الإمارات
THE EMIRATES

Alpha
Education Center

اوراق عمل

الحل

الحل

مادة

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الأول

2022/2021

اسم الطالب : ....

الحل

المدرســـــة : ....

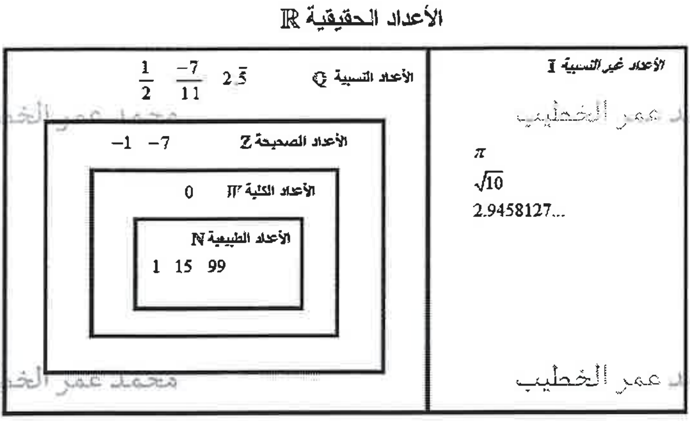
مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

Khateebacademy.com

الوحدة الأولى : تمهيدات // الدرس الأول : كثيرات الحدود والدوال النسبية

الأعداد الحقيقية



* اي عدد عشري غير دوري و غير منتهي فهو عدد غير نسبي والباقي نسبي *

وصف المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية $R=(-\infty,\infty)$

اذا كانت a,b إعداد حقيقية حيث $a<b$ فان:

التمثيل البياني على خط الأعداد	الفترة	المتباينة	رمز بناء المجموعة	
	(a,b)	$a<x<b$	$\{x \mid a<x<b, x\in R\}$	1
	$[a,b]$	$a\le x\le b$	$\{x \mid a\le x\le b, x\in R\}$	2
	$(a,b]$	$a<x\le b$	$\{x \mid a<x\le b, x\in R\}$	3
	$[a,b)$	$a\le x<b$	$\{x \mid a\le x<b, x\in R\}$	4
	(a,∞)	$a<x$	$\{x \mid a<x, x\in R\}$	5
	$[a,\infty)$	$a\le x$	$\{x \mid a\le x, x\in R\}$	6
	$(-\infty,b)$	$x<b$	$\{x \mid x<b, x\in R\}$	7
	$(-\infty,b]$	$x\le b$	$\{x \mid x\le b, x\in R\}$	8
	$(-\infty,\infty)$	$-\infty<x<\infty$	$\{x \mid -\infty<x<\infty, x\in R\}$	9

محمد عمر الخطيب

اكمل الجدول التالي .

التمثيل البياني على خط الأعداد	الفترة	المتباينة	رمز بناء المجموعة	
	$(-1, 1)$	$-1 < x < 1$	$\{x \mid -1 < x < 1, x \in R\}$	1
	$[-2, 5)$	$-2 \le x < 5$	$\{x \mid -2 \le x < 5, x \in R\}$	2
	$[3, \infty)$	$3 \le x$	$\{x \mid 3 \le x , x \in R\}$	3
	$(-\infty, -1)$ و $[2, \infty)$	$x < -1$ أو $x \ge 2$	$\{x \mid x < -1 \; or \; 2 \le x , x \in R\}$	4

$x < -1 , x \ge 2$ $\quad$ $(-\infty, -1)$ و $[2, \infty)$

المتباينات:

المتباينات الخطية

حل المتباينات التالية:

(1) $2x - 4 \le 5x + 8$

$2x - 5x \le 8 + 4$

$-3x \le 12$

$x \ge -4 \implies [-4, \infty)$

---

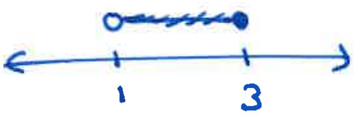
(2) $-2 < 2x - 4 \le 2$

$-2 + 4 < 2x \le 2 + 4$

$2 < 2x \le 6$

$1 < x \le 3$

$(1, 3]$



---

(3) $5 \le 2 - 3x \le 11$

$5 - 2 \le -3x \le 11 - 2$

$3 \le -3x \le 9$

$-1 \ge x \ge -3$

اعادة ترتيب $-3 \le x \le -1 \implies [-3, -1]$

محمد عمر الخطيب

المتباينات غير الخطية

عند حل المتباينات غير الخطية يجب ان يكون الطرف الأيمن صفر ويتم دراسة اشارة الطرف الايسر

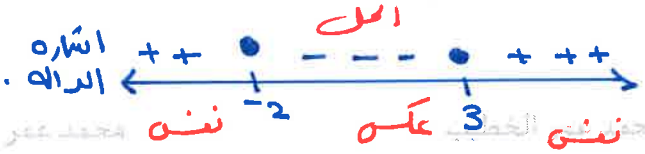
حل المتباينات التالية:

الدالة .

(1) $x^2 - x - 6 \le 0$

$(x-3)(x+2) \le 0$

الاصفار هي $3 , -2$



الحل ⬅ $[-2 , 3]$

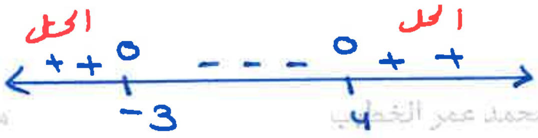
---

(2) $x^2 > x + 12$

$x^2 - x - 12 > 0$

$(x-4)(x+3) > 0$

الاصفار هي $4 , -3$



الحل $(-\infty , -3) \overset{\cup}{و} (4 , \infty)$

---

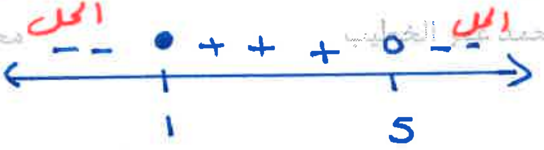
(3) $\frac{x-1}{5-x} \le 0$

* دائماً "اصفار المقام دائرة مفتوحة .

اصفار البسط 1

اصفار المقام 5

ندرس اشارة الدالة على الخط



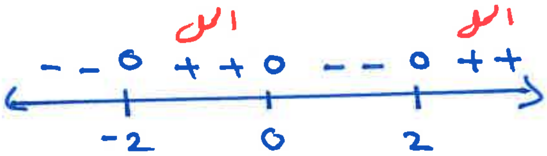
الحل $(-\infty , 1]$ و $(5 , \infty)$

---

(4) $\frac{x^2 - 4}{x} > 0$

$\frac{(x-2)(x+2)}{x} > 0$

اصفار البسط $2 , -2$ ، المقام 0



الحل $(0 , 2)$ و $(2 , \infty)$

---

(5) $\frac{x-1}{x+1} \ge 1$

$\frac{x-1}{x+1} - 1 \ge 0$

$\frac{x-1-(x+1)}{x+1} \ge 0$

$\frac{-2}{x+1} \ge 0$

اصفار البسط لا يوجد

اصفار المقام -1

الحل $(-\infty , -1)$

محمد عمر الخطيب

متباينات القيمة المطلقة

حل المتباينات التالية:

تذكر ان

اذا كان $a > 0$ فان

(1) $|x| = a \Leftrightarrow x = a, x = -a$

(2) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

(3) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a, x \ge a$

(4) $|a \times b| = |a| \times |b|$

(5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(6) $|a - x| = |x - a|$

(1) $|5 - 3x| = 4$

$5 - 3x = 4$, $5 - 3x = -4$

$-3x = -1$, $-3x = -9$

$x = \frac{1}{3}$, $x = 3$

---

(2) $|2x - 6| \le 8$

$-8 \le 2x - 6 \le 8$

$-2 \le 2x \le 14$

$-1 \le x \le 7$

$[-1, 7]$ الحل

---

(3) $\left|\frac{8}{x-1}\right| \le 4$

$\frac{|8|}{|x-1|} \le 4$ توزيع المطلق

$\frac{8}{|x-1|} \le 4$

$8 \le 4|x-1|$

$2 \le |x-1|$

$|x-1| \ge 2$

$x - 1 \ge 2$, $x - 1 \le -2$

$x \ge 3$, $x \le -1$

$(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$

---

(4) $|x|^2 - 4|x| - 12 = 0$

$y = |x|$ نكرر تعويض

$y^2 - 4y - 12 = 0$

$(y - 6)(y + 2) = 0$

$y = 6$, $y = -2$

$y = 6 \Rightarrow |x| = 6 \Rightarrow x = 6, -6$

$y = -2 \Rightarrow |x| = -2 \Rightarrow$ لا يوجد حل.

$x = 6, -6$ الحل هو

محمد عمر الخطيب

المسافة والميل ومعادلة الخط المستقيم

$x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2$

لتكن $P_1(-1,3), P_2(2,7)$

(1) اوجد المسافة بين النقطتين P_1, P_2

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(2 - -1)^2 + (7-3)^2} = 5 .$$

---

(2) اوجد احداثي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1 P_2}$

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+2}{2} , \frac{3+7}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} , 5 \right).$$

---

(3) اوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين P_1, P_2

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{7-3}{2 - -1}$$

$$= \frac{4}{3} .$$

---

(4) اوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين P_1, P_2

$m = \frac{4}{3}$ ، $P_1 (\overset{x_1}{-1}, \overset{y_1}{3})$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

الميل من المطلوب السابق .

و يمكنك اختيار اي نقطة .

$$y - 3 = \frac{4}{3}(x - -1)$$

$$y - 3 = \frac{4}{3}(x+1)$$

$$y - 3 = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}.$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{13}{3} \xrightarrow{\text{وممكن}} 4x - 3y + 13 = 0$$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-1,3)$ ويوازي المستقيم الذي معادلته $2x+y+5=0$

يكون المستقيمان $\overline{L_1},\overline{L_2}$ متوازيان $\longleftrightarrow$ $m_1=m_2$

يكون المستقيمان $\overline{L_1},\overline{L_2}$ متعامدان $\longleftrightarrow$ $m_1=\frac{-1}{m_2}$

المستقيم المعطى $2x+y+5=0$

$y=-2x-5$.

ميله = معامل x

معطى $m_g=-2$

مطلوب $m_{//}=-2$ ، النقطة $(-1,3)$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-3=-2(x=1)$

$y-3=-2x-2$

$y=-2x+1$.

---

(2) اوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $\overset{x_1\ y_1}{(2,5)}$ ويعامد المستقيم الذي معادلته $y=3(x-2)$

ميل المستقيم المعطى $m_g=.3$

ميل المستقيم المطلوب $m_\perp=\frac{-1}{.3}$

من التعامد

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-5=\frac{-1}{3}(x-2)$

$y-5=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{17}{3}$.

---

(3) اوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الذي يمر بالنقطتين $P_1\overset{x_1\ y_1}{(-1,3)}$, $P_2\overset{x_2\ y_2}{(2,7)}$ عند احداثي المنتصف

نجد ميل المستقيم المعطى

$m_g=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7-3}{2--1}=\frac{4}{3}$.

ميل المستقيم المطلوب $m_\perp=\frac{-3}{.4}$

نجد النقطة $M=\left(\frac{-1+2}{2},\frac{3+7}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},5\right)$

الميل $-\frac{3}{4}$ ، النقطة $\left(\frac{1}{2},5\right)$

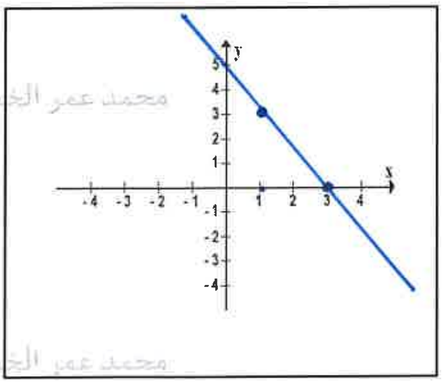
$y-5=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$y-5=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}$

$y=\frac{-3}{4}x+\frac{43}{8}$ ·

---

(4) ارسم المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(1,3)$ وميلة $\frac{-3}{2}$



عين النقطة $(1,3)$

من الميل $m=\frac{-3}{2}$

3 للاسفل

2 لليمين

تكون النقطة $(3,0)$

نصل الخط

محمد عمر الخطيب

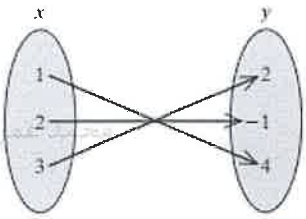
محمد عمر الخطيب

الدالة:

الدالة: هي علاقة بحيث ان لكل عنصر في المجال صورة واحدة فقط في المدى .

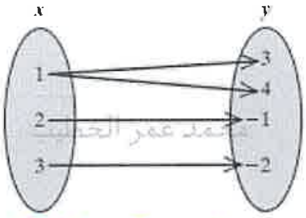
(1) اي من العلاقات التالية هي دالة

a.



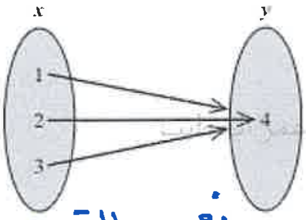
نعم دالة

b.



ليست دالة .
[العدد 1 له صورتان]

c.



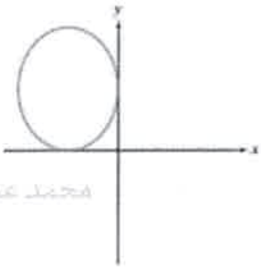
نعم دالة .

اختبار الخط العمودي (الرأسي)

اذا قطع اي خط رأسي العلاقة في نقطة واحدة فان العلاقة تكون دالة .

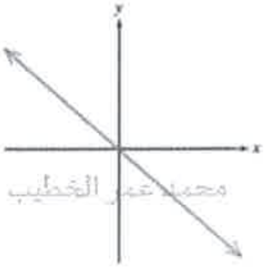
(2) اي من العلاقات التالية هي دالة :

1.



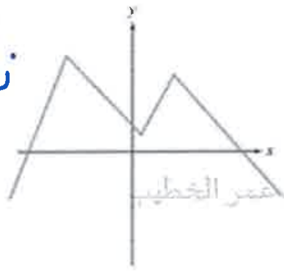
لا

2.



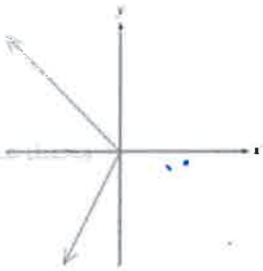
نعم

3.



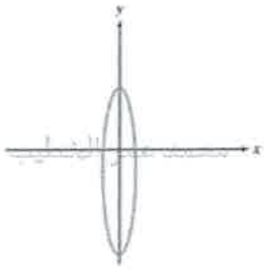
نعم

4.



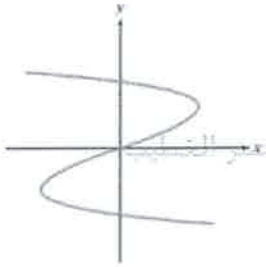
لا

5.



لا

6.



لا

دوال كثيرات الحدود

تذكر أن دالة كثيرة الحدود تكون على الصورة

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث الأسس اعداد صحيحة غير سالبة والمعاملات تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية

اي من الدوال التالية كثيرة حدود

(1) $f(x) = 3x^4 + \sqrt{5}\, x^3 - \frac{1}{2}$ نعم

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ لا

(3) $f(x) = \sqrt{x} + 1$ لا

(4) $f(x) = \sqrt{x^2} + 1$ $= |x| + 1$ لا

(5) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x - 3$ لا

(6) $f(x) = 5^x$ لا

(7) $f(x) = x^{-3} + 2x - 1$ لا

(8) $f(x) = |(x-1)^2|$ $= (x-1)^2$ نعم

(9) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ لا رغم وجود اختصار.

(10) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \quad x < 1 \\ x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$ لا

تسمى داله متفرعة وليست كثيره حدود.

محمد عمر الخطيب

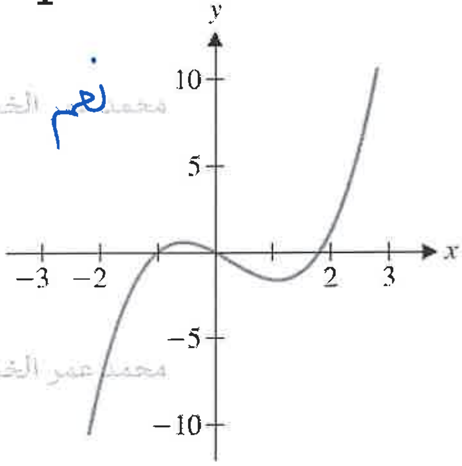
محمد عمر الخطيب

ملاحظة : يخلو التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود من الانفصال ، التكرار ، الركن ، خطوط التقارب الافقية والرأسية

اي من التمثيلات البيانية التالية يكون لدالة كثيرة حدود

1

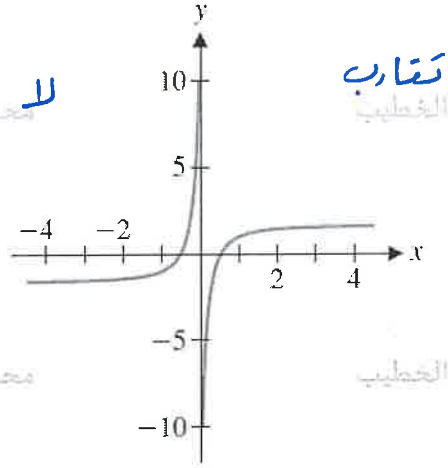
نعم



2

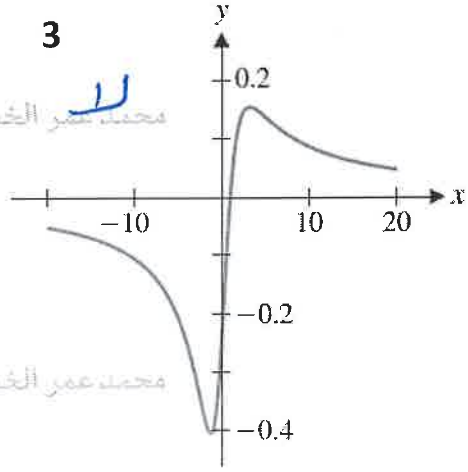
لا

خط تقارب



3

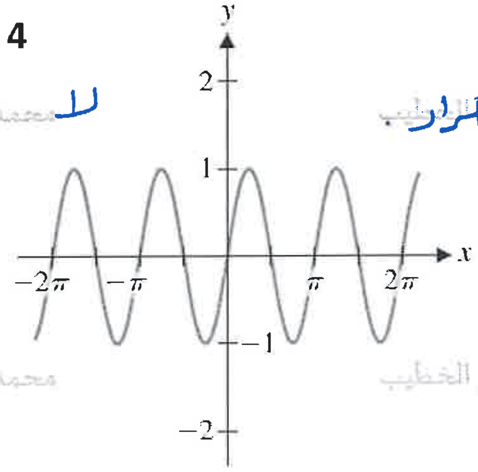
لا



4

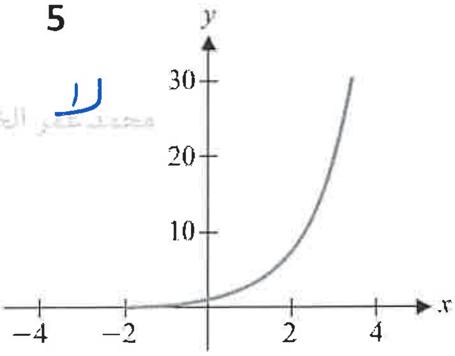
لا

تكرار



5

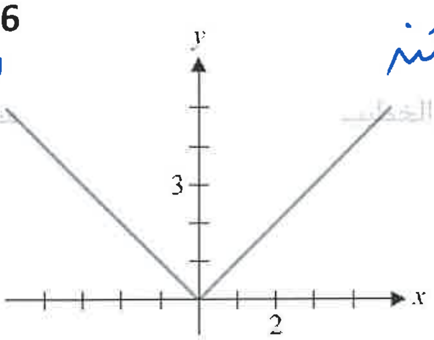
لا



6

لا

ركن



محمد عمر الخطيب

الدوال النسبية

تذكر أن الدالة النسبية تكون على الصورة $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$

حيث $p(x),q(x)$ كثيرات حدود

ملاحظة: كل دالة كثيرة حدود يمكن اعتبارها دالة نسبية حيث مقامها الدالة الثابتة $g(x)=1$

(1) مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية . ما لم يذكر غير ذلك

(2) مجال الدالة النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية . ما عدى اصفار المقام

(3) مجال الدالة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجموعة الأعداد الحقيقية

(4) مجال الدالة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق $g(x)\geq 0$

(5) مجال الدالة $f(x)=\log h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق $h(x)>0$

(6) مجال كل من $f\times g\ ,\ f-g\ ,\ f+g$ هو المجال المشترك (التقاطع) لمجال كل من f و g

(7) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة

$g(x)$ $h(x)$

ملاحظة: اذا كان مجال الدالة $f(x)$ هو $[x_1,x_2]$ ومداها هو $[y_1,y_2]$ ونريد ايجاد مجال الدالة

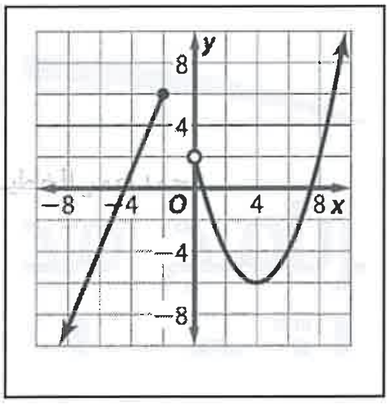
$$y=a\ f(bx+c)+d$$

(1) نكتب الدالة على الصورة $\dfrac{y-d}{a}=f(bx+c)$

(2) يكون مجال الدالة الجديدة هو جميع قيم x التي تحقق المتباينة $x_1\leq bx+c\leq x_2$

(3) يكون مدى الدالة الجديدة هو جميع قيم y التي تحقق المتباينة $y_1\leq\dfrac{y-d}{a}\leq y_2$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للاجابة عن الاسئلة التالية



(أ) اوجد مجال الدالة .

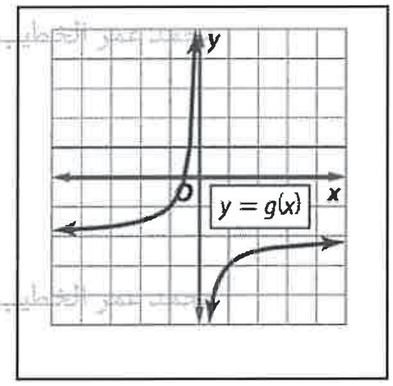
$(-\infty, -2], (0, \infty)$

(ب) اوجد مدى الدالة .

$(-\infty, \infty) = R$

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $g(x)$ للاجابة عن الاسئلة التالية



(أ) اوجد مجال الدالة .

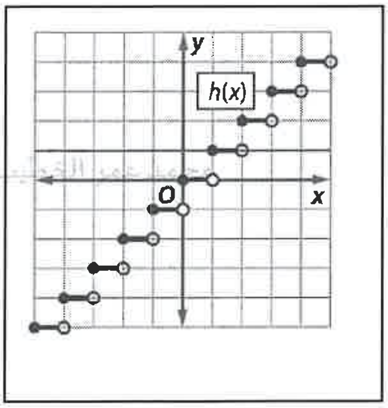
$(-\infty, 0), (0, \infty) = R/\{0\}$

(ب) اوجد مدى الدالة .

$(-\infty, -2), (-2, \infty) = R/\{-2\}$

---

(3) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $h(x)$ للاجابة عن الاسئلة التالية



(أ) اوجد مجال الدالة .

$(-\infty, \infty) = R$

(ب) اوجد مدى الدالة .

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$

تسمى الأعداد الصحيحة .

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد مجال كل من الدوال التالية:

نرمز للمجال بـ D

(1) $f(x)=x^2-5x+3$

$D = R = (-\infty , \infty)$

---

(2) $f(x)=x^2-5x+3 \quad ,[1,5)$

$D = [1, 5)$

مجال مقيد .

---

(3) $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+8}$

اصفار المقام -4 .

$D = R / \{-4\}$

$= (-\infty , -4) , (-4, \infty)$

---

(4) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-2x+1}$

اصفار المقام 1 .

$D = R/\{1\}$

$= (-\infty , 1) , (1, \infty)$

---

(5) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$

لا تختصر

اصفار المقام $2 , -2$

$D = R / \{\pm 2\}$

$= (-\infty , -2), (-2, 2), (2, \infty)$

---

(6) $f(x)=\sqrt{2x+6}$

$2x+6 \geq 0$

$2x \geq -6$

$x \geq -3$

$D = [-3, \infty)$

---

(7) $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$

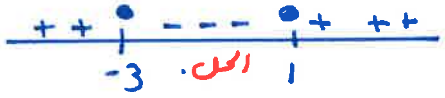
$3-2x-x^2 \geq 0$

ضرب بـ -1

$x^2+2x-3 \leq 0$

$(x+3)(x-1) \leq 0$

اصفار المقدار $-3 , 1$



$D = [-3, 1]$

---

(8) $f(x)=\log(2x+4)$

$2x+4 > 0$

$2x > -4$

$x > -2$

$D = (-2, \infty)$.

محمد عمر الخطيب

بدايه الحل

اوجد مجال كل من الدوال التالية:

(1) $f(x)=\sqrt{2x-6}+\sqrt{5-x}$

مجال الدالة الأولى D_1

$2x-6 \geq 0$

$2x \geq 6$

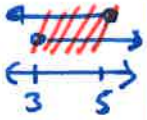
$x \geq 3.$

مجال الدالة الثانيه D_2

$5-x \geq 0$

$-x \geq -5$

$x \leq 5.$



$D = D_1 \cap D_2$

$= [3,5]$

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-2x-15}$

مجال البسط D_1

$x \geq 0$

مجال المقام D_2

$\mathbb{R}.$

تحل بالتقاطع

اصفار المقام

$x^2-2x-15=0$

$(x-5)(x+3)=0$

$x=5,-3.$

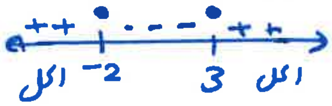
$D=[0,5)\cup(5,\infty)$

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}}{x-5}$

مجال البسط D_1

$x^2-x-6 \geq 0$

$(x-3)(x+2) \geq 0$



مجال المقام D_2

$\mathbb{R}.$

اصفار المقام

$x=5$

$D=(-\infty,-2],[3,5),(5,\infty)$

(4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$

مجال البسط

$x+1 \geq 0$

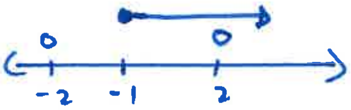
$x \geq -1.$

مجال المقام

$\mathbb{R}.$

اصفار المقام

$x=\pm 2.$



$D=[-1,2),(2,\infty)$

(5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{x-2}}$

مجال البسط D_1

$4-x^2 \geq 0$

$x^2-4 \leq 0$

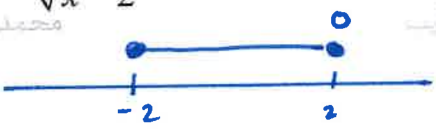
$(x-2)(x+2) \leq 0$

مجال المقام D_2

$\mathbb{R}$

اصفار المقام

$x=2$



$D=[-2,2)$

اوجد مجال كل من الدوال التالية:

ملاحظة: بعض الاسئلة هي من الدرس الثاني والثالث والرابع والخامس

(1) $f(x)=\begin{cases} e^x+2 & , \quad -5\le x<0 \\ \sin x & , \quad x>0 \end{cases}$

تسمى هذه الدالة بالدالة المتفرعة .

لا يوجد مساواة عند $x=0$

نزيحه خارج المجال .

$D = [-5, 0) , (0, \infty)$

---

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{|x|-2}$

مجال البسط D_1

$1-x \geqslant 0$

$-x \geqslant -1$

$x \leq 1.$

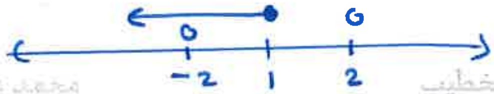
مجال المقام

R

اصفار المقام

$|x|-2=0$

$|x|=2 \rightarrow x=\pm 2.$



$D = (-\infty, -2) , (-2, 1]$

---

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{9-x^2}}$

اصفار المقام

$9-x^2=0$

$x=\pm 3.$

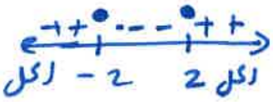
مجال المقام

$9-x^2 \geqslant 0$

$x^2-9 \leq 0$

مجال البسط

$x^2-4 \geqslant 0$



$D = (-3, -2] , [2, 3).$

---

(4) $f(x)=\ln(x^2-3x-10)$

$x^2-3x-10 > 0$

$(x-5)(x+2) > 0$

$D = (-\infty, -2) , (5, \infty)$

---

(5) $f(x)=\sqrt{3-x}-\ln(x+2)$

مجال الدالة الأولى D_1

$3-x \geqslant 0$

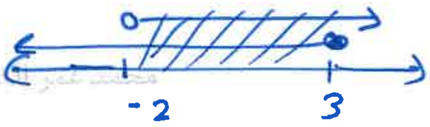
$-x \geqslant -3$

$x \leq 3$

مجال الدالة الثانية D_2

$x+2>0$

$x>-2$



$D = (-2, 3].$

أوجد مجال كل من الدوال التالية:

(1) $f(x)=\dfrac{\log(5-x)}{\sqrt{x-1}}$

D_1 مجال البسط

$5-x > 0$

$-x > -5$

$x < 5$

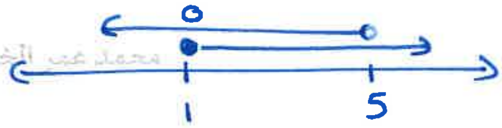
D_2 مجال المقام

$x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

اصفار المقام

$X = 1$



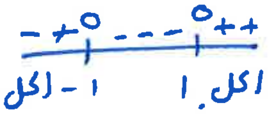
$D = (1, 5)$

---

(2) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

D_1 مجال البسط

$x^2-1 > 0$

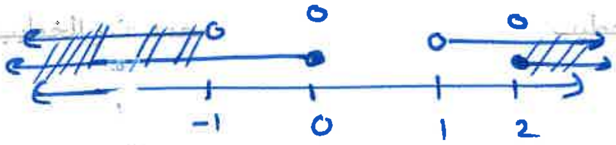


D_2 مجال المقام

$X^2-2X \geq 0$

اصفار المقام

$X = 2, 0$



$D = (-\infty, -1), (2, \infty)$

---

(3) $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$

مجال الدالة الداخلية

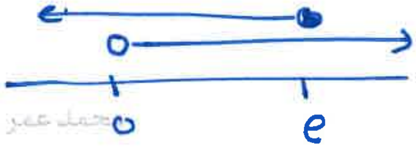
$x > 0$

$1-\ln x \geq 0$

$-\ln x \geq -1$

$\ln x \leq 1$

$x \leq e^1$



$D = (0, e]$

---

(4) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x^2}$

ملاحظة

$\ln x^2 = 2\ln|x|$

مجال المقام

$x \neq 0$

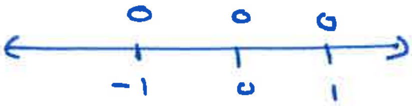
مجال البسط

R

اصفار المقام

$\ln x^2 = 0$

$x^2 = 1 \rightarrow X = \pm 1$



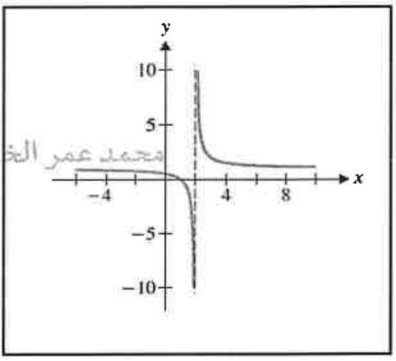
$R \setminus \{\pm 1, 0\}$

خطوط التقارب للدوال النسبية

محمد عمر الخطيب

ملاحظات:

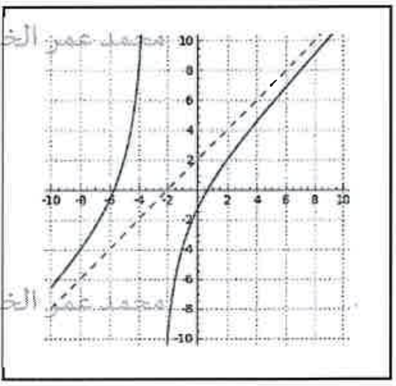
(1) يجب كتابة الدالة النسبية في ابسط صورة قبل ايجاد خطوط التقارب واذا تم اختصار احد العوامل وليكن $x-a$ فان للدالة فجوة عند $x=a$ وليس خط تقارب رأسي



(2) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسية عند اصفار المقام .

وتكون معادلتة $x=l$

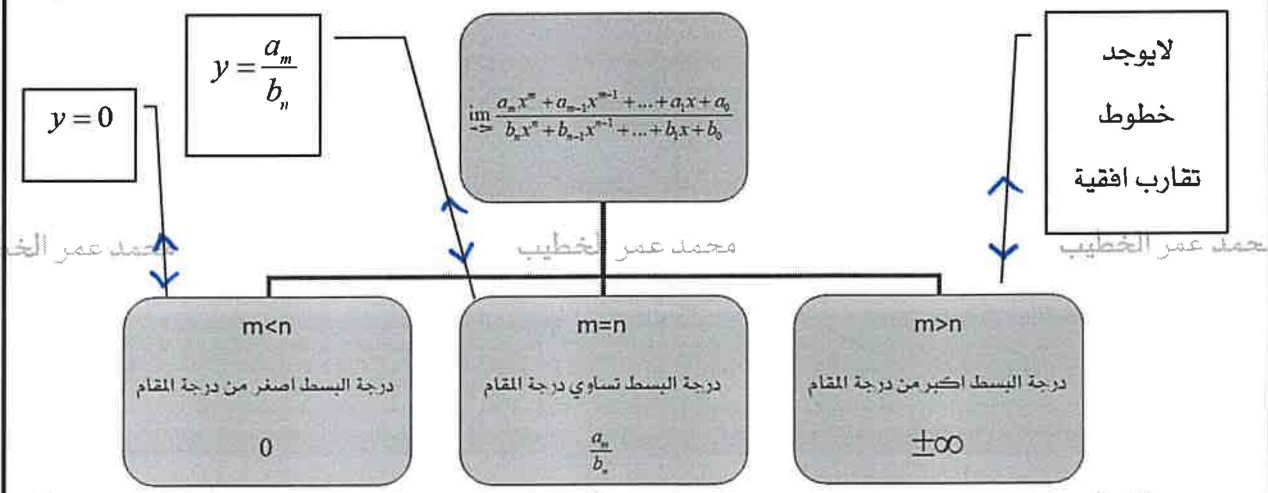
(3) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب افقية اذا كانت درجة البسط اصغر من او تساوي درجة المقام وتكون معادلتة $y=k$



(4) يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام بواحد . وتكون معادلتة $y=a\,x+b$ ونستخدم القسمة المطولة او القسمة التركيبية لايجادة

لا يجوز ان يكون للدالة خط تقارب افقي ومائل في نفس الوقت

ملخص ايجاد النهاية للدالة النسبية عند اللانهاية (لايجاد خطوط التقارب الافقية)



محمد عمر الخطيب

(1) اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية للدالة

$$f(x)=\frac{6x+1}{3x-4}$$

خط التقارب الرأسي $x = \frac{4}{3}$

خط التقارب الأفقي $y = \frac{6}{3} = 2$

---

(2) اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية والفجوات للدالة

$$f(x)=\frac{-2x^2}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{-2x^2}{(x-3)(x+1)}$$

الرأسي $x = -1 , x = 3$.

الأفقي $y = -2$

---

(3) اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية والفجوات للدالة

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$$

$$= \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

الرأسي $X = -2$

الأفقي y = ٠

---

(4) اوجد خطوط التقارب الرأسية والمائلة للدالة

لايجاد خطوط التقارب المائلة استخدم القسمة المطولة

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ x+1 & x^2 \\ & \ominus x^2 \ominus + x \\ \hline & -x \\ & \oplus -x \oplus -1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

الرأسي $x = -1$

لا يوجد افقي

المائل $y = x-1$

نظرية الباقي و العامل

ملاحظات :

(1) يكون باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x-a$ هو $f(a)$.

(2) يكون $x-a$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ اذا وفقط اذا كانت $f(a)=0$.

اي ان $x=a$ صفر للدالة

(3) يكون للدالة كثيرة الحدود من الدرجة n على الأكثر n صفراً مختلفاً

(1) اذا كانت $x+2$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $f(x)=x^3+3x^2+bx+4$ فاوجد قيمة b

$f(-2)=0$

$(-2)^3+3(-2)^2+b(-2)+4=0$

$-2b+8=0 \Rightarrow b=4$.

---

(2) اذا كانت -3 صفر لدالة كثيرة الحدود $f(x)=ax^2+8x-3$ فاوجد قيمة a

$f(-3)=0$

$a(-3)^2+8(-3)+3=0$

$9a-27=0$

$9a=27 \Rightarrow a=3$.

---

(3) اوجد اصفار كثيرة الحدود $f(x)=x^3-2x^2-x+2$

عوامل 2 هي $\pm1, \pm2$ ونجرب احداهما في الدالة

$f(1)=0 \Rightarrow x-1$ عامل .

نستخدم القسمة المطولة. ونكمل الحل .

تعلم استخدام الآلة الحاسبة . أفضل

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد اصفار الدالة النسبية $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-9}$

اصفار الدالة النسبية هي فقط اصفار البسط بعد الاختصار.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = 2 \ , \ -1.$$

---

(2) اوجد نقاط تقاطع القطع المكافئ $y=x^2-x-5$ مع المستقيم $y=x+3$

نجد دائما نقاط تقاطع . دالتين . بجعلهما متساويتان

$$x^2 - x - 5 = x + 3 .$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x = 4 \ , \ -2.$$

---

(3) اكتب كثيرة حدود من الدرجة الخامسة اصفارها الحقيقية $1,2,-3$ فقط ومعاملها الرئيسي 2

$$f(x) = 2(x-1)(x-2)(x+3)(x^2+1)$$

يجب انه يكون من الدرجة الثانية.

يجب ان لا يكون له اصفار (لا حل)

* يوجد حلول كثيرة للسؤال .

محمد عمر الخطيب

الوحدة الأولى : تمهيدات /// الدرس الثاني : الدوال العكسية

الدالة واحد لواحد

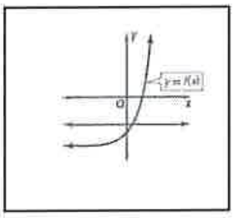
تكون الدالة $f(x)$ دالة واحد لواحد اذا كانت $f(a)=f(b)$ فان $a=b$

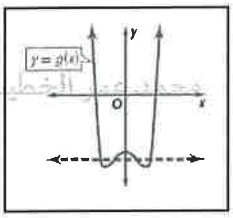
تكون الدالة $f(x)$ ليست دالة واحد لواحد اذا كانت $a\neq b$ ولكن $f(a)=f(b)$ لبعض قيم a,b

اختبار الخط الافقي

تكون الدالة $y=f(x)$ دالة واحد لواحد

اذا كان كل خط افقي يقطع الدالة في نقطة واحدة فقط



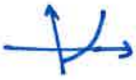


اي من الدوال التالية هي دالة واحد لواحد

استعن بالرسم

(1) $f(x)=x^2-1$ لا

(2) $f(x)=x^2-1\,,\quad [0,\infty)$ نعم



★ مجال مقيد . ←

(3) $f(x)=|x|$ لا

(4) $f(x)=x^3+1$ نعم

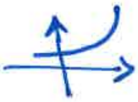
(5) $f(x)=\sin x$ لا

(6) $f(x)=\frac{1}{x}$ نعم

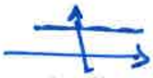
(7) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ لا

(8) $f(x)=\ln x$ نعم

(9) $f(x)=e^x$ نعم



(10) $f(x)=5$ لا



محمد عمر الخطيب

(1) بين ان الدالة $f(x)=x^3-x$ هي ليست دالة واحد لواحد

نجد عددين مختلفين لها صورتان متساوية .

$f(0) = 0$

$f(1) = 0$

يوجد عددين مختلفين لهم نفس الصورة $\Leftarrow$ f ليست دالة واحدلواحد .

---

(2) بين ان الدالة $f(x)=4x-5$ هي دالة واحد لواحد

نفرض ان $f(a)=f(b)$

$4a-5 = 4b-5$

$4a = 4b$

$\Rightarrow a = b$

ن الدالة واحدلواحد .

---

(3) بين ان الدالة $f(x)=x^3-5$ هي دالة واحد لواحد

نفرض $f(a) = f(b)$

$a^3-5 = b^3-5$

$a^3 = b^3$

$a = b$

ن الدالة واحد لواحد .

---

(4) اذا كانت $f(x)$ دالة مجالها R ، وتحقق $f(f(x))=f(x)+x-1$

فأثبت ان الدالة $f(x)$ دالة واحد لواحد

نفرض ان $f(a)=f(b)$.

ونريدان نصل الى انه $a=b$.

ناخذ f للطرفين .

$f(f(a)) = f(f(b))$

$f(\underline{a})+a-1 = f(\underline{b})+b-1$

متساوية من الفرض

$a-1 = b-1$

$a = b$.

ن الدالة f دالة واحدلواحد .

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

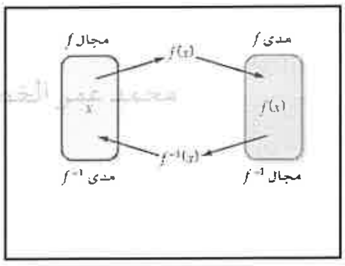
الدالة العكسية

تسمى الدالة $g(x)$ دالة عكسية للدالة $f(x)$ اذا تحقق الشرطان

(1) الدالة $f(x)$ دالة واحد لواحد

(2) $g(f(x))=x \quad , \quad f(g(x))=x$

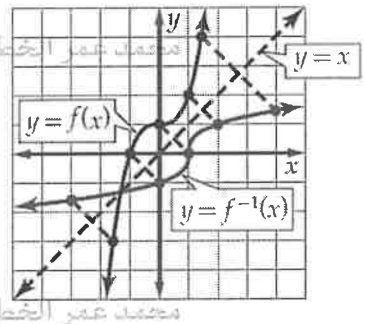
ويرمز للدالة العكسية للدالة $f(x)$ بـالرمز $f^{-1}(x)$



التمثيل البياني للدالة ومعكوسها

ملاحظة: الدالة $f(x)$ والدالة العكسية لها متماثله

حول المستقيم $y=x$



خطوات رسم الدالة العكسية

(1) ارسم الدالة $f(x)$

(2) ا رسم المستقيم $y=x$

(3) ارسم قطع مستقيمة

تعامد المستقيم $y=x$

(4) تحديد نقاط على بيان الدالة

$f(x)$ ثم عمل لها انعكاس في

الجهة الثانية من المستقيم

ملاحظة:

اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة واحد لواحد فان

(1) مجال الدالة $f^{-1}(x)$ هو نفس مدى الدالة $f(x)$

(2) مدى الدالة $f^{-1}(x)$ هو مجال الدالة $f(x)$

(3) حتى نجد القيد للدالة العكسية يجب ان نجد مدى الدالة الاصلي

او نجد مجال الدالة العكسية بشرط ان تكون دالة واحد لواحد

(1) اذا كانت الدالة : $g(x)=x^3+4x-1$ دالة واحد لواحد فأوجد $g^{-1}(-1)$

نفرض $g^{-1}(-1)=x$

$g(x)=-1$

$x^3+4x-1=-1$

$x^3+4x=0$

$x(x^2+4)=0$

$\Rightarrow x=0 \Rightarrow g^{-1}(-1)=0.$

---

(2) اذا كانت الدالة : $g(x)=\sqrt{x^3+2x+4}$ دالة واحد لواحد فأوجد $g^{-1}(2)$

$g^{-1}(2)=x.$

$g(x)=2$

$\sqrt{x^3+2x+4}=2$

$x^3+2x+4=4$

$x^3+2x=0$

$x(x^2+2)=0$

$x=0$

$\Rightarrow g^{-1}(2)=0$

---

(3) اذا كانت الدالة : $g(x)=e^{x^3+x}$ دالة واحد لواحد فأوجد $g^{-1}(1)$

$g^{-1}(1)=x$

$g(x)=1$

$e^{x^3+x}=1$

$x^3+x=0$

$x(x^2+1)=0$

$x=0$

$g^{-1}(1)=0.$

---

(4) اذا كانت الدوال $g(x), f(x)$ كل منها دالة واحد لواحد

بين ان الدالة $g(x)$ هي دالة عكسية للدالة $f(x)$

يجب ان نبين ان

(1) $f(g(x))=x.$

(2) $g(f(x))=x.$

$(a)\ f(x)=-6x+3 \quad , \quad g(x)=\frac{3-x}{6}$

$f(g(x))=f\left(\frac{3-x}{6}\right)$

$=-6\left(\frac{3-x}{\cancel{6}}\right)+3$

$=-(3-x)+3$

$=-\cancel{3}+x+\cancel{3}$

$=x$ #

$g(f(x))=g(-6x+3)$

$=\frac{3-(-6x+3)}{6}$

$=\frac{\cancel{3}+6x-\cancel{3}}{6}$

$=\frac{6x}{6}$

$=x$ #

$(b)\ f(x)=(x+8)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad g(x)=x^{\frac{2}{3}}-8 \quad ,x\ge 0$

$f(g(x))=f(x^{2/3}-8)$

$=\left((x^{2/3}-\cancel{8})+\cancel{8}\right)^{3/2}$

$=\left(x^{\cancel{2}/\cancel{3}}\right)^{\cancel{3}/\cancel{2}}$

$=x$ #

$g(f(x))=g\left((x+8)^{3/2}\right)$

$=\left[(x+8)^{3/2}\right]^{2/3}-8$

$=x+8-8$

$=x$ #

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اذا علمت ان الدالة f هي دالة واحد لواحد فاوجد f^{-1} في كل مما يلي مع تحديد اي قيود.

من الرسم (خط مستقيم)

مدى الدالة R

خطوات إيجاد الدالة العكسية

(1) استبدل $f(x)$ بـ y

(2) بدل مكان y بـ x والعكس

(3) إعادة ترتيب المعادلة

نقل الطرف الايسر للايمن والعكس

(4) حل المعادلة بجعل y لوحدها

بالطرف الايسر والباقي بالطرف الايمن

(5) استبدل y بـ $f^{-1}(x)$

(6) اكتب القيد

(1) $f(x)=2x-3$

(1) $y = 2x-3$

(2) $x = 2y-3$

(3) $2y-3 = x$

(4) $2y = x+3$

$y = \frac{x+3}{2}$

(5) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

(6) لا يوجد قيد

$D = R.$

---

(2) $f(x)=x^3-8$ مدى الدالة R من الرسم.

$y = x^3-8$

$x = y^3-8$

$y^3-8 = x$

$y^3 = x+8$

$y = \sqrt[3]{x+8}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+8}$

لا يوجد قيد.

$D = R..$

---

(3) $f(x)=\sqrt{x-2}$

$y = \sqrt{x-2}$

$x = \sqrt{y-2}$

$\sqrt{y-2} = x$

$y-2 = x^2$

$y = x^2+2$

$f^{-1}(x) = x^2+2$

القيد.

$D=[0,\infty).$

مدى الدالة $[0,\infty)$

من الرسم

---

(4) $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x-1)$

$y = \frac{1}{2}\ln(x-1)$

$x = \frac{1}{2}\ln(y-1)$

$\frac{1}{2}\ln(y-1) = x$

$\ln(y-1) = 2x.$

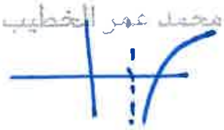
$y-1 = e^{2x}.$

$y = e^{2x}+1$

$f^{-1}(x) = e^{2x}+1$

مدى الدالة

هو R



اذا علمت ان الدالة f هي دالة واحد لواحد فاوجد f^{-1} في كل مما يلي مع تحديد اي قيود.

$(1)\ f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

$y=\dfrac{x-2}{x+1}$

$x=\dfrac{y-2}{y+1}$

$\dfrac{y-2}{y+1}=x$

$y-2=x(y+1)$

$y-2=xy+x$

$y-xy=x+2$

$y(1-x)=x+2$

$y=\dfrac{x+2}{1-x}.$

$f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{1-x}.$ القيد

$x\neq1.$

من الصعب ايجاد المدى . لذلك نجد الدالة العكسية ثم نجد مجالها.

$(2)\ f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$

$y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$

$x=\sqrt[3]{\dfrac{y-1}{2}}$

$\sqrt[3]{\dfrac{y-1}{2}}=x$

$\dfrac{y-1}{2}=x^3$

$y-1=2x^3$

$y=2x^3+1$

$f^{-1}(x)=2x^3+1$

لايوجد قيد .

مدى الدالة f هو $R.$

$(3)\ f(x)=x^2-4\quad ,\ x\geq0$ → مجال الدالة الاصلية → مدى الدالة العكسية

$y=x^2-4$

$x=y^2-4.$

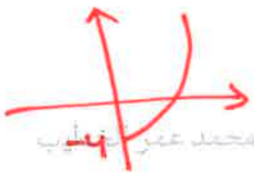
$y^2-4=x.$

$y^2=x+4$

$y=\pm\sqrt{x+4}$

* يجب ان نختار احد الجذرين . وهو الجذر الموجب لانه معطى $x\geq0$. تقابل بالدالة العكسية $y\geq0$

$y=\sqrt{x+4}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$ القيد $x\geq-4$



المدى $[-4,\infty)$

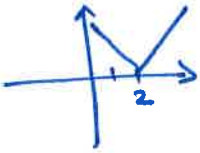
$(4)\ f(x)=x^2-4\quad ,\ x\leq0$

$y=\pm\sqrt{x+4}$ من السؤال السابق $\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x+4}.$

القيد $x\geq-4$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الفترة التي يكون للدالة $f(x)=|x-2|$ ، دالة عكسية ثم اوجد هذه الدالة المقيدة



نلاحظ من الرسم ان الدالة على R ليست واحد لواحد .

لكنه تصبح دالة واحد لواحد ع المجال المقيد $[2,\infty)$

وتكون $f(x)=x-2.$

$y = x-2$
$x = y-2$
$y-2 = x$

$y = x+2$
$f^{-1}(x) = x+2$, القيد: $x \geq 0$

★ (2) اوجد الفترة التي يكون للدالة $f(x)=x^2+2x+2$ ، دالة عكسية ثم اوجد هذه الدالة المقيدة

$f(x) = x^2+2x+2$

بإكمال المربع .

* إضافة وطرح $\left(\frac{\text{معامل } x}{2}\right)^2$ للدالة.

$= x^2+2x+1+2-1$

$= (x+1)^2+1.$

وهنه الدالة ليست دالة واحد لواحد ع R

لكنه ع المجال المقيد $[-1,\infty)$. تصبح دالة واحد لواحد .

$y = (x+1)^2+1$

$x = (y+1)^2+1$

$(y+1)^2+1 = x$

$(y+1)^2 = x-1$

$y+1 = \pm\sqrt{x-1}$ [illegible]

$y = \sqrt{x-1}-1$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}-1$

* ممكن اخذ المجال المقيد $(-\infty,-1]$ وتكون الدالة العكسية $-\sqrt{x-1}-1$

(3) اذا كانت الدالة $f(x)=\frac{x+4}{x}$ لها الدالة العكسية $g(x)=\frac{a}{x-1}$ فاوجد قيمة الثابت a

يوجد أكثر من طريقة حل للسؤال .

$y = \frac{x+4}{x}$

$x = \frac{y+4}{y}$

$\frac{y+4}{y} = x$

$y+4 = xy$

$y - xy = 4.$

$y(1-x) = 4.$

$y = \frac{4}{1-x}.$ ← توحيد المقام حتى تتطابق مع $g(x)$

$= \frac{-4}{x-1}.$

وبالمقارنة

$\boxed{a=-4}$

محمد عمر الخطيب

الوحدة الأولى: التمهيدات /// الدرس الثالث: الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية

النسب المثلثية والمتطابقات المهمة

حفظ

متطابقات المقلوب

$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ $\quad$ $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ $\quad$ $\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$

$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ $\quad$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ $\quad$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

متطابقات فيثاغورس

(مهمات جداً).

$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$ $\quad$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\quad$ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

متطابقات الزوايا المتتامة

$\sec \theta = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\quad$ $\tan \theta = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\quad$ $\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\csc \theta = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\quad$ $\cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\quad$ $\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والفردية

$\tan (-\theta) = -\tan \theta$ $\quad$ $\cos (-\theta) = \cos \theta$ $\quad$ $\sin (-\theta) = -\sin \theta$

$\cot (-\theta) = -\cot \theta$ $\quad$ $\sec (-\theta) = \sec \theta$ $\quad$ $\csc (-\theta) = -\csc \theta$

متطابقات المجموع والفرق

$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\quad$ $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\quad$ $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ ← غير مهمات ← $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

متطابقات ضعف الزاوية

(غير مهمات) كثير

$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ $\quad$ $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ $\quad$ $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ $\quad$ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

ملاحظة مهمة

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

محمد عمر الخطيب

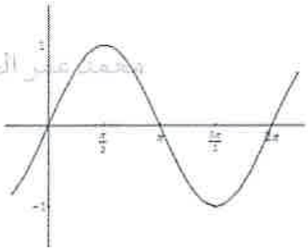
التمثيل البياني للدوال المثلثية ومعكوساتها

حفظ

Domain: $(-\infty,\infty)$

Range: $[-1,1]$

Period: 2π

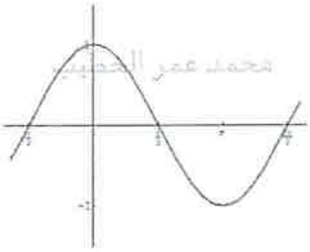


$f(x)=\sin x$

Domain: $(-\infty,\infty)$

Range: $[-1,1]$

Period: 2π



$f(x)=\cos x$

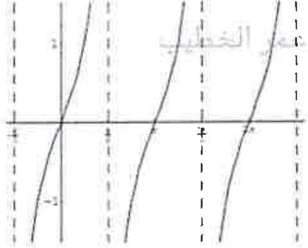
Domain: $\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$

$\pi\cdot(k+\frac{1}{2})$

$R/\{\frac{\pi}{2}k\}$

Range: $(-\infty,\infty)$

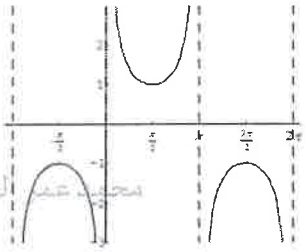
Period: π



$f(x)=\tan x$

Domain: $((k-1)\pi,k\pi)$

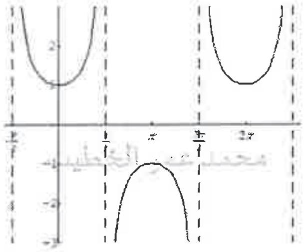
Range: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$



$f(x)=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

Domain: $\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$

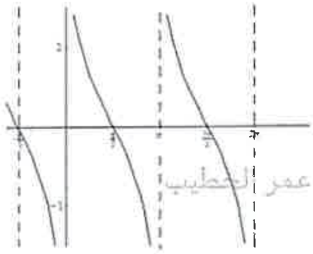
Range: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$



$f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

Domain: $((k-1)\pi,k\pi)$

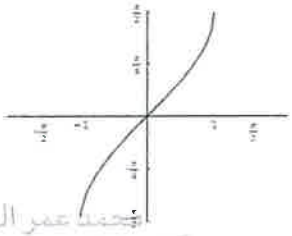
Range: $(-\infty,\infty)$



$f(x)=\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$

Domain: $[-1,1]$

Range: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

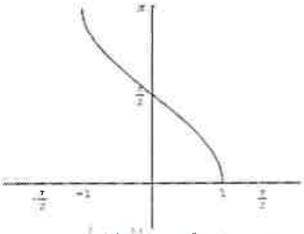


$f(x)=\sin^{-1}x$

$f(x)=\arcsin x$

Domain: $[-1,1]$

Range: $[0,\pi]$

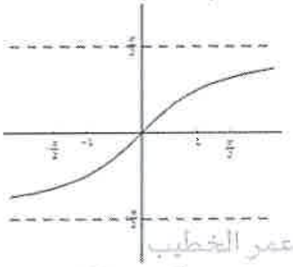


$f(x)=\cos^{-1}x$

$f(x)=\arccos x$

Domain: $(-\infty,\infty)$

Range: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

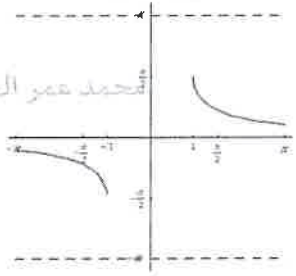


$f(x)=\tan^{-1}x$

$f(x)=\arctan x$

Domain: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

Range: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], y\neq 0$

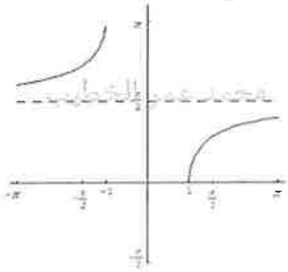


$f(x)=\csc^{-1}x$

$f(x)=\operatorname{arccsc}x$

Domain: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

Range: $[0,\pi], y\neq\frac{\pi}{2}$

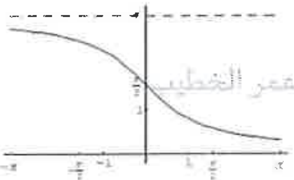


$f(x)=\sec^{-1}x$

$f(x)=\operatorname{arcsec}x$

Domain: $(-\infty,\infty)$

Range: $(0,\pi)$



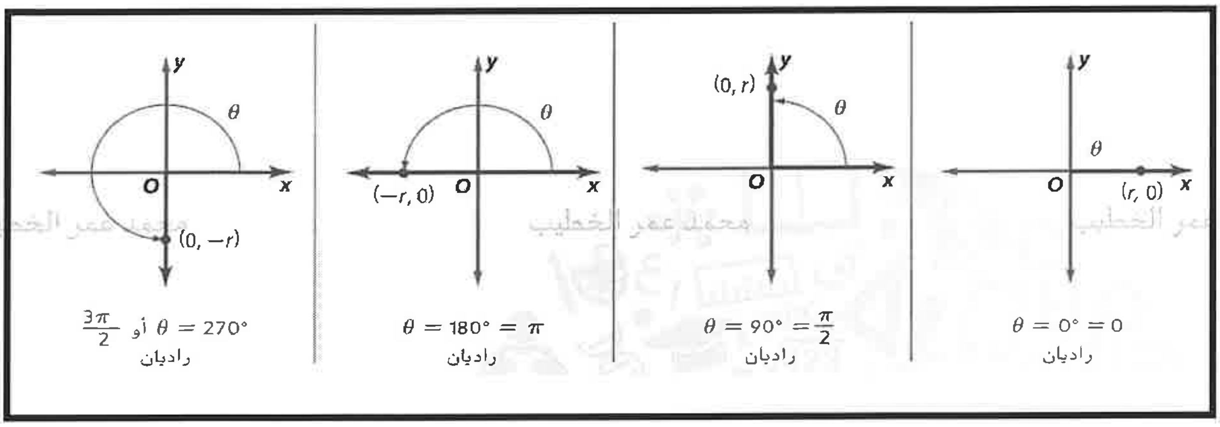
$f(x)=\cot^{-1}x$

$f(x)=\operatorname{arccot}x$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الزوايا الربعية



$\frac{3\pi}{2}$ أو $\theta = 270°$ راديان

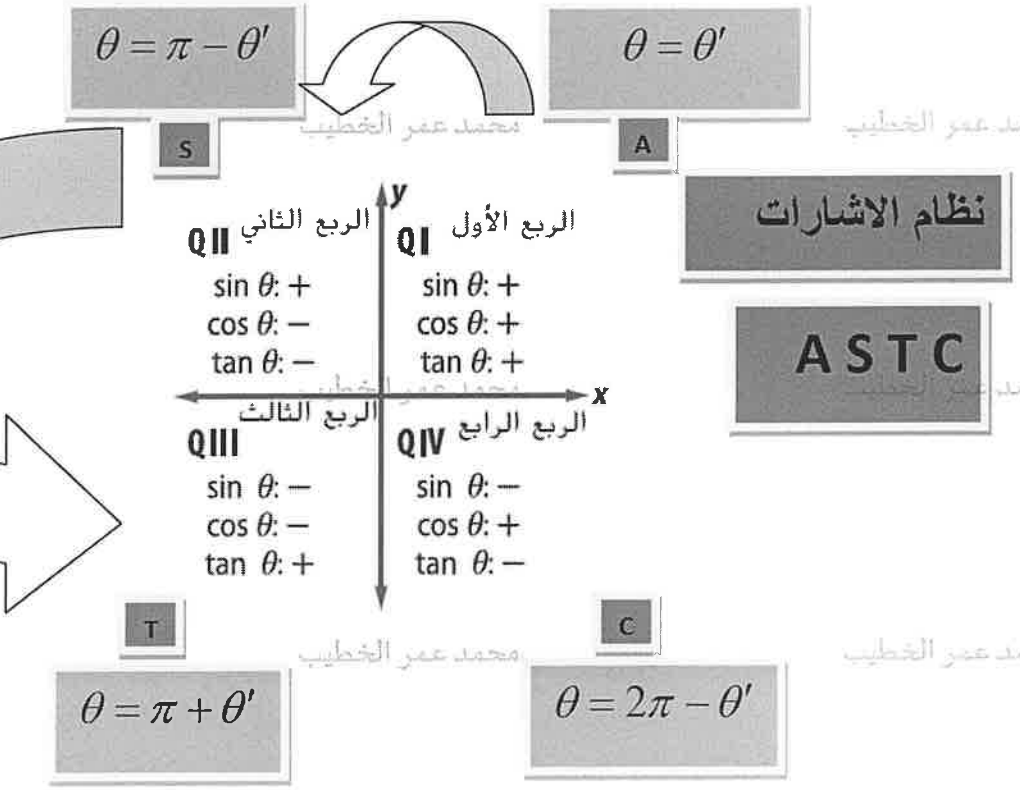
$\theta = 180° = \pi$ راديان

$\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$ راديان

$\theta = 0° = 0$ راديان

الزوايا التابعة

يمكن ايجاد الزاوية التابعة θ لزاوية المرجع(الاساسية) θ' حسب الربع



$$\theta = \theta'$$

$$\theta = \pi - \theta'$$

$$\theta = \pi + \theta'$$

$$\theta = 2\pi - \theta'$$

نظام الاشارات

ASTC

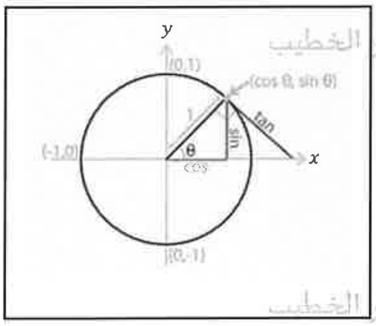
QI: $\sin\theta: +$, $\cos\theta: +$, $\tan\theta: +$

QII: $\sin\theta: +$, $\cos\theta: -$, $\tan\theta: -$

QIII: $\sin\theta: -$, $\cos\theta: -$, $\tan\theta: +$

QIV: $\sin\theta: -$, $\cos\theta: +$, $\tan\theta: -$

دائرة الوحدة



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

القياس الدائري والستيني (الدرجات)

(1) حول القياس المعطى بالرديان الى درجات

من راديان الى درجات

الزاوية بالراديان × $\frac{180^\circ}{\pi}$

(1) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$

(2) $\frac{-\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -30^\circ$

(3) $3 = 3 \times \frac{180}{\pi} \approx 171^\circ$

---

(2) حول القياس المعطى بالدرجات الى الراديان

من درجات الى راديان

الزاوية بالدرجات × $\frac{\pi}{180^\circ}$

(1) $90^\circ = 90^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$

(2) $-120^\circ = -120^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{-2\pi}{3}$

(3) $40^\circ = 40^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$.

---

(3) اوجد الزاوية التابعة في كل ربع للزاوية الاساسية 30°

$\theta' = 30^\circ \rightarrow \theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ الثاني Q_2

$\rightarrow \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ الثالث Q_3

$\rightarrow \theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ الرابع Q_4 .

---

(4) اوجد الزاوية التابعة في كل ربع للزاوية الاساسية $\frac{\pi}{4}$

$\theta' = \frac{\pi}{4} \rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ Q_2

$\rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ Q_3

$\rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ Q_3 .

محمد عمر الخطيب

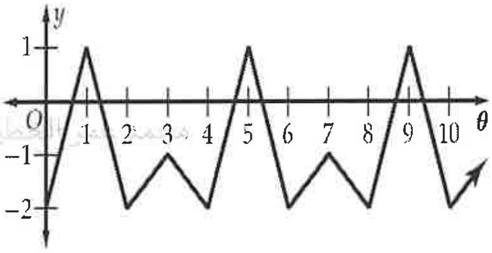
الدوال الدورية

تكون الدالة $f(x)$ دالة دورية وزمنها الدوري T اذا كان:

$$f(x+T)=f(x)$$

حيث T اصغر عدد حقيقي موجب يحقق الخاصية

ومن اهم الدوال الدورية هي الدوال المثلثية.



(1) بين ان الدالة $g(x)=\sqrt{x-[x]}$ هي دالة دورية، وزمنها الدوري 1

$g(x+T)=$

$g(x+1)=\sqrt{x+1-[x+1]}$

$=\sqrt{x+1-([x]+1)}$

$=\sqrt{x\cancel{+1}-[x]-1}$

$=\sqrt{x-[x]}$

$=g(x)$ #

ملاحظة

$[x+n]=[x]+n$

اذا كانت n

عدد صحيح .

---

(2) بين ان الدالة $g(x)=\cos x$ هي دالة دورية، وزمنها الدوري 2π

$g(x+T)=$

$=g(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)$

$=\cos x\cos 2\pi-\sin x\sin 2\pi$

$=\cos x\cdot 1-\sin x\cdot 0$

$=\cos x$

$=g(x)$ #

محمد عمر الخطيب

السعة والدورة والتردد لبعض الدوال الدورية

$A=-3$ ، $B=4$

(1) اوجد السعة والدورة والتكرار للدالة $y = -3\sin 4(x+\pi)$

السعة $= |A| = |-3| = 3$.

الدورة $= \frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ، والتكرار $\frac{2}{\pi}$

π لا تؤثر على السعة والدورة والتكرار .

---

(2) اوجد السعة والدورة والتكرار للدالة : $y = 4\sin x\cos x$

$= 2 \cdot 2\sin x\cos x$

$= 2\sin 2x$.

السعة $= 2$.

الدورة $= \frac{2\pi}{2} = \pi$. والتكرار $\frac{1}{\pi}$

---

(3) اوجد السعة والدورة والتكرار للدالة : $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

y_2		y_1
2π	الدورة	2π
1	السعة	$\sqrt{3}$

ناتج قسمة الدورتين

$\frac{2\pi}{2\pi} = 1$

بما ان ناتج القسمة عدد نسبي فان ناتج الجمع دالة دورية .

والدورة 2π .

والسعة $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}$
$= 2$.

---

(4) اوجد السعة والدورة والتكرار للدالة : $y = \sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{3}x$

y_2		y_1
$\frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$.	الدورة	$4\pi = \frac{2\pi}{1/2}$

ناتج القسمة $\frac{4\pi}{6\pi} = \frac{2}{3}$.

بما ان ناتج القسمة عدد نسبي فان الدالة دورية .

الدورة لـ y هو المضاعف المشترك الاصغر .

12π

والسعة

$\sqrt{1^2+1^2}$
$= \sqrt{2}$

---

(5) هل الدلة : $y = \sin x + \cos\sqrt{2}x$ دالة دورية

y_2		y_1
$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$	الدورة	$\frac{2\pi}{1}$

ناتج القسمة $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$ عدد غير نسبي

∴ الدالة ليست دورية .

اذا كانت

$y = A\sin B(x+c)$

او

$y = A\cos Bx$

فأن الدالة دورية و

السعة: $|A|$

الدورة : $\frac{2\pi}{|B|}$

التكرار: $\frac{|B|}{2\pi}$

اذا كانت

$y_1 = A\sin Bx$

$y_2 = C\cos Dx$

فان $y_1 \pm y_2$

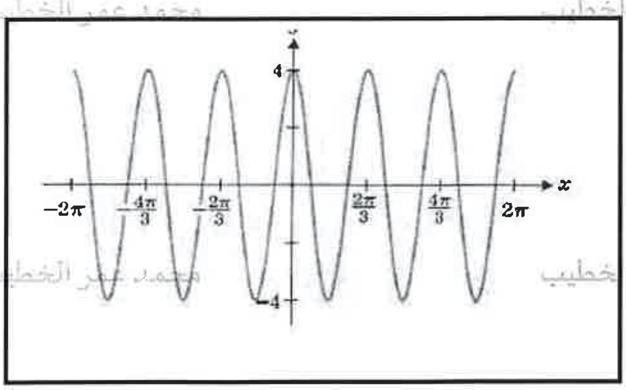
تكون دالة دورية اذا كانت حاصل قسمة الدورتين عدد نسبي وتكون دورة الدالة الجديدة هي المضاعف المشترك الاصغرللدورتين

والسعة: $\sqrt{A^2+C^2}$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد السعة والدورة للدالة : $y = A\cos Bx$

ثم اكتب قاعدة الدالة.



السعة = (اكبر قيمة – اصغر قيمة)/2

الدورة = الفرق بين اي قمتين او قاعين

السعة من الرسم 4 .

$A=\pm4 \Leftarrow |A|=4 \Leftarrow$ السعة من المعادلة $|A|$

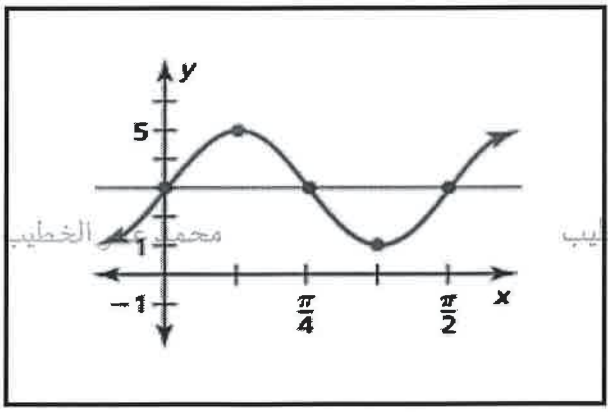
نختار $(A=4)$ لانه الدالة في الوضع القياسي.

الدورة من الرسم $\frac{2\pi}{3}$

$B=\pm3 \Leftarrow |B|=3 \Leftarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|B|} \Leftarrow$ الدورة من المعادلة $\frac{2\pi}{|B|}$

الدالة $y = 4\cos 3x$. وهي نفسها $y = 4\cos -3x$.

(3) اعتمد على الشكل المجاور لكتابة قاعدة الدالة.



السعة من الرسم $\frac{5-1}{2} = 2$

السعة من المعادلة A

$A=\pm2 \Leftarrow |A|=2 \Leftarrow$

نختار $A=2$ وضع قياسي

هذه الدالة هي دالة $\sin x$. بازاحة للاعلى بمقدار 3.
لذلك تكتب الدالة على الصيغة
$y = A\sin Bx + 3$

الدورة من الرسم $\frac{\pi}{2}$.

الدورة من المعادلة $\frac{2\pi}{|B|}$

$\frac{2\pi}{|B|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |B|=4$.

$B=\pm4$

نختار الموجب فقط $= \left(y = 2\sin 4x + 3\right)$

محمد عمر الخطيب

$y = 2\sin 4x + 3$.

الدوال المثلثية العكسية

محمد عمر الخطيب

ملاحظة:

(1) راجع الرسومات البيانية للتعرف على مجال ومدى الدوال المثلثية و الدوال المثلثية العكسية

(2) كل الزوايا يجب ان تكون بالراديان

(3) المجال القيد هو مجال الدالة بحيث تكون دالة واحد لواحد

(1) اوجد الدالة العكسية للدالة $y = 2\sin(x-\pi)$ على المجال المقيد

$\sin(\sin^{-1}x) = x \quad , \quad x \in [-1,1]$

$\sin^{-1}(\sin x) = x \quad , \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = 2\sin(x-\pi)$

$\cancel{x =} 2\sin(y-\pi)$

$2\sin(y-\pi) = x$

$\sin(y-\pi) = \frac{x}{2}$

$y-\pi = \sin^{-1}\frac{x}{2}$

$y = \sin^{-1}\frac{x}{2} + \pi .$

$f^{-1}(x) = \sin^{-1}\frac{x}{2} + \pi .$

المقيد

$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$

$-2 \leq x \leq 2$

(2) اوجد الدالة العكسية للدالة $y = \cos(x+\pi)+3$ على المجال المقيد

$\cos(\cos^{-1}x) = x \quad , \quad x \in [-1,1]$

$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad , \quad x \in [0,\pi]$

$y = \cos(x+\pi)+3$

$x = \cos(y+\pi)+3$

$\cos(y+\pi)+3 = x.$

$\cos(y+\pi) = x-3$

$y+\pi = \cos^{-1}(x-3)$

$y = \cos^{-1}(x-3) - \pi .$

$f^{-1}(x) = \cos(x-3) - \pi$

المقيد.

$-1 \leq x-3 \leq 1$

$2 \leq x \leq 4$

(3) اوجد الدالة العكسية للدالة $y = \tan(2x)+4$ على المجال المقيد

$\tan(\tan^{-1}x) = x \quad , \quad x \in R$

$\tan^{-1}(\tan x) = x \quad , \quad x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \tan(2x)+4 .$

$x = \tan(2y)+4$

$\tan(2y)+4 = x$

$\tan(2y) = x-4$

$2y = \tan^{-1}(x-4)$

$y = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x-4)$

المقيد. $-\infty < x-4 < \infty$

$-\infty < x < \infty$

ملاحظة

اذا علمت ان مجال الدالة $f(x)$ هو $[x_1, x_2]$ ومداها هو $[y_1, y_2]$ ونريد ايجاد مجال الدالة

$$y = a\,f(bx+c)+d$$

(1) نكتب الدالة على الصورة $\frac{y-d}{a} = f(bx+c)$

(2) يكون المجال جميع قيم x التي تحقق المتباينة $x_1 \le bx+c \le x_2$

(3) يكون المدى جميع قيم y التي تحقق المتباينة $y_1 \le \frac{y-d}{a} \le y_2$

اوجد مجال ومدى كل من الدوال التالية

المدى $-1 \le \frac{y-4}{3} \le 1$ $-3 \le y-4 \le 3$ $-1 \le y \le 7$ $\mathbb{R} = [-1, 7]$	المجال. $-\infty < 2x-\pi < \infty$ $-\infty < x < \infty$ $D = (-\infty, \infty)$	(1) $y = 3\sin(2x-\pi)+4$ نكتب الدالة على الصورة $\frac{y-4}{3} = \sin(2x-\pi)$ نعمل مقارنة مع مجال ومدى $\sin x$.
$-1 \le \frac{y-1}{-1} \le 1$ $1 \ge y-1 \ge -1$ $2 \ge y \ge 0$ $\mathbb{R} = [0, 2]$	$-\infty < x+\frac{\pi}{2} < \infty$ $-\infty < x < \infty$ $D = (-\infty, \infty)$	(2) $y = -\cos(x+\frac{\pi}{2})+1$ $\frac{y-1}{-1} = \cos(x+\frac{\pi}{2})$
$-\infty < \frac{y-3}{2} < \infty$ $-\infty < y < \infty$ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	الفترة $-\frac{\pi}{2} < x-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ $0 < x < \pi$ التعميم $D = (0, \pi) + n\pi$	(3) $y = 2\tan(x-\frac{\pi}{2})+3$ $\frac{y-3}{2} = \tan(x-\frac{\pi}{2})$

محمد عمر الخطيب

اوجد المجال والمدى المقيد لكل من الدوال التالية حتى يكون لها دالة عكسية

المدى $-1 \leq \frac{y-4}{3} \leq 1$ $-3 \leq y-4 \leq 3$ $1 \leq y \leq 7$ $R=[1,7]$	المجال المقيد $-\frac{\pi}{2} \leq x-\pi \leq \frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ $D=[-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$	(1) $y=3\sin(x-\pi)+4$ $\frac{y-4}{3} = \sin(x-\pi)$
المدى $-1 \leq y-1 \leq 1$ $0 \leq y \leq 2$ $R=[0,2]$	المجال المقيد $-\frac{\pi}{2} \leq x+\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ $-\pi \leq x \leq 0$ $D=[-\pi, 0]$	(2) $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})+1$ $y-1 = \cos(x+\frac{\pi}{2})$
المدى $-\infty < \frac{y-3}{2} < \infty$ $-\infty < y-3 < \infty$ $-\infty < y < \infty$ $R=(-\infty,\infty)$	المجال المقيد $-\frac{\pi}{2} < x-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ $0 < x < \pi$ $D=(0,\pi)$	(3) $y=2\tan(x-\frac{\pi}{2})+3$ $\frac{y-3}{2} = \tan(x-\frac{\pi}{2})$

محمد عمر الخطيب

اوجد مجال ومدى كل من الدوال التالية	المجال المقيد	
$-\frac{\pi}{2}\le\frac{y+\pi}{-2}\le\frac{\pi}{2}$ $.\ \pi\ge y+\pi\ge-\pi$ $-\pi\le y+\pi\le\pi$ $-2\pi\le y\le0$ $R=[-2\pi,0].$	$-1\le4x-2\le1$ $1\le4x\le3$ $\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}$ $D=[\frac{1}{4},\frac{3}{4}].$	$(1)\ y=-2\sin^{-1}(4x-2)-\pi$ $\frac{y+\pi}{-2}=\sin^{-1}(4x-2)$
$0\le\frac{y+\frac{\pi}{2}}{3}\le\pi$ $0\le y+\frac{\pi}{2}\le3\pi$ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{5\pi}{2}$ $R=[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}].$	المجال المقيد. $-1\le\frac{1}{2}x-3\le1$ $2\le\frac{1}{2}x\le4$ $4\le x\le8$ $D=[4,8]$	$(2)\ y=3\cos^{-1}(\frac{1}{2}x-3)-\frac{\pi}{2}$ $\frac{y+\frac{\pi}{2}}{3}=\cos^{-1}(\frac{1}{2}x-3).$
$-\frac{\pi}{2}<\frac{y-\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ $-2\pi<y-\pi<2\pi$ $-\pi<y<3\pi$ $R=(-\pi,3\pi)$	$-\infty<2x-1<\infty$ $-\infty<2x<\infty$ $-\infty<x<\infty$ $D=(-\infty,\infty)$	$(3)\ y=4\tan^{-1}(2x-1)+\pi$ $\frac{y-\pi}{4}=\tan^{-1}(2x-1)$
المدى. $0\le y-\pi\le\pi\ ,\ y-\pi\ne\frac{\pi}{2}$ $\pi\le y\le2\pi\ ,\ y\ne\frac{3\pi}{2}$ $R:[\pi,2\pi],\ y\ne\frac{3\pi}{2}$ او $[\pi,\frac{3\pi}{2}),(\frac{3\pi}{2},2\pi]$	المجال المقيد. $2x+1\le-1\ ,\ 2x+1\ge1$ $2x\le-2\ ,\ 2x\ge0$ $x\le-1\quad x\ge0$  $D=(-\infty,-1],[0,\infty)$	$(4)\ y=\sec^{-1}(2x+1)+\pi$ $y-\pi=\sec^{-1}(2x+1).$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما يأتي

تحقق من الآلة الحاسبة .

المدى = $\mathbb{R}$

(1) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$ $= \frac{-\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$

(2) $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ $= \frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$

(3) $\tan^{-1}1$ $= \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(4) $\sec^{-1}\sqrt{2}$ $= \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi].$

(5) $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{4})$ $= \frac{\pi}{4} \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ملاحظة $\frac{3\pi}{4}$ خطأ .
$\notin [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$

(6) $\cos(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}})$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(7) $\csc(\sin^{-1}\frac{2}{3})$ $= \frac{1}{\sin(\sin^{-1}\frac{2}{3})} = \frac{1}{2/3} = 3/2$

(8) $\tan(\cos^{-1}\frac{1}{4})$ $= \sqrt{15}$

(9) $\sin(\cot^{-1}-1)$ $= \sin(\tan^{-1}-1) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$

(10) $\sin^{-1}1 - \sin^{-1}-1$ $= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$

(11) $\sin 2\cos^{-1}(-\frac{3}{5})$ $= \frac{-24}{25}.$

من الآلة

تحلل بالمثلث ⇐ نفرض $\cos^{-1}-\frac{3}{5} = \theta$

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{-24}{25}.$

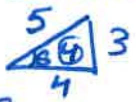
(12) $\cos 2\sin^{-1}(-\frac{3}{5})$ $= \frac{7}{25}$

من الآلة .

نفرض ان

$\sin^{-1}(\frac{-3}{5}) = \theta$

$\sin\theta = \frac{-3}{5}$



$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$= (\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{7}{25}.$

محمد عمر الخطيب

لا نستطيع استخدام الآلة الحاسبة

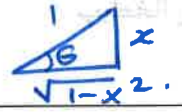
بسط كل مما ياتي (استخدم مثلث التحويل)

(1) $\tan(\sin^{-1}x)$

نفرض $\theta = \sin^{-1}x$

$\sin\theta = x = \frac{x}{1}$

نرسم مثلث قائم.



$= \tan\theta$

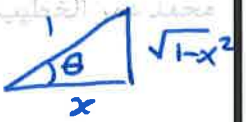
$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

---

(2) $\sin(\cos^{-1}x)$

نفرض $\theta = \cos^{-1}x$

$\cos\theta = x = \frac{x}{1}$



$= \sin\theta$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$.

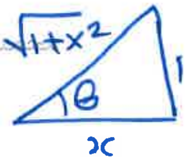
---

(3) $\cos(\cot^{-1}x)$

$\theta = \cot^{-1}x$

$\cot\theta = x$

$\tan\theta = \frac{1}{x}$



$= \cos\theta$

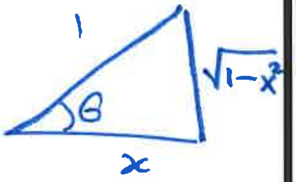
$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

---

(4) $\sin 2(\cos^{-1}x)$

$\theta = \cos^{-1}x$

$\cos\theta = x$



$= \sin 2\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta$

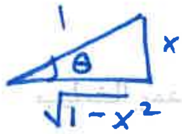
$= 2 \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \cdot \frac{x}{1} = 2x\sqrt{1-x^2}$.

---

(5) $\sin(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)$

$\theta = \sin^{-1}x$

$\sin\theta = x$



$\beta = \cos^{-1}x.$

$\cos\beta = x$

$= \sin(\theta + \beta)$

$= \sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta$

$= x \cdot x + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}$

$= x^2 + 1 - x^2$

$= 1$ #

محمد عمر الخطيب

المعادلات المثلثية

حل المعادلات المثلثية التالية على الفترة المعطى (اكتب جميع الحلول)

(1) $2\sin x+1=0$,$[0,2\pi]$

$2\sin x=-1$

$\sin x=-\frac{1}{2}$

x $\frac{\pi}{6}$

$Q_3 \rightarrow x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$

$Q_4 \rightarrow x\ 2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

shift sin (½)

بدون اشاره .

لانها زاوية اساسية .

$x=\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$

---

(2) $3\tan x+4=1$,$[0,2\pi]$

$3\tan x=1-4$

$3\tan x=-3$

$\tan x=-1.$

x $\frac{\pi}{4}$

$Q_2 \rightarrow x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$Q_4 \rightarrow x=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

$x=\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$

---

(3) $\sin 2x=1$, $[0,2\pi]$

اولاً: يجب توسيع المجال

$[0,4\pi]$

$2x$ $\frac{\pi}{2} \rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}.$

$\frac{3\pi}{2}$. ليس حل

الحل زوايا ربعيه

$2x=\frac{\pi}{2}\rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5\pi}{2}$

$\Rightarrow \boxed{x=\frac{5\pi}{4}}$

---

(4) $\sqrt{3}\sec x+9=11$ $[0,360^\circ]$

$\sqrt{3}\sec x=11-9$

$\sqrt{3}\sec x=2$

$\sec x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

x 30°

$Q_1 \rightarrow x=30^\circ$

$Q_4 \rightarrow x=360-30^\circ$

$=330^\circ$

الحل هو

$30^\circ, 330^\circ$

محمد عمر الخطيب

حل المعادلات المثلثية التالية (اكتب جميع الحلول)

(1) $\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x(\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0.$

$x < \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{matrix}$

الفرق بينهم π. يصبح حل واحد.

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + n\pi}$

$\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

$x < \begin{matrix} 0 \text{ ليس حل.} \\ \pi \rightarrow x = \pi \end{matrix}$

$x = \pi + 2n\pi$

$\boxed{x = (2n+1)\pi}$

---

(2) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$

$(\sin x - 3)(\sin x + 1) = 0$

$\sin x - 3 = 0$

$\sin x = 3$

لا يوجد حل.

$\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -1.$

$x < \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \text{ ليس حل.} \\ \frac{3\pi}{2} \end{matrix}$

$\boxed{x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.}$

---

(3) $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$

$1 - \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\cos x - \cos^2 x = 0$

$\cos^2 x - \cos x = 0$

$\cos x(\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + n\pi}$

منه السؤال الأول

$\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 1$

$x < \begin{matrix} 0 \\ \pi \text{ ليس حل} \end{matrix}$

$x = 0 + 2n\pi.$

$\boxed{x = 2n\pi.}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حل المعادلات المثلثية التالية (اكتب جميع الحلول)

(1) $\sin 2x + \cos x = 0$

توحيد الزاوية

$2\sin x \cos x + \cos x = 0$

$\cos x (2\sin x + 1) = 0.$

$\cos x = 0.$

زاوية ربعية

$x \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$ ليس حل

$x = 0 + 2n\pi.$

$\boxed{x = 2n\pi.}$

$2\sin x + 1 = 0$

$\sin x = \frac{-1}{2}$

زاوية داخلية.

$x \overset{\pi/6}{\begin{cases} Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \\ Q_4 \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \end{cases}}$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi.$

$x = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi.$

(2) $\tan^2 x - 1 = 0$

$\tan^2 x = 1$

$\tan x = 1$,

$x \overset{\pi/4}{\begin{cases} Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}. \end{cases}}$ الفرق بينهم $\pi.$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + n\pi}$

$\tan x = -1$

$x \overset{\pi/4}{\begin{cases} Q_2 \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \\ Q_4 \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}. \end{cases}}$ π

$\boxed{x = \frac{3}{4}\pi + n\pi.}$

(1) اوجد قيمة الزاوية الحادة β التي تجعل المتطابقة التالية صحيحية

$$4\cos x - 3\sin x = 5\cos(x+\beta)$$

بالقسمة ع 5.

$$\frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x = \cos(x+\beta) = \cos x\cos\beta - \sin x\sin\beta.$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{4}{5}\\ \sin\beta &= \frac{3}{5}\end{aligned}\right\} \tan\beta = \frac{3}{4} \rightarrow \beta = \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 37^\circ.$$

(2) اثبت المتطابقة

$$\frac{\sin x}{1-\cos x} = \csc x + \cot x$$

الطرف الأيسر

L.H.S

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

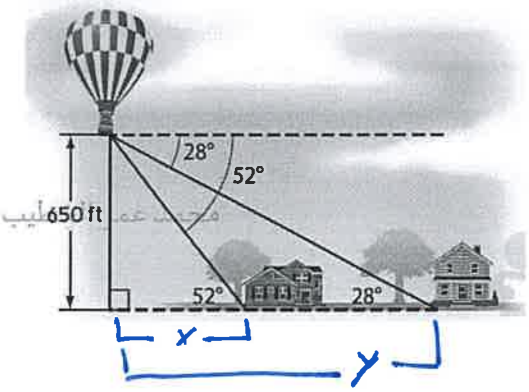
$$= \frac{\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

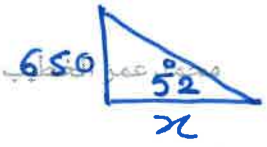
$$= \frac{1+\cos x}{\sin x}.$$

$$= \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \csc x + \cot x \quad \#$$

(3) يتحرك منطاد الى الاعلى وبزاوية انخفاض 28° بالنسبة للمنزل الأول وبزاوية 52° بالنسبة للمنزل الثاني ، اذا كان ارتفاع المنطاد عن الارض $650\,ft$ ، اوجد المسافة بين المنزلين





$$\tan 52^\circ = \frac{650}{x}$$

$$x = \frac{650}{\tan 52^\circ} \approx 508$$

$$\tan 28 = \frac{650}{y}$$

$$y = \frac{650}{\tan 28} = 1222$$

المسافة بينهم.

$$y - x = 714\ ft.$$

محمد عمر الخطيب

الوحدة الأولى : تمهيدات /// الدرس الرابع : الدوال الأسية واللوغارتمية

قواعد الأسس

$(1)\ a^0 = 1 \quad , a \neq 0$

$(2)\ a^m \times a^n = a^{m+n}$

$(3)\ \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(4)\ (a^m)^n = a^{m\times n} \quad , a \neq 0$

$(5)\ (a \times b)^m = a^m \times b^m$

$(6)\ (\dfrac{a}{b})^m = \dfrac{a^m}{b^m} \quad , b \neq 0$

$(7)\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$(8)\ a^{-m} = \dfrac{1}{a^m} \ , a \neq 0$

$(9)\ (\dfrac{a}{b})^{-m} = \dfrac{b^m}{a^m} \quad , a,b \neq 0$

الدالة الأسية:

هي الدالة التي تكون على الصورة: $f(x) = a \times b^x$ حيث $, a \neq 0 \quad b > 0 \quad , \quad b \neq 1$

الدالة الأسية الطبيعية

$$f(x) = e^x$$

حيث e يسمى العدد الطبيعي وهو عدد غير نسبي يساوي تقريبا $e \approx 2.718$

ويمكن تعريف هذا العدد

$$e = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 2.718281828... \quad , \quad e^a = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x$$

اوجد قيمة

$(1)\ \lim_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^x = e^2$

$(2)\ \lim_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left[(1-\dfrac{1}{x})^x\right]^2 = \left[\lim_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x\right]^2 = (e^{-1})^2 = e^{-2}$

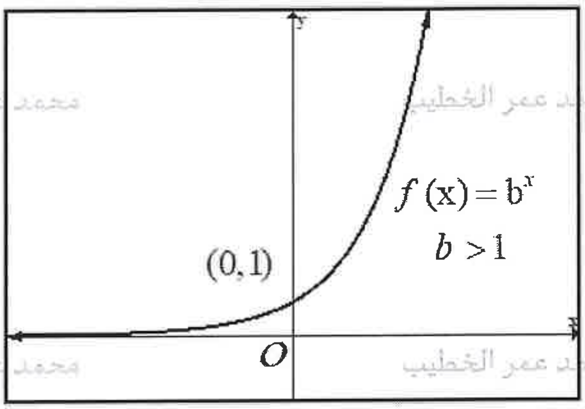
$(3)\ \lim_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$

محمد عمر الخطيب

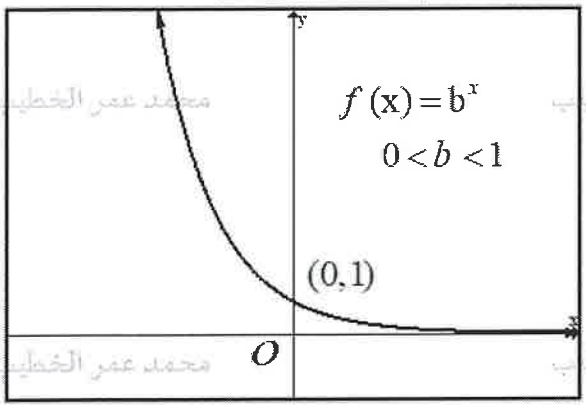
محمد عمر الخطيب

التمثيل البياني للدوال الأسية

النمو الأسي



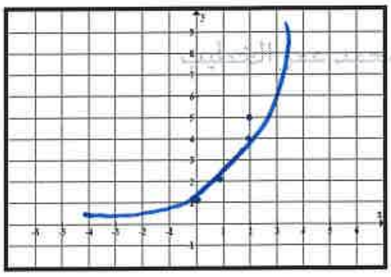
التضاؤل الأسي



الدالة	$f(x)=b^x$ $b>1$
المجال :	$(-\infty ,\infty)$
المدى	$(0, \infty)$
التقاطع مع محور السينات	لا يوجد
التقاطع مع محور الصادات	1

الدالة	$f(x)=b^x$ $0<b<1$
المجال :	$(-\infty , \infty)$
المدى	$(0,\infty)$
التقاطع مع محور السينات	—
التقاطع مع محور الصادات	1

مثل الدالة $f(x)=2^x$ بيانيا . موضحاً المجال والمدى ونقاط التقاطع مع المحاور



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8

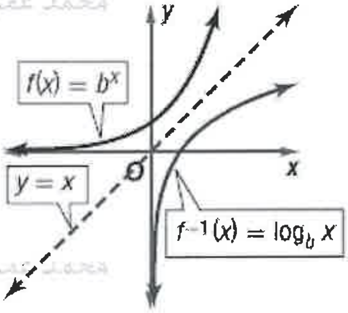
مجال الدالة $(-\infty ,\infty)$

مدى الدالة $(0 ,\infty)$

الدالة اللوغارتمية

الدالة الوغاريتمية : هي معكوس (الدالة العكسية) للدالة الاسية $f(x) = b^x$ ويرمز لها الرمز $log_b x$

$$f(x) = b^x \quad ,b > 0, b \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = log_b x$$



نلاحظ من التمثيل البياني أن الدالتين

$f(x) = b^x$ $\qquad$ $f^{-1}(x) = log_b x$

تمثل انعكاسا لبعضهما البعض حول المستقيم $y = x$

الربط بين التعبيرين اللوغاريتمي والأسي

$\log_b x = y$ إذا وفقط إذا $b^y = x$

الشكل اللوغاريتمي	الشكل الأسي
$y = log_b x$	$b^y = x$

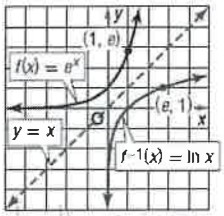
هام

ملاحظة هامة :

(1)اذا كانت $b = 10$ فأن اللوغارتم يسمى اللوغارتم المعتاد ويرمز له $log\, x$

(2) اذا كانت $b = e$ فأن اللوغارتم يسمى اللوغارتم الطبيعي ويرمز له $\ln x$

دالة اللوغاريتم الطبيعي : $y = ln x$ هي معكوس للدالة الأسية الطبيعية : $y = e^x$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

خواص اللوغارتمات

اذا كانت $x, y > 0, a \neq 1 , a > 0$ فان

(1) $\ln 1 = 0$

(2) $\ln e = 1$

(3) $\ln x^r = r \ln x$

(4) $\ln e^x = x$

(5) $e^{\ln x} = x$

(6) $\ln(x\, y) = \ln x + \ln y$

(7) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

(1) $log_a 1 = 0$

(2) $log_a a = 1$

(3) $log_a x^r = r\, log_a x$

(4) $log_a a^r = r$

(5) $a^{log_a x} = x$

(6) $log_a (x\, y) = log_a x + log_a y$

(7) $log_a (\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y$

(8) $\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$

(8) $log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$

اذا كانت $a, b, c > 0, b, c \neq 1$ فأن

خاصية نغير الاساس

(1) $log_b a = \frac{log_c a}{log_c b} = \frac{ln a}{ln b}$, (2) $a^x = e^{x \ln a}$

ملاحظة:

(1) مجال الدالة اللوغارتمية $y = \log_b x$ هو $(0, \infty)$ حيث $b > 0, b \neq 1$

(2) مدى الدالة اللوغارتمية $y = \log_b x$ هو $(-\infty, \infty)$ حيث $b > 0, b \neq 1$

أوجد قيمة كل مما يأتي (بدون استخدام الآلة الحاسبة)

محمد عمر الخطيب

(1) $\frac{1}{2}\log_4 16 - \log_3 \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}_4 4^2 - [\operatorname{Log}_3 1 - \operatorname{Log}_3 3]$

$= \frac{1}{2}(2)\operatorname{Log}_4 4 - [0 - 1] = 1 - (-1)$

$= 2$ #

---

(2) $\log 25 + 2\log 4 - 2\log 2$ $= \operatorname{Log} 25 + \operatorname{Log} 4^2 - \operatorname{Log} 2^2$

$= \operatorname{Log} \frac{25 \times 4^2}{2^2}$

$= \operatorname{Log} 100 = 2$

---

(3) $\ln 12 - 2\ln 2 - \ln 3 + e^{\ln 2}$

$= \operatorname{Ln} 12 - \operatorname{Ln} 2^2 - \operatorname{Ln} 3 + 2$

$= \operatorname{Ln} \frac{12}{2^2 \times 3} + 2 = \operatorname{Ln} 1 + 2 = 2$ #

---

(4) $2\ln\sqrt{e} - \ln\frac{1}{e^4} + 10^{\log e^{\ln 4}}$

$= \ln(\sqrt{e})^2 - [\operatorname{Ln} 1 - \operatorname{Ln} e^4] + 4$

$= \ln e + \operatorname{Ln} e^4 + 4$

$= 1 + 4 + 4 = 9.$ #

---

(5) $\log_2 7 \times \log_5 2 \times \log_7 5$

$= \frac{\cancel{\operatorname{Ln} 7}}{\cancel{\operatorname{Ln} 2}} \cdot \frac{\cancel{\operatorname{Ln} 2}}{\cancel{\operatorname{Ln} 5}} \cdot \cancel{\frac{\cancel{\operatorname{Ln} 5}}{\operatorname{Ln} 7}}$

$= 1$ #

محمد عمر الخطيب

اكتب كل مما يلي على شكل لوغاريتم منفرد

(1) $\frac{1}{2}\ln 4 - \ln 3$ $= \ln 4^{1/2} - \ln 3 = \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3}$.

(2) $\ln\frac{3}{4} + 4\ln 2$ $= \ln\frac{3}{4} + \ln 2^4 = \ln \frac{3}{4}\cdot 2^4 = \ln 12$

(3) $2log_3\, x + log_3\, 2$ $= \log_3 x^2 + \log_3 2$

$= \log_3 2x^2$

(4) $log\, a + 2log\, b - \frac{1}{2}log\, c$ $= \log a + \log b^2 - \log c^{1/2}$

$= \log \frac{a\cdot b^2}{c^{1/2}} = \log \frac{ab^2}{\sqrt{c}}$.

(5) $3\ln x + 4\ln y - 5\ln z$ $= \ln x^3 + \ln y^4 - \ln z^5$

$= \ln \frac{x^3y^4}{z^5}$.

(6) $2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \ln 2$

$= \ln x^2 - \ln (x-1)^{1/2} + \ln 2$

$= \ln \frac{x^2\cdot 2}{(x-1)^{1/2}}$

$= \ln \frac{2x^2}{\sqrt{x-1}}$

محمد عمر الخطيب

اوجد مجال كل من الدوال التالية:

(1) $y = log_2 x^2 + \sqrt{x+1}$

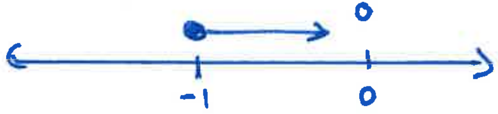
مجال الدالة الأولى

$R / \{0\}$

مجال الدالة الثانية

$x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$



$D = [-1, 0), (0, \infty)$

(2) $y = log (\ln(x-1))$

مجال الدالة الداخلية

$x - 1 > 0$

$x > 1$

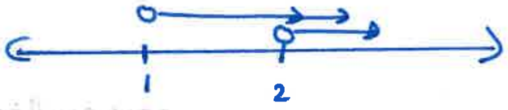
مجال الدالة الخارجية

$Ln (x-1) > 0$

$x - 1 > e^0$

$x - 1 > 1$

$x > 2$



$D = (2, \infty)$.

(3) $y = \sqrt{1 - \ln x}$

مجال الدالة الداخلية

$x > 0$

مجال الدالة الخارجية

$1 - \ln x \geq 0$

$- \ln x \geq -1$

$\ln x \leq 1$

$x \leq e$.

$D = (0, e]$.

(4) $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$

مجال البسط

R.

تهمل

مجال المقام

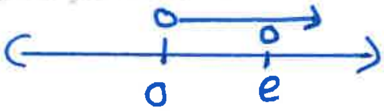
$x > 0$

اصفار المقام

$Ln x - 1 = 0$

$Ln x = 1$

$x = e$.



$D = (0, e), (e, \infty)$.

(5) $y = \dfrac{\ln(x-2)}{\log(5-x)}$

مجال البسط

$x - 2 > 0$

$x > 2$

مجال المقام

$5 - x > 0$

$- x > -5$

$x < 5$

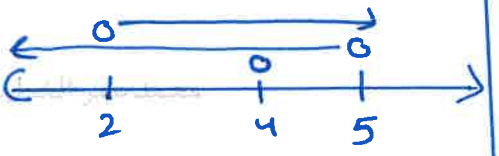
اصفار المقام

$Log(5-x) = 0$

$5 - x = 10^0$

$5 - x = 1$

$x = 4$.



$D = (2, 4), (4, 5)$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد قاعدة الدالة الأسية على الصورة $y = a \times b^x$ التي تمر بالنقطتين $(0,5),(1,2)$

$(0,5) \Rightarrow 5 = a \times b^0 \Rightarrow \boxed{5 = a}$

$(1,2) \Rightarrow 2 = a \cdot b^1 \Rightarrow 2 = 5b$

$\Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{5}}.$

$y = 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x.$

---

(2) اوجد قاعدة الدالة الأسية على الصورة $y = a\, e^{bx}$ التي تمر بالنقطتين $(1,2),(2,6)$

$(1,2) \Rightarrow 2 = a\, e^{b.} \quad ----①$

$(2,6) \Rightarrow 6 = a\, e^{2b.} \quad ----②$

بقسمة المعادلة الثانية على الأولى

$\frac{6}{2} = \frac{a\, e^{2b}}{a\, e^{b}}$

$3 = e^{b} \Rightarrow \boxed{b = Ln3.}$

بالتعويض في اي معادلة

$2 = a\, e^{b}$

$2 = a\, e^{Ln3} = a \cdot 3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}.}$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}\, e^{x\, ln3}.$

محمد عمر الخطيب

المعادلات الأسية واللوغارتمية

حل المعادلات التالية

(1) $e^{2x} - 5 = 0$

$e^{2x} = 5$

$\ln e^{2x} = \ln 5$

$2x = \ln 5$

$x = \frac{\ln 5}{2}$. الحل

---

(2) $e^{2\ln x} - 4 = 0$

$e^{\ln x^2} - 4 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x = -2 \ ,\ x = 2$

مرفوض

$\Rightarrow \boxed{x = 2}$ الحل

شرط الحل

$x > 0$

او التأكد

الحل.

---

(3) $x^2e^x - e^x = 0$

$e^x(x^2 - 1) = 0$

$e^x = 0$

مستحيل

$x^2 - 1 = 0$

$(x-1)(x+1) = 0$

$x = 1 \ ,\ x = -1 .$

الحل .

---

(4) $4\ln 3x + 8 = 0$

$4\ln 3x = -8 .$

$\ln 3x = -2$

$3x = e^{-2}$

$x = \frac{e^{-2}}{3} = \frac{1}{3e^2} .$

الحل .

شرط الحل

$3x > 0$

$x > 0$

---

(5) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2$

$\ln x(x-1) = \ln 2$

$x(x-1) = 2$

$x^2 - x = 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 ,\ \ x = -1$

✓ مرفوض

شرط الحل

$x > 0$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 .$

نأخذ التقاطع .

$x > 1 .$

---

(6) $x^2 \ln x - 9\ln x = 0$

$\ln x(x^2 - 9) = 0$

$\ln x = 0$

$x = 1$ ✓

$x^2 - 9 = 0$

$(x-3)(x+3) = 0$

$x = 3 \ ,\ x = -3$

✓ مرفوض

شرط الحل

$x > 0$

الحل هو $x = 1 , x = 3$

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

(1) $\log_2(x^2-1)-\log_2(x-1)=2$

$$\text{Log}_2 \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

$$\text{Log}_2 \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\text{Log}_2 (x+1) = 2$$

$$x+1 = 2^2$$

$$\boxed{x = 3.}$$ الحل.

شرط الحل

$x > 1$

$x^2-1>0$

$-1 \quad 1$

$$\boxed{x>1}$$

(2) $3^{3x-3}=2^{x+1}$

$$\text{Ln}\, 3^{3x-3} = \text{Ln}\, 2^{x+1}$$

$$(3x-3)\,\text{Ln}\, 3 = (x+1)\ln 2$$

$$3x\ln 3 - 3\ln 3 = x\ln 2 + \ln 2$$

$$3x\ln 3 - x\ln 2 = \ln 2 + 3\ln 3.$$

$$x(3\,\text{Ln}\, 3 - \text{Ln}\, 2) = \text{Ln}\, 2 + 3\,\text{Ln}\, 3.$$

$$x = \frac{\text{Ln}\, 2 + 3\,\text{Ln}\, 3}{3\,\text{Ln}\, 3 - \text{Ln}\, 2}$$

(3) $e^{2x}+e^{x}-12=0$

$$(e^x)^2 + e^x - 12 = 0$$

$$y^2 + y - 12 = 0$$

$$(y+4)(y-3) = 0$$

$$(e^x+4)(e^x-3) = 0$$

$$\boxed{y = e^x.}$$ تذكر

$$e^x + 4 = 0$$

$$e^x = -4.$$

لايوجد حل

$$e^x - 3 = 0$$

$$e^x = 3$$

$$\boxed{x = \text{Ln}\, 3.}$$

(4) $e^{x}=1+6e^{-x}$

$$e^x = 1 + \frac{6}{e^x}.$$

$$e^{2x} = e^x + 6$$

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0$$

$$(e^x-3)(e^x+2) = 0$$

$$e^x - 3 = 0$$

$$e^x = 3$$

$$\boxed{x = \text{Ln}\, 3.}$$

$$e^x + 2 = 0$$

$$e^x = -2$$

لايوجد حل

محمد عمر الخطيب

1) يعرف علماء الكيمياء درجة حموضة المحلول بانه

$$PH = -\log\left[H^+\right]$$

حيث $\left[H^+\right]$ هو تركيز ايون الهيدروجين في المحلول

(أ) اوجد درجة الحموضة لمحلول فيه تركيز ايون الهديدروجين $\left[H^+\right] = 7.5\times10^{-7}$

$$pH = -\text{Log}[H^+] = -\text{Log}\ 7.5\times10^{-7} = 6.12$$

(ب) اوجد درجة تركيز ايون الهديدروجين $\left[H^+\right]$ لمحلول درجة حموضتة 8

$$pH = -\text{Log}[H^+]$$

$$8 = -\text{Log}[H^+]$$

$$-8 = \text{Log}[H^+]$$

$$[H^+] = 10^{-8}.$$

---

2) تحدد قوة الزلزال M بوحدة الريختر بكمية الطاقة E المتحررة منه .حسب العلاقة

$$\log E = 4.4 + 1.5M$$

(أ) اوجد طاقة زلزال قوتة 6 ريختر

$$\text{Log}\ E = 4.4 + 1.5(6)$$

$$\text{Log}\ E = 13.4$$

$$E = 10^{13.4} = 2.5\times10^{13}.$$

(ب) اوجد قوة زلزال طاقتة 1.2×10^{11} جول

$$\text{Log}\ 1.2\times10^{11} = 4.4 + 1.5\cdot M$$

$$11.08 = 4.4 + 1.5\ M$$

$$M = \frac{11.08 - 4.4}{1.5}$$

$$M \approx 4.45.$$

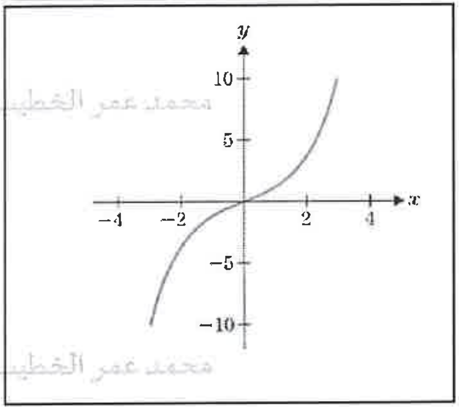
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الدوال الزائدية

(1) اوجد مجال ومدى الدالة $f(x) = \sinh x$ ثم اوجد $f(0)$

$$1)\quad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$



$D = (-\infty , \infty)$

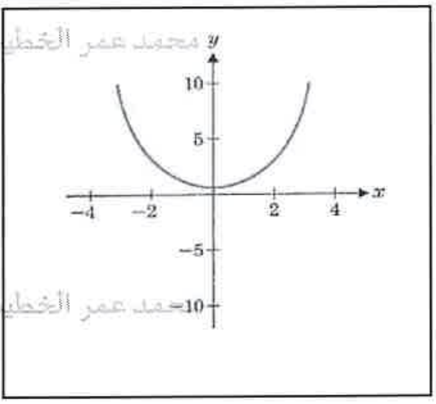
$\mathbb{R} = (-\infty , \infty)$

$f(0) = \sinh 0 = 0$

---

(2) اوجد مجال ومدى الدالة $f(x) = \cosh x$ ثم اوجد $f(0)$

$$2)\quad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$



$D = (-\infty , \infty)$

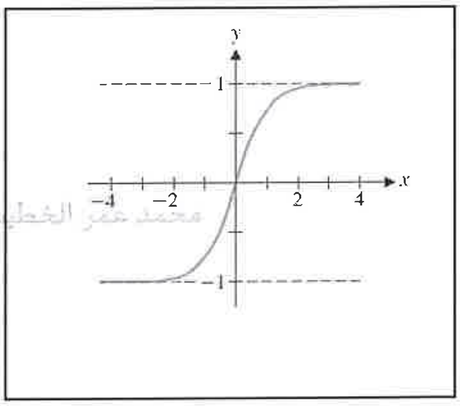
$\mathbb{R} = [1 , \infty)$

$f(0) = \cosh 0 = 1$

---

(3) اوجد مجال ومدى الدالة $f(x) = \tanh x$ ثم اوجد $f(0)$

$$3)\quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$



$D = (-\infty , \infty)$

$\mathbb{R} = (-1 , 1)$

$f(0) = \tanh 0 = 0.$

للدالة خطوط تقارب افقية هي

$y = \pm 1$

متطابقات الدوال الزائدية

ملاحظة:

كل المتطابقات المثلثية التي تتطبق على الدوال الدائرية تنطبق على الدوال الزائدية ولكن يتم وضع اشارة سالب امام كل دوال $\sinh x$ ذات القوى الزوجية

$(1)\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$(2)\ \sinh(-x) = -\sinh x$

$(3)\ \cosh(-x) = \cosh x$

$(4)\ \sinh x + \cosh x = e^x$

(1) استعن بالمتطابقة $\sin 4x = 4(\sin x - 2\sin^3 x)\sqrt{1-\sin^2 x}$ في كتابة المتطابقة $\sinh 4x$

$$\sinh 4x = 4(\sinh x - 2\sinh^3 x)\sqrt{1 + \sinh^2 x}$$

هنا التغير

---

(2) اي من المتطابقات التالية صحيحة وعدل الخطاء

$(a)\ \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$. خطأ $\rightarrow$ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$(b)\ \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$. صح

---

(3) اثبت ان $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$$

$$\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \ \#$$

محمد عمر الخطيب

(1) حل المعادلة $\cosh(x^2-2x)=1$

ملاحظ .

$\cosh 0 = 1$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0$, $x = 2$.

---

(2) حل المعادلة $2\cosh x + 10\sinh x = 5$

$2\cosh x + 10\sinh x = 5$.

$2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + 10\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 5$

$e^x + e^{-x} + 5e^x - 5e^{-x} = 5$.

$6e^x - 4e^{-x} = 5$

بالضرب في e^x.

$6e^{2x} - 4 = 5e^x$.

$6e^{2x} - 5e^x - 4 = 0$

$6(e^x)^2 - 5e^x - 4 = 0$

$(3e^x - 4)(2e^x + 1) = 0$

$3e^x - 4 = 0$, $2e^x + 1 = 0$

$3e^x = 4$ $\quad$ $2e^x = -1$

$e^x = \frac{4}{3}$ $\quad$ $e^x = \frac{-1}{2}$

$\boxed{x = \ln\frac{4}{3}}$ $\quad$ لا يوجد حل

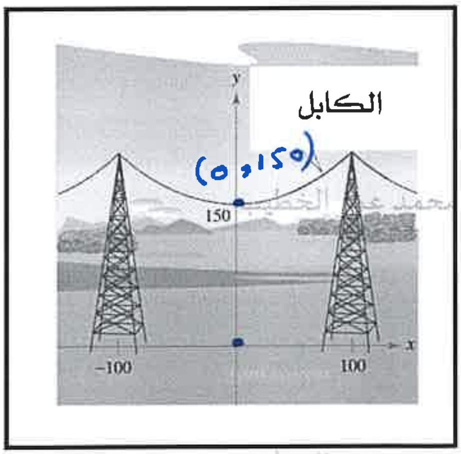
---

(3) يمثل الشكل المجاور كابل كهربائي يمتد بين عمودين للكهرباء والمسافة بينهم 200 ft حيث

تمثل المعادلة $y = a\cosh\frac{x}{b}$ ارتفاع الكابل عند اي مسافة x اوجد قيمة a,b اذا كان ارتفاع العمود 184.6 ft

$(0,150) \rightarrow 150 = a\cosh\frac{0}{b}$

$150 = a$



$(100, 184.6) \rightarrow 184.6 = a\cosh\frac{100}{b}$.

$184.6 = 150\cosh\frac{100}{b}$.

$\cosh\frac{100}{b} = \frac{184.6}{150}$

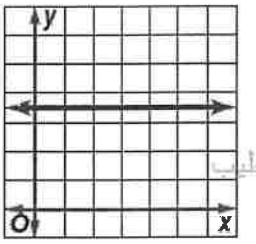
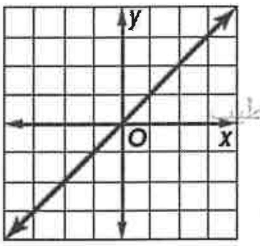
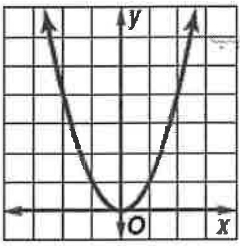
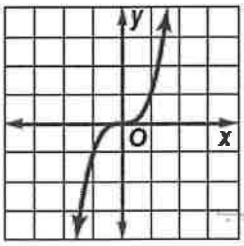
$\frac{100}{b} = \cosh^{-1}\left(\frac{184.6}{150}\right) = 0.666$

$\frac{100}{b} = 0.666 \rightarrow \boxed{b = 150}$

محمد عمر الخطيب

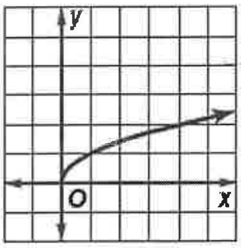
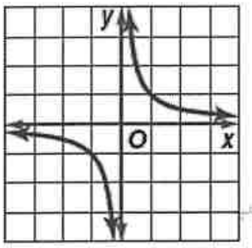
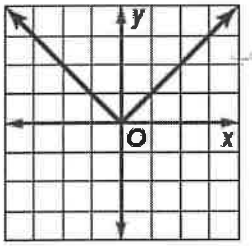
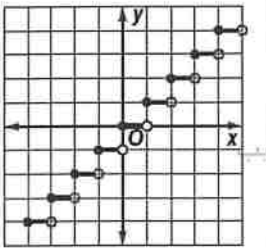
الوحدة الأولى : تمهيدات /// الدرس الخامس : تحويلات الدوال

الدوال الاساسية

اسم الدالة	التمثيل البياني	مجال الدالة	مدى الدالة	السلوك الطرفي	محور التناظر	نوع الدالة
الدالة ثابتة $f(x)=c$		R	$\{c\}$	**من جهة اليسار** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$ **من جهة اليمين** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$	**محور الصادات**	**دالة زوجية**
الدالة المحايدة $f(x)=x$		R	R	**من جهة اليسار** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ **من جهة اليمين** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	**نقطة الاصل**	**دالة فردية**
الدالة التربيعية $f(x)=x^2$		R	$[0,\infty)$	**من جهة اليسار** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ **من جهة اليمين** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	**محور الصادات**	**دالة زوجية**
الدالة التكعيبية $f(x)=x^3$		R	R	**من جهة اليسار** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ **من جهة اليمين** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	**نقطة الاصل**	**دالة فردية**

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اسم الدالة	التمثيل البياني	مجال الدالة	مدى الدالة	السلوك الطرفي	محور التناظر	نوع الدالة
دالة الجذر التربيعية $f(x)=\sqrt{x}$		$[0,\infty)$	$[0,\infty)$	من جهة اليمين $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$	لا يوجد	غير ذلك
الدالة المقلوب $f(x)=\dfrac{1}{x}$		$R/\{0\}$	$R/\{0\}$	من جهة اليسار $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ من جهة اليمين $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$	نقطة الاصل	دالة فردية
دالة القيمة المطلقة $f(x)=\|x\|$		R	$[0,\infty)$	من جهة اليسار $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ من جهة اليمين $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$	محور الصادات	دالة زوجية
دالة أكبر عدد صحيح $f(x)=[x]$		R	$\mathbb{Z}$	من جهة اليسار $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ من جهة اليمين $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$	لا يوجد	غير ذلك

التحويلات الهندسية

(1) الأزاحات الافقية والراسية

اولويات التحويلات الهندسية

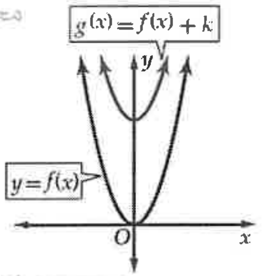
$$y=\underset{\boxed{3}}{\underset{\downarrow}{a}}\;f(\underset{\boxed{2}}{\underset{\downarrow}{b}}(x+\underset{\boxed{1}}{\underset{\downarrow}{c}}))+\underset{\boxed{4}}{\underset{\downarrow}{d}}$$

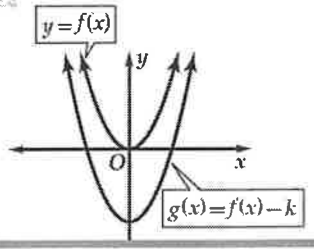
الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.



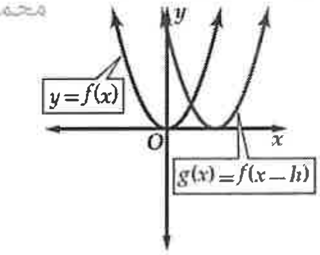


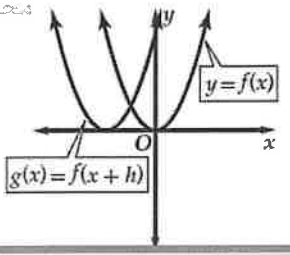
التأثير على y بالجمع والطرح

الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





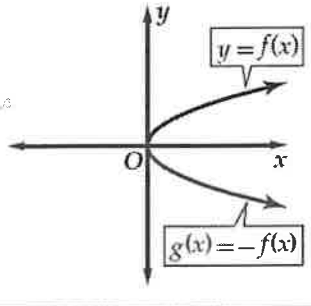
التأثير على x على بالجمع والطرح

2) الانعكاس في المحاور الافقية والرأسية

الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

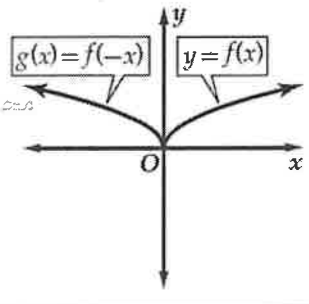
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x .



الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

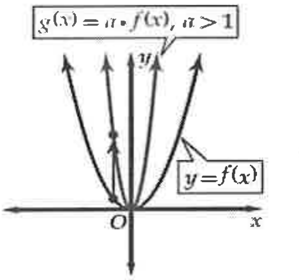
(3) الانكماش والتمدد

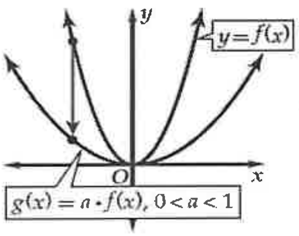
التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

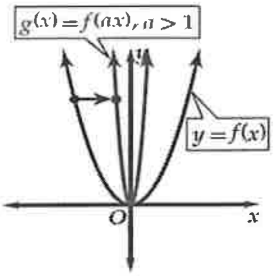


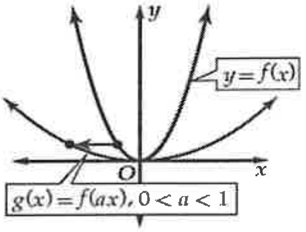


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$؛ إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0<a<1$



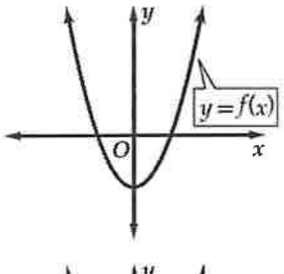


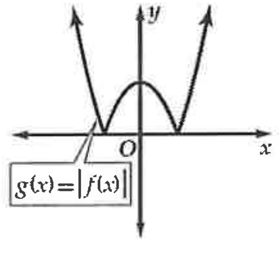
(4) التحويلات بالقيمة المطلقة

التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

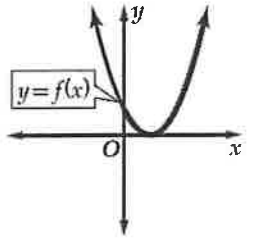
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

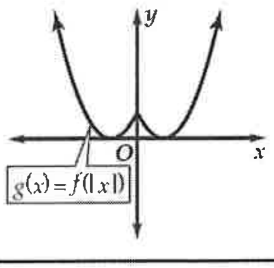




$g(x) = f(|x|)$

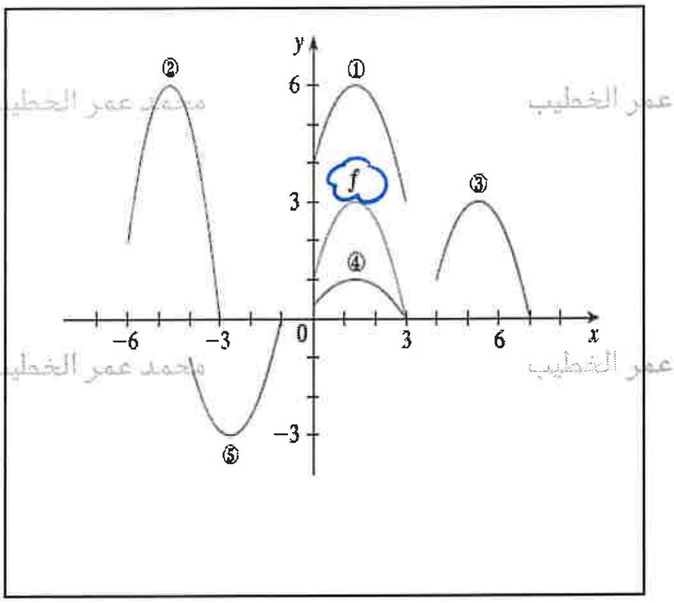
يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





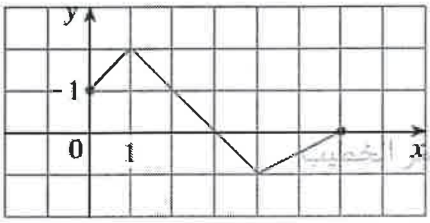
(1) اعتمد على الرسم البياني المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ وبعض التحويلات الهندسية للدالة $f(x)$ في اكمال الجدول التالي

رقم الدالة	الدالة
3	$f(x-4)$
1	$f(x)+3$
5	$-f(x+4)$
2	$2f(x+6)$
4	$\frac{1}{3}f(x)$



---

(2) اعتمد على الرسم البياني المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في رسم الدالة $g(x)$ في الحالات التالية:



$(a)\ g(x)=f(x+2)+1$

(١) ازاحه لليسار 2

(٢) ازاحة للاعلى ١

ممكن ازاحة النقاط.

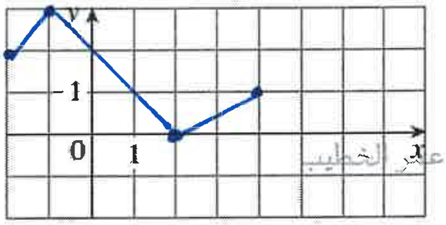
(-2,1)

(0,1) → (-2,2)

(1,2) → (-1,3)

(4,-1) → (2,0)

(6,0) → (4,1)



$(b)\ g(x)=f(2x)$

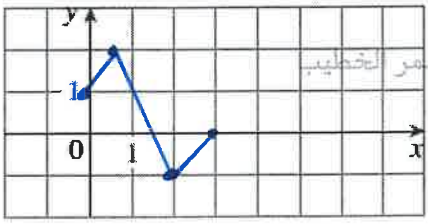
انكماش افقي بمقدار $\frac{1}{2}$

$(0,1) \rightarrow (0,\frac{1}{2})$

$(1,2) \rightarrow (\frac{1}{2},2)$

(4,-1) → (2,-1)

(6,0) → (3,0)



محمد عمر الخطيب

اعتمد على بيان الدالة $f(x)$ في وصف بيان الدالة $g(x)$ في كل مما يلي

(1) $g(x)=f(x-3)$	ازاحة للمينه بمقدار 3 .
(2) $g(x)=f(x+1)$	ازاحة لليسار بمقدار ١
(3) $g(x)=f(x)+2$	ازاحة للاعلى بمقدار 2
(4) $g(x)=f(x)-4$	ازاحة للاسفل بمقدار ٤ .
(5) $g(x)=2f(x)$	تمدد رأسي بمقدار 2
(6) $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$	انكماش رأسي بمقدار $\frac{1}{2}$
(7) $g(x)=f(2x)$	انكماش افقي بمقدار $\frac{1}{2}$
(8) $g(x)=f(\frac{1}{2}x)$	تمدد افقي بمقدار 2 .
(9) $g(x)=-f(x)$	انعكاس حول محور x .
(10) $g(x)=f(-x)$	انعكاس حول محور y .
(11) $g(x)=2f(x-1)+3$	(١) ازاحة للمينه بمقدار ١ . (٢) تمدد رأسي بمقدار 2 . (٣) ازاحة للاعلى بمقدار 3 .
(14) $g(x)=-f(2x-4)-3$ $= -f(2(x-2))-3$	(١) ازاحة لليمين 2 . (٢) انكماش افقي بمقدار $\frac{1}{2}$ (٣) انعكاس حول محور X . (٤) ازاحة للاسفل بمقدار 3 .

محمد عمر الخطيب

(1) اعتمد على الدالة $f(x)=x^2$ في وصف بيان الدالة $g(x)$ في كل مما يلي

(a) $g(x)=x^2+2$

ازاحة للاعلى بمقدار 2

(b) $g(x)=(x-2)^2-1$

(1) ازاحة لليمين بمقدار 2

(2) ازاحة للاسفل بمقدار 1

(c) $g(x)=2x^2+3$

(1) تمدد رأسي بمقدار 2 .

(2) ازاحة للاعلى بمقدار 3 .

(d) $g(x)=-x^2+1$

(1) انعكاس حول محور x .

(2) ازاحة للاعلى بمقدار 1

(e) $g(x)=|x^2-1|$

(1) ازاحة للاسفل بمقدار 1

(2) انعكاس للجزء السفلي من الدالة الى فوق محور x .

(f) $g(x)=x^2+2x+2$

أكمال المربع

$= x^2+2x+1+2-1$

$= (x+1)^2+1$

(1) ازاحة لليسار بمقدار 1

(2) ازاحة للاعلى بمقدار 1

---

(2) اعتمد على الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ في وصف كل من الدوال التالية:

(a) $h(x)=\frac{1}{x-1}+3$

(1) ازاحة لليمين بمقدار 1

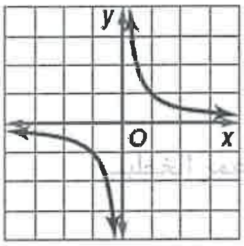
(2) ازاحة للاعلى بمقدار 3 .

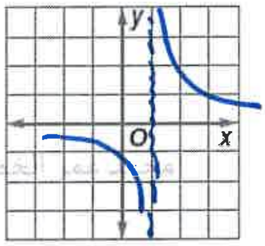
(b) $h(x)=\frac{-3}{x} = -3\left(\frac{1}{x}\right).$

(1) تمدد رأسي بمقدار 3 .

(2) انعكاس حول محور y

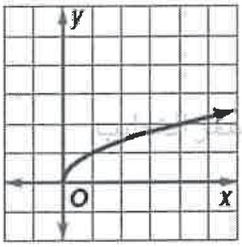
(1)اعتمد على الرسم المجاور للدالة $f(x)$ في رسم بيان الدالة $g(x)$ في كل مما يلي:

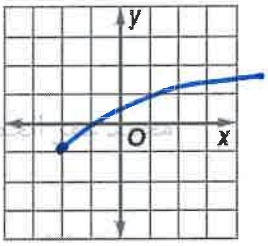




$(a)g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

ازاحة لليمين بمقدار ١

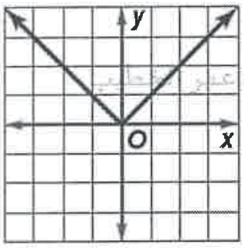


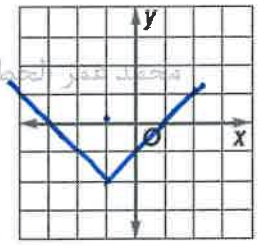


$(b)g(x)=\sqrt{x+2}-1$

(١) ازاحة لليسار بمقدار 2

(٢) ازاحة للاسفل بمقدار ١





$(c)g(x)=|x+1|-2$

(١) ازاحة لليسار بمقدار ١

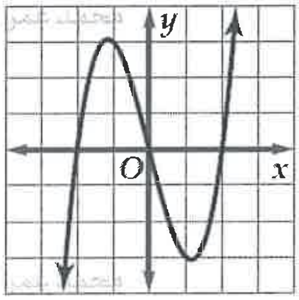
(٢) ١ سفل للاسفل بمقدار 2.

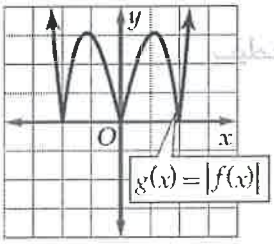
ملاحظة: القيمة المطلقة ليس تحويل في هذا السؤال

---

(2) اعتمد على الرسم المجاور للدالة $f(x)$

في رسم بيان الدالة $g(x),h(x)$ في كل مما يلي:

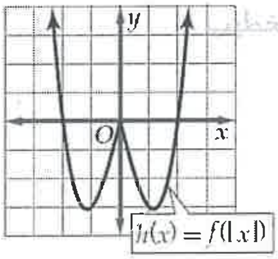




الكل

$(a)g(x)=|f(x)|$

انعكاس للجزء السالب .
منه y حول محور x .



الكل

$(b)h(x)=f(|x|)$

(١) حذف الجزء السالب منه x.

(٢) انعكاس للجزء الموجب
منه x حول محور y .

محمد عمر الخطيب

العمليات على الدوال

اذا كان كل من f و g دالة فان كل من $f+g$, $f-g$, $f\times g$, $\frac{f}{g}$ هي دالة معرفة كما يلي:

$$(1)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(2)\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(3)\ (f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

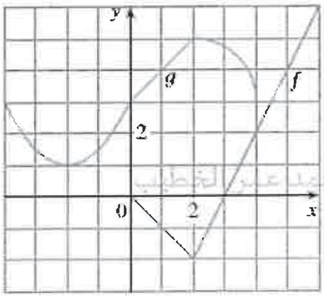
$$(4)\ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)},g(x)\neq 0$$

حيث

(5) مجال كل من $f+g$, $f-g$, $f\times g$ هو المجال المشترك(التقاطع) لمجال كل من f و g

(6) مجال $\frac{f}{g}$ هو المجال المشترك(التقاطع) لمجال كل من f و g ما عدى اصفار الدالة g

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f و g في الاجابة عن الاسئلة التالية:



$(1)\ (f+g)(2)$ $= f(2)+g(2) = -2+5 = 3$

$(2)\ (f-g)(0)$ $= f(0) - g(0) = 0 - 3 = -3$

$(3)\ (f\times g)(3) =$ $f(3)\cdot g(3) = 0\cdot 5 = 0$

$(4)\ (\frac{f}{g})(1) =$ $\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{-1}{4}$

(5) مجال الدالة: $(f+g)(x)$ = مجال g $\cap$ مجال f = $D = [0,4]$

(6) مجال الدالة: $(\frac{g}{f})(x)$ = مجال g $\cap$ مجال f ماعدا اصفار المقام $\{0, 3\}$

$D = (0,3) \cup (3,4]$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اذا كانت $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=2x+5$, $h(x)=\sqrt{x-2}$

فاوجد كل من الدوال التالية ثم اوجد مجالها.

(1) $(f+g)(x)$ $= f(x)+g(x)$

$= x^2-x-2+2x+5$

$= x^2+x+3.$

$D = D_1 \cap D_2 = R \cap R = R.$

---

(2) $(g\times h)(x)$ $= g(x)\cdot h(x)$

$= (2x+5)\sqrt{x-2}.$

$D = D_1 \cap D_2$

$= R \cap [2,\infty)$

$= [2,\infty)$

---

(3) $(\frac{g}{f})(x)$ $= \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x+5}{x^2-x-2}.$

اصفار المقام

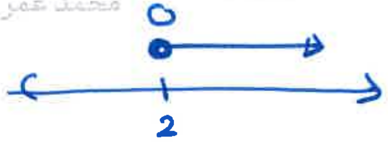
$x^2-x-2=0$

$x=2,-1$

$D = R / \{2,-1\}$

---

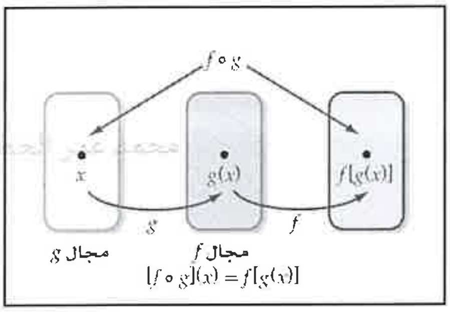
(4) $(\frac{f}{h})(x)$ $= \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}$



مجال البسط	مجال المقام	اصفار المقام
R	$x \geq 2$	$x=2$

$D = (2,\infty)$

تركيب الدوال



اذا كان كل من f و g دالة

فان ناتج تركيب الدالتين $f \circ g$ هي دالة معرفة كما يلي:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ملاحظة:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

حيث

مجال $f \circ g$ هو كل قيم x في مجال الدالة g بحيث ان $g(x)$ تنتمي الى مجال f

او

نجد المجال المشترك (التقاطع) للدالتين g (الدالة الداخلية) و ودالة ناتج التركيب (الدالة النهائية) $f \circ g$

اعتمد على الجدول المجاور في الاجابة عن الاسئلة التالية

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

(1) $(f \circ g)(1)$ $= f(g(1)) = f(6) = 5$

(2) $(f \circ f)(4)$ $= f(f(4)) = f(2) = 1$

(3) $(f \circ g)(0)$ $= f(g(0))$ غير معرفه

(4) $(g \circ f)(5)$ $= g(f(5)) = g(2) = 3.$

(5) $(f \circ g \circ f)(6)$ $= f(g(f(6))) = f(g(5))$

$= f(2)$

$= 1.$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت $f(x)=x^2-3x-2$, $g(x)=e^x$, $h(x)=\sqrt{x-2}$

فاوجد كل من.

(a) $(f\circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 1^2-3-2 = -4.$

(b) $(g\circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x-2}) = e^{\sqrt{x-2}}$

(c) $(f\circ h)(x) = f(h(x)) = f(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2-3\sqrt{x-2}-2$

$= x-2-3\sqrt{x-2}-2$

$= x-4-3\sqrt{x-2}.$

(d) $f\circ(g\circ h)(x) = f(g(h(x)))$

$= f(g(\sqrt{x-2})) = f(e^{\sqrt{x-2}}) = (e^{\sqrt{x-2}})^2-3e^{\sqrt{x-2}}-2.$

---

(2) اوجد كل من الدوال f و g و h التي تحقق:

يوجد اكثر من اجابة

ابدأ من الداخل . ثم تأكد منه خلال التركيب .

(a) $f\circ(g\circ h) = \left[\tan^{-1}(3x+1)\right]^2$

$h(x) = 3x+1$

$g(x) = \tan^{-1}x$

$f(x) = x^2.$

(b) $f\circ(g\circ h) = \dfrac{3}{\sqrt{\sin x+2}}$

$h(x) = \sin x+2$

$g(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}.$

(c) $f\circ(g\circ h) = \sin^2\cos^{-1}(2x+1)$

$h(x) = 2x+1$

$g(x) = \cos^{-1}x.$

$f(x) = \sin^2 x$ ..

(1) اذا كانت $f(x)=x^2-7$ ، $g(x)=\sqrt{x-2}$ فاوجد $(f\circ g)(x)$ ثم اوجد مجالها

$$f\circ g(x) = f(g(x))$$
$$= f(\sqrt{x-2})$$
$$= (\sqrt{x-2})^2-7$$
$$= x-2-7$$
$$= x-9$$

مجال fog يساوي مجال الدالة الداخلية تقاطع مجال ناتج التركيب

مجال الدالة الداخلية ↑ ↱ مجال الناتج

$$D = [2,\infty) \cap R$$
$$= [2,\infty).$$

---

(2) اذا كانت $f(x)=e^x$ ، $g(x)=\ln x$ فاوجد $(f\circ g)(x)$ ثم اوجد مجالها

$$f\circ g(x) = f(g(x))$$
$$= f(\ln x)$$
$$= e^{\ln x}$$
$$= x$$

$$D = (0,\infty) \cap R$$
$$= (0,\infty).$$

---

(3) اذا كانت $g(x)=\sqrt{x-1}$ ، $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ فاوجد $(f\circ g)(x)$ ثم اوجد مجالها

$$f\circ g(x) = f(g(x))$$
$$= f(\sqrt{x-1})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}$$

$$D = [1,\infty) \cap [1,\infty)/\{5\}$$
$$= [1,5) , (5,\infty)$$

---

(4) اذا كانت $f(x)=\sin^{-1}x$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ فاوجد $(f\circ g)(x)$ ثم اوجد مجالها

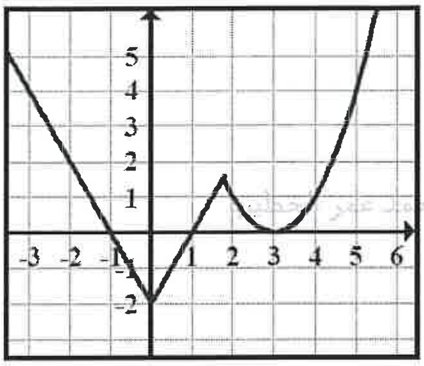
$$f\circ g(x) = f(g(x))$$
$$= f(\sqrt{x})$$
$$= \sin^{-1}\sqrt{x}$$

$$[0,1] \cap [-1,1]$$

$$D = [0,\infty) \cap [0,1]$$
$$= [0,1].$$

محمد عمر الخطيب

(1) مستعيناً بالرسم المجاور للدالة $f(x)$، اوجد مجال الدالة $h(x)$ في الحالات التالية:



$(a)\quad h(x) = 2f(x) + 4$ $\quad D = R.$

$(b)\quad h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ $\quad D = R / \{0\}$

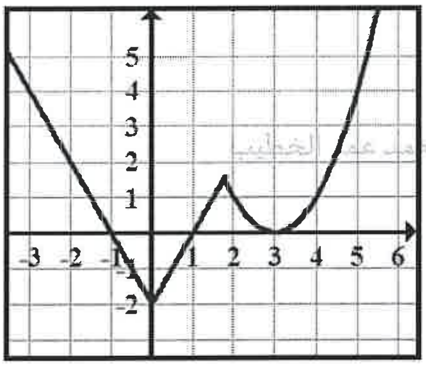
$(c)\quad h(x) = \dfrac{x}{f(x)}$ $\quad$ D = R / {-١, ١, 3}

له اصفار المقام

نقاط تقاطع الدالة مع محور x .

---

(2) مستعيناً بالرسم المجاور للدالة، اوجد مدى الدالة $h(x)$ في الحالات التالية:



$(a)\quad h(x) = f(x) + 4$ $\quad \mathbb{R} = [2, \infty)$

$(b)\quad h(x) = |f(x)|$ $\quad$ ℝ = [٠, ∞)

$(c)\quad h(x) = \sqrt{f(x) + 3}$ $\quad$ ℝ = [١, ∞)

---

(3) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان كل من الدوال f و g في ايجاد مجال الدالة : $(f \circ g)(x)$

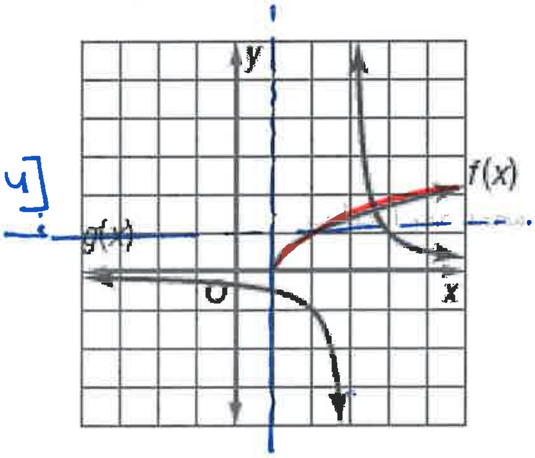
كيف نجد مجال تركيب دالتين من الرسم

(1) حدد مجال الدالة الخارجية برسم خطين رأسين

(2) اجعل الخطين افقين

(3) حدد مجال الدالة الداخلية ضمن هذين الخطين فيكون هو مجال تركيب الدالتين

$D = (3, 4]$



إنتهت الوحدة الأولى بحمد الله

واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ

محمد عمر الخطيب

الصف الثاني عشر متقدم

2022/2021

الوحدة الثانية

النهايات والاتصال

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثانية: النهايات والاتصال /// الدرس الأول: المماسات وطول المنحنى

محمد عمر الخطيب

اولاً: تقدير ميل المنحنى عند نقطة

(1) قدر ميل منحنى الدالة : $y = x^2$ عند النقطة $(2,4)$

النقطة المتحركة من اليمين	النقطة الثابتة	ميل القاطع
$(2.1,4.41)$	$(2,4)$	$m = 4.1$
$(2.01,4.0401)$	$(2,4)$	$m = 4.01$

ميل القاطع	النقطة الثابتة	النقطة المتحركة من اليسار
$m = 3.9$	$(2,4)$	$(1.9,3.61)$
$m = 3.99$	$(2,4)$	$(1.99,3.9601)$

$\rightarrow 4 \leftarrow$

اذاً ميل المنحنى عند النقطة $(2,4)$ تقريباً يساوي $m \approx 4$

---

(2) قدر ميل منحنى الدالة : $y = \cos x$ عند $x = 0$

النقطة المتحركة من اليمين	النقطة الثابتة	ميل القاطع
$(0.1,\cos 0.1)$	$(0,1)$	$m = -0.05$
$(0.01,\cos 0.01)$	$(0,1)$	$m = -0.005$

ميل القاطع	النقطة الثابتة	النقطة المتحركة من اليسار
$m = 0.05$	$(0,1)$	$(-0.1,\cos -0.1)$
$m = 0.005$	$(0,1)$	$(-0.01,\cos -0.01)$

$\rightarrow 0 \leftarrow$

اذاً ميل المنحنى عند النقطة $(0,1)$ تقريباً يساوي $m \approx 0$

---

(3) قدر ميل منحنى الدالة : $y = e^x$ عند $x = 0$

النقطة المتحركة من اليمين	النقطة الثابتة	ميل القاطع
$(0.1,e^{0.1})$	$(0,1)$	$m = 1.05$
$(0.01,e^{0.01})$	$(0,1)$	$m = 1.005$

ميل القاطع	النقطة الثابتة	النقطة المتحركة من اليسار
$m = 0.950$	$(0,1)$	$(-0.1,e^{-0.1})$
$m = 0.995$	$(0,1)$	$(-0.01,e^{-0.01})$

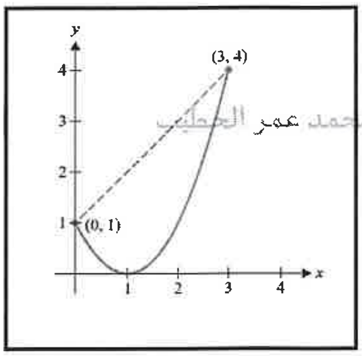
$\rightarrow 1 \leftarrow$

اذاً ميل المنحنى عند النقطة $(0,1)$ تقريباً يساوي $m \approx 1$

محمد عمر الخطيب

ثانياً: تقدير طول منحنى دالة على فترة

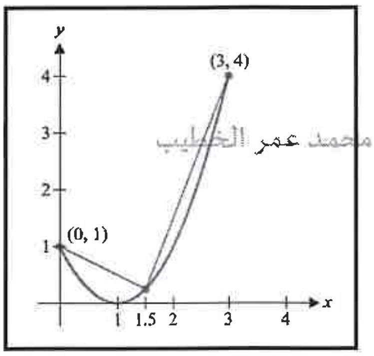
(1) قدر طول منحنى الدالة : $y=(x-1)^2$ على الفترة $[0,3]$ باستخدام قطعة مستقيمة واحدة



النقاط. $(0,1)$, $(3,4)$

$$d=\sqrt{(3-0)^2+(4-1)^2}=4.24$$

(2) قدر طول منحنى الدالة : $y=(x-1)^2$ على الفترة $[0,3]$ باستخدام قطعتين مستقيمتين



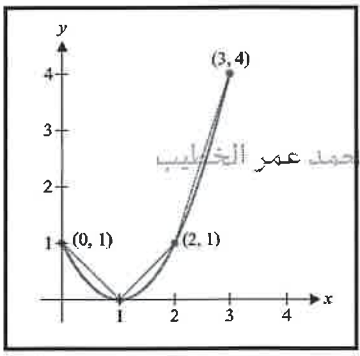
النقاط $(0,1)$, $(1.5,0.25)$, $(3,4)$

$$d_1=\sqrt{(0.25-1)^2+(1.5-0)^2}=1.67$$

$$d_2=\sqrt{(3-1.5)^2+(4-0.25)^2}=4.03$$

$$d=d_1+d_2=5.7.$$

(3) قدر طول منحنى الدالة : $y=(x-1)^2$ على الفترة $[0,3]$ باستخدام 3 قطع مستقيمة



النقاط $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(3,4)$

$$d_1=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=1.41$$

$$d_2=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=1.41$$

$$d_3=\sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2}=3.16$$

$$d=d_1+d_2+d_3=5.98\simeq 6$$

ملاحظة

طول الفترة الجزئية

يساوي

طول الفترة الكلية

تقسيم

عدد القطع المستقيمة

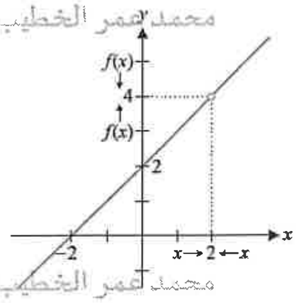
محمد عمر الخطيب

الوحدة الثانية: النهايات والاتصال/// الدرس الثاني والثالث: مفهوم النهاية وحساب النهايات

نهاية دالة عند نقطة:

تعلمنا بالصفوف السابقة كيف نجد صورة اي عدد ضمن مجال الدالة بالتعويض المباشر، ولكن اذا اردنا توقع صورة الدالة لعدد خارج مجال الدالة، فاننا سنقوم بدراسة هذه الدالة بجاور هذا العدد وليس عنده، والفكرة الرياضية التي تساعدنا في دراسة سلوك الدالة بجوار عدد معين تسمى النهاية (lim).

فمثلا اذا كانت الدالة : $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ فان الدالة غير معرفة عند $x=2$



اي لا يوجد صورة للعدد 2 (نقطة خارج المجال) ولكن يمكن توقع من الرسم البياني للدالة انه كلما :

اقتربنا للعدد 2 من جهة اليسار او من جهة اليمين فان الدالة تقترب من العدد 4

فنقول ان نهاية الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 4 عندما تقترب x من العدد 2

ونعبر عن ذلك باستخدام الرموز الرياضية

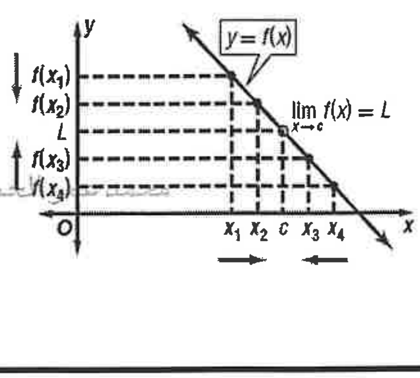
$$\lim_{x\to2} f(x)=4$$

وبشكل عام

اذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة هي L عندما تقترب x من c من الجهتين

فان نهاية الدالة $f(x)$ تقترب من L عندما تقترب x من c

ونكتب ذلك بالرموز



$$\lim_{x\to c} f(x)=L$$

محمد عمر الخطيب

يمكن ايجاد نهاية دالة عند نقطة من خلال:

(1) الجدول (رقمياً)

(2) الرسم البياني (بيانياً)

(3) الحل الجبري (جبرياً)

اولاً: نهاية دالة عند نقطة من الجدول:

(1) اوجد: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$ من خلال الجدول

$\longrightarrow$ $\longleftarrow$

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

8

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين.

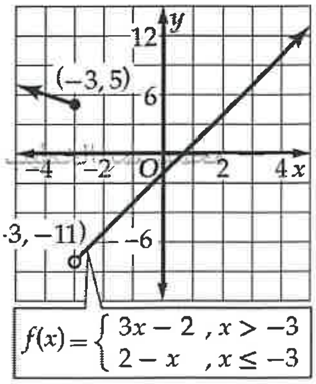
اي ان $\lim\limits_{x\to4} f(x)=8$

---

(2) اذا كان : $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , x>-3\\ 2-x & , x\le-3\end{cases}$ فاوجد $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ من خلال الجدول

$x \longrightarrow$ $\longleftarrow x$

x	−3.1	−3.01	−3.001	−3.0	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		−10.997	−10.97	−10.7



$$\lim_{x\to-3^-} f(x)=5$$

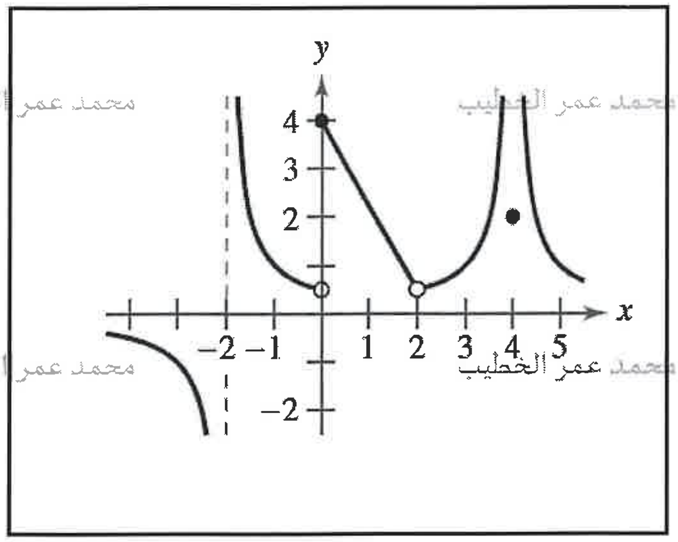
$$\lim_{x\to-3^+} f(x)=-11$$

اي ان $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ غير موجودة لان النهاية من اليمن لا تساوي النهاية من اليسار

محمد عمر الخطيب

ثانياً: نهاية دالة عند نقطة بيانياً:

(1) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $f(0) = 4$

(2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$

(3) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

(4) $\lim_{x\to 0} f(x) =$ غير موجودة

(5) $f(2) =$. غير معرفة

(6) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

(7) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$

(8) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

(9) $f(4) = 2$

(10) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \infty$

(11) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$

(12) $\lim_{x\to 4} f(x) = \infty$

(13) $\lim_{x\to -2} f(x) =$. غير موجودة

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

تكون النهاية موجودة

اذا كانت

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

اي ان

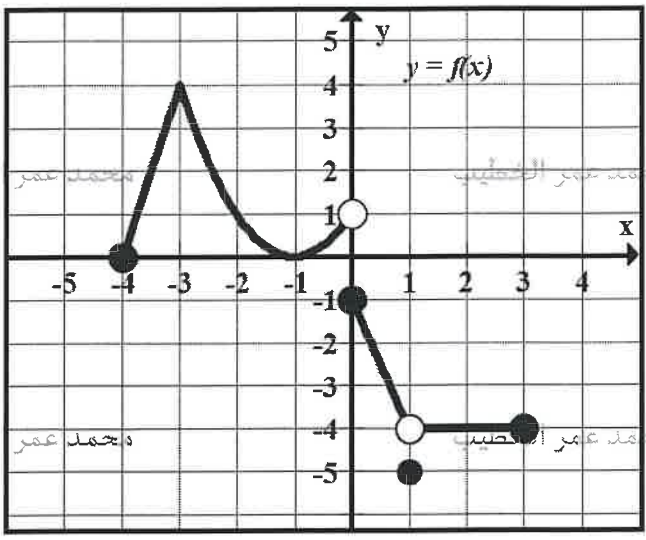
$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = L, \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

اما اذا كانت

النهاية من اليمين ≠ النهاية اليسار

فان النهاية غير موجودة

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة: $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $f(0) =$ -1

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ -1

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ 1

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ غ.م

(5) $f(1) =$ -5

(6) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ -4

(7) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ -4

(8) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ -4

(9) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ -4

(10) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$ $4.$

★ (11) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2 - x) = \operatorname{Lim}\limits_{u\to 0^+} f(u) = -1$

★ (12) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x^2 - x) = \operatorname{Lim}\limits_{u\to 0^-} f(u) = 1$

نفرض

$u = x^2 - x$

إشارة u

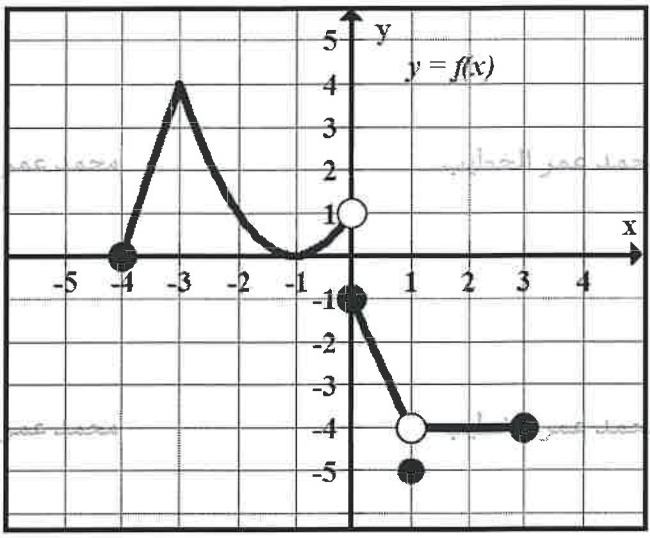
$$\begin{array}{ccccc} ++ & & --- & & +++ \\ & 0 & & 1 & \end{array}$$

$x \to 0^- \to u \to 0^+$

$x \to 0^+ \to u \to 0^-$

محمد عمر الخطيب

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ 0

(2) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ -٤

(3) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ غ.م

(4) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ ع.م

(5) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) =$ غ.م

(6) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) =$ غ.م

(7) $\lim\limits_{x\to -4} f(x) =$ غ.م

(8) $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| =$ 1

(9) $\lim\limits_{x\to 1} |f(x)| =$ ٤

(10) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{f(x)} =$ 0

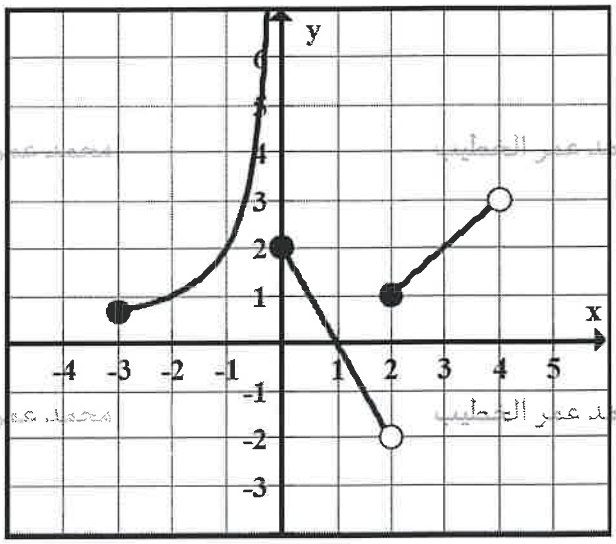
(11) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة هي.........-٤, 0 و 3

(12) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ من جهة اليمين فقط موجودة هي...- ٤

(13) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ من جهة اليسار فقط موجودة هي.....3

محمد عمر الخطيب

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $f(0) =$ 2

(2) $f(2) =$ ١

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ 2

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ ∞

(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ غ . م

(6) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ غ . م

(7) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$ 3

(8) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$ غ . م

(9) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ 0

(10) $\lim\limits_{x\to 2} |f(x)| =$ غ . م

(11) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{f(x)} =$ غ . م

لأن الداله تأخذ قيم سالبة عندما تكون $x > 1$

(12) $\lim\limits_{x\to -3} f(|x|) =$ 2

محمد عمر الخطيب

خواص النهايات:

ملاحظة: يمكن استخدام خواص النهايات اذا كانت النهايات موجودة

1) نهاية الدالة الثابتة حيث K ثابت $\lim_{x\to c}(k) = k$

2) نهاية الدالة المحايدة $f(x) = x$ $\lim_{x\to c}(x) = c$

3) إذا كانت $k , c , M . L$ **أعداد حقيقية ،** $\lim_{x\to c} f(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = M$ **فـــــإن :**

(1) قاعدة الجمع : $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$

(2) قاعدة الفرق : $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L-M$

(3) قاعدة الضرب : $\lim_{x\to c}(f(x).g(x)) = L.M$

(4) قاعدة الضرب في ثابت : $\lim_{x\to c}(k.f(x)) = k.L$

(5) قاعدة ناتج القسمة : $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} , M \neq 0$

(6) قاعدة القوة : $\lim_{x\to c}(f(x))^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}$

ملاحظة: اذا كانت احدى النهايات غير موجودة نبحث عن طرق اخرى وذلك بايجاد قاعدة الدالة الناتجة عن الجمع او الطرح او الضرب او القمسة وا التركيب ثم نجد النهاية

او نستخدام خواص النهايات من كل جهه ثم نقارن بين الجهتين بشرط ليس اي منهم ملانهاية

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) إذا علمت أن: $\lim_{x \to 5} f(x) = -3$ ، $\lim_{x \to 5} g(x) = 4$ فأوجد:

(1) $\lim_{x\to5}[4f(x)+7] = 4\lim_{x\to5} f(x) + \lim_{x\to5} 7$

$= 4(-3)+7 = 5 .$

---

(2) $\lim_{x\to5}[f(x)\times g(x)-x] = (-3)(4)-5 = -17 .$

---

(3) $\lim_{x\to5}\left[f^2(x)-\sqrt{g(x)}\right] = (-3)^2 - \sqrt{4} = 7 .$

---

(4) $\lim_{x\to5}\frac{f(x)+2x}{g(x)-1} = \frac{-3+2(5)}{4-1} = \frac{7}{3}$

---

(5) $\lim_{x\to5}\frac{(f(x)+11)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{g(x)}} = \frac{(-3+11)^{2/3}}{\sqrt{4}} = 2$

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $p(x) = x^2 - 1$ فاوجد

$(a) \lim_{x\to 0} p(p(p(p(x))))$ $= p(p(p(p(0))))$

$= p(p(p(-1))) = p(p(0)) = p(-1)$

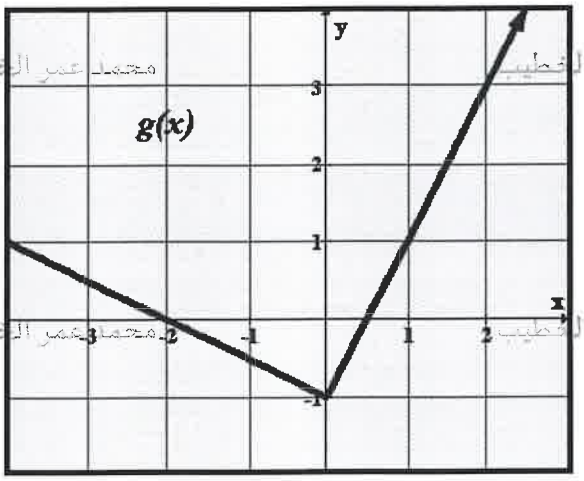
$= 0.$

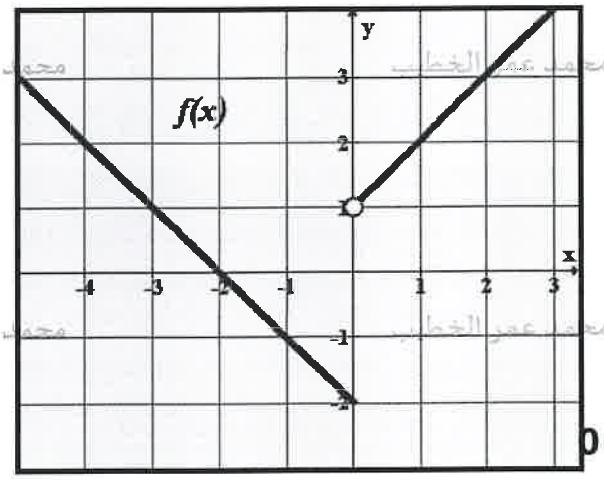
$(b) \lim_{x\to 0} p(3 + 2p(x - p(x))$

$= p(3 + p(0 - p(0)) = p(3 + p(1)) = p(3) = 8$.

---

(2) استخدم الرسم البياني المجاور في الإجابة عن الأسئلة التالية :





$(a) \lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)] = 3 + 3 = 6$

النهاية موجودة
يمكن استخدام
الخواص

$(b) \lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) + g(x) = 1 + -1 = 0$

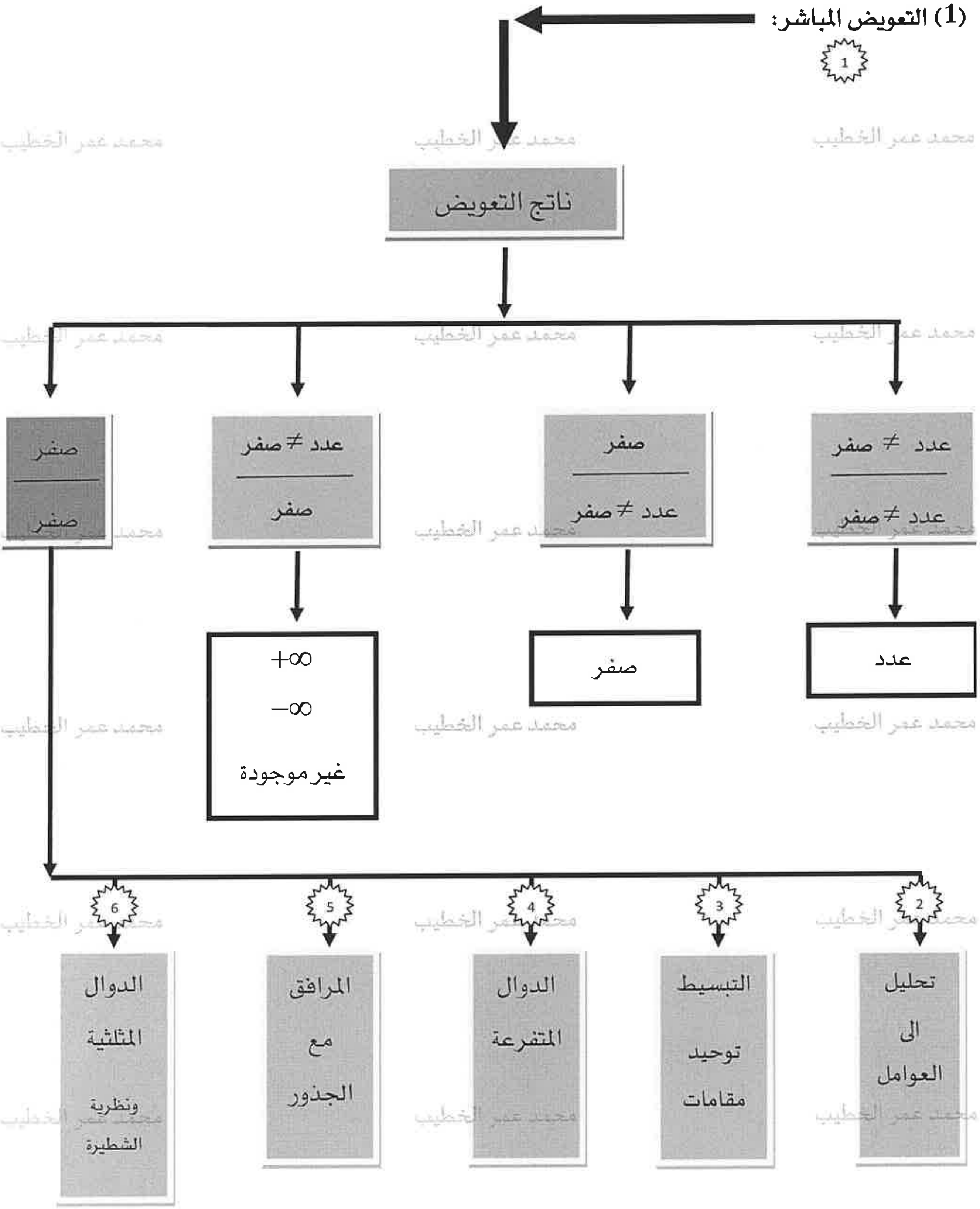
$\lim_{x\to 0^-} f(x) + g(x) = -2 + -1 = -3$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) + g(x)$ غ.م

النهاية غير موجودة
للدالة f لا يمكن
استخدام الخواص.
* نأخذ اليمين واليسار

طرق حساب النهايات جبرياً

(1) التعويض المباشر:



محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x+3}{x-2}=$ $\frac{2(-2)+3}{-2-2}=\frac{1}{4}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)^3}{x+1}=$ 1

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-4}{9x^2-4}=$ 0

(4) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-3x}{x^2+9}=$ 0

(5) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^2+5}$ $=3$

(6) $\lim\limits_{x\to -5}\sqrt[3]{3x-12}$ $=-3$

(7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x\sin x$ $=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to -1} e^x$ $=e^{-1}=\frac{1}{e}.$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\cos^{-1}x^2$ $=\cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}.$

(10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} ln(sinx)+x$ $=\ln(\sin\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

(11) $\lim\limits_{x\to 3}\log_2(x+5)$ $=\mathrm{Log}_2(8)=3$

(12) $\lim\limits_{x\to 3}|2-3x|$ $=|2-3(3)|=|-7|=7.$

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

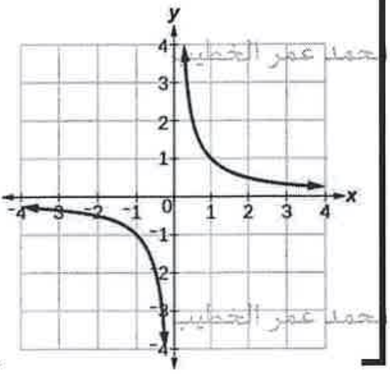
ملاحظة : يمكن الاستفادة من دراسة إشارة المقام قبل حساب النهاية في حالة البسط عدد لا يساوي صفر والمقام يساوي صفر

ملاحظة:

(1) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

(2) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ غير موجودة



(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)^2}=\infty$

$(x-2)^2$ اشارة المقام

$+ + + \;|\; + + +$

2

(2) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2}{18-2x}=$ غ . م

$\lim_{x\to 9^-}\frac{x^2}{18-2x}=+\infty$

$\lim_{x\to 9^-}\frac{x^2}{18-2x}=-\infty$

$+ + + \;|\; - - - -$

9

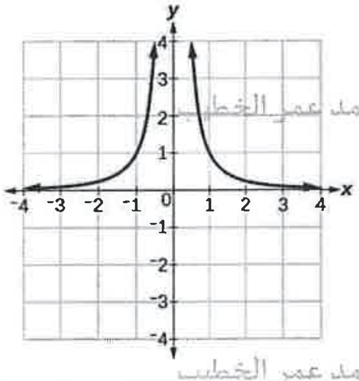
(3) $\lim_{x\to 5}\frac{-3}{10-2x}=$ غ . م

$+ + + \;|\; - - - -$

5

ملاحظة:

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$



(4) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4}=$ غ . م

$+ + \;|\; - - - \;|\; + +$

$-2 \qquad 2$

(5) $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ غ . م

ملاحظة $\sin\infty$ غير معروف .

$\sin-\infty$ غير معروف

محمد عمر الخطيب

(2) التحليل إلى العوامل:

ملاحظة : يجب التعويض المباشر اولاً وفي حالة البسط والمقام كلاهما صفر

نبحث عن طرق أخرى مثل التحليل او التبسيط او المرافق ...

1.العامل المشترك

2.الفرق بين مربعين

3.الحدود الثلاثية

4.الفرق بين مكعبين

5.مجموع مكعبين

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\boxed{\frac{0}{0}}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x=2$$

(2) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-9x}{18-2x}=\boxed{\frac{0}{0}}$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{x(\overset{-1}{\cancel{x-9}})}{2\cancel{(9-x)}}=\frac{-9}{2}$$

(3) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}=\boxed{\frac{0}{0}}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\overset{1}{\cancel{x+2}}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=\frac{1}{-4}=\frac{-1}{4}.$$

(4) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{3x-x^2}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{x}(x^2-9)}{\cancel{x}(3-x)}=\lim_{x\to 3}\frac{\overset{-1}{\cancel{(x-3)}}(x+3)}{\cancel{(3-x)}}=-6.$$

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

* علينا ايجاد مفكوك التربيع ثم الاختصار.

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{(h-4)^2-16}{h} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(h-4-4)(h-4+4)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(h-8)\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = -8.$

---

(2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{1}{6}$

---

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2} = \frac{0}{0}$

$$\boxed{\begin{aligned} x^3+a^3 &= (x+a)(x^2-ax+a^2) \\ x^3-a^3 &= (x-a)(x^2+ax+a^2) \end{aligned}}$$

$= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(2x+1)}$

$= \frac{12}{5}.$

---

(4) $\lim_{h\to 0}\frac{(h+2)^3-8}{h} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{((h+2)-2)((h+2)^2+2(h+2)+2^2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\,((h+2)^2+2(h+2)+4)}{\cancel{h}} = 12$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to1}\frac{(\cancel{x-1})(x+1)(x^2+1)}{(\cancel{x-1})(x^2+x+1)} = \frac{4}{3}$.

---

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+x^2-2}{x-1}=\frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+2)(x^2-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+2)(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = 6$

افرض $u = x^2$

u^2+u-2

$=(u+2)(u-1)$.

تم اختزال الرتبة .

---

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\frac{0}{0}$

$= \lim \frac{(\cancel{x-1})(x^2+1)}{\cancel{x-1}}$

$= 2$

طريقة التجميع

$\underline{x^3-x^2}+\underline{x-1}$

$= x^2\underline{(x-1)}+\underline{x-1}$

$=(x-1)[x^2+1]$

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2-1)^{10}}{(x^2-2x+1)^5} = \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{[(x-1)(x+1)]^{10}}{[(x-1)(x-1)]^{5}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)^{10}}(x+1)^{10}}{\cancel{[(x-1)^2]^{10}}} = \lim_{x\to 1} (x+1)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

---

(2) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{0}{0}$

افرض $u = \sqrt{x}.$

$x - \sqrt{x} - 6$

$= u^2 - u - 6$

$= (u-3)(u+2)$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \lim_{x\to 9} \sqrt{x}+2 = 5$$

---

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \dfrac{0}{0}$

ممكن اعتبارها فرق بين مكعبين

$x - 1 = (\sqrt[3]{x})^3 - 1$

$= (\sqrt[3]{x}-1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}}$$

$= 3$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x+1}}{x^2+x}=$ $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\, e^{-2x+1}}{\cancel{x}(x+1)} = \frac{e^{1}}{1} = e.$

---

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{e^x-1}=$ $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(\overset{-1}{\cancel{1-e^x}})(1+e^x)}{\cancel{e^x-1}}$

$= -(1+e^0) = -2.$

تذكر أن:

$e^{2x} = (e^x)^2$

$\Rightarrow 1-e^{2x}$

$= 1-(e^x)^2$

$= (1-e^x)(1+e^x)$

---

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^x-2}{e^x-1}=$ $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x)^2+e^x-2}{e^x-1}$

افرض

$u = e^x.$

u^2+u-2

$= (u+2)(u-1)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x+2)\cancel{(e^x-1)}}{\cancel{e^x-1}}$

$= e^0+2$

$= 3.$

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت : $\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)^{2n}}{(x^2-2x+1)^n}=81$ فاوجد قيمة n

$$\lim_{x\to1}\frac{[(x-1)(x^2+x+1)]^{2n}}{[(x-1)^2]^n}=81$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}^{2n}(x^2+x+1)^{2n}}{\cancel{(x-1)}^{2n}}=81$$

$$3^{2n}=81$$

$$3^{2n}=3^4 \Rightarrow \boxed{n=2}$$

---

(2) إذا كانت: $\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=7$ فاوجد قيمة a,b .

(1)

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-\cancel{2})(x-\frac{b}{2})}{x\cancel{-2}}=7.$$

$$\lim_{x\to2} x-\frac{b}{2}=7.$$

$$2-\frac{b}{2}=7.$$

$$-\frac{b}{2}=5 \rightarrow b=-10$$

(2)

$$\lim_{x\to2} x^2+ax+b=0$$

$$\downarrow$$

$$4+2a-10=0$$

$$2a=6 \rightarrow a=3$$

ملاحظة:

اذا كانت النهاية موجودة والبسط والمقام كلاهما صفر فان

(1) نهاية البسط تساوي صفر

(2) البسط يجب ان يحلل ويختصر مع المقام لاحد العوامل التي ناتجها صفر

محمد عمر الخطيب

(3) التبسيط (توحيد المقامات):

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

تذكر ان

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

(1) $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to2}\frac{x-2}{\frac{2-x}{2x}}$$

$$= \lim \overset{-1}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{2x}{\cancel{2-x}} = -2(2) = -4.$$

---

(2) $\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{x}{x^2-9} = \frac{0}{0}.$

$$= \lim\left(\frac{\overset{-1}{\cancel{3-x}}}{3\cancel{x}}\right)\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{-1}{3(x+3)}$$

$$= \frac{-1}{27}.$$

---

(3) $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right) =$

$$= \lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{4}.$$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to0}\frac{x^{-2}-1}{2x^{-2}+1}=$ $\lim \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{2}{x^2}+1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1+x^2}{\cancel{x^2}}}{\frac{2+x^2}{\cancel{x^2}}}$$

$$=\lim\frac{1+x^2}{2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

يجب تحويل الاس السالب الى اسس موجبة .

---

(2) $\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\left(\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5-x}\right)=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\left(\frac{5-x-(5+x)}{(5+x)(5-x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\left(\frac{-2x}{(5+x)(5-x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-6}{(5+x)(5-x)}=\frac{-6}{25}.$$

---

(3) $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x-1}=$ $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5+5(2x-3)}{2x-3}}{(x-1)}$

$$=\lim\frac{\frac{10x-10}{(2x-3)}}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10(\cancel{x-1})}{(2x-3)(\cancel{x-1})}=-10$$

محمد عمر الخطيب

(1) في إحدى الدراسات على عيون القطط وجد إن قطر البؤبؤ $f(x)$ للقطط يتناسب عكسياً مع شدة الإضاءة x التي تسقط على عينيه وفق العلاقة:

$$f(x)=\frac{160x^{-0.04}+90}{4x^{-0.04}+15}$$

اوجد نهاية قطر البؤبؤ عندما تقترب شدة الإضاءة من الصفر(تنعدم الرؤية).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{160}{x^{0.04}}+90}{\frac{4}{x^{0.04}}+15}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{160+90x^{0.04}}{x^{0.04}}}{\frac{4+15x^{0.4}}{x^{0.04}}}$$

$$=\lim \frac{160+90x^{0.04}}{4+15x^{0.04}}=\frac{160}{4}=40.$$

---

(2) اوجد قيمة الثوابت a,b : التي تجعل $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{x+a}-b}{x}=-1$

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{a}{x+a}-b=0$$ ← نهاية البسط = صفر

$$1-b=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{x+a}-1}{x}=-1$$

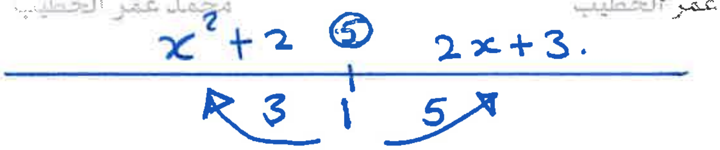
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a-(x+a)}{x+a}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{x}}{(x+a)\cancel{x}}=-1$$

$$-\frac{1}{a}=-1 \Rightarrow a=1$$

(4) الدوال المتفرعة (الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة وتشمل دالة المطلق والصحيح):

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة:

(1) إذا كانت : $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & ,x<1\\ 2x+3 & ,x\ge 1\end{cases}$



يفضل تحويل الدوال المتفرعة الى خط اعداد.

فأوجد:

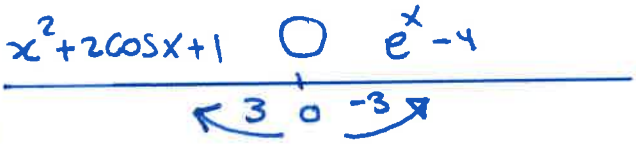
(a) $f(1)=5$

(b) $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} 2x+3 = 9.$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ غ.م $\rightarrow$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$ ، $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 5$

---

(2) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases}x^2+2\cos x+1 & ,x<0\\ e^x-4 & ,x>0\end{cases}$

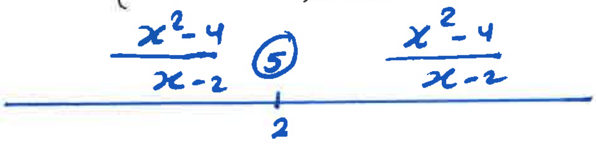


فأوجد:

$\lim_{x\to 0} f(x)$ غ.م

---

(3) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & ,x\ne 2\\ 5 & ,x=2\end{cases}$



فأوجد:

(a) $f(2)=5$

(b) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4.$

لا تحتاج الى عمليه ديل.

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $g(x)=\dfrac{x-1}{1-x}$ ، $f(x)=\begin{cases}\log x+4 & ,x\ge 1\\ 5x-1 & ,x<1\end{cases}$

f 5x-1 ④ Log x+4

←4 1 4→

فأوجد:

$$\lim_{x\to1}(f(x)+g(x))=$$

$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-x} = -1$$

$$\lim f(x)+g(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$$

$$= 4 + -1$$

$$= 3.$$

عليه توزيع النهاية لأنها موجودة

---

(2) إذا كانت: $g(x)=x^2-x$ ، $f(x)=\begin{cases}x^2+\cos x & ,x\ge 0\\ e^x-1 & ,x<0\end{cases}$

e^x-1 ① $x^2+\cos x$

←0 0 1→

وكان $h(x)=f(x)\times g(x)$

اشرح هل يمكن تطبيق نهاية حاصل ضرب دالتين في إيجاد قيمة $\lim_{x\to0}h(x)$

لا لأن $\lim_{x\to0} f(x)$ غير موجودة.

ابحث عن طريقة تحليلية لايجاد قيمة هذه النهاية (عليه توزيع النهاية من جهة واحدة)

$$\lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-} f(x)\,g(x)$$

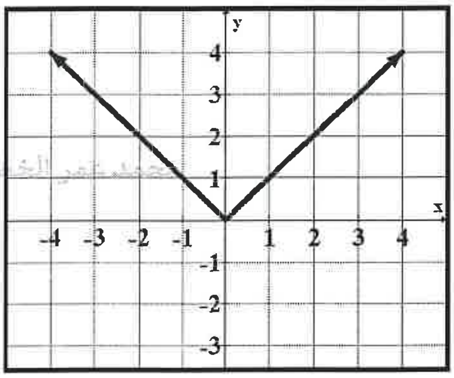
$$= \lim_{x\to0^-} f(x) \cdot \lim_{x\to0^-} g(x) = 0.(0) = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} f(x)\cdot g(x) = (1)(0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} h(x) = 0$$

دالة المطلق:

دالة المطلق : $y = |x|$

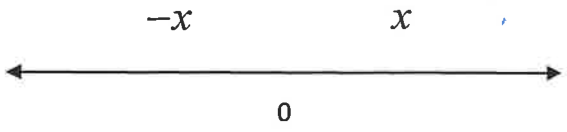


$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$|5| = 5$

$|x| = a \leftrightarrow x = a \quad or \quad x = -a$

$|-5| = 5$



ملاحظة: نهاية دالة المطلق $|x-a|$

اذا كان ناتج التعويض ما بداخل المطلق هو صفر

فيجب اخذ النهاية من اليمين واليسار

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

$$(1) \lim_{x\to-1} \frac{x+|x|-2}{x^2+1} = \frac{-1+1-2}{(-1)^2+1} = -1$$

$$(2) \lim_{x\to3} \frac{|x-5|-2}{x^2-9} = \frac{0}{0}$$

$5-x \quad | \quad x-5$

5

$$= \lim_{x\to3} \frac{5-x-2}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{\overset{-1}{\cancel{3-x}}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{-1}{6}$$

$$(3) \lim_{x\to3} \frac{x|1-x|-6}{x^2-3x} = \frac{0}{0}$$

$1-x \quad | \quad x-1$

1

ملاحظة

$|1-x| = |x-1|$

$$= \lim \frac{x|x-1|-6}{x^2-3x}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x(x-1)-6}{x^2-3x} = \lim_{x\to3} \frac{x^2-x-6}{x(x-3)} = \lim_{x\to3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{x\cancel{(x-3)}} = \frac{5}{3}$$

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية: (إن أمكن).

محمد عمر الخطيب

(1) $\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2}$

يجب اخذ النهاية من الجهتين

$2-x \quad | \quad x-2$

2

$$\lim_{x\to2^-}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{2-x}{x-2} = -1$$

$$\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim\frac{x-2}{x-2} = 1$$

$\Rightarrow \lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2}$ غ.م

---

(2) $\lim_{x\to2}\frac{|x^2-4|}{|x-2|}$

$$= \lim_{x\to2}\frac{|(x-2)(x+2)|}{|x-2|} = \lim_{x\to2}\frac{|\cancel{x-2}||x+2|}{|\cancel{x-2}|}$$

$$= \lim_{x\to2}|x+2|$$

$$= 4$$

---

(3) $\lim_{x\to0}(\frac{2}{x}-\frac{2}{|x|})$

$-x \quad | \quad x$

0

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{|x|}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{|x|}\right) = \lim\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{-x}\right) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^-}\left(\frac{4}{x}\right) = -\infty$$

$\Rightarrow \lim\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{|x|}\right)$ غ.م

(1) أوجد قيمة كل من النهايات الآتية : (إن أمكن):

$-x \;|\; x$

0

(a) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+|x|}{x}-\frac{1-x}{|x|}\right)$ غ . م

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1+|x|}{x}-\frac{1-x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{1-x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x}{x}=-2.$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1+|x|}{x}-\frac{1-x}{|x|}\right)=\lim\left(\frac{1-x}{x}-\frac{1-x}{-x}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{2(1-x)}{x}=-\infty$$

(b) $\lim_{x\to0}\frac{2x-|x|}{|3x|-2x}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2x-|x|}{|3x|-2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x-x}{3x-2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2x-|x|}{|3x|-2x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x+x}{-3x-2x}=\lim_{x\to0^-}\frac{3x}{-5x}=-3/5$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x-|x|}{|3x|-2x}$$ غ . م

---

(2) أوجد قيمة b إذا كانت $\lim_{x\to b}\frac{x^2-b^2}{x-b}=\lim_{x\to-2}(|x|+8)$

$$\lim_{x\to b}\frac{\cancel{(x-b)}(x+b)}{\cancel{x-b}}=10$$

$b+b=10$

$2b=10$

$b=5$

محمد عمر الخطيب

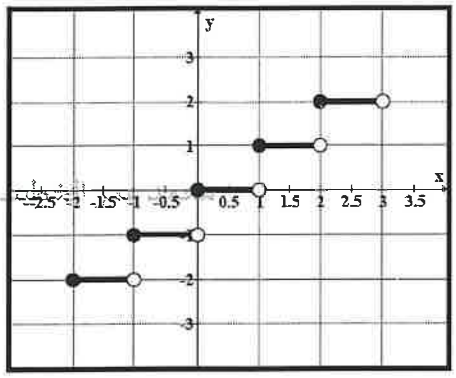
دالة الصحيح:

$[5]=5$

$[5.7]=5$

$[-5.99]=-6$

دالة الصحيح : $y=[x]$



ملاحظة: اذا كانت n عدد صحيح فان $[x+n]=[x]+n$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :(إن أمكن).

ملاحظة: نهاية دالة الصحيح $[x]$

(1) اذا كان ناتج التعويض ما بداخل الصحيح هو عدد صحيح فان النهاية غير موجودة وممكن التاكد باخذ النهاية من الجهتين

(2) اذا كان ناتج التعويض ما بداخل الصحيح هو كسر فان النهاية موجودة ويكفي التعويض

(1) $\lim_{x\to 2.9}[x] = 2$

(2) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}[3x+1] = 2$

(3) $\lim_{x\to 2^-}[x] = 1$

(4) $\lim_{x\to -2^-}\frac{|x|}{[x]} = \lim_{x\to -2^-}\frac{|x|}{-3} = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}.$

(5) $\lim_{x\to 2^-}[5-x] = 4$

(6) $\lim_{x\to 2^-}3[x]-|x| = 3(1)-2 = 1$

(7) $\lim_{x\to 2^-}|x-2|+[x]+x = 0+1+2 = 3.$

(8) $\lim_{x\to 0^-}([x]+5)^{[x]} = (-1+5)^{-1} = \frac{1}{4}.$

(9) $\lim_{x\to 0^-}\frac{2x([x]+3)}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(-1+3)}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-4x}{x(x+1)} = -4.$

(10) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{|x-2|+[x-2]} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{|x-2|+-1} = \frac{1}{-1} = -1$

$|x-2|$ $\quad 2-x \;|\; x-2$

2

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت) .

(1) $\lim_{x\to1}[x]$ غ.م

$\lim_{x\to1^-}[x]=0$

$\lim_{x\to1^+}[x]=1$

---

(2) $\lim_{x\to\frac{1}{3}}[3x+1]$ غ.م

$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}[3x+1]=1$

$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}[3x+1]=2$.

---

(3) $\lim_{x\to1}(x-[x])$ غ.م

$\lim_{x\to1^-} x-[x] = 1-0 = 1$

$\lim_{x\to1^+} x-[x] = 1-1 = 0$

---

(4) $\lim_{x\to0}x[x+2]$

$\lim_{x\to0^-} x[x+2] = \lim_{x\to0^-} x(1) = 0$

$\lim_{x\to0^+} x[x+2] = \lim x(2) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to0} x[x+2] = 0$.

---

(5) $\lim_{x\to1}(x+2)^{[x]}$

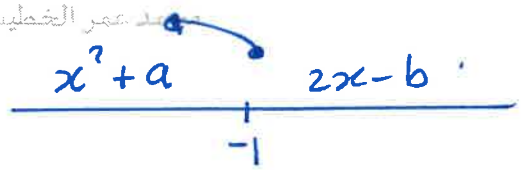
$\lim_{x\to1^-}(x+2)^{[x]} = \lim_{x\to1^-}(x+2)^{0} = 1$

$\lim_{x\to1^+}(x+2)^{[x]} = \lim_{x\to1^+}(x+2)^{1} = 3$

$\Rightarrow \lim_{x\to1}(x+2)^{[x]}$ غ.م

محمد عمر الخطيب

إيجاد الثوابت من خلال وجود نهاية دالة عند نقطة



(1) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases} x^2+a & ,x\le -1 \\ 2x-b & ,x>-1 \end{cases}$

وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)=2$ فأوجد كلا من الثابتين a,b

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$$

$$2(-1)-b = 2$$

$$-2-b=2 \rightarrow -b=4 \Rightarrow b=-4.$$

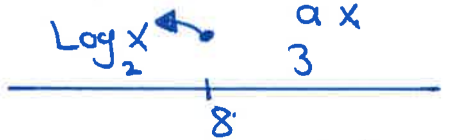
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 2$$

$$(-1)^2+a=2$$

$$a=1$$

---

(2) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases} \log_2 x & ,0<x\le 8 \\ 3^{ax} & ,x>8 \end{cases}$ فأوجد قيمة a حيث $\lim_{x\to 8} f(x)$ موجودة



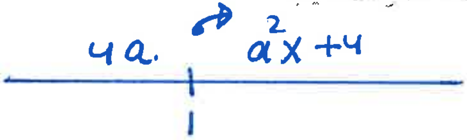
$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^+} f(x)$$

$$\log_2 8 = 3^{a(8)}$$

$$3 = 3^{8a} \Rightarrow 8a=1 \Rightarrow a=1/8.$$

---

(3) إذا كانت: $g(x)=\begin{cases} a^2x+4 & ,x\ge 1 \\ 4a & ,x<1 \end{cases}$ فأوجد قيم a حيث $\lim_{x\to 1} g(x)$ موجودة



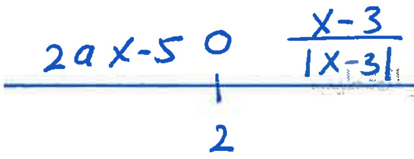
$$4a = a^2(1)+4$$

$$a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0 \Rightarrow a=2.$$

---

(4) لتكن: $f(x)=\begin{cases} 2ax-5 & ,x<2 \\ \frac{x-3}{|x-3|} & ,x>2 \end{cases}$ فما قيمة a التي تجعل $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة.



$$2a(2)-5 = \frac{2-3}{|2-3|}$$

$$4a-5=-1$$

$$4a=4$$

$$a=1.$$

محمد عمر الخطيب

(5) الجذر والمرافق:

ملاحظة : اذا كان ناتج ما بداخل الجذر التربيعي صفر عند التعويض يفضل دراسة اشارة ما تحت الجذر قبل حساب النهاية

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x} = 0$

---

(2) $\lim_{x\to0^-}\sqrt{x}$. غ . م

---

(3) $\lim_{x\to0}\sqrt{x}$. غ . م

---

(4) $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5} = \text{Lim}\frac{|x-5|}{x-5}$.

$5-x \quad | \quad x-5$

5

ملاحظة:

$\sqrt{x^2}=|x|$

$\lim_{x\to5^-}\frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x\to5^-}\frac{5-\overset{-1}{\cancel{x}}}{\cancel{x-5}} = -1$

$\lim_{x\to5^+}\frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x\to5^+}\frac{x-5}{x-5} = 1$

$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5}$ غ . م

---

(5) $\lim_{x\to3}\sqrt[3]{1-x^2} = \sqrt[3]{-8} = -2$

---

(6) $\lim_{x\to5^+}\sqrt{25-x^2}$ غ . م

$- - \quad | \quad + + \quad | \quad - - -$

$-5 \qquad 5$

$\lim_{x\to5^-}\sqrt{25-x^2} = 0$.

---

(7) $\lim_{x\to1^-}\sqrt{x-[x]} = \lim_{x\to1^-}\sqrt{x-0} = 1$.

---

(8) $\lim_{x\to1^+}\sqrt{[x]-x} = \lim_{x\to1^+}\sqrt{1-x}$

اشاره $1-x$.

$+ + + \quad | \quad - - -$

1

غ . م

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{x^2-2x}$ $=0$

$++ \quad | \quad --- \quad | \quad ++$
$\qquad\; 0 \qquad\quad\; 2$

---

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^2-2x}$. غ. م

$++ \quad | \quad --- \quad | \quad ++$
$\qquad\; 0 \qquad\quad\; 2$

ملاحظة

$\sqrt{x^2}=|x| \qquad ,(\sqrt{x})^2=x$

(3) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}}$.

$|X-1|$ $\quad 1-X \quad | \quad X-1$
$\qquad\qquad\qquad 1$

$= \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{1-x}} = -1.$

---

(4) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{\sqrt{x^4+x^2}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$= \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{\sqrt{x^2(x^2+1)}}$

$= \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{-x\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{-\sqrt{x^2+1}}$

$= -1.$

محمد عمر الخطيب

المرافق:

ملاحظة: مرافق المقدار الجبري $\sqrt{x}-\sqrt{a}$ هو $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ ويكون حاصل ضربهم هو $x-a$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{3x+1}+2)}=\frac{3}{4}$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{x}{3-\sqrt{x+9}} \times \frac{3+\sqrt{x+9}}{3+\sqrt{x+9}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(3+\sqrt{x+9})}{9-(x+9)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(3+\sqrt{x+9})}{-x}=-6.$$

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} \quad \times \quad \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = 2 .$$

---

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} \quad \times \quad \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} .$$

---

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{2x-1}-1} \quad \times \quad \dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1}$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}{2x-1-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}{2x-2}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x+2)(\cancel{x-1})(\sqrt{2x-1}+1)}{2(\cancel{x-1})} = \frac{(3)(2)}{2} = 2$$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

$$(1)\ \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x} = \times\ \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{1-x-(x+1)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to0}\frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}} = -1$$

$$(2)\ \lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \times\ \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2+5-9}$$

$$= \lim \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{3+3}{-4} = \frac{-3}{2}.$$

$$(3)\ \lim_{x\to9}\frac{x\sqrt{x}-27}{x-9} = \times\ \frac{x\sqrt{x}+27}{x\sqrt{x}+27}$$

$$= \lim_{x\to9}\frac{x^2\cdot x-27^2}{(x-9)(x\sqrt{x}+27)}$$

$$= \lim \frac{x^3-729}{(x-9)(x\sqrt{x}+27)}$$

$$= \lim \frac{(x-9)(x^2+9x+81)}{(x-9)(x\sqrt{9}+27)} = \frac{9}{2}$$

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

$$(1)\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x}\times\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{(1-x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{x}}{(1-x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

$$(2)\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}-\frac{4}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}-\frac{4}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to4}\frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{4}.$$

$$(3)\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}\times\frac{\left(\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2+\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2+\sqrt[3]{1+2x}+1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2+\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2+\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}=\frac{2}{3}.$$

تذكر $(x^3-a^3)=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x-a}-3}{x-1}$ موجودة فاوجد قيمة الثابت a.

تذكر أن

لابُد البسط = صفر

$$\lim_{x\to1}\sqrt{x-a}-3=0$$

$$\sqrt{1-a}-3=0$$

$$\sqrt{1-a}=3$$

$$1-a=9$$

$$-a=8$$

$$a=-8.$$

---

(2) لتكن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{a\,x+1}-\sqrt{2x+1}}{x}=4$ فاوجد قيمة الثابت a.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+1}-\sqrt{2x+1}}{x}\times\frac{\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1}}=4$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax+1-(2x+1)}{x(\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1})}=\lim_{x\to0}\frac{(a-2)\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1})}=4$$

$$\Rightarrow\frac{a-2}{1+1}=4\Rightarrow a-2=8\Rightarrow a=10$$

---

(3) لتكن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{a\,x+b}-2}{x}=1$ موجودة فاوجد قيمة الثوابت a,b .

(1) $$\lim_{x\to0}\sqrt{ax+b}-2=0$$

$$\sqrt{b}-2=0$$

$$\sqrt{b}=2\Rightarrow b=4.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}\times\frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{ax+b-4.}{x(\sqrt{ax+b}+2)}=1$$

$b=4$

$$\lim\frac{ax+\cancel{4}-\cancel{4}}{x(\sqrt{ax+4}+2)}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{ax+4}+2)}=1$$

$$\frac{a}{4}=1\Rightarrow\boxed{a=4}$$

محمد عمر الخطيب

(6) نهاية الدوال الدائرية :

تذكر أن:

النسب المثلثية والمتطابقات المهمة

المتطابقات النسبية

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

متطابقات المقلوب

$\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

$\sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

متطابقات فيثاغورس

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

متطابقات الزوايا المتتامة

$\sec\theta = \csc\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\tan\theta = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\sin\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\csc\theta = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\cot\theta = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\cos\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والفردية

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

متطابقات المجموع والفرق

$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

$\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

متطابقات ضعف الزاوية

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

متطابقات نصف الزاوية

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}}$

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{2}}$

نظرية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a\,x)}{b\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a\,x)}{b\,x}=\frac{\sin(a\,x)}{\tan b\,x}=\frac{\tan(a\,x)}{\sin b\,x}=\frac{a}{b}\qquad b\neq 0$$

$x\approx \sin x\approx \tan x\approx \sin^{-1}x\approx \tan^{-1}x$ عندما تقترب x من الصفر

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}(\sin x+\cos x)=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

(2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(x\tan x)=\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\frac{3}{2}$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{2x\cos 3x}=\frac{6}{2(1)}=3$.

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{5x}=\frac{1}{5}$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\frac{3}{2}$

(8) $\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^{x}}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}\cdot e^{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$.

(9) $\lim_{x\to 0}3x\csc 2x=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}$

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin 2x}{x[x]}=$ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin 2x}{x(-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin 2x}{-x}=-2.$

---

(2) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{|x|}-2[x-2]$ $=\lim\frac{\sin x}{-x}-2(-3)=-1+6=5.$

---

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 4x}=$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\tan 4x}{x}}=\frac{3}{4}.$

اقسم ع x
وعكس مباشر.

---

(4) $\lim\limits_{x\to0}(\tan 2x\csc \pi x)=$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin \pi x}=\frac{2}{\pi}.$

---

(5) $\lim\limits_{x\to0^-}\overset{=-1}{[x]}(x\cot 2x)=$ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x}{\tan 2x}=\frac{-1}{2}.$

---

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\frac{3}{x}\right)\sin x=$ $\lim\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{3}{x}\right)\sin x$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x-\frac{3\sin x}{x}\right)=1-3=-2$

---

(7) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}=$ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|\sin x|}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1.$

-sinx. sinx
0

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{\sin^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{9}.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x\tan 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \frac{9}{5}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 3x}{3x|x|} = \lim\frac{\sin^2 3x}{3x(-x)}$

$\underset{0}{-x \;\big|\; x}$

$= \lim\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{\sin 3x}{-x} = \frac{3}{3}\cdot\frac{3}{-1} = -3.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 1.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2\csc 3x\cot 2x) = \lim\frac{3x^2}{\sin 3x\cot 2x}$

$= \lim\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{x}{\cot 2x} = \frac{3}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x\sin^2 8x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x\sin^2 8x}{x^3}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{\sin^2 8x}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{\sin 8x}{x}\cdot\frac{\sin 8x}{x}}$

$= \sqrt[3]{8\times 8} = 4.$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x+\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{x}+\lim\dfrac{\tan 3x}{x}$

$= 2(0)(1)+3$

$= 3.$

---

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x^2+x)\csc 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ \cos x.}{x(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\dfrac{\cos x}{x+1}$

$= (1)(1)\quad .$

$= 1$

---

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\tan x}{4x-\sin x}=$

قسمة كل . حد من الحدود على x

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}$

$=\dfrac{2+1}{4-1}$

$=\dfrac{3}{3}=1.$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to0^-}(2x\sqrt{1+\cot^2 x}) =$

$$= \lim_{x\to0} 2x \cdot \sqrt{\csc^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0} 2x \cdot |\csc x|$$

$$= \lim_{x\to0^-} \frac{2x}{|\sin x|} = \lim_{x\to0^-} \frac{2x}{-\sin x} = -2$$

---

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1-\sqrt{1+x}} \times \frac{1+\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x\,(1+\sqrt{1+x})}{1-(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x\,(1+\sqrt{1+x})}{-x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{-x}\cdot(1+\sqrt{1+x})$$

$$= (-1)(1+1) = -2$$

---

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$.

$$= \lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2 x}{x\sin x\,(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x}{x\,\sin x\,(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= (1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{2x-2}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

(3) $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\frac{\sin x}{x}\cdot\sqrt{x}=1\cdot0=0$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{3x}=\lim\frac{\sin x^2}{3x\cdot x}\cdot x$

$=\lim\frac{\sin x^2}{3x^2}\cdot x=\frac{1}{3}\cdot0=0.$

ملاحظة

اذا كان $f(0)=0$ فإن

$$\lim_{f(x)\to0}\frac{\sin(f(x))}{f(x)}=1$$

$$\lim_{f(x)\to0}\frac{\tan(f(x))}{f(x)}=1$$

(5) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{2x}=\lim\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{2x}=(1)\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}.$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{\tan^{-1}x}=1$

(7) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{x-\frac{\pi}{2}}=-1.$

(8) $\lim_{x\to2}\frac{x\cos\frac{\pi}{x}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{x})}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x\sin(\frac{\pi x-2\pi}{2x})}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\frac{x-2}{x})}{\frac{x-2}{x}}=\frac{\pi}{2}.$

(1) إذا كانت: $\lim_{x\to1}\frac{|x+1|-2}{x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sin kx}$ فاوجد قيمة k.

$$\lim_{x\to1}\frac{|x+1|-2}{x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sin kx}$$

$$\begin{array}{c|c} -(x+1) & x+1 \\ \hline & \\[-8pt] \multicolumn{2}{c}{-1} \end{array}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{x(x-1)}=\frac{5}{k}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x(x-1)}=\frac{5}{k}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=\frac{5}{k}$$

$$1=\frac{5}{k}$$

$$\boxed{k=5}$$

(2) إذا كانت: $\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x}=\lim_{x\to3^-}a[x]$ فاوجد قيمة a.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|\sin x|}{x}=a(2)$$

$$\begin{array}{c|c} -\sin x & \sin x \\ \hline & \\[-8pt] \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{x}=2a$$

$$-1=2a$$

$$\boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

(3) إذا كانت: $\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{x}=\lim_{x\to k}4^x$ فاوجد قيمة k.

$$\lim_{x\to0}\frac{\overbrace{\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x}^{1}-1}{x}=4^k$$

$$\lim\frac{1+2\sin x\cos x-1}{x}=4^k$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=4^k$$

$$2=4^k$$

$$2=(2^2)^k$$

$$2=2^{2k}$$

$$2k=1\Rightarrow\boxed{k=\frac{1}{2}}$$

محمد عمر الخطيب

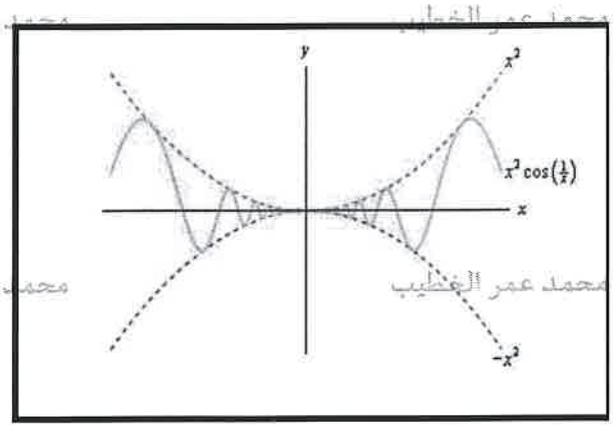
(نظرية الشطيرة)

إذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ لكل $x \ne c$ في فترة حول c

وكان $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l$

فإن $\lim_{x\to c} f(x) = l$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية باستخدام نظرية الشطيرة:



(1) $\lim_{x\to0} x^2\cos\frac{1}{x} =$

نعلم ان $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$

$-x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$

ناخذ نهاية الحد الأدنى

ونهاية الحد الأعلى

$\lim_{x\to0} -x^2 = 0$

$\lim_{x\to0} x^2 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0$ من نظرية الشطيره.

---

(2) $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\sin^2\frac{1}{x} =$

$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$

$0 \le \sin^2\frac{1}{x} \le 1$

$0 \le \sqrt{x}\,\sin^2\frac{1}{x} \le \sqrt{x}$

$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$

$\Rightarrow \lim \sqrt{x}\,\sin^2\frac{1}{x} = 0$. من نظرية الشطيره

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية باستخدام نظرية الشطيرة:

$$(1)\lim_{x\to0}(5+x^2\sin\frac{1}{x^2})$$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x^2} \le 1$$

$$-x^2 \le x^2\sin\frac{1}{x^2} \le x^2$$

$$5-x^2 \le 5+x^2\sin\frac{1}{x^2} \le 5+x^2$$

$$\lim_{x\to0} 5-x^2 = 5$$

$$\lim_{x\to0} 5+x^2 = 5$$

من نظرية الشطيره

$$\lim 5+x^2\sin\frac{1}{x^2} = 5.$$

$$(2)\lim_{x\to0}(\cos^2 x+x^2\sin\frac{1}{x})$$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$$

$$-x^2 \le x^2\sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$$\cos^2 x - x^2 \le \cos^2 x + x^2\sin\frac{1}{x} \le \cos^2 x + x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\cos^2 x - x^2 = 1\\ \lim\limits_{x\to0}\cos^2 x + x^2 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to0}\cos^2 x + x^2\sin\frac{1}{x} = 1$$

. من نظرية الشطيره

---

(3) اذا كانت : $|g(x)| \le M$ حيث M عدد حقيقي موجب فبين ان : $\lim\limits_{x\to0} x^2\, g(x) = 0$

$$-H \le g(x) \le H$$

من خواص المطلق

$$-Hx^2 \le x^2 g(x) \le Hx^2$$

$$\lim_{x\to0} -Hx^2 = 0$$

$$\lim_{x\to0} Hx^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} x^2 g(x) = 0$$

. من نظرية الشطيره

(1) استخدام نظرية الشطيرة اوجد $\lim_{x\to 3} g(x)$ حيث $|g(x)+4| \le 2(3-x)^4$

من خواص المطلق.

$$-2(3-x)^4 \leqslant g(x)+4 \leqslant 2(3-x)^4.$$

$$-2(3-x)^4-4 \leqslant g(x) \leqslant 2(3-x)^4-4$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3} -2(3-x)^4-4 = -4 \\ \lim_{x\to 3} 2(3-x)^4-4 = -4\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} 2(3-x)^4-4 = -4$$

من الشطيرة .

---

(2) أوجد: $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث: $\frac{\sin x}{\tan 3x} \le f(x) \le \frac{x^2+x}{3x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan 3x} = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{3\cancel{x}} = 1/3.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1/3$$

---

(3) أوجد: $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث: $x^2 - x^3 \le x^2 f(x) \le \sin^2 x$

القسمة ع x^2

$$\frac{x^2-x^3}{x^2}. \leqslant f(x) \leqslant \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-x)}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1.$$

من نظرية الشطيرة.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

محمد عمر الخطيب

الاتصال عند نقطة:

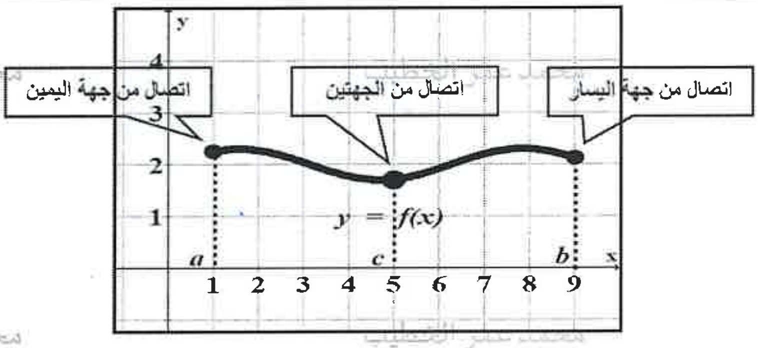
<u>نقطة داخلية</u>: تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة عند نقطة داخلية c في مجالها اذا كانت

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

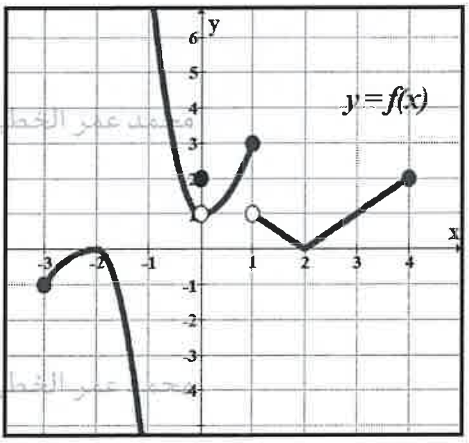
<u>نقطة طرفية</u>: تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة عند نقطة طرفية a لها نهاية من جهة اليمين

اونقطة طرفية b لها نهاية من جهة اليسار اذا كان

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \quad , \quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$



اعتمد على الرسم المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للاجابة عن الاسئلة التالية



(1) هل الدالة متصلة عند $x=0$ مع ذكر السبب

لا لان $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

(2) هل الدالة متصلة عند $x=1$ مع ذكر السبب

لا لان $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

(3) هل الدالة متصلة عند $x=-1$ مع ذكر السبب

لا لان $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$.

(4) هل الدالة متصلة عند $x=2$ مع ذكر السبب

نعم متصلة لان $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

إي من الدوال التالية تكون متصلة عند $x=1$ مع ذكر السبب :

تذكر

شروط الاتصال عند النقطة الداخلية $x=c$

(1) الدالة معرفة عند $x=c$

(2) $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$

(3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

(1) $$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x<1 \\ 2-x & ,\ x>1 \end{cases}$$

غير متصلة عند $x=1$ لان الدالة غير معرفه عندها

---

(2) $$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

الدالة غير متصله عند $x=1$

الدالة غير معرفه عندها .

---

(3) $$f(x)=[x]$$

$f(1)=1$ ✓

$\lim_{x\to 1} f(x)$ غ.م $\left[\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-}[x]=0 \\ \lim_{x\to 1^+}[x]=1 \end{array}\right.$

---

(4) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ,x\neq 1 \\ 3 & ,x=1 \end{cases}$$

$f(1)=3$ ✓

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$$

النهاية موجودة

$$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$$

الدالة غير متصلة عند $x=1$

محمد عمر الخطيب

إي من الدوال التالية تكون متصلة عند $x=1$ مع ذكر السبب.

(1) $f(x)=\begin{cases}5x & ,x<1\\ 5 & ,x=1\\ 6-x & ,\ x>1\end{cases}$

$5x$ ① $6-x$

$\leftarrow 5$ 1 $5 \rightarrow$

$f(1)=5$ ✓

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$

$\lim f(x)=f(1)$ ∴ الدالة متصلة عند $x=1$

---

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$f(1)=0$ ✓

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ ✓

$\lim f(x)=f(1)$

الدالة متصلة عند $x=1$

---

(3) $f(x)=|x-1|$

$1-x$ $x-1$

$\leftarrow 0$ 1 $0 \rightarrow$

$f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ ✓ الدالة متصلة عند $x=1$

---

(4) $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

الدالة غير متصلة عند $x=1$

الدالة غير معرفة عند $x=1$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ملاحظات مهمة

اولاً: الدوال المتصلة على مجالها

(1) كثيرات الحدود

(2) الدوال المثلثية

(3) الدوال الاسية

(4) الدوال الجذرية

(5) الدوال اللوغارتمية

(6) الدوال النسبية

(7) دوال المطلق

ثانياً: الدوال المتصلة على جزء من مجالها

بعض الدوال المتفرعة مثل دالة الصحيح

ثالثاً: العمليات على الدوال المتصلة

(1) حاصل جمع وطرح وضرب دالتين متصلتين هي دالة متصلة

(2) حاصل قسمة دالتين متصلتين هي دالة متصلة بشرط ان المقام لا يساوي صفر

(3) حاصل تركيب دالتين متصلتين هي دالة متصلة

رابعاً: اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فان

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

النهاية تدخل على
الدالة المتصلة

محمد عمر الخطيب

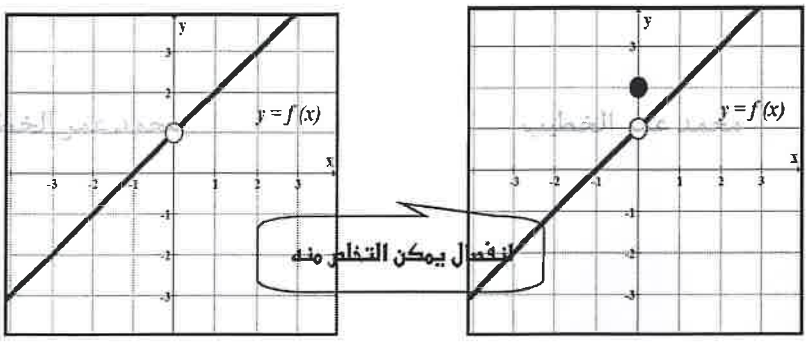
أنواع نقاط عدم الاتصال (نقاط الانفصال)

(1)_ الفجوة (قابل للازالة) او (يمكن التخلص منه)

النهاية موجودة

ولكن لا تساوي الصورة

او الصورة غير موجودة

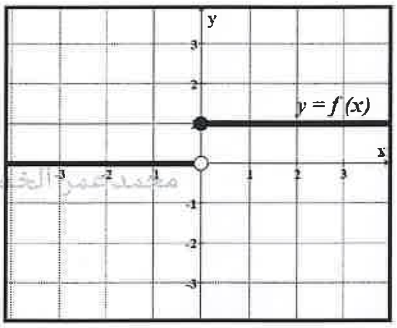


(2) القفزة (غير قابل للازالة)

النهاية غير موجودة

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

وكلاهم عدد حقيقي

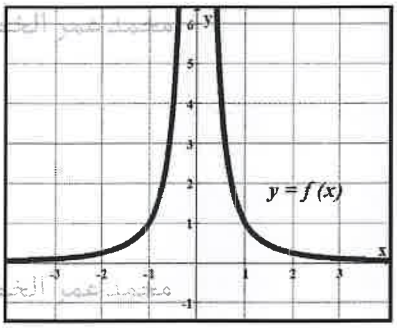


(3) لا نهائي (غير قابل للازالة)

النهاية غير موجودة

احدى النهايتين تساوي ملانهاية او كلاهم

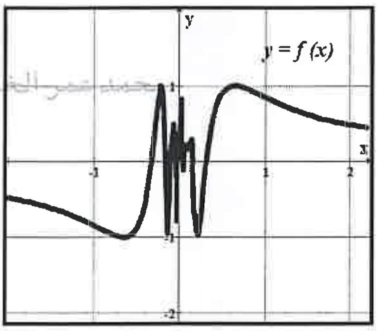
خطوط تقارب



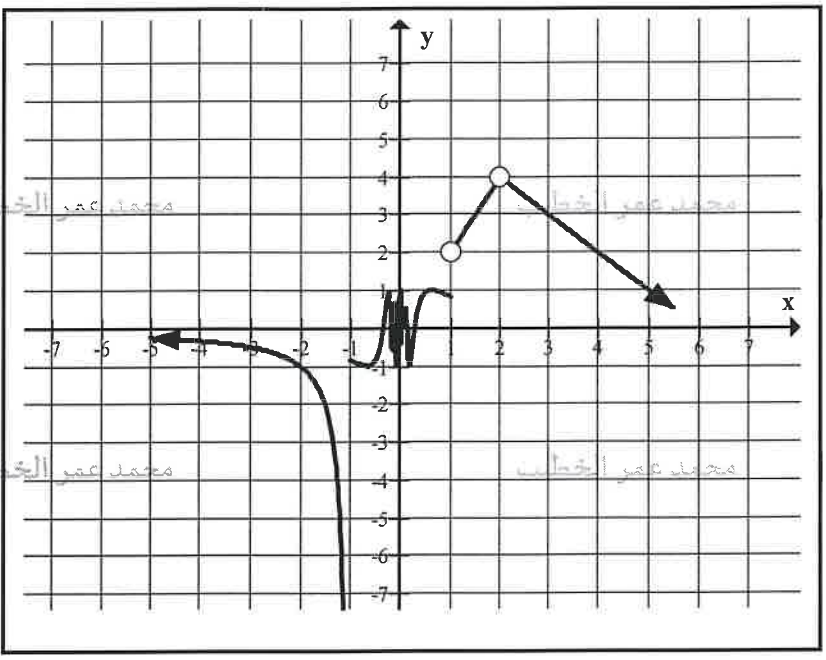
(4) التذبذبي (غير قابل للازالة)

النهاية غير موجودة

الدالة تتذبذب كثيراً عند نقطة الانفصال



(1) في الشكل المجاور اوجد نقاط انفصال الدالة . ثم حدد نوع كل منها:



(2) استعن بالجدول التالي:

نقطة انفصال الدالة	نوع الانفصال	السبب
$x = -1$	لانهائي	$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$
$x = 0$	تذبذبي	الداله تتذبذب كثيراً عندما تقترب x من الصفر .
$x = 1$	قفزة	$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ $1 \neq 2$
$x = 2$	فجوة ممكن ازالتة	الدالة غير معرفة عند $x = 2$ لكن $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

اكتب فترة الاتصال للدالة $R / \{-1, 0, 1, 2\}$

محمد عمر الخطيب

أكمل الجدول التالي

ملاحظة: يمكن البحث عن نقاط انفصال الدالة عند

(1) اصفار المقام (اكيد)

(2) نقاط التفرع (ممكن)

الدالة	نقاط الانفصال	نوع الانفصال
(1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \dfrac{(\cancel{x-3})(x+1)}{\cancel{x-3}}$ النهاية موجودة .	$x=3$	فجوة .
(2) $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{x}$ النهاية موجودة .	$x=0$	فجوة .
(3) $f(x)=\begin{cases}3-x & ,x>1\\ x^2 & ,x\le 1\end{cases}$ x^2 ① $3-x$ 1 ← | → 2	$x=1$	قفزة .
(4) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$	$x=3$	لانهائي .
(5) $f(x)=\dfrac{\|x\|}{x}$ $\quad \|x\|$ $-x$ ● x 0 -1 ○ 1 0	$x=0$	قفزة .
(6) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-2x-15} = \dfrac{(x-5)}{(\cancel{x-5})(x+3)}$	$x=5$ $x=-3$	فجوة لانهائي .
(6) $f(x)=\ln x^2$ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty$	$x=0$	لانهائي .

محمد عمر الخطيب

الاتصال على فترة:

تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ اذا كانت

(1) متصلة على كل نقطة في الفترة المفتوحة (a,b)

(2) متصلة عند النقطة a من جهة اليمين اي ان $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

(3) متصلة عند النقطة b من جهة اليسار اي ان $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

وتكون الدالة $y = f(x)$ متصلة على مجموعة الاعداد الحقيقة اذا كانت متصلة عند كل نقطة

تعتبر النقطة الطرفية نقطة انفصال لان الدالة غير معرفة عند احدى الجهتين

اما اذا كان المطلوب فترة الاتصال فيجب دراسة الاتصال من جهة واحدة واذا تحقق شرط الاتصال تكون ضمن فترة الاتصال

اعتمد على الدالة $f(x) = [x]$ للاجابة عن الاسئلة التالية

(1) هل الدالة متصلة عند $x = 0$ من جهة اليمين

$f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} [x] = 0$

الدالة متصلة عند $x=0$ من جهة اليمين

(2) هل الدالة متصلة عند $x = 1$ من جهة اليسار

$f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} [x] = 0$

الدالة غير متصلة عند $x=1$ من اليسار .

(3) هل الدالة متصلة على $(0,1)$

نعم

(4) هل الدالة متصلة على $[0,1]$

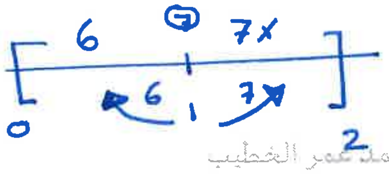
لا

تكون متصلة على $[0,1)$

محمد عمر الخطيب

أي من الدوال الآتية متصلة على الفترة $[0,2]$ ... وإذا كانت غير ذلك اكتب فترة الاتصال

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases}6 & 0\le x<1\\ 7x & 1\le x\le 2\end{cases}$$



1) $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 6$ ✓

2) $f(2) = 14$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 14$ ✓

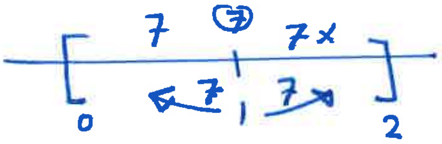
(3) $f(1) = 7.$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ م. ع

غير متصلة

ع $[0,2]$

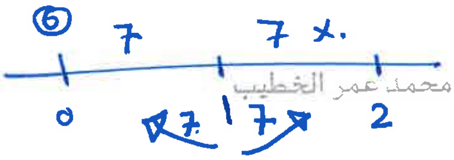
تكون متصلة ع $[0,1) , (1,2]$

$$(2)\quad f(x)=\begin{cases}7 & 0\le x<1\\ 7x & 1\le x\le 2\end{cases}$$



الدالة متصلة ع $[0,2]$ تحقق جميع الشروط

$$(3)\quad f(x)=\begin{cases}6 & x=0\\ 7 & 0<x<1\\ 7x & 1\le x\le 2\end{cases}$$



$f(0) = 6$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 7$

الدالة غير متصلة

ع $[0,2]$

تكون متصلة ع $(0,2]$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة: * نجد المجال اولاً

(1) $f(x)=x^2+5x-1 \quad ,x\in[1,2]$

فترة الاتصال $[1,2]$

---

(2) $f(x)=\sqrt{x-1}$

$x-1\geq 0$

$x\geq 1$

فترة الاتصال $[1,\infty)$

---

(3) $f(x)=\begin{cases} x+2 & ,x\leq 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$

$x+2 \quad ④ \quad x^2$

$4 \quad 2 \quad 4$

فترة الاتصال $(-\infty,\infty)$

---

(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ,x\neq 2 \\ 3 & ,x=2 \end{cases}$

$\dfrac{x^2-x-2}{x-2} \quad ③ \quad \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

$3 \quad 2 \quad 3$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}}=3$$

فترة الاتصال $(-\infty,\infty)$

---

(5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ,x\neq 2 \\ 2 & ,x=2 \end{cases}$

فترة الاتصال $(-\infty,2),(2,\infty)$

---

(6) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

لا يوجد اصفار للمقام

فترة الاتصال $(-\infty,\infty)$

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة :

(1) $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$

اصفار المقام $x=0$

فترة الاتصال $(-\infty,0),(0,\infty)$

---

(2) $f(x)=(x-1)^{\frac{3}{2}}+e^x$

$=(\sqrt{x-1})^3+e^x.$

$x-1\geq 0$

$x\geq 1$

فترة الاتصال $[1,\infty)$

---

(3) $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$

فترة الاتصال $(-\infty,0]$ ، $[4,\infty)$

---

(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{e^x-1}$

D_1 $x\geq 0$

مجال البسط	مجال المقام	اصفار المقام
$x\geq 0$	R	$e^x-1=0$ $e^x=1$ $x=0$

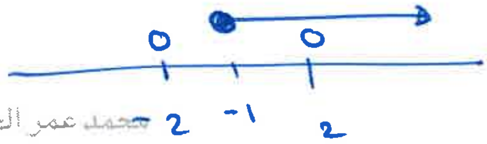
فترة الاتصال

$[0,1)$ ،$(1,\infty)$

---

(5) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-4}$

مجال البسط	مجال المقام	اصفار المقام
$x\geq -1$	R	$x=\pm 2$



فترة الاتصال $[-1,2)$ ،$(2,\infty)$

محمد عمر الخطيب

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة :

فتره الاتصال غالبا" هي المجال .

(1) $f(x)=ln(x-2)$

$x-2>0$

$x>2$

فتره الاتصال $(2,\infty)$

---

(2) $f(x)=ln(x^2-x-6)$

$x^2-x-6=0$

$x=3, x=-2$

اشارة x^2-x-6

فتره الاتصال

$(-\infty,-2), (3,\infty)$.

---

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-2)}$

مجال البسط

R

مجال المقام

$x>2$

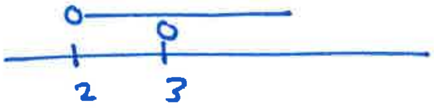
اصفار المقام

$Ln(x-2)=0$

$x-2=e^0$

$x-2=1$

$x=3$.



فتره الاتصال

$(2,3), (3,\infty)$

ملاحظة:

$$\ln x^2 = 2\ln|x|$$

(5) $f(x)=\dfrac{3}{\ln x^2}$

مجال البسط

R

مجال المقام

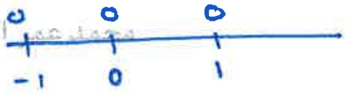
$R/\{0\}$

اصفار المقام

$Lnx^2=0$

$x^2=1$

$x=1, -1$



فتره الاتصال

$R/\{\pm1, 0\}$.

---

(4) $f(x)=\dfrac{ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

مجال البسط

$x^2-1>0$

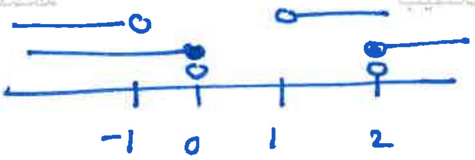
اشارة x^2-1

مجال المقام

$x^2-2x\geq0$

اصفار المقام

$x=0, 2$



فتره الاتصال $(-\infty,-1)$, $(2,\infty)$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x)=\sin^{-1}(x+2)$

$-1 \le x+2 \le 1$

$-3 \le x \le -1$

فترة الاتصال

$[-3,-1]$.

---

(2) $f(x)=\tan^{-1}(2x+1)$

$-\infty < 2x+1 < \infty$

$-\infty < x < \infty$

فترة الاتصال

$(-\infty,\infty)$

---

(3) $f(x)=\tan x \quad = \frac{\sin x}{\cos x}$

أصفار المقام

$\cos x = 0$

$x < \begin{matrix} \pi/2 \\ \frac{3\pi}{2} \end{matrix}$ } الفرق بينهم π

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

فترة الاتصال

$R / \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$.

★ (4) $f(x)=\ln(\sin x)$

$\sin x > 0$

في الربع الأول والثاني

$0 < x < \pi$

أحد الفترات

$(0,\pi)$

فترات الاتصال

$\ldots, (-2\pi,-\pi), (0,\pi), (2\pi,3\pi), \ldots$

الدالة الموسعة (ازالة الفجوة):

اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على مجال معين بأستثناء عدد محدود من النقاط التي عندها اتفصال يمكن التخلص منه فانه يمكن تعريف دالة جديدة متصلة على مجالها تسمى الدالة الموسعة وتعتمد على الدالة $f(x)$.

(1) اكتب الدلة الموسعة للدالة : $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ حتى تصبح متصلة عند $x=3$

نجد النهاية

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=5.$$

الدالة الموسعة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x-3} & x\neq 3.\\ 5. & x=3\end{cases}$$

---

(2) اكتب الدلة الموسعة للدالة : $f(x)=x\cot x$ حتى تصبح متصلة عند $x=0$

$$\lim_{x\to 0} x\cot x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1.$$

$$f(x)=\begin{cases} x\cot x & x=0\\ 1. & x\neq 0\end{cases}$$

محمد عمر الخطيب

أعد تعريف الدلة الآتية عند النقطة المشار إليها لتصبح الدالة متصلة عند النقطة المشار اليها.

(اكتب الدالة الممتدة او الموسعة).

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} \quad ,x=8$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x+1-9}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt{x+1}+3}=\frac{1}{6}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} & x\neq 8\\ 1/6 & x=8\end{cases}$$

(2) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}-1} \quad ,x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x)^2-1}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cancel{e^x-1})(e^x+1)}{\cancel{e^x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^x+1 = 2$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

(3) $f(x)=\dfrac{3}{\ln x^2} \quad ,x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{\ln x^2}=0$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{\ln x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

محمد عمر الخطيب

أعد تعريف كل من الدوال الآتية عند النقطة المشار إليها لتصبح الدالة متصلة عند النقطة المشار اليها.

(اوجد الدالة الممتدة او الموسعة).

(1) $f(x)=\frac{|x-2|-1}{x-3}$, $x=3$

$-(x-2)$ | $x-2$

2

$$\lim_{x\to3}\frac{|x-2|-1}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-2-1}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x-3}=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x-2|-1}{x-3} & x\neq3\\ 1. & x=3\end{cases}$$

(2) $f(x)=\frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$, $x=-3$

$$\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x+\cancel{3}}{\frac{3+\cancel{x}}{3x}}$$

$$=\lim_{x\to-3}3x=-9$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}} & x\neq-3\\ -9 & x=-3\end{cases}$$

(3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x}$ $,x=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x}\times\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+4-4}{\sin x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{1}{4}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x} & x\neq0\\ \frac{1}{4} & x=0\end{cases}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ايجاد الثوابت من خلال تعريف الاتصال

(1) اوجد قيمة الثابت a لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=2$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-2 & , \quad x<2 \\ a & , \quad x\geq 2 \end{cases}$$

x^2+ax-2 | a

2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$2^2+2a-2 = a$$

$$2a+2 = a$$

$$a = -2 .$$

---

(2) اوجد قيمة الثابت c لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{6x^2} & , x\neq 0 \\ c & , x=0 \end{cases}$$

$\dfrac{1-\cos 2x}{6x^2}$ | $\boxed{c}$ | $\dfrac{1-\cos 2x}{6x^2}$

0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

تذكر أن

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{6x^2} = c$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{6x^2} = c$$

$$\lim \frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x} = c \Rightarrow c = 1/3 .$$

(1) اوجد قيمة الثوابت a,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} bx^2-a & ,x<3 \\ 9 & ,x=3 \\ ax+6 & ,x>3 \end{cases}$$

$bx^2-a \quad ⑨ \quad ax+6$

3

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$$

$$b(3)^2-a=9$$

$$9b-a=9$$

$$9b-1=9$$

$$9b=10 \rightarrow \boxed{b=\frac{10}{9}}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

$$3a+6=9$$

$$3a=3$$

$$\boxed{a=1}$$

(2) اوجد قيمة الثوابت a,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2\sin x}{x} & ,x<0 \\ a & ,x=0 \\ b\cos x & ,x>0 \end{cases}$$

$\frac{2\sin x}{x} \quad ⓐ \quad b\cos x.$

0

$$\lim \frac{2\sin x}{x} = a$$

$$\boxed{2=a.}$$

$$\lim_{x\to 0} b\cos x = a$$

$$b=a$$

$$\boxed{b=2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد قيمة الثوابت a,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & ,x<0\\ b & ,x=0\\ \frac{\sin ax}{x} & ,x>0\end{cases} = \begin{cases}-1 & x<0\\ b & x=0\\ \frac{\sin ax}{x} & x>0\end{cases}$$

$-1 \quad \textcircled{b} \quad \frac{\sin ax}{x}$

0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\boxed{-1 = b}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim \frac{\sin ax}{x} = b .$$

$$\boxed{a = -1}$$

---

(2) اوجد قيمة الثوابت a,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+5 & ,x>-1\\ 7 & ,x=-1\\ x-b & ,x<-1\end{cases}$$

$x-b \quad \textcircled{7} \quad ax^2+5$

-1

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$$

$$-1-b = 7$$

$$-b = 8$$

$$\boxed{b = -8}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$$

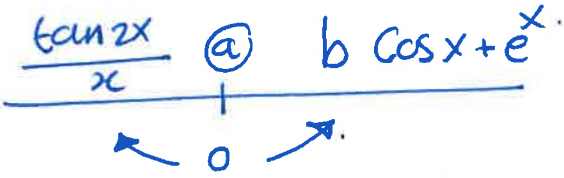
$$a(-1)^2+5 = 7$$

$$a+5 = 7$$

$$\boxed{a = 2}$$

(1) أوجد قيمة الثوابت a,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan 2x}{x} & ,x<0\\ a & ,x=0\\ b\cos x+e^{x} & ,x>0\end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan 2x}{x}=f(0)$

$\boxed{2=a}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

$b+1=a$

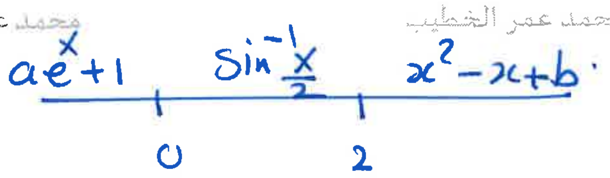
$b+1=2$

$\boxed{b=1}$

---

(2) أوجد قيمة الثوابت a,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases}ae^{x}+1 & ,x\le 0\\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2} & ,0<x<2\\ x^{2}-x+b & ,x\ge 2\end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$

$a+1=0$

$\boxed{a=1}$

$\sin^{-1}1=4-2+b$

$\frac{\pi}{2}=2+b$

$\boxed{b=\frac{\pi}{2}-2}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) أوجد قيمة الثوابت a,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & ,x\le 1\\ x^2-2x & ,1<x<3\\ b-a & ,x\ge 3\end{cases}$$

$2x+a \quad x^2-2x \quad b-a$

$1 \qquad 3$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \qquad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$2+a = -1 \qquad 3 = b-a$

$\boxed{a=-3} \qquad b-a=3$

$b-(-3)=3$

$b+3=3$

$\boxed{b=0}$

---

(2) أوجد قيمة الثوابت a,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases}a(\tan^{-1}x+2) & ,x<0\\ 2b^x-7 & ,\quad 0\le x\le 3\\ \ln(x-2)+x^2 & ,x>3\end{cases}$$

$a(\tan^{-1}x+2) \quad 2b^x-7 \quad \text{Ln}(x-2)+x^2$

$\nwarrow 0 \nearrow \quad \nwarrow 3 \nearrow$

$a(\tan^{-1}0+2) = 2-7 \qquad 2b^3-7 = 9$

$2a = -5 \qquad 2b^3 = 16$

$b^3 = 8$

$\boxed{a = -\frac{5}{2}} \qquad \boxed{b=2}$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد قيمة الثوابت m,n لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-mx+2}{x-1} & ,x\neq 1\\ n & ,x=1\end{cases}$$

$$\frac{x^2-mx-2}{x-1}\quad \textcircled{n}\quad \frac{x^2+mx-2}{x-1}$$

1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-mx+2}{x-1} = n.$$

★ عندما تكون النهاية موجودة .

و المقام صفر يجب ان ~~ت~~تكون

البسط = صفر

$$\lim_{x\to 1} x^2-mx+2=0$$

$$1-m+2=0 \Rightarrow \boxed{m=3.}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=n$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=n$$

$$1-2=n$$

$$\boxed{n=-1}$$

---

(2) حدد جميع قيم x التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3 & x \text{ عدد نسبي}\\ 4x & x \text{ عدد غير نسبي}\end{cases}$$

ملاحظة

الدالة
$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ عدد نسبي}\\ 0 & x \text{ عدد غير نسبي}\end{cases}$$

غير متصلة عن اي نقطة في مجالها

$$x^2+3=4x.$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-3)(x-1)=0$$

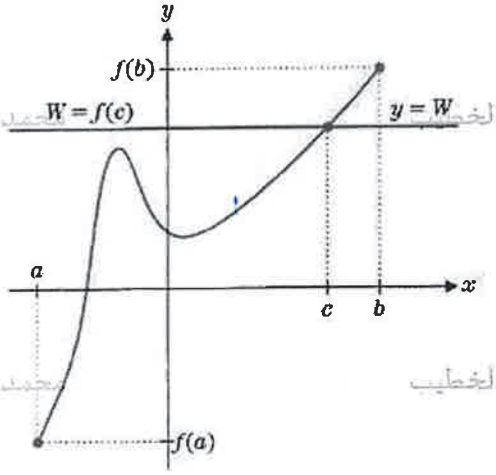
$$x=1\ ,\ x=3.$$

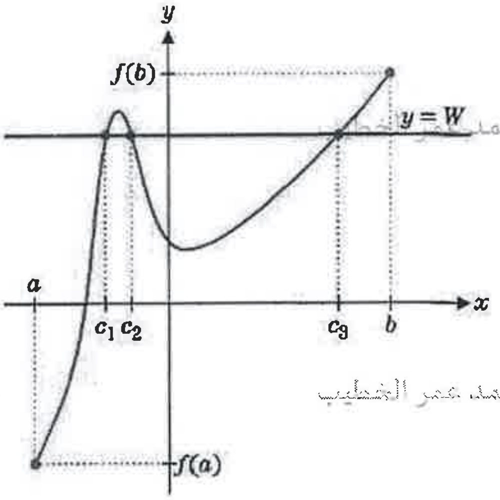
محمد عمر الخطيب

تطبيقات الدوال المتصلة

نظرية القيمة الوسطية

اذا كانت $f\ (x\ )$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a\ ,b]$, وكانت W اي عدد يقع بين $f\,(\mathrm{a})$ و $f\,(\mathrm{b})$ فانه يوجد عدد على الاقل مثل c ينتمي الى الفترة $[a\ ,b]$ بحيث $f\,(\mathrm{c}) = W$

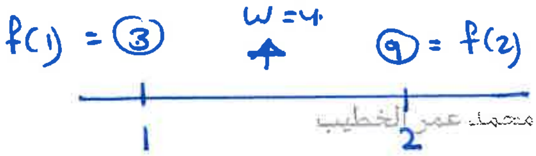




اذا كانت $f\,(x) = x^3 - x + 3$ دالة متصلة على الفترة $[1\,,2]$ فاوجد التقريب الثاني للعدد c والذي ينتمي الى الفترة ويحقق $f\,(\mathrm{c}) = 4$

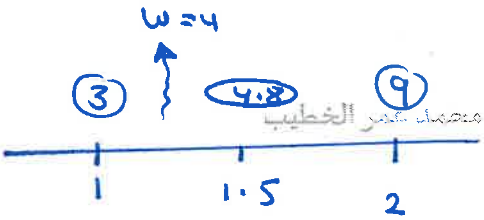
التقريب الأول

$$C_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$



التقريب الثاني

$$C_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$



تحل:

محمد عمر الخطيب

نتيجة نظرية القيمة الوسطية (نظرية بلزانو) التصنيف

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، وكانت $f(\text{a})$ و $f(\text{b})$ لهما اشارتان مختلفتان فانه يوجد عدد على الاقل مثل r ينتمي الى الفترة (a, b) بحيث $f(r) = 0$

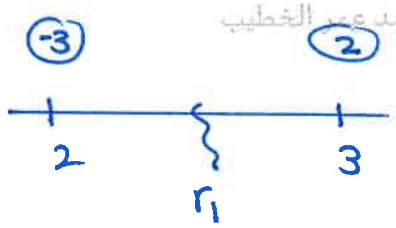
(1) اذا كانت $f(x) = x^2 - 7$ دالة متصلة على الفترة $[2, 3]$ فاوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة مقرباً لأقرب منزلتين عشريتين .

بما أن $f(3)$ ، $f(2)$

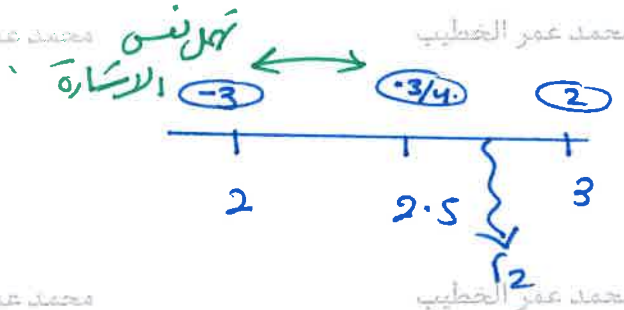
لهما اشارتان مختلفتان .

فانه يوجد جذر بينهم .

$$r_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5$$



$$r_2 = \frac{2.5+3}{2} = 2.75$$



---

(2) اذا كانت $f(x) = e^x + x$ فاوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة مقرباً لأقرب منزلتين عشريتين .

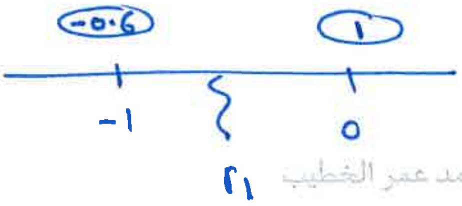
بما أنه لا يوجد فترة نبحث عن عددين لهم صور مختلفة

بالاشارة بالتجريب او الآلة الحاسبة

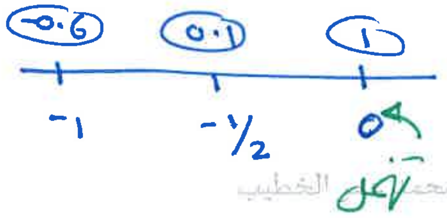
$$f(0) = e^0 + 0 = 1$$

$$f(-1) = e^{-1} - 1 = -0.6$$

$$r_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$$



$$r_2 = \frac{-1+(-\frac{1}{2})}{2} = -0.75$$



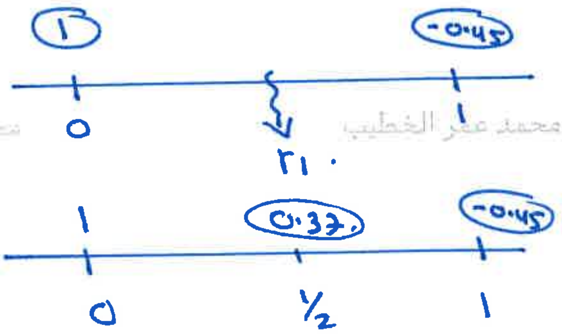
محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت $f(x) = \cos x - x$ دالة متصلة على الفترة $[0, 1]$ فاوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة مقرباً لأقرب منزلتين عشريتين .

$r_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$

$r_2 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \underbrace{0.75}$

منزلتين عشريتين



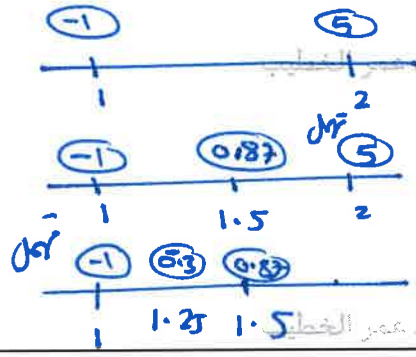
(2) اذا كانت $f(x) = x^3 - x - 1$ دالة متصلة على الفترة $[1, 2]$ استخدم طريقة التصنيف لايجاد فترة طولها $\frac{1}{4}$ تحتوي صفر الدالة .

$r_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$. 1 طول الفترة

$r_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$ طول الفترة $\frac{1}{2}$

$r_3 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$ $\frac{1}{4}$ طول الفترة

الفترة $[1.25$ و $1.5]$



(3) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ حيث $f(a) < a$ و $f(b) > b$ فأثبت انه يوجد عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a, b) ويحقق $f(c) = c$.

$f(b) - b > 0$ $f(a) - a < 0$

مساعدة : افرض الدالة

$g(x) = f(x) - x$

لتكن $g(x) = f(x) - x$

هذه الداله متصله ع $[a,b]$ لانها حاصل طرح دالتين متصلتين

$g(a) = f(a) - a < 0$
$g(b) = f(b) - b > 0$ اشارتان مختلفتان

من نتيجة نظرية القيمة الوسطية (بلزانو) يوجد عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a,b) حيث

$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$ #

محمد عمر الخطيب

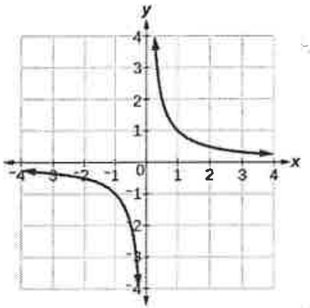
اولاً: نهاية الدالة عند ما تساوي ملانهاية

ملاحظة:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

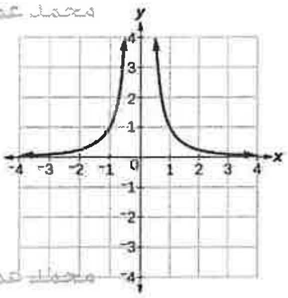
$$2)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$ غير موجودة



ملاحظة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$



الكميات غير المعينة (الصيغ غير المحددة) (7 كميات)

$$\frac{0}{0}\ ,\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\infty-\infty$$

$$0\times\infty$$

$$0^0\quad ,\quad \infty^0\quad ,\quad 1^\infty$$

الكميات المعينة

$$\frac{a}{0}=\pm\infty\quad ,\quad \frac{a}{\pm\infty}=0\quad if\quad a\neq 0$$

$$\infty\pm a=\infty\quad ,\quad \infty+\infty=\infty$$

$$a\times\infty=\pm\infty$$

$$a^0=1\quad ,\quad \infty^\infty=\infty$$

$$a^\infty=\infty\ \ if\ a>1\quad ,a^\infty=0\ \ if\ 0<a<1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل مما ياتي

البسط موجب

$$(1)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x}{(x-2)} = -\infty$$

المقام سالب

اشارة المقام $x-2$.

$- - -\ \overset{0}{|}\ +\ +$ ، 2

$$(2)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x}{(x-2)} = +\infty$$

المقام موجب

$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ ≠ صفر

غ.م . $-\infty$ $+\infty$

$$(3)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)}$$

غ.م

موجب

$$(4)\ \lim_{x\to -1}\frac{1-x}{(x+1)^2} = \infty$$

اشارة المقام موجب

$+\ +\ \overset{0}{|}\ +\ +\ +$ ، -1

$$(5)\ \lim_{x\to -1^+}\frac{1-2x}{x^2-1}\ \overset{\oplus}{\underset{\ominus}{}} = \infty$$

اشارة المقام x^2-1

$+\ +\ \underset{-1}{|}\ - - -\ \underset{1}{|}\ +\ +$

$$(6)\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x+1}{x^2-x-6}\ \overset{\oplus}{\underset{\ominus}{}} = -\infty$$

اشارة المقام

$+\ +\ \underset{-2}{|}\ - - -\ \underset{3}{|}\ +\ +$

$$(7)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+\cos x}{x}\ \overset{\oplus}{\underset{\ominus}{}} = -\infty$$

اشارة المقام

$- -\ \underset{0}{|}\ +\ +$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to2^-}\frac{\overset{\oplus}{e^x}}{\underset{\oplus}{x^2-4}} = \infty$

(2) $\lim_{x\to-1^-}(x^2-2x-3)^{-2/3}$

$= \lim_{x\to-1^-}\frac{\overset{\oplus}{1}}{(x^2-2x-3)^{2/3}}\ \oplus = +\infty$

المقام دائماً موجب لأنه تربيع .

(3) $\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = \begin{cases}\infty & ,b>1\\ 0 & ,0<b<1\end{cases}$$

(4) $\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

(5) $\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$. غ.م

(6) $\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}} = e^{\infty} = \infty .$

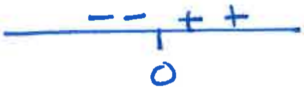
(7) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$

اشارة المقام $\cos x$.

(8) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x = \infty$

(9) $\lim_{x\to0^-}\cot x = \lim_{x\to0^-}\frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$

اشارة المقام $\sin x$.



محمد عمر الخطيب

أوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} e^{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} e^{\frac{\sin x}{\cos x.}} = e^{-\infty}$

$= \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

اشارة $\cos x.$ $\quad \overset{++}{} \underset{\frac{\pi}{2}}{|} \overset{--}{}$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} e^{\tan x} = e^{\infty} = \infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \ln(x) = -\infty$

حفظ من الرسم

(4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \ln(x\sin x) = \ln(0^{+}) = -\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \tan^{-1}(\ln x) = \tan^{-1}(-\infty) = -\tan^{-1}(\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^{-}} \cot^{-1}(\sin x) = \lim\limits_{x\to 0^{-}} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \tan^{-1}(-\infty) =$

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x\sec^{2} x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^{2} x} = \infty$

لاحظ المقام تربيع يعني موجب

محمد عمر الخطيب

ثانياً: نهاية الدالة عند الملانهاية (خطوط التقارب الافقية)

اذا كانت الدالة : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ او $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ حيث عدد حقيق L فان للدالة $f(x)$ خط تقارب افقي معادلتة $y=L$

ملاحظات مهمة :

(1) اذا كانت k عدد حقيق لا يساوي صفر فان : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k=k$

(2) اذا كانت n عدد صحيح موجب فان : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x^n}=0$ حيث k عدد حقيقي لا يساوي صفر

(3) اذا كانت n عدد صحيح موجب زوجي فان : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & ,a>0\\ -\infty & ,a<0\end{cases}$

(4) اذا كانت n عدد صحيح موجب فردي فان :

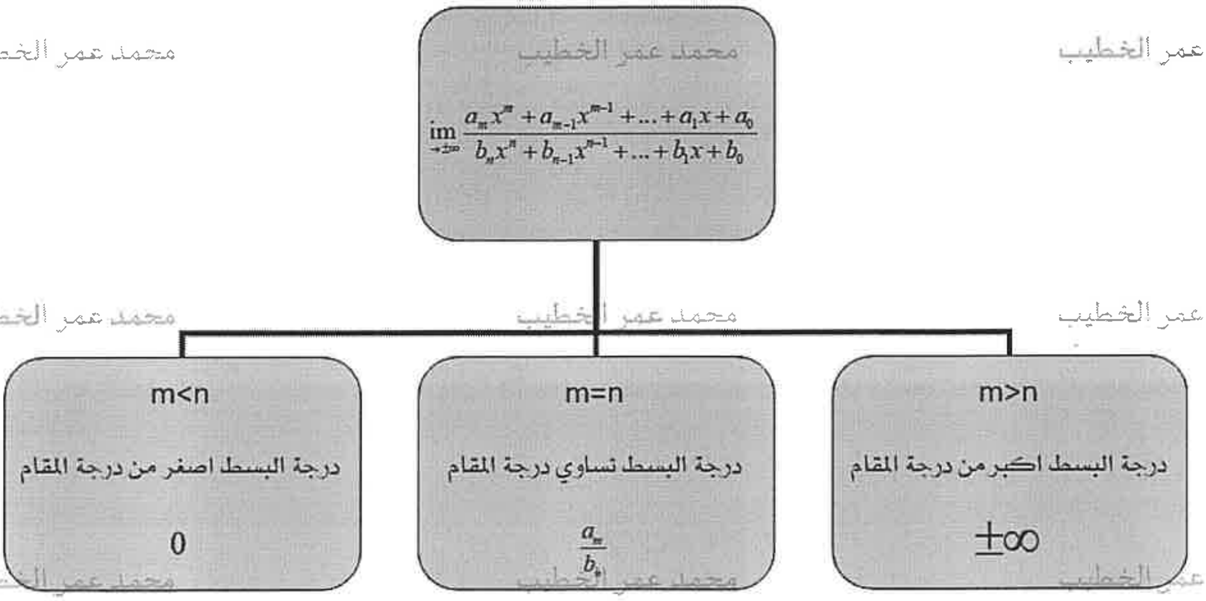
$$\lim_{x\to+\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & ,a>0\\ -\infty & ,a<0\end{cases} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}-\infty & ,a>0\\ \infty & ,a<0\end{cases}$$

(5) اذا كانت $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ كثيرة حدود فان :

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=\lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

تهمل كل الحدود في الدالة الحدودية ما عدا الحد الذي له الأس الاكبر

(6) نهاية الدالة النسبية تكون حسب القاعدة التالية او (نقسم كل من البسط والمقام على اعلى درجة في المقام)



محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

مهمل مهمل

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-5x+3 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = \infty.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} -x^7-5x^4+8 = \lim\limits_{x\to\infty} -x^7 = -\infty.$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4-5x^5+7 = \lim\limits_{x\to-\infty} -5x^5 = \infty.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x+x = \infty+\infty = \infty.$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = 0.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(0.8)^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = \begin{cases}\infty & ,b>1\\ 0 & ,0<b<1\end{cases}$$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5-\frac{2}{x} = 5-0 = 5$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty} x-\frac{3}{x} = \infty-0 = \infty.$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x} = \infty.$

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}|x| = \infty.$

(11) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)^{-2/3}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-5)^{2/3}} = 0$

المقام دائماً موجب.

(12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^3+4x-5}{x^4-1} = 0$

درجة البسط اقل من درجة المقام.

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2}{10x^2-5x+1} = \dfrac{-5}{10} = \dfrac{-1}{2}$

درجة البسط تساوي درجة المقام.

---

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4+x^5}{x^4+1} = -\infty$

$\dfrac{x^5}{x^4} = x.$

درجة البسط اكبر.

---

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6+1}{x^2+1} = +\infty$

$\dfrac{x^6}{x^2} = x^4$

★ (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{2x} = 0$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ عند $-\infty$

$\dfrac{-1}{2x} \geq \dfrac{\sin x}{2x} \geq \dfrac{1}{2x}$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$\dfrac{-1}{2x} \leq \dfrac{\sin x}{2x} \leq \dfrac{1}{2x}$ عند ∞.

---

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{2x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}.$

---

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x}{2x^2+\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}.$

---

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\cot^{-1}x = \lim\limits_{x\to\infty}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \tan^{-1}(0) = 0.$

★ (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-5}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right) = \ln 1 = 0.$

---

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x-5}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \infty.$

ملاحظة:

يمكن تبديل النهاية

مع الدالة المتصلة

---

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x^2-5}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x^2}\right) = \ln(0) = -\infty.$

★ (11) $\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\dfrac{10x+\sin x}{x+\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\dfrac{10x}{x}\right) = \log 10 = 1.$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to\infty} \ln(e\,x-2)-\ln(x+4)$.

$= \text{Lim } \text{Ln}\left(\frac{ex-2}{x+4}\right)$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x^2+3x-3)}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{\text{Ln}(x)}{\text{Ln}(x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\text{Ln}(x)}{2\text{Ln}\,x} = 1/2$

(3) $\lim_{x\to\infty} \sin(\tan^{-1}x)$ $= \sin\left(\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

★ (4) $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ $= \lim_{x\to\infty} \cos^{-1}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}.$

(5) $\lim_{x\to-\infty} e^{-1/(x^2+1)}$ $= e^{-} = 1$

(6) $\lim_{x\to-\infty} e^{(x+1)/(x^2+1)}$ $= e^{0} = 1$

(7) $\lim_{x\to-\infty} e^{\cos(1/x)}$ $= e^{\cos(0)} = e^{1} = e$

(8) $\lim_{x\to-\infty} 4\tan^{-1}(3x-1)$ $= 4\tan^{-1}(-\infty) = 4\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -2\pi.$

(9) $\lim_{x\to\infty} (1-\frac{2}{x})^x$ $= e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} (1+\frac{a}{x})^x = e^a \quad a \neq 0}$$

(10) $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{2x})^x$ $= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1/2}{x}\right)^x = e^{1/2} = \sqrt{e}.$

★ (11) $\lim_{x\to 0^+} (1-3x)^{\frac{2}{x}}$

نفرض

$u = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u}.$

$x \to 0^+ \Rightarrow u \to \infty$

$= \lim_{u\to\infty} \left(1-\frac{3}{u}\right)^{2u} = \left(\lim_{u\to\infty}\left[1-\frac{3}{u}\right]^{u}\right)^2 = (e^{-3})^2 = e^{-6}$

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{300}{9(0.8)^x+1}$ $= \dfrac{300}{9(0)+1} = 300.$

---

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{80x^{-0.3}+60}{2x^{-0.3}+5}$ $= \lim \dfrac{\frac{80}{x^{0.3}}+60}{\frac{2}{x^{0.3}}+5} = \dfrac{0+60}{0+5} = 12.$

---

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2+4}}$ $= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{|x|}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{-x} = 3.$

---

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-2x+1}-2x$ $\times \dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}.$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}.$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x\boxed{+1}}{\sqrt{4x^2\boxed{-2x+1}}+2x}.$

تهمل

تهمل

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{4x^2}+2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{|2x|+2x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{2x+2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{4x} = -1/2$

ملاحظة :

$\infty-\infty$ كمية غير معينة

وليس صفر

ولا يجوز حذف حدود في هذه الحالة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

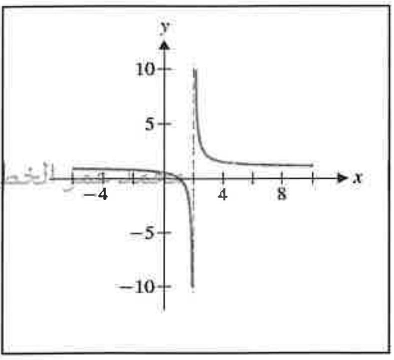
خطوط التقارب للدوال النسبية

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

(1) **يجب كتابة الدالة النسبية في ابسط صورة قبل ايجاد خطوط التقارب واذا تم اختصار احد العوامل وليكن** $x-a$ **فان للدالة فجوة عند** $x=a$ **وليس خط تقارب رأسي**

(2) **يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسية عند اصفار المقام .**

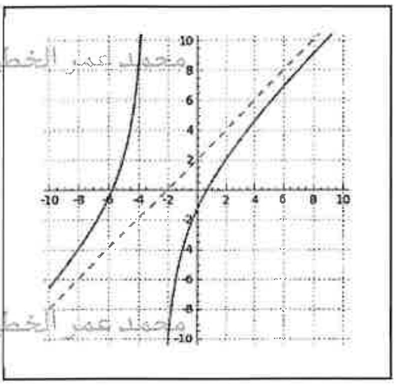
وتكون معادلة $x=a$



(3) **يكون للدالة النسبية خطوط تقارب افقية اذا كانت درجة البسط اصغر من او تساوي درجة المقام وتكون معادلة** $y=a$

(4) **يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام . وتكون معادلة** $y=a\,x+b$

ونستخدم القسمة المطولة او القسمة التركيبية لايجادة



لا يجوز ان يكون للدالة خط تقارب افقي ومائل في نفس الوقت

خطوط التقارب للدوال غير النسبية

(1) **يكون للدالة خطوط تقارب رأسية عند** $x=k$

اذا كانت واحدة من العبارات التالية صحيحة

$$\lim_{x\to k} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to k^{+}} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to k^{-}} f(x)=\pm\infty$$

(2) **يكون للدالة خطوط تقارب افقية عند** $y=l$

اذا كانت احد الشروط التالية صحيحة $\lim_{x\to\infty} f(x)=l\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=l$

محمد عمر الخطيب

اوجد خطوط التقارب الافقية والرأسية والمائلة (ان وجدت)

(1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$

الأفقية

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-4}=1$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2-4}=1.$

$y=1$

الرأسية ← أصفار المقام

$x^2-4=0$

$x=\pm2$

$x=2$, $x=-2$

---

(2) $f(x)=\frac{x}{x^2-x-6}$

الأفقية

$y=0$

الرأسية

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3$, $x=-2$

---

(3) $f(x)=\frac{2}{x-3}+1$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x-3}+1=1.$

الأفقية

$y=1.$

الرأسية

$x=3$

---

(4) $f(x)=\frac{x^2+4x-2}{x+1}$

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x+1 & x^2+4x-2 \\ & \ominus x^2 \overset{\ominus}{+} x \\ \hline & 3x-2 \\ & \ominus 3x \overset{\ominus}{+} 3 \\ \hline & -5 \end{array}$$

المائلة.

$y=x+3.$

الرأسية

$x=-1$

---

(5) $f(x)=x+\frac{2}{x+1}$

المائلة.

$y=x$

الرأسية

$x=-1$

أ. عبلة.

اوجد خطوط التقارب الافقية والرأسية اوالمائلة (ان وجدت)

(1) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

الرأسية لا يوجد

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{|x|}=\lim\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

الافقية $y=-2\ ,\ y=2$

---

(2) $f(x)=\dfrac{x-4}{|x|+1}$

الافقية

الرأسية

$|x|-1=0$

$|x|=1$

$x=1,-1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{|x|-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-4}{|x|-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

الافقية $y=-1,1.$

---

(3) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-3}$ ★

الافقي

الرأسي

$e^x-3=0$

$e^x=3$

$x=\ln 3$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^\infty}=0.$$

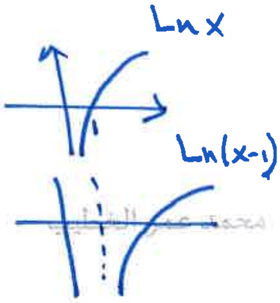
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-3}=\frac{1}{e^{-\infty}-3}=\frac{-1}{3}$$

الافقية $y=0\ ,\ y=-\frac{1}{3}.$

محمد عمر الخطيب

اوجد خطوط التقارب الافقية والرأسية اوالمائلة (ان وجدت)

(1) $f(x)=2\ln(x-1)$



الرأسية

$x = 1.$

لا يوجد افقي. ولا مائل.

---

(2) $f(x)=\ln(1-\cos x)$

الرأسي.

$1 - \cos x = 0$

$\cos x = 1.$

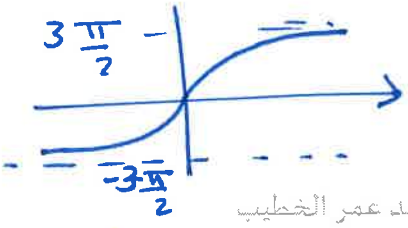
$x \left\langle \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \right.$ ليس حل $\Rightarrow x = 0+2n\pi.$

خطوط التقارب الرأسية $x = 2n\pi.$

---

(3) $f(x)=3\tan^{-1}x$

الرسم يساعد بالحل.

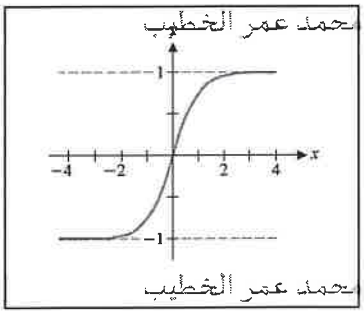


لا يوجد خطوط تقارب رأسية.

خطوط التقارب الافقية $y = \pm\frac{3\pi}{2}.$

---

(4) $f(x)=\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$



لا يوجد خطوط تقارب رأسية.

من الرسم الافقية $y = \pm 1$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1$ او $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = -1.$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت للدالة $f(x)=\dfrac{ax}{bx+6}$ خط تقارب رأسي معادلتة : $x=-2$ وخط تقارب افقي

معادلتة $y=-3$ فاوجد قيمة الثوابت a,b

$x = -2$

خط تقارب رأسي

فهي صفر للمقام.

أي انه

$b(-2)+6=0$

$\boxed{b = 3}$

الافقي

$y = \frac{a}{b} = -3.$

$\frac{a}{3} = -3$

$\boxed{a = -9.}$

---

(2) اذا كانت للدالة $f(x)=\dfrac{2}{x-a}+b$ خط تقارب رأسي معادلتة : $x=1$ وخط تقارب افقي

معادلتة $y=-3$ فاوجد قيمة الثوابت a,b

الرأسي $x = 1$

$1 - a = 0$

$a = 1.$

الافقي

$y = b = -3$

$\boxed{b = -3}$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت للدالة النسبية $f(x)=\dfrac{x^2-4}{q(x)}$ لها خط تقارب رأسي وحيد معادلته $x=3$ وخط تقارب افقي معادلته $y=-\dfrac{1}{2}$ فاوجد الدالة $q(x)$

$q(x)= -2(x-3)^2$.

---

(2) اذا كانت للدالة النسبية $f(x)=\dfrac{x^2-4}{q(x)}$ لها خطين تقارب رأسية معادلتهما $x=\pm3$ وخط تقارب افقي معادلته $y=2$ فاوجد الدالة $q(x)$

$q(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x-3)$

---

(3) اذا كانت للدالة النسبية $f(x)=\dfrac{x^2-4}{q(x)}$ لها خط تقارب رأسي معادلته $x=3$ و فجوة عند $x=2$ وخط تقارب افقي معادلته $y=\dfrac{1}{2}$ فاوجد الدالة $q(x)$

$q(x) = 2(x-2)(x-3)$

---

(4) اذا كانت للدالة النسبية $f(x)=\dfrac{x^3-3}{q(x)}$ لها خط تقارب مائل معادلته $y=x$ وليس له خط تقارب رأسي ، فاوجد الدالة $q(x)$

$q(x) = x^2+1$

يوجد أكثر من حل .

---

(5) اذا كانت للدالة $f(x)=\dfrac{x-4}{q(x)}$ خطين تقارب أفقيا هما $y=\pm1$ وليس له خط تقارب رأسي ، فاوجد الدالة $q(x)$ (الدالة ليست نسبية)

$q(x) = |x|+1$

السؤال تمهيد تجريب .

(1) اذا كان طول حيوان بعد عدة ايام من الولادة يعطى بالعلاقة $h(t)=\dfrac{300}{1+9(0.8)^t}$

(أ) اوجد طول الحيوان عند الولادة $(t=0)$

$$h(0)=\frac{300}{1+9(0.8)^0}=\frac{300}{1+9}=30.$$

(ب) اوجد طول الحيوان النهائي $(t\to\infty)$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{300}{1+9(0.8)^t}.=\frac{300}{1+9(0)}=300.$$

---

(2) في إحدى الدراسات على عيون الحيوانات وجد إن قطر البؤبؤ $f(x)$ للحيوان يتناسب عكسياً مع شدة الإضاءة x التي تسقط على عينيه وفق العلاقة:

$$f(x)=\frac{80x^{-0.03}+60}{8x^{-0.03}+15}$$

اوجد نهاية قطر البؤبؤ عند الحد الاقصى من الضوء

(أ) اوجد نهاية قطر البؤبؤ عندما تنعدم الرؤية $(x\to 0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{80x^{-0.03}+60}{8x^{-0.03}+15}$$

$$=\lim\frac{\frac{80}{x^{0.03}}+60}{\frac{8}{x^{0.03}}+15}=\lim\frac{\frac{80+60x^{0.03}}{\cancel{x^{0.03}}}}{\frac{8+15x^{0.03}}{\cancel{x^{0.03}}}}=\frac{80}{8}=10\ \text{mm}$$

(ب) اوجد نهاية قطر البؤبؤ عند الحد الاقصى من الرؤية $(x\to\infty)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{80}{x^{0.03}}+60}{\frac{8}{x^{0.03}}+15}=\frac{0+60}{0+15}=4.\ \text{mm}$$

محمد عمر الخطيب

الصف الثاني عشر متقدم

2022/2021

الوحدة الثالثة

التفاضل

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثالثة: التفاضل /// الدرس الأول والثاني: المشتقة والمماسات والسرعة المتجهة

تعريف المشتقة:

يسمى ميل المنحنى عند النقطة $x = a$ بمشتقة الدالة عند تلك النقطة ويرمز لها بالرمز $f'(a)$

حيث:

التعريق الاساسي للمشتقة عند نقطة

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ومشتقة الدالة f هي الدالة f' حيث:

التعريق الاساسي للمشتقة كدالة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ويمكن استخدام التعريف البديل:

التعريق البديل للمشتقة عند نقطة

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة اذا كانت النهاية موجودة

يجب ان تكون الدالة متصلة عند النقطة التي نبحث في اشتقاقها

ملاحظة:

مشتقة دالة عند نقطة.

- ميل المماس للدالة عند تلك النقطة.
- السرعة اللحظية المتجهة عند تلك النقطة.
- معدل التغير للدالة عند تلك النقطة

رموز المشتقة $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $f(x)=x^{2}-4x$ فأوجد $f'(3)$ بإستخدام تعريف المشتقة او التعريف البديل.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x-(-3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{x-3}}$$

$$=2$$

$$\therefore f'(3)=2.$$

(2) إذا كانت: $f(x)=\sqrt{x}$ فأوجد $f'(x)$ بإستخدام تعريف المشتقة

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(3) إذا كانت: $f(x)=\dfrac{2}{x}$ فأوجد $f'(x)$ بإستخدام تعريف المشتقة .

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{x+h}-\frac{2}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2x-2(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x-2x-2h}{h\,x(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}\,x(x+h)}$$

$$=\frac{-2}{x(x)}$$

$$=-\frac{2}{x^2}.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$ فأوجد $f'(0)$ بإستخدام تعريف المشتقة .

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\,\sin x-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\;\frac{\sin x}{x}=0\cdot 1=0.$$

$$\Rightarrow f'(0)=0.$$

---

(2) إذا كانت: $f(x)=\cos x$ فأوجد $f'(0)$ بإستخدام تعريف المشتقة .

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\cdot\frac{\cos x+1}{\cos x+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim\frac{-\sin x\;\sin x}{x(\cos x+1)}=0.$$

---

(3) إذا كان: $f'(3)=4$ فأوجد

هذه هو التعريف الاساسي

$$\lim_{h\to 0}\frac{5f(h+3)-5f(3)}{2h}=\frac{5}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(h+3)-f(3)}{h}=\frac{5}{2}f'(3)=\frac{5}{2}(4)=10$$

---

(4) إذا كان: $f'(2)=-5$ فأوجد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h[h-0.5]}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h(-1)}=-f'(2)=5.$$

هذه دار الصحيح

---

(5) إذا كان: $f'(2)=3$ فأوجد

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)\,(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})$$

$$=f'(2)\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})=6\sqrt{2}.$$

يمكن تأجيل حل
الصفحة الى بعد
قواعد الاشتقاق

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $f(x)=x^2-4x$ أوجــــد :

أ) ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1,-3)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$m = f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x-(-3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= -2$$

$$\boxed{m = -2}$$

ب) معادلة المماس عند النقطة $(1,-3)$.

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-(-3) = -2(x-1)$$

$$y+3 = -2x+2 \Rightarrow y = -2x-1.$$

---

(2) يسقط جسم من ارتفاع برج ويحدد ارتفاعه عن الارض في اي زمن بالعلاقة $h(t)=64-16t^2$

حيث t بالثواني و h بالقدم

أ) اوجد ارتفاع الجسيم بعد مرور 1 ثانية.

$$h(1) = 64-16(1)^2 = 48 \text{ ft}.$$

ب) السرعة المتوسطة المتجهه اول ثلاث ثواني

$$v_{avg} = \frac{h(3)-h(0)}{3-0} = \frac{-80-64}{3} = -48 \text{ ft/s}.$$

ت) اوجد السرعة المتجهه للجسيم بعد مرور 1 ثانية.

$$v(1) = h'(1) = \lim_{t\to 1} \frac{h(t)-h(1)}{t-1}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{64-16t^2-(48)}{t-1}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{16-16t^2}{t-1}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{16(1-t^2)}{t-1}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{16\overset{-1}{\cancel{(1-t)}}(1+t)}{\cancel{t-1}}$$

$$= -32 \text{ ft/s}.$$

المشتقة من جهة واحدة:

تكون الدالة المتصلة : $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة الداخلية a اذا كانت المشتقة على يمين النقطة a وهي $f'(a^+)$ والمشتقة على يسار النقطة a وهي $f'(a^-)$ متساويتان

اي ان : $f'(a^+) = f'(a^-)$

حيث:

$$D_+ f(a) = f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$D_- f(a) = f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$

ملاحظة :اولاً نبحث اتصال الدالة عند $x = 1$

فاذا كانت غير متصلة فانها غير قابلة للاشتقاق

فأوجد $f'(1)$ بإستخدام تعريف المشتقة.

نبحث الاتصال اولاً"

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$$

∴ الدالة متصلة عند $x=1$

نبحث الاشتقاق للدالة عند النقطة من الطرفين

$$f'(\boxed{1^+}) = \lim_{x\to \boxed{1^+}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2.$$

$$f'(\boxed{1^-}) = \lim_{x\to \boxed{1^-}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1}$$

$$= 2.$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) = 2$$

∴ المشتقة موجودة

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ 2x & x<0\end{cases}$ فأثبت بإستخدام تعريف المشتقة أن $f'(0)$ غير موجودة.

الاتصال $\quad \underset{0}{\overset{2x \quad \curvearrowright \quad x^2}{\rule{6em}{0.4pt}}}$

الدالة متصلة عند $x=0$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-0}{x-0}=\lim 2=2$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim x=0$$

$$f'(0^-)\neq f'(0^+)\Rightarrow$$ $f'(0)$. غير موجودة

(2) إذا كانت: $f(x)=x|x|$ فأوجد $f'(0)$ بإستخدام تعريف المشتقة.

$|x|\quad \overset{-x \quad \curvearrowright \quad x}{\rule{6em}{0.4pt}}$

$x|x|\quad \underset{0}{\overset{-x^2 \quad \overset{0}{\curvearrowright} \quad x^2}{\rule{6em}{0.4pt}}}$

الدالة متصلة عند $x=0$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2-0}{x}=\lim -x=0$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\frac{x^2-0}{x-0}=\lim x=0$$

$\therefore\ f'(0)=0$. موجودة

(3) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x^3\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\end{cases}$ فأوجد $f'(0)$ بإستخدام تعريف المشتقة.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$$ من نظرية الشطيرة

$$\Rightarrow f'(0)=0$$

(1) اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فأثبت ان

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+ch)-f(a)}{h} = c\,f'(a)$$

الاثبات.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+ch)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{k\to0}\frac{f(a+k)-f(a)}{k/c}$$

نفرض

$k=ch$

$h\to0$

$k\to0$

$$= c\lim_{k\to0}\frac{f(a+k)-f(a)}{k}$$

$$= c\,f'(a).$$ #

---

(2) اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند $x = a \neq 0$ فأثبت ان

$$\lim_{x\to a}\frac{[f(x)]^2-[f(a)]^2}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}f(a)f'(a)$$

الاثبات

$$\lim_{x\to a}\frac{[f(x)]^2-[f(a)]^2}{x^2-a^2}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))(f(x)+f(a))}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)+f(a)}{x+a}$$

$$= f'(a)\cdot\frac{f(a)+f(a)}{a+a}$$

$$= f'(a)\cdot\frac{2f(a)}{2a}$$

$$= \frac{1}{a}\cdot f(a)\cdot f'(a)$$

#

---

(3) اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقة حيث:

$$, f(x+h) = x^2h + 3xh^2 + f(x)$$

و h هو مقدار التغير في x فاوجد : $f'(3)$.

$$f'(3) = \lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{3^2h+9h^2+\cancel{f(3)}-\cancel{f(3)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{9h+9h^2}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(9+9h)}{\cancel{h}} = 9$$

$$\Rightarrow f'(3) = 9.$$

محمد عمر الخطيب

الاتصال والاشتقاق

1) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند نقطة $x = a$ فأنها تكون متصلة عند النقطة a

2) إذا كانت الدالة f غير متصلة عند $x = b$ فأن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = b$

3) إذا كانت الدالة f متصلة عند النقطة $x = c$ فأنه توجد حالتان :

<u>الأولي</u> الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = c$

<u>الثانية</u> الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = c$

الحالات التي تكون مشتقة الداله $f(x)$ غير موجودة عند نقطة

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة

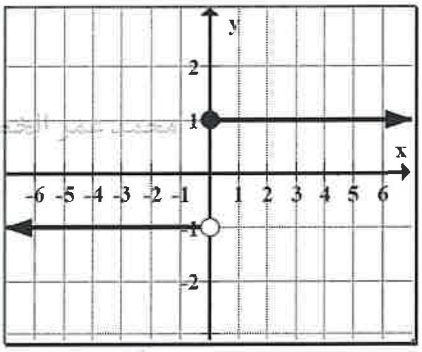
عدم الاتصال

(1) فجوة

(2) قفزة

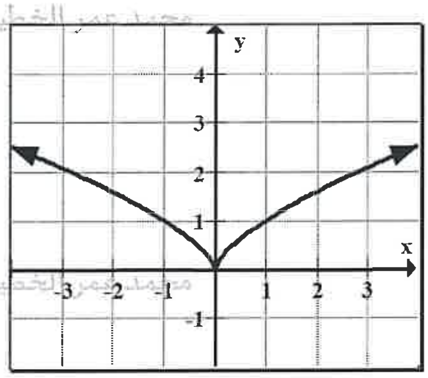
(3) لانهائي(خطوط التقارب الرأسية)

(4) تذبذبي

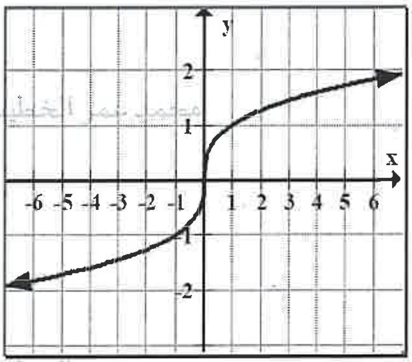


رأس مدبب(ركن او ناب)

هذا ليس مماس رأسي .



مماس رأسي



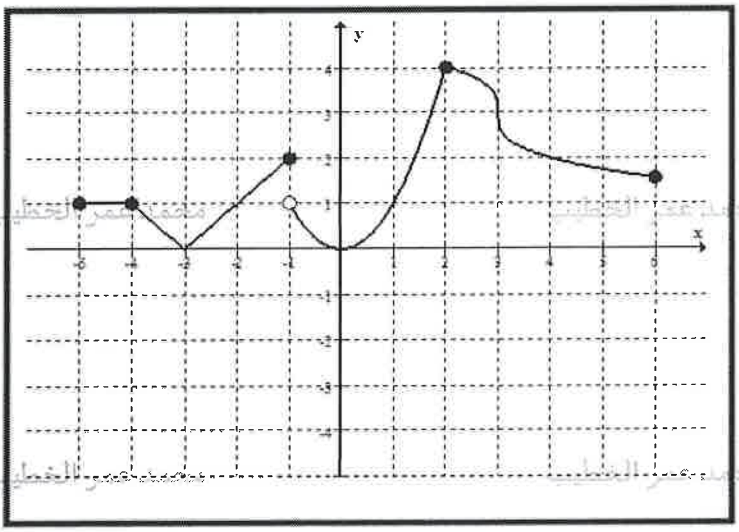
(1) يجب ان تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة

(2) ان تكون نقطة داخلية ليس طرفية

(3) ان تكون النهاية من اليسار واليمين اما كلاهما ملانهاي او سالب مالانهاية

محمد عمر الخطيب

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للإجابة عن الأسئلة التالية:



مجموعة قيم x التي تكون عندها:

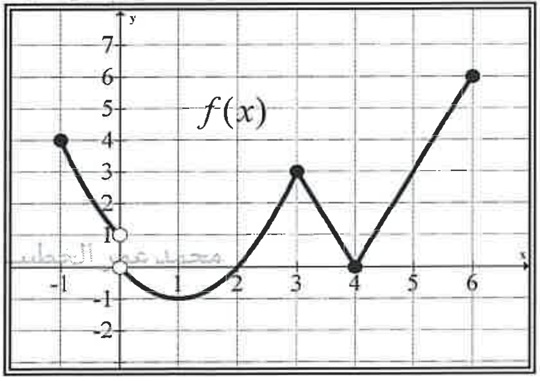
$f'(x)$ غير موجودة مع بيان السبب

ملاحظة : المشتقة غير موجودة عند
أطراف الفترة المغلقة
وهي غير مهمة في كتابنا

6	3	2	-1	-3	-4	-5	x
طرفية	مماس رأسي	شائك	عدم اتصال	ركن	ركن	طرفية	السبب

---

(2) اعتمد على الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للاجابة عن الاسئلة التالية :



(أ) الفترة التي تكون عليها الدالة متصلة .

$[-1,0),(0,6]$

(ب) الفترة التي تكون عليها الدالة قابلة للاشتقاق

$(-1,0),(0,3),(3,4),(4,6)$

او

$(-1,6)/\{0,3,4\}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

العلاقة بين الرسوم البيانية للدالة ومشتقاتها.

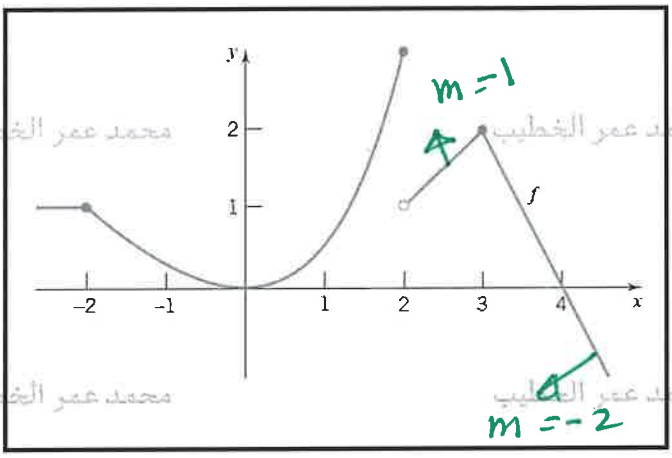
ملاحظة:

مشتقة دالة عند نقطة
=
ميل المماس للدالة عند تلك النقطة.

اولاً) الرسم البياني للدالة $f'(x)$ من بيان الدالة $f(x)$

$$f'(x) \Leftarrow f(x)$$

اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الاسئلة التالية



(1) $f'(0) = 0$

(2) $f'(3^-) = 1$

(3) $f'(3^+) = -2$

(4) $f'(3) =$ غ.م

(5) $f'(-2^-) = 0$

(6) $f'(-2) =$ غ.م

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$

(8) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h} = f'(4) = -2$

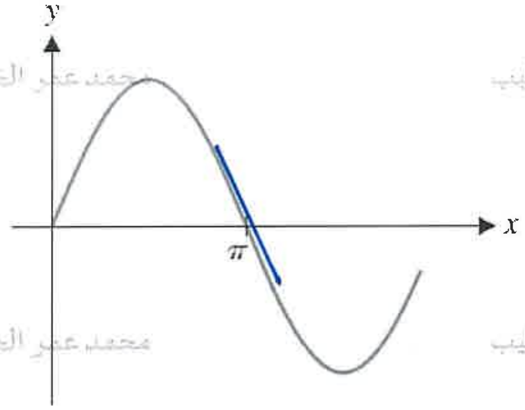
(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{[f(x)]^2-[f(4)]^2}{x^2-4^2} = \lim \left[\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}\right]\cdot\left[\dfrac{f(x)+f(4)}{x+4}\right]$

$= f'(4)\cdot\dfrac{f(4)+f(4)}{4+4} = -2\cdot\dfrac{0+0}{8} = 0$

(1) ارسم الميل للدالة عند النقطة المحددة ان أمكن

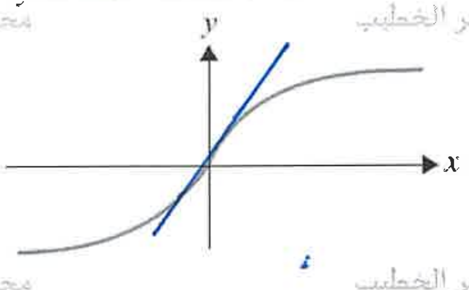
a

$y = \sin x \text{ at } x = \pi$



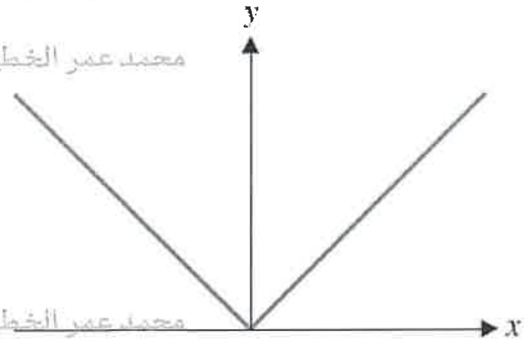
b

$y = \tan^{-1} x \text{ at } x = 0$



c

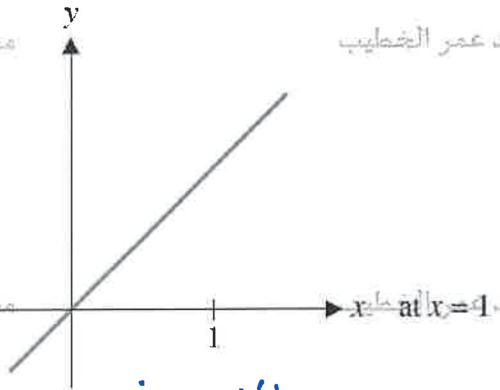
$y = |x| \text{ at } x = 0$



لا يمكن رسم مماس.
لعدم وجود مشتقة (ركن).

d

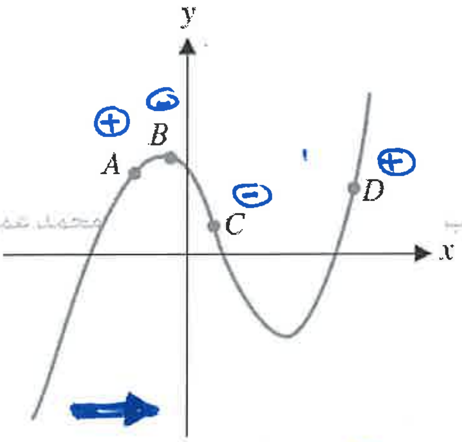
$y = x \text{ at } x = 1$



المماس نفسه

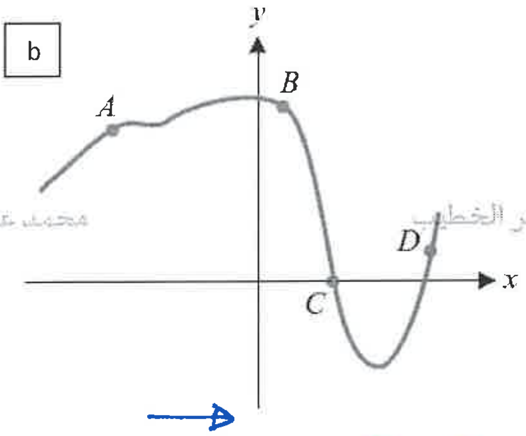
(2) اعتمد على الشكل في ترتيب الحروف حسب قيمة الميل عند كل منها (ترتيب تصاعدي)

a



C , B , A , D

b



C , B , A , D.

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ملاحظات : على العلاقة بين الرسوم البيانية للدالة ومشتقاتها

(1) مشتقة دالة كثير الحدود من الدرجة n هو دالة دالة كثير من الدرجة $n-1$

(2) المماس الافقي في بيان الدالة $f(x)$ يقابله عند نفس النقطة مقطع مع المحور x في بيان الدالة $f'(x)$

(عدد الماسات الافقية في بيان الدالة $f(x)$ يساوي عدد المقاطع السينية في بيان الدالة $f'(x)$)

(3) اذا كانت الدالة $f(x)$ متزايدة (↗) فان اشارة الدالة $f'(x)$ تكون موجبة (فوق محور السينات)

(4) اذا كانت الدالة $f(x)$ متناقصة(↘) فان اشارة الدالة $f'(x)$ تكون سالبة (تحت محور السينات)

(5) اذا كان للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي فان للدالة $f'(x)$ <u>نفس</u> خط التقارب الرأسي

(6) اذا كان للدالة $f(x)$ خط تقارب افقي فان للدالة $f'(x)$ خط تقارب افقي معادلتة $y=0$

(7) مشتقة الدالة الزوجية هي دالة فردية والعكس صحيح

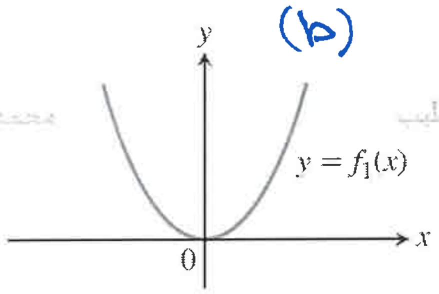
(8) اذا كانت للدالة $f'(x)$ لها خط تقارب رأسي فان الدالة $f(x)$ اما لها

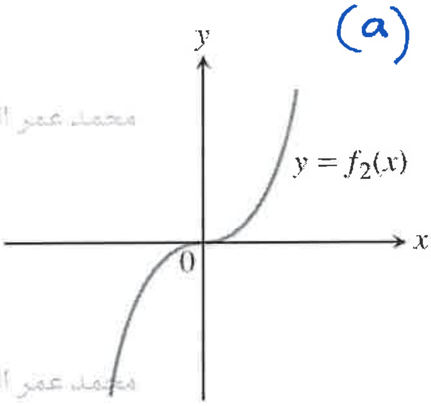
(أ) خط تقارب رأسي اذا لم تكن متصلة

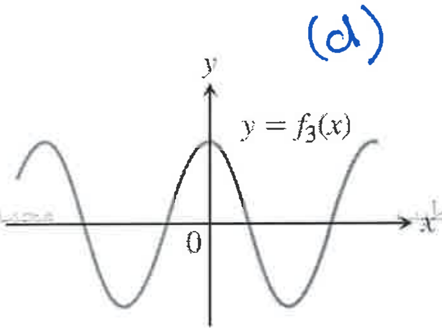
(ب) مماس رأسي اذا كانت $f(x)$ متصلة وتذهب في نفس الاتجاة من اليمين واليسار الى الملانهاية

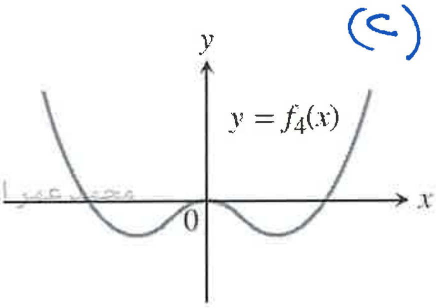
صل بين كل رسم بياني يمثل الدالة f من المجموعة A بالرسم البياني الذي يمثل مشتقتها من المجموعة B.

A

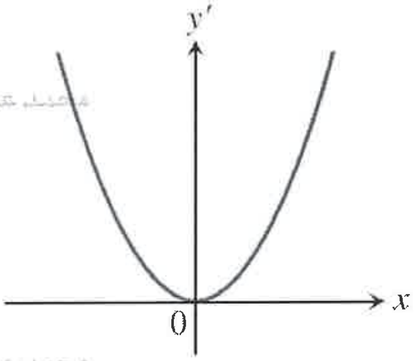




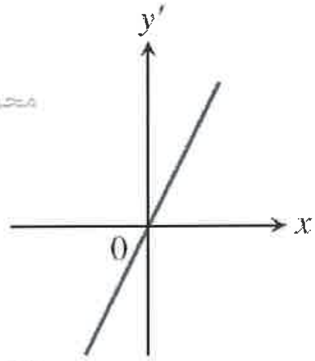




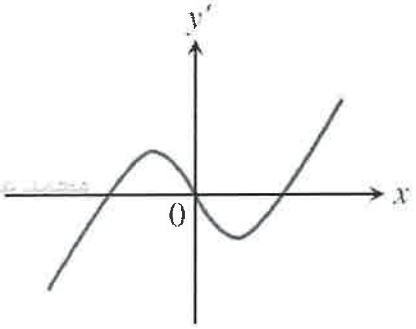
B



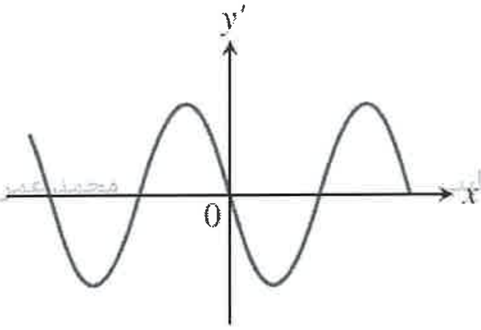
(a)



(b)



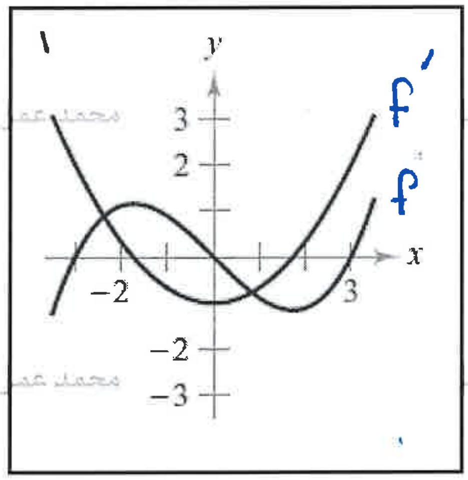
(c)

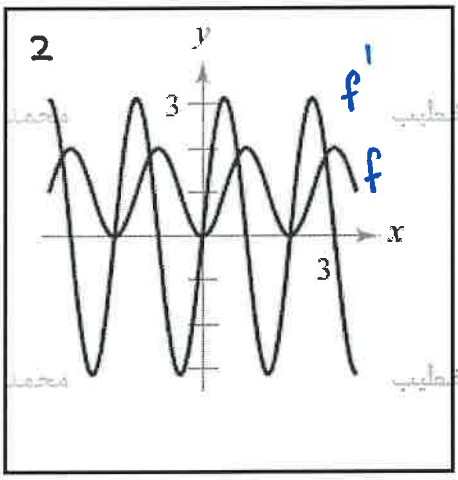


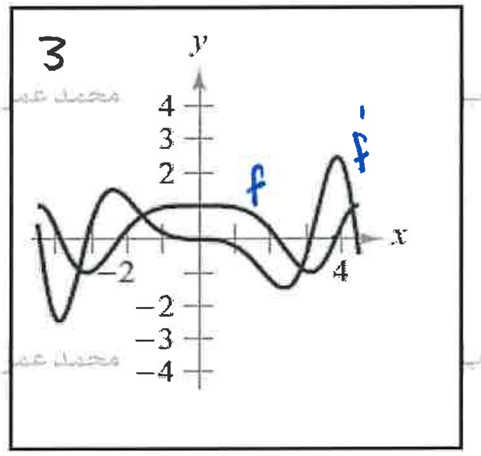
(d)

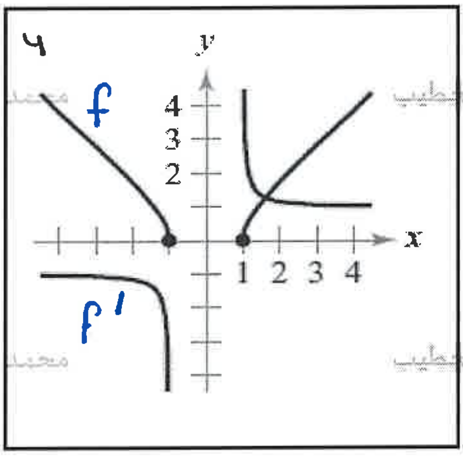
محمد عمر الخطيب

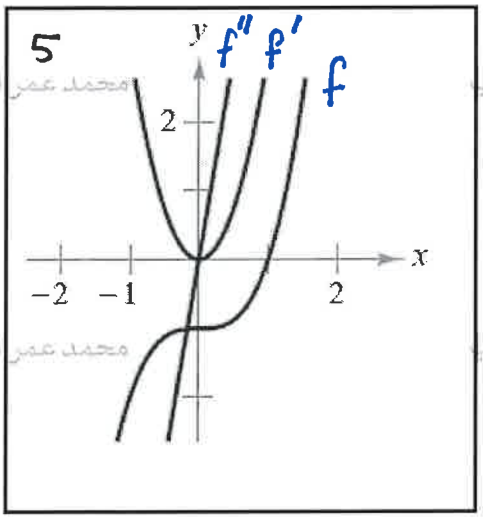
عين الدالة f وعين مشتقاتها في كل شكل من الاشكال التالية

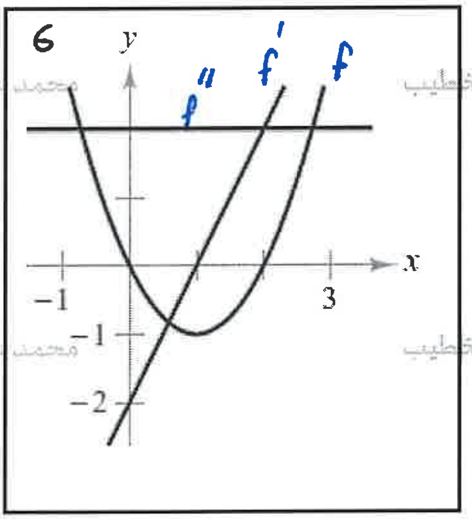






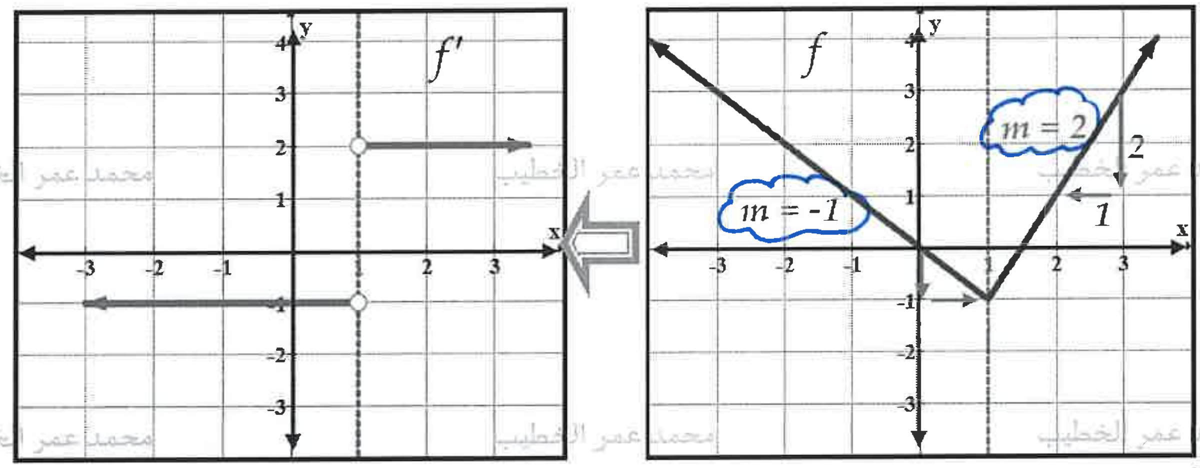


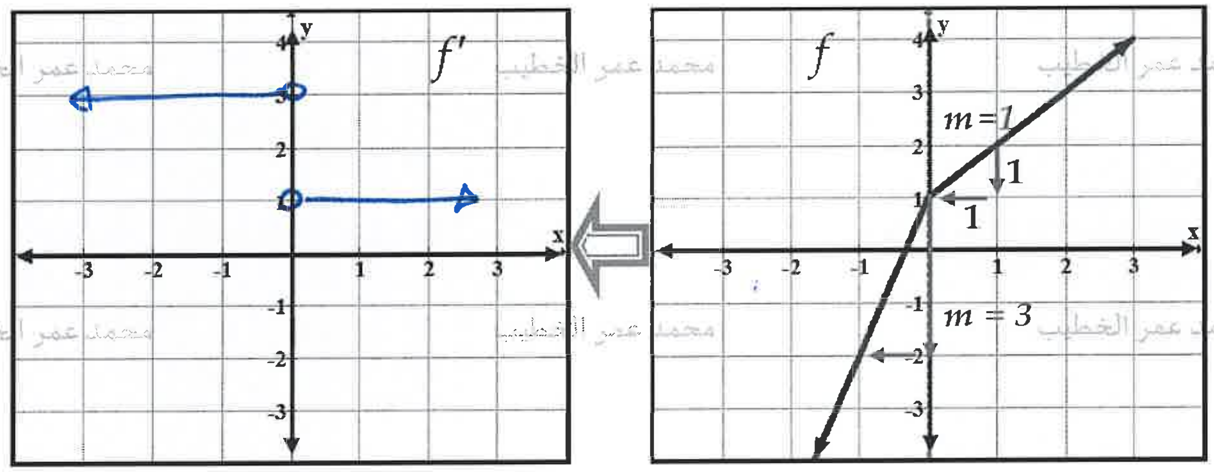


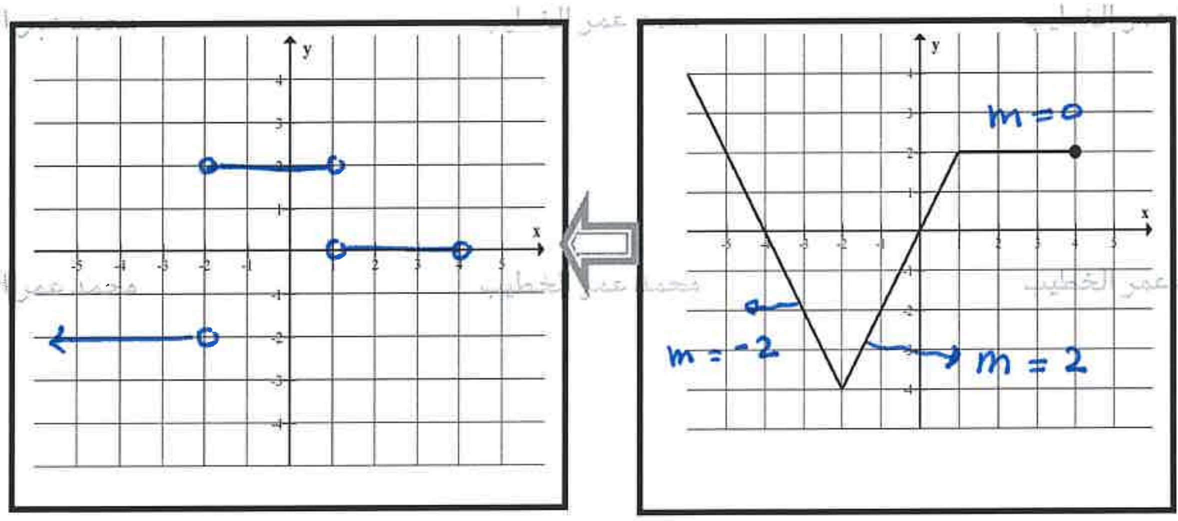


محمد عمر الخطيب

الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f . استفد من ذلك لرسم بيان الدالة f' .

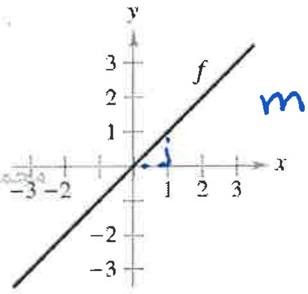




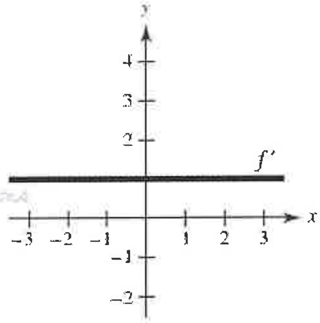


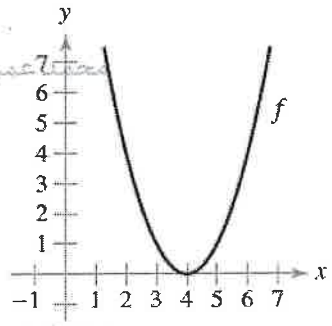
محمد عمر الخطيب

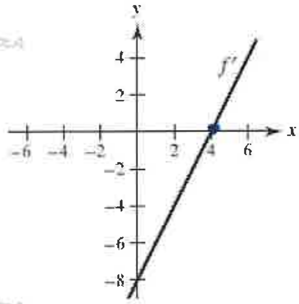
الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f . استفد من ذلك لرسم بيان تقريبي للدالة f'

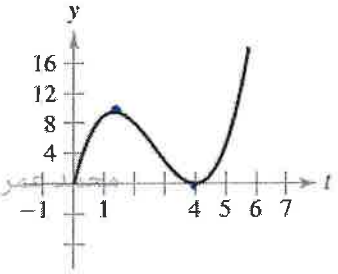


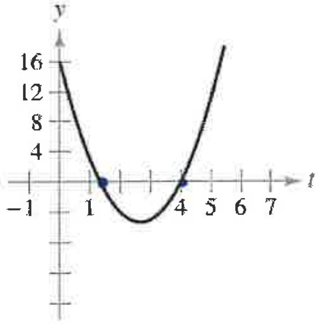
m = 1

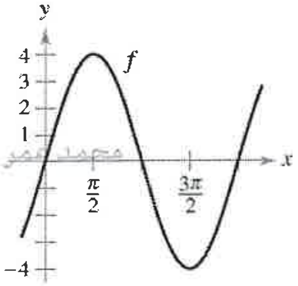


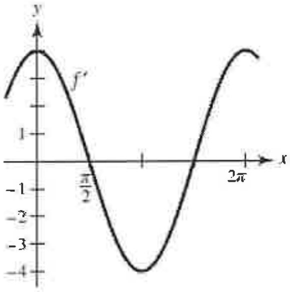


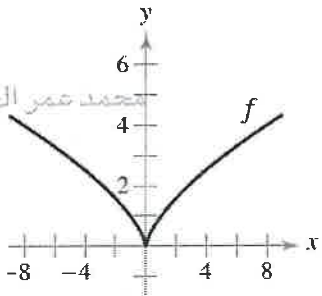




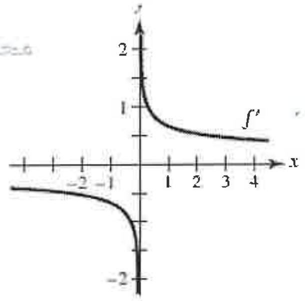






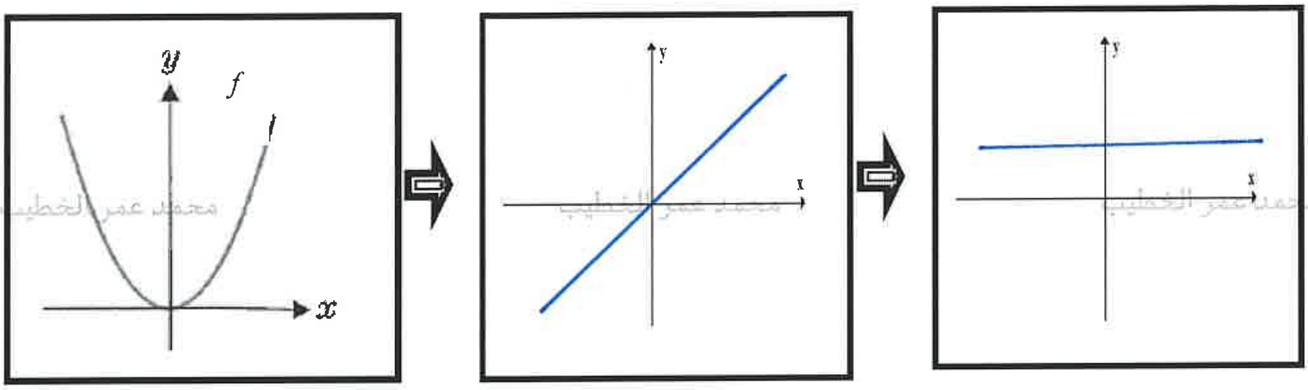


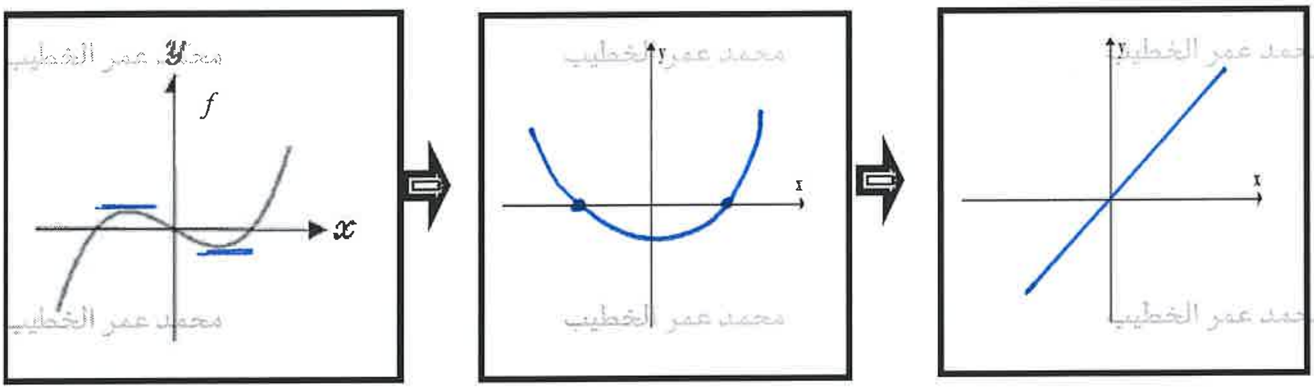
لها خط تقارب عند x=٠

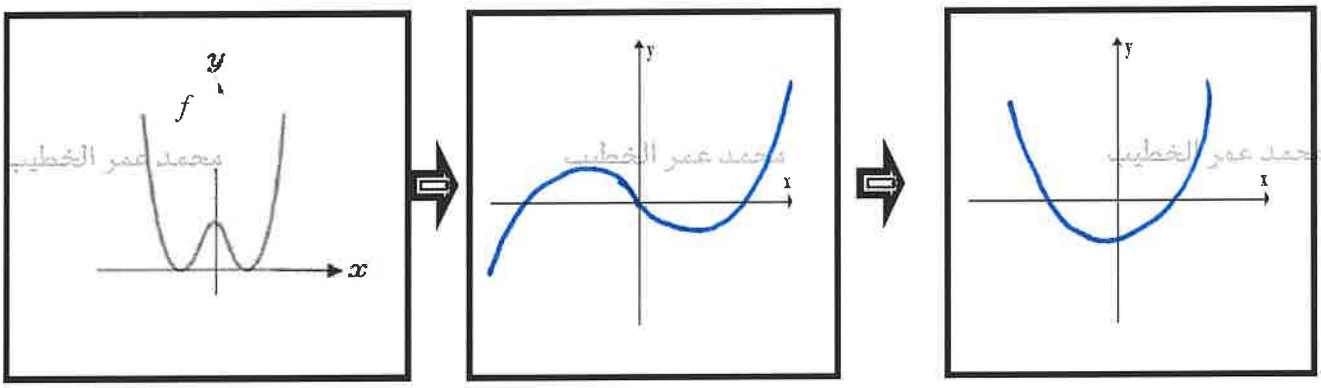


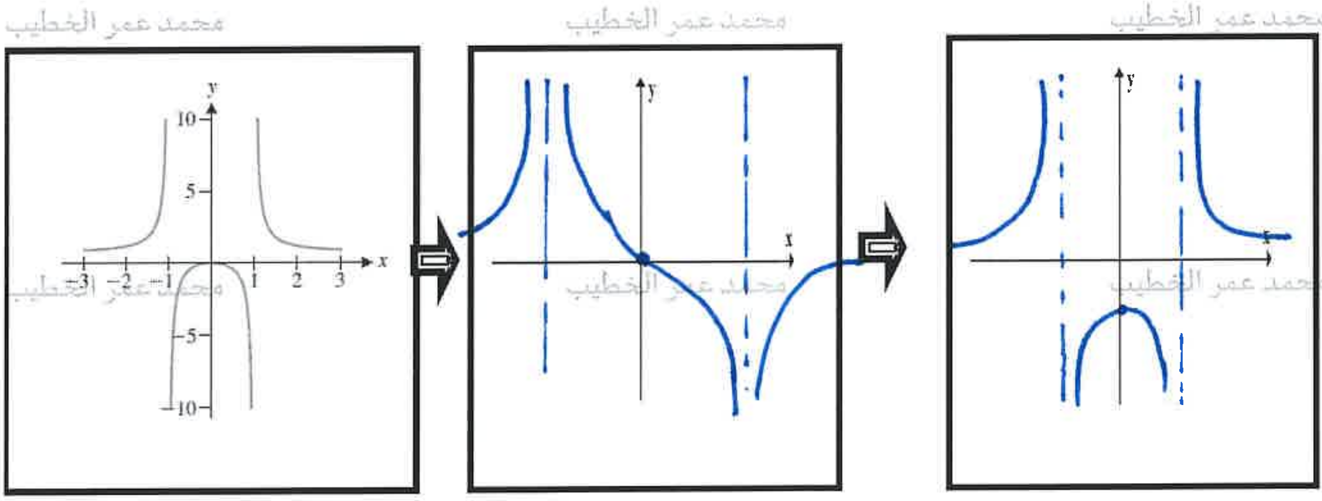
محمد عمر الخطيب

الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f . استفد من ذلك لرسم بيان تقريبي للدالة f''









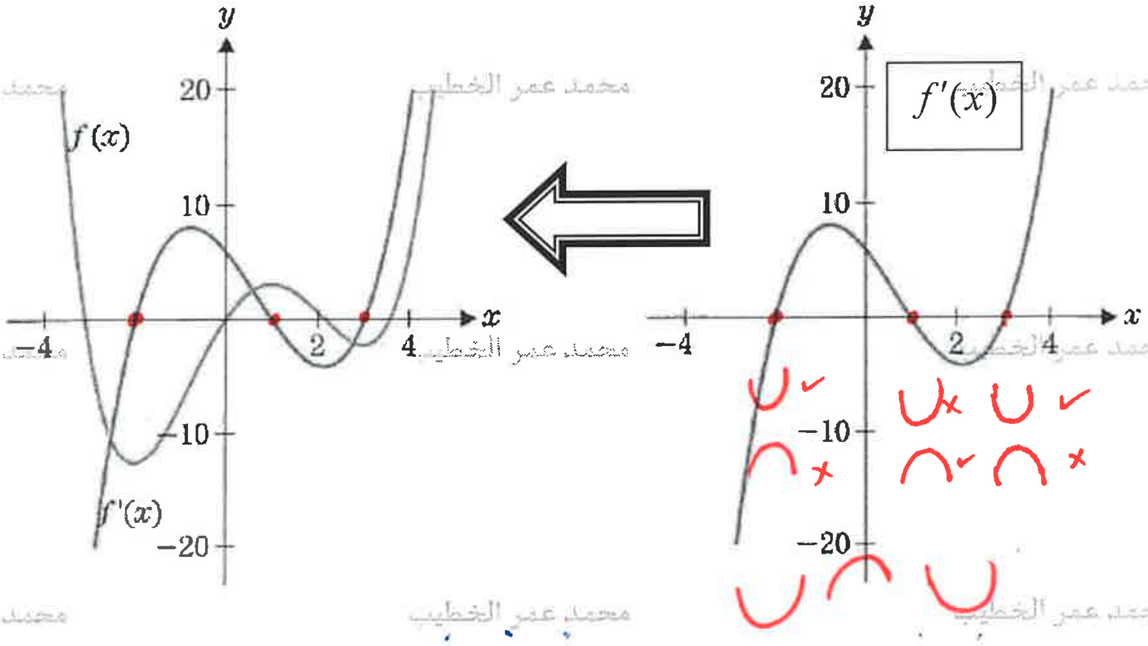
محمد عمر الخطيب

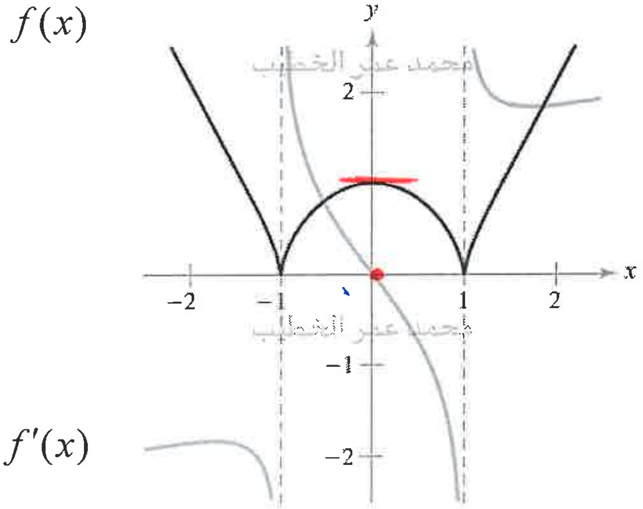
محمد عمر الخطيب

(ثانياً) الرسم البياني للدالة $f(x)$ من بيان الدالة $f'(x)$

$$f(x) \Leftarrow f'(x)$$

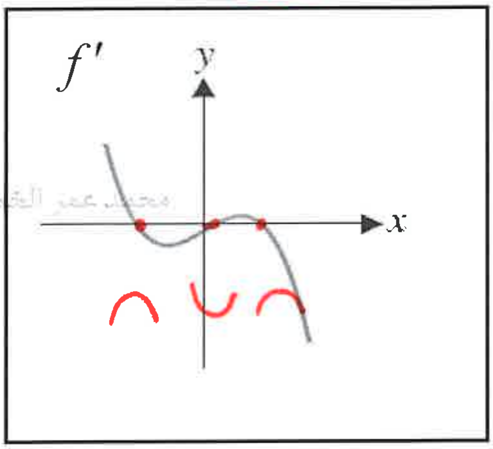
اعتمد على الرسم البياني للدالة f' لرسم صورة تقريبية لبيان الدالة f

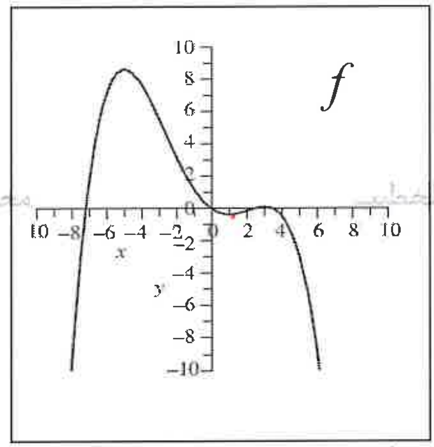


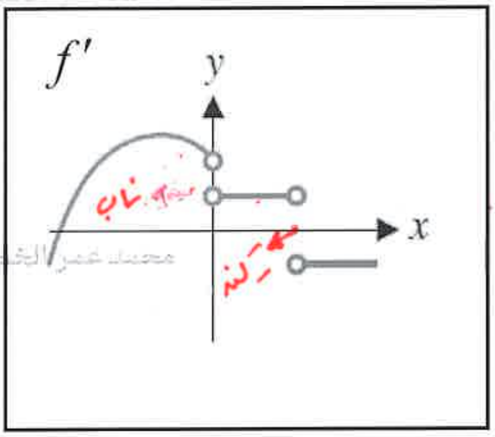


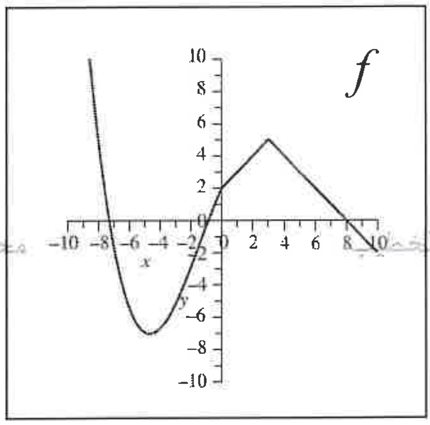
استخدمَ التمثيل البياني الموضح للدالة f' لرسم تمثيل بياني معقول للدالة المتصلة f

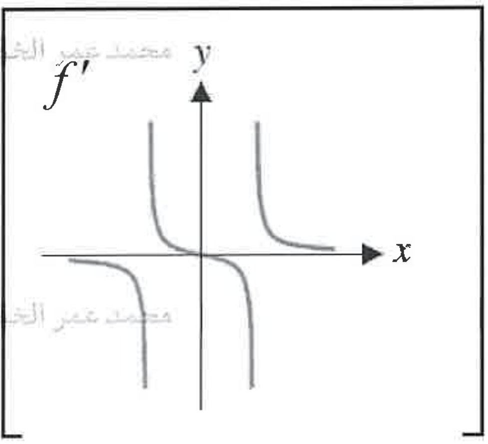
محمد عمر الخطيب

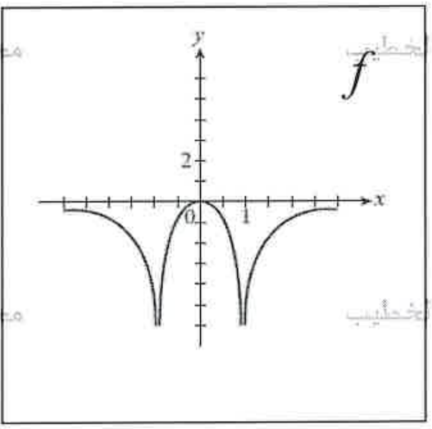


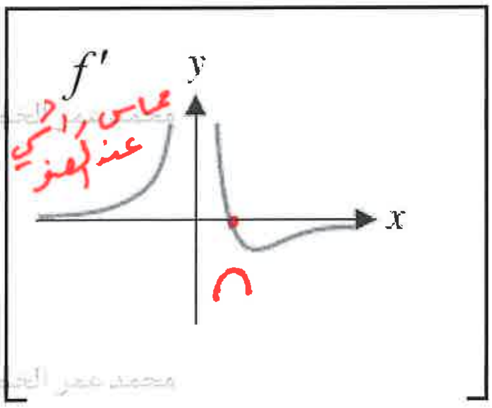


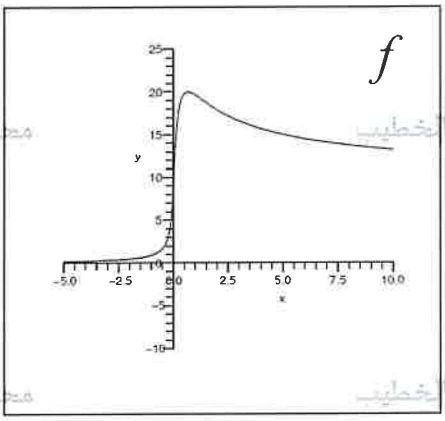




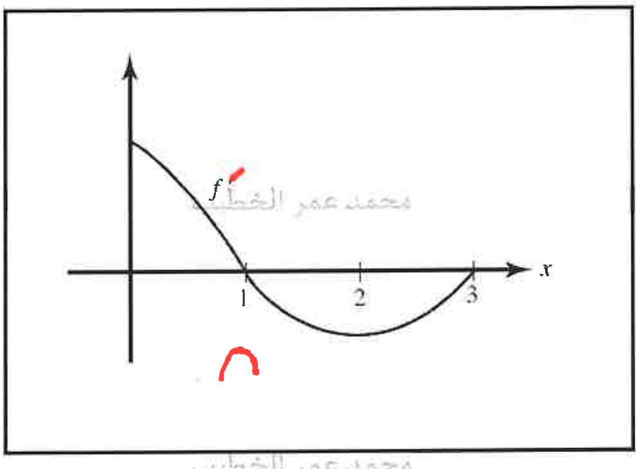


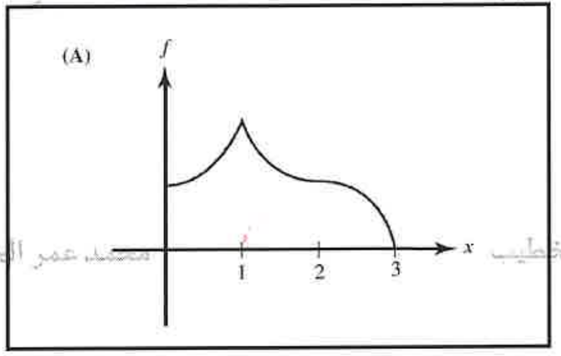


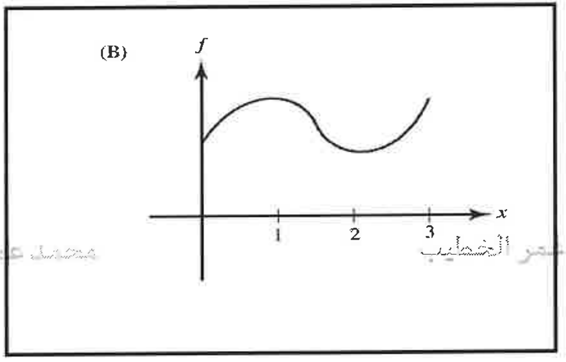


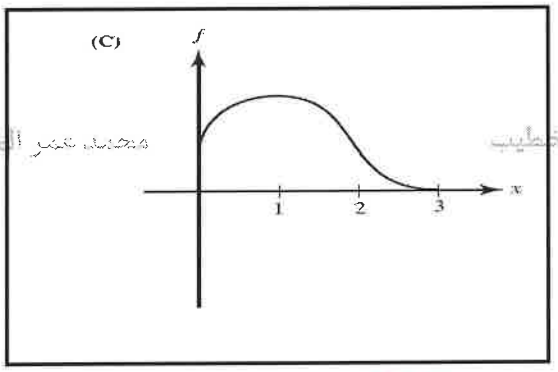


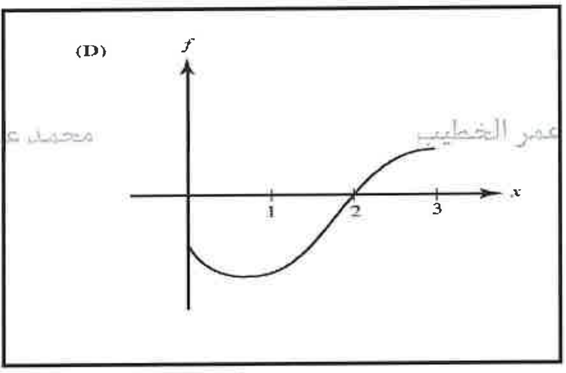
الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ اي من الاشكال التالية ممكن ان يكون لبيان الدالة $f(x)$

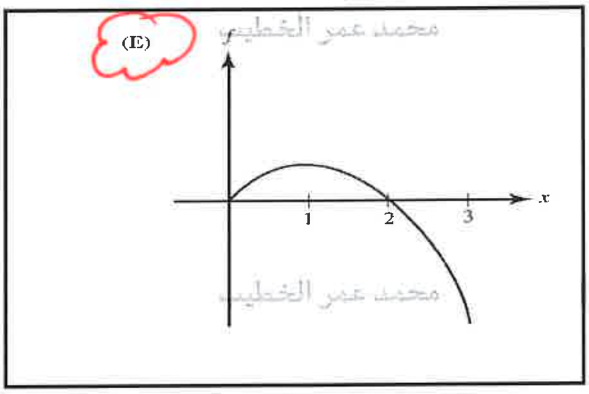






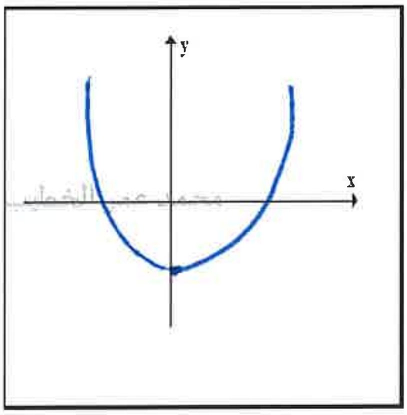






محمد عمر الخطيب

(1) ارسم التمثيل البياني المجاور للدالة f التي تحقق الخواص التالية

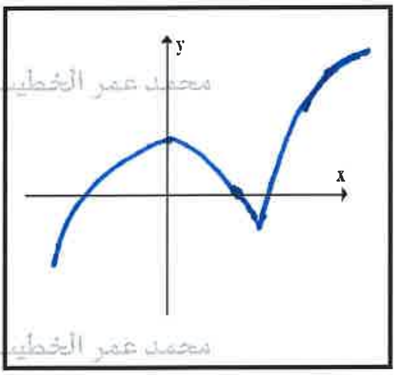


$$f'(x)=2x \quad , \quad f(0)=-1 \quad , \quad f(1)=0 \quad , \quad f(-1)=0$$

---

(2) ارسم التمثيل البياني المجاور للدالة f التي تحقق الخواص التالية

$$f'(3)=4 \quad , f'(1)=-1 \quad , f'(0)=0 \quad f(3)=3 \quad , \quad f(1)=0, \quad f(0)=1$$



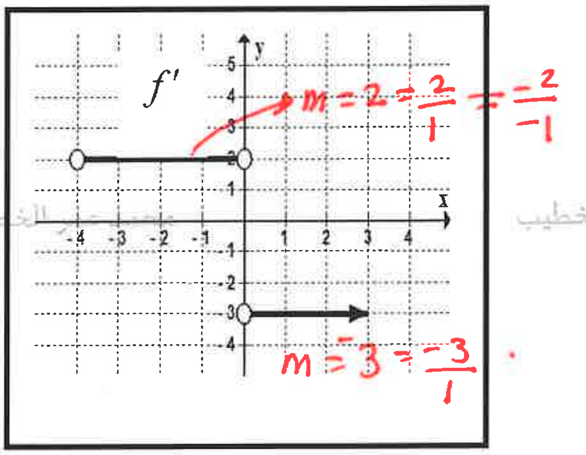
يوجد رسومات كثيرة صحيحة

---

(3) ارسم صورة تقريبية للرسم البياني للدالة المتصلة f والتي لها الخواص الآتية:

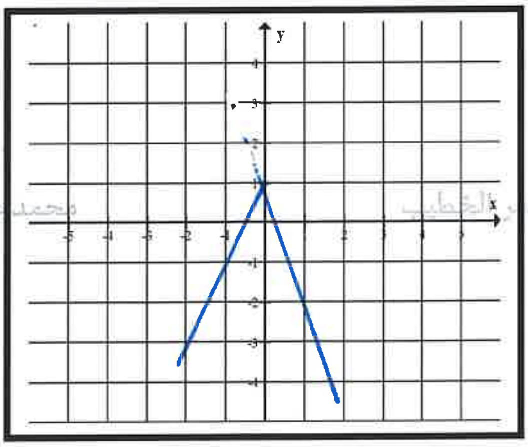
$$f(0)=1$$

الرسم البياني للدالة f' (مشتقة الدالة f) كما هو بالشكل.

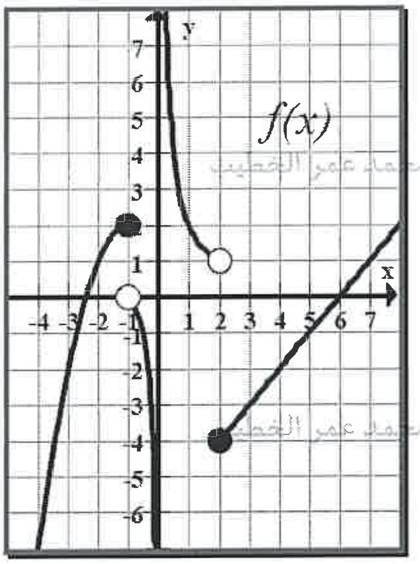


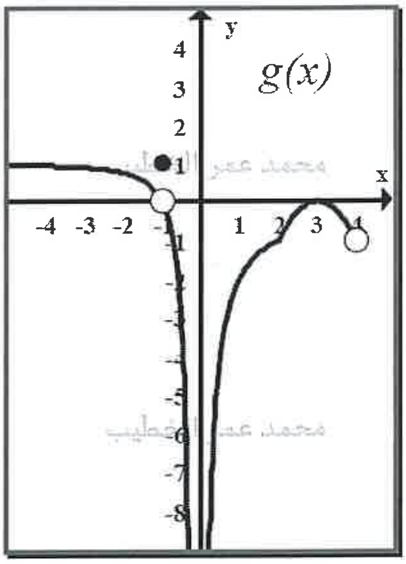
$m=2=\frac{2}{1}=\frac{-2}{-1}$

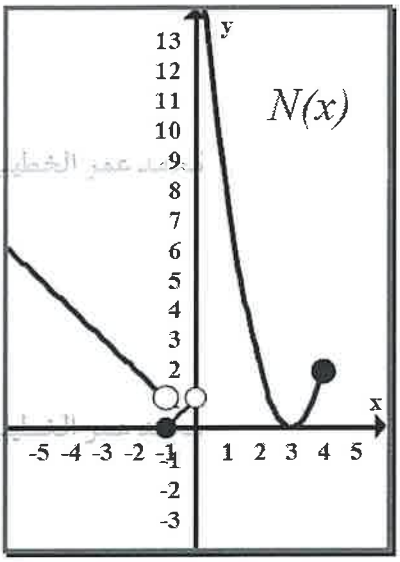
$m=-3=\frac{-3}{1}$



الرسومات البيانية التالية تمثل بيان كل من الدوال : $N(x)$, $g(x)$, $f(x)$







اقرأ جيداً ثم املأ الفراغات في الجدول التالي بوضع (نعم) أو (لا) :

	$f(x)$	$g(x)$	$N(x)$
متصلة عند $x = 1$	نعم	نعم	نعم
لها انفصال لا نهائي عند $x = 0$	نعم	نعم	نعم
قابلة للإشتقاق عند $x = -2$	نعم	نعم	نعم
معدل التغير عند $x = 3$ يساوي صفراً	لا	نعم	نعم
تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة عند $x = 4$	لا	نعم	نعم
لها انفصال يمكن التخلص منه عند $x = -1$	لا	نعم	لا

الدالة التي تحقق جميع ما سبق هي : $g(x)$

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثالثة: التفاضل /// الدرس الثالث والرابع: حساب المشتقات

قواعد الاشتقاق

محمد عمر الخطيب

القواعد الخاصة

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}ax = a$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

القواعد العامة

$$\frac{d}{dx}\left[c \times f(x)\right] = c \times f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \times g(x)\right] = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{a}{f(x)}\right] = \frac{-a \times f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=2x^7 \Rightarrow y'=14x^6$

(2) $y=-3x \Rightarrow y'=-3.$

(3) $y=5^2 \Rightarrow y'=0$

(4) $y=\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x \Rightarrow y'=\frac{1}{2}.$

(5) $y=\frac{2}{x^3}=2x^{-3} \Rightarrow y'=-6x^{-4}=\frac{-6}{x^4}.$

(6) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

(7) $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3} \Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$

(8) $y=e^2 \Rightarrow y'=0$

(9) $y=\cos\pi \Rightarrow y'=0$

(10) $y=x\sqrt{x}=x\cdot x^{1/2}=x^{3/2}$

$y'=\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}.$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = 2x^3 + \frac{1}{x} + 7x - 3\pi$

$y' = 6x^2 - \frac{1}{x^2} + 7$.

---

(2) $y = -5x^4 - 2x^{-3} + 4x^{\frac{5}{4}} - \cos\frac{\pi}{4}$

$y' = -20x^3 + 6x^{-4} + 4 \cdot \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}}$

---

(3) $y = 3x^2 - \frac{3}{x^3} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}$ $= 3x^2 - 3x^{-3} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 6x + 9x^{-4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

---

(4) $y = 2x - \frac{4}{x^2} + x^{\frac{5}{7}} + \sqrt{x^3}$ $= 2x - 4x^{-2} + x^{5/7} + x^{3/2}$.

$y' = 2 + 8x^{-3} + \frac{5}{7}x^{-2/7} + \frac{3}{2}x^{1/2}$.

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=(x^2+5)(1-x^5)$

$$y' = (2x)(1-x^5) + (x^2+5)(-5x^4)$$

مشتقة الثاني   الأول   +   الثاني × مشتقة الأول

---

(2) $y=(x^2+5)(x^2-5)$

ممكن بأكثر من طريقة.

$y = (x^4 - 25)$ فرق بين مربعين

$y' = 4x^3$.

او تطبيق قاعدة الضرب

---

(3) $y=x(x+1)(2x-5)$ $= (x^2+x)(2x-5)$

$$y' = (2x+1)(2x-5) + (x^2+x)(2).$$

---

(4) $y=(x^2+1)^2$ $= (x^2+1)(x^2+1)$

يوجد أكثر من طريقة.

$$y' = (2x)(x^2+1) + (x^2+1)(2x).$$

محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=\frac{x^2-4}{x+3}$

المقام   مشتقة البسط

مشتقة المقام . البسط

$$y' = \frac{(x+3)(2x) - (x^2+4)(1)}{(x+3)^2}$$

مربع المقام .

---

(2) $y=\frac{x+1}{x^2-x-2}$

$$y' = \frac{(x^2-x-2)(1) - (x+1)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} .$$

---

(3) $y=\frac{3}{x^2+1}$

$$\frac{-\text{الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

$$y' = \frac{-3(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(x^2+1)^2} .$$

---

(4) $y=(x^2+3)(2x-5)^{-1}$

$$= \frac{x^2+3}{2x-5}$$

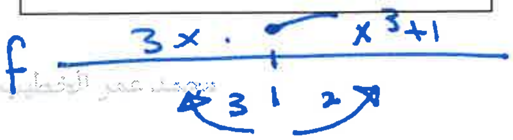
$$y' = \frac{(2x-5)(2x) - (x^2+3)(2)}{(2x-5)^2} .$$

محمد عمر الخطيب

اشتقاق الدوال المعرفه بأكثر من قاعدة:

ملاحظة: قبل دراسة اشتقاق الدالة عند نقطة يجب دراسة الاتصال عند هذه النقطة ونتاكد ان الدالة متصلة عندها

(1) لتكن:
$$f(x)=\begin{cases} x^3+1 & ,x\ge 1 \\ 3x & ,x<1 \end{cases}$$



(أ) وضح ما إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=1$.

الدال غير متصله عند $x=1$

(ب) هل الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$. لا .

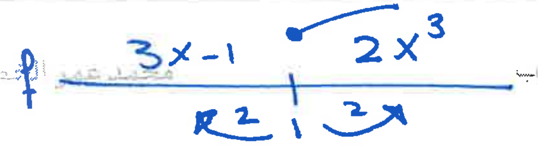
(ج) اوجد $f'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x>1 \\ .\ 3 & x<1 \end{cases}$$

بدون مساواة .

---

(2) لتكن:
$$g(x)=\begin{cases} 2x^3 & ,x\ge 1 \\ 3x-1 & ,x<1 \end{cases}$$



(أ) وضح ما إذا كانت الدالة $g(x)$ متصلة عند $x=1$.

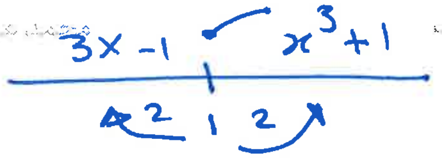
نعم متصلة .

(ب) ابحث قابلية الاشتقاق للدالة: $g(x)$ عند $x=1$.

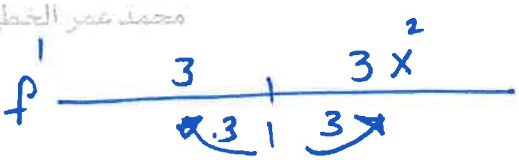
الدال غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$ لان $f'(1^-)\neq f'(1^+)$

---

(3) لتكن:
$$g(x)=\begin{cases} x^3+1 & ,x\ge 1 \\ 3x-1 & ,x<1 \end{cases}$$



(أ) وضح ما إذا كانت الدالة $g(x)$ متصلة عند $x=1$. نعم .



(ب) ابحث قابلية الاشتقاق للدالة: $g(x)$ عند $x=1$.

الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=1$ لانه

$f'(1^-)=f'(1)=3$

محمد عمر الخطيب

أوجد النقاط التي تكون عندها الدالة $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق

نبحث

(1) نقاط التفرع

(2) اصفار مقام الدالة

(3) اصفار مقام المشتقة

$(1)\ f(x)=|x-2|$

f: $2-x$ | $x-2$; 0 2 0

f': -1 | 1 ; 2

$\boxed{x = 2.}$

$(2)\ f(x)=\sqrt[3]{|x-3|}$

f: $\sqrt[3]{3-x}$ | $\sqrt[3]{x-3}$

f': $-\frac{1}{3}(3-x)^{-2/3}$ 3 | $\frac{1}{3}(x-3)^{-2/3}$; 3

$\boxed{x = 3.}$

$(3)\ f(x)=|x|+|x-2|$

$|x|$: $-x$ | x ; 0

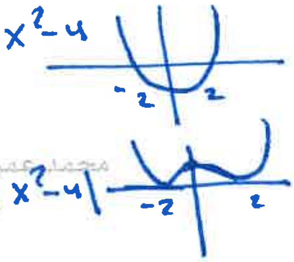
$|x-2|$: $2-x$ | $x-2$; 2

$f=|x|+|x-2|$: $2-2x$ | 2 | $2x-2$; 0 2

f': -2 | 0 | 2 ; 0 2

$\boxed{x = 0\ ,\ 2.}$

$(4)\ f(x)=|x^2-4|$



الرسم بيساعد.

$\boxed{x = -2\ ,\ 2}$

$(5)\ f(x)=|x-2|^2 = (x-2)^2$

لا يوجد لانها دالة حدودية.

$(6)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2-4} = (x^2-4)^{1/3}.$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-4)^{-2/3} = \frac{1}{3(x^2-4)^{2/3}}.$$

$$x^2-4=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2.}$$

محمد عمر الخطيب

بفرض أن الدوال $f(x), g(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x = 2$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	1	3	5	-4

اوجد :

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+g(x)) =$ **فسر إجابتك**

$= \lim\limits_{x\to 2} f(x) + \lim\limits_{x\to 2} g(x)$ لأن الدوال قابلة للاشتقاق فهي متصلة

$= f(2) + g(2) = 1 + 5 = 6$

---

(2) $\frac{d}{dx}(3f(x)+\frac{1}{4}g(x)) \quad x=2$

$= 3f'(2) + \frac{1}{4}g'(2)$

$= 3(3) + \frac{1}{4}(-4) = 8$

---

(3) $\frac{d}{dx}(f(x)\times g(x)) \quad x=2$

$= f'(2)\cdot g(2) + f(2)\cdot g'(2)$

$= (3)(5) + (1)(-4) = 11.$

---

(4) $\frac{d}{dx}(\frac{f}{g})(x) \quad x=2$

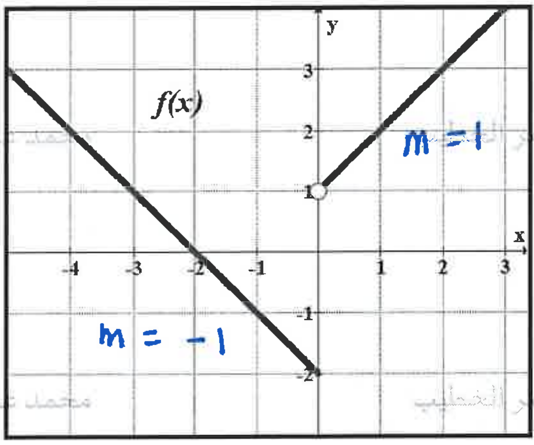
$$\frac{g(2)\cdot f'(2) - f(2)\cdot g'(2)}{[g(2)]^2}$$

$$= \frac{(5)(3) - (1)(-4)}{(5)^2} = \frac{19}{25}.$$

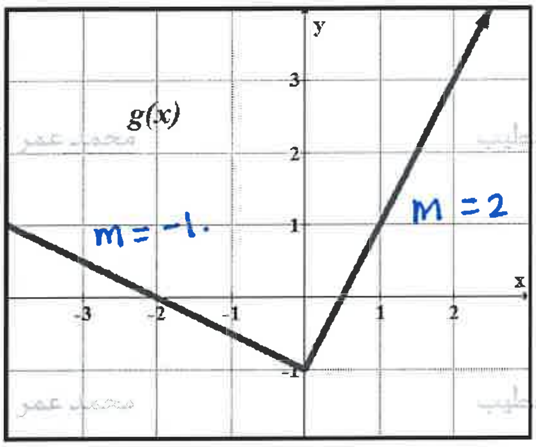
محمد عمر الخطيب

إستخدم الأشكال البيانية الموضحة أدناه في إيجاد

$y = f(x)$



$y = g(x)$



اوجـد

(1) $\frac{d}{dx}\left[2g(x)-3f(x)\right]$ عند $x=1$

المشتقات عند $x=1$ موجودة . عليه تطبيق القواعد .

$2g'(1) - 3f'(1)$

$= 2(2) - 3(1) = 1.$

(2) $\frac{d}{dx}\left[f(x)\times g(x)\right]$ عند $x=1$

$f'(1)\cdot g(1) + f(1)\cdot g'(1)$

$= (1)(1) + (2)(2) = 5.$

(3) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ عند $x=-2$

$$= \frac{g(\bar{2})\cdot f'(-2) - f(2)\cdot g'(2)}{[g(2)]^2}$$

$$= \frac{(3)(1) - (3)(2)}{3^2} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3.}$$

محمد عمر الخطيب

المشتقات ذات الرتب العليا:

الرتبة	المشتقة	تفاضل لايبنتز
1	$y' = f'(x)$	$\frac{df}{dx}$
2	$y'' = f''(x)$	$\frac{d^2f}{dx^2}$
3	$y''' = f'''(x)$	$\frac{d^3f}{dx^3}$
4	$y^{(4)} = f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4f}{dx^4}$
5	$y^{(5)} = f^{(5)}(x)$	$\frac{d^5f}{dx^5}$

(1) إذا كانت: $y = x^4 - 3x^2 + 5$ فأوجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 4x^3 - 6x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 12x^2 - 6.$$

---

(2) إذا كانت: $f(x) = x^5 - 6x^3 + 2x + 8$ فأوجد:

(a) $f^{(4)}(x)$

$f'(x) = 5x^4 - 18x^2 + 2$

$f''(x) = 20x^3 - 36x$

$f'''(x) = 60x^2 - 36$

$f^{(4)}(x) = 120x.$

(b) $f^{(10)}(x)$

$f^{(5)}(x) = 120$

$\vdots$

$f^{(10)}(x) = 0.$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد صيغة عامة لـ $f^{(n)}(x)$ (المشتقة ذات الرتبة n) للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$

$$f(x) = x^{-1}$$
$$f'(x) = -1\, x^{-2} = -(1)\, x^{-2}$$
$$f''(x) = (-1)(-2)\, x^{-3} = (1)(2)\, x^{-3}$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)\, x^{-4} = -(1)(2)(3)\, x^{-4}$$
$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)\, x^{-5} = (1)(2)(3)(4)\, x^{-5}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$$

---

(2) إذا كانت: $f(x)=xg(x)$ اوجد $f^{(n)}(x)$ (المشتقة ذات الرتبة n).

$$f'(x) = 1\cdot g(x) + x\, g'(x) = g(x) + x\, g'(x)$$
$$f''(x) = g'(x) + 1\cdot g'(x) + x\cdot g''(x) = 2g'(x) + x\, g''(x)$$
$$f'''(x) = 2\, g''(x) + 1\cdot g''(x) + x\, g'''(x) = 3\, g''(x) + x\, g'''(x)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)} = n\, g^{(n-1)}(x) + x\, g^{(n)}$$

---

(1) اذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة لاشتقاق عند $x=a$ فأثبت ان الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=a$

حتى نثبت ان الدالة متصلة يجب ان يكون $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

الاثبات

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot x-a$$
$$= \lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim (x-a)$$
$$= f'(a)\cdot 0 = 0$$
$$\Rightarrow \lim f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = f(a) \quad \#$$

محمد عمر الخطيب

إيجاد الثوابت للدوال القابلة للاشتقاق

محمد عمر الخطيب

(1) أوجد قيمة k التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} x^3 & x<1 \\ 3x+k & x\geq 1\end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$.

الاتصال

f : x^3 | $3x+k$ ، عند 1

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$1 = 3(1)+k$$

$$\boxed{K=-2}$$

الاشتقاق

f' : $3x^2$ | 3 ، عند 1

لا داعي للاشتقاق في هذا السؤال لانه الاتصال حل السؤال.

(2) أوجد كل من a, b التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<1 \\ x^2+5 & x\geq 1\end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

الاتصال

f : $ax+b$ | x^2+5 ، عند 1

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$a(1)+b = 1^2+5$$

$$2+b = 6 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

الاشتقاق

f' : a | $2x$ ، عند 1

نبدأ من الاشتقاق.

$$f'(\bar{1}) = f(1^+)$$

$$a = 2(1)$$

$$\boxed{a=2}$$

(3) أوجد كل من a, b التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases} 3-x & ,x<1 \\ ax^2+bx & ,x\geq 1\end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

الاتصال

f : $3-x$ | ax^2+bx ، عند 1

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$3-1 = a(1)^2+b(1)$$

$$\Rightarrow a+b = 2 \quad \cdots ①$$

-1 | $2ax+b$ ، عند 1

$$f'(\bar{1}) = f'(1^+)$$

$$-1 = 2a(1)+b$$

$$2a+b = -1 \quad \cdots ②$$

نحل المعادلتين

بالطرح

$$\begin{array}{r} 2a+b = -1 \\ a+b = 2 \\ \hline a = -3 \end{array} \Rightarrow \boxed{b=5}$$

(1) اذا كانت $f(x)=x^3-a\,x$ حيث $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=22$ فاوجد قيمة a

$\Leftrightarrow$ $f'(3) = 22.$

$f'(x) = 3x^2 - a.$

$f'(3) = 22$

$3(3)^2 - a = 22$

$27 - a = 22.$

$a = 27 - 22 \Rightarrow \boxed{a = 5}$

---

(2) اذا كانت $f(x)=x^4+bx^2+3$ حيث $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=10$ فاوجد قيمة b

$\Leftrightarrow$ $f''(2) = 10.$

$f'(x) = 4x^3 + 2bx.$

$f''(x) = 12x^2 + 2b.$

$f''(2) = 10$

$12(2)^2 + 2b = 10$

$2b = 10 - 48$

$2b = -38$

$\boxed{b = -19}$

---

(3) أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية $f(x)=a\,x^2+bx+c$ و تحقق

$f(0)=-2\ ,\ f'(0)=2\ ,\ f''(0)=3$

$f(x) = ax^2 + bx + c.$

$f'(x) = 2ax + b.$

$f''(x) = 2a.$

$f''(0) = 3$

$2a = 3$

$a = 3/2$

$f'(0) = 2$

$2a(0) + b = 2$

$b = 2$

$f(0) = -2$

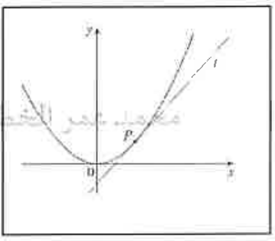
$c = -2.$

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2.$

محمد عمر الخطيب

التطبيقات الهندسية (معادلة المماس والعمودي)

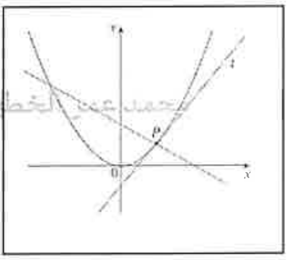
(1) معادلة المماس للدالة $f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) هي



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث $m = m_t = f'(x_1)$

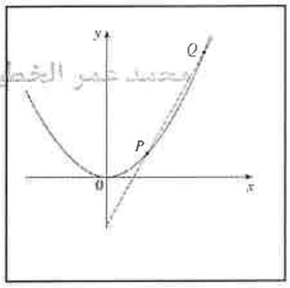
(2) معادلة العمودي على المماس للدالة $f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) هي



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$.

حيث $m = m_\perp = \frac{-1}{m_t}$

(3) معادلة القاطع التي تمر بالنقطتين $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$ هي



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث $m = m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

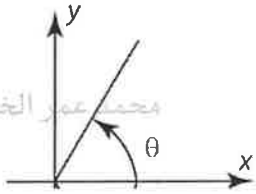
ملاحظة:

ليكن ميل المستقيم L_1 هو m_1 و ميل المستقيم L_2 هو m_2

1) اذا كان $m_2 = m_1$ **كان** فان $L_2 \parallel L_1$ والعكس صحيح

2) اذا كان $m_2 \times m_1 = -1$ **كان** فان $L_2 \perp L_1$ والعكس صحيح

ملاحظة:



(1) ميل المماس للدالة عند نقطة يساوي ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع محور السينات (x)

$$m = tan\theta$$

(2) نقطة التماس :هي النقطة التي تقع على منحنى الدالة وعلى المماس ويكون عندها ميل المنحنى وميل المماس متساويان

لتكن: $f(x) = x^2 - 3x$

(1) أوجـد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1,-2)$.

$f'(x) = 2x - 3$.

$m = f'(1) = 2(1) - 3 = -1$

---

(2) أوجـد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1,-2)$.

$m = -1 , (1 , -2)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-2) = -1(x - 1)$

$y + 2 = -x + 1$

$y = -x + 1 - 2$

$y = -x - 1$.

---

(3) أوجـد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1,-2)$.

$m_t = -1$.

$m_\perp = \frac{-1}{m_t} = \frac{-1}{-1} = 1$.

$y - (-2) = 1(x - 1)$

$y + 2 = x - 1 \Rightarrow y = x - 3$.

---

(4) عند أي نقاط يكون المماس أفقي ؟ عندما تكون الميل صفر (المشتقة = صفر)

$f'(x) = 2x - 3$

$m = 2x - 3$

$2x - 3 = 0$

$2x = 3 \Rightarrow x = 3/2$.

النقطة

$(\frac{3}{2} , \frac{-9}{4})$

---

(5) اوجد الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع محور السينات عند $x = 1$.

$f'(x) = 2x - 3$

$m = f'(1) = 2(1) - 3 = -1$.

$\tan\theta = m$

$\tan\theta = -1$.

$\theta = \frac{3\pi}{4}$.

يجب انه تكون زاوية موجبة

محمد عمر الخطيب

إذا كانت: $f(x) = \frac{1}{x-1}$

(1) أوجد ميل القاطع PQ حيث $P=(3,\frac{1}{2})$, $Q=(2,1)$.

$$m_s = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-\frac{1}{2}-1}{3-2} = -1/2 .$$

---

(2) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند $x=3$.

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} .$$

$$f'(3) = \frac{-1}{(3-1)^2} = -\frac{1}{4} .$$

---

(3) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند $x=3$.

$$m = -\frac{1}{4} , \ (3, \frac{1}{2})$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-3)$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

---

(4) أوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند $x=3$.

$$m_t = -\frac{1}{4}$$

$$m_\perp = 4.$$

النقطة

$$(3, \frac{1}{2})$$

$$y - \frac{1}{2} = 4.(x-3)$$

$$y - \frac{1}{2} = 4x - 12$$

$$y = 4x - \frac{23}{2} .$$

---

(5) اوجد الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع محور السينات عند $x=3$.

$$\tan\theta = f'(3) = m$$

$$\tan\theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \theta = 166^\circ$$

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $f(x)=\frac{1}{x}$ فأوجد جميع النقاط التي يكون عندها الميل يساوي $-\frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$

$m = \frac{-1}{x^2}$

$-\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{4}$

$x^2 = 4$

$x = -2 , 2$

النقاط هي

$(2 , \frac{1}{2})$ و $(-2, -\frac{1}{2})$

(2) أوجد جميع النقاط التي يكون عندها المماس للدالة: $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ أفقيا

$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}.$

$m = 2x - \frac{2}{x^2}.$

$m = 0$

$2x - \frac{2}{x^2} = 0$

$2x = \frac{2}{x^2}$

$2x^3 = 2$

$x^3 = 1$

$x = 1$

النقطة

$(1 , 3).$

(3) إذا كان منحنى الدالة: $y=2x^3-kx+2$ له مماس افقي عند $x=-1$, فاوجد قيمة k

$f'(-1) = 0.$

$f'(x) = 6x^2 - K.$

$f'(-1) = 0.$

$6(-1)^2 - K = 0$

$6 - K = 0 \Rightarrow \boxed{K = 6}$

(4) اوجد قيمة x التي عندها المستقيم : $y=x$ والمماس للمنحنى $y=x^2+1$ متوازيين

$y' = 1$ ميل المستقيم

$m_1 = 1.$

$y' = 2x$ ميل المنحنى

$m_2 = 2x$

$2x = 1$

$\boxed{x = \frac{1}{2}.}$

(5) اوجد قيمة x التي تجعل المستقيم : $y=1-3x$ والمماس للمنحنى $y=x^3+1$ متعامدين

$y' = -3$ ميل المستقيم

$m_1 = -3.$

$y' = 3x^2.$ ميل المنحنى

$m_2 = 3x^2$

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$-3 \cdot 3x^2 = -1$

$9x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{3}}$

(1) لتكن $f(x) = \sqrt{x}$

(أ) اوجد قيمة b التي تجعل المماس عند $x = 4$ موازياً للوتر المار بالنقطتين: $(b, \sqrt{b})$, $(1,1)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ميل المماس عند $x=4$

$m_t = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}}$

$= \frac{1}{4}$.

ميل القاطع

$m_s = \frac{f(b) - f(1)}{b - 1}$

$= \frac{\sqrt{b} - 1}{b - 1}$

$= \frac{\cancel{\sqrt{b} - 1}}{(\cancel{\sqrt{b} - 1})(\sqrt{b} + 1)}$

$\frac{1}{\sqrt{b} + 1} = \frac{1}{4}$.

$4 = \sqrt{b} + 1$

$\sqrt{b} = 3$

$\boxed{b = 9}$

(ب) اوجد ميل المماس للدالة عند $x = a$ وصف ماذا يحدث للمماس عندما تقترب a من ملانهايه

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$m = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{a}} = 0$

يصبح المماس افقي.

---

(2) لتكن $f(x) = \frac{1}{x}$

(أ) اوجد معادلة المماس للدالة عند $x = 1$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

$m = f'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$.

النقطة $(1,1)$

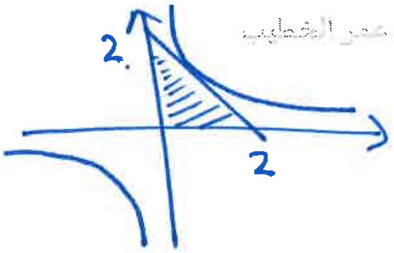
$y - 1 = -1(x - 1)$

$y - 1 = -x + 1$

$y = -x + 2$.

معادلة المماس.

(ب) اوجد مساحة المثلث في الربع الأول و المحصورة بالمماس



نقاط تقاطع المماس مع المحورين

$-x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$.

$A = \frac{1}{2}(2)(2) = 2$.

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : $y = x^2 + 2x$ عند النقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم الذي معادلته: $y = 4x + 1$.

معادلة المماس

$y - 3 = 4(x - 1)$

$y - 3 = 4x - 4$

$y = 4x - 1$

من التوازي.

$2x + 2 = 4$

$2x = 2$

$x = 1$

نقطة التماس

$(1 , 3)$.

نقطة التماس مجهولة.

ميل المستقيم

$y' = 4$.

$m_1 = 4$

ميل المنحنى.

$y' = 2x + 2$

$m_2 = 2x + 2$

---

(2) إذا كان المستقيم الذي معادلته: $y = 3x - a$ مماساً لمنحنى الدالة: $f(x) = 2x^2 - x + 1$ فاوجد قيمة الثابت a؟

هذه النقطة تحقق معادلة المستقيم.

$2 = 3(1) - a$

$\boxed{a = -1}$

$4x - 1 = 3$

$4x = 3 + 1$

$4x = 4$

$x = 1$.

النقطة

$(1 , 2)$

من الدالة

نجد نقطة التماس

ميل المستقيم

$y' = 3$.

$m_1 = 3$.

ميل المنحنى

$f'(x) = 4x - 1$

$m_2 = 4x - 1$

---

(3) اوجد ميل المماس لكل دالة عند نقطة التقاطع ثم حدد الزاوية المحصورة بين المماسين

(a) $y = x$

(b) $y = \frac{1}{x^2}$

نقطة التقاطع

$\frac{1}{x^2} = x$

$x^3 = 1$

$x = 1 \Rightarrow (1 , 1)$

ميل المستقيم

$y' = 1$

$m_1 = 1$.

ميل المنحنى

$y = x^{-2}$

$y' = -2x^{-3}$

$= \frac{-2}{x^3}$.

$m = \frac{-2}{(1)^3} = -2$.

$\tan\theta_1 = 1$

$\theta_1 = 45°$.

$\tan\theta_2 = -2$

$\theta_2 = 116°$.

الزاوية المحصورة بينهما

$\theta_2 - \theta_1$

$= 116° - 45°$

$= 71°$.

محمد عمر الخطيب

التطبيقات الفيزيائية:

الحركة على خط مستقيم

اذا كانت دالة الموضع او الموقع هي $s(t)$ فأن

(1) الازاحة خلال الفترة الزمنية $\left[t_1,t_2\right]$ هي $\Delta s(t)=s(t_2)-s(t_1)$

(2) السرعة اللحظية المتجهه هي المشتقة الأولى للازاحة $v(t)=s'(t)$

(3) التسارع هو المشتقة الثانية للازاحة $a(t)=v'(t)=s''(t)$

(4) السرعة المتوسطة المتجهه على الفترة الزمنية $\left[t_1,t_2\right]$ هي

$$v_{avg}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

(5) السرعة هي القيمة المطلقة للسرعة اللحظية المتجهه

ملاحظات

(1) اذا كانت اشارة السرعة المتجهة موجبة(+) يكون الجسم متجهاً لليمين (للاعلى)

(2) اذا كانت اشارة السرعة المتجهة سالبة (-) يكون الجسم متجهاً لليسار(للاسفل)

(3) يكون الجسم متسارعاً اذا كانت للسرعة والتسارع لهما نفس الاشارة (+ و +) او(- و -)

(4) يكون الجسم متباطئاً اذا كانت السرعة والتسارع لهما اشاراتين مختلفاتين (- و +) او(+ و -)

محمد عمر الخطيب

قذف جسيم رأسياً لأعلى فتحرك حسب العلاقة $s(t)=60t-5t^2$ حيث t بالثواني و s بالأمتار

1) اوجد موقع الجسيم بعد مرور 3 ثواني.

$S(3)=60(3)-5(3)^2=135$ m.

2) اوجد موقع الجسيم بعد مرور 10 ثواني.

$S(10)=60(10)-5(10)^2=100$ ↑ ↓

3) اوجد السرعة المتجهة المتوسطة اول 5 ثواني.

$v_{av}=\frac{S(5)-S(0)}{5-0}=\frac{175-0}{5-0}=35$ m/s.

4) اوجد السرعة المتجهة المتوسطة الفترة الزمنية $[2,7]$

$v_{av}=\frac{S(7)-S(2)}{7-2}=\frac{175-100}{5}=15$ m/s.

5) اوجد السرعة المتجهة اللحظية للجسيم بعد مرور 4 ثواني.

$v=S'(t)=60-10t$.

$v(4)=60-10(4)=20$ m/s.

↑ الجسم صاعد

6) اوجد السرعة المتجهة للجسيم بعد مرور 9 ثواني.

$v(9)=60-10(9)=-30$ m/s

الجسم هابط. ↓

7) اوجد تسارع الجسيم بعد مرو 5 ثواني.

$a(t)=v'(t)=S''(t)$

$=-10$

-10 m/s^2. التسارع ثابت

محمد عمر الخطيب

قذف جسيم رأسياً لأعلى فتحرك حسب العلاقة $s(t) = 60t - 5t^2$ حيث t بالثواني و s بالأمتار

(1) اوجد أقصى ارتفاع يصل إلية الجسيم. (اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عندما تنعدم السرعة)

$v(t) = 60 - 10t$

$v(t) = 0$

$60 - 10t = 0$

$\boxed{t = 6}$ زمن اقصى ارتفاع.

اقصى ارتفاع

$S(6) = 60(6) - 5(6)^2$

$= 180 \text{ m}$

(2) أوجد سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع $100m$.

$S(t) = 100$

$60t - 5t^2 = 100$

$5t^2 - 60t + 100 = 0$

$t^2 - 12t + 20 = 0$

$(t-2)(t-10) = 0$

$t = 2, \quad t = 10$

$v(2) = 60 - 10(2)$

$= 40 \text{ m/s} \uparrow$

$v(10) = 60 - 10(10)$

$= -40 \downarrow$

السرعة تكون 40 m/s

(3) أوجد سرعة الجسيم عندما يرتطم بالأرض.

عندما يرتطم بالارض تكون

$S(t) = 0$

$60t - 5t^2 = 0$

$5t(12 - t) = 0$

$t = 0 \quad , \quad t = 12.$

بداية الحركة. نهاية الحركة.

$v(t) = 60 - 10t$

$v(12) = 60 - 10(12)$

$= -60$

السرعة المتجهة -60 m/s

السرعة 60 m/s.

(4) في الثانية السابعة هل كان الجسيم صاعداً أم هابطاً؟

خلال الحركة

$v(7) = 60 - 10(7)$

$= -10 \text{ m/s}$

السرعة المتجهة سالبة لذلك الجسم هابط.

محمد عمر الخطيب

تحرك جسم على خط مستقيم بحيث يعطى موقعه y في أي لحظة $t \geq 0$ بالدالة التالية:

$s(t) = t^2 - 10t + 12$ حيث s بالقدم , t بالثانية

$v(t) = 2t - 10$

$a(t) = 2$.

فأوجد:

1) إزاحة الجسم خلال أول 10 ثواني.

$$\Delta S = S(10) - S(0)$$
$$= 12 - 12 = 0 .$$

2) السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في الفترة $[2,5]$

$$v_{av} = \frac{S(5) - S(2)}{5 - 2} = \frac{-13 - (-4)}{3} = -3 \text{ ft/s} .$$

3) السرعة المتجهة عند الثانية الثالثة.

$$v(3) = 2(3) - 10$$
$$= -4 \text{ ft/s}$$

4) متى تعدم سرعة الجسم.

$v(t) = 0$

$2t - 10 = 0$

$t = 5$

5) ما قيم التسارع في أي لحظة.

$a(t) = 2 \text{ ft/s}^2$

6) صف حركة الجسم(متى يتحرك لليمين ومتى لليسار ,متى يكون متسارعاً ومتى متباطئاً)

t	0		5	
إشارة $v(t)$		— — —		+ + + +
إشارة $a(t)$		+ + +		+ + + +

الجسم يتحرك الى اليمين وهو متسارع

الجسم يتحرك الى اليسار وهو متباطئ .

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) جسيم يتحرك في خط مستقيم بحيث أن : $s(t)=t\sqrt{t}+6\,t$ حيث s المسافة بالأمتار و t الزمن بالثانية اوجد تسارع هذا الجسيم عندما تكون سرعته 12 m/s .

$s(t) = t\sqrt{t}+6t$

$= t^{3/2}+6t$

$v(t) = \frac{3}{2}t^{1/2}+6.$

$a(t) = \frac{3}{4}t^{-1/2}.$

$v = 12$

$\frac{3}{2}t^{1/2}+6=12$

$\frac{3}{2}\sqrt{t}=6.$

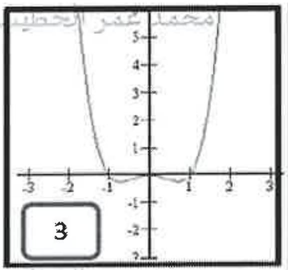
$\sqrt{t}=4 \Rightarrow \boxed{t=16}$

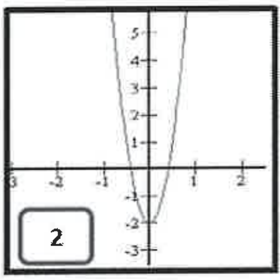
$a(16)=\frac{3}{4}(16)^{-1/2}$

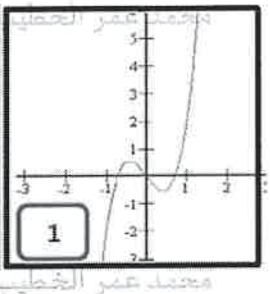
$=\frac{3}{16}\ m/s^2.$

---

(2) في الشكل المقابل اياً من المنحنيات يمثل:







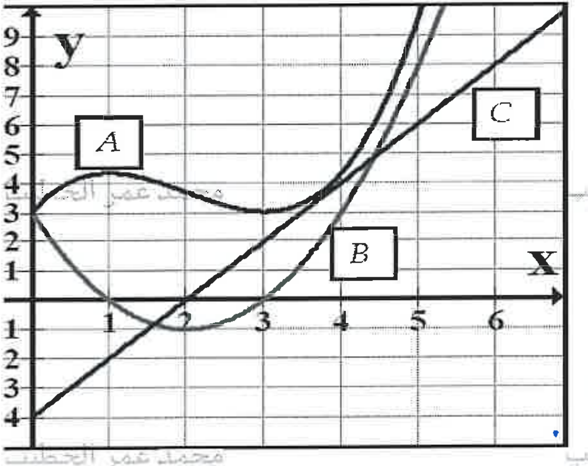
دالة الموضع (الازاحة) 3

دالة السرعة المتجهة. 1

دالة التسارع. 2

---

(3) في الشكل المقابل اياً من المنحنيات يمثل:



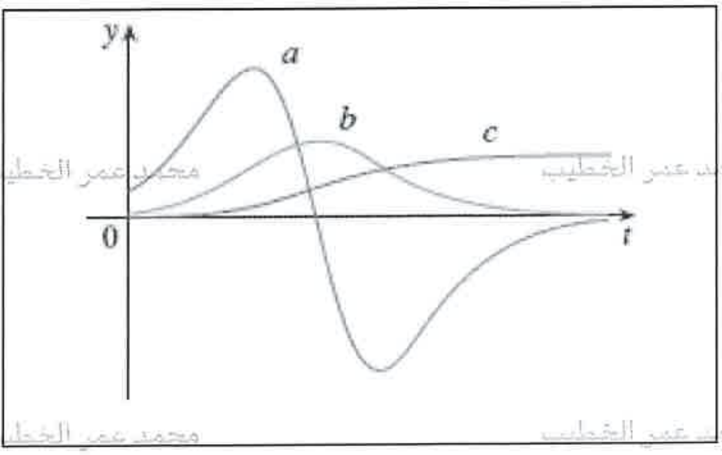
دالة الموضع (الازاحة) A

دالة السرعة المتجهة. B

دالة التسارع. C

---

(4) في الشكل المقابل اياً من المنحنيات يمثل:



دالة الموضع (الازاحة) c

دالة السرعة المتجهة. b

دالة التسارع. a

محمد عمر الخطيب

تحدد العلاقة $meter/s$ $u(\text{m})=\dfrac{83m}{m+0.05}$ السرعة الإبتدائية لكرة جولف كتلتها $0.05\ kg$

ضربت بعصا كتلتها $m\ kg$ والسرعة الابتدائية للعصا $50\ m/s$:

وزن الكرة ...ثابت

سرعة المضرب ...ثابت

1) اوجد السرعة الابتدائية للكرة عندما يكون وزن العصا $0.15\ kg$.

$$u(0.15)=\frac{83(0.15)}{0.15+0.05}=62.25\ m/s.$$

2) اوجد السرعة الابتدائية للكرة عندما يكون وزن العصا $0.20\ kg$. ماذا تلاحظ

$$u(0.20)=\frac{83(0.20)}{0.20+0.05}=66.4\ m/s.$$

زيادة السرعة مع زيادة وزن العصا .

3) اوجد $u'(m)$. ماذا تعني

$$u'(m)=\frac{83(m+0.05)-83m(1)}{(m+0.05)^2}$$

$$=\frac{4.15}{(m+0.05)^2}.$$

4) بين ان $u'(m)>0$. فسر النتيجة

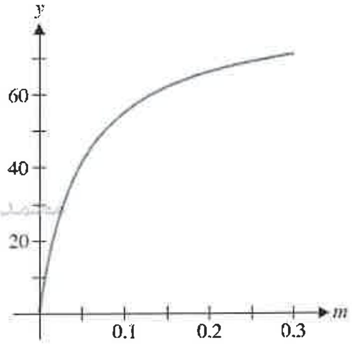
نلاحظ ان البسط والمقام كميات موجبة لذلك

$u'(m)>0$

التفسير:

بمان المشتقة موجبة (الميل موجب) يعني كلما زادت كتلة العصاء زادات السرعة الأبتدائية للكرة

(العلاقة بين المتغيرين طردية)



5) اوجد $u'(0.15)$ و $u'(0.20)$. ثم فسر النتيجة

$$u'(0.15)=\frac{4.15}{(0.15+0.05)}$$
$$=103.75$$

$$u'(0.20)=\frac{4.15}{(0.15+0.05)}$$
$$=66.4$$

التفسير:

معدل التغير (الزيادة) للعصاء الثقيلة اقل من معدل التغير (الزيادة) للعصا الخفيفة في وحدة الزمن

تمثل المعادلة

$$r = \frac{1}{\frac{0.55}{c} + \frac{0.45}{h}} = \frac{ch}{0.55h + 0.45c}$$

كمية الوقود المستهلك بالجالون لسيارة تسير داخل المدينة مسافة c ميل وعلى الطريق السريع مسافة h ميل

h c

(1) اوجد كمية الوقود المستهلك عندما تقطع السيارة 100 ميل داخل المدينة و 50 ميل على الطريق السريع

$$r = \frac{100(50)}{0.55(50) + 0.45(100)} = 69$$ جالون .

h c

(2) اوجد كمية الوقود المستهلك عندما تقطع السيارة 50 ميل داخل المدينة و 100 ميل على الطريق السريع

$$r = \frac{100(50)}{0.55(100) + 0.45(50)} = 64.5$$ جالون .

(3) اوجد $\frac{dr}{dc}$ ثم بين ان $\frac{dr}{dc} > 0$ وفسر النتيجة

اعتبر h ثابت

$$\frac{dr}{dc} = \frac{h(0.55h + 0.45c) - ch(0.45)}{(0.55h + 0.45c)^2}$$

$$= \frac{0.55h^2}{(0.55h + 0.45c)^2}$$

$\therefore$

$$\frac{dr}{dc} > 0$$

العلاقة بين r و c علاقة طردية .

التفسير:

العلاقة بين المتغيرين طردية

محمد عمر الخطيب

التطبيقات الحياتية (معدلات التغير)

ملاحظة : معدل التغير = المشتقة

(1) في بستان فاكهة به أشجار خوخ ، وجد أن الكمية P من الخوخ السليم بالكيلو غرام تنتجها شجرة متوسطة الإنتاج يتوقف على عدد الكيلو غرامات x من المبيد الحشري المستخدم لرش الشجرة حسب العلاقة:

$$P(x)=300-\frac{100}{x}$$

اوجد معدل التغير في انتاج الشجرة من الخوخ عند استخدام 4 كيلو من المبيد الحشري.

$$P'(x)=\frac{100}{x^2}.$$

$$P'(4)=\frac{100}{4^2}=6.25 \cdot \text{kg}/$$

---

(2) تشير دراسة بيئية لاحد المدن ان تركيز اول اكسيد الكربون في الهواء يعطى بالعلاقة:

$$Q(t)=0.05t^2+0.1t+3.4$$

حيث Q تقاس بالجزء من المليون , t تقاس بالسنوات

(أ) اوجد متوسط التغير في تركيز اول اكسيد الكربون في الفترة الزمنية $[1,10]$

$$Q_{av}=\frac{Q(10)-Q(1)}{10-1}=\frac{8.4-3.55}{9}$$

$$=0.54.$$

(ب) اوجد معدل التغير في تركيز غاز اول اكسيد الكربون بعد 3 سنوات

$$Q'(t)=0.1t+0.1$$

$$Q'(3)=0.1(3)+0.1=0.4.$$

محمد عمر الخطيب

(1) تمثل الدالة $f(t)=\sqrt{t+4}$ اجمالي المبيعات بعد الزمن t بالشهور ، اوجد معدل التغير في المبيعات بعد الشهر الخامس ، صف ماذا يحدث للمبيعات مع مرور الزمن

$$Q'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+4}}$$

$$Q'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5+4}} = \frac{1}{6} .$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{t+4}} = 0$$

يصبح معدل التغير 0 .
اي انه المبيعات .
سوف تستمر بثبات
مع مرور الزمن .

---

(2) تمثل الدالة $f(t)=\dfrac{70}{1+3e^{-0.2t}}$ نسبة عدد السكان الذين تصلهم اشاعة معينة بعد الزمن t بالساعة

(أ) اوجد $f(2)$ وماذا تمثل .

$$f(2) = \frac{70}{1+3e^{-0.2(2)}} = 23\%$$

تمثل نسبه الناس الذين ستصلهم الاشاعة بعد ساعتين .

(ب) اوجد $f'(2)$ وماذا تمثل .

$$f'(x) = \frac{-70\left(3e^{-0.2}(-0.2)\right)}{\left(1+3e^{-0.2t}\right)^2}$$

$$= \frac{42}{\left(1+3e^{-0.2t}\right)^2}$$

$$f'(2) = 4.6$$

سرعة انتشار الإشاعة .

(ج) نسبة عدد السكان الذين ستصلهم الاشاعة مع مرور الزمن

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{70}{1+3e^{-0.2t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{70}{1+\frac{3}{e^{0.2t}}}$$

$$= 70\%$$

محمد عمر الخطيب

1) يبيع مصنع دمى 120000 قطعة سنوياً بسعر القطعة 25 درهم ، اذا اراد صاحب المصنع زيادة لمبيعات بمعدل 2000 قطعة سنويا وتخفيض سعر القطعة بمعدل 50 فلس للقطعة ، اوجد معدل التغير في دخل المصنع السنوي ، هل قرار ادارة المصنع كان صحيحاً.

الكمية $Q(t)$

معدل التغير في الكمية $Q'(t)$

السعر $P(t)$

معدل التغير في السعر $P'(t)$

الايراد $R(t)$

$R(t) = Q(t) \times P(t)$

معدل التغير في الايراد $R'(t)$

$Q(0) = 100{,}000$ $\quad$ $P(0) = 25$

$Q'(0) = 2000$ $\quad$ $p'(0) = -2$

$R'(0) = ??$

$R(t) = Q(t) \cdot p(t)$

$R'(t) = Q'(t) \cdot p(t) + Q(t) \cdot p'(t)$

$R'(0) = Q'(0) \cdot p(0) + Q(0) \cdot p'(0)$

$= 100000(-2) + (25)(2000)$

$= -150000$

نلاحظ ان معدل التغير في الايراد يتناقص لذلك القرار خاطئ.

---

2) شركة لإنتاج العاب الأطفال تبيع إنتاجها البالغ 25000 قطعة سنوياً بسعر 40 درهم للقطعة الواحدة إذا قررت الشركة زيادة الإنتاج بمعدل 2000 قطعة سنوياً لرفع إيراداته بمعدل 130000 درهم سنوياً احسب معدل التغير في سعر القطعة سنوياً الذي على الشركة أن تزيده لتحقيق ذلك الإيرادات.

$Q(0) = 25000.$ $\quad$ $P(0) = 40$

$Q'(0) = 2000$ $\quad$ $P'(0) = ??$

$R'(0) = 130\,000.$

$R(t) = Q(t) \cdot P(t).$

$R'(0) = Q'(0) \cdot P(0) + Q(0) \cdot p'(0)$

$130000 = 25000 \times 40 + 25000\, p'(0)$

$\Rightarrow p'(0) = 2.$

معدل التغير في سعر القطعه .

محمد عمر الخطيب

(1) استأجر أعضاء احد النوادي بركة سباحة لمدة 10 سنوات .وتم تقسيم الايجار بالتساوي على الاعظاء المساهمين .وكان هناك 80 عضواً حيث ايجار البركة 8000 درهم سنوياً. فأذا كان عدد الأعظاء يتزايدون بمعدل 20 عظواً في السنة وايجار البركة يتزايد بمعدل 1000 درهم سنوياً. ما المعدل اللحظي للتغير في نصيب كل واحد من الاعضاء المشاركين من ايجار بركة السباحة.

$N(0) = 80$ $\quad R(0) = 8000$

$N'(0) = 20$ $\quad R'(0) = 1000$

$c'(0) = ??$ معدل التغير في نصيب الشخص الواحد

$$c(t) = \frac{R(t)}{N(t)}.$$

$$c'(0) = \frac{R'(0)N(0) - R(0)N(0)}{[N(0)]^2}$$

$$= \frac{(80)(1000) - (8000)(20)}{(80)^2}$$

$$= -12.5$$

---

(2) يبيع مصنع دمى $Q(t)$ قطعة سنوياً وبنسبة نقصان في معدل التغير هو 4% سنوياً ، إذا كان سعر القطعة $P(t)$ يتزايد بنسبة في معدل التغير هو 3% سنوياً ، ،والدخل السنوي للمصنع هو $R(t)$ ،اوجد، النسبة المئوية لمعدل التغير في دخل المصنع السنوي ،هل قرار ادارة المصنع كان صحيحاً.

النسبة المئوية لمعدل التغير في الايراد هو

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \times 100\%$$

المعلومات .

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} \times 100\% = -4\%$$

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \frac{-4}{100} = -0.04.$$

$$Q'(t) = -0.04\,Q(t)$$

وبالمثل .

$$p'(t) = 0.03\,p(t).$$

المطلوب

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \times 100\%$$

الحل .

$$R(t) = Q(t)\cdot p(t).$$

$$R'(t) = Q'(t)\cdot p(t) + Q(t)\cdot p'(t)$$

$$= -0.04\,Q(t)p(t) + Q(t)\cdot 0.03p(t)$$

$$= -0.04\,Q(t)P(t) + 0.03\,Q(t)P(t)$$

$$= -0.01\,Q(t)P(t)$$

$$= -0.01\,R(t)$$

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \times 100\% = \frac{-0.01R(t)}{R(t)} \times 100\%$$

$$= -1\%$$

محمد عمر الخطيب

مشتقات الدوال المثلثية

تذكر ان

قوانين النهايات

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

$$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x=-\csc x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$$

(1 إذا كان: $y=\sin x$ فاثبت أن: $\frac{dy}{dx}=\cos x$ **(استخدم التعريف).**

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}$$

$$=\lim\frac{\sin x(\cos h-1)+\sin h\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\sin x\frac{(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to0}\sin h\cos x=\cos x\ \#$$

(2 إذا كان: $y=\tan x$ فاثبت أن: $\frac{dy}{dx}=\sec^2 x$ **(استخدم قواعد الاشتقاق).**

$$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x\ \#$$

محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=1+x-\cos x$

$\frac{dy}{dx} = 1-(-\sin x) = 1+\sin x.$

(2) $y=\tan x-\sin\frac{\pi}{2}$

$y' = \sec^2 x$

(3) $y=\sin x+\cot x-\frac{2}{x}$

$y' = \cos x - \csc x \cot x + \frac{2}{x^2}.$

(4) $y=\sin x\cos x$

$y' = \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x-\sin^2 x.$

(5) $y=x^3\tan x$

$y' = 3x^2 \tan x + x^3 \cdot \sec^2 x.$

(6) $y=\frac{x}{1+\cos x}$

$$y' = \frac{(1)(1+\cos x)-x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1+\cos x+x\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad = 1$

$y' = 0$

---

(2) $y = \dfrac{\sin x}{\sec x + x}$

$$y' = \frac{\cos x(\sec x + x) - \sin x(\csc x \cot x + 1)}{(\sec x + x)^2}$$

---

(3) $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

$$y = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

---

(4) $y = \dfrac{x}{1 + \cot x}$

$$y' = \frac{(1)(1 + \cot x) - x(-\csc^2 x)}{(1 + \cot x)^2}.$$

---

(5) $y = \dfrac{\csc x}{x^2 - 1}$

$$y' = \frac{-\csc x \cot x(x^2 - 1) - \csc x(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \frac{-2}{1+\sec x}$

$$y' = \frac{2(\sec x \tan x)}{(1+\sec x)^2}.$$

(2) $y = \frac{\cot x}{x} - \sec x$

$$y' = \frac{-\csc^2 x(x) - \cot x(1)}{x} - \sec x \tan x.$$

(3) $y = \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sec x} = \frac{1}{\sec x} = \cos x$

$$y' = -\sin x.$$

(4) $y = (3x^2+1)\cot x$

$$y' = (6x)\cot x + (3x^2+1)(-\csc^2 x)$$

محمد عمر الخطيب

المشتقات المكررة

إذا كان : $y = x^3 + \sin x$. فاوجد:

(1) $y' = 3x^2 + \cos x$

(2) $y'' = 6x - \sin x$

(3) $y''' = 6 - \cos x$

(4) $y^{(4)} = \sin x$

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x - \sin x.$

(2) $\dfrac{d^{10}y}{dx^{10}}$

نأخذ باقي القسمة فقط.

$10 \div 4 = 2$

والباقي 2

∴ المشتقة الثانية.

$= -\sin x$

(3) $\dfrac{d^{263}y}{dx^{263}} = -\cos x$

المشتقة الثالثة.

(4) $\dfrac{d^{801}y}{dx^{801}} = \cos x.$

المشتقة الأولى.

(5) $\dfrac{d^{1000}y}{dx^{1000}} + \dfrac{d^{502}y}{dx^{502}} = \underset{\text{الاصل}}{\sin x} + \underset{\text{الثانية}}{(-\sin x)}$

$= 2\sin x.$

(6) $\dfrac{d^{1000}}{dx^{1000}}\left(\dfrac{d^{404}y}{dx^{404}}\right) = \dfrac{d^{1404}}{dx^{1404}}$

$= \sin x$

الاصل.

عند استخدام الآلة

الحاسبة نأخذ

$0 \rightarrow$ الاصل.

$0.25 \rightarrow 1$

$0.50 \rightarrow 2$

$0.75 \rightarrow 3.$

$263 \div 4 = 65.75$

∴ المشتقة الثالثة

مع ملاحظة ان الدالة. الحدودية تختفي بعد المشتقة الثالثة.

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كان: $y = \sec x$ فاوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$y = \sec x$

$y' = \sec x \tan x.$

$y'' = \sec x \cdot \tan x \cdot \tan x + \sec x \cdot \sec^2 x.$

$= \sec x \tan^2 x + \sec^3 x.$

---

(2) إذا كانت: $f(x) = x\sin x + \cos x$

فاثبت أن: $xf''(x) + xf(x) - 2f'(x) = 0$

نجد أولاً المشتقات

$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x.$

$f''(x) = 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$

الإثبات : الطرف الأيسر

$x f''(x) + x f(x) - 2 f'(x)$

$= x(\cos x - x\sin x) + x(x\sin x + \cos x) - 2x\cos x$

$= \underline{x\cos x} - x^2\underline{\underline{\sin x}} + \underline{\underline{x^2}}\sin x + \underline{x\cos x} - \underline{2x\cos x}$

$= 0$ #

محمد عمر الخطيب

① إذا كانت: $f(x)=\sin x+\cos x$ اوجد:

$f'(x)=\cos x-\sin x \to 1$

$f''(x)=-\sin x-\cos x \to 2$

$f'''(x)=-\cos x+\sin x \to 3$

$f^{(4)}=\sin x+\cos x$ → الباقي 0

(1) $\dfrac{d^{203}}{dx^{203}}f(x)$ المشتقة الثالثة $=-\cos x+\sin x$

(2) $f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)$

$=\sin x+\cos x+-\sin x$

$+-\sin x-\cos x+-\cos x+\sin x.$

$=0$ #

---

(2) إذا كانت : $g(x)=\begin{cases}\sin x & ,x\ge\pi\\ ax+b & ,x<\pi\end{cases}$

اوجد قيمة كل من الثابتين a,b بحيث تكون الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=\pi$.

الاتصال

f: $ax+b$ | $\sin x$ (π)

$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^+} f(x)$

$a\pi+b=\sin\pi$

$a\pi+b=0$

$-\pi+b=0$

$\boxed{b=\pi}$

الاشتقاق

a | $\cos x$ (π)

نبدأ بالاشتقاق

$f'(\pi^-)=f'(\pi^+)$

$a=\cos\pi$

$\boxed{a=-1}$

---

(3) اوجد معادلة المماس للدالة $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ عند $x=\dfrac{\pi}{2}$.

النقطة $(\frac{\pi}{2},1)$

$$y'=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x).}{(1+\cos x)^2.}$$

$$y'(\tfrac{\pi}{2})=\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1+\cos\frac{\pi}{2})+\sin^2\frac{\pi}{2}}{(1+\cos\frac{\pi}{2})^2}=\frac{1}{1}=1\Rightarrow\boxed{m=1}$$

$y-1=1(x-\frac{\pi}{2})$

$y-1=x-\frac{\pi}{2}.$

قاعدة السلسلة

(الشكل الأول)

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n\times[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

(الشكل الثاني)

$$\frac{d}{dx}[(f\circ g)(x)] = \frac{d}{dx}[f(g(x)] = f'(g(x))\times g'(x)$$

(الشكل الثالث)

$$y = f(u) \quad , \quad u = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

مشتقة الدالة العكسية

اذا كانت $g(x) = f^{-1}(x)$ فان

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

او

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=(x^2+3)^5$

$$y' = 5(x^2+3)^4 \cdot (2x)$$

---

(2) $y=\frac{3}{(x^3-5x+8)^3}$ $= 3(x^3-5x+8)^{-3}$.

$$y' = -9(x^3-5x+8)^{-4} \cdot (3x^2-5) = \frac{-9(3x^2-5)}{(x^3-5x+8)^4}.$$

---

(3) $y=x^5(4x-1)^3$ قاعدة الضرب اول .

$$y' = 5x^4(4x-1)^3 + x^5 \cdot 3(4x-1)^2 \cdot (4).$$

---

(4) $y=(2x+1)^5(2x-1)^5$ $= [(2x+1)(2x-1)]^5$ ممكن الحل بأكثر من طريقة

$$y = (4x^2-1)^5$$

$$y' = 5(4x^2-1)^4 \cdot (8x)$$

---

(5) $y=(\frac{x^2+3}{2x-4})^3$

$$y' = 3\left(\frac{x^2+3}{2x-4}\right)^2\left[\frac{2x(2x-4)-(x^2+3)(2)}{(2x-4)^2}\right]$$

---

(6) $y=\sqrt{x^2-5x+1}$

$$y' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+1}}$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = (\sin x - x)^5$

$y' = 5(\sin x - x)^4(\cos x - 1)$

---

(2) $y = \sin^2 x \quad = \quad (\sin x)^2$

$y' = 2\sin x \cdot \cos x$

---

(3) $y = \sec^5 x$

$y' = 5\sec^4 x \quad \cdot \sec x \tan x = 5\sec^5 x \tan x.$

---

(4) $y = x\cos^2 x$

$y' = (1)\cos^2 x + x \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)$

$= \cos^2 x - 2x\sin x\cos x.$

---

(5) $y = \sin^3 x \cos x$

$y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot \cos x + \sin^3 x \cdot (-\sin x)$

$= 3\sin^2 x\cos^2 x - \sin^4 x.$

---

(6) $y = x\sqrt{\sin x}$

$y' = (1)\cdot\sqrt{\sin x} + x \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$

محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

الزاوية خلاف x

(1) $y = \cos(\sqrt{x})$

$y' = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

---

(2) $y = \tan\sqrt{x^3+1}$

$y' = \sec^2\sqrt{x^3+1} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$.

---

(3) $y = \sin(\cos 4x)$

$y' = \cos(\cos 4x) \cdot (-\sin 4x) \cdot (4)$.

$= -4\sin 4x \cos(\cos 4x)$.

---

(4) $y = \sin^2(2x)$

$y' = 2\sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 4\sin 2x \cos 2x$

$= 2\sin 4x$.

---

(4) $y = \cot^2 x^3 = (\cot x^3)^2$

$y' = 2\cot x^3 \cdot (-\csc^2 x^3) \cdot 3x^2$

$= -6x^2 \csc^2 x3 \cot x^3$.

---

(5) $y = \cos(\frac{1}{\cos x}) = \cos(\sec x)$

$y' = -\sin(\sec x) \cdot \sec x \tan x$.

---

(6) $y = \frac{1}{\sin 4x} = \csc 4x$

$y' = -\csc 4x \cot 4x \cdot 4$.

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=\sin(\cos\sqrt{x})$

$$y' = \cos(\cos\sqrt{x}) \cdot (-\sin\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

---

(2) $y=\sec^2 x\tan x^2$ $= (\sec x)^2 \tan x^2.$ ضرب

$$y' = 2\sec x \cdot \sec x\tan x \cdot \tan x^2 + \sec^2 x \cdot \sec^2 x^2 \cdot 2x.$$

---

(3) $y=\frac{\sin x^2}{x^2}$

$$y' = \frac{\cos x^2 \cdot 2x \cdot x^2 - \sin x^2 \cdot 2x}{x^4}.$$

---

(4) $y=\sqrt{\tan x^2+2}$

$$y' = \frac{\sec^2 x^2 \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{\tan x^2+2}} = \frac{x\sec^2 x^2}{\sqrt{\tan x^2+2}}$$

---

(5) $y=\sqrt{\sin x\cos x}$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x\,(-\sin x)}{2\sqrt{\sin x\cos x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sqrt{\sin x\cos x}}$$

---

(6) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

الباقي $0.25 \to 1$, $0.5 \to 2$, $0.75 \to 3$.

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كان: $f(x) = \sin 2x$. فاوجد:

$f(x) = \sin 2x \to 0$ الاصل

$f'(x) = \cos 2x \cdot 2$

$= 2\cos 2x$

$f'' = -2\sin 2x \cdot 2$

$= -2^2 \sin 2x.$

$f''' = -2^2 \cos 2x \cdot 2$

$= -2^3 \cos 2x$

$(a)\quad f^{(75)}(x)$

المشتقة الثالثة مع الانتباه الى قوى 2

$= -2^{75} \cos 2x.$

$(b)\quad f^{(101)}(x)$

المشتقة الاولى

$= 2^{101} \cos 2x$

$(c)\quad f^{(101)}(\pi)$

$= 2^{101} \cos 2(\pi) = 2^{101}.$

---

(2) إذا كان: $f(x) = \sin x + \cos 3x$. فاوجد:

$f' = \cos x - 3\sin 3x$

$f'' = -\sin x - 3^2 \cos 3x$

$f''' = -\cos x + 3^3 \sin 3x.$

$\vdots$

$(a)\quad f^{(11)}(x)$

المشتقة الثالثة.

$= -\cos x + 3^{11} \sin 3x.$

$(b)\quad f^{(20)}(\pi)$

الاصل.

$f^{(20)}(x) = \sin x + 3^{20} \cos 3x$

$f^{(20)}(\pi) = \sin \pi + 3^{20} \cos 3\pi = -3^{20}$

$(c)\quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$

$= \cos 0 - 3\sin 0$

$= 1$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي عند النقطة المشار إليها:

$y \rightsquigarrow u \rightsquigarrow x.$

(1) $y = u^2 + 3\sin u \qquad , u = x^2 - 1, \quad x = 1$

عندما $x = 1$
تكون $u = 0.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (2u + 3\cos u) \cdot (2x)$$
$$= (3)(2)$$
$$= 6 .$$

---

(2) $y = u^2 + \frac{1}{\cos u} \qquad , u = \pi x^2 \quad , x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$
$u = \pi \cdot (\frac{1}{2})^2$
$= \frac{\pi}{4}$

$.y = u^2 + \sec u .$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (2u + \sec u \tan u) \cdot (2\pi x)$$
$$= (2 \cdot \frac{\pi}{4} - \sec \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{4})(2\pi \cdot \frac{1}{2}) = (\frac{\pi}{2} + \sqrt{2})\pi$$

---

(3) $y = \tan(t + \frac{\pi}{4}) \qquad , x = 3t^2 - t \quad , t = 0$

$y \rightsquigarrow t \rightsquigarrow x.$
$y \rightsquigarrow x \rightsquigarrow t$

$t = 0$
$x = 0$

ملاحظة
$$\frac{dx}{dt} = 6t - 1.$$
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{6t - 1.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} .$$
$$= \sec^2(t + \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{1}{6t - 1}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \sec^2(\frac{\pi}{4}) \cdot \frac{1}{-1} = 2(-1) = -2 .\#$$

محمد عمر الخطيب

اوجد $\dfrac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي

(1) $y = f(x^2) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x^2)\cdot 2x = 2x\, f'(x^2)$

---

(2) $y = f(\sqrt{x}) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, f'(\sqrt{x})$

---

(3) $y = [f(x)]^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\, f(x) \cdot f'(x)$.

---

(4) $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

---

(5) $y = f(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(f(x))\cdot f'(x)$

---

(6) $y = f(xf(x))$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x f(x))\cdot\left[1\cdot f(x) + x\, f'(x)\right]$$

---

(7) $y = f\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{x}{f(x)}\right)\cdot\left[\frac{(1)\cdot f(x) - x\, f'(x)}{(f(x))^2}\right]$$

---

(8) $y = xf(x^3)$

$$\frac{dy}{dx} = (1)\cdot f(x^3) + x\cdot f'(x^3)\cdot 3x^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

بفرض أن الدوال: $f(x)$ ، $g(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x=2$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	1	3	2	-4

اوجد $h'(2)$ في الحالات التالية

(1) $h(x)=4f(x)+g(x)-x^2$

$$h'(x) = 4f'(x) + g'(x) - 2x$$

$$h'(2) = 4f'(2) + g'(2) - 2(2)$$

$$= 4(3) + (-4) - 4 = 4 .$$

---

(2) $h(x)=f^3(x)+\dfrac{1}{g(x)}$ $= [f(x)]^3 + \dfrac{1}{g(x)} .$

$$h'(x) = 3f^2(x)\cdot f'(x) - \frac{1}{[g(x)]^2}$$

$$h'(2) = 3f^2(2)\cdot f'(2) - \frac{1}{[g(2)]^2} = 3(1)^2(3) - \frac{-4}{2^2} = 10$$

---

(3) $h(x)=\sqrt{f(x)+2g(x)}$

$$h'(x) = \frac{f'(x) + 2g'(x)}{2\sqrt{f(x)+2g(x)}}$$

$$h'(2) = \frac{f'(2)+2g'(2)}{2\sqrt{f(2)+2g(2)}} = \frac{3+2(-4)}{2\sqrt{1+2(2)}} = \frac{-5}{2\sqrt{5}}$$

---

(4) $h(x)=f(g(x))$

$$h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

$$h'(2) = f'(g(2))\cdot g'(2)$$

$$= f'(2)\cdot g'(2)$$

$$= (3)(-4)$$

$$= -12$$

محمد عمر الخطيب

بفرض أن الدوال: $g(x), f(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية

$$f(1)=3, g(1)=2, f'(1)=4, f'(2)=3, g'(1)=-2, g'(3)=5$$

(1) أوجد $h'(1)$ حيث $h(x)=f(g(x))$

$$h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$h'(1) = f'(g(1))\cdot g'(1)$$

$$= f'(2)\cdot(-2)$$

$$= (3)(-2) = -6$$

---

(2) أوجد معادلة المماس للدلة $h(x)=f(x)g(x)$ عند $x=1$

$$h'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

$$m = h'(1) = f'(1)\, g(1) + f(1)\cdot g'(1)$$

$$= (4)(2) + (3)(-2) = 2$$

∴ معادلة المماس

$$y - 6 = 2(x-1).$$

* النقطة

$(1, h(1))$

$h(1) = f(1)\cdot g(1)$

$= (3)(2)$

$= 6$

النقطة

$(1, 6)$

---

(3) أوجد معادلة المماس للدلة $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ عند $x=1$

$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$m = h'(1) = \frac{f'(1)\, g(1) - f(1)\cdot g'(1)}{[g(1)]^2}$$

$$= \frac{(4)(2) - (3)(-2)}{2^2} = \frac{14}{4}.$$

$$y - \frac{3}{2} = \frac{14}{4}(x-1).$$

* النقطة

$(1, h(1))$

$h(1) = \dfrac{f(1)}{g(1)}$

$h(1) = \dfrac{3}{2}$

النقطة

$(1, \frac{3}{2})$

بفرض أن الدوال: $g(x), f(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x = 2,4$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	3	7	4	6
4	2	-5	9	-3

اوجد $h'(x)$ عند القيمة المشار اليها:

(1) $h(x) = f(\sqrt{x}) \qquad x = 4$

$$h'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(4) = f'(\sqrt{4}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$= f'(2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \,.$$

---

(2) $h(x) = f(g(x)) \qquad x = 2$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$h'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2)$$

$$= f'(4) \cdot 6$$

$$= (-5)(6) = -30$$

---

(3) $h(x) = f^3(x^2) \qquad x = 2$

$$h(x) = [f(x^2)]^3 .$$

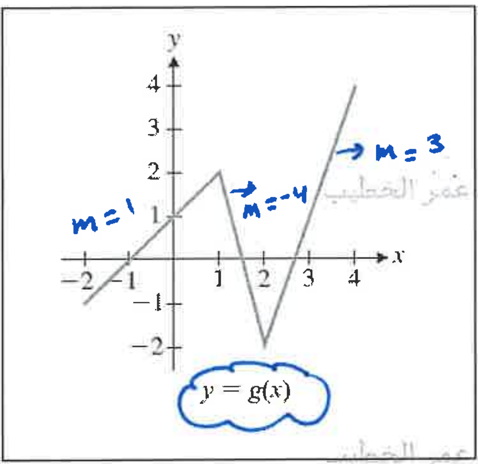
$$h'(x) = 3[f(x^2)]^2 \cdot f'(x^2) \cdot 2x .$$

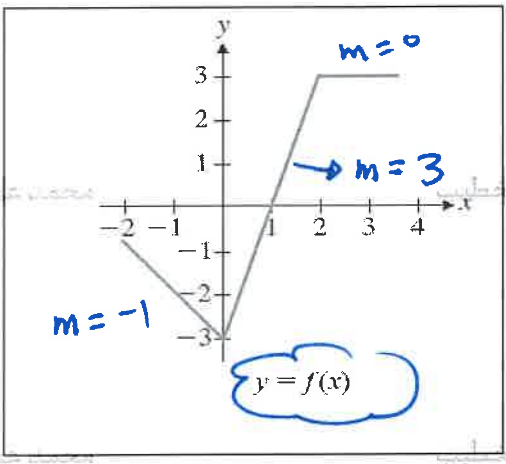
$$h'(2) = 3(f(4))^2 \cdot f'(4) \cdot 4$$

$$= 3(2)^2 \cdot (-5) \cdot 4$$

$$= -240$$

الرسم البياني المجاور يمثل بيان الدالة $f(x), g(x)$.





(1) اوجد $h'(0)$ حيث

$h(x) = f(g(x))$

$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$h'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$

$h'(0) = f'(1) \cdot 1$

$= (3)(1)$

$= 3 .$

(2) اوجد $h'(3)$ حيث

$h(x) = f(f(x))$

$h'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x).$

$h'(3) = f'(f(3)) \cdot f'(3).$

$h'(3) = f'(3) \cdot f'(3)$

$= 0 \cdot 0$

$= 0.$

(3) اوجد $h'(1)$ حيث

$h(x) = g(f(x))$

$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$h'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1)$

$= g'(0) \cdot 3$

$= (1)(3) = 3 .$

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كان $y = f(x^2 + x)$ وكان $f'(2) = -1$، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x^2+x)\cdot(2x+1)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = f'(2)\cdot(3) = (-1)(3) = 3\,.$$

---

(2) إذا علمت ان: $h(x) = f(x^2 + g(x))$ اوجد $h'(-2)$

$g'(-2)$	$f'(3)$	$g(-2)$
2	-4	-1

$$h'(x) = f'(x^2+g(x))\cdot(2x+g'(x))$$

$$h'(-2) = f'(4+g(-2))\cdot(-4+g'(-2))$$

$$= f'(4+-1)\cdot(-4+2) = f'(3)(-2) = (-4)(-2) = 8$$

---

(3) إذا كان $f(\frac{1}{x}) = 4x^3 - 7x + 1$ فاوجد $f'(2)$.

نشتق الطرفين

$$f'(\tfrac{1}{x})\cdot(\tfrac{-1}{x^2}) = 12x^2 - 7$$

عندما

$\frac{1}{x} = 2$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\,.$

$$f'(2)\cdot(-4) = 12(\tfrac{1}{2})^2 - 7\,.$$

$$-4\,f'(2) = -4 \rightarrow f'(2) = 1\,.$$

---

(4) اذا كانت $h'(x) = n\sqrt{h(x)}$ حيث $n > 0$ و $h''(x) = 18$ فاوجد قيمة n

$$h''(x) = n\cdot\frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} = \frac{n}{2}\,\frac{n\sqrt{h(x)}}{\sqrt{h(x)}} = \frac{n^2}{2}$$

$$h''(x) = 18 \Rightarrow \frac{n^2}{2} = 18 \Rightarrow n^2 = 36$$

$n = -6$, $\boxed{n = 6}$ ✓

مرفوض

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت: $f(x)=\sqrt[3]{2x^2+a}$ وكانت $f'(3)=\frac{4}{9}$ فاوجد قيمة a؟

$$f(x) = (2x^2+a)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2+a)^{-2/3}\cdot(4x).$$

$$= \frac{4}{3}x(2x^2+a)^{-2/3}$$

$$f'(3) = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{3}\cdot 3\,(18+a)^{-2/3} = \frac{4}{9}$$

$$4(18+a)^{-2/3} = \frac{4}{9}$$

$$(18+a)^{-2/3} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{(18+a)^{2/3}} = \frac{1}{9}$$

$$(18+a)^{2/3} = 9$$

$$18+a = 9^{3/2} = 27$$

$$18+a = 27$$

$$\boxed{a = 9}$$

---

(2) لتكن:

$$f(x)=\begin{cases}1+\cos 2x & ,x\geq\frac{\pi}{4}\\ a+bx & ,x<\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

دالة قابلة للاشتقاق عند $x=\frac{\pi}{4}$ فاوجد قيمة كل من a,b

الاشتقاق

b | $-2\sin 2x.$

$\frac{\pi}{4}$

نبدأ بالاشتقاق

$$f'\left(\frac{\pi}{4}^-\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}^+\right)$$

$$b = -2\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{b = -2}$$

الاتصال

$a+bx$ | $1+\cos 2x.$

$\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)$$

$$a+b\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1+\cos\frac{\pi}{2}$$

$$a+b\frac{\pi}{4} = 1$$

$$a + \frac{\pi}{4} = 1$$

$$a - \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1+\frac{\pi}{2}}$$

(1) اوجد قيم x التي يكون عندها المماس للدالة $f(x)=x-\sin 2x$ افقي

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$.

$f'(x) = 0$

$1 - 2\cos 2x = 0$.

$2\cos 2x = 1$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$.

$2x$ $\frac{\pi}{3}$ Q_1 $x = \frac{\pi}{3}$.

Q_4 $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

$2x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + n\pi$.

$2x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + n\pi$.

---

(2) اوجد قيمة x التي يصنع عندها المماس لمنحنى الدالة $f(x)=x-\sin 2x$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية مقدارها 45°

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$

$f'(x) = \tan 45^\circ$

$1 - 2\cos 2x = 1$.

$-2\cos 2x = 0$

$\cos 2x = 0$

$2x$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

$2x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$.

---

(3) اوجد قيمة x التي تجعل الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x}$ غير قابلة للاشتقاق

$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{1/3}$.

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 2x)^{-2/3}(3x^2 - 6x + 2)$

$= \frac{3x^2 - 6x + 2}{3(x^3 - 2x^2 + 2x)^{2/3}}$.

$x^3 - 2x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x-1)(x-2) = 0$

$x = 0, 1, 2$

$f'(x)$ غير قابلة لا شتقاق عند اصفار المقام

محمد عمر الخطيب

لتكن $u(t)=4\cos(2t)$ تقيس مقدار الازاحة بالبوصة لكتلة معلقة في زنبرك لمدة t ثانية بعد تحريرها

(1) احسب السرعة المتجهة عند اي زمن

$$u'(t) = -4\sin(2t)\cdot 2$$
$$= -8\sin 2t .$$

اقصى سرعة متجهة هي السعة

(2) اوجد اقصى سرعة متجهه للزنبرك

اقصى سرعة متجهة هي 8 .

---

(3) اوجد الزمن الذي تكون فية السرعة المتجهه اكبر ما يمكن

$$-8\sin 2t = 8$$
$$\sin 2t = -1$$
$$2t \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{ليس} \\ \frac{3\pi}{2} & \checkmark \end{cases}$$

$$2t = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi .$$
$$t = \frac{3}{4}\pi + n\pi .$$

---

(4) احسب موقع الجسم عندما تنعدم سرعتة

$$u'(t) = 0$$
$$-8\sin 2t = 0$$
$$\sin 2t = 0$$
$$2t \begin{cases} 0 \\ \pi . \end{cases}$$

$$2t = 0 + 2n\pi \Rightarrow t = n\pi$$
$$2t = \pi + 2n\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + n\pi .$$

الموقع

$$u(n\pi) = 4\cos(2n\pi) = \boxed{4} .$$
$$u\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 4\cos 2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$
$$= 4\cos(\pi + 2n\pi)$$
$$= \boxed{-4}$$

محمد عمر الخطيب

يتحرك جسم على محور السينات حسب العلاقة: $S(t)=10\cos(t+\frac{\pi}{4})$ حيث S بالمتر و t بالثانية

$$s'(t) = -10\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

اجب عما يلي:

(1) ما الموضع الابتدائي للجسم

$$S(0) = 10\cos\left(0+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\,.$$

---

(2) احسب أبعد نقطة يصل إليها الجسم من جهة اليمين.

ابعد نقطة هي ١٠ متر (الحقيقية).

---

(3) متى يصل الجسم إلى نقطة الأصل (جميع الحلول).

$$S(t) = 0$$

$$10\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$t+\frac{\pi}{4} \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$t+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+2n\pi\,.$$

$$t = \frac{\pi}{4}+2n\pi\,.$$

$$t+\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}+2n\pi\,.$$

$$t = \frac{5}{4}\pi+2n\pi\,.$$

الزمن.

$$\boxed{\frac{\pi}{4}+n\pi}$$

---

(4) احسب سرعة الجسم المتجهة عند زمن الوصول إلى نقطة الأصل

احا.

$$s'\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right) = -10\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -10\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = -10 \quad , \quad 10$$

---

(5) احسب تسارع الجسم عند زمن الوصول إلى نقطة الأصل

$$a(t) = s''(t) = -10\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$s''\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right) = -10\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -10\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$$

$$= 0$$

محمد عمر الخطيب

1) اوجد الدالة $g(x)$ التي تجعل $g'(x)=f(x)$ حيث

الحل بالتخمين

(a) $f(x)=2x\left(x^2+3\right)^3$

$$g(x)=\frac{1}{4}\left(x^3+3\right)^4+c$$

تخمين

أي عدد

(b) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}$

$$g(x)=2\sqrt{\sin x+1}+c$$

تخمين .

---

2) تسمى الدالة $f(x)$ دالة زوجية اذا حققت $f(-x)=f(x)$ لكل قيم x

وتسمى دالة فردية اذا حققت $f(-x)=-f(x)$ لكل قيم x

اثبت ان مشتقة الدالة الزوجية هي دالة فردية

لتكن الدالة $f(x)$ دالة زوجية .

$$f(-x)=f(x)$$

، نشتق الطرفين

$$-f'(-x)=f'(x).$$

$$f'(-x)=-f'(x)$$

∴ الدالة $f'(x)$ دالة فردية .

محمد عمر الخطيب

مشتقة الدالة العكسية

اذا كانت $g(x) = f^{-1}(x)$ فان

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

او

$$\boxed{\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

(1) اذا كانت $f(x) = x^3 - 3$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$، فأوجد $g'(5)$

$f'(x) = 3x^2$

$g(5) = f^{-1}(5) = x$

$f(x) = 5$

$x^3 - 3 = 5$

$x^3 = 8$

$x = 2.$

$\Rightarrow g(5) = 2.$

$g'(5) = \frac{1}{f'(g(5))}$

$= \frac{1}{f'(2)}.$

$= \frac{1}{3(2)^2} = \frac{1}{12}.$

---

(2) اذا كانت $f(x) = x^3 + 4x - 1$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$، فأوجد $g'(-1)$

$f'(x) = 3x^2 + 4.$

$g(-1) = f^{-1}(-1) = x.$

$f(x) = -1$

$x^3 + 4x - 1 = -1$

$x^3 + 4x = 0$

$x(x^2 + 4) = 0$

$x = 0 \Rightarrow g^{-1}(-1) = 0$

$g'(-1) = \frac{1}{f'(g(-1))}$

$= \frac{1}{f'(0)}$

$= \frac{1}{4}.$

---

(3) اذا كانت $f(x) = x^3 + 3\sin x + 2\cos x$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$، فأوجد $g'(2)$

$f'(x) = 3x^2 + 3\cos x - 2\sin x$

$g(2) = f^{-1}(2) = x$

$f(x) = 2.$

$x3 + 3\sin x + 2osx = 0$

$x = 0$ تخمين

$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))}$

$= \frac{1}{f'(0)}$

$= \frac{1}{3}.$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت $f(x)=x^3+5x+6$ لها الدالة العكسية $g(x)$، فأوجد $g'(x)$ بدلالة $g(x)$

$$f'(x) = 3x^2+5$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$= \frac{1}{3[g(x)]^2+5}$$

---

(2) بفرض أن الدوال: $f(x)$, $g(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x=2$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	1	3	2	-4

(أ) أوجد معادلة المماس للدلة $h(x)=f(x)g(x)$ عند $x=2$

النقطة $(2, h(2))$

$(2, 2)$

*

$h(2) = f(2)\cdot g(2)$

$= (1)(2)$

2

$$h'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

$$h'(2) = f'(2)\cdot g(2) + f(2)\cdot g'(2)$$

$$= (3)(2) + (1)(-4) = 2.$$

$$y-2 = 2(x-2). \Rightarrow y = 2x-2.$$

(ب) أوجد معادلة المماس للدلة $h(x)=g^{-1}(x)$ عند $x=2$

النقطة $(2, h(2))$

$(2, 2)$

$$[g^{-1}(x)]' = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

$$m = [g^{-1}(2)]' = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{-1}{4}.$$

$$y-2 = -\frac{1}{4}(x-2)$$

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثالثة : التفاضل /// الدرس السابع: مشتقة الدوال الاسية واللوغارتمية

مشتقة الدوال الاسية

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)}=e^{f(x)}\times f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}a^{f(x)}=a^{f(x)}\times f'(x)\times \ln a$$

$$\frac{d}{dx}e^{x}=e^{x}$$

$$\frac{d}{dx}a^{x}=a^{x}\times \ln a$$

تذكر

خاصية تغير الأساس

$$a^{x}=e^{x\ln a}$$

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

مشتقة الدوال اللوغارتمية

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)\times \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\times \ln a}$$

ملاحظة: يمكن الاستفادة من خواص الأسس واللوغاريتمات قبل الاستقاق

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y=2e^{-3x}$ $\Rightarrow y'=2e^{-3x}\cdot(-3)=-6e^{-3x}$

(2) $y=e^{\sin x}$ $\Rightarrow y'=e^{\sin x}(\cos x)$

(3) $y=(\frac{1}{e})^{x^2-1}$ $\Rightarrow y'=(\frac{1}{e})^{x^2-1}\cdot 2x.$

(4) $y=2^{\tan x}$ $\Rightarrow y'=2^{\tan x}\cdot \ln 2.$

(5) $y=3^{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow y'=3^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln 3.$

محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y=5^{2x}+\ln(x^2-5x)$

$$y=5^{2x}\cdot 2\cdot \ln 5+\frac{2x-5}{x^2-5x}$$

(2) $y=e^{\sqrt{x}}+\ln(2-\cos x)$

$$y'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{2-\cos x}$$

(3) $y=\ln(\sec x+\tan x)$

$$y'=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}=\frac{\sec x(\tan x+\cancel{\sec x})}{\sec x\cancel{+}\tan x}=\sec x$$

(4) $y=x^2e^{\cos x}$

الضرب

$$y'=2x\,e^{\cos x}+x^2\,e^{\cos x}\cdot(-\sin x)$$

(5) $y=\frac{x^2}{e^{3x}}$

$$y'=\frac{2x\,e^{3x}+x^2\,e^{3x}\cdot 3}{(e^{3x})^2}=\frac{e^{3x}[3x+3x^2]}{e^{6x}}=\frac{3x+3x^2}{e^{3x}}$$

(6) $y=\frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{2x}$

$$y'=\frac{e^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x-e^{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2}{4x^2}$$

محمد عمر الخطيب

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = 2^{\cos x} + \log_2 x$

$$y' = 2^{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \ln 2} \cdot$$

---

(2) $y = \log_5(\sin 2x)$

$$y' = \frac{\cos 2x \cdot 2}{\sin 2x \cdot \ln 5} \cdot = \frac{2}{\ln 5} \cot 2x \cdot$$

---

(3) $y = e^{1/x} + x\log_3 x$

$$y' = e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} + (1) \cdot \log_3 x + x \cdot \frac{1}{x \ln 3} \cdot$$

---

(4) $y = \ln(\tan^2 x^3) = 2 \ln(\tan x^3) \cdot$

$$y' = 2 \cdot \frac{\sec^2 x^3 \cdot 3x^2 \cdot}{\tan x^3 \cdot}$$

---

(5) $y = \ln(x-1) + \cancel{\log_3}(3^{\sec x}) + e^{2\ln x} = \ln(x-1) + \sec x + x^2$

$$y' = \frac{1}{x-1} + \sec x \tan x + 2x \cdot$$

---

(6) $y = \ln(\cos 3x) + 3^{\sin x^3}$

$$y' = \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x \cdot} + 3^{\sin x^3} \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 \cdot \ln 3 \cdot$$

$$= -3\tan 3x + 3x^2 \cos x^3 \, 3^{\sin x^3} \cdot \ln 3 \cdot$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = x\ln(\sqrt{x^2+1})$ $= x \, Ln(x^2+1)^{1/2} = \frac{1}{2} x Ln(x^2+1).$

$y' = \frac{1}{2}(1) Ln(x^2+1) + \frac{1}{2} x \cdot \frac{2x.}{x^2+1}$

---

(2) $y = e^{\tan x}\ln x$

$y' = e^{tanx} \cdot sec^2 x \cdot Ln x + e^{tanx} \cdot \frac{1}{x}.$

---

(3) $y = \sqrt[3]{\ln(x^2-1)}$ $= [Ln(x^2-1)]^{1/3}.$

$y' = \frac{1}{3}[Ln(x^3-1)]^{-2/3} \cdot \frac{3x^2}{x^3-1}.$

---

(4) $y = \ln(\frac{x+\sin x}{1-\cos x})$ $= Ln(x+sinx) - Ln(1-cosx)$

$y' = \frac{1+cosx}{x+sinx} - \frac{sinx.}{1-cosx}$

---

(5) $y = \ln(\sqrt{e^x+\sin x}+\sqrt{\sin x}) + \ln(\sqrt{e^x+\sin x}-\sqrt{\sin x})$

$= Ln[(\sqrt{e^x+sin x}+\sqrt{sinx})(\sqrt{e^x+sinx}-\sqrt{sinx})]$

$= Ln[e^x + Sin x - sin x]$

$= Ln[e^x] = x$

من خواص Ln.

$y' = 1.$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كان : $f(x)=e^{2x}$. فاوجد:

$f'(x) = e^{2x} \cdot 2.$

$= 2e^{2x}$

$f''(x) = 2e^{2x} \cdot 2$

$= 2^2 e^{2x}.$

$\vdots$

(a) $f^{(10)}(x) = 2^{10} e^{2x}.$

(b) $f^{(100)}(0) = 2^{100} e^{2(0)} = 2^{100}$

---

(2) إذا كان : $f(x)=e^{2x}+\cos 2x - x$. فاوجد:

$f'(x) = 2e^{2x} - \sin 2x \cdot 2 - 1 \longrightarrow 1$

$f''(x) = 2^2 e^{2x} - 2^2 \cos 2x \longrightarrow 2$

$f'''(x) = 2^3 e^{2x} + 2^3 \sin x \longrightarrow 3.$

$f^{(4)} = 2^4 e^{2x} + 2^4 \cos x \longrightarrow 4$

$\vdots$

(a) $f^{(11)}(x)$

الباقي 3.

$f^{(11)}(x) = 2^{11} e^{2x} + 2^{11} \sin x.$

(b) $f^{(22)}(0)$

الباقي 2

$f^{(22)}(0) = 2^{22} e^{2(0)} - 2^{22} \cos 0$

$= 0$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$

$= 2e^{0} - 2\sin 0 - 1$

$= 2 - 1$

$= 1.$

استخدام التفاضل اللوغاريتمي

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) خذ $\ln$ للطرفين

(2) اشتق الطرفين ضمنياً

(3) اضرب الطرفين في y

(1) $y = (\frac{1}{2})^{x^2}$

$$\ln y = \ln (\tfrac{1}{2})^{x^2} = x^2 \ln \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \tfrac{1}{2} .$$

$$y' = y[2x \ln \tfrac{1}{2}]$$

$$= (\tfrac{1}{2})^{x^2} \cdot 2x \ln \tfrac{1}{2} .$$

* ممكن حل السؤال مباشرةً من القوانين السابقة .

---

(2) $y = x^x$

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x .$$

$$\frac{y'}{y} = (1) \ln x + x \cdot \frac{1}{x} . = \ln x + 1 .$$

$$y' = y[\ln x + 1]$$

$$y' = x^x [\ln x + 1]$$

---

(3) $y = x^{\sin x}$

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} .$$

$$y' = y[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}]$$

$$y' = x^{\sin x} \cdot [\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}] .$$

محمد عمر الخطيب

استخدام التفاضل اللوغاريتمي

اوجد $f'(x)$ في كل مما يلي :

(1) $f(x)=(x^2)^{3x}$ $= x^{6x}$. تبسيط

$Ln\, f(x) = Ln\, x^{6x} = 6x\, Ln\, x .$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 6\, Ln\, x + 6x \cdot \frac{1}{x} = 6\, Ln\, x + 6 = 6(Ln\, x+1).$

$f'(x) = f(x)\left[6(Ln\, x+1)\right].$

$= x^{6x}\left(6(Ln\, x+1)\right) = 6\, x^{6x} \cdot (Ln\, x+1).$

---

(2) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$

$Ln\, f(x) = Ln\, x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\, Ln\, x .$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot Ln\, x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{Ln\, x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} .$

$f'(x) = f(x)\left[\frac{Ln\, x+2}{2\sqrt{x}}\right] = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{ln\, x+2}{2\sqrt{x}} .$

---

(3) $f(x)=(\sin x)^{\ln x}$

$Ln\, f(x) = Ln\, (\sin x)^{Ln\, x} = Ln\, x \;\; Ln\, (\sin x).$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \cdot Ln(\sin x) + Ln\, x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} .$

$f'(x) = (\sin x)^{Ln\, x}\left[\frac{Ln \sin x}{x} + \cot x \cdot Ln\, x\right] .$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت $f(x) = 4x - \ln x^3$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$، فأوجد $g'(4)$

$g(4) = f^{-1}(4) = x .$

$f(x) = 4 .$

$4x - \ln x^3 = 4 .$

$x = 1$ ⇐ بالتجريب

$f'(x) = 4 - \frac{3}{x} .$

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1} = 1 .$$

---

(2) اوجد جميع قيم x التي يكون عندها للدالة $f(x) = xe^{-2x}$ مماس افقي

$f'(x) = (1)e^{-2x} + x\,e^{-2x}(-2)$

$= e^{-2x}(1 - 2x) .$

$f'(x) = 0$

$e^{-2x}(1 - 2x) = 0$

$e^{-2x} = 0$ لايوجد حل ، $1 - 2x = 0$

$x = \frac{1}{2} .$

---

(3) اوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = 3^{\tan x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

النقطة $(\frac{\pi}{4}, 3 .$

$f(\frac{\pi}{4}) = 3^{\tan\frac{\pi}{4}} = 3^1 = 3 .$

$f'(x) = 3^{\tan x} \cdot \sec^2 x \cdot \ln 3 .$

$m = f'(\frac{\pi}{4}) = 3^{\tan\frac{\pi}{4}} \cdot \sec^2\frac{\pi}{4} \cdot \ln 3 = 6\ln 3$

معادلة المماس

$y - 3 = 6\ln 3\,(x - \frac{\pi}{4})$

---

(4) اوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = \ln x$ والتي تمر بنقطة الأصل

*لاحظ ان نقطة التماس غير معروفة .. ولتكن $(a, \ln a)$ *

$f'(x) = \frac{1}{x} .$

$m = f'(a) = \frac{1}{a} .$

معادلة المماس

$y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a)$

وهذه المعادلة تمر بنقطة الاصل

$0 - \ln a = \frac{1}{a}(0 - a)$

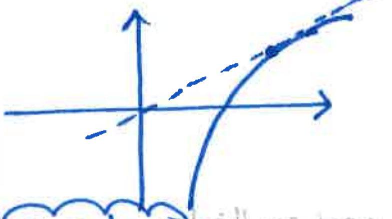
$-\ln a = -1$

$\ln a = 1$

$\boxed{a = e}$

$y - \ln e = \frac{1}{e}(x - e)$

$y - 1 = \frac{1}{e}x - 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{e}x}$



(1) تحدد الدالة $v(t)=100\times 4^{t}$ قيمة الاستثمار لمبلغ 100 درهم بعد الزمن t ، اوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير

النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير

$$\frac{v'(t)}{v(t)}\times 100\%$$

$$V'(t)=100\times 4^{t}\cdot \text{Ln}\,4 .$$

$$\frac{V'(t)}{V(t)}\times 100\% = \frac{100\times 4^{t}\cdot \text{Ln}4}{100\times 4^{t}}\times 100\%$$

$$= 138\ \%$$

---

(2) يبدأ تكاثر البكتريا بالعدد 200 ويتضاعف ثلاث مرات كل يوم، اوجد قانون لتكاثر البكتيريا بعد t يوم، ثم اوجد النسبة المئوية للمعدل للحظي للتغير في التكاثر

عدد البكتيريا يساوي $p(t)=p_0\,a^{t}$

حيث p_0 عدد البكتيريا في بداية التجربة

حيث a عدد مرات التي تضاعف فيها البكتيريا في وحدة الزمن

$$P(t)=P_0\ a^{t} .$$
$$=200\times 3^{t} .$$

$$P'(t)=200\times 3^{t}\cdot \text{Ln}\,3 .$$

$$\frac{P'(t)}{P(t)}\times 100\% = \frac{200\times 3^{t}\ \text{Ln}3}{200\times 3^{t}}\times 100\% = 110\%$$

---

(3) لتكن $c(t)=\dfrac{10}{9e^{-20t}+1}$ تقيس تركيز مادة معينة بعد t ثانية من التفاعل

أ) اوجد تركيز المادة عند بداية التفاعل.

$$c(0)=\frac{10}{9e^{0}+1}=1 .$$

ب) اوجد $c'(t)$ وماذا تعني

$$c'(t)=\frac{-10\left(9e^{-20t}\cdot(-20)\right)}{9e^{-20t}+1}=\frac{200\,e^{-20t}}{9e^{-20t}+1} .$$

وتعني معدل التغير في تركيز المادة .

ج) بين ان $c'(t)\geq 0$ وفسر النتيجة

$$c'(t)=\frac{200\,e^{-20t}}{9e^{-20t}+1}>0$$

. البسط والمقام قيم موجبة

د) اوجد اكبر قيمة للتركيز مع مرور الزمن

$$\lim_{t\to\infty}\frac{10}{9e^{-20t}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{10}{\frac{9}{e^{20t}}+1}=\frac{10}{0+1}=10$$

الحد الأعلى للتركيز: هو 10 .

محمد عمر الخطيب

(1) تعطى الدالة $s(t)=e^{-2t}\sin 3t$ موقع كتلة مرتبطة بزنبرك في اي زمن t

(أ) اوجد دالة السرعة المتجهه

$$s'(t) = e^{-2t}(-2)\sin 3t + e^{-2t}\cdot \cos 3t \cdot 3$$
$$= e^{-2t}\left[-2\sin 3t + 3\cos 3t\right].$$

(ب) ا اوجد لسرعة المتجهة عند $t=0$

$$s'(0) = e^{0}\left[0+3\right] = 3.$$

(ج) متى تكون السرعة المتجهه صفر (اول مرة)

$$v(t) = 0$$
$$e^{-2t}\left[-2\sin 3t + 3\cos 3t\right] = 0$$
$$e^{-2t} = 0 \quad , \quad -2\sin 3t + 3\cos 3t = 0$$

لا يوجد حل

$$-2\sin 3t = -3\cos 3t$$
$$\tan 3t = \frac{3}{2}$$

لازم راديان

$$\Rightarrow 3t = 0.98 \Rightarrow t = 0.327.$$

---

(2) يمكن تقريب الدالة $f(x)=e^{x}$ بدالة حدودية من الدرجة الثانية $T(x)=ax^{2}+bx+c$ حيث

$f(x)\approx T(x)$ و تحقق الشروط $f(0)=T(0)\,,\,f'(0)=T'(0)\,,\,f''(0)=T''(0)$

اوجد قيم الثوابت a,b,c التي تجعل $f(x)\approx T(x)$

$$T(x) = ax^2+bx+c$$
$$T'(x) = 2ax+b$$
$$T''(x) = 2a.$$

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x.$$

$$T''(0) = f''(0)$$
$$2a = 1 \Rightarrow a = \tfrac{1}{2}$$
$$T'(0) = f'(0)$$
$$2a(0)+b = 1 \Rightarrow b = 1.$$
$$T(0) = f(0)$$
$$c = 1 \Rightarrow$$
$$\therefore T(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثالثة: التفاضل /// الدرس الثامن: الأشتقاق الضمني والدوال المثلثية العكسية

الاشتقاق الضمني:

تسمى الدالة التي على الصورة $y = f(x)$ علاقة (دالة) صريحة وغير ذلك تسمى علاقة ضمنية

اشتقاق العلاقات الضمنية

$$\frac{d}{dx}g(y) = g'(y) \times \frac{dy}{dx}$$

خطوات ايجاد المشتقة ضمنياً

(1) ايجاد مشتقة كل حد ضمنياً في مكانة

(2) تجميع الحدود التي تحتوي y' في الطرف الايسر

(3) اخراج y' كعامل مشترك

(4) قسمة الطرفين على معامل y'

بعض الامثلة للمشتقات الضمنية

$y \rightarrow y'$

$y^2 \rightarrow 2y\, y'$

$\sqrt{y} \rightarrow \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$

$\sin y \rightarrow \cos y \;\; y'$

$e^y \rightarrow e^y y'$

$lny \rightarrow \dfrac{y'}{y}$

اذا كان: $x^2 + y^3 - 2y = 0$ ، اوجد $\dfrac{dy}{dx}$

$2x + 3y^2 y' - 2y' = 0.$

$3y^2 y' - 2y' = -2x.$

$y'[3y^2 - 2] = -2x$

$y' = \dfrac{-2x}{3y^2 - 2}$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان : $x^2+y^2-3xy=0$ حيث $x \neq y$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

$$2x+2yy'-3(1\cdot y+x\cdot y')=0$$

$$2x+2yy'-3y-3xy'=0$$

$$2yy'-3xy'=3y-2x$$

$$y'(2y-3x)=3y-2x \Rightarrow y'=\frac{3y-2x}{2y-3x}.$$

---

(2) اذا كان : $x^2+y^2=2xy+e^y$ حيث $x \neq y$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

$$2x+2yy'=2y+2xy'+e^y\cdot y'$$

$$2yy'-2xy'-e^y\cdot y'=2y-2x.$$

$$y'[2y-2x-e^y]=2y-2x$$

$$y'=\frac{2y-2x}{2y-2x-e^y}.$$

---

(3) اذا كان : $e^{x^2y}-e^y=x$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

$$e^{x^2y}(2x\cdot y+x^2y')-e^y\cdot y'=1.$$

$$2xye^{x^2y}+x^2e^{x^2y}y'-e^yy'=1$$

$$x^2e^{x^2y}y'-e^yy'=1-2xye^{x^2y}$$

$$y'(x^2e^{x^2y}-e^y)=1-2xye^{x^2y}$$

$$y'=\frac{1-2xye^{x^2y}}{x^2e^{x^2y}-e^y}.$$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان : $x^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$ حيث $x \neq -y$ ، اوجد $\dfrac{dy}{dx}$

الضرب في x+y قبل البداية

$$x^2(x+y) = x-y.$$

$$x^3 + x^2y = x-y.$$

$$3x^2 + 2xy + x^2 \cdot y' = 1-y'$$

$$x^2y' + y' = 1 - 3x^2 - 2xy.$$

$$y'(x^2+1) = 1-3x^2-2xy \Rightarrow y' = \frac{1-3x^2-2xy}{x^2+1}.$$

---

(2) اذا كان : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{2}{x} = 5$ حيث $x \neq -y$ ، اوجد $\dfrac{dy}{dx}$

توحيد مقامات .

$$\frac{x^2+2y}{xy} = 5.$$

$$x^2 + 2y = 5xy.$$

$$2x + 2y' = 5y + 5xy'$$

$$2y' - 5xy' = 5y - 2x.$$

$$y'(2-5x) = 5y-2x \Rightarrow y' = \frac{5y-2x}{2-5x}.$$

---

(3) اذا كان : $\sin(xy) = x$ ، اوجد $\dfrac{dy}{dx}$

$$\cos(xy)\,[\,y + xy'\,] = 1$$

$$y\cos(xy) + xy'\cos(xy) = 1$$

$$xy'\cos(xy) = 1 - y\cos(xy)$$

$$y' = \frac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)}.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان : $e^{4y}-\ln(y^2+3)=2x$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

$$e^{4y}\cdot 4y' - \frac{2yy'}{y^2+3} = 2 .$$

بالضرب في y^2+3 .

$$4e^{4y}(y^2+3)y' - 2yy' = 2(y^2+3).$$

$$y'[4e^{4y}(y^2+3)-2y] = 2(y^2+3).$$

$$y' = \frac{2(y^2+3)}{4e^{4y}(y^2+3)-2y} .$$

(2) اذا كان : $x-2y^2=3e^{x/y}$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

$$1-4yy' = 3e^{x/y}\left[\frac{y-xy'}{y^2}\right]$$

$$y^2-4y^3y' = 3e^{x/y}(y-xy').$$

$$y^2-4y^3y' = 3e^{x/y}y - 3e^{x/y}xy'$$

$$3e^{x/y}xy' - 4y^3y' = 3e^{x/y}y - y^2$$

$$y'(3xe^{x/y}-4y^3) = 3e^{x/y}y-y^2 \Rightarrow y' = \frac{3ye^{x/y}-y^2}{3xe^{x/y}-4y^3}$$

(3) اذا كان : $xy^2+5x=(2y+1)^3$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$

$$1\cdot y^2 + x\cdot 2y\cdot y' + 5 = 3(2y+1)^2\cdot(2y').$$

$$2xyy' - 6(2y+1)^2y' = -5-y^2$$

$$y'(2xy-6(2y+1)^2) = -5-y^2$$

$$y' = \frac{-5-y^2}{2xy-6(2y+1)^2} = \frac{y^2+5}{6(2y+1)^2-2xy} .$$

(1) إذا كان : $x^2y+\ln y = xy+1$ حيث $x \neq y$ ، اوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $(1,e)$

$$2xy + x^2y' + \frac{y'}{y} = y + xy'$$

نعوض بدل $x=1$ و $y=e$

$$2e + \cancel{y'} + \frac{y'}{e} = e + \cancel{y'}$$

$$\frac{y'}{e} = -e \Rightarrow y' = -e^2 \ \#$$

---

(2) إذا كان : $xy + y^2 = 1$ ، اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $(0,-1)$.

نشتق المرة الاولى.

$$1\cdot y + xy' + 2yy' = 0 \ . \xrightarrow{\text{نعوض}} -1 + -2y' = 0 \to y' = \frac{-1}{2} .$$

نشتق المرة الثانية.

$$y' + 1\cdot y' + xy'' + 2y'\cdot y' + 2yy'' = 0$$

$y' = -\frac{1}{2}$ ، $y=-1$ ، $x=0$ نعوض بدل

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0\cdot y'' + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 2(-1)y'' = 0$$

$$-1 + \frac{1}{2} - 2y'' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} - 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = \frac{-1}{4} \ \#$$

---

(3) إذا كان: $x + 2y^3 + xy = 5$ اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

نشتق المرة الاولى.

$$1 + 6y^2y' + 1\cdot y + xy' = 0$$

نشتق المرة الثانية

$$12y\cdot y'\cdot y' + 6y^2y'' + y' + 1\cdot y' + xy'' = 0$$

$$12y(y')^2 + 6y^2y'' + 2y' + xy'' = 0$$

$$y''(6y^2+x) = -2y' - 12y(y')^2$$

$$y'' = \frac{-2y' - 12y(y')^2}{6y^2+x} \ \#$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد معادلة المماس لكل من العلاقات التالية عند النقطة المشار إليها:

(1) $y^2 - xy + x = 5$, $(-1,2)$

$2y \cdot y' - (y + xy') + 1 = 0$

نعوض النقطة .

$4y' - (2 - y') + 1 = 0$

$4y' - 2 + y' + 1 = 0$

$5y' - 1 = 0$

$5y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{5}$

النقطة $(-1,2)$ ، الميل $m = \frac{1}{5}$

معادلة المماس .

$y - 2 = \frac{1}{5}(x+1)$.

---

(2) $x^2y^2 = 3y + 1$, $(2,1)$

$2xy^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y' = 3y'$.

نعوض النقطة .

$4 + 8y' = 3y'$

$5y' = -4$

$y' = -\frac{4}{5}$.

معادلة المماس

$y - 1 = -\frac{4}{5}(x-2)$.

---

(3) $\sqrt{xy} = 2$, $(1,4)$

تربيع الطرفين

$xy = 4$.

$y = \frac{4}{x}$

$y' = -\frac{4}{x^2}$

$m = \frac{-4}{1^2} = -4$

معادلة المماس .

$y - 4 = -4(x-1)$

* ممكن حل السؤال بالا شتقاق الضمني

محمد عمر الخطيب

أوجد معادلة المماس لكل من العلاقات التالية عند النقطة المشار إليها:

(1) $x^2y^2 = 4x$ $(1,2)$

$2x \cdot y^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y' = 4.$

عوض في النقطة .

$8 + 4y' = 4$

$4y' = -4.$

$y' = -1.$

$m = -1.$

معادلة المماس

$y - 2 = -1(x-1).$

---

(2) $2xy + \pi \sin y = 2\pi$ $,\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$2y + 2xy' + \pi \cos y \cdot y' = 0$

عوض في النقطة .

$\pi + 2y' + 0 = 0$

$y' = -\frac{\pi}{2}.$

$m = -\frac{\pi}{2}.$

معادلة المماس

$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(x-1).$

---

(3) $y^2 + xe^y = 2$ $,(2,0)$

$2y \cdot y' + e^y + x e^y \cdot y' = 0$

$0 + 1 + 2 \cdot y' = 0$

$y' = -\frac{1}{2}.$

$y - 0 = -\frac{1}{2}(x-2)$

$y = -\frac{1}{2}x + 1.$

(1) أوجد النقاط التي يكون عندها مماسات أفقية ومماسات رأسية للمعادلة

$$x^2+y^2-3y=0$$

$2x+2yy'-3y'=0$.

$y'(2y-3)=-2x$

$y'=\frac{-2x}{2y-3}$.

المماسات الافقية $m=0$

البسط = صفر

$-2x=0 \Rightarrow x=0$.

نعوض بالمعادلة الاصلية

$y^2-3y=0 \Rightarrow y(y-3)=0$

$y=0,\ y=3$.

مماسات افقية عند

$(0,0)$, $(0,3)$

المماسات الرأسية: المقام = صفر

$2y-3=0 \Rightarrow y=3/2$.

نعوض بالمعادلة الاصلية.

$x^2+(\frac{3}{2})^2-3(\frac{3}{2})=0$

$x^2-\frac{9}{4}=0$

$(x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})=0$

$x=\frac{3}{2},\ x=-\frac{3}{2}$

المماسات الراسية عند $(\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$

---

(2) اوجد مواقع (معادلات) كل المماسات الافقية والراسية للمعادلة

$$x^2+y^2-2y=3$$

$2x+2yy'-2y'=0$.

$x+yy'-y'=0$ (بالقسمة على 2)

$y'(y-1)=-x$.

$y'=\frac{-x}{y-1}$.

المماسات الافقية $m=0$

البسط = صفر

$x=0$.

نعوض بالمعادلة الاصلية

$y^2-2y=3$.

$y^2-2y-3=0$

$(y-3)(y+1)=0$

المعادلات هي $y=3,\ y=-1$

المماسات الرأسية ← المقام = صفر

$y-1=0 \Rightarrow y=1$

نعوض بالمعادلة الاصلية.

$x^2+1-2=3$

$x^2=4$.

$x=-2,\ x=2$

المعادلات هي

$x=-2,\ x=2$

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كان $x=\tan y$ اثبت ان $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+1}$

$x = \tan y.$

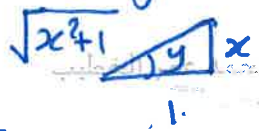
نشتق ضمنياً

$1 = \sec^2 y \cdot y'$

$y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y. \Rightarrow \cos^2 y = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 = \frac{1}{x^2+1}$ #.

من مثلث التحويل.

$\tan y = x$



(2) إذا كانت $6x^2+5=4xy$ ، فأثبت أن: $xy''+2y'=3$

نشتق ضمنياً المرة الاولى

$12x = 4y+4xy'$

$3x = y + xy'$

نشتق المرة الثانية

$3 = y' + 1\cdot y' + xy''$

$3 = 2y' + xy'' \Rightarrow xy''+2y' = 3$ #

(3) إذا كانت $xy=\sin x$ ، فاوجد أن: $2y'+x(y+y'')$

نشتق ضمنياً المرة الاولى.

$xy = \sin x.$

$1\cdot y + xy' = \cos x.$

نشتق المرة الثانية.

$y' + 1\cdot y' + xy'' = -\sin x.$

$2y' + xy'' = -xy$

$2y' + xy + xy'' = 0$

$2y' + x(y+y') = 0$ #

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد ميل المماس لكل منحنى من المنحنيين التاليين عند النقطة $(0,0)$ ثم حدد الزاوية المحصورة بين المماسين

$(a)\quad y = x\sqrt{x+4}$

$$y' = 1\cdot\sqrt{x+4} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+4}}.$$

$$m_1 = \sqrt{4} + 0 = 2.$$

$(b)\quad 2y + x + y^5 = x^5$

$$2y' + 1 + 5y^4y' = 5x^4.$$

عوض النقطة .

$$2y' + 1 = 0.$$

$$y' = \frac{-1}{2}.$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}.$$

نلاحظ ان

$$m_1 \cdot m_2 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -1$$

∴ المماسان متعامدان .

---

(2) اذا كانت معادلة المماس لمنحنى العلاقة $x^2y + ay^2 = b$ عند النقطة $(1,1)$ هي $4x + 3y = 7$ فاوجد قيمة a, b

النقطة (1,1) تحقق معادلة المنحنى .

$$1 + a = b \Rightarrow b = a+1.$$

ميل المستقيم

$$4 + 3y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-4}{3}$$

ميل المنحنى .

$$2xy + x^2y' + 2ayy' = 0$$

عوض النقطة

$$2 + y' + 2ay' = 0$$

$$y'(1+2a) = -2.$$

$$y' = \frac{-2}{1+2a}.$$

ميل المنحنى = ميل المماس.

$$-\frac{4}{3} = \frac{-2}{1+2a}.$$

$$-4 + -8a = -6.$$

$$-8a = -2$$

$$\boxed{a = \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{4} + 1 = 5/4$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

مشتقات الدوال المثلثية المعكوسة

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}f'(x)$$

اذا كان $y=\sin^{-1}x$ فأثبت ان $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

الاثبات .

$$y=\sin^{-1}x$$

$$\sin y = x$$

نشتق ضمنياً .

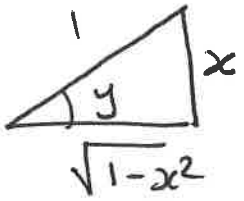
$$\cos y \cdot y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \sec y \,.$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \# \,.$$

نعلم ان

$$\sin y = x$$



أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=\cos^{-1}2x$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

(2) $y=\sin^{-1}e^{2x}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}.$$

(3) $y=\tan^{-1}(\frac{1}{x^2})$ $= \cot^{-1}x^2$

$$y' = \frac{-1}{(x^2)^2+1} \cdot 2x = \frac{-2x}{x^4+1}.$$

عكس كل تفاضل $\tan^{-1}$

(4) $y=\sec^{-1}\ln x$

$$y = \frac{1}{|\ln x|\sqrt{(\ln x)^2-1}} \cdot \frac{1}{x}$$

(5) $y=\cot^{-1}\sin x$

$$y' = \frac{-1}{\sin^2 x+1} \cdot \cos x = \frac{-\cos x}{\sin^2 x+1}.$$

(6) $y=\csc^{-1}(\sqrt{x})$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=\sin(\cos^{-1}x^2)$

$y' = \cos(\cos^{-1}x^2)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}\,2x = \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

---

(2) $y=e^{\tan^{-1}x}$

$y' = e^{\tan^{-1}x}\cdot\frac{1}{x^2+1} = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{x^2+1}.$

---

(3) $y=\tan^{-1}(\cos 2x)$

$y' = \frac{1}{(\cos 2x)^2+1}\cdot -\sin 2x\cdot 2 = \frac{-2\sin 2x}{\cos^2 2x+1}$

---

(4) $y=\sin^{-1}\sin x = x$

$y' = 1$

---

(5) $y=x\sin^{-1}x$

$y' = 1\cdot\sin^{-1}x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

---

(6) $y=\sqrt{2+\tan^{-1}x}$

$y' = \frac{\frac{1}{x^2+1}}{2\sqrt{2+\tan^{-1}y}} = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{2+\tan^{-1}x}}.$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد مجال الدالة $f(x)$ في الحالات التالية

$(a)\quad f(x)=\sin^{-1}(2x-1)$

$-1 \leq 2x-1 \leq 1$

$0 \leq 2x \leq 2$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D=[0,1]$

$(b)\quad f(x)=\sin^{-1}(\sqrt{x})$

$0 \leq x \leq 1$

$D=[0,1]$.

---

(2) اوجد مجال الدالة $f'(x)$ في الحالات التالية

$(a)\quad f(x)=\sin^{-1}(2x-1)$

$-1 < 2x-1 < 1$

$0 < 2x < 2$

$0 < x < 1 \Rightarrow D=[0,1]$

$(b)\quad f(x)=\sin^{-1}(\sqrt{x})$

$0 < x < 1$

$D=(0,1)$.

---

(3) اثبت أن الدالة $y=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ هي دالة ثابتة، ثم اوجد قيمة هذا الثابت

لإيجاد قيمة الثابت نختار اي عدد ضمن مجال الدالة ولكن صفر

$y=\sin^{-1}0+\cos^{-1}0$

$=0+\frac{\pi}{2}$

$\boxed{y=\pi/2}$

نجد المشتقة y'

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$=0$

بما ان المشتقة تساوي صفر فان الدالة الاصلية ثابتة

محمد عمر الخطيب

(1) تحدد المعادلة $(P+\frac{5}{V^2})(V-0.03)=9.7$ العلاقة بين الحجم V والضغط P لغاز معين في ظروف خاصة. اوجد $\frac{dV}{dP}$ عند النقطة $(5,1)$

$$(P+5V^{-2})(V-0.03)=9.7$$

نشتق ضمنيا".

$$(1-10V^{-3}\cdot V')(V-0.03)+(P+5V^{-2})(V')=0$$

نعوض النقطة $(5,1)$

$$(1-10V')(1-0.03)+(5+5)V'=0$$

$$(1-10V')(0.97)+10V'=0$$

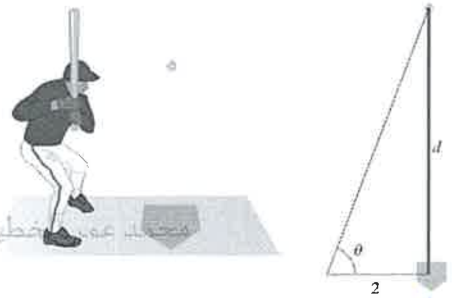
$$0.97-9.7V'+10V'=0$$

$$0.97+0.3V'=0$$

$$0.3V'=0.97 \Rightarrow V'=\frac{0.97}{0.3}=\frac{97}{30}.$$

---

(2) يقف لاعب كرة البيسبول على بعد قدمين من اللوح الرئيس للكرة ويضرب كرتة بشكل افقي وبسرعة متجهة $130\,ft/s$، ما معدل التغير في زاوية النظر للاعب لمتابعة الكرة عندما تعبر الكرة اللوح الرئيسي



الحل

$$\tan\theta=\frac{x}{2}.$$

$$\theta=\tan^{-1}(\frac{x}{2})$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=0}=\frac{1}{0+1}\cdot\frac{1}{2}(-130)$$

$$=-65\ rad/s$$

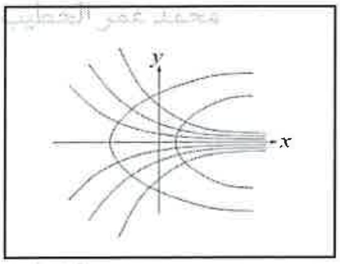
نعتبر المسافة التي تقطعها الكرة هي x

فان

$$\frac{dx}{dt}=-130\ ft/s.$$

المطلوب

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=0}=??$$



(1) وضح ان عائلة المنحنيات $y=\frac{c}{x}$ $\xrightarrow{}$ $xy=c$ و $y^2=x^2+k$ تكون متعامدة

(بين ان المماسات للمنحنيات متعامدة عند نقطة التقاطع)

$$y=\frac{c}{x}$$

$$y'=\frac{-c}{x^2}.$$

$$y'=\frac{-xy}{x^2}=\frac{-y}{x}. \Rightarrow m_1=\frac{-y}{x}$$

$$y^2=x^2+k.$$

$$2y\cdot y'=2x.$$

$$y'=\frac{2x}{2y}=\frac{x}{y}. \Rightarrow m_2=\frac{x}{y}.$$

$$m_1\cdot m_2=\frac{-y}{x}\cdot\frac{x}{y}=-1$$. ∴ المماسات متعامدة

مساعدة

اوجد ميل المعادلة الأولى m_1

واجعلة فقط بدلالة x و y

اوجد ميل المعادلة الثانية m_2

واجعلة فقط بدلالة x و y

بين ان

$m_1\times m_2=-1$

---

(2) وضح ان عائلة المنحنيات $y=cx^3$ و $x^2+3y^2=k$ تكون متعامدة

$$y=cx^3$$

$$y'=3cx^2=3\cdot\frac{y}{x^3}\cdot x^2=\frac{3y}{x}. \Rightarrow m_1=\frac{3y}{x}.$$

$$x^2+3y^2=k$$

$$2x+6y\cdot y'=0$$

$$6yy'=-2x$$

$$y'=\frac{-2x}{6y}=\frac{-x}{3y} \Rightarrow m_2=-\frac{x}{3y}.$$

$$m_1\cdot m_2=\frac{3y}{x}\cdot\frac{-x}{3y}=-1$$

∴ المماسات متعامدة :

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثالثة: التفاضل /// الدرس التاسع: دوال القطع الزائد

الدوال الزايدية

$$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x+\cosh x=e^{x}$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sec} x=\frac{1}{\cosh x}$$
$$\operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}$$

مشتقة الدوال الزايدية

$$\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x=\operatorname{sech}^{2} x$$
$$\frac{d}{dx}\coth x=-\operatorname{csch}^{2} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x=\overset{\Downarrow}{-}\operatorname{sech} x\tanh x$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x=-\operatorname{csch} x\coth x$$

مشتقة الدوال الزايدية العكسية

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x=\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x=\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x=\frac{1}{1-x^{2}}$$
$$\frac{d}{dx}\coth^{-1} x=\frac{1}{1-x^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^{2}}}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x=\frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^{2}}}$$

تذكر ان

$$\sinh^{-1} x=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$$
$$\cosh^{-1} x=\ln(x+\sqrt{x^{2}-1}) \qquad ,|x|\geq 1$$
$$\tanh^{-1} x=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) \qquad |x|<1$$

محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \sinh(3x-1)$

$y' = \cosh(3x-1) \cdot 3 .$

---

(2) $y = \tanh x^2$

$y' = \text{Sech}^2 x \cdot 2x .$

---

(3) $y = \text{csch}\,4x$

$y' = -4\,\text{csch}4x\,\coth 4x \cdot 4$

---

(4) $y = \text{sech}\sqrt{x}$

$y' = -\text{sech}\sqrt{x}\,\tanh\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} .$

---

(5) $y = \sinh e^{2x}$

$y' = \text{Cosh}\, e^{2X} \cdot e^{2X} \cdot 2 .$

---

(6) $y = \cosh^4 x \;= (\cosh x)^4$

$y' = 4\,\text{Cosh}^3 x \cdot \sinh x .$

---

(7) $y = \sqrt{\sinh x + 1}$

$$y' = \frac{\cosh x}{2\sqrt{\sinh x - 1}} .$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y=\sinh^3 x+3\sinh x$

$y'=3\sinh^2 x\cdot\cosh x+3\cosh x$

$=3\cosh x(\sinh^2 x+1)=3\cosh x\cdot\cosh^2 X=3\cosh^3 x$

---

(2) $y=x\cosh x$

$y'=1\cdot\cosh x+x\cdot\sinh x.$

---

(3) $y=\dfrac{x}{x+\cosh x}$

$$y'=\frac{1\cdot(x+\cosh x)-x(1+\sinh x)}{(x+\cosh x)^2}.$$

---

(4) $y=e^{2x}\cosh 3x$

$y'=e^{2x}\cdot 2\cosh 3x+e^{2x}\cdot\sinh 3x\cdot 3.$

---

(5) $y=x^2\cosh^2 x$

$y'=2x\cdot\cosh^2 x+x^2\cdot 2\cosh x\cdot\sinh x.$

---

(6) $xy=x+\cosh y^2$. اشتقاق ضمني

$1\cdot y+xy'=1+\sinh y^2\cdot 2y\cdot y'.$

$xy'-2yy'\sinh y^2=1-y.$

$y'(x-2y\sinh y^2)=1-y\Rightarrow y'=\dfrac{1-y}{x-2y\sinh y^2}.$

محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \sinh^{-1}\sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x})^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \cdot = \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} .$$

(2) $y = \cosh^{-1}\tan x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(\tan x)^2-1}} \cdot \sec^2 x .$$

(3) $y = \tanh^{-1}(x^2)$

$$y' = \frac{1}{1-(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1-x^4} .$$

(4) $y = \tanh^{-1}\sin x$

$$\cdot y' = \frac{1}{1-\sin^2 x} \cdot \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x} = \sec x .$$

(5) $y = \operatorname{sech}^{-1} e^{4x}$

$$y' = \frac{-1}{e^{4x}\sqrt{1-(e^{4x})^2}} \cdot e^{4x} \cdot 4 .$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{1-e^{8x}}} .$$

محمد عمر الخطيب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = x^2 \sinh^{-1} 4x$

$$y' = 2x \sinh^{-1} 4x + x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(4x)^2+1}} \cdot 4 .$$

(2) $y = \sqrt{1 + \tanh^{-1} 2x}$

$$y' = \frac{\frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2}{2\sqrt{1+\tanh^{-1} 2x}} = \frac{1}{(1+4x^2)\sqrt{1+\tanh^{-1} 2x}}$$

(3) $y = e^{\tanh^{-1} x}$

$$y' = e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{1-x^2}$$

(4) $y = \sin 2x \cosh 3x$

$$y' = 2\cos 2x \cdot \cosh 3x + \sin 2x \cdot \sinh 3x \cdot 3 .$$

(5) $xy = y^2 + \cosh y$ ا اشتقاق ضمني

$$1 \cdot y + xy' = 2y \cdot y' + \sinh y \cdot y' .$$

$$xy' - 2yy' - \sinh y \cdot y = -y .$$

$$y'(x - 2y - \sinh y) = -y \Rightarrow y' = \frac{-y}{x - 2y - \sinh y} .$$

محمد عمر الخطيب

(1) أوجد قانون صريح للدالة $\sinh^{-1} x$

$y = \sinh^{-1} x$

$\sinh y = x.$

$x = \sinh y$

نعلم ان

$e^{y} = \sinh y + \cosh y$

$= \sinh y + \sqrt{\cosh^2 y}$

$= \sinh y + \sqrt{\sinh^2 y + 1}$

$= x + \sqrt{x^2+1}$.

ناخذ Ln للطرفين

$\ln e^{y} = \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]$

$y = \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right].$

$\therefore \sinh^{-1} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]$ #

(2) أوجد قانون صريح للدالة $\tanh^{-1} x$

$y = \tanh^{-1} x.$

$\tanh y = x.$

$$\frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} = x.$$

$$\frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} \times \frac{e^{y}}{e^{y}} = x.$$

$$\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x.$$

$e^{2y} - 1 = x e^{2y} + x$

$e^{2y} - x e^{2y} = x + 1$

$e^{2y}(1 - x) = x + 1$

$$e^{2y} = \frac{x+1}{1-x}.$$

$$2y = \ln \frac{x+1}{1-x}.$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{1-x}$$ #

(3) أوجد

(a) $\sinh^{-1} 1 = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) = 0.88$

(b) $\cosh^{-1} 2 = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) = 1.3$

(c) $\tanh^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{3/2}{1/2} = \frac{1}{2} \ln 3 = 0.54$

محمد عمر الخطيب

(1) اثبت أن الدالة $y = \cosh^2 x - \sinh^2 x$ هي دالة ثابتة ، ثم اوجد قيمة هذا الثابت

* تم اثبات هذا السؤال في الوحدة الأولى بطريقة مختلفة .

او اثبت أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ باستخدام التفاضل

$$y' = 2\cosh x \cdot \sinh x - 2\sinh x \cosh x .$$

$= 0$ لكل قيم x

∴ y دالة ثابتة . ولتكن C

نختار اي عدد وليكن $x = 0$ لايجاد قيمة الثابت C.

$$C = \cosh^2 0 - \sinh^2 0 = 1 \Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \ \#$$

---

(2) اذا كانت $f(x) = \tanh x$

(أ) اوجد $f(0)$

$$f(0) = \tanh 0 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0 .$$

(ب) بين ان الدالة $f(x)$ متزايدة على R

$$f'(x) = \operatorname{sech}^2 x . > 0$$

∴ الدالة $f(x)$ متزايدة

(ج) اوجد خطوط التقارب الافقية للدالة $f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

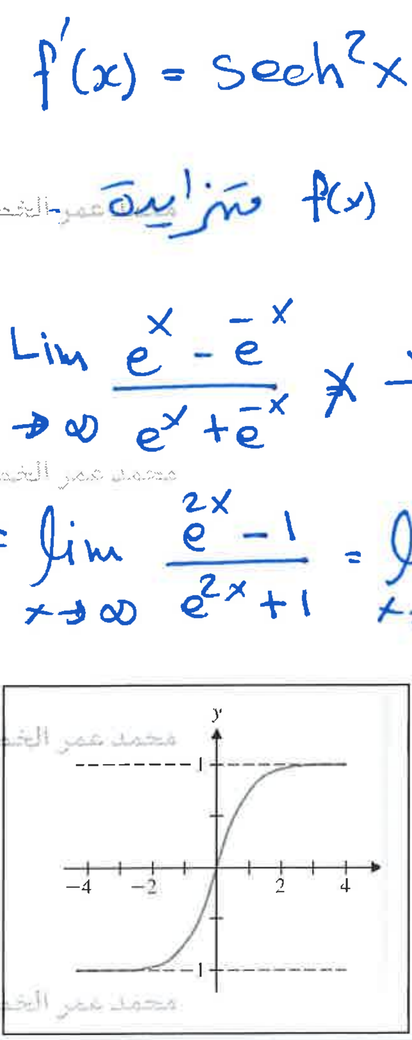
$y = -1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} .$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1$$

$y = 1$

(ج) ارسم الدالة $f(x)$



ارجع حفظ

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثالثة : التفاضل /// الدرس العاشر: نظرية القيمة المتوسطة

نظرية القيمة المتوسطة للمشتقات

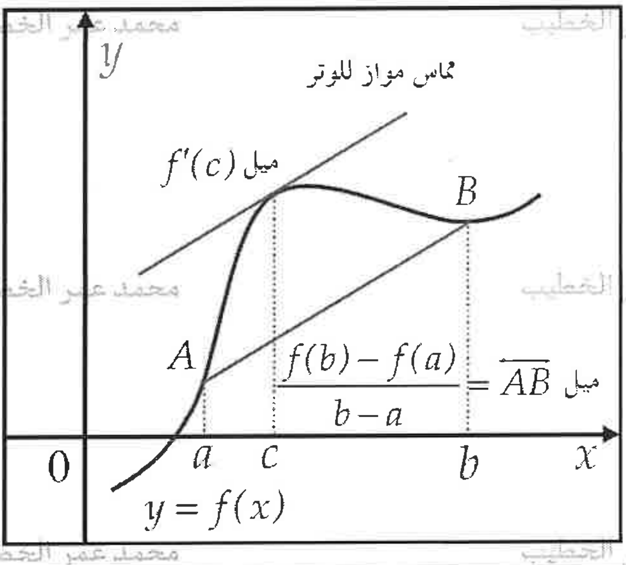
إذا كانت الدالـة $y = f(x)$

- متصلة على الفترة المغلقة [a , b]
- قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a , b)

فأنه توجد نقطة واحدة علي الأقل c

في الفترة (a , b) يكون عندهـــا

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



الدالة لا تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة إذ لم يتحقق أحد الشرطين أو كلاهما بمعني إذا كانت الدالة غير متصلة على الفترة [a ,b] أو غير قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)

نظرية رول

في نظرية القيمة المتوسطة اذا كانت $f(a)=f(b)$ فأن يوجد c على الاقل تنتمي الى (a,b)**التي تحقق** $f'(c)=0$ **وتسمى نظرية رول**

نظرية (العلاقة بين عدد جذور الدالة ومشتقتها)

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a,b)ويوجد n من الجذور للدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ فأن للدالة $f'(x)$ على الاقل $n-1$ من الجذور تنتمي الى الفترة (a,b)

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a,b)ويوجد جذرين للدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ فأن للدالة $f'(x)$ على الاقل جذر واحد ينتمي الى الفترة (a,b)

ملاحظة : اذا لم يكن للدالة $f'(x)$ اي جذور فان الدالة $f(x)$ لها على الاكثر جذر واحد

اي من الدوال التالية تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,3]$ مع ذكر السبب:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ لا لان الدالة غير متصلة عند $x=1$.

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ نعم لان الدالة متصلة ع $[0,3]$ وقابلة للاشتقاق $(0,3)$

(3) $f(x)=|x-1|$ لا لان الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(4) $f(x)=\left|(x-2)^2\right|$ $=(x-2)^2$. نعم لان الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق

(5) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ لا لان الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(6) $f(x)=\sqrt{x}$ نعم رغم ان الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

(7) $f(x)=\tan x$ $=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ لا لان الدالة غير متصلة عند $x=\dfrac{\pi}{2}$

(8) $f(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ 2x-4 & x\le 0\end{cases}$ لا لان الدالة غير متصلة عند $x=0$

$2x-4 \;|\; 2x$

$\leftarrow -4 \quad 0 \quad 0 \rightarrow$

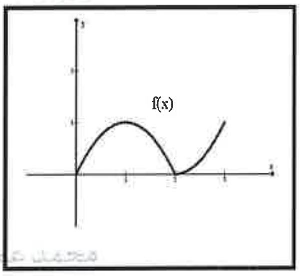
(9) $f(x)=\begin{cases}x^2+x & x>2\\ 5x-4 & x\le 2\end{cases}$

f $\;5x-2 \;|\; x^2+x$
$\leftarrow 6 \quad 2 \quad 6 \rightarrow$

f' $\;5 \;|\; 2x+1$
$\leftarrow 5 \quad 2 \quad 5 \rightarrow$

نعم لان الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق .

(10)

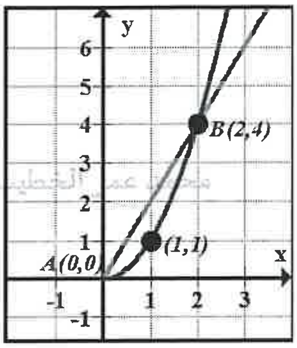


لا لان الدالة غير قابلة للاشتقاق

عند $x=2$

محمد عمر الخطيب

1) بين أن الدالة $f(x)=x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,2]$ ثم اوجد قيمة c



الدالة $f(x)$ متصلة ع $[0,2]$

الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق ع $(0,2)$

∴ الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة.

∴ يوجد ع الأقل $c\in(0,2)$ وتحقق -

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$2c=\frac{4-0}{2-0}$$

$$2c=2$$

$$c=1\in(0,2)$$

---

2) بين أن الدالة $f(x)=x^3+1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,1]$

ثم أوجد قيمة c

الدالة $f(x)$ متصلة ع $[-3,1]$ وقابلة للاشتقاق ع $(-3,1)$.

∴ الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة.

∴ يوجد ع الأقل $c\in(-3,1)$ وتحقق

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(-3)}{1--3}$$

$$3c^2=\frac{2-(-26)}{4}$$

$$3c^2=7$$

$$c^2=\frac{7}{3}$$

$$c=-\sqrt{\frac{7}{3}}\in(-3,1)$$ ✓

$$c=\sqrt{\frac{7}{3}}\notin(-3,1)$$ ×.

---

3) اذا كانت $f(x)=x^3-2x^2+x$ حيث x تقع في الفترة $[0,2]$

اوجد قيمة c التي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

الدالة $f(x)$ متصلة ع $[0,2]$ وقابلة للاشتقاق ع $(0,2)$

∴ يوجد ع الأقل $c\in(0,2)$ وتحقق

ليس مطلوب بالسؤال

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$3c^2-4c+1=\frac{2-0}{2-0}$$

$$3c^2-4c+1=1$$

$$3c^2-4c=0$$

$$c(3c-4)=0$$

$$c=0\notin(0,2)$$ ×

$$c=\frac{4}{3}\in(0,2)$$ ✓

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت $f(x)=4-x+\sin x$ حيث x تقع في الفترة $[-\pi,\pi]$

$f'(x)=-1+\cos x$

اوجد قيمة C التي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(c)=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi-(-\pi)}$$

$$-1+\cos c=\frac{4-\pi-(4+\pi)}{2\pi}.$$

$$-1+\cos c=0.$$

$$\cos c=1$$

c 0 ✓

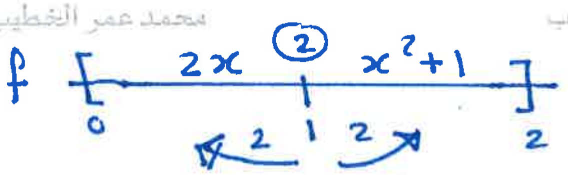
c π ليس

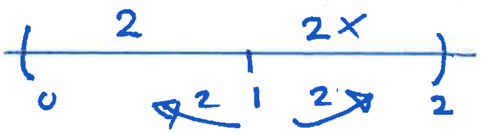
$c=0\in(-\pi,\pi).$

---

(2) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ x^2+1 & 1<x\le 2\end{cases}$ حيث x تقع في الفترة $[0,2]$

بين ان الدالة f تحقق فرضيات نظرية القيمة المتوسطة على هذه الفترة ثم اوجد قيمة C





الدالة متصلة على $[0,2]$

الدالة قابلة للاشتقاق على $(0,2)$

∴ الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة.

∴ يوجد $c\in(0,2)$ على الاقل تحقق

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$f'(c)=\frac{5-0}{2-0}$$

$$f'(c)=\frac{5}{2}$$

الحالة الاولى

(1) $2=\frac{5}{2}$ لا يوجد حل.

(2) $2c=\frac{5}{2}\Rightarrow c=5/4\in(0,2)$

منه $c=\frac{5}{4}.$

محمد عمر الخطيب

(1) بفرض ان الدالة f تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[2,5]$ وكان $2 \le f'(x) \le 5$

فبين ان $6 \le f(5)-f(2) \le 15$ تحقق نظرية

$$f'(c) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2}$$

$$f'(c) = \frac{f(5)-f(2)}{3}$$

بما ان $2 \le f'(x) \le 5$

$$2 \le f'(c) \le 5$$

$$2 \le \overset{f'(c)}{\frac{f(5)-f(2)}{3}} \le 5$$

$$6 \le f(5)-f(2) \le 15$$

#

(2) اذا كانت $f(x)=x^2+a\,x$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,3]$ وكان $f'(c)=1$

حيث $c \in (0,3)$ اوجد

(أ) قيمة الثابت a

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0}$$

$$1 = \frac{(9+3a)-0}{3}$$

$$3 = 9+3a$$

$$-6 = 3a$$

$$\boxed{a=-2}$$

(ب) قيمة الثابت c

$$f'(c) = 1$$

$$2c+a=1$$

$$2c-2=1$$

$$2c=3$$

$$c=3/2$$

محمد عمر الخطيب

(1) بين ان الدالة $f(x)=x^3-x^2$ تحقق فرضيات نظرية رول على الفترة $[0,1]$ ثم اوجد قيمة c

الدالة متصلة على $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق ع $(0,1)$

$f(0)=0 \quad , \quad f(1)=0$

∴ الدالة $f(x)$ تحقق شروط نظرية رول .

∴ يوجد $c\in(0,1)$ ع الاقل تحقق

$f'(c)=0$

$3c^2-2c=0$

$c(3c-2)=0$

$c=0 \notin (0,1)$

$c=\frac{2}{3} \in (0,1)$ ✓

---

(2) اذا كانت $f(x)=\sin x+\cos x$ فاوجد قيمة (قيم) c التي تحقق نظرية رول على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(c)=0$

$\cos c-\sin c=0$

$\cos c=\sin c$

$\tan c=1$

$c \begin{cases} Q_1 \to c=\frac{\pi}{4} \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ Q_3 \to c=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4} \notin \end{cases}$ $\pi/4$

∴ $c=\frac{\pi}{4}$ فقط .

---

(3) اذا كانت: $f(x)=x+\frac{4}{x}$ اوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول على الفترة $[1,4]$

$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}.$

$f'(c)=0$

$1-\frac{4}{c^2}=0$

$1=\frac{4}{c^2}$

$c^2=4$

$c=-2 \notin (1,4)$ × .

$c=2 \in (1,4)$ ✓

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1 اثبت ان للدالة $f(x)=x^5+4x-1$ لها جذر واحد فقط

أ) نبحث عن عددين لهم صورتان مختلفين في الإشارة .

$f(0)=-1$ و $f(1)=4$

والدالة $f(x)$ متصلة ع الفترة $(0,1)$

∴ $f(x)$ تحقق نظرية القيمة الوسطية

∴ يوجد للدالة جذر واحد ع الأقل في الفترة $(0,1)$ ... ①

ب) $f'(x)=5x^4+4>0$ ليس لها جذور .

∴ $f(x)$ لها جذر واحد ع الأكثر . من نتيجة نظرية القيمة المتوسطة ②

من ① و ② الدالة $f(x)$ لها جذر واحد .

(2 اثبت ان للمعادلة $x^4+6x^2-1=0$ حلان بالضبط

الاثبات : لتكن $f(x)=x^4+6x^2-1$

أ) بما ان الدالة $f(x)$ متصلة حيث $f(0)=-1$, $f(-1)=6$

فان للدالة جذر واحد ع الأقل في الفترة $(-1,0)$

وبما ان $f(0)=-1$, $f(1)=6$ فان للدالة جذر ع الأقل في الفترة $(0,1)$

∴ للدالة $f(x)$ جذرين ع الأقل من نظرية القيمة الوسطية

ب) $f'(x)=4x^3+6x$ المشتقة لها جذر واحد فقط .

$f'(x)=0$

$4x^3+6x=0$

$x(4x^2+6)=0$

$x=0$

∴ للدالة الاصلية $f(x)$ لها جذرين ع الأكثر من نظرية القيمة المتوسطة .

من ① و ② الدالة لها جذرين فقط

∴ المعادلة لها حلين بالضبط .

(1) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\sin a| \le |a|$ لكل $a \neq 0$

الاثبات: لتكن $g(x) = \sin x$ على الفترة الحقيقية حدودها $0, a$

الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق.

∴ تحقق نظرية القيمة المتوسطة.

∴ يوجد c تنتمي الى الفترة المفتوحة وتحقق.

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(c)$$

$$\frac{\sin a - 0}{a - 0} = \cos c.$$

$$\frac{\sin a}{a} = \cos c$$

$$\left|\frac{\sin a}{a}\right| = |\cos c| \le 1$$

$$\frac{|\sin a|}{|a|} \le 1$$

$$|\sin a| \le |a| \ \#$$

---

(2) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\sin u - \sin v| \le |u - v|$ لكل $u \neq v$

الاثبات: لتكن الدالة $g(x) = \sin x$ على الفترة التي حدودها u, v

الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق.

∴ تحقق نظرية القيمة المتوسط.

∴ يوجد c تنتمي الى الفترة وتحقق.

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = f'(c)$$

$$\frac{\sin u - \sin V}{u - v} = \cos c.$$

$$\left|\frac{\sin u - \sin v}{u - v}\right| = |\cos c| \le 1$$

$$\frac{|\sin u - \sin v|}{|u - v|} \le 1$$

$$|\sin u - \sin v| \le 1$$

$\#$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\cos x - 1| \le |x|$ لكل $x \ne 0$

الاثبات : لتكن الدالة $g(\overset{u}{x}) = \cos\overset{u}{x}$. على الفترة التي حدودها $0, x$

الدالة متصلة و قابلة للاشتقاق فهي تحقق نظرية القيمة المتوسط .

∴ يوجد c على الاقل تنتمي الى الفترة و تحقق

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin c.$$

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \sin c$$

$$\frac{|\cos x - 1|}{|x|} = |\sin c| \le 1$$

$$\frac{|\cos x - 1|}{|x|} \le 1 \Rightarrow |\cos c - 1| \le |x|$$ #

(2) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\tan^{-1} a| < |a|$ لكل $a \ne 0$

الاثبات : لتكن الدالة $g(x) = \tan^{-1} x$ على الفترة التي حدودها $0, a$

الدالة متصلة و قابلة للاشتقاق فهي تحقق نظرية القيمة المتوسط .

∴ يوجد c على الاقل تنتمي الى الفترة و تحقق .

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = f'(c)$$

$$\frac{\tan^{-1} a - 0}{a - 0} = \frac{1}{c^2+1}$$

$$\frac{\tan^{-1} a}{a} = \frac{1}{c^2+1}$$

$$\frac{|\tan^{-1} a|}{|a|} = \left|\frac{1}{c^2+1}\right| \le 1$$

$$|\tan^{-1} a| \le |a|$$ #

(3) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|x| < |\sin^{-1} x|$ لكل $0 < |x| < 1$

الاثبات : لتكن الدالة $g(\overset{u}{x}) = \sin^{-1} \overset{u}{x}$. على الفترة التي حدودها $0, x$

الدالة متصلة و قابلة للاشتقاق فهي تحقق نظرية القيمة المتوسط .

∴ يوجد c تنتمي الى الفترة وتحقق

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-0} = f'(c)$$

$$\frac{\sin^{-1} x}{x} = \frac{1}{\sqrt{1\ c^2}}.$$

$$\frac{|\sin^{-1} x|}{|x|} = \left|\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right| \ge 1$$

$$|\sin^{-1} x| \ge |x|$$

$$|x| \le |\sin^{-1} x|$$ #

(1) اذا كانت $f'(x) = 0$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I فأثبت ان $f(x)$ دالة ثابتة على الفترة I

الاثبات : لتكن $a, b \in I$. حيث $a < b$.

بما ان f قابلة للاشتقاق ع I فهي قابلة للاشتقاق ع الفترة $[a, b]$ ،

∴ تحقق نظرية القيمة المتوسطة .

∴ يوجد $c \in (a, b)$ حيث

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$f(b) - f(a) = 0$

$f(b) = f(a)$

∴ الدالة f ثابتة .

---

(2) اذا كانت $f'(x) = g'(x)$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I فأثبت ان $g(x) = f(x) + c$ على الفترة I

الاثبات : لتكن $h(x) = g(x) - f(x)$

بما ان ، ان $h(x)$ قابلة للاشتقاق ع I . حيث

$h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$

فإن الدالة $h(x)$ دالة ثابتة .

اي ان $h(x) = c$

$g(x) - f(x) = c \Rightarrow g(x) = f(x) + c$ #

---

(3) اذا كانت $f(x), g(x)$ دوال متصلة على $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a, b) حيث $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ فأثبت ان للدالتين مماسان متوازيان عند نقطة ما في الفترة (a, b)

الاثبات : لتكن $h(x) = f(x) - g(x)$. ع الفترة $[a, b]$.

الدالة $h(x)$ متصلة وقابلة حيث

$h(a) = f(a) - g(a) = 0$

$h(b) = f(b) - g(b) = 0$

∴ $h(x)$ تحقق نظرية رول

∴ يوجد $c \in (a, b)$ حيث $h'(c) = 0$

$f'(c) - g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = g'(c) \Rightarrow$ لهم مماسان متوازيان .

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a,b) حيث $f(a)=a, f(b)=b$ فأثبت انه يوجد عدد مثل c على الاقل تنتمي الى (a,b) بحيث $f'(c)=1$

الاثبات: لتكن $g(x) = f(x) - x$. ع الفترة $[a,b]$

الدالة g متصلة وقابلة للاشتقاق . حيث

∴ $g(a) = f(a) - a = 0$

$g(b) = f(b) - b = 0$

∴ $g(x)$ تحقق نظرية رول

∴ يوجد ع الاقل $c \in (a,b)$ حيث $g'(c) = 0$

$f'(c) - 1 = 0 \Rightarrow f'(c) = 1$ #

---

(2) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a,b) ويوجد جذرين للدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ فأثبت ان للدالة $f'(x)$ على الاقل جذر واحد ينتمي الى الفترة (a,b)

الاثبات: لتكن r_1 ، r_2 جذور الدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$

الدالة $f(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق ع الفترة $[r_1, r_2]$

حيث $f(r_1) = 0$

$f(r_2) = 0$

∴ الدالة $f(x)$ تحقق نظرية رول ع الفترة $[r_1, r_2]$

∴ $f(x)$ تحقق نظرية رول .

∴ يوجد $c \in (r_1, r_2)$ حيث $f'(c) = 0$

∴ للدالة f' جذر ع الاقل .

محمد عمر الخطيب

تكون الدالة $f(x)$ دالة متزايدة اذا كانت $f(b)>f(a)$ لكل $b>a$

وتكون دالة متناقصة اذا كانت $f(b)<f(a)$ لكل $b>a$

---

(1) (أ) اذا كانت $f'(x)>0$ لكل قيم x فاثبت ان الدالة $f(x)$ متزايدة

الاثبات : لتكن $a<b$.

الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق ع الفترة (a,b)

∴ تحقق نظرية القيمة المتوسطة .

∴ يوجد $c\in(a,b)$ تحقق

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$$

$f(b)-f(a)>0 \Rightarrow f(b)>f(a)$ #

متزايدة .

(ب) بين ان الدالة $f(x)=\tan^{-1}x$ متزايدة على R

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}>0 \Rightarrow$$

$f(x)$ دالة متزايدة .

---

(2) (أ) اذا كانت $f'(x)<0$ لكل قيم x فاثبت ان الدالة $f(x)$ متناقصة

الاثبات : لتكن $a<b$.

الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق ع الفترة (a,b)

∴ تحقق نظرية القيمة المتوسطة .

∴ يوجد $c\in(a,b)$ وتحقق

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0.$$

$f(b)-f(a)<0 \Rightarrow f(b)<f(a)$ #

الدالة متناقصة

(ب) بين ان الدالة $f(x)=3-x+e^{-x}$ متناقصة متزايدة على R

$$f'(x)=-1+e^{-x}(-1)$$

$$=-(1+e^{-x})<0$$

∴ الدالة متناقصة

محمد عمر الخطيب

هذه القاعدة خارج
منهج الفصل الأول

اقدم لكم قاعدة يمكن الاستعانه بها للتأكد من الحل الجبري وهي

قاعدة لوبيتال

اذا كانت g, f دوال قابلة للاشتقاق في جوار النقطة c حيث $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ او $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ فأن

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^3}{1}=4.$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2+4x-1}{1}=6.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{\sin x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{\cos x}=1.$

(4) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to3}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1}=\frac{1}{4}.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$

محمد عمر الخطيب

جدول قواعد الاشتقاق الخاصة والعامة

المشتقة	الدالة		المشتقة	الدالة	
$\sec^2(x)$	$\tan(x)$	23	صفر	C (ثابت)	1
$-csc^2(x)$	$\cot(x)$	24	a	ax	2
$\sec(x)\cdot\tan(x)$	$\sec(x)$	25	nx^{n-1}	x^n	3
$-\csc(x)\cdot\cot(x)$	$\csc(x)$	26	$u'\pm v'$	$u\pm v$	4
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}(x)$	27	$c.u'$	$c\cdot u$	5
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1}(x)$	28	$u'v+uv'$	$u\cdot v$	6
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}(x)$	29	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	7
$\frac{-1}{1+x^2}$	$\cot^{-1}(x)$	30	$\frac{-c.v'}{v^2}$	$\frac{c}{v}$	8
$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\sec^{-1}(x)$	31	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	9
$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\csc^{-1}(x)$	32	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	10
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	33	$n(u)^{n-1}\cdot u'$	$(u)^n$	11
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	34	$f'(g(x)).g'(x)$	$(f\circ g)(x)$	12
$sech^2(x)$	$\tanh(x)$	35	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$	$y=f(u)$ $u=g(x)$	13
$-csch^2(x)$	$\coth(x)$	36	$\frac{1}{f'(g(x))}$	$g=f^{-1}(x)$	14
$-\text{sech}(x)\cdot\tanh(x)$	$\text{sech}(x)$	37	$(a)^x\ln(a)$	$(a)^x$	15
$-\text{csch}(x)\cdot\coth(x)$	$\text{csch}(x)$	38	$(a)^u\cdot u'\cdot\ln(a)$	$(a)^u$	16
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sinh^{-1}(x)$	39	e^x	e^x	17
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\cosh^{-1}(x)$	40	$e^u\cdot u'$	e^u	18
$\frac{1}{1-x^2}$	$\tanh^{-1}(x)$	41	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	19
$\frac{1}{1-x^2}$	$\coth^{-1}(x)$	42	$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	20
$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$\text{sech}^{-1}(x)$	43	$\cos(x)$	$\sin(x)$	21
$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$	$\text{csch}^{-1}(x)$	44	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	22
يتم الأشتقاق حسب قواعد الأشتقاق ولكن كلما تم أشتقاق y نضع بجوارها y'				الأشتقاق الضمني	45

محمد عمر الخطيب