الوحدة 8

الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

السابق

- مثلتَ الدوال وتحولات الدوال بيانيًا.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تمثيل الدوال الأسيّة واللوغاريتمية بيانيًا.
  - حل المعادلات والمتباينات الأسيّة واللوغاريتمية.
  - حل المسائل التي تضمن النمو الأسي والاضمحلال الأسي.

لماذا؟

- **العلوم** تسير الرياضيات والعلوم جنبًا إلى جنب. سواء أكنت تدرس الكيمياء أو الأحياء أو علم الأحافير أو علم الحيوان أو علم الإنسان. ستحتاج إلى مهارات رياضيات قوية.

في هذه الوحدة، ستتعلم جوانب الرياضيات المتعلقة بالعلوم مثل فيروسات الكمبيوتر والجماعات الأحيائية للحشرات ونمو البكتيريا وانقسام الخلية وعلم الفلك والأعاصير القمعية والزلازل.

Chapter sourced from Exponential and Logarithmic Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter 7 © 2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي

أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. ارجع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

تدريب سريع

حوّل إلى أبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغيرٌ يساوي صفرًا.

1. $a^4a^3a^5$
2. $(2xy^3z^2)^3$
3. $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$
4. $\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$
5. **الكثافة** كثافة الجسم تساوي كتلته مقسومة على حجمه. جسم كتلته 7.5×10^3 g وحجمه 1.5×10^3 cm مكعبة. ما كثافة هذا الجسم؟

جـد معكوس كل دالة مما يلي. ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا.

6. $f(x) = 2x + 5$
7. $f(x) = x - 3$
8. $f(x) = -4x$
9. $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$
10. $f(x) = \frac{x-1}{2}$
11. $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدّد ما إذا كان كل زوجين من الدوال يمثلان دوال معكوسة.

12. $f(x) = x - 6$, $g(x) = x + 6$
13. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 2x - 5$
14. **الطعام** يتقاضى مطعم بيتزا AED 12 مقابل بيتزا الجبن متوسطة الحجم و AED 2 مقابل أي إضافات. إذا كانت الدالة $f(x) = 2x + 12$ تمثل تكلفة البيتزا متوسطة الحجم مع x إضافات، فجـد $f^{-1}(x)$ مع تفسير المعنى.

مراجعة سريعة

مثال 1

حوّل إلى أبسط صورة. $\frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$. افترض أنه لا يوجد متغيرٌ يساوي صفرًا.

$\frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$

$= \frac{a^6b^2c^4}{a^6b^3c^8}$ بسّط البسط باستخدام قاعدة أس الأس وبسّط المقام باستخدام قاعدة ضرب الأسس

$= \frac{1}{bc^4}$ أو $b^{-1}c^{-4}$ بسّط باستخدام قانون ناتج قسمة الأسس

مثال 2

جـد معكوس الدالة $f(x) = 3x - 1$.

الخطوة 1 استبدل $f(x)$ بـ y في المعادلة الأصلية:
$f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$.

الخطوة 2 بدّل بين x وy: $x = 3y - 1$.

الخطوة 3 حل المعادلة لإيجاد قيمة y.

$x = 3y - 1$ المعكوس

$x + 1 = 3y$ بإضافة 1 إلى كل طرف من طرفي المعادلة

$\frac{x+1}{3} = y$ بقسمة كل طرف على 3

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = y$ بسّط

الخطوة 4 عوّض عن y بـ $f^{-1}(x)$.

$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

يشير مصطلح المرابحة إلى مبلغ من المال يُدفع أو يُستلم عند اقتراض المال أو إقراضه. إذا اقترض عميل مالًا من البنك، يدفع العميل إلى البنك مرابحة مقابل استخدام مال البنك. إذا وضع العميل مالًا في حساب بنكي، يدفع البنك للعميل مرابحة مقابل استخدام البنك لأموال العميل.

ويُسمى المبلغ المالي المقترض أو المدخر في البداية رأس المال. يُقصد بنسبة المرابحة النسبة التي يكسبها العميل أو يدفعها أثناء فترة زمنية محددة. ويُقصد بالمرابحة البسيطة مبلغ المرابحة الذي يكسبه العميل أو يدفعه بعد تطبيق نسبة المرابحة على رأس المال.

المرابحة البسيطة (I) هي ناتج ضرب ثلاث قيم: رأس المال (P) ونسبة المرابحة المكتوبة في صورة عدد عشري (r) والفترة الزمنية (t): $I = P \times r \times t$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

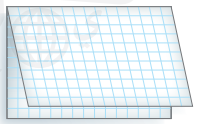
ستتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراسة هذه الوحدة.
لكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

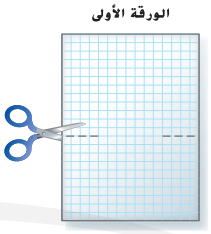
العلاقات والدوال اللوغاريتمية والأسيّة

أعد هذه المطوية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك حول هذه الوحدة عن الدوال الأسيّة واللوغاريتمية. ابدأ بورقتين من ورق المربعات.

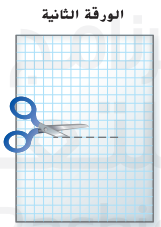
1 **اطوهما** من المنتصف بالعرض.



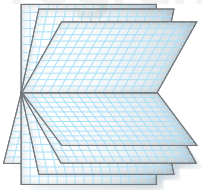
2 **في** الورقة الأولى، قص 5 cm على طول المطوية من الطرفين.



3 **في** الورقة الثانية، قص الورقة من المنتصف على مسافة 5 cm من الطرفين.



4 **أدخل** الورقة الأولى عبر الورقة الثانية ورتّب صفحات المطوية. سمّ الصفحات بأرقام الدروس.



المفردات الجديدة

العربية	English
الدالة الأسيّة	exponential function
النمو الأسي	exponential growth
خط التقارب	asymptote
عامل النمو	growth factor
الاضمحلال الأسي	exponential decay
عامل الاضمحلال	decay factor
المعادلة الأسيّة	exponential equation
المرابحة المركبة	compound interest
المتباينة الأسيّة	exponential inequality
لوغاريتم	logarithm
الدالة اللوغاريتمية	logarithmic function
المعادلة اللوغاريتمية	logarithmic equation
المتباينة اللوغاريتمية	logarithmic inequality
اللوغاريتم العادي	common logarithm
صيغة تغيير الأساس	change of base formula
الأساس الطبيعي e	natural base, e
الأساس الطبيعي	natural base
الدالة الأسيّة	exponential function
اللوغاريتم الطبيعي	natural logarithm

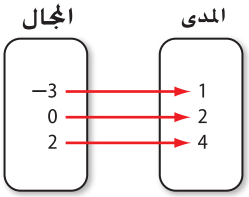
مراجعة المفردات

المجال مجموعة تضم كل إحداثيات x الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقة ما

الدالة علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

المدى مجموعة تضم كل إحداثيات y الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقة ما

$\{(-3,1), (0, 2), (2, 4)\}$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 8-1

التمثيل البياني للدوال الأسيّة

السابق:
- لقد قمتَ بتمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًّا.

الحالي:
1 رسم منحنيات النمو الأسية.
2 رسم منحنيات الاضمحلال الأسية.

لماذا؟
- هل سبق لك استلام رسالة عبر البريد الإلكتروني تطلب منك إعادة توجيهها إلى 5 أصدقاء؟ إذا أعاد كل من هؤلاء الأصدقاء الخمسة توجيه الرسالة إلى 5 من أصدقائه حيث أعاد كل منهم أيضًا توجيهها إلى 5 من أصدقائه، فإنَّ عدد الأشخاص الذين يستلمون رسالة البريد الإليكتروني ينمو أسيًّا.

يمكن استخدام المعادلة $y = 5^x$ لتمثيل هذه الحالة، حيث يمثل x عدد مرات إعادة توجيه رسالة البريد الإلكتروني.

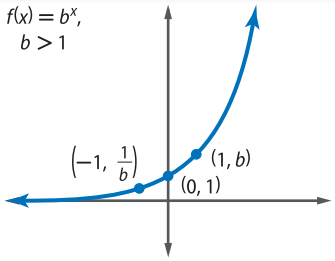
المفردات الجديدة
- exponential function — الدالة الأسيّة
- exponential growth — النمو الأسي
- asymptote — خط التقارب
- growth factor — عامل النمو
- exponential decay — الاضمحلال الأسي
- decay factor — عامل الاضمحلال

ممارسات في الرياضيات
3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 دالة النمو الأسي

يطلق على الدالة مثل $y = 5^x$ التي يكون الأساس فيها ثابتًا والأس متغيرًا مستقلًا، اسم **دالة أسيّة**. تعد دالة النمو الأسي إحدى أنواع الدالة الأسيّة. تُكتب دالة **النمو الأسي** بالصيغة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$. يتضمن التمثيل البياني للدالة الأسيّة **خط تقارب**، وهو الخط الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسة لدوال النمو الأسي



الدوال الرئيسة: $f(x) = b^x$, $b > 1$

نوع التمثيل البياني: متصل، وواحد إلى واحد، ومتزايد

المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: كل الأعداد الحقيقية الموجبة

خط التقارب: المحور x

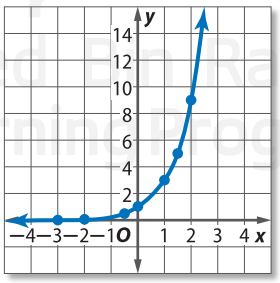
التقاطع: $(0, 1)$

مثال 1 التمثيل البياني لدوال النمو الأسي

مثّل بيانيًّا $y = 3^x$. حدّد المجال والمدى.

أنشئ جدولًا للقيم. ثم مثّل النقاط بيانيًّا وارسم التمثيل البياني.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$y = 3^x$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$3^0 = 1$
x	1	$\frac{3}{2}$	2	
$y = 3^x$	$3^1 = 3$	$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27}$	$3^2 = 9$	



يضم المجال كل الأعداد الحقيقية ويضم المدى كل الأعداد الحقيقية الموجبة.

تمرين موجّه

1. مثل بيانيًّا $y = 4^x$. حدّد المجال والمدى.

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يوضح التمثيل البياني للدالة $f(x) = b^x$ تمثيلًا بيانيًّا أصليًا للدوال الأسيّة. يمكن تطبيق الأساليب نفسها المستخدمة لتحويل التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال الأسيّة

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

h الإزاحة الأفقية	k الإزاحة الرأسيّة
h من الوحدات إلى اليمين إذا كان h عددًا موجبًا $\|h\|$ من الوحدات إلى اليسار إذا كان h عددًا سالبًا	k من الوحدات إلى أعلى إذا كان k عددًا موجبًا $\|k\|$ من الوحدات إلى أسفل إذا كان k عددًا سالبًا

a الاتجاه والشكل

إذا كان $a < 0$، ينعكس التمثيل البياني في المحور x.

إذا كان $|a| > 1$، فسيتمدد التمثيل البياني رأسيًّا.
إذا كان $0 < |a| < 1$، فسينضغط التمثيل البياني رأسيًّا.

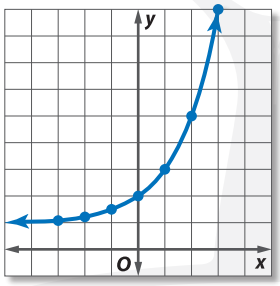
مثال 2 التمثيل البياني للتحويلات

مثّل كل دالة بيانيًّا. حدّد المجال والمدى.

a. $y = 2^x + 1$

تمثل المعادلة إزاحة للتمثيل البياني لـ $y = 2^x$ بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.

x	$y = 2^x + 1$
-3	$2^{-3} + 1 = 1.125$
-2	$2^{-2} + 1 = 1.25$
-1	$2^{-1} + 1 = 1.5$
0	$2^0 + 1 = 2$
1	$2^1 + 1 = 3$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$2^3 + 1 = 9$



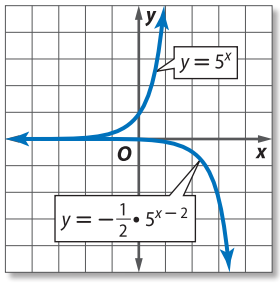
المجال = {كل الأعداد الحقيقية}؛ المدى = $\{y \mid y > 1\}$

b. $y = -\frac{1}{2} \times 5^{x-2}$

تمثل المعادلة تحويلًا للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$.

مثّل بيانيًّا الدالة $y = 5^x$ وحوّل التمثيل البياني.

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني في المحور x وينضغط رأسيًّا.
- $h = 2$: تمت إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لم تحدث إزاحة للتمثيل البياني رأسيًّا.



المجال = {كل الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{y \mid y < 0\}$

تمرين موجّه

2A. $y = 2^{x+3} - 5$

2B. $y = 0.1(6)^x - 3$

نصيحة دراسية

الضبط تذكر أنّ سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني عندما تقترب قيمة x من اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة. في المثال 2a، عندما تقترب قيمة x من اللانهاية، تقترب قيمة y من اللانهاية. في المثال 2b، عندما تقترب قيمة x من اللانهاية، تقترب قيمة y من اللانهاية السالبة.

برنامج محمد بن راشد للذكاء
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك نمذجة النمو الأسي بزيادة نسبة مئوية ثابتة خلال فترات زمنية محددة باستخدام الدالة التالية.

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

يمكن استخدام الدالة لإيجاد المقدار $A(t)$ بعد الفترات الزمنية t. حيث يمثل a المقدار الابتدائي ويمثل r النسبة المئوية للزيادة للفترة الزمنية. لاحظ أنّ الأساس في التعبير الأسي، $r + 1$، يُسمى **عامل النمو**.

تُستخدم دالة النمو الأسي غالبًا في نمذجة النمو السكاني.

الربط بالحياة اليومية

أرسل مكتب الإحصاء السكاني بالولايات المتحدة مسح المجتمع الأمريكي عبر البريد إلى ما يقرب إلى 1 من كل 480 أسرة.

المصدر: مكتب الإحصاء السكاني

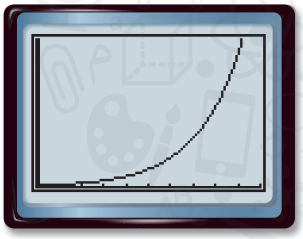
مثال 3 من الحياة اليومية التمثيل البياني لدوال النمو الأسي

الإحصاء السكاني أُجري أول إحصاء للسكان للبلد في عام 1790. بلغ التعداد السكاني في ذلك الوقت 3,929,214. منذ ذلك الحين، يزيد عدد السكان سنويًا بمعدل 2.03% تقريبًا. ارسم تمثيلًا بيانيًّا يوضح النمو السكاني منذ عام 1790.

أولًا، اكتب معادلة باستخدام $a = 3{,}929{,}214$ و$r = 0.0203$.

$$y = 3{,}929{,}214(1.0203)^t$$

ثم مثّل المعادلة بيانيًّا.



[0, 250] scl: 25 × [0, 400,000,000] scl: 40,000,000

تمرين موجّه

3. المعرفة المالية من المتوقع أن يزداد الإنفاق في سن المراهقة بمعدل 3.5% سنويًا من AED 79.7 مليارًا في عام 2006. ارسم تمثيلًا بيانيًّا يوضح زيادة الإنفاق.

نصيحة دراسية

المرابحة يوضح قانون المرابحة البسيطة، $i = prt$، النمو الخطي عبر الزمن. في حين يوضح قانون المرابحة المركبة، $A(t) = a(1 + r)^t$، النمو الأسي عبر الزمن. وهذا سبب تحقيق الاستثمارات ذات المرابحة المركبة أموالًا أكثر.

2 الاضمحلال الأسي

النوع الثاني من الدوال الأسيّة هو **الاضمحلال الأسي**.

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسة لدوال الاضمحلال الأسي

الدوال الرئيسة: $f(x) = b^x,\ 0 < b < 1$

نوع التمثيل البياني: متواصل، واحد إلى واحد، تناقصي

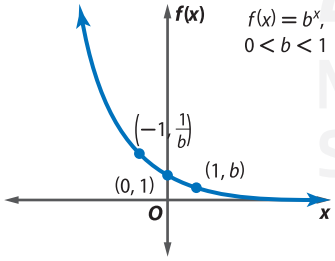
المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: الأعداد الحقيقية الموجبة

خط التقارب: المحور x

التقاطع: (0, 1)

النموذج



يمكن تحويل التمثيلات البيانية لدوال الاضمحلال الأسي بالطريقة نفسها المستخدمة مع دوال النمو الأسي.

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

نصيحة دراسية

الاضمحلال الأسي تأكد من عدم الخلط بين تغيير الأبعاد الذي يكون فيه $|a| > 1$ والاضمحلال الأسي الذي يكون فيه $0 < b < 1$.

مثال 4 التمثيل البياني لدوال الاضمحلال الأسي

مثّل كل دالة بيانيًّا. حدّد المجال والمدى.

a. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{27}}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$

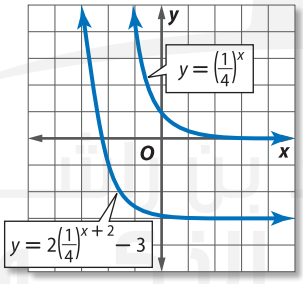
يضم المجال كل الأعداد الحقيقية ويضم المدى كل الأعداد الحقيقية الموجبة.

b. $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$

تمثل المعادلة تحويلًا للتمثيل البياني لـ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

افحص كل معلمة.

- $a = 2$: يمتد التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = -2$: تمت إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: تم إزاحة التمثيل البياني بمقدار 3 وحدات إلى أسفل.



يضم المجال كل الأعداد الحقيقية ويضم المدى كل الأعداد الحقيقية الأكبر من -3.

تمرين موجّه

4A. $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

4B. $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

كما في النمو الأسي، يمكنك نمذجة الاضمحلال الأسي بنسبة مئوية ثابتة للتناقص خلال فترات زمنية محددة باستخدام الدالة التالية.

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

الأساس في التعبير الأسي، $r - 1$، يُسمى **عامل الاضمحلال**.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

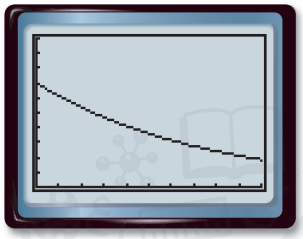
مثال من الحياة اليومية 5 التمثيل البياني لدوال الاضمحلال الأسي

الشاي يحتوي كوب الشاي الأخضر على 35 mg من الكافيين. يستطيع المراهقون في المتوسط التخلص من حوالي 12.5% من الكافيين من الجسم في الساعة.

a. ارسم تمثيلًا بيانيًّا يمثل كمية الكافيين المتبقية بعد شرب كوب من الشاي الأخضر.

$$\begin{aligned} y &= a(1 - r)^t \\ &= 35(1 - 0.125)^t \\ &= 35(0.875)^t \end{aligned}$$

مثّل المعادلة بيانيًّا.



[0, 10] scl: 1 × [0, 50] scl: 5

b. قدّر كمية الكافيين الموجودة في جسم مراهق بعد مرور 3 ساعات من تناول كوب من الشاي الأخضر.

$$\begin{aligned} y &= 35(0.875)^t && \text{المعادلة من الجزء } a \\ &= 35(0.875)^3 && \text{عوض عن } t \text{ بـ } 3 \\ &\approx 23.45 && \text{استخدم الحاسبة} \end{aligned}$$

سيكون الكافيين في جسم المراهق حوالي 23.45 mg بعد مرور 3 ساعات.

تمرين موجّه

5. يحتوي كوب الشاي الأسود على 68 mg من الكافيين. ارسم تمثيلًا بيانيًّا يمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم مراهق بعد شرب كوب من الشاي الأسود. احسب كمية الكافيين الموجودة في الجسم بعد مرور ساعتين من تناول كوب من الشاي الأسود.

الربط بالحياة اليومية

بعد الماء، يعد الشاي المشروب الأكثر استهلاكًا في الولايات المتحدة ويمكن العثور عليه عند أكثر من 80% من الأسر الأمريكية. أكثر من نصف الأمريكيين يتناولون الشاي يوميًا.

المصدر: جمعية الشاي بالولايات المتحدة الأمريكية

تحقق من فهمك

المثالان 1–2 **مثّل كل دالة بيانيًّا. حدّد المجال والمدى.**

1. $f(x) = 2^x$

2. $f(x) = 5^x$

3. $f(x) = 3^{x-2} + 4$

4. $f(x) = 2^{x+1} + 3$

5. $f(x) = 0.25(4)^x - 6$

6. $f(x) = 3(2)^x + 8$

مثال 3 **7. التفكير المنطقي** ينتشر فيروس عبر شبكة أجهزة كمبيوتر بحيث يصيب 25% من أجهزة الكمبيوتر كل دقيقة. إذا بدأ الفيروس من جهاز واحد فقط، فمثل الدالة التي توضح انتشار الفيروس خلال الساعة الأولى.

مثال 4 **مثّل كل دالة بيانيًّا. حدّد المجال والمدى.**

8. $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$

9. $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$

10. $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$

11. $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

مثال 5 **12. المعرفة المالية** تنخفض قيمة سيارة رياضية متعددة الأغراض بمعدل 15% كل عام. ارسم تمثيلًا بيانيًّا لقيمة السيارة الرياضية متعددة الأغراض لأول 20 عامًا بعد الشراء الأول.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

المثالان 1–2 **مثّل كل دالة بيانيًّا. حدّد المجال والمدى.**

13. $f(x) = 2(3)^x$ **14.** $f(x) = -2(4)^x$ **15.** $f(x) = 4^{x+1} - 5$

16. $f(x) = 3^{2x} + 1$ **17.** $f(x) = -0.4(3)^{x+2} + 4$ **18.** $f(x) = 1.5(2)^x + 6$

مثال 3 **19. العلوم** تزداد الجماعة الأحيائية للخنافس في مستعمرة الخنافس بمعدل 30% كل أسبوع لمدة 10 أسابيع. بلغ العدد الابتدائي للخنافس 65 خنفساء. مثّل الدالة التي توضح هذه الحالة بيانيًّا.

مثال 4 **مثّل كل دالة بيانيًّا. حدّد المجال والمدى.**

20. $f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$ **21.** $f(x) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3} - 6$ **22.** $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{x+5} + 8$

23. $f(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} - 2$ **24.** $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$ **25.** $f(x) = -\frac{5}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{x+4} + 2$

مثال 5 **26. الحضور** تراجعت نسبة حضور مباريات فريق كرة السلة بمقدار 5% لكل مباراة طوال موسم الخسارة. ارسم تمثيلًا بيانيًّا للدالة يوضح الحضور إذا أقيمت 15 مباراة محلية وحضر أول مباراة 23,500 مشجع.

27. الهواتف يمكن استخدام الدالة $P(x) = 2.28(0.9^x)$ لتمثل عدد الهواتف المدفوعة بالملايين على مدار x من الأعوام منذ عام 1999.

a. صنّف الدالة إلى نمو *أسّي* أو *اضمحلال أسي*، وحدد عامل النمو أو الاضمحلال. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

b. وضح ما يمثله تقاطع $P(x)$ وخط التقارب في هذه الحالة.

28. الصحة كل يوم، يتم التخلص من 10% من دواء معين من الجسم.

a. صنّف الدالة التي تمثل هذه الحالة إلى نمو *أسي* أو *اضمحلال أسي*، وحدد عامل النمو أو الاضمحلال. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

b. كم يتبقى من الكمية الأصلية في الجسم بعد 9 أيام؟

c. إذا توجَّب عدم أخذ جرعة ثانية عند وجود أكثر من 50% من الكمية الأصلية في الجسم، فمتى يُدوَّن على ملصق الدواء أنه من الآمن أخذ جرعة ثانية؟ صمم الملصق واشرح استنتاجك.

29. الاستنتاج يتبع تسلسل الأعداد نمطًا يكون فيه العدد التالي 125% من العدد السابق. العدد الأول في النمط هو 18.

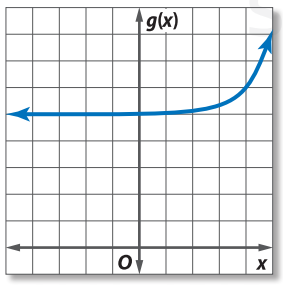
a. اكتب الدالة التي تمثل هذه الحالة.

b. صنّف الدالة إلى إما نمو *أسي* أو *اضمحلال أسي*، وحدد عامل النمو أو الاضمحلال. ثم مثّل الدالة بيانيًّا لأول 10 أعداد.

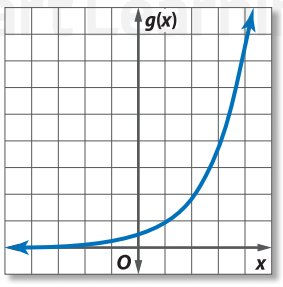
c. ما قيمة العدد العاشر؟ قرّب إلى أقرب عدد كلي.

لكل تمثيل بياني، تكون الدالة $f(x)$ هي الدالة الرئيسة و$g(x)$ هو تحويل $f(x)$. استخدم التمثيل البياني لتحديد معادلة $g(x)$.

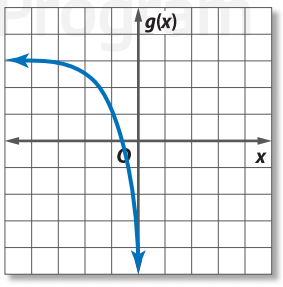
30. $f(x) = 3^x$



31. $f(x) = 2^x$



32. $f(x) = 4^x$



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

33 التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستخدم الجداول التالية للدوال الأسيّة $f(x)$ و$g(x)$ و$h(x)$.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.5	2	1	-1	-5	-13	-29

x	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	11	23	47	95	191	383

x	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	2.5	2.25	2.125	2.0625	2.0313	2.0156

a. بيانيًّا مثل الدوال بيانيًّا في $-1 \le x \le 5$ في تمثيلات بيانية متفرقة.

b. لفظيًا سجل أي دالة ذات معامل سالب. اشرح استنتاجك.

c. تحليليًا سجل أي دالة تمت إزاحة تمثيلها البياني إلى اليسار.

d. تحليليًا حدد أي الدوال تمثل نماذج نمو وأيها تمثل نماذج اضمحلال.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

34. التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *أحيانًا* أو *دائمًا* أو لا تصح *مطلقًا*. اشرح استنتاجك.

a. دالة أسيّة بالصيغة $y = ab^{x-h} + k$ تتقاطع مع المحور y.

b. دالة أسيّة بالصيغة $y = ab^{x-h} + k$ تتقاطع مع المحور x.

c. تُعد الدالة $f(x) = |b|^x$ دالة نمو أسي إذا كان b عددًا صحيحًا.

35. النقد طُلب من صالح وأيمن تمثيل الدوال التالية بيانيًّا. اعتقد صالح أنها متشابهة لكن أيمن لم يتفق معه. أيهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

x	y
0	2
1	1
2	0.5
3	0.25
4	0.125
5	0.0625
6	0.03125

دالة أسيّة
بمعدل اضمحلال $\frac{1}{2}$
وكمية أولية تساوي 2

36. تحفيز تتحلل مادة بمعدل 35% يوميًا. بعد مرور 8 أيام، تبقى 8 mg من المادة. فما عدد المليجرامات في البداية؟

37. مسألة غير محددة الإجابة أعطِ مثالًا لقيمة b حيث تمثل الدالة $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$ اضمحلالًا أسيًّا.

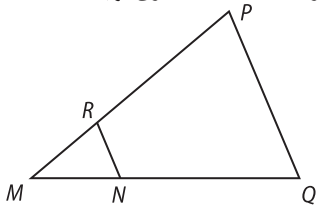
38. الكتابة في الرياضيات اكتب الإجراء اللازم لتحويل التمثيل البياني للدالة $g(x) = b^x$ إلى التمثيل البياني للدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$. برر كل خطوة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

39. إجابة شبكية في الشكل، $\overline{PQ} \parallel \overline{RN}$ و $QN = 12$ و $MN = 6$ و $RN = 4$. ما طول $\overline{PQ}$؟



40. يملك ريّان نقودًا كافية لشراء 12 قرصًا مدمجًا. إذا كانت تكلفة كل قرص مدمج أقل بمقدار AED 0.20، فسيتمكن ريّان من شراء قرصين مدمجين إضافيين. كم يبلغ المال الذي سينفقه ريّان على الأقراص المدمجة؟

A AED16.80
B AED16.40
C AED15.80
D AED15.40

41. سيحضر 100 طالب لعبة السقوط إذا بلغت تكلفة التذكرة AED 30. لكل زيادة في السعر بمقدار AED 5، يقل عدد الطلاب الحاضرين بمقدار 10 طلاب. ما السعر الذي سيحقق أعلى نسبة مبيعات؟

F AED 30
G AED 35
H AED 40
J AED 45

42. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول جزّ جاسم العشب في ساعتين. جزّ طارق العشب نفسه في ساعة ونصف. كم دقيقة تقريبًا يستغرقها كل من جاسم وطارق إذا تعاونا معًا في جزّ العشب؟

A 28 دقيقة
B 42 دقيقة
C 51 دقيقة
D 1.2 ساعة
E 1.4 ساعة

مراجعة شاملة

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي:

43. $\sqrt{y+5} = \sqrt{2y-3}$

44. $\sqrt{y+1} + \sqrt{y-4} = 5$

45. $10 - \sqrt{2x+7} \le 3$

46. $6 + \sqrt{3y+4} < 6$

47. $\sqrt{d+3} + \sqrt{d+7} > 4$

48. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{9+x} > 0$

حوّل إلى أبسط صورة.

49. $\dfrac{1}{y^{\frac{2}{5}}}$

50. $\dfrac{xy}{\sqrt[3]{z}}$

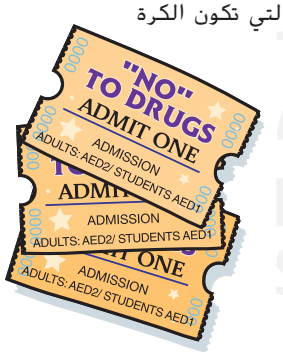
51. $\dfrac{3x + 4x^2}{x^{-\frac{2}{3}}}$

52. $\sqrt[6]{27x^3}$

53. $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3}}$

54. $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{4}}}$

55. كرة القدم توضح المعادلة $y = -0.005x^2 + x + 5$ مسار كرة قدم يتم تمريرها عبر ملعب، حيث يمثل المحور x المسافة التي تحركتها الكرة أفقيًّا بالمتر، ويمثل المحور y ارتفاع الكرة فوق مستوى الأرض بالمتر. كم تبلغ تقريبًا المسافة التي تكون الكرة قد تحركتها أفقيًّا عندما تعود إلى مستوى الأرض؟



56. خدمة المجتمع يُعرض برنامج عن التوعية بالمخدرات على مسرح يسع 300 شخص. وسيتم التبرع بالعائدات لمركز محلي للمعلومات عن المخدرات. إذا كان يتعين على كل شخصين بالغين إحضار طالب واحد على الأقل، فما أقصى مبلغ مالي يمكن جمعه؟

مراجعة المهارات

حوّل إلى أبسط صورة. افترض عدم وجود متغير يساوي 0.

57. $f^{-7} \cdot f^4$

58. $(3x^2)^3$

59. $(2y)(4xy^3)$

60. $\left(\frac{3}{5}c^2f\right)\left(\frac{4}{3}cd\right)^2$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

8-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

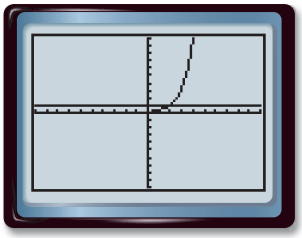
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسيّة من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام ميزة table. لفعل ذلك، ستكتب المعادلات في صورة نظام معادلات.

النشاط 1

حُـلّ المعادلة $3^{x-4}=\frac{1}{9}$.

الخطوة 1 مثّل كل طرف من طرفي المعادلة بيانيًّا باعتباره دالة مستقلة. أدخل 3^{x-4} كقيمة **Y1**. تأكد من وجود أقواس حول الأس.

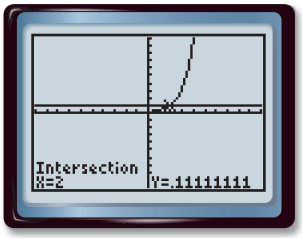
أدخل $\frac{1}{9}$ كقيمة **Y2**. ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا.



[−10, 10] scl: 1 × [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 2 استخدم ميزة **intersect**.

يمكنك استخدام خاصية **intersect** في قائمة **CALC** لتقريب الزوج المرتب للنقطة التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

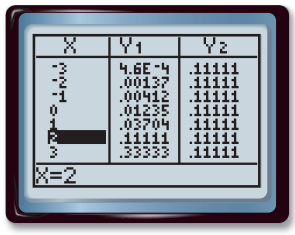


[−10, 10] scl: 1 × [−1, 1] scl: 0.1

تبين شاشة الحاسبة أنّ إحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان هي 2. أي أنّ حل المعادلة يساوي 2.

الخطوة 3 استخدم ميزة **TABLE**.

يمكنك أيضًا استخدام ميزة **TABLE** لتحديد نقطة تقاطع المنحنيين.



X	Y1	Y2
-3	4.6E-4	.11111
-2	.00137	.11111
-1	.00412	.11111
0	.01235	.11111
1	.03704	.11111
2	.11111	.11111
3	.33333	.11111

X=2

يعرض الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكل تمثيل بياني. افحص الجدول لإيجاد قيمة x بحيث تكون قيم y للتمثيل البياني متساوية.

عند $x=2$، تبلغ قيمة y في كلتا الدالتين $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$. إذًا، حل المعادلة يساوي 2.

التحقق عوّض بـ 2 عن x في المعادلة الأصلية.

$3^{x-4}\stackrel{?}{=}\frac{1}{9}$	المعادلة الأصلية
$3^{2-4}\stackrel{?}{=}\frac{1}{9}$	عوّض بـ 2 عن x
$3^{-2}\stackrel{?}{=}\frac{1}{9}$	بسّط
$\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$ ✓	الحل صحيح

يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسيّة.

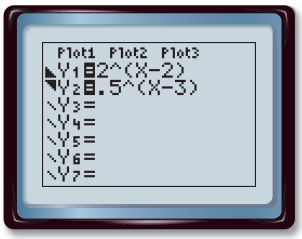
(يُتبَع في الصفحة التالية)

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة تابع

النشاط 2

حُـلّ المتباينة $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$.



الخطوة 1 أدخل المتباينات المرتبطة.

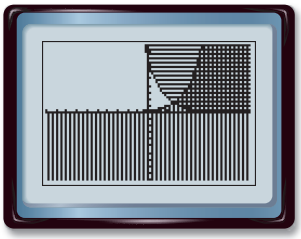
أعد كتابة المسألة كنظام متباينات.

أول متباينة هي $y \geq 2^{x-2}$ أو $y \leq 2^{x-2}$. نظرًا لأن هذه المتباينة تتضمن إشارة *أقل من أو يساوي*، ظلل المنطقة أسفل المنحنى.

أولًا أدخل الحد، ثم استخدم مفتاحي السهم و ENTER لاختيار رمز تظليل المنطقة أسفل المنحنى.

المتباينة الثانية هي $y \geq 0.5^{x-3}$. ظلل المنطقة أعلى المنحنى، حيث إنَّ هذه المتباينة تتضمن إشارة *أكبر من أو يساوي*.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2 ^ (X,T,θ,n − 2) ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ .5 ^ (X,T,θ,n − 3)



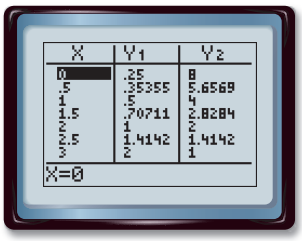
[−10, 10] scl: 1 × [−10, 10] scl: 1

الخطوة 2 تمثيل النظام بيانيًّا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

قيم x للنقاط في منطقة تداخل التظليل هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. باستخدام ميزة **intersect**، تستطيع استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

الخطوة 3 استخدم ميزة **TABLE**.



تحقق باستخدام ميزة **TABLE**. قم بإعداد الجدول لإظهار قيم x بزيادات قدرها 0.5.

خطوات العملية على الحاسبة:
2nd [TBLSET] 0 ENTER .5 ENTER 2nd [TABLE]

لاحظ أنّه لكل قيم x الأكبر من $x = 2.5$. تكون **Y2** < **Y1**. يؤكد هذا أنّ حل المتباينة هو $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

التمارين

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي:

1. $9^{x-1} = \frac{1}{81}$
2. $4^{x+3} = 2^{5x}$
3. $5^{x-1} = 2^{x}$
4. $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$
5. $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$
6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$
7. $16^{x-1} > 2^{2x+2}$
8. $3^{x} - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$
9. $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$
10. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يصلُح أسلوب التمثيل البياني لنظام المعادلات أو المتباينات لحل المعادلات والمتباينات الأسيّة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 8-2

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

السابق
- قمتَ بتمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.

الحالي
1 حل المعادلات الأسيّة.
2 حل المتباينات الأسيّة

لماذا؟
- تتجه العضوية في مواقع التواصل الاجتماعي عبر شبكة الإنترنت نحو الزيادة الأسيّة. يمكن نمذجة نمو العضوية في أحد المواقع الإلكترونية بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث يمثل x عدد السنوات منذ عام 2004 ويمثل y عدد الأعضاء بالمليون.

يمكنك استخدام $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد كم سيشترك من الأعضاء في عام محدد، أو لتحديد العام الذي وصلت فيه العضوية إلى مستوى معين.

المفردات الجديدة
المعادلة الأسيّة
exponential equation
المرابحة المركبة
compound interest
المتباينة الأسيّة
exponential inequality

ممارسات في الرياضيات
2 التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 حل المعادلات الأسيّة

في **المعادلة الأسيّة**، توجد المتغيرات في صورة أسس.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الأسس

الشرح افترض أنَّ $b > 0$ و $b \neq 1$. فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال إذا كان $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. إذا كان $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

يمكن استخدام خاصية المساواة لحل المعادلات الأسيّة.

مثال 1 حل المعادلات الأسيّة

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	أعد كتابة 8 في صورة 2^3
$2^x = 2^9$	أس الأس
$x = 9$	خاصية المساواة في الأسس

b. $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	أعد كتابة 9 في صورة 3^2
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	أس الأس
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة في الأسس
$-2 = 2x$	اطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	اقسم كلا الطرفين على 2

تمرين موجّه

1A. $4^{2n-1} = 64$

1B. $5^{5x} = 125^{x+2}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام المعلومات الخاصة بالنمو أو الاضمحلال الأسي لكتابة معادلة لدالة أسيّة.

مثال من الحياة اليومية 2 كتابة دالة أسيّة

العلوم بدأت خديجة إجراء إحدى التجارب باستخدام 7500 خلية بكتيرية. بعد مرور 4 ساعات، أصبح عدد الخلايا 23,000 خلية.

a. اكتب دالة أسيّة يمكن استخدامها لنمذجة عدد خلايا البكتيريا بعد مرور x من الساعات، إذا تغير عدد البكتيريا بالمعدل نفسه.

في بداية التجربة، الزمن يساوي 0 وعدد خلايا البكتيريا يساوي 7500 خلية. إذًا يكون تقاطع y، وقيمة a، يساوي 7500.

عند $x = 4$، يُصبح عدد خلايا البكتيريا 23,000 خلية. عوّض عن تلك القيم في معادلة أسيّة لإيجاد قيمة b.

$y = ab^x$	دالة أسيّة
$23{,}000 = 7500 \cdot b^4$	عوّض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23,000، وعن a بالعدد 7500
$3.067 \approx b^4$	اقسم كلًا من الطرفين على 7500
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	خذ الجذر الرابع للطرفين
$1.323 \approx b$	استخدم حاسبة

المعادلة التي تمثل نموذج عدد خلايا البكتيريا هي $y \approx 7500(1.323)^x$.

b. ما العدد المتوقع لخلايا البكتيريا في العينة بعد مرور 12 ساعة؟

$y \approx 7500(1.323)^x$	معادلة النمذجة
$\approx 7500(1.323)^{12}$	بالعدد x 12 عوض عن
$\approx 215{,}665$	استخدم الحاسبة

سيوجد حوالي 215,665 خلية بكتيرية بعد مرور 12 ساعة.

تمرين موجّه

2. إعادة التدوير وزَّع مُصنِّع 3.2 ملايين علبة مصنوعة من الألومنيوم في عام 2005.

A. في عام 2010، وزَّع المُصنِّع 420,000 علبة مصنوعة من العلب المعاد تدويرها التي وزعها سابقًا. بافتراض استمرار معدل إعادة التدور، اكتب معادلة لنمذجة توزيع العلب المصنوعة من الألومنيوم المعاد تدويره كل عام.

B. ما العدد المتوقع للعلب المصنوعة من الألومنيوم المعاد تدويره في عام 2050؟

تُستخدم الدوال الأسيّة في الحالات المتعلقة بالمرابحة المركبة.

المرابحة المركبة مرابحة تُدفع على رأس مال استثمار بالإضافة إلى أي مرابحة مكتسبة سابقًا.

المفهوم الأساسي المرابحة المركبة

يمكنك أن تحسب المرابحة المركبة باستخدام الصيغة التالية.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

حيث يمثل A المبلغ في الحساب بعد مرور t من السنوات، ويمثل P رأس المال المستثمر، ويمثل r نسبة المرابحة السنوية، ويمثل n عدد فترات حساب المرابحة المركبة كل عام.

الربط بالحياة اليومية

في عام 2008، في الولايات المتحدة، منع معدل تدوير المعادن الذي بلغ 35٪ إطلاق حوالي 25 مليون طن متري من الكربون في الهواء – وهي تقريبًا الكمية المنبعثة سنويًا من 4.5 ملايين سيارة.

المصدر: وكالة حماية البيئة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 المرابحة المركبة

يتلقى حساب استثمار 4.2% مرابحة سنوية بصفة مركبة شهريًا. إذا استُثمر مبلغ AED 2500 في هذا الحساب، فكم سيبلغ الرصيد بعد 15 عامًا؟

الفهم جـــد المبلغ الكلي في الحساب بعد مرور 15 عامًا.

الخطة استخدم صيغة المرابحة المركبة.

$P = 2500$ و $r = 0.042$ و $n = 12$ و $t = 15$

جـــد حل

صيغة المرابحة المركبة

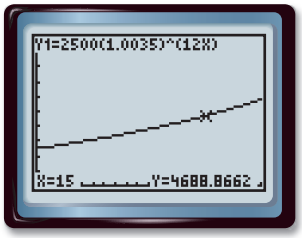
$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$P = 2500,\ r = 0.042,\ n = 12,\ t = 15$

$$= 2500\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \times 15}$$

استخدم الحاسبة

$$\approx 4688.87$$



[0, 20] scl: 1 × [0, 10,000] scl: 1000

التحقق مثّل المعادلة المناظرة بيانيًا $y = 2500(1.0035)^{12t}$.

استخدم **CALC: value** لإيجاد y عند $x = 15$.

قيمة y التي تساوي 4688.8662 قريبة جدًا من 4688.87. إذًا الإجابة منطقية.

تمرين موجّه

3. جـــد رصيد الحساب بعد مرور 20 عامًا، إذا وضع مبلغ AED 100 في حساب يتلقى مرابحة مركبة 1.2% بصفة مركبة مرتين شهريًا.

انتبه!

النسب المئوية تذكر تحويل كل النسب المئوية إلى الصيغة العشرية؛ 4.2% تساوي 0.042.

2 حل المتباينات الأسيّة

يُقصد **بالمتباينة الأسيّة** المتباينة التي تضم تعابير أسيّة.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في الأسس

الشرح إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.

مثال إذا كان $2^x > 2^6$، فإن $x > 6$. أي إذا كان $x > 6$، فإن $2^x > 2^6$.

تصح هذه الخاصية أيضًا مع ≥ و ≤.

مثال 4 حل المتباينات الأسيّة

حُـــلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$.

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	أعد كتابة 16 في صورة 2^4 وكذلك 8 في صورة 2^3
$2^{8x-12} < 2^3$	أس الأس
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين في الأسس
$8x < 15$	أضف 12 إلى كلا الطرفين
$x < \frac{15}{8}$	اقسم كلًا من الطرفين على 8

تمرين موجّه

حُـــلّ كل متباينة مما يلي.

4A. $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B. $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحقق من فهمك

مثال 1 **حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

1. $3^{5x} = 27^{2x-4}$

2. $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

3. $2^{6x} = 32^{x-2}$

4. $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

مثال 2 **5. العلوم** الانقسام المتساوي هو عملية يتم فيها انقسام خلية إلى نصفين. تُعد *الإشريكية القولونية* أحد أنواع البكتيريا الأسرع نموًا. حيث يمكنها أن تتكاثر وتنتج نسخة منها خلال 15 دقيقة.

a. اكتب دالة أسيّة تمثل عدد الخلايا c بعد مرور t من الدقائق.

b. إذا بدأت بخلية *إشريكية قولونية* واحدة، فكم سيصبح عدد الخلايا بعد ساعة؟

مثال 3 **6.** تتلقى شهادة إيداع 2.25% مرابحة سنوية بصفة مركبة مرتين أسبوعيًا. إذا أودعت AED 500 في شهادة الإيداع هذه، فكم سيصبح الرصيد بعد مرور 6 أعوام؟

مثال 4 **حُـلّ كل متباينة مما يلي.**

7. $4^{2x+6} \le 64^{2x-4}$

8. $25^{y-3} \le \left(\frac{1}{125}\right)^{y+2}$

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R7.

مثال 1 **حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

9. $8^{4x+2} = 64$

10. $5^{x-6} = 125$

11 $81^{a+2} = 3^{3a+1}$

12. $256^{b+2} = 4^{2-2b}$

13. $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$

14. $8^{2y+4} = 16^{y+1}$

مثال 2 **15. تمثيل النماذج** في عام 2009، حصلت عائشة على مبلغ AED 10,000 من جدتها. استثمر والداها المال بالكامل، وبحلول عام 2021، سيكون المبلغ قد زاد إلى AED 16,960.

a. اكتب معادلة أسيّة يمكن استخدامها في نمذجة المال y. اكتب الدالة بدلالة x، عدد السنين منذ عام 2009.

b. افترض استمرار زيادة المبلغ المالي بالمعدل نفسه. كم سيبلغ رصيد الحساب في عام 2031؟

اكتب دالة أسيّة للتمثيل البياني الذي يمر بالنقاط المعطاة.

16. (0، 6.4) و(3، 100)

17. (0، 256) و(4، 81)

18. (0، 128) و(5، 371,293)

19. (0، 144) و(4، 21,609)

مثال 3 **20.** جد رصيد الحساب بعد مرور 7 سنوات إذا تم إيداع مبلغ AED 700 في حساب يتلقى مرابحة 4.3% مركبة شهريًا.

21. حدد المبلغ المتوفر في حساب تقاعد بعد مرور 20 عامًا إذا تم استثمار مبلغ AED 5000 بمرابحة 6.05% بصفة مركبة أسبوعيًا.

22. يقدم حساب توفير مرابحة 0.7% بصفة مركبة نصف شهرية. إذا أودع مبلغ AED 110 في هذا الحساب، فكم سيساوي الرصيد بعد 15 عامًا؟

23. يتلقى حساب ادخار جامعي مرابحة سنوية 13.2% بصفة مركبة نصف سنوية. كم يبلغ رصيد الحساب بعد مرور 12 عامًا إذا بلغ الإيداع الابتدائي AED 21,000؟

مثال 4 **حُـلّ كل متباينة مما يلي.**

24. $625 \ge 5^{a+8}$

25. $10^{5b+2} > 1000$

26. $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$

27. $\left(\frac{1}{27}\right)^{2d-2} \le 81^{d+4}$

28. $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \ge \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

29. $\left(\frac{1}{36}\right)^{w+2} < \left(\frac{1}{216}\right)^{4w}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

30. العلوم يحتوي كوب على مشروب الشوكولاتة الساخنة وتبلغ درجة حرارة المشروب 90°C عند الزمن $t = 0$. ودرجة حرارة الهواء المحيط ثابتة وتبلغ $20°C$. إذا قُلِّبَ المشروب بانتظام، فستُصبح درجة حرارته بالدرجات المئوية بعد مرور t من الدقائق هي $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a. جـــد درجة حرارة مشروب الشوكولاتة الساخنة بعد مرور 15 دقيقة.

b. جـــد درجة حرارة مشروب الشوكولاتة الساخنة بعد مرور 30 دقيقة.

c. تُقدَّر أفضل درجة حرارة للمشروب بحوالي 60°C. هل ستكون درجة حرارة المشروب عند درجة الحرارة هذه أم أقل منها بعد مرور 10 دقائق؟

31. الحيوانات تُظهِر الدراسات أنّ الحيوان يدافع عن منطقة نفوذه، وهي مساحة مُقدَّرة بالأمتار المربعة، التي تتناسب طرديًا مع وزن الحيوان بالكيلوجرام مرفوعًا إلى الأس 1.31.

a. إذا كان ثمة قندس وزنه 20 kg يدافع عن منطقة مساحتها $142\ m^2$، فاكتب معادلة توضح مساحة المنطقة a التي يدافع عنها قندس وزنه w kg.

b. يعتقد العلماء أنّه منذ آلاف السنين، كان طول أسلاف القنادس 3.35 m وبوزن 195 kg. استخدم المعادلة لتحديد المنطقة التي دافعت عنها هذه الحيوانات.

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

32. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

33. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$

34. $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$

35. $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$

36. $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

37. $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$

38. النمذجة في عام 1950، كان تعداد السكان في العالم حوالي 2.556 مليار. بحلول عام 1980، زاد تعداد السكان إلى 4.458 مليارات

a. اكتب دالة أسيّة بالصيغة $y = ab^x$ بحيث يمكن استخدامها لنمذجة تعداد السكان في العالم y بالمليارات للفترة من 1950 إلى 1980. اكتب المعادلة بدلالة x، عدد السنين منذ عام 1950. (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف).

b. افترض استمرار نمو السكان بذلك المعدل. قدّر السكان في عام 2000.

c. في عام 2000، كان تعداد السكان في العالم حوالي 6.08 مليارات قارن تقديرك بتعداد السكان الفعلي.

d. استخدم المعادلة التي كتبتها في الجزء a لتقدير تعداد السكان في العالم في عام 2020. برأيك، ما مدى دقة التقدير؟ اشرح استنتاجك.

39. الأشجار يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتيمتر طرديًا مع ارتفاع الشجرة بالمتر مرفوعًا إلى الأس $\frac{3}{2}$.

a. يبلغ طول شجرة سيكويا الصغيرة 6 m، ويبلغ طول قطر قاعدتها 19.1 cm. استخدم هذه المعلومات في كتابة معادلة لإيجاد القطر d لقاعدة شجرة السيكويا إذا كان ارتفاعها يساوي h من الأمتار.

b. يبلغ طول شجرة جنرال شيرمان الموجودة في حديقة سيكويا الوطنية بكاليفورنيا حوالي 84 m. جـــد قطر قاعدة شجرة جنرال شيرمان.

40. المعرفة المالية لدى السيدة شيماء خطتان مختلفتان بخصوص الاستثمار من أجل التقاعد وعليها الاختيار بينهما.

a. اكتب معادلتين تعرضان الخيار A والخيار B بافتراض أدنى الإيداعات.

b. ارسم تمثيلًا بيانيًّا يوضح رصيد كل خيار استثمار بعد t من السنوات.

c. اشرح أي خياري الاستثمار أفضل، الخيار A أم الخيار B.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

41. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستكتشف الزيادة السريعة للدالة الأسيّة. قُصَّت ورقة كبيرة إلى نصفين، ووضعت إحدى القطعتين فوق الأخرى. ثم قُصَّت كل ورقة من الورقتين إلى نصفين ووُضعت الأوراق بعضها فوق بعض. افترض تكرار هذا الإجراء عدة مرات.

a. **نشاط عملي** أجرِ هذا النشاط مع عد أوراق المجموعة بعد القص أول مرة. كم سيكون عدد القطع بعد القص للمرة الثانية؟ كم سيكون عدد القطع بعد القص للمرة الثالثة؟ كم سيكون عدد القطع بعد القص للمرة الرابعة؟

b. **جدوليًّا** سجل النتائج في جدول.

c. **رمزيًّا** استخدم النمط الموضح في الجدول لكتابة معادلة تعبر عن عدد القطع في مجموعة الأوراق بعد عدد x من مرات القص.

d. **تحليليًّا** يبلغ سُمك الورقة العادية حوالي 0.003 cm. اكتب معادلة تعبر عن سُمك مجموعة الأوراق بعد عدد x من مرات القص.

e. **تحليليًّا** ما سُمك مجموعة الأوراق بعد القص 30 مرة؟

مهارات التفكير العليا المسائل استخدام مهارات التفكير العليا

42. **الكتابة في الرياضيات** في مسألة عن المرابحة المركبة، صف ما يحدث عندما تصبح فترة التراكب أكثر تكرارًا في حين يظل رأس المال والوقت الكلي كما هما.

43. **تحليل الخطأ** تعمل بدرية وحصة على إيجاد حل $6^{x-3} > 36^{-x-1}$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

بدرية

$6^{x-3} > 36^{-x-1}$

$6^{x-3} > (6^2)^{-x-1}$

$6^{x-3} > 6^{-2x-2}$

$x - 3 > -2x - 2$

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$

حصة

$6^{x-3} > 36^{-x-1}$

$6^{x-3} > (6^2)^{-x-1}$

$6^{x-3} > 6^{-x+1}$

$x - 3 > -x + 1$

$2x > 4$

$x > 2$

44. **تحفيز** جد قيمة x: $4^x = 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18}$.

45. **مسألة غير محددة الإجابة** ما التغيير الذي سيحقق ربحًا أكبر بالنسبة إلى قرض مدته 5 سنوات بمرابحة نسبتها 8% بصفة مركبة شهريًا: تقليل المدة إلى 4 سنوات أم تقليل نسبة المرابحة إلى 6.5%؟

46. **فرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة *على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

a. $2^x > -8^{20x}$ لجميع قيم x.

b. التمثيل البياني لمعادلة نمو أسي تزايدية.

b. التمثيل البياني لمعادلة اضمحلال أسي تناقصية.

47. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متباينة أسيّة بحيث يكون حلها $x \geq 2$.

48. **البرهان** أثبت أنَّ $9^{4x+1} \times 81^{x+1} = 3^{2x+2} \times 27^{2x}$.

49. **الكتابة في الرياضيات** إذا عرفت الكميتين الابتدائية والنهائية لمادة مشعة ومقدار الوقت المنقضي، فكيف ستحدد المعدل الذي تزداد به الكمية أو تقل لكي تكتب معادلة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

50. $3 \times 10^{-4} =$

A 0.003
B 0.0003
C 0.00003
D 0.000003

51. أي مما يلي لا يمكن أن يكون حلًا للمتباينة $-3x < -3 - 5$؟

F 2.5
G 3
H 3.5
J 4

52. إجابة شبكية الزوايا الثلاث لمثلث تساوي $3x$ و x و $10 + 2x$ و $40 -$. جد قياس أصغر زاوية في المثلث.

53. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول أي مما يلي يكافئ $(x)(x)(x)(x)$ لكل قيم x؟

A $x + 4$
B $4x$
C $2x^2$
D $4x^2$
E x^4

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًّا. (الدرس 1–8)

54. $y = 2(3)^x$

55. $y = 5(2)^x$

56. $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

حُلّ كل من المعادلات التالية.

57. $\sqrt{x + 5} - 3 = 0$

58. $\sqrt{3t - 5} - 3 = 4$

59. $\sqrt[4]{2x - 1} = 2$

60. $\sqrt{x - 6} - \sqrt{x} = 3$

61. $\sqrt[3]{5m + 2} = 3$

62. $(6n - 5)^{\frac{1}{3}} + 3 = -2$

63. $(5x + 7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$

64. $(3x - 2)^{\frac{1}{5}} + 6 = 5$

65. $(7x - 1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$

66. المبيعات يكسب مندوب المبيعات AED 10 في الساعة زائد 10% عمولة على المبيعات. اكتب دالة تعبر عن دخل مندوب المبيعات. إذا أراد مندوب المبيعات أن يكسب AED 1000 في الأسبوع الذي فيه 40 ساعة، فماذا يجب أن تكون مبيعاته؟

67. المعرض الوطني يُنتج أحد مصانع الجبن ثلاثة أنواع من الجبن – الجبن الشيدر وجبن مونتري جاك والجبن السويسري – ويبيع تلك المنتجات في ثلاثة منافذ بيع في المعرض الوطني. في بداية أحد الأيام، تلقى المنفذ الأول x kg من كل نوع من الجبن. وتلقى المنفذ الثاني y kg من كل نوع من الجبن، وتلقى المنفذ الثالث z kg من كل نوع من الجبن. في نهاية اليوم، كان مصنع الجبن قد باع 131 كيلوجرامًا من الجبن الشيدر، و 291 kg من جبن مونتري جاك، و 232 kg من الجبن السويسري.
يوضح الجدول التالي النسبة المئوية للجبن الذي تلقاه كل منفذ في الصباح وباعه. كم كيلوجرامًا من الجبن الشيدر الذي تلقاه كل منفذ في الصباح؟

النوع	منفذ 1	منفذ 2	منفذ 3
جبن الشيدر	40%	30%	10%
جبن مونتري جاك	40%	90%	80%
الجبن السويسري	30%	70%	70%

مراجعة المهارات

جد $[h \circ g](x)$ و $[g \circ h](x)$

68. $h(x) = 2x - 1$
$g(x) = 3x + 4$

69. $h(x) = x^2 + 2$
$g(x) = x - 3$

70. $h(x) = x^2 + 1$
$g(x) = -2x + 1$

71. $h(x) = -5x$
$g(x) = 3x - 5$

72. $h(x) = x^3$
$g(x) = x - 2$

73. $h(x) = x + 4$
$g(x) = |x|$

برنامج مدارس للتعليم الذكي Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 8-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

السابق
- لقد وجدت معكوس الدالة.

الحالي
1. إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية.
2. تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

لماذا؟
- يعتقد العديد من العلماء أنَّ سبب انقراض الديناصورات يرجع إلى اصطدام أحد الكويكبات بالأرض. يستخدم علماء الفلك مقياس باليرمو لتصنيف الأجسام القريبة من الأرض بناءً على احتمالية الاصطدام. تم تطوير المقياس باستخدام *اللوغاريتمات* لتسهيل المقارنة بين العديد من الأجسام. يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو لأي جسم باستخدام المعادلة $PS = \log_{10} R$، حيث R هي المخاطرة النسبية التي يسببها الجسم.

المفردات الجديدة
لوغاريتم logarithm
الدالة اللوغاريتمية logarithmic function

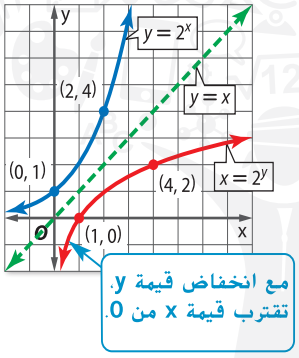
ممارسات في الرياضيات
6 مراعاة الدقة.

1 الدوال والتعابير اللوغاريتمية

فكّر في الدالة الأسيّة $f(x) = 2^x$ ومعكوسها. تذكر أنَّه يمكنك تمثيل الدالة العكسية بالمبادلة بين قيم x وy في الأزواج المرتبة في الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يمكن تعريف معكوس الدالة $y = 2^x$ بأنه $x = 2^y$ بوجه عام. معكوس الدالة $y = b^x$ يساوي $x = b^y$. في $x = b^y$، يطلق على المتغير y اسم **لوغاريتم** x. يتم كتابة هذا عادة بالصيغة $y = \log_b x$، حيث تُقرأ y *يساوي* $\log x$ *بالنسبة إلى الأساس* b.

المفهوم الأساسي اللوغاريتم بالنسبة إلى الأساس b

الشرح افترض أنَّ b وx أعداد موجبة و$b \neq 1$. يُشار إلى *لوغاريتم* x *للأساس* b بالرمز $\log_b x$ ويعرف بالأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز افترض أنَّ $b > 0$ و$b \neq 1$. بالنسبة إلى $x > 0$، يوجد عدد y مثل هذا

$$\log_b x = y \text{ فقط إذا كان } b^y = x.$$

مثال إذا كان $\log_3 27 = y$، فإن $3^y = 27$.

يمكن أيضًا استخدام تعريف اللوغاريتمات للتعبير عن اللوغاريتمات بالصيغة الأسيّة.

مثال 1 التحويل من الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسيّة

اكتب كل معادلة بالصيغة الأسيّة.

a. $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$

b. $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تمرين موجّه

1A. $\log_4 16 = 2$

1B. $\log_3 729 = 6$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن أيضًا استخدام تعريف اللوغاريتمات في كتابة المعادلات الأسيّة بالصيغة اللوغاريتمية.

مثال 2 التحويل من الصيغة الأسيّة إلى اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة بالصيغة اللوغاريتمية.

a. $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b. $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

تمرين موجّه

2A. $4^3 = 64$

2B. $125^{\frac{1}{3}} = 5$

يمكنك استخدام تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي.

مثال 3 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية

جـد قيمة $\log_{16} 4$.

$\log_{16} 4 = y$	افترض أنّ اللوغاريتم يساوي y
$4 = 16^y$	تعريف اللوغاريتم
$4^1 = (4^2)^y$	$16 = 4^2$
$4^1 = 4^{2y}$	أس الأس
$1 = 2y$	خاصية التساوي في الدوال الأسيّة
$\frac{1}{2} = y$	اقسم كل طرف على 2

إذًا، $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

انتبه!

الأساس اللوغاريتمي في الدوال اللوغاريتمية، من السهل أن تحتار في تحديد أي عدد هو الأساس وأي عدد هو الأس. فكّر في تمييز كل عدد أثناء الحل لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

تمرين موجّه

جـد قيمة كل تعبير.

3A. $\log_3 81$

3B. $\log_{\frac{1}{2}} 256$

2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

الدالة $y = \log_b x$، حيث $b \neq 1$، تسمى **دالة لوغاريتمية**. التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ يمثل تمثيلًا بيانيًّا عامًا للدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسة للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة: $f(x) = \log_b x$

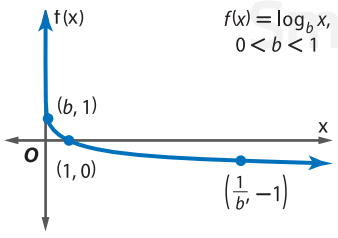
نوع التمثيل البياني: متصل، واحد إلى واحد

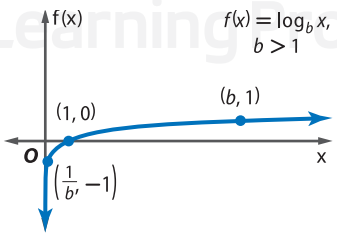
المجال: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة

المدى: جميع الأعداد الحقيقية

خط التقارب: المحور $f(x)$

التقاطع: $(1, 0)$





Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة بيانيًّا.

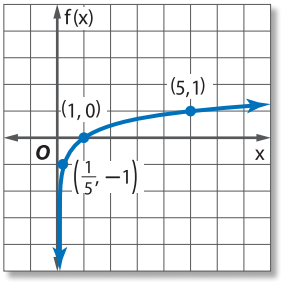
a. $f(x) = \log_5 x$

الخطوة 1 حدد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2 حدد النقاط على التمثيل البياني.

لأنَّ $5 > 1$، استخدم النقاط $\left(\frac{1}{b}, -1\right)$ و$(1, 0)$، و$(b, 1)$.



الخطوة 3 مثل النقاط بيانيًّا وارسم التمثيل البياني.

$\left(\frac{1}{b}, -1\right) \rightarrow \left(\frac{1}{5}, -1\right)$

$(1, 0)$

$(b, 1) \rightarrow (5, 1)$

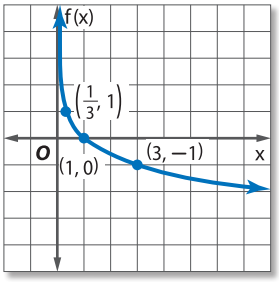
b. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

الخطوة 1 $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2 استخدم النقاط، لأنّ $0 < \frac{1}{3} < 1$.

$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ و$(1, 0)$، و$(3, -1)$

الخطوة 3 صمم التمثيل البياني.



تمرين موجّه

4A. $f(x) = \log_2 x$

4B. $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

نصيحة دراسية

الأس صفر تذكر أنّه لأي $b \neq 0$، $b^0 = 1$. إذًا تعد قيمة $\log_2 0$ غير معرَّفة لأنّ $2^x \neq 0$ أيًا كانت قيمة x.

يمكن تطبيق الأساليب نفسها المستخدمة لتحويل التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية على الدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال اللوغاريتمية

$$f(x) = a \log_b (x - h) + k$$

h الإزاحة الأفقية	k الإزاحة الرأسيّة
h من الوحدات يمينًا إذا كان h موجبًا و$\lvert h \rvert$ من الوحدات يسارًا إذا كان h سالبًا	k من الوحدات إلى أعلى إذا كان k موجبًا $\lvert k \rvert$ من الوحدات إلى أسفل إذا كان k سالبًا
a الاتجاه والشكل	
إذا كان $a < 0$، فسينعكس التمثيل البياني على المحور x.	إذا كان $\lvert a \rvert > 1$، فسيتمدد التمثيل البياني رأسيًّا. إذا كان $0 < \lvert a \rvert < 1$، فسينضغط التمثيل البياني رأسيًّا.

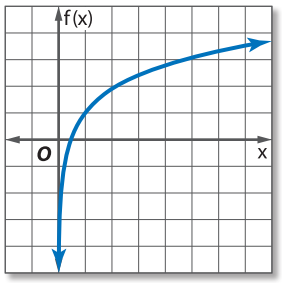
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة بيانيًّا.

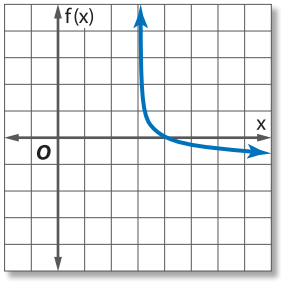
a. $f(x) = 3 \log_{10} x + 1$



يمثل هذا تحويلًا للتمثيل البياني $f(x) = \log_{10} x$.

- $|a| = 3$: يمتد التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 0$: لا توجد إزاحة أفقية.
- $k = 1$: تم إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.

b. $f(x) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x - 3)$



يُعد هذا تحويلًا للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

- $|a| = \frac{1}{2}$: انضغط التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 3$: تمت إزاحة التمثيل البياني بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا توجد إزاحة رأسيّة.

تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًّا.

5A. $f(x) = 2 \log_3 (x - 2)$

5B. $f(x) = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - 5$

نصيحة دراسية

سلوك طرفي التمثيل البياني في المثال 5a. عندما يقترب x من اللانهاية، تقترب الدالة $f(x)$ من اللانهاية.

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد معكوسات الدوال الأسيّة

الزلازل يقيس مقياس ريختر شدة الزلزال. وتبلغ زيادة الشدة بين كل رقم والرقم الذي يليه 10 أمثال. على سبيل المثال، الزلزال الذي يبلغ قياسه 7 أشد بمعدل 10 مرات من الزلزال الذي يبلغ قياسه 6. يمكن نمذجة شدة الزلزال من خلال $y = 10^{x-1}$، حيث يرمز x إلى قياس مقياس ريختر.

a. استخدم المعلومات الموجودة على اليسار لإيجاد شدة أقوى زلزال سُجِّل في الولايات المتحدة.

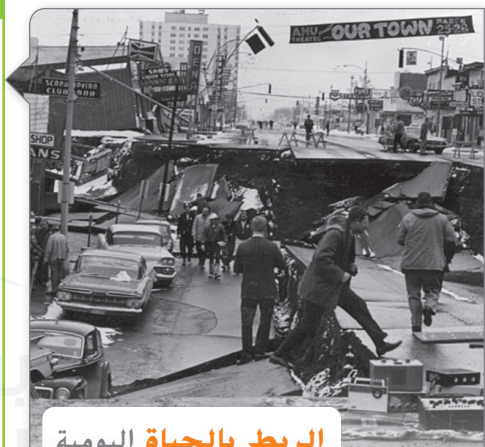
$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	عوض بالرقم 9.2 عن x
$= 10^{8.2}$	بسِّط
$= 158{,}489{,}319.2$	استخدم الحاسبة

b. اكتب معادلة بالصورة $y = \log_{10} x + c$ لإيجاد معكوس الدالة.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	عوّض عن x بـ y، وعوّض عن y بـ x، وجد قيمة y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتم
$y = \log_{10} x + 1$	أضف 1 إلى كل من الطرفين

تمرين موجّه

6. اكتب معادلة لمعكوس الدالة $y = 0.5^x$.



الربط بالحياة اليومية

بلغت قوة أكبر زلزال تم تسجيله في الولايات المتحدة 9.2، ذلك الزلزال الذي ضرب لسان الأمير ويليام البحري في ألاسكا، وذلك يوم الجمعة الحزينة الموافق 28 مارس عام 1964.

المصدر: هيئة المساحة الجيولوجية الأمريكية

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

تحقق من فهمك

مثال 1 **اكتب كل معادلة بالصيغة الأسيّة.**

1. $\log_8 512 = 3$

2. $\log_5 625 = 4$

مثال 2 **اكتب كل معادلة بالصيغة اللوغاريتمية.**

3. $11^3 = 1331$

4. $16^{\frac{3}{4}} = 8$

مثال 3 **جـد قيمة كل تعبير.**

5. $\log_{13} 169$

6. $\log_2 \frac{1}{128}$

7. $\log_6 1$

المثالان 4–5 **مثّل كل دالة بيانيًّا.**

8. $f(x) = \log_3 x$

9. $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

10. $f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$

11. $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$

مثال 6 **12. العلوم** استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس. يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو لأي جسم باستخدام المعادلة $PS = \log_{10} R$. حيث R هي المخاطرة النسبية التي يسببها الجسم. اكتب معادلة بالصيغة الأسيّة لمعكوس الدالة.

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R7.

مثال 1 **اكتب كل معادلة بالصيغة الأسيّة.**

13. $\log_2 16 = 4$

14. $\log_7 343 = 3$

15. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$

16. $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

17. $\log_{12} 144 = 2$

18. $\log_9 1 = 0$

مثال 2 **اكتب كل معادلة بالصيغة اللوغاريتمية.**

19. $9^{-1} = \frac{1}{9}$

20. $6^{-3} = \frac{1}{216}$

21. $2^8 = 256$

22. $4^6 = 4096$

23. $27^{\frac{2}{3}} = 9$

24. $25^{\frac{3}{2}} = 125$

مثال 3 **جـد قيمة كل تعبير.**

25. $\log_3 \frac{1}{9}$

26. $\log_4 \frac{1}{64}$

27. $\log_8 512$

28. $\log_6 216$

29. $\log_{27} 3$

30. $\log_{32} 2$

31. $\log_9 3$

32. $\log_{121} 11$

33 $\log_{\frac{1}{5}} 3125$

34. $\log_{\frac{1}{8}} 512$

35. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$

36. $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

المثالان 4–5 الضبط **مثّل كل دالة بيانيًّا.**

37. $f(x) = \log_6 x$

38. $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

39. $f(x) = 4 \log_2 x + 6$

40. $f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

41. $f(x) = \log_{10} x$

42. $f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$

43. $f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$

44. $f(x) = -8 \log_3 (x - 4)$

45. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$

46. $f(x) = \log_5 (x - 4) - 5$

47. $f(x) = -\frac{1}{6} \log_8 (x - 3) + 4$

48. $f(x) = -\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} (x + 2) - 5$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 6

49. التصوير تعرض الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ التغير في إعداد f-stop الذي يمثله n المستخدم في الإضاءة الخافتة، حيث يمثل p كسرًا من ضوء الشمس.

a. تم ضبط كاميرا إبراهيم على أخذ الصور في ضوء الشمس المباشر، ولكن اليوم غائم. إذا كان مقدار ضوء الشمس في اليوم الغائم يبلغ $\frac{1}{4}$ بالنسبة إلى ضوء الشمس المباشر، فما عدد إعدادات f-stop التي يجب تغييرها لكي تلائم الإضاءة الأقل؟

b. مثّل الدالة بيانيًا.

c. استخدم التمثيل البياني الموضح في الجزء b لتوقع الكسر الذي يضبطه إبراهيم من ضوء النهار إذا قلل إعدادات f-stop بمعدل 3. هل يسمح بدخول ضوء أكثر أم أقل إلى داخل الكاميرا؟

50. التعليم لقياس استبقاء الطالب للمعرفة، يُختبر الطالب بعد فترة زمنية معينة. يُمكن تقدير درجة طالب في إختبار الرياضيات الصف العاشر بعد مرور t من الأشهر بعد انتهاء العام الدراسي من خلال العلاقة التالية $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$، حيث يمثل $y(t)$ درجة الطالب كنسبة مئوية.

a. كم كانت درجة الطالب عند انتهاء العام الدراسي $(t = 0)$؟

b. كم كانت درجة الطالب بعد مرور 3 أشهر؟

c. كم بلغت درجة الطالب بعد مرور 15 شهرًا؟

مثّل كل دالة بيانيًّا.

51 $f(x) = 4 \log_2 (2x - 4) + 6$

52. $f(x) = -3 \log_{12} (4x + 3) + 2$

53. $f(x) = 15 \log_{14} (x + 1) - 9$

54. $f(x) = 10 \log_5 (x - 4) - 5$

55. $f(x) = -\frac{1}{6} \log_8 (x - 3) + 4$

56. $f(x) = -\frac{1}{3} \log_6 (6x + 2) - 5$

57. النمذجة بوجه عام، كلما زاد إنفاق الشركة على الدعاية، زادت المبيعات. يمكن تمثيل أموال مبيعات شركة ما، بالآلاف، من خلال المعادلة $S(a) = 10 + 20 \log_4 (a + 1)$، حيث يرمز a إلى الأموال التي تنفقها الشركة على الدعاية، بالآلاف، عندما يكون $a \geq 0$.

a. قيمة $S(0) \approx 10$، مما يعني أنّ إنفاق AED 10 على الدعاية، يؤدي إلى مبيعات تصل إلى AED 10,000. جد قيم $S(3)$ و$S(15)$ و$S(63)$.

b. فسر معنى كل قيمة للدالة في سياق المسألة.

c. مثّل الدالة بيانيًا.

d. استخدم التمثيل البياني في الجزء c وإجاباتك في الجزء a لتفسير سبب تناقص "فاعلية" الأموال المنفقة على الدعاية عند استخدامها بمبالغ أضخم.

58. علم الحياة زمن الجيل في البكتيريا هو الزمن الذي تستغرقه الجماعة الأحيائية لكي تُضاعف عددها. يمكن إيجاد زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا باستخدام البيانات التجريبية والصيغة $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$ ، حيث يمثل t الفترة الزمنية، ويمثل b عدد البكتيريا في بداية التجربة، ويمثل f عدد البكتيريا في نهاية التجربة.

a. يبلغ زمن الجيل في بكتيريا المُتفطِّرة السُلِّية 16 ساعة. ما المدة التي ستستغرقها 4 خلايا بكتيرية منها لكي تتضاعف إلى 1024 خلية بكتيرية؟

b. تُظهر تجربة تتضمن فئرانًا تعرَّضت لبكتيريا السالمونيلا أنّ زمن الجيل في بكتيريا السالمونيلا يساوي 5 ساعات. ما المدة التي تستغرقها 20 من هذه البكتيريا لكي تتضاعف إلى 8000 بكتيريا؟

c. تُعدُّ *الإشريكية القولونية* بكتيريا سريعة النمو. إذا كان 6 من بكتيريا *الإشريكية القولونية* يمكن أن تزداد إلى 1296 في 4.4 ساعات، فما زمن الجيل لبكتيريا *الإشريكية القولونية*؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

C **59** **المعرفة المالية** أنفقت ريهام AED 2000 من بطاقة ائتمان. تفرض شركة بطاقة الائتمان 24% مرابحة مركبة شهريًا. تستخدم شركة بطاقة الائتمان $\frac{A}{2000} = 12t$ $\log_{\left(1+\frac{0.24}{12}\right)}$ لتحدد الفترة الزمنية المنقضية حتى يصل دَيْن ريهام إلى مبلغ محدد، إذا كان A يمثل مقدار الدَّيْن بعد فترة زمنية، و t يمثل الزمن بالأعوام.

a. مثل الدالة التي تمثل دَيْن ريهام بيانيًّا.

b. تقريبًا، ما المدة التي سيصل فيها دَيْن ريهام إلى المثلين؟

b. تقريبًا، ما المدة التي سيصل فيها دَيْن ريهام إلى ثلاثة أمثال؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

60. **الكتابة في الرياضيات** فيم يجب أن تفكر عند استخدام النماذج الأسيّة واللوغاريتمية لاتخاذ قرارات؟

61. **فرضيات** افترض أنّ $y = \log_b x$ بحيث تكون b و x و y أعدادًا حقيقية. يمكن يتضمن المجال الصفر أحيانًا أم دائمًا أم لا يمكن ذلك مطلقًا. علّل إجابتك.

62. **تحليل الخطأ** تقول شيخة إنّ التمثيلات البيانية لكل الدوال اللوغاريتمية تقطع المحور y عند النقطة $(1,0)$ لأن أي عددمرفوع لأس صفر يساوي 1. لم توافق حمدة على ذلك. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

63. **التبرير** من دون استخدام الحاسبة، قارن بين $\log_7 51$ و $\log_8 61$ و $\log_9 71$. أيهما أكبر؟ اشرح استنتاجك.

64. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة لوغاريتمية بالصيغة $y = \log_b x$ لكل حالة من الحالات الآتية.

a. قيمة y تساوي 25.

b. قيمة y سالبة.

c. قيمة y بين 0 و1.

d. قيمة x تساوي 1.

e. قيمة x تساوي 0.

65. **تحليل الخطأ** يعمل كل من حارب وزايد على إيجاد قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حارب

$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$

$\left(\frac{1}{7}\right)^y = 49$

$(7^{-1})^y = 7^2$

$(7)^{-y} = 7^2$

$y = -2$

زايد

$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$

$49^y = \frac{1}{7}$

$(7^2)^y = (7)^{-1}$

$7^{2y} = (7)^{-1}$

$2y = -1$

$y = -\frac{1}{2}$

66. **الكتابة في الرياضيات** تحويل $\log_{10} x$ هو $g(x) = a \log_{10} (x - h) + k$. اشرح عملية تمثيل هذا التحويل بيانيًّا.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

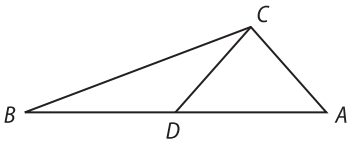
67. طول مستطيل يساوي مِثلي عرضه. إذا كان عرض المستطيل يساوي 3 cm، فما مساحة المستطيل بالسنتيمتر المربع؟

A 9
B 12
C 15
D 18

68. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول يملك بشير بعض البيتزا. وكانت الشرائح التي باعها أكثر من التي أكلها بنسبة 40%. إذا كان قد باع 70 شريحة بيتزا، فما عدد شرائح البيتزا التي أكلها؟

F 25
G 50
H 75
J 98
K 100

69. إجابة قصيرة في الشكل $AB = BC$ و$CD = BD$ و$m\angle CAD = 70°$. كم يبلغ قياس الزاوية ADC؟



70. إذا كان $6x - 3y = 30$ و$4x = 2 - y$، فجد $x + y$.

A -4
B -2
C 2
D 4

مراجعة شاملة

حُلّ كل متباينة مما يلي. تحقق من الحل. (الدرس 2–8)

71. $3^{n-2} > 27$

72. $2^{2n} \le \frac{1}{16}$

73. $16^n < 8^{n+1}$

$32^{5p} + 2 \ge 16^{5p}$

مثّل كل دالة بيانيًّا. (الدرس 1–8)

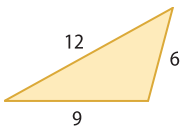
75. $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

76. $y = -2.5(5)^x$

77. $y = 30^{-x}$

78. $y = 0.2(5)^{-x}$

79. الهندسة يمكن إيجاد مساحة مثلث أطوال أضلاعه تساوي a وb وc من خلال $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. إذا كانت أطوال أضلاع المثلث تساوي بالمتر 6 و9 و12، فما التعبير عن مساحة المثلث بالصيغة الجذرية؟



80. الهندسة يمكن كتابة حجم صندوق مستطيل بالصورة $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$ عندما يكون الارتفاع $x + 2$.

a. ما طول الصندوق وعرضه؟

b. هل تبقى نسبة أبعاد الصندوق متساوية بصرف النظر عن قيمة x؟ اشرح.

81. ميكانيكا السيارات تعمل سارة مديرة مخازن في ورشة إصلاح محلية. تطلب 6 بطاريات و5 حقائب من شمع الإشعال وعشرين زوجًا من شفرات ماسحات الزجاج وتدفع AED 830. تطلب 3 بطاريات و7 حقائب من شمع الإشعال وأربعين زوجًا من شفرات ماسحات الزجاج وتدفع AED 820. يقل سعر البطاريات بمقدار AED 22 عن ضعف سعر عشر شفرات من ماسحات الزجاج. استخدم المصفوفات الموسعة لتحديد تكلفة كل عنصر في طلبها.

مراجعة المهارات

حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: تحقق من الحل.

82. $9^x = \frac{1}{81}$

83. $2^{6x} = 4^{5x+2}$

84. $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$

85. $9^{x^2} \le 27^{x^2-2}$

برنامج محمد بن راشد للتعليم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

8-3 مختبر تقنية التمثيل البياني
اختيار أفضل نموذج

يمكننا إيجاد الدوال الأسية واللوغاريتمية الأفضل ملاءمة باستخدام حاسبة التمثيل البياني من نوع Plus.

ممارسات في الرياضيات
4 استخدام نماذج الرياضيات.

النشاط

تغيرت الكثافة السكانية لكل كيلومتر مربع في الولايات المتحدة بشكل كبير على مدى سنوات. يوضح الجدول عدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع لعدة سنوات.

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإدخال البيانات. ثم ارسم مخطط انتشار يوضح علاقة عدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع بالعام.

الكثافة السكانية في الولايات المتحدة			
العام	عدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع	العام	عدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع
1790	4.5	1900	21.5
1800	6.1	1910	26.0
1810	4.3	1920	29.9
1820	5.5	1930	34.7
1830	7.4	1940	37.2
1840	9.8	1950	42.6
1850	7.9	1960	50.6
1860	10.6	1970	57.5
1870	10.9	1980	64.0
1880	14.2	1990	70.3
1890	17.8	2000	80.0

المصدر: معهد الغرب الأوسط بالمنطقة الشمالية الشرقية

الخطوة 1 أدخل العام في **L1** وعدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع في **L2**.

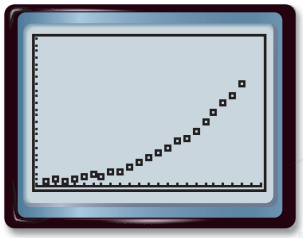
خطوات العملية على الحاسبة: *انظر الصفحتين 94 و95 لمراجعة طريقة إدخال القوائم.*

تأكد من مسح قائمة Y=. استخدم المفتاح ▶ لتحريك المؤشر من **L1** إلى **L2**.

الخطوة 2 ارسم مخطط الانتشار.

خطوات العملية على الحاسبة: *انظر الصفحتين 94 و95 لمراجعة طريقة تمثيل مخطط الانتشار بيانيًّا.*

تأكد من عرض **المخطط 1** واختيار مخطط الانتشار، تمثل **Xlist L1** وتمثل **Ylist L2**.



[0, 115] scl: 5× [1780, 2020] scl: 10

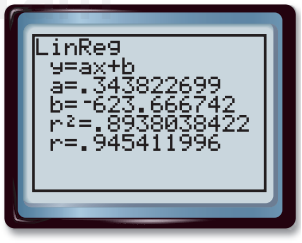
الخطوة 3 جـد معادلة الانحدار.

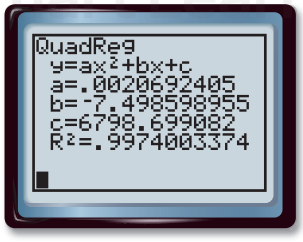
لإيجاد المعادلة التي تلائم البيانات بشكل أفضل، استخدم خاصية الانحدار المتوفرة في الحاسبة. افحص العديد من الانحدارات لتحديد النموذج الأفضل.

تذكر أنَّ الحاسبة تعيد معامل الارتباط r، المستخدم لتوضيح مدى ملاءمة النموذج للبيانات. كلما كانت قيمة r قريبة من 1 أو −1، كانت الملاءمة أفضل.

الانحدار الخطي — الانحدار الرباعي

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ 4 ENTER — **خطوات العملية على الحاسبة:** STAT ▶ 5 ENTER





$$r^2 = 0.9974003374$$

$$r = \sqrt{0.9974003374}$$

$$r \approx 0.9986993228$$

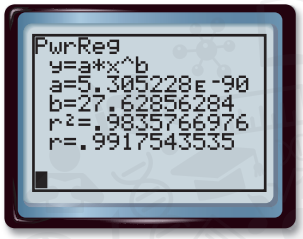
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الانحدار الأسي

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ 0 ENTER

انحدار القوى

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ ALPHA [A] ENTER



مقارنة بين قيم r

خطي: 0.945411996

أسي: 0.991887235

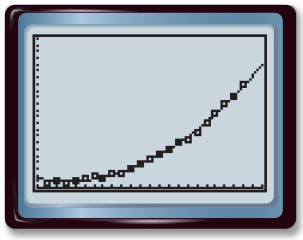
رباعي: 0.9986993228

قوى: 0.9917543535

تعد قيمة r في الانحدار الرباعي أقرب إلى 1. لذا يبدو أنّها أفضل نموذج لتمثيل البيانات.

يمكنك فحص المعادلة بصريًا عن طريق تمثيل معادلة الانحدار بيانيًا باستخدام مخطط الانتشار.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ 5 ENTER Y= VARS 5 ▶ ▶ 1 GRAPH

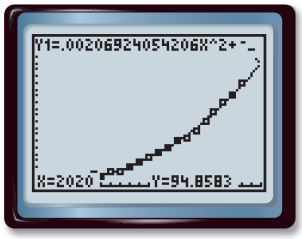


[0, 115] scl: 5 × [1780, 2020] scl: 10

b. إذا استمر هذا الاتجاه، فكم ستبلغ الكثافة السكانية لكل كيلومتر مربع في عام 2020؟

لتحديد الكثافة السكانية لكل كيلومتر مربع في عام 2020، جد قيمة y عندما تكون $x = 2020$.

خطوات العملية على الحاسبة: 2020 ENTER 2nd [CALC]



[0, 115] scl: 5 × [1780, 2020] scl: 10

إذا استمر هذا الاتجاه، فسيبلغ عدد الأشخاص 94.9 نسمة تقريبًا لكل كيلومتر مربع.

التمارين

بالنسبة إلى التمارين من 1 إلى 5، أودعت سارة AED 50 في حساب بنكي، ثم نسيت أمره تمامًا ولم تقم بأي عمليات إيداع أو سحب بعد ذلك. يوضح الجدول رصيد الحساب لعدة سنوات.

الزّمن المنقضي (بالأعوام)	الرصيد
0	AED 50.00
2	AED 55.80
4	AED 64.80
6	AED 83.09
8	AED 101.40
10	AED 123.14
12	AED 162.67

1. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم مخطط الانتشار للبيانات.
2. احسب منحنى الملاءمة ومثّله بيانيًا باستخدام الانحدار الأسي.
3. اكتب المعادلة الأفضل ملاءمة. ما المجال والمدى؟
4. استنادًا إلى النموذج، كم سيبلغ رصيد الحساب بعد 25 عامًا؟
5. هل النموذج الأسي هو الأفضل ملاءمة للبيانات؟ اشرح.
6. **حان دورك** اكتب سؤالًا يمكن الإجابة عنه عن طريق فحص بيانات نموذج لوغاريتمي. أولًا، اختر موضوعًا ثم اجمع البيانات ذات الصلة من خلال إجراء بحث على الإنترنت أو إجراء مسح. بعد ذلك، ارسم مخطط انتشار وجد معادلة انحدار البيانات. ثم أجب عن سؤالك.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 8-4

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

السابق:
- لقد وجدت قيمة التعبيرات اللوغاريتمية.

الحالي:
1. حل المعادلات اللوغاريتمية.
2. حل المتباينات اللوغاريتمية.

لماذا؟
- يوثق المركز الوطني لخدمة الطقس ما يقرب من 1000 موجة من الإعصارات القمعية التي تضرب الولايات المتحدة الأمريكية سنويًا. وتُقاس شدة الإعصار القمعي على مقياس فوجيتا. كما تنقسم الإعصارات القمعية إلى ستة أصناف وفقًا لسرعة الرياح المصاحبة لها وطول مسارها وعرض مسارها والدمار الناجم عنها.

مقياس F	سرعة الرياح (km/h)	نوع الدمار الناجم
F-0 عاصفة	40-72	المداخن، والأفرع
F-1 متوسط	73-112	انقلاب المنازل المتنقلة
F-2 قوي	113-157	اقتلاع أسطح المنازل
F-3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار من جذورها
F-4 مدمر	207-260	هدم المنازل، وتطاير السيارات
F-5 هائل	261-318	تطاير المنازل
F-6 لا يتصور	319-379	هذا المستوى لم يحدث من قبل على الإطلاق

المفردات الجديدة
- **المعادلة اللوغاريتمية** logarithmic equation
- **المتباينة اللوغاريتمية** logarithmic inequality

ممارسات في الرياضيات
4 استخدام نماذج الرياضيات.

1 حل المعادلات اللوغاريتمية

تحتوي **المعادلة اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. يمكنك استخدام تعريف اللوغاريتم لمساعدتك في حل المعادلات اللوغاريتمية.

مثال 1 إيجاد حل المعادلة اللوغاريتمية

حُـلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$x = 36^{\frac{3}{2}}$	تعريف اللوغاريتم
$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$	$36 = 6^2$
$x = 6^3$ أو 216	أس الأس

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

1A. $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B. $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

استخدم الخاصية التالية لحل المعادلات اللوغاريتمية التي تتضمن لوغاريتمات ذات أساس موحد في كلا الطرفين.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في اللوغاريتمات

الرموز إذا كان b عددًا موجبًا بخلاف العدد 1، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$. وإذا كان $x = 8$، فإن $\log_5 x = \log_5 8$.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال على الاختبار المعياري 2 إيجاد حل المعادلة اللوغاريتمية

حُـلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 4

قراءة فقرة الاختبار

مطلوب منك إيجاد x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار

$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 4 = 3x$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$x^2 - 3x - 4 = 0$	اطرح $3x$ من كلا الطرفين
$(x - 4)(x + 1) = 0$	حلل إلى العوامل
$x - 4 = 0$ أو $x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 4$ $\quad x = -1$	حل المعادلتين

التحقق عوض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = 4$

$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$

$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

$x = -1$

$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$

$\log_2 (-3) \stackrel{?}{=} \log_2 (-3)$ ✗

لا يمكن أن يكون مجال الدالة اللوغاريتمية 0. إذًا، $\log_2 (-3)$ غير معرفة و-1 يمثل حلًا دخيلًا.
الإجابة هي D.

تمرين موجّه

2. حُـلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

F -3 **G** -1 **H** 5 **J** 15

نصيحة عند حل الاختبار

التعويض لتوفير الوقت، يمكنك التعويض عن كل خيار من خيارات الإجابة في المعادلة الأصلية لإيجاد الخيار الذي ينتج عنه التعبير الصحيح.

2 حل المتباينات اللوغاريتمية

المتباينة **اللوغاريتمية** هي المتباينة التي تتضمن لوغاريتمات. يمكن استخدام الخاصية التالية لحل المتباينات اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في اللوغاريتمات

إذا كان $b > 1$ و$x > 0$ و$\log_b x > y$، فإن $x > b^y$.

إذا كان $b > 1$ و$x > 0$ و$\log_b x < y$، فإن $0 < x < b^y$.

تصح هذه الخاصية أيضًا مع $\geq$ و$\leq$.

مثال 3 إيجاد حل المتباينة اللوغاريتمية

حُـلّ المتباينة $\log_3 x > 4$.

$\log_3 x > 4$	المتباينة الأصلية
$x > 3^4$	خاصية التباين في اللوغاريتمات
$x > 81$	بسّط

تمرين موجّه

حُـلّ كل متباينة مما يلي.

3A. $\log_4 x \geq 3$ **3B.** $\log_2 x < 4$

الربط بالتاريخ والرياضيات

زانج هينج (78-139 ميلادية)
أول مقياس زلازل معروف اخترعه زانج هينج في الصين عام 132 ميلادية. كان عبارة عن وعاء نحاسي كبير به بندول ثقيل والعديد من الأذرع التي تعمل عند الاهتزاز نتيجة حدوث زلزال. حيث ساعد هذا في تحديد اتجاه الزلزال.

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

يمكن استخدام الخاصية التالية لحل المتباينات اللوغاريتمية التي تتضمن لوغاريتمات ذات أساس موحد في كلا الطرفين. استبعد من الحل مجموعة القيم التي تؤدي إلى لوغاريتم عدد أقل من أو يساوي صفرًا في المتباينة الأصلية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في اللوغاريتميات

الرموز إذا كان $b > 1$، وكان $x > y$، فإن $\log_b x > \log_b y$.
وإذا كان $x < y$، فإن $\log_b x < \log_b y$

مثال إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$، فإن $x > 35$

تصح هذه الخاصية أيضًا مع $\geq$ و $\leq$.

مثال 4 إيجاد حل المتباينات التي تتضمن لوغاريتمات في كل من طرفيها

حُـلّ المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$.

$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ المتباينة الأصلية

$x + 3 > 2x + 1$ خاصية التباين في اللوغاريتمات

$2 > x$ اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

استبعد كل قيم x التي تكون فيها $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$. بحيث يكون $x > -\frac{1}{2}$ و $x > -3$ و $x < 2$. مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$ أو $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

تمرين موجّه

4. حُـلّ المتباينة $\log_5 (1 + 2x) \geq \log_5 (4 + x)$ تحقق من الحل.

تحقق من فهمك

مثال 1 حُـلّ كل من المعادلات التالية.

1. $\log_8 x = \frac{4}{3}$ **2.** $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

مثال 2 **3. الاختيار من متعدد** حُـلّ المعادلة $\log_5 (x^2 - 10) = \log_5 3x$.

A 10 **B** 2 **C** 5 **D** 2, 5

مثال 3 حُـلّ كل متباينة مما يلي.

4. $\log_5 x > 3$ **5.** $\log_8 x \leq -2$

6. $\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$ **7.** $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1–2 **التركيب** حُـلّ كل معادلة مما يلي.

8. $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ **9.** $\log_{25} x = \frac{5}{2}$ **10.** $\log_8 \frac{1}{2} = x$

11. $\log_6 \frac{1}{36} = x$ **12.** $\log_x 32 = \frac{5}{2}$ **13.** $\log_x 27 = \frac{3}{2}$

14. $\log_3 (3x + 8) = \log_3 (x^2 + x)$ **15** $\log_{12} (x^2 - 7) = \log_{12} (x + 5)$

16. $\log_6 (x^2 - 6x) = \log_6 (-8)$ **17.** $\log_9 (x^2 - 4x) = \log_9 (3x - 10)$

18. $\log_4 (2x^2 + 1) = \log_4 (10x - 7)$ **19.** $\log_7 (x^2 - 4) = \log_7 (-x + 2)$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

العلوم **معادلة سرعة الرياح W، بالميل في الساعة، بالقرب من مركز الإعصار القمعي هي $W = 93 \log_{10} D + 65$، حيث D تمثل المسافة التي يقطعها الإعصار القمعي بالميل.**

20. اكتب هذه المعادلة بالصيغة الأسيّة.

21. في مايو 1999، اجتاح إعصار قمعي إحدى المدن بأقصى سرعة رياح سُجلت على الإطلاق. إذا كان الإعصار القمعي قد قطع 525 mi، فقدِّر سرعة الرياح بالقرب من مركز الإعصار القمعي.

حُـلّ كل متباينة مما يلي.

المثالان 3-4

22. $\log_6 x < -3$

23. $\log_4 x \geq 4$

24. $\log_3 x \geq -4$

25 $\log_2 x \leq -2$

26. $\log_5 x > 2$

27. $\log_7 x < -1$

28. $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$

29. $\log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3)$

30. $\log_3 (7x - 6) < \log_3 (4x + 9)$

31. $\log_5 (12x + 5) \leq \log_5 (8x + 9)$

32. $\log_{11} (3x - 24) \geq \log_{11} (-5x - 8)$

33. $\log_9 (9x + 4) \leq \log_9 (11x - 12)$

34. النمذجة يتم قياس شدة الزلزال على مقياس لوغاريتمي يُعرف باسم مقياس ريختر. حيث يتم تحديد شدة الزلزال M بالصيغة $M = \log_{10} x$، حيث يمثل x سعة الموجة الزلزالية التي تنتج عنها حركة الأرض.

a. كم ضعفًا تزيد السعة الناجمة عن زلزال تصل شدته إلى 8 درجات على مقياس ريختر عن توابع الزلزال الذي تصل شدته إلى 5 درجات على مقياس ريختر؟

b. في عام 1906، دُمرت ولاية سان فرانسيسكو بالكامل على إثر زلزال شدته 7.8 درجات. في عام 1911، حدث زلزال شدته 8.1 درجات على امتداد صدع نيو مدريد في وادي نهر المسيسيبي. كم ضعفًا يزيد زلزال نيو مدريد عن زلزال سان فرانسيسكو؟

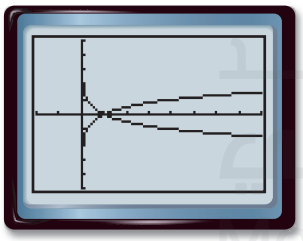
35. الموسيقى يتوافق أول مفتاح على لوحة مفاتيح البيانو مع طبقة صوت ترددها 27.5 دورة في الثانية. تُضرب طبقة الصوت في ثابت ما مع كل مفتاح تالٍ، تصاعديًا مع المفاتيح السوداء والبيضاء. تُحدد صيغة تردد طبقة الصوت الصادرة

في حال عزف النغمة رقم n على لوحة المفاتيح بالعلاقة $n = 1 + 12 \log_2 \frac{f}{27.5}$.

a. يصل تردد النغمة الموسيقية إلى 220 دورة في الثانية. كم عدد النغمات الموسيقية المتاحة على لوحة مفاتيح البيانو؟

b. يصل تردد إحدى طبقات الصوت الأخرى على لوحة المفاتيح إلى 880 دورة في الثانية. بعد عزف كم نغمة موسيقية تصاعديًا على لوحة المفاتيح يمكن إيجاد تلك النغمة؟

36. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستكتشف التمثيلين البيانيين الموضحين: $y = \log_4 x$ و $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.



$[-5, 5]$ scl: 1 × $[-2, 8]$ scl: 1

a. تحليليًّا ما وجه المقارنة بين شكلي التمثيلين البيانيين؟
ما وجه المقارنة بين خطي التقارب والتقاطع مع x في التمثيلين البيانيين؟

b. لفظيًّا صِف العلاقة بين التمثيلين البيانيين.

c. بيانيًّا استخدم ما تعرفه عن تحويلات التمثيلات البيانية للمقارنة والمقابلة بين التمثيل البياني لكل دالة والتمثيل البياني للعلاقة $y = \log_4 x$.

1. $y = \log_4 x + 2$ 2. $y = \log_4 (x + 2)$ 3. $y = 3 \log_4 x$

d. تحليليًّا صِف العلاقة بين $y = \log_4 x$ و $y = -1(\log_4 x)$ ما المجال والمدى المناسب لكل دالة؟

e. تحليليًّا اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني هو التمثيل البياني للعلاقة $y = \log_3 x$ بعد إزاحته بمقدار 4 وحدات إلى اليسار وبمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

37 الصوت العلاقة بين شدة الصوت I وعدد

وحدات ديسيبل β هي $\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$، حيث يمثل I شدة الصوت بوحدة الوات لكل متر مربع.

a. جـــد عدد وحدات ديسيبل لصوت مقدار شدته وات واحد لكل متر مربع.

b. جـــد عدد وحدات ديسيبل لصوت مقدار شدته 10^{-2} وات لكل متر مربع.

c. تبلغ شدة الصوت التي مقدارها وات واحد لكل متر مربع 100 ضعف شدة الصوت التي مقدارها 10^{-2} وات لكل متر مربع. لماذا لا يكون عدد وحدات ديسيبل للصوت 100 ضعف؟

مسائل مهارات التفكير العليا

استخدم مهارات التفكير العليا

38. نقد يبحث أسامة وخليفة عن حل للمتباينة $\log_3 x \geq -3$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

أسامة	خليفة
$\log_3 x \geq -3$	$\log_3 x \geq -3$
$x \geq 3^{-3}$	$x \geq 3^{-3}$
$x \geq \frac{1}{27}$	$0 < x \leq \frac{1}{27}$

39. تحفيز جـــد $\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$.

40. التبرير توضح خاصية التباين في اللوغاريتمات أنَّه عندما تكون $b > 1$، يكون $\log_b x > \log_b y$ فقط إذا كان $x > y$. ما الوضع عندما يكون $0 < b < 1$؟ اشرح استنتاجك.

41. الكتابة في الرياضيات وضح مدى ارتباط المجال والمدى للدوال اللوغاريتمية بالمجال والمدى للدوال الأسيّة.

42. مسألة غير محددة الإجابة أعطِ مثالًا لمعادلة لوغاريتمية ليس لها حل.

43. التبرير اختر المصطلح المناسب. اشرح استنتاجك. جميع المعادلات اللوغاريتمية تُكتب بالصيغة $Y = \log_b x$.

a. إذا كان أساس المعادلة اللوغاريتمية أكبر من 1 وقيمة x بين 0 و1، إذًا قيمة y تكون (*أقل من*، *أكبر من*، *تساوي*) 0.

b. إذا كان أساس المعادلة اللوغاريتمية يقع بين 0 و1 وقيمة x أكبر من 1، فإنَّ قيمة y تكون (*أقل من*، *أكبر من*، *تساوي*) 0.

c. يوجد (*لا شيء*، *واحد*، *عدد غير محدود*) *من الحلول لـــ* b في المعادلة $y = \log_b 0$.

d. يوجد (*لا شيء*، *واحد*، *عدد غير محدود*) *من الحلول لـــ* b في المعادلة $y = \log_b 1$.

44. الكتابة في الرياضيات وضح سبب تقاطع أي دالة لوغاريتمية بصيغة $y = \log_b x$ مع x في النقطة (1، 0) وعدم تقاطعها مع y.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

45. جـد x إذا كان $\frac{6.4}{x} = \frac{4}{7}$.

A 3.4
B 9.4
C 11.2
D 44.8

46. موضح فيما يلي مقدار الهطول الشهري في إحدى المدن خلال فترة من العام.

الشهر	الهطول (cm)
أبريل	3.60
مايو	5.15
يونيو	5.35
يوليو	3.18
أغسطس	3.83

جـد وسيط الهطول.

F 4.25 cm
G 4.22 cm
H 3.83 cm
J 3.60 cm

47. حصلت غايا على زيادة سنوية بمقدار 10% لمدة 3 سنوات على التوالي. فكم يبلغ راتبها الشهري بعد حصولها على الزيادات الثلاث إذا كان أول راتب حصلت عليه هو AED 12,000 في العام؟

A AED 14,520
B AED 15,972
C AED 16,248
D AED 16,410

48. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول لدى أحد البائعين 14 بالونة هيليوم للبيع: منها 9 بالونات صفراء و3 بالونات حمراء وبالونتان خضراوان. يتم اختيار البالونة وبيعها عشوائيًّا. إذا كانت البالونة المبيعة صفراء، فما نسبة احتمال أن تكون البالونة التالية، التي يتم اختيارها عشوائيًّا، صفراء أيضًا؟

F $\frac{1}{9}$
G $\frac{1}{8}$
H $\frac{36}{91}$
J $\frac{8}{13}$
K $\frac{9}{14}$

مراجعة شاملة

جـد قيمة كل تعبير. (الدرس 3-8)

49. $\log_4 256$
50. $\log_2 \frac{1}{8}$
51. $\log_6 216$
52. $\log_3 27$
53. $\log_5 \frac{1}{125}$
54. $\log_7 2401$

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي؛ تحقق من الحل. (الدرس 2-8)

55. $5^{2x+3} \leq 125$
56. $3^{3x-2} > 81$
57. $4^{4a+6} \leq 16^{a}$
58. $11^{2x+1} = 121^{3x}$
59. $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$
60. $8^{x-4} \leq 2^{4-x}$

61. الشحن يزيد ارتفاع أسطوانة شحن كبيرة بمقدار 4 m عن نصف قطرها. إذا كان حجم الأسطوانة يساوي 5π متر مكعب، فكم يبلغ طولها؟ استخدم الصيغة $V = \pi \times r^2 \times h$.

62. نظرية الأعداد عددان مركبان مترافقان مجموعهما 12 وحاصل ضربهما 40. جـد العددين.

مراجعة المهارات

حوّل إلى أبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغيرٌ يساوي صفرًا.

63. $x^5 \times x^3$
64. $a^2 \times a^6$
65. $(2p^2n)^3$
66. $(3b^3c^2)^2$
67. $\frac{x^4y^6}{xy^2}$
68. $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 8-1 إلى 8-4

مثّل كل دالة بيانيًّا. حدّد المجال والمدى. (الدرس 8-1)

1. $f(x) = 3(4)^x$
2. $f(x) = -(2)^x + 5$
3. $f(x) = -0.5(3)^{x+2} + 4$
4. $f(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 8$

5. **العلوم** أنت تدرس الآن دراسة الجماعة الأحيائية للبكتيريا. تبدأ الجماعة الأحيائية في الأصل بحوالي 6000 خلية بكتيرية. بعد مرور ساعتين، كان ثمة 28,000 خلية بكتيرية. (الدرس 8-1)

   a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لنمذجة عدد خلايا البكتيريا بعد مرور x من الساعات، إذا تغير عدد البكتيريا بالمعدل نفسه.

   b. كم عدد خلايا البكتيريا التي يمكن توقعها بعد 4 ساعات؟

6. **الاختيار من متعدد** أي الدوال الأسيّة يمر التمثيل البياني الخاص بها عبر النقطتين (0، 125) و(3، 1000)؟ (الدرس 8-1)

   A $f(x) = 125(3)^x$

   B $f(x) = 1000(3)^x$

   C $f(x) = 125(1000)^x$

   D $f(x) = 125(2)^x$

7. **الكثافة السكانية** في عام 1995، كانت كثافة إحدى المدن السكانية تبلغ 45,000 نسمة. ثم زادت حتى وصلت إلى 68,000 بحلول عام 2007. (الدرس 8-2)

   a. ما الدالة الأسية التي يمكن استخدامها لتمثيل الكثافة السكانية لهذه المدينة لمدة x عامًا بعد عام 1995؟

   b. استخدم النموذج الذي أعددته لتقدير الكثافة السكانية في عام 2020.

8. **الاختيار من متعدد** جد قيمة x في المعادلة $\log_3(x^2 + 2x) = \log_3(x + 2)$. (الدرس 8-3)

   F $x = -2, 1$

   G $x = -2$

   H $x = 1$

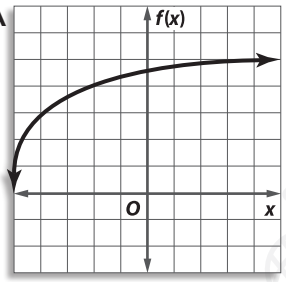
   J لا يوجد حل

مثّل كل دالة بيانيًّا. (الدرس 8-3)

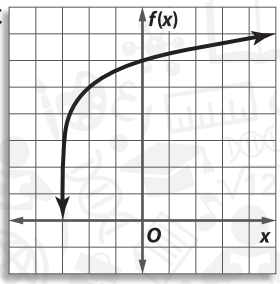
9. $f(x) = 3\log_2(x - 1)$
10. $f(x) = -4\log_3(x - 2) + 5$

11. **الاختيار من متعدد** أي من التمثيلات البيانية التالية يعبر عن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_3(x + 5) + 3$؟ (الدرس 8-3)

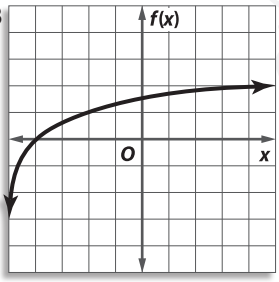
A



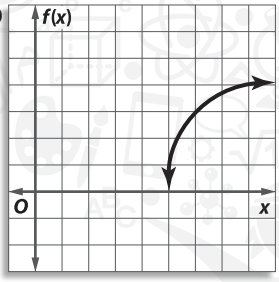
C



B



D



جد قيمة كل تعبير. (الدرس 8-3)

12. $\log_4 32$
13. $\log_5 5^{12}$
14. $\log_{16} 4$
15. اكتب $\log_9 729 = 3$ بالصيغة الأسية. (الدرس 8-3)

حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: تحقق من الحل. (الدروس 8-2 و8-4)

16. $3^x = 27^2$
17. $4^{3x-1} = 16^x$
18. $\frac{1}{9} = 243^{2x+1}$
19. $16^{2x+3} < 64$
20. $\left(\frac{1}{32}\right)^{x+3} \geq 16^{3x}$
21. $\log_4 x = \frac{3}{2}$
22. $\log_7(-x + 3) = \log_7(6x + 5)$
23. $\log_2 x < -3$
24. $\log_8(3x + 7) = \log_8(2x - 5)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 5-8

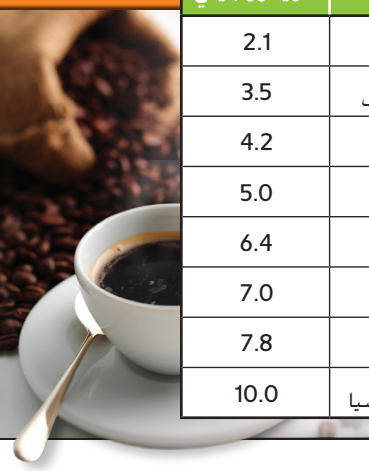
خصائص اللوغاريتمات

السابق:
- قمت بإيجاد قيمة التعبيرات اللوغاريتمية وحل المعادلات اللوغاريتمية.

الحالي:
1. تبسيط التعابير وإيجاد قيمها باستخدام خواص اللوغاريتمات.
2. حل معادلات لوغاريتمية باستخدام خواص اللوغاريتمات.

لماذا؟
- تعد نسبة الحموضة في الطعام ذات أهمية كبيرة لبعض المستهلكين ذوي المعدة الحساسة. تكون معظم الأطعمة التي نستهلكها حمضية أكثر منها قاعدية. يقيس مقياس الرقم الهيدروجيني نسبة الحموضة؛ حيث يشير الرقم الهيدروجيني المنخفض إلى أنَّ المحلول حمضي، في حين يشير الرقم الهيدروجيني المرتفع إلى أنَّ المحلول قاعدي. إنَّه مثال آخر لمقياس لوغاريتمي قائم على قوى العشرة. الرقم الهيدروجيني للقهوة السادة هو 5، في حين أن الرقم الهيدروجيني للماء الطبيعي هو 7. تعد القهوة السادة أكثر حمضية من الماء الطبيعي بمائة مرة، حيث إنَّ $10^{7-5} = 10^2$ أو 100.

المنتج	مستوى الرقم الهيدروجيني
عصير ليمون	2.1
مخلل الملفوف	3.5
طماطم	4.2
قهوة سادة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8
حليب المغنيسيا	10.0



ممارسات في الرياضيات
8 البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 خصائص اللوغاريتمات

نظرًا لأنَّ اللوغاريتمات عبارة عن أسس، يمكن استنباط خصائص اللوغاريتمات من خصائص الأسس. يمكن استنباط خاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات من خاصية ناتج ضرب الأسس الخاصة بالأسس.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات

الشرح لوغاريتم ناتج الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز بالنسبة إلى كل الأعداد الموجبة، a وb وx، حيث $x \neq 1$، $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.

مثال $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات أنَّ هذه الخاصية صحيحة، لنفترض أنَّ $b^x = a$ و$b^y = c$. عندئذٍ، باستخدام تعريف اللوغاريتم، $x = \log_b a$ و$y = \log_b c$.

$b^x b^y = ac$	التعويض
$b^{x+y} = ac$	ناتج ضرب الأسس
$\log_b b^{x+y} = \log_b ac$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$x + y = \log_b ac$	خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات
$\log_b a + \log_b c = \log_b ac$	عوض عن x بـ $\log_b a$ وعوض عن y بـ $\log_b c$

يمكنك استخدام خاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات لتقريب التعبيرات اللوغاريتمية.

مثال 1 استخدم خاصية ناتج الضرب

استخدم $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$	عوض عن 192 بـ 3×4^3 أو 3×64
$= \log_4 4^3 + \log_4 3$	خاصية ناتج الضرب
$= 3 + \log_4 3$	خاصية معكوس الأسس واللوغاريتمات
$\approx 3 + 0.7925$ أو 3.7925	عوض عن $\log_4 3$ بـ 0.7925

تمرين موجّه

1. استخدم $\log_4 2 = 0.5$ لتقريب قيمة $\log_4 32$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تذكر أنَّه يتم إيجاد ناتج قسمة الأسس من خلال طرحها. تتشابه مع هذه الخاصية خاصية ناتج القسمة في اللوغاريتمات. لنفترض أنَّ $b^x = a$ و $b^y = c$. إذًا، $\log_b a = x$ و $\log_b c = y$.

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{a}{c}$$

$b^{x-y} = \frac{a}{c}$ خاصية ناتج القسمة

$\log_b b^{x-y} = \log_b \frac{a}{c}$ خاصية المساواة في اللوغاريتمات

$x - y = \log_b \frac{a}{c}$ خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات

$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$ عوض عن x بـ $\log_b a$ وعوض عن y بـ $\log_b c$

المفهوم الأساسي خاصية ناتج قسمة اللوغاريتمات

الشرح يقصد بلوغاريتم ناتج القسمة الفرق بين اللوغاريتمات في البسط والمقام.

الرموز بالنسبة إلى كل الأعداد الموجبة a و b، و x، حيث $x \neq 1$.

$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$.

مثال $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مثال من الحياة اليومية 2 خاصية ناتج القسمة

العلوم **يُعرَّف الرقم الهيدروجيني للمادة بأنَّه تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ بوحدة المول. يتم تحديده بالصيغة $pH = \log_{10} \frac{1}{H^+}$. جد مقدار الهيدروجين في لتر واحد من المطر الحمضي الذي يبلغ رقمه الهيدروجيني 4.2.**

الفهم صيغة إيجاد الرقم الهيدروجيني والرقم الهيدروجيني للمطر متوفرين في المعطيات. المطلوب منك هو إيجاد مقدار الهيدروجين في لتر واحد من هذا المطر.

الخطة اكتب المعادلة. ثم جد حل $[H^+]$.

جد حل $pH = \log_{10} \frac{1}{H^+}$ المعادلة الأصلية

$4.2 = \log_{10} \frac{1}{H^+}$ عوض عن الرقم الهيدروجيني بالقيمة 4.2

$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} H^+$ خاصية ناتج القسمة

$4.2 = 0 - \log_{10} H^+$ $\log_{10} 1 = 0$

$4.2 = -\log_{10} H^+$ بسّط

$-4.2 = \log_{10} H^+$ اضرب الطرفين في -1

$10^{-4.2} = H^+$ تعريف اللوغاريتم

يوجد $10^{-4.2}$، أو ما يقرب من 0.000063، مول من الهيدروجين في اللتر الواحد من هذا المطر

التحقق $4.2 = \log_{10} \frac{1}{H^+}$ $pH = 4.2$

$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$ $H^+ = 10^{-4.2}$

$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$ خاصية ناتج القسمة

$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$ بسّط

$4.2 = 4.2$ ✓

الربط بالحياة اليومية

يتميز المطر الحمضي بأنَّه أكثر حمضية من المطر الطبيعي. يصعد الدخان والعوادم الناتجة عن احتراق الوقود الأحفوري إلى الغلاف الجوي ثم تتحد مع الرطوبة في الهواء ليتكون المطر الحمضي. قد يكون المطر الحمضي هو السبب الرئيسي وراء تآكل النصب التذكارية، كما هو موضح في الصورة أعلاه.

تمرين موجّه

2. الصوت يتم تحديد جهارة الصوت، L التي تُقاس بالديسيبل، بالعلاقة $L = 10 \log_{10} R$، حيث يمثل R شدة الصوت النسبية. افترض أنَّ شخصًا ما يتحدث بشدة صوت نسبية مقدارها 10^6 أو 60 ديسيبل. ما مقدار جهارة صوت 100 شخص يتحدثون بمقدار الشدة نفسه؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تذكر أنَّه يتم إيجاد أس الأس بواسطة ضرب الأسس. تتشابه مع هذه الخاصية خاصية الأسس بالنسبة إلى اللوغاريتم.

المفهوم الأساسي خاصية الأسس في اللوغاريتمات

الشرح لوغاريتم أس هو ناتج ضرب اللوغاريتم في الأس.

الرموز بالنسبة إلى أي عدد حقيقي p، والأعداد الموجبة m وb، حيث $b \neq 1$، يكون $\log_b m^p = p \log_b m$.

مثال $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

مثال 3 خاصية الأسس في اللوغاريتمات

المعطيات $\log_2 5 \approx 2.3219$ **قرّب قيمة** $\log_2 25$.

$\log_2 25 = \log_2 5^2$	عوض عن 25 بـ 5^2
$= 2 \log_2 5$	خاصية الأسس
$\approx 2(2.3219)$ أو 4.6438	عوض عن $\log_2 5$ بـ 2.3219

نصيحة دراسية

الأدوات يمكنك التحقق من هذه الإجابة من خلال إيجاد قيمة $2^{4.6438}$ على الآلة الحاسبة. من المفترض أن يكون الناتج على الآلة الحاسبة 25 تقريبًا، حيث إنَّ $\log_2 25 \approx 4.6438$ تعني أنَّ $2^{4.6438} \approx 25$.

تمرين موجّه

3. بافتراض أن $\log_3 7 \approx 1.7712$، جد قيمة $\log_3 7$ تقريبيًا.

2 حل المعادلات اللوغاريتمية

يمكنك استخدام خصائص اللوغاريتمات لحل المعادلات التي تتضمن لوغاريتمات.

مثال 4 حل المعادلات باستخدام خصائص اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x - 9) = 2$	خاصية ناتج الضرب
$x(x - 9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	اطرح 36 من كل طرف
$(x - 12)(x + 3) = 0$	حلل إلى عوامل
$x - 12 = 0$ أو $x + 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 12$ $\quad x = -3$	حل المعادلتين

التحقق $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

نظرًا لأنَّ $\log_6 (-3)$ و$\log_6 (-12)$ غير معرّفين، فإنَّ -3 يعد حلًا دخيلًا.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \times 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

الحل هو $x = 12$.

تمرين موجّه

4A. $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

4B. $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تحقق من فهمك

المثالان 2–1 استخدم $\log_4 3 \approx 0.7925$ و$\log_4 5 \approx 1.1610$ لإيجاد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

1. $\log_4 18$
2. $\log_4 15$
3. $\log_4 \frac{5}{3}$
4. $\log_4 \frac{3}{4}$

مثال 2

5. **تسلق الجبال** كلما ازداد الارتفاع، انخفض ضغط الهواء الجوي. يستند قانون الضغط إلى أنَّ الارتفاع يساوي $a = 15{,}500(5 - \log_{10} P)$. حيث يمثل a الارتفاع بالأمتار ويمثل P الضغط بالباسكال (رطل واحد على البوصة المربعة ≈ 6900 باسكال). ما مقدار ضغط الهواء بالباسكال فوق قمة كل من الجبلين المدرجين في الجدول الموضح على اليمين؟

الجبل	البلد	الارتفاع (m)
إفرست	نيبال/التبت	8850
تريسولي	الهند	7074
بونيت	الأرجنتين/تشيلي	6872
ماكينلي	الولايات المتحدة	6194
لوجان	كندا	5959

مثال 3 بافتراض أن $\log_3 5 \approx 1.465$ و$\log_5 7 \approx 1.2091$، جد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

6. $\log_3 25$
7. $\log_5 49$

مثال 4 حُلّ كل من المعادلات التالية. التحقق من الحل

8. $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$
9. $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$
10. $3 \log_2 x = \log_2 8$
11. $\log_{10} a + \log_{10} (a - 6) = 2$

التمرين وحل المسائل

المثالان 2–1 استخدم $\log_4 2 = 0.5$ و$\log_4 3 \approx 0.7925$ و$\log_4 5 \approx 1.1610$ لإيجاد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

12. $\log_4 30$
13. $\log_4 20$
14. $\log_4 \frac{2}{3}$
15. $\log_4 \frac{4}{3}$
16. $\log_4 9$
17. $\log_4 8$

مثال 2

18. **العلوم** تُقاس شدة الزلزال M على مقياس ريختر باستخدام الصيغة $M = \log_{10} x$، حيث x تمثل شدة الموجة الاهتزازية التي تنتج عنها حركة الأرض. في عام 2007، سجل أحد الزلازل التي وقعت بالقرب من ولاية سان فرانسيسكو 5.6 درجات تقريبًا على مقياس ريختر. في حين سُجلت شدة زلزال سان فرانسيسكو الشهير الذي وقع في عام 1906 بمقدار 8.3 درجات.

   a. كم ضعفًا تساوي شدة زلزال 1906 مقارنة بزلزال 2007؟

   b. صنَّف ريختر نفسه حجم زلزال 1906 بمقدار 8.3 درجات. تشير بعض الأبحاث التي أجريت حديثًا إلى أنَّه كان بشدة 7.9 درجات على الأرجح. كم ضعفًا كانت تزيد الشدة وفقًا لمقياس ريختر للزلزال؟

مثال 3 بافتراض أن $\log_6 8 \approx 1.1606$ و$\log_7 9 \approx 1.1292$، جد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

19. $\log_6 48$
20. $\log_7 81$
21. $\log_6 512$
22. $\log_7 729$

مثال 4 **المثابرة** حُلّ كل من المعادلات الآتية. التحقق من الحل

23. $\log_3 56 - \log_3 n = \log_3 7$
24. $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$
25. $5 \log_2 x = \log_2 32$
26. $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

B

27 الاحتمال في عام 1930، وضح الدكتور فرانك بينفورد طريقة ما لتحديد ما إذا كان قد تم اختيار مجموعة من الأرقام بطريقة عشوائية أم بطريقة يدوية. إذا لم يتم اختيار مجموعات الأعداد بطريقة عشوائية، فإنَّ قانون بينفورد، $P = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$.

يتوقع احتمال أن يكون الرقم d هو الرقم الأول في المجموعة. على سبيل المثال، يوجد احتمال بنسبة 4.6% أن يكون الرقم الأول 9.

a. أعد كتابة القانون لحله وإيجاد الرقم إذا تم تحديد الاحتمال.

b. جـــد الرقم الذي يحتمل تحديده بنسبة 9.7%

c. جـــد الاحتمال الذي يشير إلى أن يكون الرقم الأول هو 1 ($\log_{10} 1 \approx 0.30103$).

استخدم $\log_5 3 \approx 0.6826$ و$\log_5 4 \approx 0.8614$ لإيجاد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

28. $\log_5 40$

29. $\log_5 30$

30. $\log_5 \frac{3}{4}$

31. $\log_5 \frac{4}{3}$

32. $\log_5 9$

33. $\log_5 16$

34. $\log_5 12$

35. $\log_5 27$

حُـــلّ كل من المعادلات التالية. التحقق من الحل

36. $\log_3 6 + \log_3 x = \log_3 12$

37. $\log_4 a + \log_4 8 = \log_4 24$

38. $\log_{10} 18 - \log_{10} 3x = \log_{10} 2$

39. $\log_7 100 - \log_7 (y + 5) = \log_7 10$

40. $\log_2 n = \frac{1}{3}\log_2 27 + \log_2 36$

41. $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2}\log_{10} 36 = \log_{10} x$

حُـــلّ المعادلة لإيجاد n.

42. $\log_a 6n - 3 \log_a x = \log_a x$

43. $2 \log_b 16 + 6 \log_b n = \log_b (x - 2)$

حُـــلّ كل من المعادلات التالية. التحقق من الحل

44. $\log_{10} z + \log_{10} (z + 9) = 1$

45. $\log_3 (a^2 + 3) + \log_3 3 = 3$

46. $\log_2 (15b - 15) - \log_2 (-b^2 + 1) = 1$

47. $\log_4 (2y + 2) - \log_4 (y - 2) = 1$

48. $\log_6 0.1 + 2 \log_6 x = \log_6 2 + \log_6 5$

49. $\log_7 64 - \log_7 \frac{8}{3} + \log_7 2 = \log_7 4p$

50. الاستنتاج يعد الحوت الأحدب من الأنواع المهددة بالانقراض. افترض أنَّ هناك 5000 حوت أحدب موجود اليوم، إلا أنَّ الجماعة الأحيائية تنخفض بمعدل 4% سنويًا.

a. اكتب دالة لوغاريتمية للزمن بالسنوات استنادًا إلى الجماعة الأحيائية.

b. بعد كم سنة سينخفض عدد الجماعة الأحيائية عن 1000؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عام.

اذكر ما إذا كانت كل من المعادلات التالية *صوابًا* أم *خطأً*.

51. $\log_8 (x - 3) = \log_8 x - \log_8 3$

52. $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$

53. $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$

54. $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$

55. $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$

56. $\log_4 (z + 2) = \log_4 z + \log_4 2$

57. $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$

58. $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2 \log_9 x + 3 \log_9 y - 4 \log_9 z$

59. العرض معادلة جهارة الصوت L، بالديسيبل هي $L = 10 \log_{10} R$، حيث يمثل R شدة الصوت النسبية.

a. جـــد حل $120 = 10 \log_{10} R$ لإيجاد الشدة النسبية لعرض ماكي في عيد الشكر بجهارة صوت مقدارها 120 ديسيبل حسب مدى اقترابك منه.

b. يرغب بعض الآباء الذين يصطحبون معهم أطفالًا صغارًا في تخفيض مستوى الديسيبل إلى 80. كم مرة سيكون هذا أقل شدة؟ بعبارة أخرى، جـــد النسبة بين مقداري الشدتين؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

60. C المعرفة المالية يتحمل أحد البالغين متوسط العمر بطاقة ائتمان مدينة بمبلغ AED 8600 تقريبًا بمعدل مرابحة سنوي مقداره 18.3%. يمكن استخدام القانون $m = \frac{b\left(\frac{r}{n}\right)}{1-\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}}$ لحساب المدفوعات الشهرية m اللازمة لسداد رصيد بطاقة الائتمان b لعدد محدد t من السنوات، حيث يمثل r معدل المرابحة السنوي وn عدد المدفوعات لكل سنة.

a. ما مقدار المدفوعات الشهرية التي يجب دفعها لتسديد قيمة الدين في ثلاث سنوات على وجه الدقة؟ ما إجمالي المبلغ المدفوع؟

b. يمكن استخدام المعادلة $t = \frac{\log\left(1-\frac{br}{mn}\right)}{-n\log\left(1+\frac{r}{n}\right)}$ لحساب عدد السنوات اللازمة لجدول دفع محدد. انسخ الجدول وأكمله.

المدفوعات (m)	السنوات (t)
AED 50	
AED 100	
AED 150	
AED 200	
AED 250	
AED 300	

c. مثل المعلومات الواردة في الجدول في الجزء b بيانيًا.

d. إذا كان بإمكانك أن تتحمل دفع AED 100 فقط شهريًا، فهل ستتمكن من سداد الدين؟ إذا كنت ستتمكن من ذلك، فكم المدة التي ستستغرقها؟ إذا لم تتمكن من ذلك، فما السبب؟

e. ما الحد الأدنى من المدفوعات الشهرية الذي يمكِّنك من سداد الدين؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

61. مسألة غير محددة الإجابة اكتب تعبيرًا لوغاريتميًا لكل حالة، ثم اكتب التعبير الممتد.

a. ناتج الضرب وناتج القسمة

b. ناتج الضرب والأس

c. ناتج الضرب وناتج القسمة والأس

62. الفرضيات استخدم خصائص الأسس لإثبات خاصية الأسس للوغاريتمات.

63. الكتابة في الرياضيات اشرح سبب صحة المعادلات التالية.

a. $\log_b 0 = 1$ **b.** $\log_b b = 1$ **c.** $\log_b b^x = x$

64. تحفيز حوّل إلى أبسط صورة $\log_{\sqrt{a}} (a^2)$ لإيجاد القيمة العددية الدقيقة.

65. أيها لا ينتمي إلى المجموعة؟ جد التعبير الذي لا ينتمي إلى المجموعة. اشرح.

$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$ $\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$

$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$ $\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$

66. الاستنتاج استخدم خصائص اللوغاريتمات لإثبات أنَّ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

67. تحفيز حوّل إلى أبسط صورة $x^{3\log_x 2 - \log_x 5}$ لإيجاد القيمة العددية الدقيقة.

68. الكتابة في الرياضيات وضح مدى ارتباط خصائص الأسس واللوغاريتمات. مع ذكر أمثلة توضح خاصيتي ناتج القسمة والأسس للوغاريتمات على غرار المثال الوارد في بداية الدرس الذي يوضح خاصية ناتج الضرب.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة محمد بن راشد للتعليم الذكي
حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

69. جـــد نموذج البيانات.

22, 11, 12, 23, 7, 6, 17, 15, 21, 19

A 11 **C** 16

B 15 **D** لا يوجد نموذج.

70. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول ما تأثير ذلك في التمثيل البياني للمعادلة $y = 4x^2$ عند تغييرها إلى $y = 2x^2$؟

F يدور التمثيل البياني بمقدار 90 درجة حول نقطة الأصل.

G يقل عرض التمثيل البياني.

H يزيد عرض التمثيل البياني.

J يمثل التمثيل البياني للمعادلة $y = 2x^2$ انعكاسًا للتمثيل البياني $y = 4x^2$ عبر المحور x

K لا يتغير التمثيل البياني.

71. إجابة قصيرة في العلاقة $y = 6.5(1.07)^x$، يمثل x عدد السنوات منذ عام 2000، ويمثل y العدد التقريبي بالمليون للمواطنين الأمريكيين الذين يبلغون من العمر 7 سنوات فأكثر والذين ذهبوا إلى التخييم مرتين أو أكثر في ذلك العام. صف كيف يتغير عدد ملايين الأمريكيين الذين يذهبون إلى التخييم بمرور الوقت.

72. ما التقاطعات مع المحور x للتمثيل البياني للمعادلة $y = 4x^2 - 3x - 1$؟

A $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ **C** -1 و 1

B -1 و $\frac{1}{4}$ **D** 1 و $-\frac{1}{4}$

مراجعة شاملة

حُـلّ كل من المعادلات التالية. التحقق من الحل (الدرس 4-8)

73. $\log_5 (3x - 1) = \log_5 (2x^2)$

74. $\log_{10} (x^2 + 1) = 1$

75. $\log_{10} (x^2 - 10x) = \log_{10} (-21)$

جـــد قيمة كل تعبير. (الدرس 3-8)

76. $\log_{10} 0.001$

77. $\log_4 16^x$

78. $\log_3 27^x$

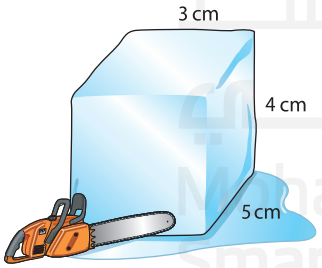
79. الكهرباء يمكن حساب شدة التيار بالأمبير I التي يستخدمها جهاز باستخدام الصيغة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$، حيث يمثل P القدرة بالوات ويمثل R المقاومة بالأوم. ما مقدار التيار الذي يستخدمه الجهاز إذا كان $P = 120$ وات و$R = 3$ أوم؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

حدّد ما إذا كان كل زوجين من الدوال يمثلان دوال متعاكسة. اكتب نعم أو لا.

80. $f(x) = x + 73$
$g(x) = x - 73$

81. $g(x) = 7x - 11$
$h(x) = \frac{1}{7}x + 11$

82. النحت يستعد أحمد لصناعة تحفة من الثلج. لديه قالب من الثلج يرغب في تقليل حجمه عن طريق نحت المقدار ذاته من الطول والعرض والارتفاع. كما يريد أن يقلل حجم قالب الثلج ليصبح 24 cm مكعبًا.



a. اكتب معادلة كثيرة الحدود لنمذجة الموقف.

b. ما المقدار الذي يجب نحته من كل بعد من الأبعاد؟

مراجعة المهارات

حل كل معادلة أو متباينة فيما يلي: تحقق من الحل.

83. $3^{4x} = 3^{3-x}$

84. $3^{2n} \leq \frac{1}{9}$

85. $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$

86. $49^x = 7^{x^2 - 15}$

87. $\log_2 (x + 6) > 5$

88. $\log_5 (4x - 1) = \log_5 (3x + 2)$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الدرس 6-8

اللوغاريتمات العادية

السابق:
- لقد قمت بتحويل التعبيرات إلى أبسط صورة وإيجاد حل المعادلات باستخدام خصائص اللوغاريتمات.

الحالي:
1. حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات العادية.
2. إيجاد قيم التعابير اللوغاريتمية باستخدام قانون تغيير الأساس.

لماذا؟
- يستخدم علماء الزلازل مقياس ريختر لقياس شدة أو مقدار الزلازل. يتم تحديد شدة الزلزال باستخدام لوغاريتم سعة الموجات التي سجلتها أجهزة قياس الزلازل. يستند المقياس اللوغاريتمي المستخدم في مقياس ريختر إلى قوى العشرة. على سبيل المثال، يمكن تمثيل زلزال بشدة 6.4 درجات بالصورة $\log_{10} x = 6.4$.

رقم ريختر	الشدة
1	10^1 ضعيف جدًا
2	10^2 ضعيف
3	10^3 ضعيف
4	10^4 خفيف
5	10^5 متوسط
6	10^6 قوي
7	10^7 شديد
8	10^8 هائل

المفردات الجديدة
اللوغاريتم العادي **common logarithm**
صيغة تغيير الأساس **change of base formula**

ممارسات في الرياضيات
4 استخدام نماذج الرياضيات.

1 اللوغاريتمات العادية

لقد لاحظت وظيفة لوغاريتم الأساس 10، $y = \log_{10} x$، حيث يستخدم في العديد من التطبيقات. تُعرف لوغاريتمات الأساس 10 باسم **اللوغاريتمات العادية**. عادة ما تُكتب اللوغاريتمات العادية بدون كتابة العدد السفلي 10.

$$\log_{10} x = \log x,\ x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية على مفتاح LOG لتقييم اللوغاريتمات العادية.

مثال 1 إيجاد اللوغاريتمات العادية

استخدم الحاسبة لإيجاد قيمة كل من التعابير التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $\log 5$

خطوات العملية على الحاسبة: 0.6989700043

$\log 5 \approx 0.6990$

b. $\log 0.3$

خطوات العملية على الحاسبة: 0.3 − 0.5228787453

$\log 0.3- \approx - 0.5229$

تمرين موجّه

1A. $\log 7$ **1B.** $\log 0.5$

ترتبط اللوغاريتمات العادية للأعداد التي تختلف حسب قوى العشرة المتكاملة ارتباطًا وثيقًا ببعضها. تذكر أنَّ اللوغاريتم عبارة عن أس. على سبيل المثال، في المعادلة $y = \log x$، يمثل y الأس الذي يُرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x.

$\log x = y$	يعني أنَّ	$10^y = x$
$\log 1 = 0$	حيث	$10^0 = 1$
$\log 10 = 1$	حيث	$10^1 = 10$
$\log 10^m = m$	حيث	$10^m = 10^m$

برنامج محمد بن راشد للتعليم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تستخدم اللوغاريتمات العادية في قياس الصوت. تقدر شدة الموسيقى المسجلة الهادئة بحوالي 36 ديسيبل (dB).

الربط بالحياة اليومية

مهندس الصوتيات يهتم مهندسو الصوتيات بتقليل الأصوات غير المرغوب فيها والتحكم في الضجيج وإنتاج الأصوات المفيدة. من الأمثلة على الأصوات المفيدة الموجات فوق الصوتية، والسونار وإعادة إنتاج الصوت. يتطلب العمل في هذا المجال الحصول على درجة بكالوريوس على الأقل.

مثال من الحياة اليومية 2 حل المعادلات اللوغاريتمية

حفل موسيقى الروك الجهارة L، بالديسيبل، تساوي $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث يمثل I شدة الصوت ويمثل m الحد الأدنى من شدة الصوت الذي تسمعه أذن الإنسان. يستطيع السكان الذين يقيمون على بعد عدة كيلومترات من موقع الحفل الموسيقي سماع الموسيقى بشدة مقدارها 66.6 ديسيبل. كم ضعفًا كان هذا الصوت بالنسبة إلى الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع للإنسان، إذا كانت قيمة m محددة بأنَّها تساوي 1؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	عوض عن L بـ 6.66 وعن m بـ 1
$6.66 = \log I$	اقسم كل طرف على 10 وبسّط
$I = 10^{6.66}$	الصيغة الأسيّة
$I \approx 4{,}570{,}882$	استخدم الحاسبة

بلغ الصوت الذي سمعه السكان 4,570,000 تقريبًا ضعف الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالنسبة إلى أذن الإنسان.

تمرين موجّه

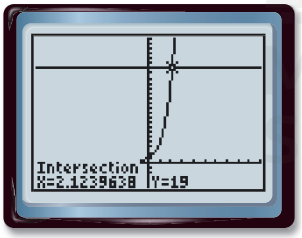
2. الزلازل يرتبط مقدار الطاقة E، بوحدة erg، التي يطلقها الزلزال بمقدار شدته على مقياس ريختر M من خلال المعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استخدم المعادلة لإيجاد مقدار الطاقة التي أطلقها زلزال سومطرة عام 2004، الذي بلغت قوته 9.0 درجات على مقياس ريختر مما أسفر عن حدوث تسونامي.

إذا تعذر كتابة كلا طرفي المعادلة الأسيّة في صورة أسس للأساس ذاته بسهولة، يمكنك الحل عن طريق أخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين.

مثال 3 حل المعادلات الأسيّة باستخدام اللوغاريتمات

جد حل $4^x = 19$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$x \log 4 = \log 19$	خاصية الأسس في اللوغاريتمات
$x = \frac{\log 19}{\log 4}$	اقسم كلا الطرفين على log 4
$x \approx 2.1240$	استخدم الحاسبة



[−10, 10] scl: 1 في [−5, 25] scl: 1

الحل هو 2.1240 تقريبًا.

التحقق يمكنك التحقق من هذه الإجابة بيانيًّا باستخدام حاسبة التمثيل البياني. مثل بيانيًّا المستقيم $y = 4^x$ والمستقيم $y = 19$. ثم استخدم قائمة **CALC** لإيجاد نقطة التقاطع بين التمثيلين البيانيين. نقطة التقاطع قريبة جدًا من الإجابة التي تم الحصول عليها جبريًا. ✓

تمرين موجّه

3A. $3^x = 15$

3B. $6^x = 42$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن استخدام الإستراتيجيات نفسها المستخدمة في حل المعادلات الأسيّة لحل المتباينات الأسيّة.

مثال 4 حل المتباينات الأسيّة باستخدام اللوغاريتمات

حُـلّ المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين في الدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية الأسس في اللوغاريتمات
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \frac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$
$\{y \mid y < -1.0972\}$	استخدم الحاسبة

التحقق اختبر $y = -2$.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \stackrel{?}{<} 7^{(-2)-2}$	عوض عن y بـ -2
$3^{-10} \stackrel{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\frac{1}{59,049} < \frac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

تمرين موجّه

حُـلّ كل متباينة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

4A. $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B. $4^{y} < 5^{2y+1}$

نصيحة دراسية

حل المتباينات تذكر أنّه يجب تغيير اتجاه المتباينة إذا تم ضرب كلا الطرفين في عدد سالب أو قسمته عليه. بما أنّ $5 \log 3 - \log 7 > 0$، إذًا، لن تتغير المتباينة.

2 صيغة تغيير الأساس

تتيح لك **صيغة تغيير الأساس** كتابة التعبيرات اللوغاريتمية المتكافئة التي لها أساسات مختلفة.

المفهوم الأساسي صيغة تغيير الأساس

الرموز بالنسبة إلى كل الأعداد الموجبة a وn، وb حيث $a \neq 1$ و$b \neq 1$.

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

← log العدد الأصلي بالنسبة إلى الأساس b

← log الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس b

مثال

$$\log_3 11 = \frac{\log_{10} 11}{\log_{10} 3}$$

لإثبات هذه الصيغة، نفترض أنّ $\log_a n = x$.

$a^x = n$	تعريف اللوغاريتم
$\log_b a^x = \log_b n$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$x \log_b a = \log_b n$	خاصية الأسس في اللوغاريتمات
$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$
$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	عوض عن x بـ $\log_a n$

الربط بالتاريخ والرياضيات

جون نابير (1550–1617)

كان جون نابير عالم رياضيات وعالم لاهوت اسكتلنديًّا. وهو أول من بدأ استخدام اللوغاريتمات للمساعدة في إجراء العمليات الحسابية. كما أنّه مشهور أيضًا بترويج استخدام النقطة العشرية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تجعل صيغة تغيير الأساس من الممكن إيجاد قيمة التعبير اللوغاريتمي بالنسبة إلى أي أساس من خلال ترجمة التعبير إلى تعبير آخر يتضمن لوغاريتمات عادية.

مثال 5 صيغة تغيير الأساس

عبِّر عن $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$$ صيغة تغيير الأساس

$$\approx 2.7268$$ استخدم الحاسبة

تمرين موجّه

5. عبِّر عن $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتمات العادية، ثم قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

تحقق من فهمك

مثال 1

استخدم الحاسبة لإيجاد قيمة كل من التعبيرات التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

1. $\log 5$ **2.** $\log 21$ **3.** $\log 0.4$ **4.** $\log 0.7$

مثال 2

5. العلوم يرتبط مقدار الطاقة E، بوحدة erg، التي يطلقها الزلزال بمقدار شدته على مقياس ريختر M من خلال المعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استخدم المعادلة لإيجاد مقدار الطاقة التي أطلقها زلزال تشيلي 1960، الذي بلغت قوته 8.5 درجات على مقياس ريختر.

مثال 3

جـد حل كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

6. $6^x = 40$ **7.** $2.1^{a+2} = 8.25$ **8.** $7^{x^2} = 20.42$ **9.** $11^{b-3} = 5^b$

مثال 4

حُـلّ كل متباينة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

10. $5^{4n} > 33$ **11.** $6^{p-1} \leq 4^p$

مثال 5

عبِّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب قيمته إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

12. $\log_3 7$ **13.** $\log_4 23$ **14.** $\log_9 13$ **15.** $\log_2 5$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

استخدم الحاسبة لإيجاد قيمة كل من التعبيرات التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

16. $\log 3$ **17.** $\log 11$ **18.** $\log 3.2$

19. $\log 8.2$ **20.** $\log 0.9$ **21.** $\log 0.04$

مثال 2

22. التفكير المنطقي لدى فاطمة كاتم صوت جديد مثبت في سيارتها. انخفض مستوى ضجيج المحرك من 85 ديسيبل إلى 73 ديسيبل.

a. كم ضعفًا يبلغ صوت السيارة المثبت بها كاتم الصوت القديم بالنسبة إلى الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع للإنسان، إذا كانت قيمة m محددة بأنَّها 1؟

b. كم ضعفًا يبلغ صوت السيارة المثبت بها كاتم صوت جديد بالنسبة إلى الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع للإنسان؟ جـد النسبة المئوية لانخفاض شِدَّة الصوت مع كاتم الصوت الجديد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 حُـــلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

23. $8^x = 40$

24. $5^x = 55$

25. $2.9^{a-4} = 8.1$

26. $9^{b-1} = 7^b$

27. $13^{x^2} = 33.3$

28. $15^{x^2} = 110$

مثال 4 حُـــلّ كل متباينة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

29. $6^{3n} > 36$

30. $2^{4x} \leq 20$

31. $3^{y-1} \leq 4^y$

32. $5^{p-2} \geq 2^p$

مثال 5 عبِّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب قيمته إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

33. $\log_7 18$

34. $\log_5 31$

35. $\log_2 16$

36. $\log_4 9$

37. $\log_3 11$

38. $\log_6 33$

39. الحيوانات الأليفة يمكن نمذجة عدد مالكي الحيوانات الأليفة n بالآلاف بعد عدد t من السنوات بواسطة المعادلة $n = 35[\log_4 (t + 2)]$. لنفرض أنَّ $t = 0$ تمثل 2000. استخدم صيغة تغيير الأساس للإجابة عن الأسئلة التالية.

a. كم كان عدد مالكي الحيوانات الأليفة في عام 2010؟

b. كم يستغرق الأمر حتى يصل عدد مالكي الحيوانات الأليفة إلى 80,000 مالك؟ متى سيحدث هذا؟

40. الدقة منذ خمس سنوات مضت، كان عدد الجماعة الأحيائية للدب الأشهب في إحدى الحدائق الوطنية 325 دبًّا. وأصبح عددها اليوم 450 دبًّا. تشير الدراسات إلى أنَّ الحديقة بإمكانها دعم زيادة عدد الجماعة الأحيائية حتى 750 دبًّا.

a. ما المعدل السنوي المتوسط لزيادة الجماعة الأحيائية إذا كان الدب الأشهب يتكاثر مرة واحدة في العام؟

b. كم عامًا سيستغرق الأمر حتى يصل إلى أقصى عدد إذا استمر معدل الزيادة في الجماعة الأحيائية بالمعدل المتوسط نفسه؟

حُـــلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

41. $3^x = 40$

42. $5^{3p} = 15$

43. $4^{n+2} = 14.5$

44. $8^{z-4} = 6.3$

45. $7.4^{n-3} = 32.5$

46. $3.1^{y-5} = 9.2$

47. $5^x \geq 42$

48. $9^{2a} < 120$

49. $3^{4x} \leq 72$

50. $7^{2n} > 52^{4n+3}$

51. $6^p \leq 13^{5-p}$

52. $2^{y+3} \geq 8^{3y}$

عبِّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب قيمته إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

53. $\log_4 12$

54. $\log_3 21$

55. $\log_8 2$

56. $\log_6 7$

57. $\log_5 (2.7)^2$

58. $\log_7 \sqrt{5}$

59. الموسيقى السنت الموسيقي هي وحدة في مقياس لوغاريتمي لطبقة الصوت أو الفترات الموسيقية النسبية. الجواب الواحد يعادل 1200 سنت. يمكن استخدام الصيغة $n = 1200\left(\log_2 \frac{a}{b}\right)$ لتحديد الفرق بالسنت بين نغمتين بترددين هما a وb.

a. جـــد الفترة بالسنت عندما يتغير التردد من 443 هرتز (Hz) إلى 415Hz.

b. إذا كانت الفترة تساوي 55 سنتًا وكان التردد الأولي يساوي 225 Hz، فجـــد التردد النهائي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حُـلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

60. $10^{x^2} = 60$

61 $4^{x^2-3} = 16$

62. $9^{6y-2} = 3^{3y+1}$

63. $8^{2x-4} = 4^{x+1}$

64. $16^x = \sqrt{4^{x+3}}$

65. $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$

66. علوم البيئة يجري أحد مهندسي البيئة اختبارًا لآبار مياه الشرب في المجتمعات الساحلية للتحقق من عدم وجود تلوث، لا سيما مستويات الزرنيخ غير الآمنة. الحد القياسي الآمن من الزرنيخ يعادل 0.025 جزءًا في المليون (ppm). كما أنَّه يجب أن يقل الرقم الهيدروجيني لمستوى الزرنيخ عن 9.5. صيغة تركيز أيون الهيدروجين هي $\text{pH} = -\log H$. (*تلميح*: يشغل كيلوجرام واحد من الماء حيز لتر واحد تقريبًا. $1\text{ ppm} = 1\text{ mg/kg}$).

a. افترض أنَّ تركيز أيون الهيدروجين في البئر يساوي 1.25×10^{-11}. هل على مهندس البيئة أن يقلق بشأن محتوى الزرنيخ العالي جدًا؟

b. وجد مهندس البيئة ملليجرامًا واحدًا من الزرنيخ في عينة مقدارها 3 لترات من الماء، هل يكون البئر آمنًا؟

c. ما نسبة تركيز أيون الهيدروجين التي تتوافق مع مستوى الرقم الهيدروجيني 9.5 المثير للقلق؟

67. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سيوجد حل المعادلة الأسيّة $4^x = 13$.

a. جدوليًّا أدخل الدالة $y = 4^x$ في حاسبة التمثيل البياني، وأنشئ جدولًا بقيم الدالة، وتنقَّل عبر الجدول لإيجاد x عندما يكون $y = 13$.

b. بيانيًّا مثِّل بيانيًّا $y = 4^x$ و$y = 13$ على الشاشة نفسها. استخدم خاصية **intersect** لإيجاد نقطة التقاطع.

c. عدديًّا جـد حل المعادلة جبريًّا. هل تؤدي جميع الطرق إلى النتيجة نفسها؟ اشرح لِمَ أو لِمَ لا.

مهارات التفكير العليا المسائل استخدام مهارات التفكير العليا

68. النقد يحل سامي وسالم المعادلة $4^{3p} = 10$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

سامي

$$4^{3p} = 10$$
$$\log 4^{3p} = \log 10$$
$$p \log 4 = \log 10$$
$$p = \frac{\log 10}{\log 4}$$

سالم

$$4^{3p} = 10$$
$$\log 4^{3p} = \log 10$$
$$3p \log 4 = \log 10$$
$$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$$

69. تحفيز حل $\log_a 3 = x \log_{\sqrt{a}} 3$ لإيجاد x مع شرح كل خطوة.

70. الاستنتاج اكتب $\frac{\log_5 9}{\log_5 3}$ في صورة لوغاريتم مفرد.

71. البرهان جـد قيم كل من $\log_3 27$ و$\log_{27} 3$. خمّن العلاقة بين $\log_a b$ و$\log_b a$ وبرهن هذا التخمين.

72. الكتابة في الرياضيات وضح مدى ارتباط الأسس واللوغاريتمات. مع ذكر أمثلة مثل طريقة حل المعادلة اللوغاريتمية باستخدام الأسس وطريقة حل المعادلة الأسيّة باستخدام اللوغاريتمات.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

73. أي من التعبيرات يمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3$ و$g(x) = x - 5$؟

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

74. إجابة موسعة استأجرت فوزية 3 أفلام وثائقية واثنتين من ألعاب الفيديو وفيلمين. بلغت التكلفة AED 16.29. في الأسبوع التالي، استأجرت فيلمًا وثائقيًا واحدًا و3 ألعاب فيديو و4 أفلام ليصل إجمالي التكلفة إلى AED 19.84. في الأسبوع الثالث، استأجرت فيلمين وثائقيين ولعبة فيديو واحدة وفيلمًا واحدًا ليصل إجمالي التكلفة إلى AED 9.14.

a. اكتب نظام معادلات لتحديد تكلفة استئجار كل عنصر على حدة.

b. كم تبلغ تكلفة استئجار كل عنصر؟

75. الهندسة إذا ازدادت مساحة سطح المكعب بالعامل 9. فما التغيير الذي سيطرأ على طول أضلاع المكعب؟

F الطول يساوي مِثلي الطول الأصلي.

G الطول يساوي 3 أمثال الطول الأصلي.

H الطول يساوي 6 أمثال الطول الأصلي.

J الطول يساوي 9 أمثال الطول الأصلي.

76. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول أي مما يلي يصف بدقة أكثر إزاحة التمثيل البياني $y = (x + 4)^2 - 3$ تجاه التمثيل البياني $y = (x - 1)^2 + 3$؟

A إلى أسفل 1 وإلى اليمين 3

B إلى أسفل 6 إلى اليسار 5

C إلى أعلى 1 وإلى اليسار 3

D إلى أعلى 1 وإلى اليمين 3

E إلى أعلى 6 وإلى اليمين 5

مراجعة شاملة

حُـلّ كل من المعادلات التالية. التحقق من الحل (الدرس 5-8)

77. $\log_5 7 + \frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 x$

78. $2\log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$

79. $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$

80. $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: (الدرس 4-8)

81. $\log_4 x = \frac{1}{2}$

82. $\log_{81} 729 = x$

83. $\log_8 (x^2 + x) = \log_8 12$

84. $\log_8 (3y - 1) < \log_8 (y + 5)$

85. الإبحار مساحة الشراع مثلث الشكل تساوي $16x^4 - 60x^3 - 28x^2 + 56x - 32$ متر مربع. قاعدة المثلث تساوي $x - 4$ أمتار. ما ارتفاع الشراع؟

86. إصلاح المنزل ركب السيد مازن أقفالًا جديدة. تقاضى صانع الأقفال AED 85 مقابل استدعاء الخدمة و AED 25 مقابل كل باب و AED 30 مقابل كل قفل.

a. اكتب معادلة تمثل تكلفة عدد x من الأبواب.

b. يريد السيد مازن تغيير أقفال الباب الأمامي والجانبي والخلفي وباب المرأب. فكم ستبلغ تكلفة هذا؟

مراجعة المهارات

اكتب معادلة أسيّة مكافئة.

87. $\log_2 5 = x$

88. $\log_4 x = 3$

89. $\log_5 25 = 2$

90. $\log_7 10 = x$

91. $\log_6 x = 4$

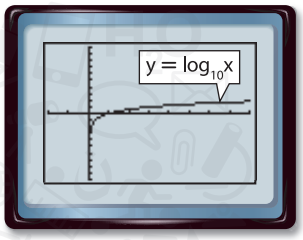
92. $\log_4 64 = 3$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

6-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

لقد قمت بحل المعادلات اللوغاريتمية جبريًا يمكنك أيضًا حل المعادلات اللوغاريتمية عن طريق التمثيل البياني أو استخدام الجدول. تتضمن حاسبة التمثيل البياني $y = \log_{10} x$ كدالة مدمجة. أدخل [Y=] [LOG] [X,T,θ,n] [GRAPH] لإظهار هذا التمثيل البياني.

لتمثيل الدوال اللوغاريتمية التي لها أساس آخر بخلاف 10 بيانيًا، يجب أن تستخدم صيغة تغيير الأساس، $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$.

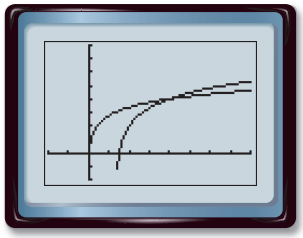


[−2, 8] scl: 1 × [−10, 10] scl: 1

النشاط 1

حُـلّ المعادلة $\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$.

الخطوة 1 مثّل كلًا من طرفي المعادلة بيانيًا.



[−2, 8] scl: 1 × [−2, 8] scl: 1

مثّل كل طرف من طرفي المعادلة بيانيًا باعتباره دالة مستقلة.
أدخل $\log_2 (6x - 8)$ باعتباره **Y1** و$\log_3 (20x + 1)$ باعتباره **Y2**. السابق

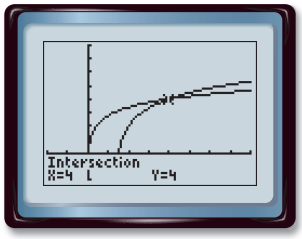
مثّل المعادلتين بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة:

[Y=] [LOG] 6 [X,T,θ,n] [−] 8 [)] [÷] [LOG] 2 [)]

[ENTER] [LOG] 20 [X,T,θ,n] [+] 1 [)] [÷] [LOG] 3 [)] [GRAPH]

الخطوة 2 استخدم ميزة **intersect**.

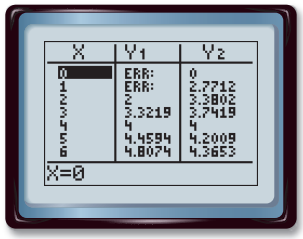


[−2, 8] scl: 1 × [−2, 8] scl: 1

استخدم خاصية **intersect** في قائمة **CALC** لتقريب الزوج المرتب لنقطة تقاطع المنحنيين.

توضح شاشة الحاسبة أنّ الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنيين هو 4.
أي أنّ حل المعادلة يساوي 4.

الخطوة 3 استخدم ميزة **TABLE**.



X	Y1	Y2
0	ERR:	0
1	ERR:	2.7712
2	2	3.3802
3	3.3219	3.7419
4	4	4
5	4.4594	4.2009
6	4.8074	4.3653

X=0

افحص الجدول لإيجاد قيمة x التي تتساوى عندها قيم y في التمثيل البياني. عند $x = 4$،
تشتمل كلتا الدالتين على قيمة y تساوي 4. ومن ثم، حل المعادلة هو 4.

يمكنك استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات اللوغاريتمية باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

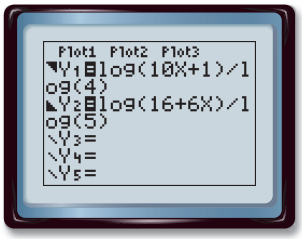
(يُتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية تابع

النشاط 2

حُـلّ المتباينة $\log_4 (10x + 1) < \log_5 (16 + 6x)$.



الخطوة 1 أدخل المتباينات.

أعد كتابة المسألة كنظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y < \log_4 (10x + 1)$ أو $y > \log_4 (10x + 1)$. بما أنَّ هذه المتباينة تحتوي على الرمز *أكبر من*، ظلِّل المنطقة فوق المنحنى.

أدخل الحد أولًا ثم استخدم مفتاحي السهم و ENTER لاختيار رمز التظليل أعلى المنحنى.

المتباينة الثانية هي $y < \log_5 (16 + 6x)$. ظلِّل المنطقة أسفل المنحنى حيث تحتوي هذه المتباينة على رمز *أقل من*.

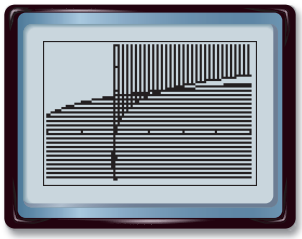
خطوات العملية على الحاسبة: Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ LOG 10 X,T,θ,n + 1) ÷

LOG 4) ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ LOG 16

+ 6 X,T,θ,n) ÷ LOG 5)

الخطوة 2 تمثيل النظام بيانيًّا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH



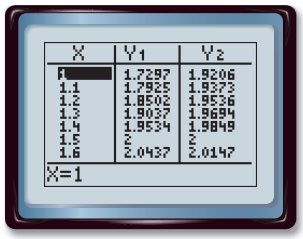
[−2, 4] scl: 1 × [−2, 4] scl: 1

يقع الحد الأيسر من مجموعة الحل حيث تكون المتباينة الأولى غير معرفة. إنَّه غير معرف بالنسبة إلى $10x + 1 \le 0$.

$$10x + 1 \le 0$$
$$10x \le -1$$
$$x \le -\frac{1}{10}$$

استخدم خاصية **intersect** في الحاسبة لإيجاد الحد الأيمن. يمكنك استنتاج أنَّ مجموعة الحل هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE** للتحقق من الحل.



ابدأ الجدول عند النقطة -0.1 ووضح قيم x بزيادات 0.1. تنقل عبر الجدول.

خطوات العملية على الحاسبة:

2nd [TBLSET] -0.1 ENTER 0.1 ENTER 2nd [TABLE]

يؤكد الجدول أنَّ حل المتباينة هو $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

التمارين

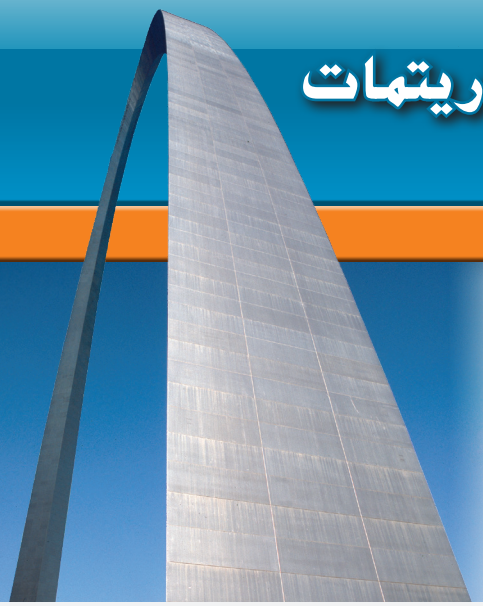
حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: تحقق من الحل.

1. $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$
2. $\log_6 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$
3. $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$
4. $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$
5. $\log_4 (9x + 1) > \log_3 (18x - 1)$
6. $\log_3 (3x - 5) \ge \log_3 (x + 7)$
7. $\log_5 (2x + 1) < \log_4 (3x - 2)$
8. $\log_2 2x \le \log_4 (x + 3)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-8

الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية



السابق

- لقد استخدمت اللوغاريتمات العادية.

الحالي

1 إيجاد قيم التعابير المشتملة على الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي.

2 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية.

لماذا؟

- يوجد قوس جيت واي في سانت لويس في ميسوري على شكل منحنى سلسلي مقلوب. يوجّه المنحنى السلسلي قوة وزنه على طوله، بحيث:
  - إذا تم تعليق حبل أو سلسلة، فإنه ينسحب مكونًا هذا الشكل.
  - إذا كان المنحنى السلسلي منتصبًا في وضع مستقيم، فإنه يمكنه تدعيم نفسه.

تتضمن معادلة المنحنى السلسلي e، وهو عدد مميز يظهر في كل مجالات الرياضيات والعلوم.

1 الأساس الطبيعي e واللوغاريتمات الطبيعية

كما هو الحال مع π و $\sqrt{2}$ ، العدد e عدد غير نسبي. قيمة e تساوي 2.71828... ويشار إليه باسم **الأساس الطبيعي، e**. تسمى الدالة الأسيّة ذات الأساس e **بالدالة الأسيّة للأساس الطبيعي**.

المفردات الجديدة

الأساس الطبيعي
natural base, e

الدالة الأسيّة للأساس الطبيعي
natural base exponential function

اللوغاريتم الطبيعي
natural logarithm

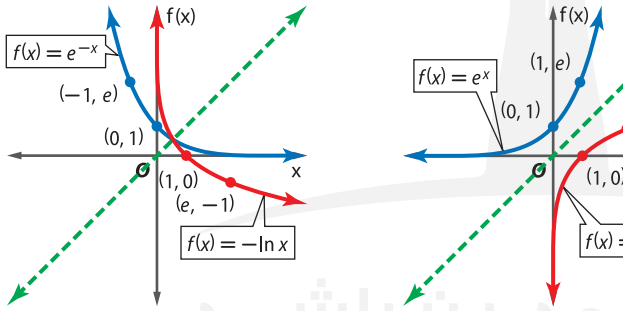
ممارسات في الرياضيات

7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

المفهوم الأساسي دوال الأساس الطبيعي

تُستخدم الدالة $f(x) = e^x$ لتمثيل النمو الأسّي المستمر.
تُستخدم الدالة $f(x) = e^{-x}$ لتمثيل الاضمحلال الأسّي المستمر.

يُسمى معكوس الدالة الأسيّة للأساس الطبيعي **باللوغاريتم الطبيعي**. يمكن كتابة هذا اللوغاريتم بالصورة $\log_e x$، لكن غالبًا ما يُختصر بالصورة $\ln x$.



يمكنك كتابة معادلة أسيّة للأساس e مكافئة لمعادلة لوغاريتمية طبيعية باستخدام الحقيقة $\ln x = \log_e x$.

$$\ln 4 = x \quad \rightarrow \quad \log_e 4 = x \quad \rightarrow \quad e^x = 4$$

مثال 1 كتابة التعابير المتكافئة

اكتب كل معادلة أسيّة في صورة لوغاريتم.

a. $e^x = 8$

$e^x = 8 \quad \rightarrow \quad \log_e 8 = x$

$\ln 8 = x$

b. $e^5 = x$

$e^5 = x \quad \rightarrow \quad \log_e x = 5$

$\ln x = 5$

تمرين موجّه

1A. $e^x = 9$

1B. $e^7 = x$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك أيضًا كتابة معادلة لوغاريتمية طبيعية مكافئة لمعادلة أسيّة لأساس طبيعي e.

$$e^x = 12 \quad \rightarrow \quad \log_e 12 = x \quad \rightarrow \quad \ln 12 = x$$

مثال 2 كتابة التعابير المتكافئة

اكتب كل معادلة لوغاريتمية في صورة أسيّة.

a. $\ln x \approx 0.7741$

$$\ln x \approx 0.7741 \quad \rightarrow \quad \log_e x = 0.7741$$
$$x \approx e^{0.7741}$$

b. $\ln 10 = x$

$$\ln 10 = x \quad \rightarrow \quad \log_e 10 = x$$
$$10 = e^x$$

تمرين موجّه

2A. $\ln x \approx 2.1438$

2B. $\ln 18 = x$

تنطبق خصائص اللوغاريتمات التي تعلمتها في الدرس 5-8 على اللوغاريتمات الطبيعية أيضًا. يمكن تبسيط التعابير اللوغاريتمية أدناه في صورة حد لوغاريتمي منفرد.

مثال 3 تبسيط التعابير التي تحتوي على e ولوغاريتم طبيعي

اكتب كل تعبير في صورة لوغاريتم منفرد.

a. $3 \ln 10 - \ln 8$

$$3 \ln 10 - \ln 8 = \ln 10^3 - \ln 8 \qquad \text{خاصية الأس للوغاريتمات}$$
$$= \ln \frac{10^3}{8} \qquad \text{خاصيّة ناتج القسمة للوغاريتمات}$$
$$= \ln 125 \qquad \text{بسّط}$$
$$= \ln 5^3 \qquad 5^3 = 125$$
$$= 3 \ln 5 \qquad \text{خاصيّة الأس للوغاريتمات}$$

التحقُق استخدم حاسبة للتحقق من الحل.

خطوات العملية على الحاسبة:

3 LN 10) − LN 8) ENTER **4.828313737**

خطوات العملية على الحاسبة: ✓ 3 LN 5) ENTER **4.828313737**

b. $\ln 40 + 2 \ln \frac{1}{2} + \ln x$

$$\ln 40 + 2 \ln \frac{1}{2} + \ln x = \ln 40 + \ln \frac{1}{4} + \ln x \qquad \text{خاصيّة الأس للوغاريتمات}$$
$$= \ln \left(40 \cdot \frac{1}{4} \cdot x\right) \qquad \text{خاصيّة ناتج الضرب للوغاريتمات}$$
$$= \ln 10x \qquad \text{بسّط}$$

تمرين موجّه

3A. $6 \ln 8 - 2 \ln 4$

3B. $2 \ln 5 + 4 \ln 2 + \ln 5y$

نصيحة دراسية

التحويل إلى أبسط صورة عندما تحوّل التعبيرات اللوغاريتمية إلى أبسط صورة، تحقق من أن اللوغاريتم لا يحتوي على عمليات ولا أسس.

نظرًا لأن الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي دالتان معكوستان، يمكن استخدامهما *لإلغاء* بعضهما بعضًا أو لتخلص بعضهما من بعض.

$$e^{\ln x} = x \qquad \ln e^x = x$$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المعادلات والمتباينات التي تحتوي على e وln

تكون المعادلات والمتباينات التي تحتوي على الأساس e أسهل في حلّها باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية بدلًا من استخدام اللوغاريتمات العادية، لأن $\ln e = 1$.

مثال 4 حل معادلات الأساس e

حُـلّ المعادلة $4e^{-2x} - 5 = 3$ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4e^{-2x} - 5 = 3$	المعادلة الأصلية
$4e^{-2x} = 8$	أضف 5 إلى كل طرف
$e^{-2x} = 2$	اقسم كلًا من الطرفين على 4
$\ln e^{-2x} = \ln 2$	خاصية التساوي في اللوغاريتمات
$-2x = \ln 2$	$\ln e^x = x$
$x = \frac{\ln 2}{-2}$	اقسم كلًا من الطرفين على −2
$x \approx -0.3466$	استخدم الحاسبة

خطوات العملية على الحاسبة: LN 2) ÷ −2 ENTER **-.34657359**

نصيحة دراسية

الحاسبات تتضمن معظم الحاسبات مفتاح e^x وLN لإيجاد قيمة تعبيرات الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

4A. $3e^{4x} - 12 = 15$

4B. $4e^{-x} + 8 = 17$

تمامًا مثلما يمكن استخدام اللوغاريتم الطبيعي للتخلص من e^x، يمكن استخدام الدالة الأسيّة للأساس الطبيعي للتخلص من $\ln x$.

مثال 5 حل متباينات ومعادلات اللوغاريتمات الطبيعية

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $3 \ln 4x = 24$

$3 \ln 4x = 24$	المعادلة الأصلية
$\ln 4x = 8$	اقسم كلًا من الطرفين على 3
$e^{\ln 4x} = e^8$	خاصيّة المساواة في الأسس
$4x = e^8$	$e^{\ln x} = x$
$x = \frac{e^8}{4}$	اقسم كلًا من الطرفين على 4
$x \approx 745.2395$	استخدم الحاسبة

b. $\ln (x - 8)^4 < 4$

$\ln (x - 8)^4 < 4$	المعادلة الأصلية
$e^{\ln (x-8)^4} < e^4$	اكتب كل طرف باستخدام الأسس والأساس e
$(x - 8)^4 < e^4$	$e^{\ln x} = x$
$x - 8 < e$	خاصيّة المساواة في الأسس
$x < e + 8$	أضف 8 إلى كل من الطرفين
$x < 10.7183$	استخدم الحاسبة

تمرين موجّه

حل كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

5A. $5 \ln 6x = 8$

5B. $\ln (2x - 3)^3 > 6$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكن إيجاد المرابحة المركَّبة بصفة مستمرة باستخدام e.

المفهوم الأساسي المرابحة المركَّبة بصفة مستمرة

احسب المرابحة المركّبة بصفة مستمرة باستخدام الصيغة التالية:

$$A = Pe^{rt},$$

حيث A يمثل المبلغ الموجود في الحساب بعد t من الأعوام وP يمثل مبلغ رأس المال المستثمَر وr يمثل نسبة المرابحة السنوية.

مثال من الحياة اليومية 6 حل متباينات الأساس e

المعرفة المالية عندما وُلدت رنا، أودع جداها AED 3000 في حساب توفير جامعي يدفع مرابحة مُركَّبة بصفة مستمرة بنسبة 4%.

a. على افتراض أنه لا توجد عمليات إيداع أو سحب على الحساب، كم سيكون الرصيد بعد 10 أعوام؟

$A = Pe^{rt}$ — قانون المرابحة المستمرة

$= 3000e^{(0.04)(10)}$ — $t = 10$ و $r = 0.04$، $P = 3000$

$= 3000e^{0.4}$ — بسِّط

≈ 4475.47 — استخدم الحاسبة

سيكون الرصيد AED 4475.47.

b. ما المدة التي سيستغرقها الرصيد ليصل إلى AED 10,000 على الأقل؟

$A < Pe^{rt}$ — قانون المرابحة المستمرة

$10{,}000 < 3000e^{(0.04)t}$ — $A = 10{,}000$ و $r = 0.04$، $P = 3000$

$\frac{10}{3} < e^{0.04t}$ — اقسم كلًا من الطرفين على 3000

$\ln \frac{10}{3} < \ln e^{0.04t}$ — خاصيّة المساواة في اللوغاريتمات

$\ln \frac{10}{3} < 0.04t$ — $\ln e^x = x$

$\frac{\ln \frac{10}{3}}{0.04} < t$ — اقسم كلًا من الطرفين على 0.04

$30.099 < t$ — استخدم الحاسبة

سيستغرق حوالي 30 عامًا للوصول إلى AED 10,000 على الأقل.

c. إذا كان الجدان يريدان أن يكون لدى رنا AED 10,000 بعد 18 سنة، فما مقدار المبلغ الذي سيحتاجان إلى استثماره؟

$10{,}000 = Pe^{(0.04)18}$ — $r = 0.04$, $A = 10{,}000$ و $t = 18$

$\frac{10{,}000}{e^{0.72}} = P$ — اقسم كلًا من الطرفين على $e^{0.72}$

$4867.52 \approx P$ — استخدم الحاسبة

يحتاجان إلى استثمار AED 4867.52.

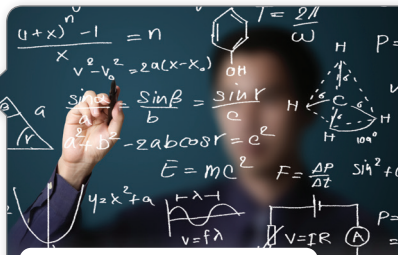
تمرين موجّه

6. استخدم المعلومات الواردة في المثال 6 للإجابة عن التالي.

A. إذا استثمرا AED 8000 بمرابحة مركبة بصفة مستمرة بنسبة 3.75%، فما مقدار المبلغ الذي سيكون في الحساب خلال 30 عامًا؟

B. إذا استطاعا إيداع AED 10,000 فقط في الحساب المذكور أعلاه، فبأي نسبة سيحتاج الحساب إلى الزيادة لكي يكون لدى رنا AED 30,000 خلال 18 عامًا؟

C. إذا وجد جدا رنا حسابًا يتلقى نسبة مركبة بصفة مستمرة 5% ويريدان أن يكون لديهما AED 30,000 بعد 18 عامًا، فما المبلغ الذي سيحتاجان إلى إيداعه؟



الربط بالحياة اليومية

يبلغ متوسط تكلفة المحاضرات والإقامة والإعاشة في الكليات العامة التي تبلغ مدة الدراسة بها أربعة أعوام حوالي 12,804 AED في العام.

المصدر: المركز الوطني لإحصاءات التعليم

نصيحة دراسية

الاستنتاج لتجنب أي أخطاء بسبب التقريب، لا تقم بالتقريب حتى تصل إلى نهاية عملياتك الحسابية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحقق من فهمك

المثالان 1–2 اكتب دالة أسيّة أو لوغاريتمية مكافئة.

1. $e^x = 30$

2. $\ln x = 42$

3. $e^3 = x$

4. $\ln 18 = x$

مثال 3 اكتب كلًا منها في صورة لوغاريتم منفرد.

5. $3 \ln 2 + 2 \ln 4$

6. $5 \ln 3 - 2 \ln 9$

7. $3 \ln 6 + 2 \ln 9$

8. $3 \ln 5 + 4 \ln x$

مثال 4 حُـلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

9. $5e^x - 24 = 16$

10. $-3e^x + 9 = 4$

11. $3e^{-3x} + 4 = 6$

12. $2e^{-x} - 3 = 8$

مثال 5 حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

13. $\ln 3x = 8$

14. $-4 \ln 2x = -26$

15. $\ln (x + 5)^2 < 6$

16. $\ln (x - 2)^3 > 15$

17. $e^x > 29$

18. $5 + e^{-x} > 14$

مثال 6 **19. العلوم** ينتشر فيروس عبر شبكة كمبيوتر وفقًا للصيغة $v(t) = 30e^{0.1t}$، حيث v يمثل عدد أجهزة الكمبيوتر المصابة وt يمثل الزمن بالدقائق. ما الوقت الذي سيستغرقه الفيروس ليصيب 10,000 جهاز كمبيوتر؟

التمرين وحل المسائل

المثالان 1–2 اكتب دالة أسيّة أو لوغاريتمية مكافئة.

20. $e^{-x} = 8$

21. $e^{-5x} = 0.1$

22. $\ln 0.25 = x$

23. $\ln 5.4 = x$

24. $e^{x-3} = 2$

25. $\ln (x + 4) = 36$

26. $e^{-2} = x^6$

27. $\ln e^x = 7$

مثال 3 اكتب كلًا منها في صورة لوغاريتم منفرد.

28. $\ln 125 - 2 \ln 5$

29. $3 \ln 10 + 2 \ln 100$

30. $4 \ln \frac{1}{3} - 6 \ln \frac{1}{9}$

31 $7 \ln \frac{1}{2} + 5 \ln 2$

32. $8 \ln x - 4 \ln 5$

33. $3 \ln x^2 + 4 \ln 3$

مثال 4 حُـلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

34. $6e^x - 3 = 35$

35. $4e^x + 2 = 180$

36. $3e^{2x} - 5 = -4$

37. $-2e^{3x} + 19 = 3$

38. $6e^{4x} + 7 = 4$

39. $-4e^{-x} + 9 = 2$

المثالان 5–6 **40. التفكير المنطقي** تنخفض قيمة سيارة معينة وفقًا للصيغة $v(t) = 18500e^{-0.186t}$، حيث يمثل t عدد الأعوام بعد شراء السيارة جديدة.

a. ما قيمة السيارة خلال 18 شهرًا؟

b. متى ستساوي السيارة نصف قيمتها الأصلية؟

c. متى ستكون قيمة السيارة أقل من AED 1000؟

جـد حل كل متباينة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

41. $e^x \leq 8.7$

42. $e^x \geq 42.1$

43. $\ln (3x + 4)^3 > 10$

44. $4 \ln x^2 < 72$

45. $\ln (8x^4) > 24$

46. $-2 [\ln (x - 6)^{-1}] \leq 6$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

47 المعرفة المالية استخدم الصيغة الخاصة بالمرابحة المركَّبة بصفة مستمرة.

a. إذا استثمرت AED 800 في حساب يتلقى مرابحة مركَّبة بصفة مستمرة بنسبة 4.5%، فما المبلغ الذي سيكون في الحساب خلال 5 أعوام؟

b. ما المدة التي ستستغرقها لمضاعفة المبلغ الخاص بك؟

c. إذا كنت تريد مضاعفة المبلغ الخاص بك خلال 9 أعوام، فما النسبة التي ستحتاج إليها؟

d. إذا كنت تريد فتح حساب يتلقى مرابحة مركّبة بصفة مستمرة بنسبة 4.75% وأن يكون لديك AED 10,000 في الحساب بعد 12 عامًا من إيداعك، فما المبلغ الذي تحتاج إلى إيداعه؟

اكتب التعبير في صورة مجموع أو فرق لوغاريتمات أو في صورة مضاعفات لوغاريتمات.

48. $\ln 12x^2$ **49.** $\ln \frac{16}{125}$ **50.** $\ln \sqrt[5]{x^3}$ **51.** $\ln xy^4z^{-3}$

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة.

52. $8^x = 24$ **53.** $3^x = 0.4$ **54.** $2^{3x} = 18$ **55.** $5^{2x} = 38$

56. النمذجة يُمثِّل قانون نيوتن للتبريد، والذي يمكن استخدامه لتحديد سرعة التبريد التي سيصل إليها الجسم في محيط معين، من العلاقة $T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$، حيث يمثل T_0 درجة الحرارة الابتدائية للجسم، وT_s درجة حرارة المحيط وt الزمن بالدقائق وk القيمة الثابتة التي تعتمد على نوع الجسم.

a. إذا وُضع كوب من القهوة درجة حرارته الابتدائية 180° في حجرة درجة حرارتها 70° وانخفضت درجة حرارة القهوة إلى 140° بعد 10 دقائق، فجد قيمة k.

b. استخدم قيمة k هذه لتحديد درجة حرارة القهوة بعد 20 دقيقة.

c. متى تصل درجة حرارة القهوة إلى 75°؟

57. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة ستستخدم $f(x) = e^x$ و$g(x) = \ln x$.

a. بيانيًّا مَثِّل كلًا من الدالتين ومحور التماثل لهما بيانيًا، $y = x$، بالنسبة إلى $-5 \le x \le 5$. ثم مثِّل $a(x) = e^{-x}$ بيانيًّا على التمثيل البياني نفسه.

b. تحليليًا على طول أي محور تعد التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و$g(x)$ انعكاسات؟ ما الدالة التي ستكون انعكاسًا لـ $f(x)$ على طول المحور الآخر؟

c. بيانيًّا حدد الدوال التي تعد انعكاسًا لـ $g(x)$. مَثِّل هذه الدوال الجديدة بيانيًّا.

d. لفظيًا نعرف أن $f(x)$ و$g(x)$ معكوستان. هل توجد دوال أخرى من الدوال الأخرى التي مثلناها بيانيًّا تعد معكوسات أيضًا؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

58. تحفيز حل المعادلة $4^x - 2^{x+1} = 15$ لإيجاد x.

59. البرهان أثبت أنَّ $\ln ab = \ln a + \ln b$ في اللوغاريتمات الطبيعية.

60. الاستنتاج حدد ما إذا كانت $x > \ln x$ صحيحة أحيانًا أو دائمًا أو غير صحيحة مطلقًا. اشرح استنتاجك.

61. مسألة غير محددة الإجابة عبِّر عن القيمة 3 باستخدام e^x واللوغاريتم الطبيعي.

62. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكن استخدام اللوغاريتم الطبيعي لإيجاد حل دالة أسيّة لأساس طبيعي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

63. بالنظر إلى الدالة $y = 2.34x + 11.33$. أي العبارات تقدم الوصف الأفضل لتأثير تحريك التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى أسفل؟

A يقل التقاطع مع المحور x.
B يقل التقاطع مع المحور y.
C يظل التقاطع مع المحور x كما هو.
D يظل التقاطع مع المحور y كما هو.

64. إجابة شبكية يبيع أحمد إطارات صور خشبية عبر الإنترنت. وهو يشتري المواد مقابل AED 85 ويدفع AED 19.95 مقابل الموقع الإلكتروني. فإذا كان أحمد يتقاضى AED 15 عن كل إطار، فكم عدد الإطارات التي سيكون بحاجة إلى بيعها ليحقق ربحًا لا يقل عن AED 270؟

65. حُـل المعادلة $|2x - 5| = 17$

F $-6, -11$
G $-6, 11$
H $6, -11$
J $6, 11$

66. يبيع متجر حيوانات أليفة محلي طعام الأرانب. وتكون تكلفة الأكياس التي تزن 5 أرطال هي AED 7.99. يمكن إيجاد التكلفة الإجمالية c لشراء n من الأكياس عن طريق—

A ضرب n في c.
B ضرب n في 5.
C ضرب n في تكلفة الكيس الواحد.
D قسمة n على c.

مراجعة شاملة

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. (الدرس 6-8)

67. $2^x = 53$

68. $2.3^{x^2} = 66.6$

69. $3^{4x-7} < 4^{2x+3}$

70. $6^{3y} = 8^{y-1}$

71. $12^{x-5} \geq 9.32$

72. $2.1^{x-5} = 9.32$

73. الصوت استخدم الصيغة $L = 10 \log_{10} R$. حيث يمثل L شدة الصوت وR شدة الصوت النسبية. افترض أن شدة صوت المنبّه تساوي 80 ديسيبل. جـد مقدار ارتفاع شدة صوت 10 منبهات مقابل منبه واحد. (الدرس 5–8)

بالنسبة إلى متعددة حدود وعواملها، جـد العوامل المتبقية. قد لا تكون بعض العوامل ذات حدين.

74. $x^3 + 5x^2 + 8x + 4; x + 1$

75. $x^3 + 4x^2 + 7x + 6; x + 2$

76. الحرف اليدوية تبيع السيدة عبير أشياء مصنوعة من الكروشيه. حيث تبيع بطانيات كروشيه كبيرة مقابل AED 60 وبطانيات أطفال مقابل AED 40 ومفارش طاولة مقابل AED 25 وحاملات أوعية مقابل AED 5. وتأخذ العدد التالي من العناصر إلى المعرض: 12 بطانية كروشيه و25 بطانية أطفال و45 مفرش طاولة و50 حامل أوعية.

a. اكتب مصفوفة مخزون لعدد كل عنصر ومصفوفة تكلفة لسعر كل عنصر.

b. افترض أن السيدة عبير تبيع كل العناصر. جـد الدخل الإجمالي لها في صورة مصفوفة.

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

77. $2^{3x+5} = 128$

78. $5^{n-3} = \frac{1}{25}$

79. $\left(\frac{1}{9}\right)^m = 81^{m+4}$

80. $\left(\frac{1}{7}\right)^{y-3} = 343$

81. $10^{x-1} = 100^{2x-3}$

82. $36^{2p} = 216^{p-1}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-8 مختبر ورقة البيانات
المرابحة المركبة

يمكنك استخدام ورقة بيانات لتنظيم البيانات وعرضها. تعد ورقة البيانات طريقة سهلة لمتابعة مبلغ المرابحة المكتسب على مدار فترة من الزمن.

لا تُكتسب المرابحة المركبة على المبلغ الأصلي فقط، ولكن أيضًا على أي مرابحة تمت إضافتها إلى المبلغ الأساسي.

ممارسات في الرياضيات
5 استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط

جـد المبلغ الإجمالي للمال بعد 5 سنوات إذا قمت بإيداع AED 100 بنسبة 7% مركبة سنويًا.

الخطوة 1 قم بتسمية الأعمدة كما هو موضَّح. المدة هي عام واحد.
أدخل القيم الأولية والنسبة.

الخطوة 2 سيتم إنشاء كل صف باستخدام الصيغ. أدخل الصيغ كما هو موضح.

حساب ادخار

	A	B	C	D	E
1	نهاية الفترة	رأس المال	المرابحة	الرصيد	نسبة المرابحة للفترة
2	0			$100.00	7%
3	=A2+1	=D2	=B3*E2	=C3+D2	

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

الخطوة 3 استخدم خاصية **FILL DOWN** لملء 4 صفوف إضافية.

حساب ادخار

	A	B	C	D	E
1	نهاية الفترة	رأس المال	المرابحة	الرصيد	نسبة المرابحة للفترة
2	0			$100.00	7%
3	1	$100.00	$7.00	$107.00	
4	2	$107.00	$7.49	$114.49	
5	3	$114.49	$8.01	$122.50	
6	4	$122.50	$8.58	$131.08	
7	5	$131.08	$9.18	$140.26	

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

إذا قمت بإيداع AED 100 بنسبة 7% مرابحة سنوية لمدة 5 سنوات، فسيكون لديك AED 140.26 بنهاية 5 سنوات.

التمارين

جـد الرصيد الإجمالي لكل حالة.

1. إيداع AED 500 لمدة 7 أعوام بنسبة 5%
2. إيداع AED 1000 لمدة 5 أعوام بنسبة 6%
3. إيداع AED 200 لمدة عامان بنسبة 10%
4. إيداع AED 800 لمدة 3 أعوام بنسبة 8%
5. اقتراض AED 10,000 لمدة 5 أعوام بنسبة 5.05%
6. اقتراض AED 25,000 لمدة 30 عامًا بنسبة 8%

Mohammed Bin Rashid SmartLearning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 8-8

استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

السابق:
- لقد استخدمت صيغ النمو الأسي والاضمحلال الأسي

الحالي:
1. استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تتضمن نموا واضمحلالا أسيا.
2. استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تتضمن نموا لوجيستيا.

لماذا؟
- يُعتقد أن آثار الأقدام القديمة لـ Acahualinca، والتي اكتُشفت في ماناغوا، نيكاراغوا، هي أقدم آثار لأقدام إنسان في العالم. باستخدام التأريخ بالكربون، يُقدّر العلماء عمر تلك الأقدام بـ 6000 عام.

المفردات الجديدة
- معدل النمو المستمر
rate of continuous growth
- معدّل الاضمحلال المستمر
of continuous decay
- نموذج النمو اللوجيستي
rate of continuous decay

ممارسات في الرياضيات
1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 النمو الأسّي والاضمحلال الأسّي

يستخدم العلماء والباحثون في كثير من الأحيان أشكالًا بديلة من صيغ النمو والاضمحلال التي تعلمتها في الدرس 1–8.

المفهوم الأساسي النمو الأسّي والاضمحلال الأسّي

النمو الأسّي	الاضمحلال الأسّي
يمكن تمثيل النمو الأسّي من خلال الدالة $f(x) = ae^{kt}$	يمكن تمثيل الاضمحلال الأسّي من خلال الدالة $f(x) = ae^{-kt}$
حيث يمثل a القيمة الابتدائية ويمثل t الزمن بالسنوات وk هو ثابت يُمثِّل **معدل النمو المستمر**.	حيث يمثل a القيمة الابتدائية ويمثل t الزمن بالسنوات وk هو ثابت يُمثِّل **معدل الاضمحلال المستمر**.

مثال من الحياة اليومية 1 الاضمحلال الأسّي

العلوم عمر النصف لمادة مشعة هو الوقت المستغرق لانحلال نصف ذرات المادة. يبلغ عمر النصف لعنصر الكربون 14 5730 عامًا. حدّد قيمة k ومعادلة انحلال عنصر الكربون 14.

إذا كان a يمثل الكمية الابتدائية للمادة، يمكن تمثيل الكمية y المتبقية بعد 5730 عامًا بأنها $\frac{1}{2}a$ أو $0.5a$.

$y = ae^{-kt}$	صيغة الاضمحلال الأسّي
$0.5a = ae^{-k(5730)}$	$t = 5730$ و $y = 0.5a$
$0.5 = e^{-5730k}$	اقسم كل طرف على a
$\ln 0.5 = \ln e^{-5730k}$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$\ln 0.5 = -5730k$	$\ln e^x = x$
$\frac{\ln 0.5}{-5730} = k$	اقسم كل طرف على -5730
$0.00012 \approx k$	استخدم الحاسبة

ومن ثم، تكون معادلة الانحلال لعنصر الكربون 14 هي $y = ae^{-0.00012t}$

تمرين موجه

1. يبلغ عمر النصف لعنصر البلوتونيوم 239 فترة 24,000 عام. حدّد قيمة k.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

والآن بما أن قيمة k لعنصر الكربون 14 معلومة، يمكن استخدامها لتأريخ الأحافير.

مثال من الحياة اليومية 2 تأريخ الكربون

العلوم قدَّر عالم الأحافير الذي يفحص عظام حيوان ما قبل التاريخ أن العظام تحتوي على 2% من عنصر الكربون 14 الذي كان موجودًا بها في حياة الحيوان.

a. منذ كم عامًا عاش هذا الحيوان؟

الفهم صيغة انحلال عنصر الكربون 14 هي $y = ae^{-0.00012t}$. أنت تريد معرفة منذ كم عامًا عاش هذا الحيوان.

التخطيط افترض أن a هي الكمية الابتدائية لعنصر الكربون 14 في جسم الحيوان. كمية y المتبقية بعد t من السنوات هي 2% من a أو $0.02a$.

جد حل

$y = ae^{-0.00012t}$	صيغة انحلال عنصر الكربون 14
$0.02a = ae^{-0.00012t}$	$y = 0.02a$
$0.02 = e^{-0.00012t}$	اقسم كل طرف على a
$\ln 0.02 = \ln e^{-0.00012t}$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$\ln 0.02 = -0.00012t$	$\ln e^x = x$
$\frac{\ln 0.02}{-0.00012} = t$	اقسم كل طرف على -0.00012
$32{,}600 \approx t$	استخدم الحاسبة

عاش هذا الحيوان منذ 32,600 عام.

التحقق استخدم الصيغة لإيجاد كمية العينة المتبقية بعد 32,600 عام. استخدم كمية أصلية تساوي 1.

$y = ae^{-0.00012t}$	المعادلة الأصلية
$= 1e^{-0.00012(32{,}600)}$	$t = 32{,}600$ و $a = 1$
≈ 0.02 or 2% ✓	استخدم الحاسبة

b. إذا كان بحث سابق يشير إلى أن عمر الحيوان حوالي 20,000، فما كمية عنصر الكربون 14 التي يجب أن توجد في الحيوان؟

$y = ae^{-0.00012t}$	صيغة انحلال عنصر الكربون 14
$= 1e^{-0.00012(20{,}000)}$	$t = 20{,}000$ و $a = 1$
$= e^{-2.4}$	بسِّط
$= 0.09$ or 9%	استخدم الحاسبة

تمرين موجه

2. استخدم المعلومات الواردة في مثال 2 للإجابة عن الأسئلة التالية.

A. عينة كانت تحتوي في الأصل على 42 mg من عنصر الكربون 14، تحتوي الآن على 8 mg. كم عمر الأحفورة؟

B. كان يُعتقد أن عمر عينة ماموث صوفي هو حوالي 12,000 عام. ما مقدار كمية عنصر الكربون 14 التي يجب أن توجد في الحيوان؟

تعتبر معادلة النمو الأسّي $y = ae^{kt}$ مطابقة لقانون المرابحة المركبة بصفة مستمرة الذي تعلمته في الدرس 7–8.

المرابحة المستمرة

$$A = Pe^{rt}$$

P = المبلغ الابتدائي
A = المبلغ عند الزمن t
r = نسبة المرابحة

نمو الجماعة الأحيائية

$$y = ae^{kt}$$

a = الجماعة الأحيائية الابتدائية
y = الجماعة الأحيائية عند الزمن t
k = معدل النمو المستمر

الربط بالحياة اليومية

يبلغ عمر أقدم أحفورة بشرية حديثة، وُجدت في أثيوبيا، ما يقرب من 160,000 عام.

المصدر: الإذاعة الوطنية العامة

نصيحة دراسية

تأريخ الكربون عند وجود نسبة مئوية أو كسر للاضمحلال، استخدم الكمية الأصلية التي مقدارها 1 لقيمة a.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid SmartLearning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال من الحياة اليومية 3 النمو الأسّي المستمر

تعداد السكان في عام 2007، كان تعداد السكان لدولة ما 9.36 ملايين نسمة. في عام 2000، بلغ 8.18 ملايين.

a. حدّد قيمة k، معدَّل النمو النسبي للدولة.

$y = ae^{kt}$	صيغة النمو الأسّي المستمر
$9.36 = 8.18e^{k(7)}$	$y = 9.36$، $a = 8.18$ و $t = 2007 - 2000$ أو 7
$\frac{9.36}{8.18} = e^{7k}$	اقسم كل طرف على 8.18
$\ln \frac{9.36}{8.18} = \ln e^{7k}$	خاصية المتساواة في اللوغاريتمات
$\ln \frac{9.36}{8.18} = 7k$	$\ln e^x = x$
$\frac{\ln \frac{9.36}{8.18}}{7} = k$	اقسم كل طرف على 7
$0.01925 = k$	استخدم الحاسبة

يقدَّر معدل النمو النسبي للدولة بحوالي 0.01925 أو بحوالي 2%.

b. متى سيصل تعداد السكان في الدولة إلى 12 مليون نسمة.

$y = ae^{kt}$	صيغة النمو الأسّي المستمر
$12 = 8.18e^{0.01925t}$	$k = 0.01925$ و$a = 8.18$، $y = 10$
$1.4670 = e^{0.01925t}$	اقسم كل طرف على 8.18
$\ln 1.4670 = \ln e^{0.01925t}$	خاصية المتساواة في اللوغاريتمات
$\ln 1.4670 = 0.01925t$	$\ln e^x = x$
$\frac{\ln 1.4670}{0.01925} = t$	اقسم كل طرف على 0.01925
$19.907 \approx t$	استخدم الحاسبة

سيصل تعداد السكان للدولة إلى 12 مليون نسمة بحلول عام 2020.

c. يمكن نمذجة التعداد السكاني لدولة أخرى في عام 2000 كان تعدادها 9.9 ملايين من خلال المعادلة $y = 9.9e^{0.0028t}$. حدّد متى سيتجاوز أول تعداد سكاني للدولة الأولى التعداد السكاني للدولة الأخرى التي كانت 9.9 ملايين.

$8.18e^{0.01925t} > 9.9e^{0.0028t}$	صيغة النمو الأسّي
$\ln 8.18e^{0.01925t} > \ln 9.9e^{0.0028t}$	خاصية التباين في اللوغاريتمات
$\ln 8.18 + \ln e^{0.01925t} > \ln 9.9 + \ln e^{0.0028t}$	خاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات
$\ln 8.18 + 0.01925t > \ln 9.9 + 0.0028t$	$\ln e^x = x$
$0.01645t > \ln 9.9 - \ln 8.18$	اطرح $(0.0028t + \ln 8.18)$ من كل طرف
$t > \frac{\ln 9.9 - \ln 8.18}{0.01645}$	اقسم كل طرف على 0.01645.
$t > 11.6$	استخدم الحاسبة

سيتجاوز تعداد السكان للدولة التعداد السكاني للدولة الأخرى خلال عام 2012.

نصيحة لحل المسائل

استخدم صيغة عند التعامل مع تعداد سكاني، فمن الضروري دائمًا استخدام صيغة نمو أسّي أو اضمحلال أسّي.

تمرين موجه

3. **علم الحياة** ينمو نوع ما من البكتيريا بمعدّل أسي وفقًا للنموذج $y = 1000e^{kt}$، حيث يمثل t الزمن بالدقائق.

A. فإذا كان هناك 1000 خلية في البداية و1650 بعد 40 دقيقة، فجد قيمة k للبكتيريا.

B. افترض أن نوعًا آخر من البكتيريا ينمو بمعدل أسي وفقًا للنموذج $y = 50e^{0.0432t}$. حدّد الوقت المُستغرق قبل أن يتجاوز عدد خلايا هذه البكتيريا عدد الخلايا في البكتيريا الأخرى.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

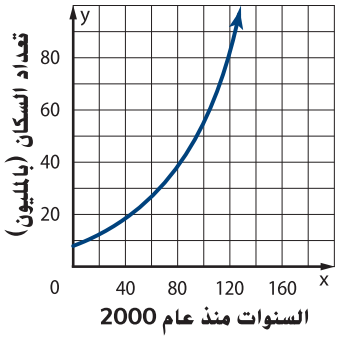
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 النمو اللوجستي

ارجع إلى المعادلة التي تمثّل حالة التعداد السكاني للدولة في مثال 3. وفقًا للتمثيل البياني في الجانب الأيسر، سيصل التعداد السكاني للدولة إلى حوالي مليار واحد بحلول عام 2130. هل يبدو هذا منطقيًا؟

لا يمكن أن ينمو السكان بنسبة كبيرة غير متناهية. فثمة قيود، مثل الإمدادات الغذائية والحرب والحيز المعيشي والأمراض والموارد المتاحة وغير ذلك.

النمو الأسّي غير مقيد، مما يعني أنه سيزداد دون حد. ومع ذلك، يمثّل **نموذج النمو اللوجستي** نموًا بعامل محدد. تُعدّ النماذج اللوجيستية أكثر النماذج دقة لتمثيل نمو السكان.

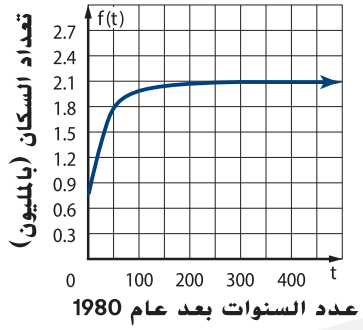


المفهوم الأساسي دالة النمو اللوجيستي

بافتراض أنّ a وb وc ثوابت موجبة حيث $b > 1$. تُمثّل دالة النمو اللوجيستي من خلال $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$، حيث تمثّل t الزمن.

مثال من الحياة اليومية 4 النمو اللوجيستي

يمكن تمثيل التعداد السكاني لفينيكس في أريزونا، بالملايين من خلال الدالة اللوجيستية $f(t) = \frac{2.0666}{1 + 1.66e^{-0.048t}}$، حيث يمثل t عدد السنوات بعد 1980.



a. مثّل الدالة بيانيًا لـ $0 \le t \le 500$.

b. ما خط التقارب الأفقي؟

خط التقارب الأفقي عند $y = 2.0666$.

c. هل سيزيد تعداد السكان لفينيكس بشكل لانهائي؟ إن لم يكن، فماذا سيكون الحد الأقصى للتعداد السكاني بها؟

لا. سيصل تعداد السكان إلى حد أقصى أقل بقليل من 2.0666 مليون نسمة.

d. وفقًا للدالة، متى سيصل تعداد السكان في فينكس إلى 1.8 مليون نسمة؟

يشير التمثيل البياني إلى أن تعداد السكان سيصل إلى 1.8 مليون نسمة عند $t \approx 50$. بالتعويض عن $f(t)$ بـ 1.8 وإيجاد قيمة t في نواتج المعادلة $t = 50.35$ عامًا. لذلك، سيصل تعداد السكان لفينكس إلى 1.8 مليون نسمة بحلول عام 2031.

نصيحة دراسية

نقاط التقاطع لتحديد موقع قطع التمثيل البياني 1.8 على الحاسبة، مثّل $y = 1.8$ بيانيًا على نفس التمثيل البياني وحدد *intersection* في القائمة CALC.

تمرين موجه

4. يمكن تمثيل الجماعة الأحيائية لأنواع معينة من الأسماك في بحيرة ما بعد عدد t من السنوات من خلال الدالة $P(t) = \frac{1880}{1 + 1.42e^{-0.037t}}$، حيث $t \ge 0$.

A. مثّل الدالة بيانيًا لـ $0 \le t \le 500$.

B. ما خط التقارب الأفقي؟

C. ما الحد الأقصى للجماعة الأحيائية للأسماك في البحيرة؟

D. متى سيصل عدد الجماعة الأحيائية إلى 1875؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحقق من فهمك

المثالان 1–2

1. **علم الأحافير** يبلغ عمر النصف لعنصر البوتاسيوم 40 حوالي 1.25 مليار عام.
   a. حدّد قيمة k ومعادلة الانحلال لعنصر البوتاسيوم 40.
   b. تحتوي عينة ما حاليًا على 36 ملليجرامًا من عنصر البوتاسيوم 40. ما الوقت الذي ستستغرقه العينة للانحلال إلى 15 ملليجرامًا فقط من عنصر البوتاسيوم 40.
   c. كم عدد ملليجرامات عنصر البوتاسيوم 40 التي ستتبقى بعد 300 مليون عام؟
   d. ما الوقت الذي سيستغرقه عنصر البوتاسيوم 40 للانحلال إلى ثُمن كميته الأصلية؟

مثال 3

2. **العلوم** وقع طعام معين على الأرض ونمت فيه بكتيريا بمعدل أسّي وفقًا للصيغة $y = 2e^{kt}$، حيث يمثل t الزمن بالثواني.
   a. فإذا كانت ثمة خليتان في البداية و8 خلايا بعد 20 ثانية، فجد قيمة k للبكتيريا.
   b. تنُص "قاعدة الثواني الخمس" على أنه إذا أكل الشخص الطعام الذي سقط على الأرض خلال 5 ثوانٍ. فلن يكون هناك أي ضرر. كم عدد البكتيريا الموجودة في الطعام بعد 5 ثوانٍ.
   c. هل ستأكل طعامًا ظل على الأرض لمدة 5 ثوانٍ. لم أو لم لا؟ هل تعتقد أن المعلومات التي حصلت عليها في هذا التمرين منطقية؟ اشرح.

مثال 4

3. **علم الحيوان** افترض أن الجماعة الأحيائية للثعلب الأحمر في موطن بيئي محدود تنمو وفقًا للدالة $P(t) = \frac{16{,}500}{1 + 18e^{-0.085t}}$، حيث تُمثّل t الزمن بالسنوات.
   a. مثّل الدالة بيانيًا لـ $0 \le t \le 200$.
   b. ما خط التقارب الأفقي؟
   c. ما أقصى عدد للجماعة الأحيائية؟
   d. متى يصل عدد الجماعة الأحيائية إلى 16,450؟

التمرين وحل المسائل

المثالان 1–2

4. **المثابرة** يبلغ عمر النصف لعنصر الروبيديوم 87 حوالي 48.8 مليون عام.
   a. حدّد قيمة k ومعادلة انحلال عنصر الروبيديوم 87.
   b. تحتوي عينة ما حاليًا على 50 mg من الروبيديوم 87. ما الوقت الذي ستستغرقه العينة للانحلال إلى 18 mg فقط من عنصر الروبيديوم 87.
   c. كم عدد الملليجرامات من عنصر الروبيديوم 87 التي ستتبقى بعد 800 مليون عام؟
   d. ما الوقت الذي سيستغرقه عنصر الروبيديوم 87 للانحلال إلى جزء من ستة عشر جزءًا من كميته الأصلية؟

مثال 3

5. **علم الحياة** ينمو نوع ما من البكتيريا بمعدّل أسي وفقًا للنموذج $y = 80e^{kt}$، حيث يمثل t الزمن بالدقائق.
   a. فإذا كانت توجد 80 خلية في البداية و675 بعد 30 دقيقة، فجد قيمة k للبكتيريا.
   b. متى ستصل البكتيريا إلى جماعة أحيائية عددها 6000 خلية؟
   c. إذا كان نوع آخر من البكتيريا ينمو بمعدل أسّي وفقًا للنموذج $y = 35e^{0.0978t}$، فحدّد كم سيمضي من الوقت قبل أن يتجاوز عدد خلايا هذه البكتيريا عدد الخلايا في البكتيريا الأخرى.

مثال 4

6. **علم الحراجة** تنمو الجماعة الأحيائية للأشجار في غابة معينة وفقًا للدالة $f(t) = \frac{18000}{1 + 16e^{-0.084t}}$، حيث يمثل t الزمن بالسنوات.
   a. مثّل الدالة بيانيًا لـ $0 \le t \le 100$.
   b. متى سيصل عدد الجماعة الأحيائية إلى 17500 شجرة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7. **علم الأحافير** وجد عالِم أحافير عظمة بشرية وحدّد أن نسبة عنصر الكربون 14 الذي وُجد في العظمة يساوي 85% من الذي وُجد في نسيج عظمي حي. كم عمر العظمة؟

8. **علم الإنسان** حدد عالم إنسان أن عمر عظمة بشرية تم اكتشافها حديثًا هو 8000 عام. ما مقدار الكمية الأصلية لعنصر الكربون 14 الموجودة في العظمة؟

9. **الانحلال الإشعاعي** تم تخزين 100 ملليجرام من عنصر اليورانيوم 238 في حاوية. إذا كان عمر النصف لليورانيوم 238 حوالي 4.47 ملايين عام، فبعد كم عامًا ستوجد 10 ملليجرامات فقط؟

10. **النمو السكاني** نما التعداد السكاني لولاية أوريجون من 3.4 ملايين في عام 2000 إلى 3.7 ملايين في عام 2006.
   a. اكتب معادلة النمو الأسّي بالصيغة $y = ae^{kt}$ لأوريجون، حيث يمثل t عدد السنوات بعد عام 2000.
   b. استخدم معادلتك في توقع تعداد السكان لأوريجون في عام 2020.
   c. وفقًا للمعادلة، متى سيصل تعداد سكان أوريجون إلى 6 ملايين نسمة؟

11. **عمر النصف** تنحل مادة ما بمقدار 99.9% من كتلتها الكلية بعد 200 عام. حدّد عمر النصف للمادة.

12. **النمو اللوجيستي** يمكن نمذجة التعداد السكاني لولاية أوهايو بعد عام 1900 بالدالة $P(t) = \frac{12.95}{1 + 2.4e^{-kt}}$، حيث يمثل t عدد الأعوام بعد عام 1900 وk ثابت.
   a. إذا كان تعداد السكان بأوهايو 10 ملايين في عام 1970، فجد قيمة k.
   d. وفقًا للمعادلة، متى سيصل تعداد سكان أوهايو إلى 12 مليونًا؟

13. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف النمو السكاني. يتبع النمو السكاني في بلد ما الدالة الأسّية $f(t) = 8e^{0.075t}$ أو الدالة اللوجيستية $g(t) = \frac{400}{1 + 16e^{-0.025t}}$. يُقدّر تعداد السكان بالملايين ويمثل t الزمن بالسنوات.
   a. **بيانيًّا** مثّل بيانيًّا كلًا من الدالتين لـ $0 \le t \le 100$.
   b. **تحليليًّا** حدّد تقاطع التمثيلات البيانية. ما أهمية هذا التقاطع؟
   c. **تحليليًّا** أي الدالتين تعد تقديرًا أكثر دقة للتعداد السكاني للبلد بعد 100 عام من الآن؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

14. **مسألة غير محددة الإجابة** أعطِ مثالًا على كمية تزداد أو تضمحل بمعدل ثابت. اكتب مسألة من الحياة اليومية تشتمل على المعدل وحلها باستخدام اللوغاريتمات.

15. **تحفيز** حل $\frac{120{,}000}{1 + 48e^{-0.015t}} = 24e^{0.055t}$ لإيجاد t.

16. **الفرضيات** اشرح رياضيًا سبب أنّ $f(t) = \frac{c}{1 + 60e^{-0.5t}}$ تقترب من القيمة c حيث $t \to +\infty$ ولكنها لا تصل إليها.

17. **مسألة غير محددة الإجابة** أعطِ مثالًا لكمية تتزايد لوجيستيًا ولها حدود للتزايد. اشرح سبب تزايد الكمية بهذه الطريقة.

18. **الكتابة في الرياضيات** كيف تُستخدَم الدوال الأسيّة والأسيّة المتصلة واللوجيستية لنمذجة الحالات المختلفة من الحياة اليومية؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

19. يصمم كريم تمثيلًا بقطاعات دائرية لتوضيح نكهات الآيس كريم المفضلة للزبائن في متجره. يُلخِّص الجدول البيانات. ما الزاوية المركزية التي ينبغي على كريم استخدامها للقسم الذي يمثِّل الشوكولاتة؟

النكهة	الزبائن
الشوكولاتة	35
الفانيليا	42
الفراولة	7
نكهة النعناع	12
زبدة الجوز	4

A 35°
B 63°
C 126°
D 150°

20. احتمالات تمتلك سالي 6 كتب على رف الكتب الخاص بها. منها اثنان من كتب الأدب وكتاب علوم واحد واثنان من كتب الرياضيات وقاموس واحد. ما احتمال أن تختار كتاب علوم وقاموسًا عشوائيًا؟

F $\frac{1}{3}$
G $\frac{1}{4}$
H $\frac{1}{12}$
J $\frac{1}{15}$

21. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول صنع رشيد لعبة من أجل حفلة عيد ميلاد أخته. لوحة اللعب عبارة عن دائرة مقسمة بالتساوي إلى 8 قطاعات. إذا كان نصف قطر الدائرة 18 in، فما المساحة التقريبية لأحد القطاعات؟

A 4 in^2
B 14 in^2
C 32 in^2
D 127 in^2
E 254 in^2

22. الإحصاء عند إجراء مسح شمل 90 من مدربي اللياقة البدنية قال 15 إنهم مارسوا الجري 5 مرات على الأقل كل أسبوع. وقال 5 من تلك المجموعة إنّهم مارسوا بالسباحة خلال الأسبوع، ومارس ما لا يقل عن 25% من جميع المدربين الجري والسباحة كل أسبوع. أي استنتاج يستند إلى المعلومات المقدمة؟

F التقرير دقيق لأن 15 من أصل 90 يساوي 25%.
G التقرير دقيق لأن 5 من أصل 15 يساوي 33%، وهو ما لا يقل عن 25%.
H التقرير غير دقيق لأن 5 من أصل 90 يساوي 5.6% فقط.
J التقرير غير دقيق لأنه لا أحد يعلم إذا كانت السباحة تمرينًا أم لا.

مراجعة شاملة

اكتب معادلة أسيّة أو لوغاريتمية مكافئة. (الدرس 7–8)

23. $e^7 = y$
24. $e^{2n-4} = 36$
25. $\ln 5 + 4 \ln x = 9$

26. الزلازل يوضح الجدول شدة بعض الزلازل القوية. (*تلميح:* الزلزال الذي يبلغ قياسه x تكون شدته بمقدار 10^x.) (الدرس 5–8 و6–8)

العام	الموقع	الشدة
1963	يوغوسلافيا	6.0
1970	بيرو	7.8
1988	أرمينيا	7.0
2004	المغرب	6.4
2007	إندونيسيا	8.4
2010	هايتي	7.0

a. أي زلزالين كانت شدة أحدهما 10 أمثال شدة الآخر؟ أي زلزالين كانت شدة أحدهما 100 ضعف شدة الآخر؟

b. كم ستكون شدة الزلزال الذي تساوي شدته 1000 ضعف شدة زلزال 1963 في يوغوسلافيا؟

c. افترض أنك تعرف أنّ $\log_7 2 \approx 0.3562$ و$\log_7 3 \approx 0.5646$. صِف طريقتين يمكنك استخدامهما لإيجاد قيمة $\log_7 2.5$ تقريبيًا. (قد تحتاج بالطبع إلى استخدام حاسبة). ثم صِف كيف يمكنك التحقق من نتيجتك.

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية. اكتب في أبسط صورة.

27. $\frac{8}{5}x = \frac{4}{15}$
28. $\frac{27}{14}n = \frac{6}{7}$
29. $\frac{3}{10} = \frac{12}{25}a$
30. $\frac{6}{7} = 9p$
31. $\frac{9}{8}b = 18$
32. $\frac{6}{7}y = \frac{3}{4}$
33. $\frac{1}{3}z = \frac{5}{6}$
34. $\frac{2}{3}q = 7$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

8-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
التبريد

في هذه التجربة، ستستكشف نوع المعادلة التي تُمثِّل نموذجًا للتغير في درجة حرارة الماء عندما يبرد في ظروف متنوعة.

إعداد التجربة

- اجمع مجموعة مختلفة من الحاويات، مثل كوب من الفوم وكوب قهوة خزفي وكوب معزول.
- قم بغلي الماء أو بإحضار ماء ساخن من الصنبور.
- اختر حاوية لاختبارها واملأها بماء ساخن.
  ضع مجَسّ درجة الحرارة في الكوب.
- وصل مجس درجة الحرارة بجهاز جمع البيانات الخاص بك.

النشاط

الخطوة 1 قم ببرمجة الجهاز لجمع 20 عينة أو أكثر بفاصل زمني قدره دقيقة واحدة.

الخطوة 2 انتظر بضع ثوان حتى يسخن المجس إلى درجة حرارة الماء.

الخطوة 3 اضغط على الزر لبدء جمع البيانات.

حلل النتائج

1. عند اكتمال جمع البيانات، مثِّل البيانات بيانيًّا في مخطط انتشار. استخدم الوقت كمتغير مستقل ودرجة الحرارة كمتغير غير مستقل. اكتب عبارة تصف النقاط الموجودة على التمثيل البياني.
2. استخدم قائمة STAT لإيجاد معادلة لتمثيل البيانات التي جمعتها. جرِّب نماذج خطيّة وتربيعية وأسيّة. أي نموذج يبدو أنه يناسب البيانات بالشكل الأفضل؟ اشرح.
3. هل تتوقع أن تنخفض درجة حرارة الماء إلى ما دون درجة حرارة الغرفة؟ اشرح استنتاجك.
4. استخدم جهاز جمع البيانات لإيجاد درجة حرارة الهواء في الغرفة. مثِّل بيانيًّا الدالة $y = t$، حيث يمثِّل t درجة حرارة الغرفة، على مخطط الانتشار ومعادلة النموذج. صِف العلاقة بين التمثيلين البيانيين.
   ما معنى العلاقة في سياق التجربة؟

التخمين

5. هل تعتقد أن نتائج التجربة ستتغير إذا استخدمت حاوية معزولة للماء؟ أي جزء في الدالة سيتغير، الثابت أم معدَّل الاضمحلال؟ كرر التجربة للتحقق من تخمينك.
6. كيف يمكن أن تتغير نتائج التجربة إذا أضفت الثلج إلى الماء؟
   أي جزء في الدالة سيتغير، الثابت أم معدَّل الاضمحلال؟
   كرر التجربة للتحقق من تخمينك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 8 دليل الدراسة والمراجعة

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسّية (الدرسين 1–8 و2–8)

- تكون الدالة الأسيّة بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a \neq 0$، $b > 0$ و $b \neq 1$.
- خاصية المساواة في الدوال الأسيّة: إذا كان b عددًا موجبًا غير 1، إذًا $b^x = b^y$ فقط إذا كان $x = y$.
- خاصية التباين في الدوال الأسيّة: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$، و$b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
(الدروس من 3–8 إلى 6–8)

- افترض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. بالنسبة إلى $x > 0$، يوجد العدد y بحيث $\log_b x = y$ إذا وفقط إذا كان $b^y = x$.
- لوغاريتم ناتج الضرب يساوي مجموع لوغاريتمات عوامله.
- لوغاريتم ناتج القسمة يساوي الفرق بين لوغاريتمات البسط والمقام.
- لوغاريتم الأس يساوي ناتج لوغاريتم الأس.
- صيغة تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية (الدرس 7–8)

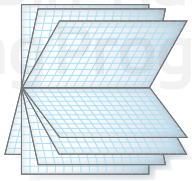
- بما أن دالة الأساس الطبيعي ودالة اللوغاريتم الطبيعي معكوستان، تُستخدَم هاتان الدالتان "لإلغاء" بعضهما بعضًا.

استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية (الدرس 8–8)

- يمكن تمثيل النمو الأسّي من خلال الدالة $f(x) = ae^{kt}$، حيث k ثابت يمثّل معدل النمو المستمر.
- يمكن تمثيل الاضمحلال الأسّي من خلال الدالة $f(x) = ae^{-kt}$، حيث k ثابت يُمثّل معدل الاضمحلال المستمر.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في مطويتك.



المفردات الأساسية

خط التقارب	لوغاريتم
صيغة تغيير الأساس	المعادلة اللوغاريتمية
اللوغاريتم العادي	الدالة اللوغاريتمية
المرابحة المركبة	المتباينة اللوغاريتمية
عامل الاضمحلال	نموذج النمو اللوجيستي
الاضمحلال الأسي	الأساس الطبيعي، e
المعادلة الأسيّة	الدالة الأسيّة للأساس الطبيعي
الدالة الأسيّة	اللوغاريتم الطبيعي
النمو الأسي	معدَّل الاضمحلال المستمر
المتباينة الأسيّة	معدل النمو المستمر
عامل النمو	

مراجعة المفردات

اختر من القائمة أعلاه كلمة أو مصطلحًا يكمل كل عبارة أو جملة بأفضل شكل.

1. دالة بالصيغة $f(x) = b^x$ حيث $b > 1$ هي دالة _____.
2. $\ln x = b^y$، يُسمى المتغير y _____ لـ x.
3. تُسمى لوغاريتمات الأساس 10 _____.
4. _____ هي معادلة تكون فيها المتغيرات في صورة أسس.
5. تتيح لك _____ كتابة تعبيرات لوغاريتمية متكافئة لها أساسات مختلفة.
6. يُسمى أساس الدالة الأسيّة، $A(t) = a(1 - r)^t$، $1 - r$ باسم _____.
7. تُسمى الدالة $y = \log_b x$، حيث $b > 0$ و $b \neq 1$، باسم _____.
8. تُسمى الدالة الأسيّة ذات الأساس e باسم _____.
9. يُسمى اللوغاريتم ذو الأساس e باسم _____.
10. يشار إلى العدد e باسم _____.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid SmartLearning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

8-1 التمثيل البياني للدوال الأسيّة

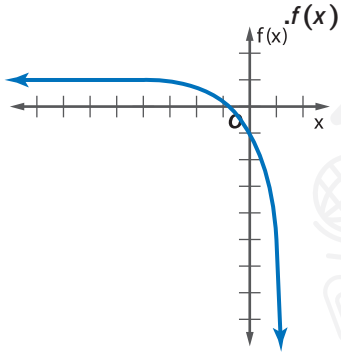
مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى.

11. $f(x) = 3^x$
12. $f(x) = -5(2)^x$
13. $f(x) = 3(4)^x - 6$
14. $f(x) = 3^{2x} + 5$
15. $f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$
16. $f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3$

17. **تعداد السكان** يقل التعداد السكاني لمدينة ما تعدادها 120,000 بمعدل 3% سنويًا.
   a. اكتب الدالة التي تمثّل هذه الحالة.
   b. كم سيكون عدد الجماعة الأحيائية خلال 10 أعوام؟

مثال 1

مثّل بيانيًا $f(x) = -2(3)^x + 1$. حدّد المجال والمدى.



المجال هو كل الأعداد الحقيقية، والمدى هو كل الأعداد الحقيقية الأقل من 1.

8-2 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي:

18. $16^x = \frac{1}{64}$
19. $3^{4x} = 9^{3x+7}$
20. $64^{3n} = 8^{2n-3}$
21. $8^{3-3y} = 256^{4y}$
22. $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$
23. $27^{3x} \le 9^{2x-1}$

24. **البكتيريا** تبدأ جماعة أحيائية لبكتيريا بعدد 5000 بكتيريا. بعد 8 ساعات كان ثمة 28,000 في العينة.
   a. اكتب دالة أسيّة يمكن استخدامها لنمذجة عدد خلايا البكتيريا بعد مرور x من الساعات، إذا تغير عدد البكتيريا بالمعدل نفسه.
   b. كم عدد البكتيريا الذي يمكن توقعه في العينة بعد 32 ساعة؟

مثال 2

حل $4^{3x} = 32^{x-1}$ لإيجاد x.

$4^{3x} = 32^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$	أعد كتابة المعادلة بحيث يكون لكل من الطرفين الأساس نفسه
$2^{6x} = 2^{5x-5}$	أس الأس
$6x = 5x - 5$	خاصية المساواة في الأسس
$x = -5$	من كلا الطرفين 5x اطرح

الحل هو -5.

8-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

25. اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ في صورة أسيّة.
26. اكتب $10^2 = 100$ في صورة لوغاريتمية.

جـد قيمة كل تعبير.

27. $\log_4 256$ 4
28. $\log_2 \frac{1}{8}$

مثّل كل دالة بيانيًا.

29. $f(x) = 2 \log_{10} x + 4$
30. $f(x) = \frac{1}{6} \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$

مثال 3

قيّم $\log_2 64$.

$\log_2 64 = y$	افترض أنّ اللوغاريتم يساوي y
$64 = 2^y$	تعريف اللوغاريتم
$2^6 = 2^y$	$64 = 2^6$
$6 = y$	خاصية المساواة في الأسس

برنامج محمد بن راشد للتعليم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-4 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي:

31. $\log_4 x = \frac{3}{2}$

32. $\log_2 \frac{1}{64} = x$

33. $\log_4 x < 3$

34. $\log_5 x < -3$

35. $\log_9 (3x - 1) = \log_9 (4x)$

36. $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$

37. $\log_3 (3x + 4) \leq \log_3 (x - 2)$

38. الزلزال تقاس شدة الزلزال على مقياس لوغاريتمي يُسمى مقياس ريختر. حيث يتم تحديد شدة الزلزال M بالصيغة $M = \log_{10} x$، حيث يمثل x سعة الموجة الزلزالية التي تنتج عنها حركة الأرض. بكم ضعف تفوق السعة الناتجة عن زلزال بمقدار 10 درجات على مقياس ريختر تلك الناتجة عن هزة ارتدادية بمقدار 7 درجات على مقياس ريختر؟

مثال 4

حُـلّ المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$.

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$	المتباينة الأصلية
$x < 27^{\frac{2}{3}}$	متباينة لوغاريتمية إلى متباينة أسّية
$x < 9$	بسّط

مثال 5

حُـلّ المعادلة $\log_5 (p^2 - 2) = \log_5 p$.

$\log_5 (p^2 - 2) = \log_5 p$	المعادلة الأصلية
$p^2 - 2 = p$	خاصية المساواة
$p^2 - p - 2 = 0$	اطرح من p من كلا الطرفين
$(p - 2)(p + 1) = 0$	حلل إلى العوامل
$p - 2 = 0$ أو $p + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$p = 2$ $\quad$ $p = -1$	جد حل كل من المعادلتين

الحل هو $p = 2$، حيث إنَّ $\log_5 p$ غير معرَّفة عند $p = -1$.

8-5 خصائص اللوغاريتمات

استخدم $\log_5 16 \approx 1.7227$ و $\log_5 2 \approx 0.4307$ لإيجاد القيمة التقريبية لكل تعبير.

39. $\log_5 8$

40. $\log_5 64$

41. $\log_5 4$

42. $\log_5 \frac{1}{8}$

43. $\log_5 \frac{1}{2}$

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل.

44. $\log_5 x - \log_5 2 = \log_5 15$

45. $3 \log_4 a = \log_4 27$

46. $2 \log_3 x + \log_3 3 = \log_3 36$

47. $\log_4 n + \log_4 (n - 4) = \log_4 5$

48. الصوت استخدم الصيغة $L = 10 \log_{10} R$. حيث يمثّل L جهارة الصوت ويمثّل R شدة الصوت النسبية. لإيجاد مدى جهارة صوت 20 شخصًا يتحدثون مقابل شخص واحد يتحدث. افترض أن صوت شخص واحد يتحدث له شدة نسبية 80 ديسيبل.

مثال 6

استخدم $\log_5 16 \approx 1.7227$ و $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب $\log_5 32$.

$\log_5 32 = \log_5 (16 \cdot 2)$	استبدل 32 بـ 16
$= \log_5 16 + \log_5 2$	خاصية ناتج الضرب
$\approx 1.7227 + 0.4307$	استخدم الحاسبة
≈ 2.1534	

مثال 7

حُـلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$.

$\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$	المعادلة الأصلية
$\log_3 3x(4) = \log_3 36$	خاصية ناتج الضرب
$3x(4) = 36$	تعريف اللوغاريتم
$12x = 36$	اضرب
$x = 3$	اقسم كلًا من الطرفين على 12

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

8-6 اللوغاريتمات العادية

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

49. $3^x = 15$

50. $6^{x^2} = 28$

51. $8^{m+1} = 30$

52. $12^{r-1} = 7^r$

53. $3^{5n} > 24$

54. $5^{x+2} \leq 3^x$

55. المدخرات قمت بإيداع AED 1000 في حساب يتلقى نسبة مرابحة سنوية r قدرها 5%.بصفة مركبة ربع سنوي. استخدم $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

a. كم سيستغرق هذا الوقت حتى يكون لديك AED 1500 في حسابك؟

b. ما المدة التي سيستغرقها المبلغ المالي الخاص بك ليصل إلى الضعف؟

مثال 8

حُـلّ المتباينة $5^{3x} > 7^{x+1}$.

$5^{3x} > 7^{x+1}$	المتباينة الأصلية
$\log 5^{3x} > \log 7^{x+1}$	خاصية التباين
$3x \log 5 > (x+1) \log 7$	خاصية الأس
$3x \log 5 > x \log 7 + \log 7$	خاصية التوزيع
$3x \log 5 - x \log 7 > \log 7$	اطرح $x \log 7$
$x(3 \log 5 - \log 7) > \log 7$	خاصية التوزيع
$x > \frac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7}$	اقسم على $3 \log 5 - \log 7$
$x > 0.6751$	استخدم الحاسبة

مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 0.6751\}$.

8-7 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

56. $4e^x - 11 = 17$

57. $2e^{-x} + 1 = 15$

58. $\ln 2x = 6$

59. $2 + e^x > 9$

60. $\ln (x+3)^5 < 5$

61. $e^{-x} > 18$

62. المدخرات إذا أودعتَ AED 2000 في حساب مدخرات يتلقى مرابحة مركبة بصفة مستمرة بنسبة 6.4%. فما المدة التي ستستغرقها أموالك لتصل إلى ثلاثة أمثال؟ استخدم $A = Pe^{rt}$.

مثال 9

حُـلّ المعادلة $3e^{5x} + 1 = 10$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3e^{5x} + 1 = 10$	المعادلة الأصلية
$3e^{5x} = 9$	اطرح 1 من كل من الطرفين
$e^{5x} = 3$	اقسم كلًا من الطرفين على 3
$\ln e^{5x} = \ln 3$	خاصية المساواة
$5x = \ln 3$	$\ln e^x = x$
$x = \frac{\ln 3}{5}$	اقسم كلًا من الطرفين على 5
$x \approx 0.2197$	استخدم الحاسبة

8-8 استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

63. السيارات اشترى خالد سيارة مستعملة بمبلغ AED 2500. ومن المتوقع أن تنخفض قيمة السيارة بمعدل 25% كل عام. كم ستكون قيمة السيارة خلال 3 أعوام؟

64. علم الحياة بالنسبة إلى سلالة معينة من البكتيريا k يساوي 0.728 عندما يكون t مقدرًا بالأيام. باستخدام الصيغة $y = ae^{kt}$، ما المدة التي ستستغرقها 10 من البكتيريا ليزداد عددها إلى 675؟

65. تعداد السكان بلغ تعداد السكان لمدينة ما منذ 20 عامًا 24,330. منذ ذلك الحين، زاد التعداد السكاني بمعدل ثابت كل عام. إذا كان تعداد السكان الآن يبلغ 55,250، فجد معدل النمو السنوي لهذه المدينة.

مثال 10

تنمو مزرعة معينة من البكتيريا من 250 إلى 2000 بكتيريا في 1.5 ساعة. جد الثابت k لصيغة النمو. استخدم $y = ae^{kt}$.

$y = ae^{kt}$	صيغة النمو الأسّي
$2000 = 250e^{k(1.5)}$	عوض عن y بـ 2000 و a بـ 250 و t بـ 1.5
$8 = e^{1.5k}$	اقسم كلًا من الطرفين على 250
$\ln 8 = \ln e^{1.5k}$	خاصية المساواة
$\ln 8 = 1.5k$	خاصية المعكوس
$\frac{\ln 8}{1.5} = k$	اقسم كلًا من الطرفين على 1.5
$1.3863 \approx k$	استخدم الحاسبة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثّل كل دالة بيانيًّا. حدّد المجال والمدى.

1. $f(x) = 3^{x-3} + 2$
2. $f(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 3$

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف إذا لزم الأمر.

3. $8^{c+1} = 16^{2c+3}$
4. $9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{x}$
5. $2^{a+3} = {}^{2a-1}$
6. $\log_5(\frac{112}{2} - 7) = \log_2 6x$
7. $\log_5 x > 2$
8. $\log_3 x + \log_3 (x-3) = \log_3 4$
9. $6^{n-1} \leq 11^{n}$
10. $4e^{2x} - 1 = 5$
11. $\ln (x+2)^2 > 2$
12. $\log_5 44^{\ 3}$
13. $\log_2 {}^{\ x}$

استخدم $\log_5 11 \approx 1.4899$ و$\log_5 2 \approx 0.4307$ قرّب قيمة كل تعبير.

14. **تعداد السكان** بلغ تعداد سكان مدينة ما منذ 10 أعوام 150,000. منذ ذلك الحين، زاد التعداد السكاني بمعدل ثابت كل عام. بلغ تعداد السكان حاليًا 185,000.
   a. اكتب دالة أسيّة يمكن استخدامها لنمذجة تعداد السكان بعد x عام إذا كان تعداد السكان يتغير بالمعدل نفسه.
   b. كم سيكون تعداد السكان خلال 25 عامًا؟

15. اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ في صورة أسيّة.

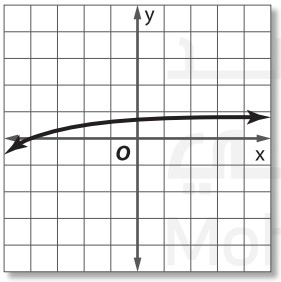
16. **الزراعة** المعادلة التي تُمثل التناقص في عدد المزارع هي $y = 3{,}962{,}520\ (0.98)^x$. حيث يمثّل x عدد الأعوام منذ عام 1960 ويمثّل y عدد المَزارع.
   a. كيف يمكنك الإخبار بأن العدد يتناقص؟
   b. بأي معدل سنوي يتناقص العدد؟
   c. توقع متى سيكون عدد المَزارع أقل من مليون واحد.

17. **الاختيار من متعدد** ما قيمة $\log_4 \frac{1}{64}$؟
   A -3
   B $-\frac{1}{3}$
   C $\frac{1}{3}$
   D 3

18. **المدخرات** قمت بإيداع AED 7500 في حساب مدخرات يتلقى مرابحة مركبة بصفة مستمرة بنسبة 3%.
   a. بافتراض أنه لا توجد عمليات سحب أو إيداع على الحساب، كم سيكون الرصيد بعد 5 أعوام؟
   b. ما المدة التي ستستغرقها مدخراتك لتصل إلى الضعف؟
   c. في خلال كم عامًا سيكون لديك AED 10,000 في حسابك؟

19. **الاختيار من متعدد** ما حل $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$؟
   F $\frac{1}{2}$
   G 2
   H 4
   J 8

20. **الاختيار من متعدد** ما الدالة الممثلة بيانيًّا مما يلي؟



   A $y = \log_{10} (x-5)$
   B $y = 5 \log_{10} x$
   C $y = \log_{10} (x+5)$
   D $y = -5 \log_{10} x$

21. اكتب $2 \ln 6 + 3 \ln 4 - 5 \ln \left(\frac{1}{3}\right)$ في صورة لوغاريتم منفرد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام التكنولوجيا

يمكن أن تكون الحاسبة الخاصة بك أداة مفيدة في الاختبارات المعيارية. قد تحتوي بعض المسائل التي تحلها على خطوات أو حسابات تتطلب استخدام الحاسبة. قد تساعدك الحاسبة أيضًا في حل المسألة بصورة أسرع.

استراتيجيات استخدام التكنولوجيا

الخطوة 1

الحاسبة أداة مفيدة، لكن ينبغي عادةً استخدامها بصورة معتدلة.
صُممت الاختبارات المعيارية لقياس قدرتك على الاستنتاج وحل المسائل.
لا لقياس قدرتك على استخدام الحاسبة.

قبل استخدام الحاسبة، اسأل نفسك:

- كيف يمكنني عادةً حل هذا النوع من المسائل؟
- هل توجد أي خطوات لا يمكنني القيام بها ذهنيًا أو باستخدام ورقة وقلم رصاص؟
- هل تعد الحاسبة ضرورية للغاية لحل هذه المسألة؟
- هل ستساعدني الحاسبة في حل هذه المسألة بصورة أسرع أو أكثر كفاءة؟

الخطوة 2

متى قد تكون الحاسبة مفيدة؟

- حَل المسائل التي تتضمن عمليات حسابية كبيرة ومعقدة.
- حل مسائل معينة تحتوي على تمثيل بياني للدول وإيجاد قيم الدوال وحل المعادلات وما إلى ذلك
- التحقق من حلول المسائل

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لإيجاد الحل.

تحتوي علبة معينة من الصودا على 60 mg من الكافيين. يتم التخلص من الكافيين من الجسم بمعدل 15% كل ساعة. ما عمر *النصف* للكافيين؟ بعبارة أخرى، كم عدد الساعات التي يستغرقها الجسم للتخلص من نصف كمية الكافيين؟

A 4 ساعات
B 4.25 ساعات
C 4.5 ساعات
D 4.75 ساعات

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. يمكن حل المسألة باستخدام دالة أسّية.
استخدم صيغة الاضمحلال الأسّي لنمذجة المسألة وإيجاد عمر النصف للكافيين.

$$y = a(1 - r)^t$$
$$y = 60(1 - 0.15)^t$$

نصف 60 mm يساوي 30. إذًا، بافتراض أنَّ $y = 30$ ونوجد حل t.

$$30 = 60(1 - 0.15)^t$$
$$0.5 = (0.85)^t$$

خُذْ لوغاريتم كل من الطرفين واستخدم خاصية الأس.

$$\log 0.5 = \log (0.85)^t$$
$$\log 0.5 = t \log 0.85$$
$$\frac{\log 0.5}{\log 0.85} = t$$

عند هذه النقطة، من الضروري استخدام الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتمات وحل المسألة. بفعل ذلك يظهر أنَّ $t \approx 4.265$. إذًا، عمر النصف للكافيين يساوي حوالي 4.25 ساعات. الإجابة الصحيحة هي B.

التمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لإيجاد الحل.

1. اشترى جمال مؤخرًا شاحنة جديدة مقابل AED 34,750. تقل قيمة الشاحنة بمعدل 12% كل عام. كم ستكون القيمة التقريبية للشاحنة بعد 7 أعوام من شراء جمال لها؟

A AED 13,775

B AED 13,890

C AED 14,125

D AED 14,200

2. رُميت كرة بيسبول إلى أعلى بسرعة متجهة 105 ft/s. وأطلقت من فوق الأرض بمسافة 5 ft. يتم الحصول على ارتفاع كرة البيسبول بعد t من الثواني من رميها بالصيغة $h(t) = -16t^2 + 105t + 5$. جد الوقت الذي تصل عنده كرة البيسبول إلى أقصى ارتفاع لها.

F 1.0 s

G 3.3 s

H 6.6 s

J 177.3 s

3. أودعت أمل مبلغ AED 2500 في مرابحة مركبة يوميًا بالشروط الموضحة أدناه.

مرابحة مركبة!

اكسب 4.25% مرابحة مركبة بصفة يومية!

(إيداع بحد أدنى AED 1000 على مدار فترة تصل إلى 12 شهرًا).

استخدم الصيغة الموضحة أدناه لإيجاد قيمة t، عدد السنوات اللازمة لكسب AED 250 في مرابحة مركبة يوميًا.

$$2750 = 2500\left(1 + \frac{0.0425}{365}\right)^{365t}$$

A حوالي 2.15 عامًا

B حوالي 2.24 عامًا

C حوالي 2.35 عامًا

D حوالي 2.46 عامًا

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 8

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. ما التقاطع مع المحور y للدالة الأسّية الواردة أدناه؟

$$y = 4^x - 1$$

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

2. افترض أن ثمة 3500 طائر فقط من أنواع معينة مهددة بالانقراض باقية في جزيرة ما وأن عدد الجماعة الأحيائية يقل بمعدل 5% كل عام.

كم تتوقع الدالة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ من السنوات t اللازمة لينخفض عدد الجماعة الأحيائية إلى العدد p. ما المدة التي ستستغرقها الجماعة الأحيائية للوصول إلى 3000 طائر؟

F عامان **H** 5 أعوام

G 3 أعوام **J** 8 أعوام

3. افترض أن نوعًا معينًا من البكتيريا يتضاعف بالتكاثر ذاتيًا كل 20 دقيقة. إذا بدأتَ بخلية واحدة من البكتيريا، فكم سيكون عددها بعد ساعتين؟

A 2 **B** 6 **C** 32 **D** 64

4. حدّد بلال أنه يمكن تمثيل التكلفة الإجمالية C لاستئجار سيارة من المعادلة $C = 0.35m + 125$، حيث تمثّل m عدد الكيلومترات التي يقودها. إذا كانت التكلفة الإجمالية لاستئجار السيارة هي AED 363، فكم عدد الكيلومترات التي قطعها؟

F 125 **H** 520

G 238 **J** 680

5. أي مما يلي يصف التمثيل البياني للعلاقة $3y = 4x - 3$ و $8y = -6x - 5$ بشكل أفضل؟

A للمستقيمين نقطة التقاطع نفسها مع المحور y.

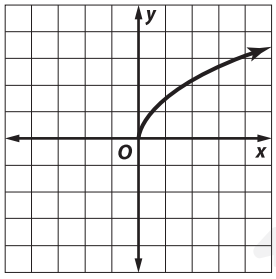
B للمستقيمين نقطة التقاطع نفسها مع المحور x.

C المستقيمان متعامدان.

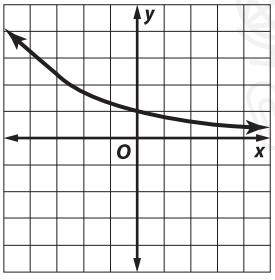
D المستقيمان متوازيان

6. مثّل بيانيًا $y = \log_5 x$.

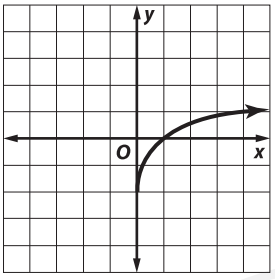
F



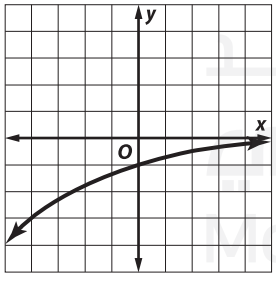
G



H



J



7. يبيع متجر أحمد للكتب اثنين من الكتب المستعملة مقابل AED 7.99. يمكن إيجاد التكلفة الإجمالية c لشراء عدد n من الكتب من خلال —

A ضرب n في c.

B ضرب n في 5.

C ضرب n في تكلفة الكتاب الواحد.

D قسمة n على c

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 استخدم التكنولوجيا وخواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة t عندما $p = 3000$.

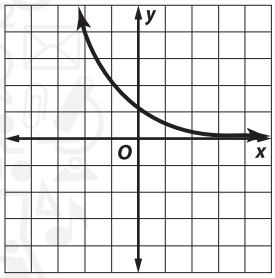
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة قصيرة/إجابة شبكية

دوّن إجابتك في ورقة الإجابات التي زوّدك بها المعلّم أو أي ورقة عادية.

8. الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ممثَّلة أدناه. ما مجال الدالة؟



9. اشترت سوزان سيارة جديدة هذا العام بمبلغ AED 33,750. يُتوقع أن تقل قيمة السيارة بمعدل 10.5% كل عام. كم ستكون ***القيمة*** التقريبية للسيارة بعد 6 أعوام من شراء سوزان لها؟ اكتب الحل هنا.

10. يحل حمدان نظام المعادلات $8x - 2y = 12$ و$-15x + 2y = -19$ باستخدام الاختزال. أجرى حمدان الحل كما يلي.

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 12 \\ 8(-1) - 2y &= 12 \\ -8 - 2y &= 12 \\ -2y &= 20 \\ y &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 12 \\ -15x + 2y &= -19 \\ \hline -7x &= 7 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

الحل هو $(-1, -10)$.

a. ما الخطأ الذي قام به حمدان؟

b. ما الحل الصحيح لنظام المعادلات؟ اكتب الحل هنا.

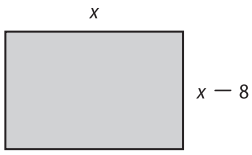
11. إجابة شبكية إذا كان $f(x) = 3x$ و$g(x) = x^2 - 1$، فما قيمة $f(g(-3))$؟

12. حوّل إلى أبسط صورة $(-2a^{-2}b^{-6})(-3a^{-1}b^{8})$.

إجابة موسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

13. إجابة شبكية ما قيمة x التي سيكون عندها للمستطيل أدناه مساحة 48 وحدة مربعة؟



14. افترض أن عدد الغزال أبيض الذيل في منطقة معينة يزداد بمعدل سنوي يقدر بحوالي 10% منذ عام 1995. وكان ثمة 135,000 غزال في عام 1995.

a. اكتب دالة لتمثيل عدد الغزال أبيض الذيل بعد t من السنوات.

b. كم عدد الغزال أبيض الذيل الذي يوجد بالمنطقة تقريبًا في عام 2000؟ قرّب إجابتك إلى أقرب مائة غزال.

15. ورثت عائشة مبلغ AED 250,000 عن عمتها في عام 1998. وقامت باستثمار المال وزيادته كما هو موضح في الجدول أدناه.

العام	المبلغ
1998	250,000 AED
2006	329,202 AED
2011	390,989 AED

a. اكتب دالة أسّية يمكن استخدامها لتوقُّع المبلغ المالي A بعد استثماره لمدة t من السنوات.

b. إذا كان المال يستمر في الزيادة بالمعدل نفسه، ففي أي عام ستكون قيمته AED 500,000؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education