية الطريق السريع: 06، 35، 35، 25، 35، 55، 55، 75 **54.75 mph; 54 mph; 53 mph; 8 mph**
4. عدد الأغاني التي قام الطلاب بتحميلها الأسبوع الماضي في فصل الأستاذة داليا: 3، 7، 12، 32، 36، 72، 92، 59، 32 **≈32 أغنية؛ 23 أغنية؛ 23 أغنية؛ 92 أغنية**
5. تقييمات أحد مقاطع الفيديو عبر الإنترنت: 2، 5، 5.3، 4، 5.4، 1، 1، 4، 2، 5.1، 5.2، 2، 3، 5.3 **≈2.8; 2.75, 2; 4**

1. **5 طلاب؛ 4 طلاب؛ 3 طلاب؛ 10 طلاب**
2. **200 lb; 200 lb; 201 lb and.2**
   199 lb; 2 lb

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

6. الأدوات المدرسية يعرض الجدول تكلفة الأدوات المدرسية. أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى للتكاليف. **4.75 AED ؛2.00 AED ؛2.25 AED ؛2.50 AED**

تكلفة الأدوات المدرسية	
الإمداد	التكلفة
أقلام رصاص	0.50 AED
الأقلام	2 AED
ورق	2 AED
مجلد جيب	1.25 AED
الآلة الحاسبة	5.25 AED
دفتر	3.00 AED
محايات	2.50 AED
أقلام تحديد	3.50 AED

7. لعبة البولينج يبلغ متوسط نقاط آمنة في 9 مباريات بولينج 108 نقطة. فما أقل درجة يمكن أن تحققها في المباراة العاشرة لتحصل على متوسط 110؟ **128**

8. تنظيف الملابس تم اختبار علامتين تجاريتين من منظفات الملابس لتحديد عدد مرات غسل قميص قبل أن يبهت لونه. فيما يلي نتائج 6 قمصان بعد عدد من مرات الغسيل.

الإشارة التجارية A: 16، 15، 13، 14، 16، 16

الإشارة التجارية B: 11، 16، 18، 12، 15، 18

a. أوجد المتوسط والمدى لكل إشارة تجارية. **a–b. انظر الهامش.**

b. ما الإشارة التجارية التي كان أداؤها أكثر ثباتًا؟ اشرح.

أوجد قيم الحد الأدنى والربع الأدنى والوسيط والربع الأعلى والحد الأقصى لكل مجموعة بيانات. 10–11. انظر الهامش.

9. أسعار الهواتف الذكية بالدرهم الإماراتي: 311، 309، 312، 314، 399، 312 **309 AED؛ 311 AED؛ 312 AED؛ 314 AED؛ 399 AED**

10. حضور إحدى الفعاليات في آخر تسع أعوام. 68، 99، 73، 65، 67، 62، 80، 81، 83

11. الكتب التي يستعيرها طالب من المكتبة: 17، 9، 10، 17، 18، 5، 2

12. أونصات الصودا الموزعة على أكواب بسعة 36 أونصة:
35.6، 36.4، 35.9، 35.8، 35.7، 36.2، 36.0، 36.5، 35.2، 35.8، 1.36 **35.2 oz; 35.7 oz; 35.9 oz; 36.2 oz; 36.5 oz**

13. أعمار سائقي قطار الملاهي: **16 عامًا؛ 19 عامًا؛ 21 عامًا؛ 24 عامًا؛ 45 عامًا**
45، 17، 16، 22، 25، 19، 20، 21، 32، 37، 19، 21، 24، 20، 18، 22، 23، 19

14. التغذية يوضح الجدول عدد حصص الفاكهة والخضروات التي يأكلها جاسم في أسبوع. أوجد الحد الأدنى والوسيط والربع الأدنى والربع الأعلى وأقصى عدد من الوجبات. ثم فسّر هذا الملخص المعني بالأعداد الخمسة. **انظر الهامش.**

الفواكه والخضروات	
اليوم	عدد الأطباق
الاثنين	5
الثلاثاء	7
الأربعاء	5
الخميس	4
الجمعة	3
السبت	3
الأحد	8

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط لمجموعة البيانات ثم حدد أي قيم متطرفة. إذا كانت المجموعة تضم قيمة متطرفة، فأوجد المتوسط الحسابي والوسيط بدون القيمة المتطرفة واذكر القياس الأكثر تأثرًا بإزالة هذه القيمة. 15–16. انظر الهامش.

15. المسافة المقطوعة بالأميال لزيارة الأقارب أثناء عطلة الصيف:
210، 45، 10، 108، 452، 225، 35، 95، 140، 25، 65، 250

16. الوقت المنقضي على مواقع التواصل الاجتماعي بالدقائق في اليوم:
25، 35، 45، 30، 65، 50، 25، 100، 45، 35، 5، 105، 110، 190، 40، 30، 80

17. متوسطات ضرب الكرة في آخر 10 مواسم: 0.267، 0.305، 0.304، 0.201، 0.284، 0.302، 0.311، 0.289، 0.300، 0.292 **المتوسط ≈ 0.295، 0.300؛ 0.286، 0.296، 0.201**

18. مسألة تحفيزية تكلفة 8 بنطلونات مختلفة في متجر هي 39.99 AED و31.99 AED و19.99 AED و14.99 AED و19.99 AED و23.99 AED و36.99 AED و26.99 AED.

a. أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى لأسعار البنطلونات. **≈ 26.87 AED؛ 25.49 AED؛ 19.99 AED؛ 25 AED**

b. افترض أن كل بنطلون يحتاج إلى عمل حاشية بتكلفة إضافية تبلغ 8 AED لكل بنطلون. بعد إدراج تكاليف التعديل هذه، ما هو المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى لأسعار البنطلونات؟ **≈ 34.87 AED; 33.49 AED; 27.99 AED; 25 AED**

c. افترض أن السعر الأصلي لكل بنطال عليه خصم بنسبة 25%. أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى لأسعار البنطلونات المخفضة. **ج–د. انظر الهامش.**

d. ضع فرضية بخصوص التأثير على المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى لمجموعة البيانات إذا تمت إضافة القيمة نفسها n لكل قيمة في مجموعة البيانات. ما التأثير على هذه المقاييس نفسها إذا تم ضرب كل عنصر في مجموعة بيانات في قيمة n نفسها؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education