

الاحتمالات والقياس



Chapter sourced from 10. Probability and Measurement, from Integrated Math II Chapter 13 © 2012

McGraw-Hill Education مؤسسة المحفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة

السابق

لقد تعلمت التجارب والنتائج والأحداث، ووجدت أيضًا الاحتمالات في الأحداث البسيطة.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
 - تمثيل الفضاءات العينية.
 - استخدام التباديل والتوافيق في الاحتمالات.
 - إيجاد الاحتمالات باستخدام الطول والمساحة.
 - إيجاد احتمالات الأحداث المركبة.

لماذا؟

● الألعاب يمكن استخدام الاحتمال في توقع مدى إمكانية وقوع نتائج مختلفة للمباريات التي نخوض.

الاستعداد للوحدة

مراجعة سريعة	تدريب سريع
--------------	------------

مثال 1

بسط $\frac{6}{9} \times \frac{1}{2}$.

اضرب البسوط واضرب المقامات.

$$\frac{6}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{6 \times 1}{9 \times 2}$$

بسط.

$$= \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

مثال 2

عند رمي حجر نرد، ما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

$$P(\text{أقل من 5}) = \frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{عدد النتائج المحتملة}}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

احتمال لفة أقل من خمس مرات هي $\frac{2}{3}$ أو 67%.

مثال 3

تم تدوير قرص دوار مرقم من 1 إلى 6. جسد الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على 5.

النتيجة	الإحصاء	التكرار
1		4
2		7
3		8
4		4
5		2
6		5

$$P(5) = \frac{\text{عدد مرات دوران العدد 5}}{\text{إجمالي عدد النتائج}} = \frac{2}{30}$$

الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على العدد 5 هو $\frac{2}{30}$ أو 7%.

تدريب سريع

بسط.

- $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$
- $\frac{7}{9} + \frac{2}{6}$
- $\frac{2}{5} + \frac{7}{8}$
- $\frac{2}{9} \times \frac{4}{8}$
- $\frac{3}{7} \times \frac{21}{24}$
- $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$

7. كرة القدم يحضر أحد فرق كرة القدم في المباريات مبرّد ماء سعة 36 L. كم كوبًا سعة 250 mL يمكن أن يشرب الفريق في المباراة؟

تم رمي حجر نرد، جسد احتمال كل نتيجة.

8. (أكبر من 1) P

9. (فردى) P

10. (أقل من 2) P

11. (6 أو 1) P

12. الألعاب يلعب صديقان مباراة بنرد له 20 وجهًا وعليه كل الحروف الهجائية الإنجليزية ما عدا حروف Q و U و V و X و Y و Z. فما احتمال سقوط النرد على حرف متحرك؟

يُظهر الجدول نتائج تجربة يدار فيها القرص الدوار المرقم من 1 إلى 4.

النتيجة	الإحصاء	التكرار
1		3
2		7
3		6
4		4

13. ما الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على العدد 4؟

14. ما الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على عدد فردي؟

15. ما الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على عدد زوجي؟

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المفردات الجديدة

sample space	القضاء العيني
tree diagram	المخطط الشجري
permutation	تباديل
factorial	مضروب
circular permutation	التباديل الدائرية
combination	توافيق
geometric probability	الاحتمال الهندسي
probability model	نموذج الاحتمال
simulation	المحاكاة
random variable	متغير عشوائي
expected value	قيمة التوقع
compound events	الأحداث المركبة
independent events	الأحداث المستقلة
dependent events	أحداث غير مستقلة
conditional probability	احتمال مشروط
probability tree	شجرة الاحتمال
mutually exclusive	المنفصلة
complement	متمة

المطويات منظم الدراسة

الاحتمال والقياس ابتكر المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات هذه الوحدة عن الاحتمال وابدأ بورقة واحدة.

1 اطو ورقة بالطول.



2 اطو من المنتصف مرتين آخرين.



3 قص كل طبقة على العمود الأيسر.



4 سمّ الطيات كما هو موضح.



مراجعة المصطلحات

الحدث نتيجة واحدة أو أكثر لتجربة ما
التجربة موقف يعتمد على الحظ، مثل رمي القطعة المعدنية أو لف الترد



تمثيل الفضاءات العينية



لماذا؟

في مباراة كرة القدم، يرمي حكم المباراة قطعة معدنية عادلة لتحديد الفريق الذي يملك الكرة أولاً. وقد تقع القطعة المعدنية على الصورة أو الكتابة.

الحالي

1 تمثيل الفضاءات العينية.
2 استخدام مبدأ العد الأساسي لعد النتائج.

السابق

لقد حسبنا الاحتمال التجريبي.

1 تمثيل فضاء عيني لقد تعلمت ما يلي عن التجارب والنتائج والأحداث.

مثال	تعريف
في الموقف المذكور أعلاه، التجربة هي رمي القطعة المعدنية.	التجربة هي موقف بنطوي على فرصة تؤدي إلى استنتاجات تسمى نتائج.
النتائج المحتملة هي سقوط القطعة المعدنية إما على الصورة وإما على الكتابة.	النتيجة هي استنتاج أداء معين أو تجريب لتجربة ما.
ومن بين أحداث تلك التجربة سقوط القطعة المعدنية على الكتابة.	الحادث هو نتيجة واحدة أو أكثر لتجربة معينة.

الفضاء العيني للتجربة هو مجموعة جميع النتائج المحتملة. ويمكنك تمثيل الفضاء العيني باستخدام قائمة منظمة أو جدول أو **مخطط شجري**.

مثال 1 تمثيل الفضاء العيني

تم إلقاء قطعة نقد معدنية مرتين. مثل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

مع كل رمية للقطعة المعدنية، توجد نتيجتان محتملتان: صورة «H» أو كتابة «T».

القائمة المنظمة

أدرج نتائج الرمية الأولى في العمود الأيسر ونتائج الرمية الثانية في الصف العلوي. افقرن كل نتيجة محتملة من الرمية الأولى مع كل النتائج المحتملة من الرمية الثانية.

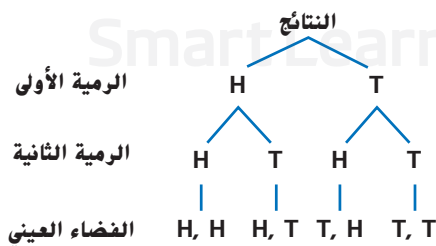
H, H T, T
H, T T, H

الجدول

أدرج نتائج الرمية الأولى في العمود الأيسر ونتائج الرمية الثانية في الصف العلوي.

النتائج	صورة	كتابة
صورة	H, H	H, T
كتابة	T, H	T, T

المخطط الشجري



تمرين موجّه

1. تم إلقاء قطعة نقد معدنية مرتين، ثم تم تدوير مكعب الأعداد. مثل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

المفردات الجديدة

الفضاء العيني sample space

المخطط الشجري

tree diagram

تجربة ثنائية المراحل two-stage experiment

تجربة متعددة المراحل multi-stage experiment

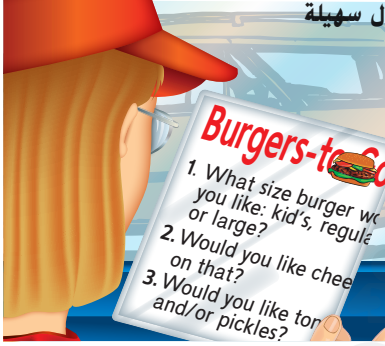
مبدأ العد الأساسي Fundamental Counting Principle

مهارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

التجربة في مثال واحد مثال على **التجربة ثنائية المراحل**. وهي تجربة تُنفذ على مرحلتين أو عبر حدثين. وتُسمى التجارب التي تتم على أكثر من مرحلتين باسم **التجارب متعددة المراحل**.

مثال 2 من الحياة اليومية المخططات الشجرية متعددة المراحل

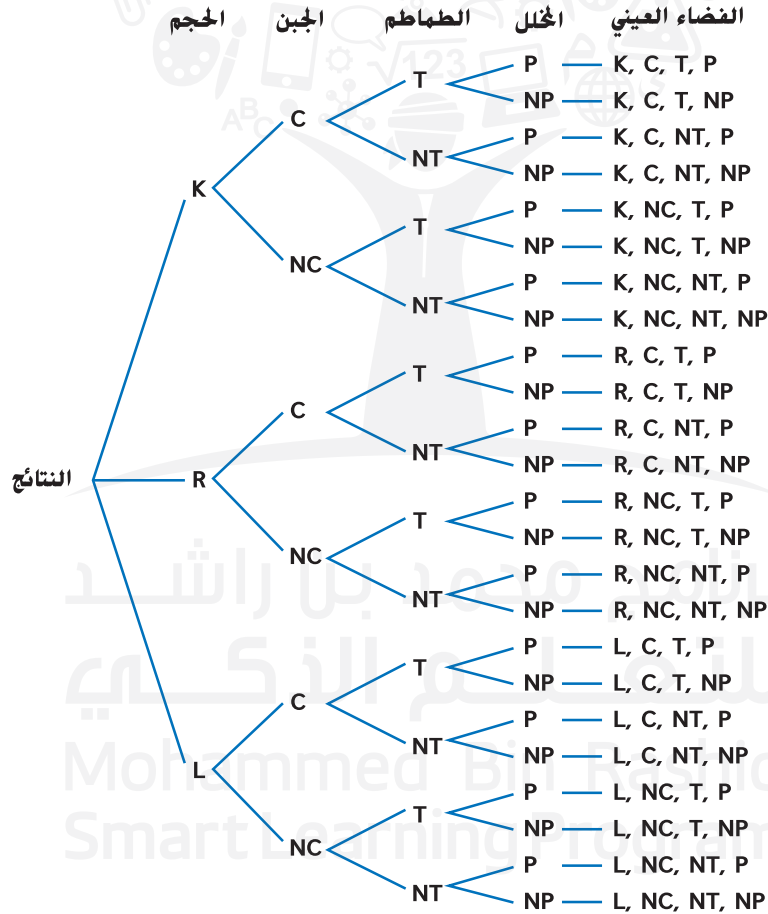


شطائر اللحم البقري عند تسجيل طلب شطائر اللحم البقري، تسأل سبيلة كل عميل الأسئلة المذكورة في السيناريو الموضح أدناه. صمم مخططاً شجرياً لتمثيل الفضاء العيني لطلبات شطائر اللحم البقري.

الفضاء العيني نتاج أربع مراحل.

- حجم الشطيرة (K أو R أو L)
- الجبن (C أو NC)
- الطماطم (T أو NT)
- المخللات (P أو NP)

ارسم مخططاً شجرياً بالمراحل الأربع.



تمرين موجّه

2. **الموسيقى** يمكن لياسمين أن تختار مشغل MP3 صغيراً بقرص صلب سعته 4 أو 8 جيجابايت باللون الأسود أو الأخضر المزرق أو الرمادي الفاتح أو الأحمر. ويمكنها أيضاً أن تحصل على واصمة وأو مشبك يمكنها من التحرك. صمم مخططاً شجرياً لتمثيل الفضاء العيني لهذا الموقف.

انتبه!

الاستنتاج المنطقي تدل كلمة و/أو في السؤال الثالث من المثال 2 على وجود مرحلة إضافية في عملية الطلب. عند عمل مراحل منفصلة لاختيار الطماطم أو عدم اختيارها، أو اختيار المخللات أو عدم اختيارها، فإنك تسمح بإمكانية اختيار كل من الطماطم والمخللات.

قراءة في الرياضيات

ترميز المخطط الشجري
اختر ترميزاً للنتائج في المخططات الشجرية للحد من الالتباس. في المثال 2، ترمز C إلى الجبن، بينما ترمز NC إلى بلا جبن. وبالمثل، فإن NT و NP ترمزان إلى بلا طماطم وبلا مخللات، على التوالي.

2 مبدأ العد الأساسي

في بعض التجارب ثنائية المراحل أو متعددة المراحل، لا يكون ذكر الفضاء العيني بأكمله عمليًا أو ضروريًا. لإيجاد عدد النتائج المحتملة، يمكنك استخدام **مبدأ العد الأساسي**.

المفهوم الأساسي مبدأ العد الأساسي

الشرح يمكن إيجاد عدد النتائج المحتملة في فضاء عيني معين عن طريق ضرب عدد النتائج المحتملة من كل مرحلة أو حدث.

الرموز في إحدى تجارب المرحلة k افترض أن

$n_1 =$ عدد النتائج المحتملة للمرحلة الأولى.

$n_2 =$ عدد النتائج المحتملة للمرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى.

\vdots

$n_k =$ عدد النتائج المحتملة للمرحلة k بعد حدوث المراحل $k - 1$ الأولى.

وبالتالي تكون النتائج الكلية المحتملة للمرحلة k من التجربة هي

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k.$$

نصيحة دراسية

قاعدة الضرب أحيانًا يسمى مبدأ العد الأساسي قاعدة الضرب للعد أو مبدأ العد.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام نظام العد الأساسي

عدد الاختيارات	خيارات الخاتم
10	المعادن
2	اللمسات النهائية
12	ألوان الحجر
5	ألوان القطع
20	جانب 1 شعارات النشاط
20	جانب 2 شعارات النشاط
2	أشكال الشريط

خواتم الصنف اختارت وفاء المقاس والشكل العام لخاتم الصنف، ويجب أن تختار الآن من خيارات الخواتم الموضحة. كم خاتماً مختلفاً يمكن أن تبتكر وفاء عند اختيار الشكل والمقاس؟

استخدم نظام العد الأساسي.

$$10 \times 2 \times 12 \times 5 \times 20 \times 20 \times 2 = 960,000$$

إذا، بإمكان وفاء أن تبتكر 960,000 خاتماً مختلفاً.

تمرين موجّه

3. جسد عدد النتائج المحتملة في كل موقف.

A. ورقة الإجابة الموضحة كاملة.

B. يُلف النرد أربع مرات.

C. **الأحذية** يتوفر زوج من الأحذية النسائية بكل المقاسات من 5 إلى 11 بألوان الأحمر أو الأزرق الفاتح أو البني أو الأسود. وقد تكون تلك الأحذية مصنوعة من الجلد أو الجلد المزأير وتتوفر بثلاثة أعراض مختلفة.

ورقة الإجابة

- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (T) (F)
- (T) (F)
- (T) (F)
- (T) (F)



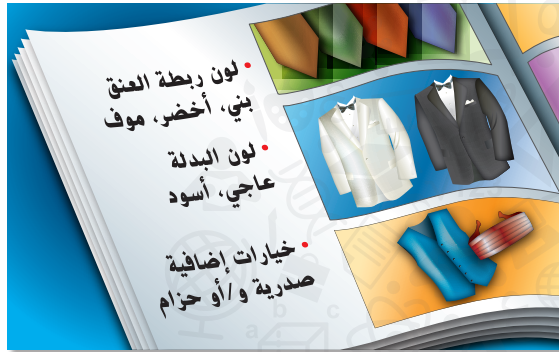
الربط بالحياة اليومية

أكثر من 95% من طلاب المدارس الثانوية يطلبون شكلاً تقليدياً من الخواتم، يتضمن اسم المدرسة وقصاً وسنة التخرج. المصدر: Fort Worth Star-Telegram.

مثال 1 مثل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

مثال 1

1. يمكن للاعب مع كل ضربة بالمضرب إما أن يصل إلى قاعدة وإما أن يخرج.
2. باع مازن معظم تذاكر مهرجان الخريف السنوي في مدرسته. وكمكافأة له يختار مرتين من حقيبة بها بطاقات مكتوب عليها «عصير مجاني» أو «دفتر ملاحظات مجاني».



3. **حلل الزفاف** يؤجر أيوب حلة زفاف من الكتالوج الموضح. صمم مخططاً شجرياً يمثل الفضاء العيني لهذا الموقف.

مثال 2

مثال 3 جـد عدد النتائج المحتملة في كل موقف.

مثال 3

4. يشتري سعيد هاتفًا ويجب أن يختار خطة على فرض اختيار واحد من الخيارات التالية.
5. تبتكر هيام قائمة جديدة لطعمها. على فرض تم طلب كل عنصر.

عدد الاختيارات	محتويات القائمة
8	المقبلات
4	الحساء
6	السلطة
12	الطبق الرئيسي
9	الخلوى

عدد الاختيارات	خيارات الهاتف النقال
15	شكل الهاتف
5	باقة الدقائق
3	إمكانية الوصول إلى الإنترنت
4	إرسال رسائل
2	الضمان

التدريب وحل المسائل

مثال 1 التبرير مثل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

مثال 1

6. هـنا طالبة في السنة قبل الأخيرة وأمامها خيار للعامين القادمين إما أن تمارس لعبة كرة اليد وإما أن تمارس السلة خلال فصل الشتاء.
7. صفان مختلفان من صفوف التاريخ في مدينة نيويورك يأخذان جولة إما إلى سميثسونيان وإما إلى متحف لتاريخ الطبيعة.
8. أمام محمود فرصة للسفر للخارج باعتباره طالب تبادل أجنبيًا أثناء العامين الأخيرين من كليته. ويمكنه الاختيار بين الإكوادور وإيطاليا.
9. أنشئ نادٍ جديد. ويجب اختيار موعد للاجتماع. أوقات الاجتماع المحتملة هي الاثنين أو الخميس في الساعة 5:00 أو 6:00 مساءً.
10. اختبار بعدة نسخ له تمارين بالمثلثات. يوجد في التدريب الأول مثلث متفرج أو حاد. ويوجد في التدريب الثاني مثلث متساوي الساقين أو مثلث مختلف الأضلاع.



ألوان أكريليك

ألوان زيت

11. **الرسم** يعمل الطلاب في حصة الرسم على إنجاز مشروعين ويمكنهم استخدام نوع واحد من نوعي الرسوم المختلفة في كل مشروع. مثل الفضاء العيني في هذه التجربة يعمل قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

ارسم مخططاً شجرياً لتمثيل الفضاء العيني لكل موقف.

مثال 2

12. **السنبوسك** على منضدة السنبوسك، يتاح للزبائن خيار وضع الحبوب أو التونة أو الدجاج مع الأرز أو بدون أرز وجبن و/أو صلصة.

13. **النقل** ينوي منصور شراء مركبة وأمامه خيارات سيارة أو شاحنة أو شاحنة صغيرة كسوتها الداخلية من الجلد أو القماش وبها مشغل CD و/أو سقف مفتوح.

14. **قطع الحلوى** ذهبت هناء وصديقاتها إلى مطعم بيع الزبادي المثلج به علامة تشبه العلامة الموضحة على اليمين. صمم مخططاً شجرياً لجميع التوافيق المحتملة من أقماغ المثلجات بالفول السوداني و/أو المكسرات.

الزبادي المثلج	
الأقماغ	النكهات
كعك	فراولة
سكر	ليمون
واقف	
الإضافات: فول سوداني ومكسرات	

المثابرة في التمارين 15-18، جسد عدد النتائج المحتملة لكل موقف.

مثال 3

15. **15** يترشح في انتخابات اتحاد طلاب السنة قبل الأخيرة 3 أشخاص على منصب السكرتارية و 4 على منصب أمانة الصندوق و 5 أشخاص على منصب نائب الرئيس و 2 على منصب رئيس الصف.

16. عند التسجيل في الحصة أثناء الفصل الدراسي الأول من الدراسة بالكلية، كان أمام محمود 4 خانات يملؤها باختيار 4 صفوف للأدب وصفين للرياضيات و 6 للتاريخ و 3 للتصوير.

17. تختار هداية واحدة من بين 6 كليات و 5 تخصصات أساسية وتخصصين فرعيين و 4 أندية.

18. تمتلك هالة مطعمًا تشتمل قائمة الغداء فيه على أربعة أطباق: مقبلات، وطبق رئيسي، وحلوى، ومشروب. ويوجد 5 خيارات للمقبلات، و 4 خيارات للطبق الرئيسي، و 3 خيارات للحلوى، و 6 خيارات للمشروبات.

19. **الفنون** في واجب حصة الفنون، أعطى أستاذ ماجد طلابه اختيارات لشكلين رباعيين ليستخدموهما كقاعدة. ويجب أن تكون أضلاع أحدهما متساوية، بينما يجب أن يكون هناك ضلعان متوازيان على الأقل في الشكل الآخر. مثل الفضاء العيني من خلال عمل قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

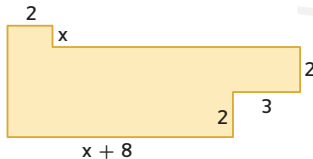


20. **الإفطار** يقدم مطعم في أحد الفنادق بيض الأومليت مع اختيار الخضراوات أو اللحم البقري أو الدجاج التي تقدم مع البطاطس المهروسة المقلية أو الفريك أو العيش المحمص.

a. كم عدد النتائج المختلفة المتوفرة من الأومليت وطبق جانبي إذا قدم طبق الأومليت مع الخضراوات وحدها؟

b. جسد عدد النتائج المحتملة للأومليت بالخضراوات إذا كان بإمكانك الحصول على أي من الخضراوات أو كلها على أي طبق أومليت.

21. **الأشكال المركبة** يحسب فهد مساحة الشكل المركب الموجود على اليسار. بكم طريقة مختلفة يمكنه فعل ذلك؟



22. **النقل** اشترت نورا قفل دراجة جديد يعرض أربعة أعداد، لكل عدد منها توافق من 0 إلى 9.
- a. كم عدد التوافيق الممكنة إن لم يكن هناك قيود على عدد المرات التي يمكن لنورا استخدام كل عدد فيها؟
- b. كم عدد التوافيق الممكنة إذا كان بإمكان نورا استخدام كل عدد مرة واحدة؟

23. **الألعاب** تلعب نهلة ونسرين لعبة لوحية يُرمى نردان فيها في كل دور.
- a. كم عدد النتائج التي تؤدي إلى مجموع عدد 8 في الدور الواحد؟
- b. كم عدد النتائج التي تؤدي إلى مجموع فردي؟

24. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة تتابع الأحداث. في المرحلة الأولى من التجربة ثنائية المرحلة، قبت بتدوير القرص الدوار 1 الموضح أدناه. إذا كانت النتيجة أحمر، يمكنك قلب القطعة المعدنية. إذا كانت النتيجة أصفر، تقوم بتدوير النرد. إذا كانت النتيجة أخضر، يمكنك تدوير مكعب الأعداد. وإذا كانت النتيجة أزرق، يمكنك تدوير القرص الدوار 2.



- a. **الهندسي** صمم مخططاً شجرياً لتمثيل الفضاء العيني في هذه التجربة.
- a. **المنطقي** صمم مخطط فن لتمثيل النتائج المحتملة في هذه التجربة.
- c. **التحليلي** كم عدد النتائج المحتملة؟
- d. **اللفظي** هل يمكنك استخدام مبدأ العد الأساسي في تحديد عدد النتائج؟ فسّر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

25. **التحدي** يشتمل صندوق على n من الأشياء المختلفة. إذا أخرجت ثلاثة أشياء من الصندوق، بحيث تخرج واحدًا في كل مرة، دون أن تعيد الشيء السابق إلى الصندوق، فكم عدد النتائج المحتملة؟ فسّر استنتاجك.

26. **مسألة غير محددة الإجابة** يكون المخطط الشجري الخاص بالتجربة غير متناظر أحيانًا. صف تجربة ثنائية المرحلة المخطط الشجري فيه متناظر، وارسم المخطط الشجري. فسّر.

27. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يمكن تمثيل الفضاء العيني لتجربة متعددة المراحل باستخدام جدول.

28. **الفرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً أحيانًا، أم دائمًا، أم غير صحيحة على الإطلاق. فسّر استنتاجك.

عندما تخرج النتيجة عن نطاق الفضاء العيني، فهذا خطأ.

29. **التبرير** للتجربة متعددة المراحل نتائج محتملة n عند كل مرحلة. إذا تم تنفيذ التجربة بالمرحل k ، فاكتب معادلة لإجمالي عدد النتائج المحتملة P . فسّر.

30. **في الرياضيات** اشرح متى يكون من الضروري عرض جميع النتائج المحتملة لتجربة ما باستخدام مخطط شجري ومتى يمكن الاكتفاء باستخدام مبدأ العد الأساسي.

مثال 1

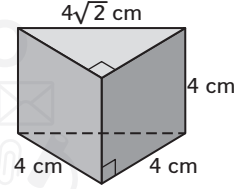
تدريب على الاختبار المعياري

33. يجب أن تتكون كلمة مرور فالح من خمسة أرقام. مستخدمًا الأرقام من 0 إلى 9. ويجب أن يستخدم أرقامًا متكررة. ما أقصى عدد من كلمات المرور المختلفة يمكن لفالح أن يستخدم؟
- F 15,120 H 59,049
G 30,240 J 100,000

34. SAT/ACT يقدم محل بيتزا ثلاثة أنواع من البيتزا محشوة الحواف، و5 أنواع من البيتزا بالخضراوات، و4 أنواع من البيتزا باللحم. كم نوعًا مختلفًا من البيتزا يمكن طلبه عند اختيار 1 بيتزا محشوة الحواف، و1 بيتزا بالخضراوات، و1 بيتزا باللحم؟
- A 12 D 60
B 23 E عدد لا نهائي
C 35

31. الاحتمال يمكن أن تدعو نجلاء اثنتين من صديقاتها للذهاب لتناول الغداء معها. إذا كانت ستختار من بين أربع من صديقاتها، فكم عدد النتائج المحتملة؟
- A 4 C 8
B 6 D 9

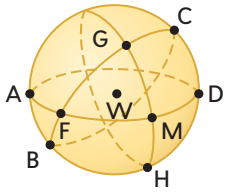
32. إجابة قصيرة ما حجم المنشور الثلاثي الموضح أدناه؟



مراجعة شاملة

35. الهندسة المعمارية لتشييع إعادة التدوير، شيد سكان مدينة روما في إيطاليا نموذجًا لكاتدرائية القديس بطرس من علب العصائر الفارغة. تم تشييد النموذج حسب المقياس 1:5 وكان على شكل منشور مستطيل ارتفاعه 26 m. وعرضه 49 m وطوله 93 m. جسد أبعاد الكاتدرائية الحقيقية.

- استخدم الهندسة الفراغية في تسمية كل مما يلي في الفراغ W.

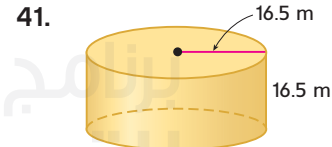
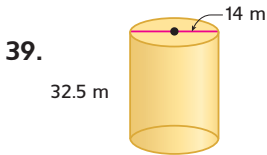


36. خطان مستقيمان يشتملان على النقطة F

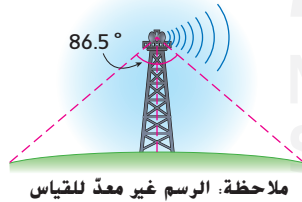
37. نقطة تحتوي على قطعة G

38. مثلث

- جسد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل أسطوانة. قَرِّب لَأَقْرَبِ جُزْءٍ مِنْ عَشْرَةٍ.



42. الاتصالات تسير الإشارة القادمة من برج في شكل شعاع له نقطة نهاية على البرج ومماسه على الأرض. على فرض أن البرج يقع في مستوى سطح البحر حسبها هو موضع، حدد مقياس القوس الذي يتقاطع مع المماسين.



مراجعة المهارات

- جسد ناتج قسمة كل مما يلي.

43. $\frac{5^2}{2}$

44. $\frac{3^3}{3 \cdot 2}$

45. $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$

46. $\frac{2^3 \cdot 12}{6}$

47. $\frac{4^4 \cdot 3}{24}$

استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات

السابق

الحالي

لماذا؟

لقد استخدمت نظام العد الأساسي.

1 استخدام التباديل مع الاحتمالات.

2 استخدام التوافيق مع الاحتمالات.

يقف فارس وعيسى وعمر وعلي بجانب بعضهم لالتقاط صورة. هناك أربعة اختيارات لمن يمكنه الوقوف ناحية أقصى اليسار. و 3 اختيارات لمن يمكنه الوقوف في الموضع الثاني. أما بالنسبة للموضع الثالث، فهناك خياران فقط. وبالنسبة للموضع الأخير فهناك خيار واحد فقط متاح.



المفردات الجديدة

تباديل permutation

مضروب factorial

التباديل الدائرية

circular permutation

توافيق combination

مهارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام نماذج الرياضيات.

1 الاحتمالات باستخدام التباديل هي ترتيب الأشياء حسب الترتيب المهم. من تباديل الأصدقاء الأربعة المذكورين أعلاه عيسى، وعمر، وعلي، ثم فارس. وباستخدام مبدأ العد الأساسي، هناك $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ أو 24 ترتيبًا محتملاً للأصدقاء.

يمكن كتابة التعابير $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ المستخدمة في حساب عدد تباديل الأصدقاء الأربعة على طريقة 4!، التي تُقرأ 4 مضروب.

المفهوم الأساسي المضروب

المضروب العدد الصحيح الموجب n يُكتب $n!$ هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي n .

الرموز $0! = 1$ حيث $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

مثال 1 احتمالات وتباديل عدد n من الأشياء

رياضة نبيلة وميسون عضوتان في فريق لأكروس. إذا أعطيت الفتيات العشريون أعضاء الفريق أرقامًا لتميز اللعبة من 1 إلى 20 بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نبيلة 1 وميسون 2؟

الخطوة 1 جسد عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني. هذا هو عدد تباديل أسماء الفتيات العشرين أو $20!$.

الخطوة 2 جسد عدد النتائج المرغوبة. هذا هو عدد تباديل أسماء الفتيات الأخرى بحيث يكون رقم نبيلة 1 ورقم ميسون 2: $(20-2)!$ أو $18!$.

الخطوة 3 احسب الاحتمال.

$$\begin{aligned} P(2) &= \frac{18!}{20!} \quad (\text{نبيلة 1، ميسون 2}) \\ &= \frac{1}{20 \cdot 19 \cdot 18!} \\ &= \frac{1}{380} \end{aligned}$$

عدد النتائج المفضلة ←
عدد النتائج المحتملة ←

وسّع 20! واقسم العوامل المشتركة.

بسّط.

تمرين موجّه

1. التصوير في الفقرة الافتتاحية، ما احتمال اختيار عيسى للوقوف في أقصى اليسار. واختيار عمر للوقوف في أقصى اليمين في الصورة؟



في الفقرة الافتتاحية، على فرض أن 6 أصدقاء كانوا متاحين، ولكن أراد المصور أن يصور 4 أشخاص فقط في الصورة. باستخدام مبدأ العد الأساسي، يصبح عدد تباديل 4 أصدقاء مأخوذين من مجموعة من 6 أصدقاء هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

وهناك طريقة أخرى لوصف هذا الموقف وهي عدد تباديل 6 أصدقاء أخذ من بينهم 4 في كل مرة، يُرمز إليه بـ 6P_4 . يمكن حساب هذا العدد أيضًا باستخدام المضروببات.

$${}^6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يقترح القانون التالي.

المفهوم الأساسي التباديل

الرموز عدد تباديل n من الأشياء المميزة المأخوذة r في كل مرة يرمز إليه بـ ${}^n P_r$ ويتم الحصول عليه من ${}^n P_r = \frac{n!}{n-r!}$.

مثال عدد تباديل 5 أشياء مأخوذة 2 في كل مرة هو ${}^5 P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

قراءة في الرياضيات

الدقة عبارة الأشياء مميزة تعني أن أشياء يمكن تمييزها لكونها مختلفة بطريقة ما.

مثال 2 الاحتمالات و nPr

قُسم صف إلى فرق يتكون كلٌّ منها من 15 طالبًا. وطُلب من كل فريق أن يختار أعضاء منه ليصبحوا مسؤولين. إذا كان عدنان وعبيد وعبد الله في فريق واحد، وكان يتم تحديد المناصب عشوائيًا، فما احتمال أن يتم اختيارهم كرئيس وفائب ورئيس وسكرتير، على التوالي؟

الخطوة 1 بما أن اختيار المسؤولين هو طريقة لترتيب أعضاء الفريق، فالترتيب مهم في هذا الموقف. إن عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني هو عدد تباديل 15 شخصًا مع أخذ 3 كل مرة، ${}^{15}P_3$.

$${}^{15}P_3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = 2730$$

الخطوة 2 عدد النتائج المفضلة هو عدد تباديل 3 طلاب في مناصب معينة. وسيكون هذا 1! أو 1.

الخطوة 3 إذًا، فاحتمال اختيار عدنان وعبيد وعبد الله لمناصب المسؤولين الثلاثة هي $\frac{1}{2730}$.

نصيحة دراسية

العشوائية عند تحديد النتائج بشكل عشوائي، تصبح احتمال حدوثها متساوية ويمكن حساب الاحتمال باستخدام التباديل والتوافيق.

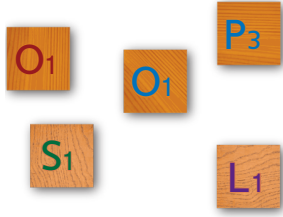


تمرين موجّه

2. تتكون بطاقة تعريف أحد الطلاب من 4 أرقام مختارة من بين 10 أرقام محتملة من 0 إلى 9. لا يمكن تكرار الأرقام.

A. كم عدد أرقام التعريف المحتملة هنا؟

B. جسد احتمال أن يكون للبطاقة المولدة عشوائيًا العدد 4213 بالضبط.



يجب أن تجرّب في اللعبة أن تبتكر كلمةً مستخدمًا مكعبات حروف مختارة عشوائيًا. على فرض أنك اخترت المكعبات الموضحة. إذا اعتبرت أن الحرفين O و O حرفان مميزان، فهناك 5! أو 120 تبديلًا لهذه الحروف.

فيما يلي قائمة بالترتيبات الأربعة المحتملة.

POOLS POOLS SPOOL SPOOL

لاحظ أنه لو لم تكن حروف O ملونة، فسيبدو العديد من تلك الترتيبات متشابهًا. وحيث إن هناك حرفين O يمكن ترتيبهما بطريقتين أو 2!، فإن عدد تباديل الحروف O و P و O و L و S يمكن كتابتها بالشكل $\frac{5!}{2!}$.

المفهوم الأساسي التباديل بالتكرار

عدد التباديل المميزة للأشياء n التي تتكرر فيها الأشياء r_1 مرات، يتكرر الآخر r_2 مرات، وهكذا. هو

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

مثال 3 الاحتمالات والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب قدمت إليك الحروف التالية في أحد برامج الألعاب وطلب منك أن تفككها لتكوين اسم نهر في الولايات المتحدة الأمريكية. إذا حددت تبديلًا لهذه الحروف عشوائيًا، فما احتمال أن تكون تلك الحروف الإجابة الصحيحة وهي نهر MISSISSIPPI؟



الخطوة 1 يوجد 11 حرفًا إجماليًا. يوجد حرف I فيها 4 مرات، ويوجد حرف S 4 مرات، وحرف P يوجد 2 مرة. إذا، فعدد التباديل المميزة لهذه الحروف هو

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39,916,800}{1152} = 34,650$$

استخدم حاسبة.

الخطوة 2 يوجد ترتيب واحد مفضل MISSISSIPPI.

الخطوة 3 احتمال نطق تباديل هذه الحروف المختارة عشوائيًا بطريقة Mississippi هي $\frac{1}{34,650}$

تهرين **موجّه**

3. **أرقام الهاتف** ما احتمالات أن يكون رقم هاتف مكونًا من 7 أرقام هي 5 و 1 و 6 و 5 و 2 و 1 و 5 مرتبًا بطريقة 550-5210؟

لقد درست حتى الآن الأشياء التي تُرتب ترتيبًا خطيًا. لاحظ أنه عند ترتيب البهارات أدناه في خط مستقيم، فإن تحريك كل نوع منها حركة واحدة إلى اليمين يُنتج تبديلًا مختلفًا - الكاري هو الأول بدلاً من الملح. هناك 5! تباديل مميزة لهذه البهارات.



الربط بالحياة اليومية

ابتكر برنامج لعبة Price is Right عام 1956 وهو البرنامج الذي استمر لأطول فترة.

المصدر: IMDB

في **التبديل الدائري** يتم ترتيب الأشياء في دائرة أو حلقة، ويمكنك ملاحظة ترتيبات البهارات عند وضعها في مائدة دوارة. لاحظ أن تدوير المائدة الدوارة موضع واحد في اتجاه عقارب الساعة لن ينتج تبديلاً مختلفاً - لن يتغير ترتيب البهارات بالنسبة لبعضها البعض.



بما أن 5 لغات للمائدة الدوارة ينتج عنها التبديل نفسها، فإن عدد التبديل المميزة للمائدة الدوارة هو $\frac{1}{5}$ من إجمالي عدد الترتيبات عند وضع البهارات في خط مستقيم. $\frac{5 \cdot 4!}{5} = 4!$ أو $4!$ حيث $(5 - 1)!$

المفهوم الأساسي التبديل الدائرية

عدد التبديل المميزة لعدد n من الأشياء مرتبة في شكل دائرة بلا نقطة مرجعية ثابتة هو $\frac{n!}{n}$ أو $(n - 1)!$.

إذا كانت الأشياء n مرتبة بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة، فإن الترتيبات تعامل كترتيبات خطية، مما يجعل عدد تبديل $n!$.

مثال 4 الاحتمالات والتبديل الدائرية



جد الاحتمالات الموضحة، وشرح استنتاجك.

a. **المجوهرات** إذا كانت الحلبي الستة الموضحة على السوار مرتبة ترتيباً عشوائياً، فما احتمال أن ينتج الترتيب الموضح

نظرًا لعدم وجود نقطة مرجعية ثابتة، فهذا تبديل دائري. إذاً، فهناك $(6 - 1)!$ أو $5!$ تبديل مميزة للحلبي. ومن ثم، فإن احتمال الحصول على الترتيب الموضح نفسه هي $\frac{1}{5!}$ أو $\frac{1}{120}$.

b. **الغداء** إذا كنت تعد المقاعد لمجموعة من أربعة أشخاص حول مائدة مستديرة، يوجد أحد المقاعد بجانب نافذة. إذا جلس من سيتناولون الطعام بترتيب عشوائي، فما احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة؟

بما أن الأشخاص سيجلسون حول مستديرة ذات نقطة مرجعية ثابتة، فهذا تبديل خطي. إذاً هناك $4!$ أو 24 طريقة لجلوس الأشخاص حول المائدة. إن عدد النتائج المفضلة هو عدد التبديل للأشخاص الثلاثة الآخرين مع العلم أن الشخص الذي سيدفع الفاتورة سيجلس بجانب النافذة. $3!$ أو 6 .

إذاً، فاحتمال أن يجلس الشخص دافع الفاتورة بجانب النافذة هي $\frac{6}{24}$ أو $\frac{1}{4}$.

نصيحة دراسية
قلب الدائرة إذا بدا الشكل الدائري على نفس هيئته عند قلبه، كمثال حلقة مفاتيح مفرغة، فيجب قسمة عدد التبديل على 2.



مهنة من الحياة اليومية

علماء الإحصاء

يجمع علماء الإحصاء البيانات الإحصائية الخاصة بمختلف الموضوعات، ومن أمثلة ذلك الرياضة والألعاب، ويستخدمون برامج الحاسوب في تحليل تلك البيانات وشرحها وتلخيصها. معظم علماء الإحصاء حاصلون على درجة الماجستير.



تمرين موجّه

4. كرة القدم يلتقي أعضاء فريق كرة القدم الأحد عشر معًا قبل المباراة.

A. ما احتمال أن يقف الظهر الأيمن يمين حارس المرمى إذا اجتمع أعضاء الفريق معًا بترتيب عشوائي؟ فسّر استنتاجك.

B. إذا كان الحكم واقفًا خلف التجمع مباشرةً، فما احتمال وقوفه خلف حارس المرمى مباشرةً؟ فسّر استنتاجك.

نصيحة دراسية

التباديل والتوافيق استخدم التباديل عندما يكون ترتيب الأجسام مهمًا والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

2 الاحتمالات باستخدام التوافيق التوافيق هي ترتيب الأشياء حيثما لا يكون الترتيب مهمًا. لنفترض أنك تريد وضع 3 من 8 أزواج من الجوارب المختلفة في حقيبة الرحلة، فإن ترتيب اختيار الجوارب ليس مهمًا. ومن ثم فإن 3! أو 6 مجموعات من الجوارب الموضحة أدناه لا يعتبر مهمًا. وبهذا يمكنك استخدام التوافيق لتحديد عدد اختيارات الجوارب المختلفة المحتملة.



توافيق عدد n من العناصر المأخوذة من المجموعة r في كل مرة، أو nCr ، يُحسب بقسمة عدد التباديل nPr على عدد الترتيبات التي تشتمل على العناصر نفسها، $r!$.

المفهوم الأساسي التوافيق

الرموز عدد توافيق n من الأشياء المختلفة عند أخذ r في كل مرة

$$nCr = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

مثال عدد توافيق 8 أشياء مأخوذة 3 في كل مرة هو

$$8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 6} = 56$$

مثال 5 الاحتمالات و nCr

الدعوات يمكن أن تدعو إيمان في حفل زفافها 6 صديقات من صديقاتها العشرين للذهاب معها إلى حديقة الملهي. إذا اختارت أن تدعو صديقاتها عشوائيًا، فما احتمال اختيار صديقاتها أسماء وأمانى وأمل وبشينة وبدرية؟

الخطوة 1 بما أن ترتيب اختيار الصديقات غير مهم، فإن عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني هو نفسه عدد التوافيق لعشرين شخصًا مأخوذ منهم 6 أشخاص في كل مرة، $20C_6$.

$$20C_6 = \frac{20!}{(20-6)!6!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14!}{14! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 38,760$$

الخطوة 2 يوجد نتيجة واحدة مفضلة - أن يُختار الطلاب الستة المذكورون أعلاه. وترتيب اختيارهم ليس مهمًا.

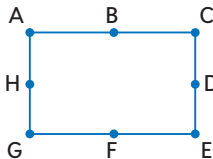
الخطوة 1 إذا فاحتمال اختيار هؤلاء الأصدقاء الستة هي $\frac{1}{38,760}$

تمرين موجّه

5. الهندسة إذا كانت النقاط الثلاث المختارة بشكل عشوائي

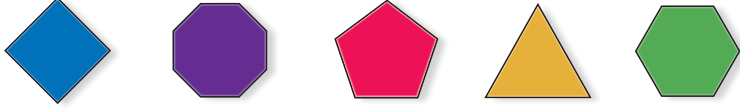
من هذه الأسماء في المستطيل الموضح، فما احتمال وقوعها

جميعًا على القطعة المستقيمة نفسها؟



1. **الهندسة** طلب من خمسة طلاب أن يختاروا مضلعًا عشوائيًا من المجموعة الموضحة أدناه ويعطوه اسمًا. **مثال 1**

ما احتمال أن يختار الطالبان الأولان المثلث الشكل الرباعي، بهذا الترتيب؟



2. **المسرحية** يمثل طلاب مدرسة ثانوية مسرحية *A Raisin in the Sun* بمشاركة كل طالب في الصف الأول الثانوي في مادة اللغة الإنجليزية من بين 18 طالبًا. إذا اختير ثلاثة من فريق العمل عشوائيًا، فما احتمال اختيار إبراهيم للإضاءة، واختيار أحمد لإلقاء كلمات الشكر، واختيار إبراهيم لأداء دور إسماعيل؟ **مثال 2**

3. **القيادة** ما احتمال أن تكون لوحة الرخصة CFF3133 إذا كان فيها حروف C و F و O وأرقام 3 و 3 و 3 و 1؟ **مثال 3**



4. **الكيمياء** ينبغي في معمل الكيمياء أن تختبر ست عينات مرتبة عشوائيًا في حلقة دائرية. **مثال 4**

a. ما احتمال إنتاج الترتيب الموضح على اليسار؟

b. ما مدى احتمال أن تكون أنبوبة الاختبار 2 في موضع علوي متوسط؟

5. **مثال 5** اشترك خمسمئة صبي، من بينهم أسامة وأيمن، في سحب للفوز بتذكريتي مباراة كرة قدم. ما احتمال أن يفوز أسامة وأيمن بهاتين التذكريتين؟

التدريب وحل المسائل

6. **حفلة موسيقية** ستذهب همسة و حليلة إلى حفلة موسيقية مع النادي الرئيسي في مدرستهم الثانوية. إذا اختارت الفتاتان مقعدًا في الصف الموصف أدناه، فما احتمال أن تجلس حليلة في المقعد C11 وهمسة في المقعد C12؟ **مثال 1**



7. **المعرض** اشترى كل من بدر وبلال تذكرة سباق من معرض المدينة. إذا بيعت 50 تذكرة عشوائيًا، فما احتمال أن يشتري بدر التذكرة رقم 14 ويشتري بلال التذكرة رقم 23؟

8. **تمثيل النماذج** بين الجدول من وصلوا إلى الدور النهائي في مسابقة تمارين الحركات الأرضية، وسيتم اختيار ترتيب مشاركتهم عشوائيًا. **مثال 2**

a. ما احتمال أن تكون خديجة وخولة وحورية أول ثلاث لاعبات جمباز يؤديان العرض بأي ترتيب؟

b. ما احتمال أن تكون خديجة هي الأولى وخولة الثانية وحورية الثالثة؟

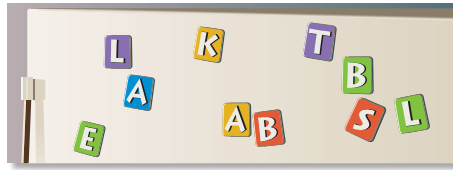
9. **وظائف** يخصص متجر لموظفيه أرقام تعريف خاصة بالعمل عشوائيًا من أجل تتبع إنتاجية كل موظف. ويتكون كل عدد من 5 أرقام من 1 إلى 9. إذا كانت الأعداد لا تتكرر، فجد احتمال تكوين 25938 عشوائيًا.

10. **مجموعات** اختير شخصان عشوائيًا من مجموعة تتكون من عشرة أشخاص. ما احتمال أن يختار جاسم أولاً وجمال ثانيًا؟

المؤهلون للتصنيفات النهائية في تمارين الحركات الأرضية

حمدة
حورية
خديجة
خولة
رنا
ريهام
سالي

11. **المغناطيسيات** اشترى حرب بعض المغناطيسيات على شكل حروف ليرتبها ويكون منها كلمات على تلاجته. إذا اختار عشوائيًا تبديل الحروف الموضح أدناه. فما احتمال أن يكون كلمة BASKETBALL؟



12. **الرموز البريدية** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي المولد عشوائيًا من الأرقام 3 و 7 و 3 و 9 و 5 و 7 و 2 و 3 هو 39372؟

13. **المجموعات** ترتب سمية الطاولة عشوائيًا في دوائر لاستخدامها في أنشطة المجموعة. إذا كانت هناك 7 طاولة في الدائرة، فما احتمال أن تجلس سمية في الطاولة الأقرب إلى الباب؟

14. **مدينة الملاهي** ذهبت سندية لمدينة الملاهي برفقة صديقاتها وركبوا لعبةً تنتظم فيها المقاعد - التي على شكل سلال - في دائرة. إذا كانت هناك 8 مقاعد. فما احتمال أن تجلس سندية في الكرسي الأبعد عن مدخل اللعبة؟

15. **التصوير** إذا كنت تضع 24 صورة بشكل عشوائي داخل ألبوم الصور وكان بإمكانك أن تضع أربع صور في الصفحة الأولى. فما احتمال اختيارك الصور على جهة اليسار؟



16. **رحلة برية** تقوم سهى برحلة برية في الولايات المتحدة وستختار 15 مدينة لتقضي فيها ليلة واحدة. إذا سحبت عشوائيًا 3 منشورات دعائية للمدن من كومة بها 15 منشورًا دعائيًا. فما احتمال أن تكون نيويورك وبوسطن وسان فرانسيسكو؟

17. **الاستنتاج المنطقي** استخدم الشكل الموضح أدناه. وعلى فرض ترتيب الكرات عشوائيًا.



a. في صف مكون من 8 كرات بلياردو، ما احتمال أن تقع الكرة الملساء 2 والكرة المخططة 11 الأول والثاني من جهة اليسار؟

b. ما احتمال أنه إذا تم خلط 8 كرات البلياردو بشكل عشوائي، تنتج في النهاية الترتيب الموضح؟

c. ما احتمال أن يكون صف من كرات 7 مع صف من كرات 8، وثلاث كرات 9، وكرة واحدة 6؛ حيث تقع ثلاث كرات 8 على يسار كرة 6 والكرات 9 الثلاث على اليمين؟

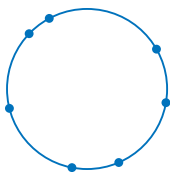
d. إذا أعيد ترتيب الكرات بشكل عشوائي وكونت دائرة، فما احتمال أن تكون الكرة 6 مجاورة الكرة 7؟

18. كم عدد الخطوط المحددة بالنقاط العشر المختارة عشوائيًا، والتي منها رقم 3 على خط واحد؟ فسر طريقة الحساب.

19. افترض اختيار 7 نقاط على دائرة بشكل عشوائي، كما هو موضح على اليسار.

a. باستخدام الحروف الإنجليزية من A إلى E، كم عدد الطرق التي يمكن تسمية النقاط على الدائرة بها؟

b. إذا ثبتت نقطة واحدة على الدائرة، فما عدد الترتيبات المحتملة؟





20. ألعاب الملاهي يوجد في لعبة الدوّارة 7 أحصنة ومقعد يسع شخصين. ولا يتحرك أحد الأحصنة لأعلى أو لأسفل.

a. كم عدد الطرق التي يمكن بها ملء مقاعد الدوّارة عشوائيًا بتسعة أشخاص؟

b. إذا امتلأت الدوّارة عشوائيًا، فما احتمال جلوسك أنت وصديقك على المقعد المزدوج؟

c. إذا امتلأت الدوّارة بستة إلى تسعة أشخاص بشكل عشوائي وكانت أعمارهم دون ثمانية أعوام، فما احتمال انتهاء الحال بالشخص الأصغر من 8 سنوات على الحصان الذي لا يتحرك لأعلى أو أسفل؟

21. **التراخيص** وُضعت كاميرا أعلى إشارة المرور لتصوير السيارات التي لا تلتزم بالوقوف عندما تكون الإشارة حمراء. يمكن للضابط أن يرى في إحدى الصور غير الواضحة أن الحرف الأول في لوحة الترخيص كان Q، وكان الحرف الثاني M أو N. وكان الحرف الثالث B، أو P، أو D. وكان الرقم الأول 0، ولكن لم يكن الرقمان الآخران واضحين. كم لوحة ترخيص تناسب هذا الوصف؟

22. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف التباديل في هذه المسألة.

a. **عددي** اختر عشوائيًا ثلاثة أعداد من 0 إلى 9. جسد التباديل المحتملة لهذه الأعداد الصحيحة الثلاثة.

b. **جدولي** كرر الجزء a لأربع مجموعات إضافية مكونة من ثلاثة أعداد صحيحة. وستستخدم بعض الأعداد أكثر من مرة. انسخ الجدول الموضح أدناه وأكمله.

متوسط التباديل 37	متوسط التباديل	التباديل	أعداد صحيحة
12	444	147, 174, 417, 471, 714, 741	1, 4, 7

c. **لفظي** خمن متوسط قيمة تباديل الأعداد الثلاثة بين 0 و 9.

d. **رمزي** إذا كانت الأعداد الثلاثة هي X و Y و Z فهل يمكن كتابة معادلة للحصول على

متوسط A من تباديل الأعداد؟ إذا كانت الإجابة نعم، فاكتب المعادلة. وإذا كانت الإجابة لا، ففسّر لم لا يمكن ذلك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

23. **التحدي** هناك 15 فتاة عمرهن أكبر من عشرين عامًا، و 15 فتاة عمرهن أصغر من عشرين عامًا اشتراكن في سحب على أربع تذاكر سينما مجانية. ما احتمال أن تفوز الفتيات الأصغر من عشرين عامًا بالتذاكر الأربع؟

24. **التحدي** ادعى طالب أن التباديل والتوافيق مرتبطة بـ $nPr = nCr \cdot r!$ استخدم الجبر لبيان صحة ذلك. ثم فسّر سبب اختلاف nPr و nCr حسب المعامل $r!$.

25. **مسألة غير محددة الإجابة** صف موقفًا يمكن فيه الحصول على التباديل من $\frac{1}{7C_3}$.

26. **الفرضيات** هل العبارة التالية صحيحة أحيانًا، أم دائمًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسّر.

$$nPr = nCr$$

27. **البرهان** برهن أن $nC_n - r = nC_r$.

28. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين التباديل والتوافيق.

تدريب على الاختبار المعياري

31. **الجير** يبيع اتحاد الطلاب المشروبات الغازية في مباريات كرة السلة، وسعر الوحدة AED 1.50. إذا دفع الاتحاد AED 75 لتأجير طاولة البيع، فكم مشروبًا غازيًا سيبيعون لتحقيق أرباح قيمتها AED 250؟

F 116

H 167

G 117

J 217

A $\frac{1}{4}$

B 1

C $\frac{5}{4}$

32. **SAT/ACT** تساوي نسبة 12:9 نسبة $\frac{1}{3}$ إلى

D 2

E 4

29. **التباديل** يقف دائمة أربعة من الفريق الموسيقي، فتاتان وصبيان، في صف أثناء العزف. ما احتمال أن تقف فتاة على طرفي الصف إذا اصطفوا عشوائيًا؟

A $\frac{1}{24}$

C $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{12}$

D $\frac{1}{2}$

30. **إجابة قصيرة** إذا اخترت تباديل الحروف الموضحة أدناه عشوائيًا، فما احتمال تكوين كلمة GEOMETRY؟

O G Y R E M T E

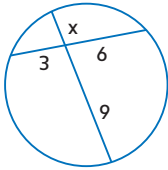
مراجعة شاملة

33. **التسوق** يتوفر المعطف النسائي في القياسات 4، 6، 8، أو 10 وبالألوان الأسود والبني والرمادي والكاكوي. كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ (الدرس 1-7)

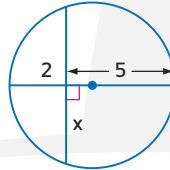
34. يوجد منشوران متشابهان مساحة سطحيهما 256 cm^2 و 324 cm^2 . ما نسبة ارتفاع المنشور الصغير إلى ارتفاع المنشور الكبير؟

جد x . وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

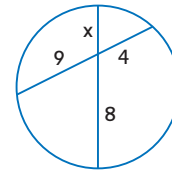
35.



36.



37.



مراجعة المهارات

استخدم خط الأعداد في إيجاد كل قياس.

38. DF

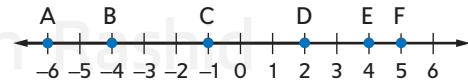
39. AE

40. EF

41. BD

42. AC

43. CF



لماذا؟

الحالي

السابق



تهدف لعبة المهرجان الشعبي الموضحة إلى تجميع النقاط من خلال درجة كرة على منحدر. وعبر عدة مساحات دائرة مختلفة. وتُعين قيمة النقطة في كل مساحة بحسب احتمال قيام الشخص بإسقاط الكرة في تلك المساحة.

- 1 إيجاد الاحتمالات باستخدام الطول.
- 2 إيجاد الاحتمالات باستخدام المساحة.

وجدت احتمالات الأحداث البسيطة.

1 الاحتمال باستخدام الطول تعتمد احتمال الفوز في لعبة المهرجان على مساحة الهدف. وتسمى الاحتمال التي تنطوي على قياس هندسي، مثل الطول أو المساحة، باسم **الاحتمال الهندسي**.

المفهوم الأساسي نسبة احتمال الطول

الشرح

إذا كانت القطعة المستقيمة (1) تحتوي على قطعة أخرى (2) ونقطة على القطعة (1) يتم اختيارها بشكل عشوائي، فإن احتمال وجود النقطة على القطعة (2) هي

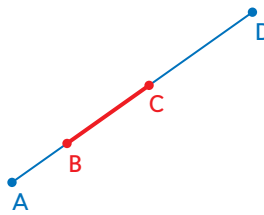
طوال القطعة (2)

طوال القطعة (1)

إذا كانت النقطة E الواقعة على \overline{AD} قد اختيرت عشوائيًا.

$$P(\overline{BC} \text{ تقع على } E) = \frac{BC}{AD}$$

مثال



مثال 1 استخدام الأطوال في إيجاد الاحتمالات الهندسية

النقطة X مختارة عشوائيًا على \overline{JM} . جسد احتمال أن X تقع على \overline{KL} .



$$\begin{aligned} P(\overline{KL} \text{ تقع على } X) &= \frac{KL}{JM} \\ &= \frac{7}{14} \\ &= \frac{1}{2}, 0.5, = 50\% \end{aligned}$$

نسبة احتمال الطول

$$14 = JM = 3 + 7 + 4 \text{ و } KL = 7$$

ببساطة.

تمرين موجّه

النقطة X مختارة عشوائيًا على \overline{JM} . جسد احتمال وقوع كل حدث.

1A. $P(\overline{LM} \text{ تقع على } X)$

1B. $P(\overline{KM} \text{ تقع على } X)$

يمكن استخدام الاحتمالات الهندسية في عدة مواقف واقعية تنطوي على عدد لا نهائي من النتائج.

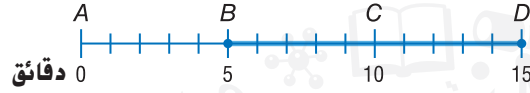
المفردات الجديدة
الاحتمال الهندسي
geometric probability

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

مثال 2 من الحياة اليومية تمثيل الاحتمالات من الحياة اليومية

النقل استخدم المعلومات الموضحة على اليمين. افترض أنك وصلت إلى مدينة "أديسون" على "ريد لاين" في وقت عشوائي، فما احتمال اضطرارك لانتظار القطار لمدة 5 دقائق أو أكثر؟

يمكن استخدام خط الأعداد في تمثيل نموذج هذا الموقف. بما أن القطارات تصل كل 15 دقيقة، فإن القطار التالي سيصل خلال 15 دقيقة أو أقل. على خط الأعداد الموضح أدناه، يتم تمثيل حدث الانتظار لمدة 15 دقيقة أو أكثر بالرمز \overline{BD} .



جدد احتمال هذا الحدث.

$$P(\text{الانتظار 5 دقائق أو أكثر}) = \frac{BD}{AD} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

نسبة احتمال الطول

$$AD = 15 \text{ و } BD = 10$$

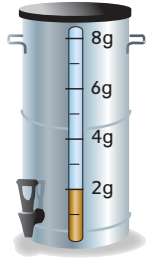
إذا، فإن احتمال انتظار القطار القادم لمدة 5 دقائق أو أكثر هي $\frac{2}{3}$ أو 67% تقريبًا.

تمرين موجّه

2. **الشاي** يُعد الشاي المثلج في أحد المطاعم في أوعية سعة 8 لترات. وعندما يصبح مستوى الشاي أقل من 2 لتر، يصبح مذاق الشاي ضعيفًا.

A. ما احتمال أن يكون محتوى الوعاء أقل من لترين عندما يحاول أحدهم صب كوب من الشاي منه؟

B. ما احتمال أن يتراوح مقدار الشاي في الوعاء في أي وقت ما بين لترين إلى 3 لترات؟



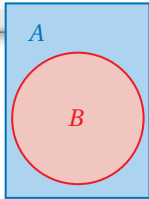
الربط بالحياة اليومية

يصل قطار هيئة النقل في شيكاغو أو يغادر المحطة كل 15 دقيقة شأنه شأن قطار أديسون على "ريد لاين".
المصدر: هيئة النقل بشيكاغو

2 الاحتمال باستخدام المساحة

يمكن أن تتضمن الاحتمالات الهندسية المساحة أيضًا. وموضح فيما يلي نسبة حساب الاحتمالات الهندسية المشتملة على مساحة.

المفهوم الأساسي نسبة احتمال المساحة



الشرح إذا تضمنت المنطقة A المنطقة B وتم اختيار النقطة E في المنطقة A عشوائيًا، فإن احتمال أن النقطة E توجد في المنطقة B تساوي **مساحة المنطقة B**.

مثال إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A، فإن $P(B) = \frac{\text{مساحة المنطقة B}}{\text{مساحة المنطقة A}}$ (النقطة E توجد في دائرة B)

عند تحديد الاحتمالات الهندسية بالأهداف، نفترض

- أن الجسم يسقط داخل مساحة الهدف، و
- أن احتمال سقوط الجسم في أي مكان من المنطقة متساوية.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام المساحة في إيجاد الاحتمالات الهندسية



القفز بالمظلات يفرض أن لاعب القفز بالمظلات يجب أن يسقط على هدف من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة المركزية يساوي 2m، وتبعد الدوائر عن بعضها بمسافة 1m، فما احتمال أن يسقط اللاعب في الدائرة الحمراء؟

ينبغي إيجاد مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف بأكمله. إن نصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m. بينما نصف قطر الهدف بأكمله يساوي 1 + 1 + 1 = 3 m.

نسبة احتمال المساحة

$$\frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}} = P(\text{ينزل لاعب القفز بالمظلات في الدائرة الحمراء})$$

$$A = \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2} = \frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9}$$

بسط.

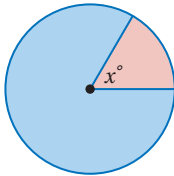
احتمال أن ينزل لاعب القفز بالمظلات في الدائرة الحمراء هي $\frac{1}{9}$ أو حوالي 11%.

تمرين موجّه

3. **القفز بالمظلات** جسد كل احتمال باستخدام المثال السابق.

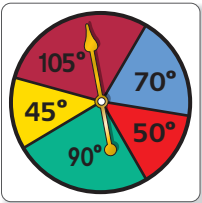
A. (ينزل لاعب القفز بالمظلات في المنطقة الزرقاء) P

B. (ينزل لاعب القفز بالمظلات في المنطقة البيضاء) P



يمكنك أيضًا استخدام قياس الزاوية في إيجاد الاحتمالات الهندسية. إن نسبة مساحة جزء من الدائرة إلى مساحة الدائرة كلها هي نفسها نسبة جزء من الدائرة المركزية إلى 360. **ستبرهن على ذلك في التدريب 27.**

مثال 4 استخدام قياسات الزوايا في إيجاد الاحتمالات الهندسية



استخدم القرص الدوار في إيجاد الاحتمالات في كل مما يلي.

a. (يتجه المؤشر إلى اللون الأصفر) P

قياس الزوايا في المنطقة الصفراء هو 45.

$$P(\text{المؤشر يسقط على اللون الأصفر}) = \frac{45}{360} = 12.5\%$$

b. (يتجه المؤشر إلى اللون البنفسجي) P

قياس الزوايا في المنطقة البنفسجية هو 105.

$$P(\text{المؤشر يسقط على اللون البنفسجي}) = \frac{105}{360} = 29\%$$

c. (يتجه المؤشر إلى اللون الأحمر أو الأزرق) P

مجموع قياسات الزوايا في المنطقتين الحمراء والزرقاء هو 70 + 50 أو 120.

$$P(\text{لم يسقط المؤشر على اللون الأحمر أو الأزرق}) = \frac{360 - 120}{360} = 67\%$$

تمرين موجّه


4B. (لا يتوقف المؤشر على الأخضر) P

4A. (يتوقف المؤشر على الأزرق) P

الربط بالحياة اليومية

يهبط أبطال لعبة القفز بالمظلات عادةً على بعد أقل من 5 cm من مركز الهدف. المصدر: SkyDiving News

النقطة X مختارة عشوائياً على \overline{AD} جسد احتمال وقوع كل حدث. **مثال 1**

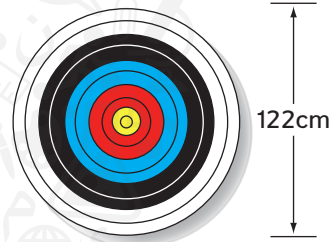
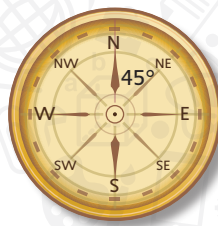


1. $P(\overline{BD})$ تقع على X تقع على \overline{BC} 2.

مثال 2 3. **أوراق اللعب** استُخدمت 43 بطاقة في لعبة أوراق اللعب، وكان من بينها ورقة الجوكر. حصل كل لاعب من أربعة لاعبين على عشر بطاقات ووضعت بقية البطاقات في كومة فوق بعضها. إذا لم يحصل حسام على بطاقة الجوكر، فما احتمال أن يحصل صديقه عليها، وما احتمال أن تكون تلك البطاقة في الكومة؟

المثالان 3 و 4 4. **الرمية** يستهدف الرامي هدفاً قطره 122 cm في 10 دوائر متحدة المركز تقل أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. جسد احتمال أن يصيب الرامي المركز.

5. **الملاحظة** فقد أحد المخيمين طريقه في الغابة، ووجهه بصلته في اتجاه عشوائي. جسد احتمال أن يتوجه هذا الشخص في الاتجاه الشمالي N إلى الشمالي الشرقي NE .



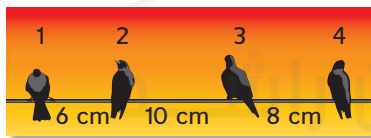
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **التبرير** النقطة X اختيرت عشوائياً على \overline{KFK} جسد احتمال وقوع كل حدث.



6. $P(\overline{FH})$ تقع على X تقع على \overline{GJ} 7.

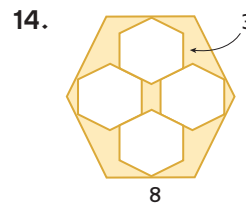
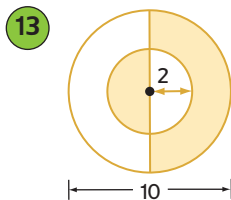
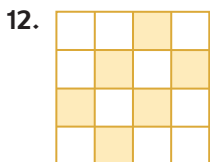
8. $P(\overline{FH})$ تقع على X تقع على \overline{FG} 9.



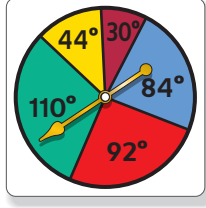
10. **الطيور** تجلس أربعة طيور على سلك الهاتف. ما احتمال نزول طائر خامس على نقطة مختارة عشوائياً بين الطائرين 1 و 4 واستقراره عند نقطة ما بين الطائرين 3 و 4؟

مثال 2 11. **التلفاز** يشاهد حسن التلفاز ورأي إعلان عن أقراص CD يعرف أن صديقه يريد الحصول عليها في عيد ميلاده. إذا أعيد عرض الإعلان في وقت عشوائي بعد فاصل مدته 3 ساعات، فما احتمال أن يرى الإعلان مجدداً أثناء مشاهدة برنامج الكوميدي المفضل الذي مدته 30 دقيقة وسيعرض في اليوم التالي؟

مثال 3 جسد احتمال أن النقطة المختارة عشوائياً تقع في المنطقة المظللة. وعلى فرض أن الأشكال التي تبدو منتظمة ومتطابقة هي فعلاً منتظمة ومتطابقة.



استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. إذا توقف القرص الدوار عند خط، تتم إدارته مرة أخرى.



15. (يتوقف المؤشر على اللون الأصفر) P

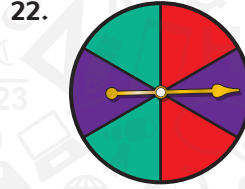
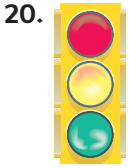
16. (يتوقف المؤشر على اللون الأزرق) P

17. (يتوقف المؤشر على اللون الأخضر) P

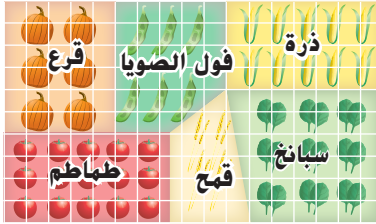
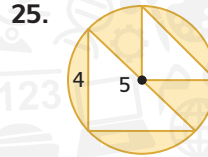
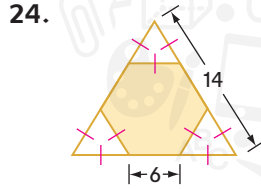
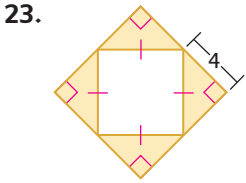
18. (يتوقف المؤشر على اللون الأحمر) P

19. (لا يتوقف المؤشر على اللون الأحمر أو الأصفر) P

صف حدثًا به احتمال 33% لكل نموذج.



جد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة.



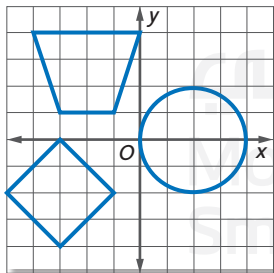
26. **الزراعة** موضح في الصورة تخطيط مزرعة ويمثل كل مربع قطعة أرض. قَدِّر مساحة كل حقل للإجابة عن كل سؤال.

a. ما مساحة حقل السبانخ والذرة معًا؟

b. جد احتمال استخدام قطعة أرض مختارة عشوائيًا في زراعة فول الصويا.



27. **الجبر** أثبت أن احتمال أن النقطة المختارة عشوائيًا في نقطة ستقع في المنطقة المظللة تساوي $\frac{x}{360}$



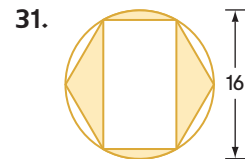
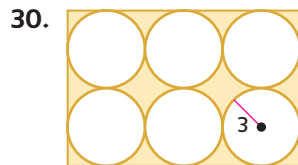
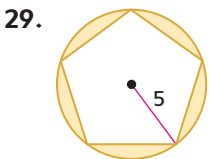
28. **الهندسة الإحداثية** إذا اختيرت نقطة بشكل عشوائي في شبكة الإحداثيات الموضحة على اليسار. فجد كل احتمال.

a. (النقطة داخل الدائرة) P

b. (نقطة داخل شبه المنحرف) P

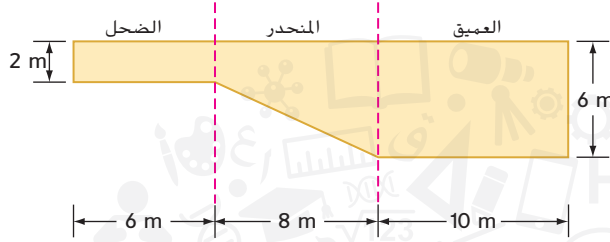
c. (نقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة) P

الاستنتاج المنطقي جد احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا داخل المنطقة المظللة.



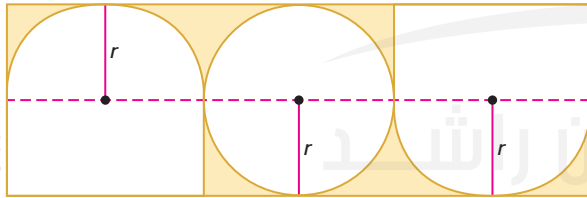
32. **الهندسة الإحداثية** فكّر في نظام المتباينات، $x \leq y$ و $1 \leq x \leq 6$ و $y \geq 1$. إذا اختيرت النقطة (x, y) عشوائيًا في النظام، فما احتمال أن $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 16$ ؟

33. **الحجم** يعيش دب قطبي في حديقة حيوان محلية بها حوض سباحة أضلاعه موضحة في الشكل التالي. إذا كان عرض حوض السباحة 20 m، فما احتمال أن يكون الدب - الذي يحتمل بالتساوي أن يسبح في أي مكان - في المنطقة المنحدرة؟



34. **صناعة القرار** تأجلت الرحلة الجوية التي كانت ستستقلها عبير وستأخر بذلك على المسابقة العلمية الوطنية. وتخطط عبير لاستئجار سيارة من المطار، وتفضل شركة تأجير السيارات A على شركة تأجير السيارات B. تصل السيارة الصغيرة لشركة تأجير السيارات A كل 7 دقائق، بينما تصل السيارة الصغيرة لشركة تأجير السيارات B كل 12 دقيقة.
- a. ما احتمال أن تضطر عبير إلى انتظار 5 دقائق أو أقل لرؤية كل سيارة؟ فسّر استنتاجك. (تلميح: استخدم نموذج المساحة.)
- b. ما احتمال أن تضطر عبير إلى الانتظار لمدة 5 دقائق أو أقل لرؤية إحدى السيارتين؟ فسّر استنتاجك.
- c. لا يمكن أن تنتظر عبير أكثر من 5 دقائق دون المخاطرة بالتأخر عن موعد المسابقة. إذا وصلت سيارة الشركة B أولاً، فهل ينبغي أن تنتظر سيارة الشركة A، أم تستقل سيارة الشركة B؟ فسّر استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



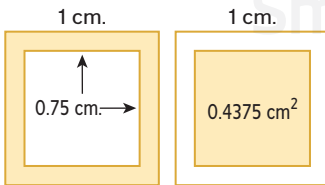
35. **التحدي** جسد احتمال أن تقع نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة في الشكل. قُرب إلى أقرب عشرة من نسبة مئوية.

36. **التبرير** مثلث متساوي الساقين محيطه 32 cm. إذا كانت أطوال الأضلاع أعداد صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحة المثلث 48 cm^2 بالضبط؟ فسّر.

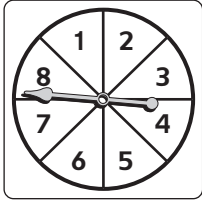
37. **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن اعتبار الأحداث الرياضية أحداثًا عشوائية؟ فسّر.

38. **مسألة غير محددة الإجابة** مثل احتمال 20% لاستخدام ثلاثة أشكال هندسية مختلفة.

39. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في كون احتمال سقوط نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة من المربعات الموضحة هي نفسها لا تتغير.



تدريب على الاختبار المعياري



42. إجابة موسعة ينقسم القرص الدوار إلى 8 أقسام متساوية.

a. إذا توقف السهم عند أحد الأرقام، فما احتمال توقفه عند رقم 3؟

b. إذا توقف السهم عند أحد الأرقام، فما احتمال توقفه عند رقم فردي؟

43. SAT/ACT يوجد في صندوق 7 كرات زرقاء من الرخام، و 6 كرات حمراء، وكرتين بيضاء، و 3 كرات سوداء. إذا اختيرت كرة رخام عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الكرة المختارة حمراء اللون؟

A 0.11

D 0.39

B 0.17

E 0.67

C 0.33

40. الاحتمال تتضمن دائرة نصف قطرها 3 على مربع طول ضلعه 9. ما احتمال أن نقطة مختارة عشوائيًا داخل المربع تقع في داخل الدائرة؟

A $\frac{1}{9}$

C $\frac{\pi}{9}$

B $\frac{1}{3}$

D $\frac{9}{\pi}$

41. الجبر تساوي مساحة غرفة حمد $x^2 + 8x + 12$ مترًا مربعًا. تغطي عيوات طلاء سعة عشرة لترات مساحة قدرها $x^2 + 8x + 8$ 6x أمتار مربعة. ما التعبير الذي يعطي عدد عيوات الطلاء سعة 10 لترات التي ينبغي أن يشتريها حمد لطلاء غرفته؟

F $\frac{x+6}{x+4}$

H $\frac{x+4}{x+6}$

G $\frac{x-4}{x-6}$

J $\frac{x-4}{x+6}$

مراجعة شاملة

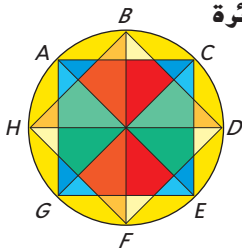
44. حفل زفاف يجلس أربعة أصدقاء على طاولة معًا في حفل زفاف. ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى الباب؟ (الدرس 2-7)

مثّل النضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. (الدرس 1-7)

45. أمام حمدان خيار بأن يتلقى دروس موسيقى على مدار العامين التاليين وأن يعزف على الطبل أو الجيتار.

46. بإمكان شبيخة أن تشتري زوجًا من الأحذية إما مسطحًا وإما بكعب وباللون الأسود أو الأزرق السماوي.

الزجاج المعشق في تصميم لنافذة بالزجاج المعشق، كانت جميع الأقواس الصغيرة حول الدائرة متداخلة. على فرض أن مركز الدائرة هو النقطة O.



47. ما قياس كل من الأقواس الصغيرة؟

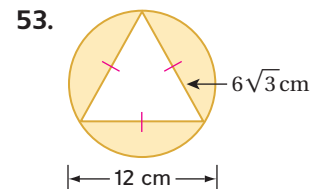
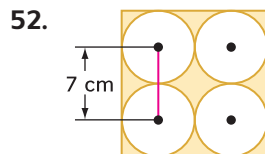
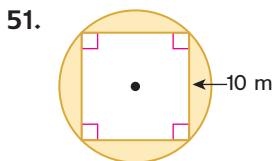
48. ما نوع الشكل $\triangle AOC$ ؟ فسّر.

49. ما نوع الشكل متوازي الأضلاع $BDFH$ ؟ فسّر.

50. ما نوع الشكل متوازي الأضلاع $ACEG$ ؟ فسّر.

مراجعة المهارات

جد مساحة المنطقة المظللة. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة.



اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 7-1 إلى 7-3

8. إجابة موسعة يُعلق حبل مشدود طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرصة انقطاع الحبل عند أي مكان متساوية. (الدرس 7-3)

a. حدد احتمال حدوث القطع في الـ 50 m الأولى من الحبل.

b. حدد احتمال حدوث القطع على بعد 20 m من أحد العمودين.

النقطة A مختارة عشوائيًا على \overline{BE} . جـد احتمال كل حدث. (الدرس 7-3)

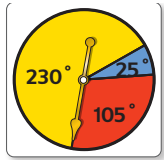


10. $P(\overline{BD})$ تقع على A

9. $P(\overline{CD})$ تقع على A

12. $P(\overline{DE})$ تقع على A

11. $P(\overline{CE})$ تقع على A



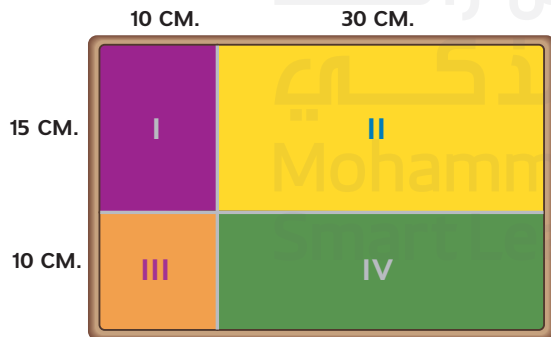
استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. إذا توقف القرص الدوار عند خط، فسيتم تدويره مرة أخرى. (الدرس 7-3)

13. (يتوقف المؤشر عند اللون الأصفر) P

14. (يتوقف المؤشر عند اللون الأزرق) P

15. (يتوقف المؤشر عند اللون الأحمر) P

16. الألعاب كان هدف اللعبة في المهرجان أن يُرمى سهم صوب لوحة وإصابة منطقة III. (الدرس 7-3)



a. ما احتمال إصابة السهم المنطقة I؟

b. ما احتمال إصابة السهم المنطقة II؟

c. ما احتمال إصابة السهم المنطقة III؟

d. ما احتمال إصابة السهم المنطقة IV؟

1. الغداء يقدم أحد المتاجر وجبة غداء خاصة تتكون من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب بسعر AED 19.99. وبيّن الجدول أدناه الاختيارات المتاحة. (الدرس 7-1)

الشطيرة	الحساء	الحلوى	المشروب
سلاطة الدجاج	طماطم	كعك	شاي
لحم بقري	نودلز الدجاج	فطيرة	قهوة
تونة	خضراوات	كولا	كولا خالية من السكر
شرائح اللحم		حليب	

a. كم عدد وجبات الغداء المختلفة التي يمكن تكوينها من المكونات الموضحة في الجدول؟

b. إذا أضيف طبق حساء وقطعتان من الحلوى، فكم وجبة غداء مختلفة يمكن تقديمها؟

2. الأعلام كم إشارة مختلفة يمكن تكوينها بخمسة أعلام من أصل 8 أعلام مختلفة الألوان؟ (الدرس 7-1)

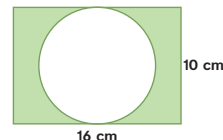
3. الملابس لدى غابة قمصان بستة ألوان: الأحمر والأزرق والأصفر والأخضر والنردي والبرتقالي. ويتوفر لديها قمصان من كل لون بأكمام قصيرة وأكمام طويلة. مثل الغداء العيني لاختيارات غابة من خلال عمل قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. (الدرس 7-1)

4. الهجاء يوجد في كيس مكعب واحد لكل حرف من حروف كلمة TRAINS. إذا اخترت عشوائيًا تبديلاً من تلك الحروف، فما احتمال أن تكون تلك الحروف كلمة TRAINS؟ (الدرس 7-2)

5. الفكة لدى خالد 3 جيوب و 4 قطع نقد معدنية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع قطعة معدنية واحدة في كل جيب؟ (الدرس 7-2)

6. العملات المعدنية رُميت عشر عملات معاً في وقت واحد. كم عدد نتائج سقوط قطعة معدنية الثالثة ووجهها لأعلى؟ (الدرس 7-2)

7. جـد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة. (الدرس 7-3)





لماذا؟

الحالي

السابق

انطلاقاً من التدريب، يعرف خلف أنه نجح في تسديد 70% من الرميات الحرة، ويريد أن يستخدم هذه المعلومة في توقع عدد الرميات الحرة التي يحتفل أن يسدها في المباريات.

1 تصميم نماذج محاكاة لتقدير الاحتمالات.
2 تلخيص البيانات من خلال نماذج المحاكاة.

إيجاد الاحتماليات باستخدام القياسات الهندسية.

1 **تصميم نموذج محاكاة** **نموذج الاحتمال** هو نموذج في الرياضيات يُستخدم في مطابقة ظاهرة عشوائية. **المحاكاة** هي استخدام نموذج الاحتمال في إعادة تمثيل الموقف مرات ومرات لتقدير احتماليات النتائج المختلفة. ويمكنك اتباع الخطوات التالية في تصميم نموذج المحاكاة.

المفهوم الأساسي تصميم نموذج محاكاة

- الخطوة 1** حدد كل نتيجة محتملة واحتمالها النظري.
الخطوة 2 اذكر أي افتراضات.
الخطوة 3 صف نموذج الاحتمال المناسب للموقف.
الخطوة 4 عرّف المحاولة بالنسبة إلى الموقف واذكر عدد المحاولات المفترض إجراؤها.

المفردات الجديدة

نموذج الاحتمال
probability model
المحاكاة simulation
متغير عشوائي
random variable
قيمة التوقع
expected value
قانون الأعداد الكبيرة
Law of Large Numbers

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام نماذج الرياضيات.

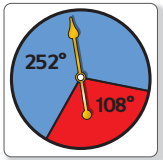
نموذج الاحتمال الملائم له الاحتمال نفسها في نموذج المحاكاة الذي تحاول توقعه. وتعد الأمثلة الهندسية هي من نماذج الاحتمال العام.

مثال 1 تصميم نموذج محاكاة باستخدام نموذج هندسي

كرة السلة سدد خلف 70% من رمياته الحرة في الموسم الأخير. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه في تقدير احتمال الرميات الحرة التي سيسدها في هذا الموسم.

- الخطوة 1** النتائج المحتملة
• يسدد خلف رمية حرة. ← 70%
• يخفق خلف في تسديد رمية حرة. ← (100 - 70)% أو 30%
- الخطوة 2** يشتمل نموذج المحاكاة الذي تقدمه على 40 محاولة.

- الخطوة 3** يمكن هنا استخدام القرص الدوار المُقسّم إلى قسمين. يتكون أحدهما من 70% من مساحة القرص الدوار، ويتكون القسم الآخر من 30%. لابتكار قرص دوار مثل هذا، جـد قياس الزاوية المركزية لكل قسم.
- رمية حرة صائبة** $252^\circ = 360^\circ \times 70\%$
رمية حرة ضائعة $108^\circ = 360^\circ \times 30\%$



رمية حرة صائبة
رمية حرة ضائعة

- الخطوة 4** يقوم شخص بتدوير القرص الدوار، وتمثل المحاولة تسديد رمية حرة واحدة. وتمثل المحاولة الناجحة رمية حرة صائبة، والمحاولة الفاشلة رمية حرة ضائعة. وتتكون المحاكاة من 40 محاولة.



تمرين موجّه

1. **المطاعم** يلصق أحد المطاعم أجزاء ألعاب بأكوام الشراب الكبيرة، ويقدم جائزة للشخص الذي يجمع أجزاء اللعبة الستة جميعًا. صمم نموذج محاكاة مستخدمًا نموذجًا هندسيًا يمكن استخدامه في تقدير عدد الأكوام الكبيرة التي ينبغي أن يشتريها الشخص لتجميع أجزاء اللعبة الستة جميعًا.

نصيحة في حل المسائل

استخدام نموذج المحاكاة

توفر نماذج المحاكاة غالبًا إستراتيجية آمنة وفعالة في حل المسائل في المواقف حيث يكون استخدام الأساليب النظرية في الحل مجازفًا أو خطيرًا أو مستحيلًا. وينبغي أن تشمل المحاكاة على بيانات يسهل الحصول عليها أكثر من البيانات الفعلية التي تستخدمها في النموذج.

بالإضافة إلى النماذج الهندسية، فإن نموذج المحاكاة يمكن إجراؤه أيضًا باستخدام النرد أو رمي القطعة المعدنية أو جداول الأعداد العشوائية، ومولدات الأعداد العشوائية، مثل المولدات المتوفرة على حاسبات التمثيل البياني.

مثال 2

تصميم نموذج محاكاة باستخدام الأعداد العشوائية

لون العيون وجدت دراسة أجريت على طلاب مدرسة الشرق الثانوية أن 40% من الطلاب عيونهم بنية، وأن 30% عيونهم عسلية، وأن 20% عيونهم زرقاء، وأن 10% عيونهم خضراء. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه في تقدير احتمال لون عين أحد طلاب المدرسة إذا اختير عشوائيًا.

الاحتمال النظري	النتائج المحتملة
40%	العيون البنية ←
30%	العيون العسلية ←
20%	العيون الزرقاء ←
10%	العيون الخضراء ←

الخطوة 2 نفترض أن لون عيون الطالب سيقع ضمن واحدة من هذه الفئات الأربع.

الخطوة 3 استخدم مولّد الأعداد العشوائية في الحاسبة. عيّن الأعداد الصحيحة من 0 إلى 9 لتمثل بيانات الاحتمال بدقة. ولا يهم الأعداد المختارة فعليًا لتمثيل النتائج.

النتائج	المهثلة بـ
العيون البنية	0, 1, 2, 3
العيون العسلية	4, 5, 6
العيون الزرقاء	7, 8
العيون الخضراء	9

الخطوة 4 تقوم التجربة على اختيار طالب عشوائيًا وتسجيل لون عينه، ويتكون نموذج المحاكاة من 20 تجربة.

نصيحة دراسية

مولد الأعداد العشوائية

لتوليد مجموعة من الأعداد الصحيحة العشوائية في حاسبة التمثيل البياني، اضغط على **MATH** وحدد randInt في قائمة PRB. ثم أدخل قيم العدد الصحيح لبدية ونهاية النطاق الخاص بك وعدد الأعداد الصحيحة التي تريد استخدامها في كل محاولة.

تمرين موجّه

2. **كرة القدم** سدد خليفة 18% من ركلاته الحرة في الموسم الماضي. صمم نموذج محاكاة مستخدمًا مولد الأعداد العشوائي، بحيث يمكن استخدام ذلك النموذج في تقدير احتمال تسديده للركلة الحرة التالية.

2 **تلخيص بيانات المحاكاة** ستحتاج بعد تصميم نموذج المحاكاة إلى تنفيذ المحاكاة وتقرير نتائجها، وينبغي أن يتضمن ذلك تلخيصًا عدديًا وبيانيًا لبيانات المحاكاة، وكذلك تقديرًا لاحتمال النتائج المطلوبة.

مثال 3 تنفيذ نموذج المحاكاة وتلخيص البيانات

كرة السلة راجع المحاكاة في المثال 1. نفذ نموذج المحاكاة. ثم قدم النتائج مستعيناً بالملخصات العددية والبيانية المناسبة.

أنشئ جدول تكرر وسجل النواتج بعد تدوير القرص الدوار 40 مرة.

النتيجة	الإحصاء	التكرار
رمية حرة صائبة		26
رمية حرة ضائعة		14
الإجمالي		40

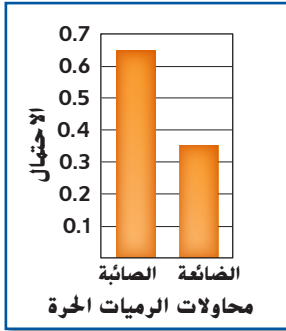
بناءً على بيانات المحاكاة، احسب احتمال تحقيق خلف الرمية الحرة المقبلة.

$$\frac{\text{عدد الرميات الحرة المُسددة}}{\text{عدد محاولات الرميات الحرة}} = \frac{26}{40} = 0.65$$

هذه احتمال تجريبية.

تبلغ احتمال أن يسدد خلف رميته الحرة التالية 0.65 أو 65%. لاحظ أن هذه النسبة قريبة من الاحتمال النظري، وهي 70%. إذًا، الاحتمال التجريبي لإضاعته رميته الحرة التالية تساوي $1 - 0.65 = 0.35$.

ارسم تمثيلًا بيانيًا شريطيًا لهذه النواتج.



تمرين موجّه

3. لون العيون استخدم حاسبة التمثيل البياني في تنفيذ نموذج المحاكاة في المثال 2، ثم قدم النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.



الربط بالحياة اليومية

يحتفظ مارك برايس بالرقم القياسي لأعلى نسبة في الرمية الحرة للحياة المهنية في الرابطة الوطنية لكرة السلة (NBA) بنسبة 90.4%.
المصدر: الرابطة الوطنية لكرة السلة

المتغير العشوائي مستخدم في افتراض مجموعة من القيم لكل منها احتمالات ثابتة. ففي تجربة رمي حجري نرد مثلاً، يمكن أن يمثل المتغير العشوائي X مجموع النواتج المحتملة لحجر النرد. ويبين الجدول بعض قيم المتغير X المعينة لنتائج هذه التجربة.

مجموع نتائج رمي حجري النرد.	
النتيجة	القيمة X
(1, 1)	2
(1, 2)	3
(2, 1)	3
(4, 5)	9
(6, 6)	12

قيمة التوقع، المعروفة أيضًا باسم توقع الرياضيات، هي القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي الذي يتوقعه الشخص بعد تكرار

تجربة

أو محاكاة لعدد لانتهائي نظريًا. اتبع الخطوات التالية لإيجاد قيمة التوقع $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

المفهوم الأساسي حساب قيمة التوقع

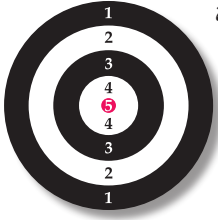
الخطوة 1 اضرب قيمة X في احتمال حدوثها.

الخطوة 2 كرر الخطوة 1 لجميع القيم المحتملة من X .

الخطوة 3 جسد مجموع النتائج.

بما أنه متوسط، فليس بالضرورة أن تكون قيمة التوقع مساوية للقيمة المحتملة للمتغير العشوائي.

مثال 4 حساب قيمة التوقع



الأسهم افترض أنه تم إطلاق سهم إلى هدف معين. وكان نصف قطر الدائرة المركزية 1 cm ويزيد نصف قطر كل دائرة تالية له بمقدار 4 cm عن الدائرة السابقة. وتظهر في الصورة قيمة النقطة في كل منطقة.

a. على فرض أن المتغير العشوائي Y يمثل قيمة النقطة المعبئة لإحدى المناطق على لوحة الأسهم. احسب قيمة التوقع $E(Y)$ من كل ضربة.

احسب أولاً الاحتمالات الهندسية للهبوط في كل منطقة.

$$\text{المنطقة 5} = \frac{\pi(1)^2}{\pi(1+4+4+4+4)^2} = \frac{1}{289} \quad \text{المنطقة 4} = \frac{\pi(4+1)^2 - \pi(1)^2}{\pi(17)^2} = \frac{24}{289}$$

$$\text{المنطقة 3} = \frac{\pi(4+5)^2 - \pi(5)^2}{\pi(17)^2} = \frac{56}{289} \quad \text{المنطقة 2} = \frac{\pi(4+9)^2 - \pi(9)^2}{\pi(17)^2} = \frac{88}{289}$$

$$\text{المنطقة 1} = \frac{\pi(4+13)^2 - \pi(13)^2}{\pi(17)^2} = \frac{120}{289}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{120}{289} + 2 \cdot \frac{88}{289} + 3 \cdot \frac{56}{289} + 4 \cdot \frac{24}{289} + 5 \cdot \frac{1}{289} = 1.96$$

قيمة التوقع لكل رمية حوالي 1.96.

b. صمّم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة، أو متوسط نتائج المحاكاة للرمي في هذه اللعبة. كيف تقارن تلك القيمة بقيمة التوقع التي جسدتها في الجزء a؟

لتمثيل بيانات الاحتمال بدقة.

منطقة 2 = الأعداد الصحيحة 121-208

منطقة 4 = الأعداد الصحيحة 265-288

منطقة 1 = الأعداد الصحيحة 1-120

منطقة 3 = الأعداد الصحيحة 209-264

منطقة 5 = العدد الصحيح 289

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتوليد

50 محاولة لأعداد صحيحة عشوائية من 1 إلى 289.

سجّل النتائج في جدول التكرار. ثم احسب متوسط قيمة النتائج.

النتيجة	التكرار
المنطقة 1	16
المنطقة 2	13
المنطقة 3	13
المنطقة 4	8
المنطقة 5	0

$$\text{متوسط القيمة} = 2.26 = 1 \cdot \frac{16}{50} + 2 \cdot \frac{13}{50} + 3 \cdot \frac{13}{50} + 4 \cdot \frac{8}{50} + 5 \cdot \frac{0}{50}$$

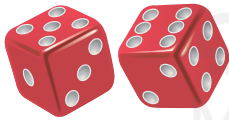
متوسط القيمة 2.26 أكبر من قيمة التوقع 1.96.

تهرين موجّه

4. **النرد** إذا زُمي نردان. لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل مجموع النتائج المحتملة.

A. جسد قيمة التوقع $E(X)$.

B. صمم نموذج محاكاة ونفذه لتقدير متوسط القيمة في هذه التجربة. ما أوجه المقارنة بين هذه القيمة وبين قيمة التوقع التي جسدتها في الجزء A؟



نصيحة دراسية

الاحتمال الهندسي تذكر أنه عند تحديد الاحتمالات الهندسية بالنسبة للأجسام. نفترض هبوط الجسم داخل المنطقة الهدف ومن المحتمل بالتدريج نفسه أيضًا هبوطه في أي مكان داخل المنطقة.



الربط بتاريخ الرياضيات

ياكوب بيرنولي

(1654-1705) كان بيرنولي عالم رياضيات سويسريًا.

وكان من الواضح له أنه كلما

زادت الملاحظات عن موقف

معين. زادت قدرة المرء على

توقع النتائج المستقبلية. ولقد

أثبت بالبرهان العلمي قانون

الأعداد الكبيرة في كتابه

Ars Conjectandi (Art of

Conjecturing). المنشور سنة 1713.

الاختلاف في متوسط القيمة من نموذج المحاكاة وقيمة التوقع في مثال 4 يوضح **قانون الأعداد الكبيرة**: كلما زاد عدد المحاولات في العملية العشوائية، اقترب متوسط القيمة من قيمة التوقع.

1. الدرجات حصلت فاطمة على درجة A في 80% من الاختبارات القصيرة لمادة الأحياء في الفصل الدراسي الأول. صمم نموذج محاكاة ونفذه مستخدماً النموذج الهندسي لتقدير احتمال حصولها على الدرجة A في الاختبار القصير لمادة الأحياء في الفصل الدراسي الثاني. ثم اعرض النتائج مستخدماً الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

النسبة المئوية للتسجيلات %	الصف الدراسي
45%	التايكوندو
30%	اليوجا
15%	السباحة
10%	الملاكمة



2. اللياقة البدنية يبين الجدول النسبة المئوية للأعضاء المشاركين في أربع حصص في نادي اللياقة البدنية. صمم نموذج محاكاة ونفذه لتقدير احتمال مشاركة عضو جديد في النادي في كل حصة. واعرض النتائج مستخدماً الملخصات العددية والبيانية المناسبة.
3. ألعاب المهرجانات الهدف من اللعبة الموضحة هو جمع النقاط باستخدام سهم لفرقة البالونات. على فرض أن كل سهم سيصيب بالوناً.
- a. احسب قيمة التوقع من كل رمية.
- b. صمّم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة لهذه اللعبة.
- c. كيف تقارن قيمة التوقع بمتوسط القيمة؟

التمرين وحل المسائل

- 1-3 مثال صمم نموذج محاكاة ونفذه باستخدام نموذج احتمال هندسي. ثم قدم النواتج باستخدام ملخصات عددية وبيانية مناسبة.

أسعار التذاكر	
السعر	العدد المتاح
AED 8	40
AED 10	30
AED 15	20
AED 20	10

4. يبيع مسرح مجتمعي صغير تذاكر مسرحية بأربعة أسعار مختلفة. يعرض الجدول أدناه الأسعار والعدد المقابل لها من التذاكر المتاحة. ما قيمة التوقع لتذكرة مختارة عشوائياً؟

العدد على البطاقات	العدد على البطاقة
20	1
15	2
10	3
5	4

5. تتكون لعبة من مجموعة بطاقات مكتوب عليها الأعداد 1، 2، أو 3، أو 4. يسحب اللاعب بطاقةً من المجموعة في بداية الدورة، ثم يتحرك عدد المساحات حسب العدد المكتوب على البطاقة. يبين الجدول عدد كل نوع من البطاقات في المجموعة. ما قيمة التوقع للعدد المكتوب على بطاقة سُحبت من المجموعة؟

- A 1 C 3
B 2 D 4

عدد المظاريف	المبلغ التقدي
4	AED 1,000
3	AED 5,000
2	AED 10,000
1	AED 25,000

6. يختار الفائز برنامج الألعاب التليفزيوني مظلوفاً من عشرة مظاريف بها جوائز نقدية. يبين الجدول عدد المظاريف التي تشمل على كل مبلغ نقدي. ما قيمة التوقع للجائزة النقدية؟

7. يرمز طائر الغواص إلى ولاية مينسوتا. يعرض الجدول أدناه بيانات عن تعداد طائر الغواص في 700 بحيرة عام 1989. إلى أقرب جزء من عشرة، ما عدد طيور الغواص المتوقع في بحيرة مختارة عشوائياً؟

عدد طيور الغواص	عدد البحيرات
0	365
1	80
2	131
3	41
4	38
5	17
6	14
7	14

8. يبلغ متوسط ضربات المضرب للاعب بيسبول في ولاية أوريجون 276. إذا ظل متوسط ضربات المضرب ثابتًا، فكم تقريبًا عدد ضربات المضرب التي يتوقع أن يضربها في المرات الخمسين القادمة؟

- A 14 C 284
B 22 D 36

9. سددت فتحة 3 رميات حرة من كل 7 رميات حرة في مباريات كرة السلة العشر الأخيرة التي شاركت فيها. فكم تقريبًا عدد الرميات الحرة التي يتوقع أن تسدها خلال المباريات المئة القادمة؟

- A 30 C 43
B 37 D 70

10. تختار محطة الإذاعة عشوائيًا 200 متصل لتعرف نوع الموسيقى التي يفضلون. ووجدت أن 55 متصلاً من أصل 200 متصل يفضلون أغاني الروك الحديثة، ويفضل 96 متصلاً أغاني الروك الكلاسيكية. بينما لم يذكر البقية نوعًا معينًا. كم متصلاً من المتصلين الخمسين التاليين يتوقع أن يفضلوا موسيقى الروك الحديثة أو موسيقى الروك الكلاسيكية؟

- A 14 C 244
B 17 D 38

11. اختارت فوزية عشوائيًا 50 نباتًا في دار الحضانة لفحصها لتحديد هل هي مصابة بحشرة المنّ أم لا. واكتشفت أن 7 نباتات مصابة بهذه الحشرات. إذا كان في دار الحضانة 780 نباتًا، فما العدد المتوقع للنباتات المصابة بحشرة المنّ؟

- A 109 C 350
B 111 D 430

12. بينت عينة عشوائية من 100 قميص في أحد المصانع أن هناك فجوات في الخياطة في أربعة قمصان. إذا كانت العينة 1500 قميص، فما العدد المتوقع للقمصان التي بها فجوات مشابهة؟

- A 25 C 60
B 40 D 375

13. إذا بينت عينة عشوائية من 6 طائرات حدوث تأخير في 18% من 1,200 رحلة طيران، فكم رحلة طيران من الرحلات الـ 150 التالية يتوقع أن تصل في موعدها؟

العدد	التكرار
0	2
1	5
2	4
3	2
4	8
5	11
6	0
7	4
8	6
9	2

- A $\frac{23}{44}$ C $\frac{21}{44}$
B $\frac{1}{2}$ D $\frac{5}{11}$

A يمكن توقع أن جميع الرحلات الجوية ستصل في موعدها.

B يمكن توقع أنه لن تصل أي رحلة جوية في موعدها.

C يمكن توقع أن 27 من الرحلات الجوية ستصل في موعدها.

D يمكن توقع أن 123 من الرحلات الجوية ستصل في موعدها.

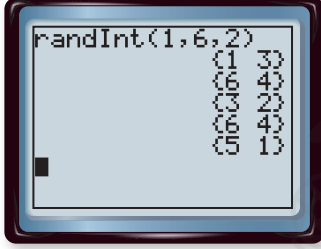
14. استُخدم مولد الأعداد العشوائية في ابتكار سلسلة من الأعداد العشوائية من 0 إلى 9. يبين الجدول التالي النتائج التي تم الحصول عليها. ما الاحتمال التجريبية للحصول على عدد زوجي من مولد الأعداد العشوائية؟

15. تمثيل النماذج استخدمت لمياء إحصائياتها من الموسم الأخير لتصمّم نموذج محاكاة باستخدام مولد أعداد عشوائية للتنبؤ بما يتوقع أن تحرزه كلما حصلت على الكرة.

a. استنادًا إلى جدول التكرار، ما الذي افترضته لمياء أن يكون الاحتمال النظري بأن تحرز نقطتين عندما تحصل على الكرة؟

قيم الأعداد الصحيحة	النقاط المحرزة	التكرار
1-14	0	31
15	1	0
16-28	2	17
29-30	3	2

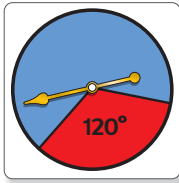
- b. ما متوسط القيمة لحصول لمياء على الكرة؟ وما قيمة التوقع؟
- c. هل تتوقع أن تكون بيانات المحاكاة مختلفة؟ إذا كانت كذلك، فسّر ذلك. إذا لم تكن كذلك، فاشرح السبب.
16. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة قيمة التوقع.
- a. **عملي** ارمي حجري نرد 20 مرة وسجل مجموع كل رمية.
- b. **عددي** استخدم برنامج توليد الأعداد العشوائي على آلة حاسبة لتوليد 20 زوجًا من الأعداد الصحيحة بين 1 و6. سجّل مجموع كل زوج ثنائي.
- c. **جدولي** انسخ الجدول أدناه وأكمله باستخدام نواتجك من الجزأين a و b.



مجموع النتائج من برنامج توليد الأعداد العشوائية	مجموع الرمي	المحاولة
		1
		2
		...
		20

- d. **بياني** استخدم تمثيلًا بيانيًا شريطيًا لتمثيل عدد مرات حدوث كل مجموع محتمل في الدورات الخمس الأولى. كتر العملية للدورات العشر الأولى، ثم نتائج جميع الدورات العشرين.
- e. **لفظي** كيف يتغير شكل التمثيل البياني الشريطي مع كل محاولة إضافية؟
- f. **تمثيل بياني** مثل عدد مرات كل مجموع محتمل يحدث مع برنامج توليد الأعداد العشوائي بيانيًا في صورة تمثيل بياني شريطي.
- g. **لفظي** كيف تقارن التمثيلات البيانية لمحاولة النرد بمحاولة العدد العشوائي؟
- h. **تحليلي** بناءً على التمثيلات البيانية، في رأيك كيف تكون قيمة التوقع في كل تجربة؟ فسّر استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا باستخدام مهارات التفكير العليا



17. **الفرضيات** للتجربة ثلاث نتائج محتملة بالتساوي وهي A، B، و C. هل يمكن استخدام القرص الدوار الموضح في المحاكاة في توقع احتمال النتيجة C؟ فسّر استنتاجك.
18. **التبرير** هل يمكن استخدام رمي القطعة المعدنية أحيانًا، أم دائمًا، أم مطلقًا في محاكاة تجربة لها نتيجتان محتملتان؟ فسّر.
19. **التبرير** عند تصميم نموذج محاكاة فيه تُلقى الأسهم على أهداف معينة، ما الافتراضات التي يجب اتخاذها ولماذا يجب اتخاذها؟
20. **مسألة غير محددة الإجابة** صف تجربة لم تكن قيمة التوقع فيها نتيجة محتملة. فسّر.
21. **E** **الكتابة في الرياضيات** كيف تختلف قيمة التوقع عن الاحتمال؟

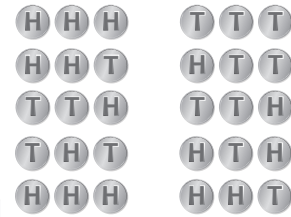
24. إجابة قصيرة صمم سالم نموذج محاكاة لتحديد عدد مرات تدوير اللاعب لعدد أكبر من 4 في حجر النرد في اللعبة اللوحية التي تتكون من 5 دورات. يبين الجدول النتائج التي حصل عليها من 50 محاولة. ما احتمال أن يقوم اللاعب بتدوير عدد أكبر من 4 مرتين أم أكثر في خمس دورات؟

عدد الدورات أكبر من 4	التكرار
0	8
1	15
2	18
3	9
4	0
5	0

25. SAT/ACT إذا كان برطمان يحتوي على 150 حبة فول سوداني و 60 حبة من الكاجو. فما الاحتمال التقريبي لاختيار حبة كاجو من البرطمان عند الاختيار العشوائي؟

A 0.25 C 0.33 E 0.71
B 0.29 D 0.4

22. الاحتمال ألقت لامييس 3 قطع نقد معدنية في وقت واحد وكررت ذلك 9 مرات أخرى. تظهر نتائجها أدناه. حيث تمثل H وجه الصورة وتمثل T وجه الكتابة. اعتمادًا على نتائج لامييس. ما احتمال أن تقع مجموعة من 3 عملات بحيث تكون ناحية الصورة لأعلى؟



A 0.1 B 0.2 C 0.3 D 0.9

23. الجبر يجمع سعيد الكتب الكوميدية. ولديه الآن 20 كتابًا في مجموعته، ويضيف إليها 3 كتب كل شهر. كم شهرًا يحتاج سعيد ليصبح عدد الكتب في مجموعته 44 كتابًا؟

F 5 G 6 H 8 J 15

مراجعة شاملة



النقطة X مختارة عشوائيًا على \overline{QT} . جـد احتمال كل حدث. (الدرس 3-7)

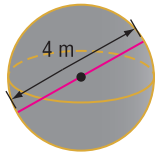
27. $P(\overline{RT})$ (X تقع على \overline{RT})

26. $P(\overline{QS})$ (X تقع على \overline{QS})

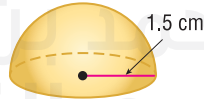
28. الكتب تختار منال كتبًا من بين 10 كتب في المكتبة. ما احتمال أن تختار 3 كتب معينة لتلق نظرة عليها من الكتب العشرة الأولى؟ (الدرس 2-7)

جـد مساحة سطح كل شكل. قَرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

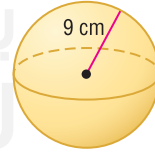
29.



30.



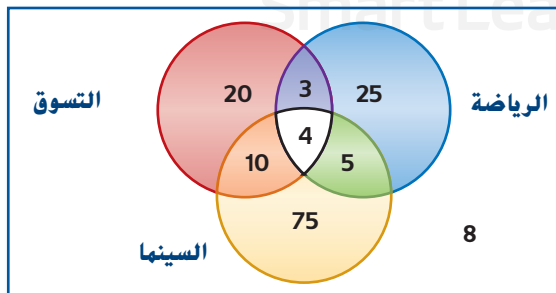
31.



مراجعة المهارات

32. الترفيه سُئلت مجموعة مكونة من 150 طالبًا عما يريدون فعله أثناء وقت فراغهم.

- a. كم طالبًا يريد الذهاب إلى السينما أو الخروج للتسوق؟
b. ما النشاط الذي ذكره 37 طالبًا؟
c. كم طالبًا لم يقل إنه يريد الذهاب إلى السينما؟



الاحتمال والفرص

.. لماذا؟

.. الحالي

بحث تسويقي لتحديد معدلات مشاهدة التلفاز، تقدر شركة نيلسن ميديا للأبحاث عدد مشاهدي أي برنامج تلفزيوني مقدم. ويتم ذلك عن طريق اختيار عينة من المشاهدين، ومطالبتهم بتسجيل عادات مشاهدتهم في دفتر تسجيل، ثم حساب عدد مشاهدي كل برنامج. وهناك ما يقرب من 100 مليون أسرة في الولايات المتحدة الأمريكية، ويتم اختيار 5000 أسرة فقط لمجموعة العينة. فما احتمال اختيار أي أسرة واحدة من هذه الأسر للمشاركة؟ **سحل هذه المسألة في المثال 1.**

1 إيجاد احتمال وقوع حدث.

2 إيجاد فرص نجاح وفشل حدث.

عندما نشك في وقوع حدث، يمكننا قياس فرص وقوعه عن طريق **الاحتمال**. فعلى سبيل المثال، يكون هناك 52 نتيجة ممكنة عند اختيار بطاقة عشوائياً من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب. وتسمى مجموعة نتائج حدث باسم **الفضاء العيني**. وتسمى النتيجة المرغوبة، لسحب بطاقة لعب "ملك القلوب" على سبيل المثال، **نجاح**. وتسمى أي نتيجة أخرى **فشل**. ويكون احتمال وقوع حدث ما هي نسبة عدد طرق إمكانية وقوع هذا الحدث إلى إجمالي عدد النتائج في الفضاء العيني، وهي مجموع حالات النجاح والفشل. وهناك طريقة واحدة لسحب بطاق "ملك القلوب"، وهناك إجمالي عدد نتائج يبلغ 52 نتيجة عند اختيار بطاقة من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب؛ إذاً احتمال اختيار ملك القلوب هو $\frac{1}{52}$.

احتمال النجاح والفشل

1 إذا كانت إمكانية نجاح حدث بعدد s من الطرق وفشله بعدد f من الطرق، إذاً فاحتمال نجاح $P(s)$ واحتمال فشل $P(f)$ هما كما يلي.

$$P(s) = \frac{s}{s+f} \quad P(f) = \frac{f}{s+f}$$

مثال 1

بحث تسويقي ما احتمال اختيار أية أسرة واحدة للمشاركة في مجموعة العينة التي ستختارها شركة نيلسن ميديا للأبحاث؟

استخدم قانون الاحتمال. بما أنه سيتم اختيار 5000 أسرة للمشاركة، فإن $s = 5000$. ويمثل المقام، $s + f$ ، إجمالي عدد الأسر. في حين يمثل المتغير s من يتم اختيارهم، ويمثل المتغير f الذين لم يتم اختيارهم. إذاً، $s + f = 100,000,000$.

$$P(5000) = \frac{5000}{100,000,000} = \frac{1}{20,000} \quad \frac{1}{20,000} = 0.005\%$$

يكون احتمال اختيار أية أسرة واحدة هي 0.005%.

يكون احتمال الحدث الذي لا يمكن فشله هي 1. واحتمال الحدث الذي لا يمكن نجاحه هي 0. ولذلك، يقع احتمال النجاح $P(s)$ دائماً بين 0 و 1، شاملة هذين العددين. أي أن $0 \leq p(s) \leq 1$.

مثال 2

يحتوي كيس على 5 كرات زجاجية صغيرة صفراء و 6 زرقاء و 4 بيضاء.

a. ما احتمال أن تكون الكرة الزجاجية الصغيرة التي يتم اختيارها عشوائياً صفراء؟

b. ما احتمال أن تكون الكرة الزجاجية الصغيرة التي يتم اختيارها عشوائياً ليست بيضاء؟

a. نُكتب احتمال اختيار كرة زجاجية صغيرة صفراء (صفراء) P . وهناك خمس طرق لاختيار كرة زجاجية صغيرة صفراء من الحقيبة، و $6 + 4 = 10$ طرق لعدم اختيار كرة زجاجية صغيرة صفراء. إذاً، $s = 5$ و $f = 10$.

$$P(\text{صفراء}) = \frac{5}{5+10} = \frac{1}{3} \quad P(s) = \frac{s}{s+f}$$

احتمال اختيار كرة زجاجية صغيرة صفراء هي $\frac{1}{3}$

b. إذا كانت هناك 4 طرق لاختيار كرة زجاجية صغيرة بيضاء. إذاً هناك 11 طريقة لاختيار كرة زجاجية صغيرة ليست بيضاء.

$$P(\text{ليست بيضاء}) = \frac{11}{4+11} = \frac{11}{15}$$

احتمال عدم اختيار كرة زجاجية صغيرة ليست بيضاء هي $\frac{11}{15}$.

مثال 3

تحتوي لوحة دوائر إلكترونية كهربية بها 20 رقاقة حاسوب على 4 رقاقات معيبة. فإذا تم اختيار 3 رقاقات عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الثلاثة كلها معيبة؟

هناك $C(4, 3)$ طرق لاختيار 3 رقاقات معيبة من أصل 4، و $C(20, 3)$ طرق لاختيار 3 شرائح من أصل 20.

$$P(3 \text{ رقاقات معيبة}) = \frac{C(4, 3)}{C(20, 3)} \quad \leftarrow \text{طرق لاختيار 3 رقاقات معيبة}$$

$$= \frac{4!}{17! 3!} = \frac{1}{285}$$

احتمال اختيار 3 رقاقات حاسوب معيبة هي $\frac{1}{285}$.

إن احتمال النجاح واحتمال الفشل لأي حدث تساوي دائمًا 1.

$$P(s) + P(f) = \frac{s}{s+f} + \frac{f}{s+f}$$

$$= \frac{s+f}{s+f} = 1$$

تستخدم هذه الخاصية غالبًا في إيجاد احتمال وقوع الأحداث. فعلى سبيل المثال، تكون احتمال

سحب بطاقة "ملك القلوب" هي $P(s) = \frac{1}{52}$. إذا احتمال عدم سحب هذه البطاقة

هي $P(f) = 1 - \frac{1}{52}$ وتساوي $\frac{51}{52}$. ونظرًا لأن مجموعيهما يساوي 1، فإنه يطلق على $P(s)$ و $P(f)$ اسم **متمهين**.

مثال 4

توصلت الشركة CyberToy إلى أنه من أصل دورة إنتاج تبلغ 50 لعبة، هناك 17 لعبة معيبة. وإذا تم اختيار 5 ألعاب عشوائيًا، فما احتمال أن تكون واحدة معيبة على الأقل؟

إن متبة اختيار لعبة واحدة معيبة على الأقل هي عدم اختيار ألعاب معيبة. بمعنى أن (لعبة واحدة معيبة على الأقل) $1 - P$ = (عدم وجود ألعاب معيبة) P .

(لعبة واحدة معيبة على الأقل) $1 - P$ = (عدم وجود ألعاب معيبة) P .

$$= 1 - \frac{C(33, 5)}{C(50, 5)} \quad \leftarrow \text{طرق اختيار 5 ألعاب معيبة}$$

$$= 1 - \frac{237,336}{2,118,760}$$

$$\approx 0.8879835375 \quad \leftarrow \text{باستخدام حاسبة.}$$

تبلغ احتمال اختيار لعبة واحدة معيبة على الأقل حوالي 89%.

هناك طريقة أخرى لقياس فرصة وقوع حدث ما تتمثل في استخدام **الفرض (الأرجحية)**. ويستخدم احتمال نجاح حدث ومنتجته عند حساب فرض (أرجحية) وقوع حدث ما.

الفرض

2 إن فرض أو أرجحية تحقق نتيجة ناجحة لحدث ما هو نسبة احتمال نجاحه إلى احتمال فشله.

$$\frac{P(s)}{P(f)} = \text{الفرض}$$

مثال 5

يجب أن تختار عائشة عشوائيًا رقاقة من صندوق لتحديد السؤال الذي ستتلقاه في مسابقة في مادة الرياضيات. وهناك 6 رقائز زرقاء و 4 رقائز حمراء في هذا الصندوق. فإذا اختارت رقاقة زرقاء، فسيتعين عليها حل مسألة حساب مثلثات. وإذا كانت الرقاقة حمراء، فسيتعين عليها كتابة برهان هندسي.

a. ما احتمال سحب عائشة رقاقة حمراء؟

b. ما الفرض التي سيتعين على عائشة فيها كتابة برهان هندسي؟

a. احتمال اختيار عائشة رقاقة حمراء هي $\frac{4}{10}$ أو $\frac{2}{5}$.

b. لإيجاد الفرض التي سيتعين فيها على عائشة كتابة برهان هندسي، ستعين عليك معرفة احتمال الحصول على نتيجة ناجحة ونتيجة فاشلة.

افترض أن s تمثل اختيار رقاقة حمراء، وأن f تمثل عدم اختيار رقاقة حمراء.

$$P(s) = \frac{2}{5}$$

$$P(f) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

الآن جسد الفرض.

$$\frac{P(s)}{P(f)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$$

إن فرض اختيار عائشة رقاقة حمراء، ومن ثم يكون لزامًا عليها كتابة برهان هندسي هي $\frac{2}{3}$. وتتم قراءة النسبة $\frac{2}{3}$ على النحو "2 إلى 3".

أحيانًا عند حساب الفرض، ينبغي لك إيجاد الفضاء العيني أولاً. وقد يتضمن هذا إيجاد التوافيق والتباديل.

مثال 6

تم اختيار 12 طالبًا و 16 طالبة للتأهل على نحو متساوٍ لـ 6 منح دراسية جامعية. وفي حالة الاختيار العشوائي لمن سيحصلون على هذه المنح، فما فرص أن يكون منهم 3 طلاب و 3 طالبات؟

أولاً، حدد العدد الإجمالي للمجموعات المحتملة.

$C(12, 3)$ عدد المجموعات التي تتألف من 3 طلاب

$C(16, 3)$ عدد المجموعات التي تتألف من 3 طالبات

استخدام مبدأ العد الأساسي بإمكاننا إيجاد عدد المجموعات المحتملة التي تتألف من 3 طلاب و 3 طالبات.

$$C(12, 3) \cdot C(16, 3) = \frac{12!}{9!3!} \cdot \frac{16!}{13!3!} = 123,200 \text{ أو مجموعة محتملة}$$

إجمالي عدد المجموعات التي تتألف من 6 حاصلين على المنح من أصل المتأهلين البالغ عددهم 28 هو $C(28, 6)$ أو 376,740. إذا، عدد المجموعات التي لا تضم 3 طلاب و 3 طالبات هو $123,200 - 376,740$ أو 253,540.

وأخيرًا، حدد الفرض.

$$P(s) = \frac{123,200}{376,740}$$

$$P(f) = \frac{253,540}{376,740}$$

$$\frac{123,200}{376,740} \text{ أو } \frac{880}{1811} = \text{الفرض}$$

وبالتالي، فإن فرص اختيار مجموعة تضم 3 طلاب و 3 طالبات هي $\frac{880}{1811}$ أو قريبة من $\frac{1}{2}$.

اقرأ وادرس هذا الدرس للإجابة عن كل سؤال.

1. اشرح كيف تفسر $P(E) = \frac{1}{2}$.

2. جسد مثالين على استخدام الاحتمال في الصحف أو المجلات. صف كيفية تطبيق مفاهيم الاحتمال.

3. اكتب عن الفرق بين احتمال النتيجة الناجحة لحدث وفرص النتيجة الناجحة لحدث.

4. القرار قوارك أوضح خليفة أن فرصه لكسب انتخابات اتحاد الطلبة هي 3 إلى 2. وأخبره خميس بأنه استنادًا إلى تلك الفرص.

5. يبلغ احتمال فوزه 60%، لكن خليفة لم يوافقته على ذلك. فأيهما على صواب؟ اشرح إجابتك.

يحتوي صندوق على 3 كرات تنس و 7 كرات سوفيول و 11 كرة بيسبول. ويتم اختيار كرة واحدة عشوائيًا. جسد كل احتمال.

6. (كرة سوفيول) P

7. (ليست كرة بيسبول) P

8. (كرة جولف) P

9. في أحد المكاتب، هناك 7 موظفين قدامى و 4 موظفين جدد. وإذا استدعي أحدهم عشوائيًا عبر الهاتف، فجدد احتمال أن يكون هذا الشخص المستدعي موظفًا قديمًا.

من أصل 7 هِرر صغيرات ولدتهن هرة كبيرة في بطن واحدة، كانت 4 منها مخططات. وتم اختيار 3 هِرر منها عشوائيًا. فجدد فرص كل حدث.

10. الهِرر الثلاث مخططات.

11. واحدة فقط مخططة.

12. واحدة غير مخططة.

13. الأرصاد الجوية أفادت الأرصاد الجوية المحلية بأن نسبة احتمال سقوط الأمطار يوم السبت هي 80%. فما فرص احتمال عدم سقوط الأمطار يوم السبت؟ (إرشاد: أعد كتابة النسبة المئوية في صورة كسر).

باستخدام مجموعة قياسية من بطاقات اللعب تضم 52 ورقة، جسد كل احتمال. تشتمل الصور في بطاقات اللعب على الملوك والملكات والأولاد.

14. (بطاقة عليها صورة) P

15. (بطاقة رقبها 6 أو أقل) P

16. (بطاقة سوداء، ليس عليها صورة) P

17. (بطاقة ليس عليها صورة) P

يتم التقاط زهرة واحدة عشوائيًا من زهرية تضم 5 أزهار حمراوات، وزهرتين بيضاوين، و 3 أزهار وردية. جسد كل احتمال.

18. (حمراء) P

19. (بيضاء) P

20. (ليست وردية) P

21. (حمراء أو وردية) P

يمتلك رشيد في مجموعته الموسيقية 10 أقراص مدمجة لأغاني الراب و 18 لأغاني الروك و 8 للأغاني الشعبية و 4 لأغاني البوب. ويتم اختيار اثنين عشوائيًا. جسد كل احتمال.

22. (2 بوب) P

23. (2 شعبي) P

24. (1 راب و 1 روك) P

25. (ليست روك) P

26. يتم إلقاء مكعب أعداد مرتين. فما احتمال الحصول على العدد 5 مرتين؟

يحتوي صندوق على كرة زجاجية صغيرة لونها أخضر و 2 باللون الأصفر و 3 باللون الأحمر. تم سحب كرتين منها عشوائيًا دون إعادتهما. فما فرص تحقق كل حدث؟

27. سحب كرتين زجاجيتين صغيرتين لونهما أحمر

28. عدم سحب كرات زجاجية صغيرة لونها أصفر

29. سحب كرة زجاجية صغيرة لونها أخضر وأخرى لونها أحمر

30. سحب لونين مختلفين

من أصل 27 طالبًا في الفصل، كان 11 منهم عيونهم زرقاء، و 13 عيونهم بنية، و 3 عيونهم خضراء. فإذا تم اختيار 3 طلاب عشوائيًا، فما فرص وقوع كل حدث؟

31. الثلاثة كلهم عيونهم زرقاء

32. 2 عيونهما بنيتان و 1 عينه زرقاء

33. لا أحد عيناه بنيتان

34. واحد فقط عيناه خضراوان

35. فرص الفوز بجائزة في أحد عروض اليانصيب الذي يتألف من تذكرة يانصيب واحدة هي $\frac{1}{249}$. فما احتمال الفوز بتذكرة واحدة؟

36. إذا كانت احتمال القبول للدراسة بجامعة حكومية هي $\frac{4}{5}$. فما فرص

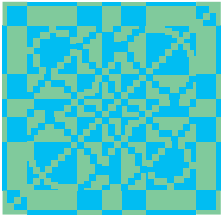
القبول بهذه الجامعة؟

a. جسد احتمال أن تكون الوفاة المرتبطة بالتدخين نتيجة إما الإصابة بمرض قلبي وعائي أو الإصابة بالسرطان.

b. حدد الفرص المعاكسة لأن تكون الوفاة المرتبطة بالتدخين ناجمة عن الإصابة بالسرطان.

43. **تفكير نقدي** يقطع سباك أُنوبًا نصفين عند نقطة يتم اختيارها عشوائيًا. فما احتمال أن يبلغ طول القطعة الأطول من الأُنوب على الأقل 8 أمثال طول القطعة الأقصر منه؟

مراجعة شاملة



جسد مجموع كل مما يلي.

44. **المنسوجات** غالبًا ما

يمكن صناعة الأنماط المختلفة من الأقمشة عن طريق تعديل تمثيل بياني حسابي.

ويمكن تمثيل النمط

الموجود على اليسار

عن طريق منحنى ذي

عروتين.

a. افترض أن المصمم أراد البدء بمنحنى ذي عروتين كان عبارة عن 6 وحدات من البداية إلى النهاية بالطول. فما المعادلة القطبية التي كان يمكن استخدامها؟

b. ما المعادلة القطبية التي كان يمكن استخدامها لإنشاء منحنى ذي عروتين كان عبارة عن 8 وحدات من البداية إلى النهاية بالطول؟

مثّل كل معادلة قطبية على شبكة قطبية.

$$45. \theta = -\frac{\pi}{4}$$

45-47. **انظر الهامش.**

$$46. r = 1.5$$

$$47. \theta = -150^\circ$$

جسد ناتج الضرب المتجهي لكل من u و v . ثم وضح أن $u \times v$ عمودي على كل من u و v .

$$48. u = \langle 1, 9, -1 \rangle, v = \langle -2, 6, -4 \rangle$$

$$49. u = \langle -3, 8, 2 \rangle, v = \langle 1, -5, -7 \rangle$$

$$50. u = \langle 9, 0, -4 \rangle, v = \langle -6, 2, 5 \rangle$$

48-50. **انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للاطلاع على البراهين.**

36. من مجموعة بطاقات لعب تضم 52 بطاقة، يتم سحب 5 بطاقات. فيما فرص سحب 3 أوراق من مجموعة متوافقة واحدة وسحب الورقتين الأخرين من مجموعة متوافقة أخرى؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

37. **الطقس** أثناء إعصار معين، حدد مراقبو الإعصار أن فرص ضربه للساحل هي 1 إلى 4. فما احتمال حدوث هذا؟

38. **البيسبول** عند نقطة واحدة في موسم 1999، بلغ متوسط ضربات المضرب للاعب كين جريفي الابن 0.325. فيما فرص ضربه للكرة في المرة التالية التي أخذ فيها دوره لضرب الكرة بالمضرب؟

39. **الأمن** تستخدم عيبير فقلًا توفيقًا على خزانتها ذات الثلاث عجلات. وعلى كل عجلة 10 أرقام من 0 إلى 9. ويُعد التوفيق ترتيبًا تسلسليًا معينًا بدون تكرار للأرقام.

a. ما احتمال تخمين شخص ما للتوفيق الصحيح؟

b. في حالة إمكانية تكرار الأرقام، ما الفرص المعاكسة لتخمين شخص ما للتوفيق؟

40. **تفكير نقدي** أجرى رشيد استطلاعًا حول عدد الدببة في حديقة بيلوستون الوطنية. وقد رصد دببين؛ أحدهما له فراء فاتح اللون والآخر ذو فراء غامق اللون.

a. افترض تساوي أعداد ذكور وإناث الدببة في هذه الحديقة. فما احتمال أن يكون كلا الدببين ذكرا؟

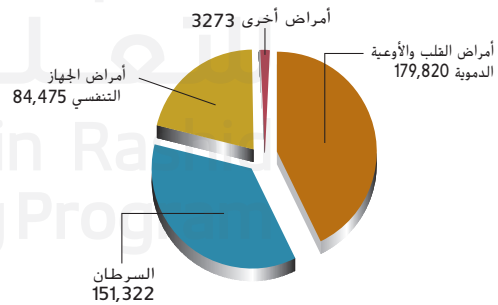
b. إذا كان الدب فاتح اللون ذكرا، فما فرص أن يكون كلاهما ذكرا؟

41. **الاختبار** تعطي العملية علياء في صف التفاضل والتكامل 20 مسألة للدراسة. وستختار 10 مسائل منها ليجيب عنها الطلاب في امتحان قادم. وتستطيع غاية حل 15 مسألة منها.

a. جسد احتمال أن تستطيع غاية حل الأسئلة العشرة كلها الموجودة في الاختبار.

b. جسد فرص معرفة غاية بكيفية حل 8 مسائل.

الوفيات الناجمة عن التدخين



42. **معدل الوفيات** خلال عام 1990، ارتبط التدخين بما يعادل 418,890 حالة وفاة في الولايات المتحدة الأمريكية. ووضح التمثيل البياني الأمراض التي سببت حالات الوفاة هذه المرتبطة بالتدخين.

جد الصورة المركبة ومقدار \overline{AB} باستخدام نقطتي البداية والنهاية المذكورتين. ثم جسد متجه وحدة في اتجاه \overline{AB} .

51. $A(6, 7, 9), B(18, 21, 18)$

52. $A(24, -6, 16), B(8, 12, -4)$

53. $A(3, -5, 9), B(-1, 15, -7)$

54. يحتوى وعاء على أربع فتحات وثلاث موزات وثلاث برتقالات وثمرتي كبرى. فإذا تم اختيار ثمرتين من هذه الفواكه عشوائيًا، فما فرص اختيار برتقالة وموزة؟ (الدرس 7-8)

سعة المحرك (لتر)	المسافة بالكيلومترات على الطريق السريع (km/L)
1.6	34
2.2	37
2.0	30
6.2	26
7.0	24
3.5	29
5.3	24
2.4	33
3.6	26
6.0	24
4.4	23
4.6	24

55. توفير الوقود يوضح الجدول محركات بسعات مختلفة توفرها إحدى شركات تصنيع السيارات ومقادير توفير الوقود الخاصة بكل منها. (الدرس 7-7)

- ارسم مخطط انتشار للبيانات، وحدد العلاقة.
- احسب معامل الارتباط وفسره. وحدد ما إذا كان ذا دلالة عند المستوى 10%.
- إذا كان الارتباط ذا دلالة عند المستوى 10%، فجد معادلة الانحدار التي بها مربعات أقل، وفسر الميل والتقاطع في السياق.
- استخدم معادلة الانحدار التي وجدتها في الجزء C للتنبؤ بالكيلومترات المتوقعة لكل لتر ستقطعها السيارة بالمحرك الذي تبلغ سعته 8.0 L. حدد ما إذا كان هذا التنبؤ معقولاً. اشرح.

56. استخدم مثلث باسكال للتفكيك $(3a + \frac{2}{3}b)^4$.

اكتب معادلة قطبية ودليلاً للمخروط ذي الخواص المعطاة ومثله بيانيًا.

57. $e = 1$; الرأس عند $(0, -2)$

58. $e = 3$; الرؤوس عند $(0, 3)$ و $(0, 6)$

جد قياس الزاوية الواقعة بين كل زوج من المتجهات مقرباً النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

59. $u = \langle 2, 9, -2 \rangle, v = \langle -4, 7, 6 \rangle$

60. $m = 3i - 5j + 6k$ و $n = -7i + 8j + 9k$

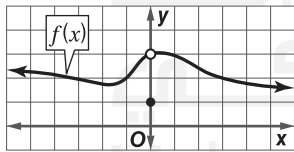
استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المخروط الناتج عن كل معادلة بيانيًا.

61. $7x^2 - 50xy + 7y^2 = -288$

62. $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 16\sqrt{3}x + 16y = 0$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

64. وفق التمثيل البياني لـ $y = f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$



A 0

C 3

B 1

D النهاية غير موجودة.

66. المراجعة أي مما يلي يصف التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ؟

- هذا التمثيل البياني به انفصال لا نهائي.
- هذا التمثيل البياني به انفصال قفزي.
- هذا التمثيل البياني به نقطة انفصال.

H 1 و 2 فقط

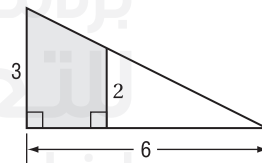
G 2 فقط

F 1 فقط

K 1 و 2 و 3

J 1 و 3 فقط

63. SAT/ACT ما مساحة المنطقة المظللة؟



A 5

C 7

E 9

B 6

D 8

65. المراجعة أي مما يلي يصف على نحو أفضل السلوك الطرفي لـ $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$ ؟

F $f(x) \rightarrow \infty$ عند $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow -\infty$ عند $x \rightarrow -\infty$

G $f(x) \rightarrow \infty$ عند $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow \infty$ عند $x \rightarrow -\infty$

H $f(x) \rightarrow -\infty$ عند $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow \infty$ عند $x \rightarrow -\infty$

J $f(x) \rightarrow -\infty$ عند $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow \infty$ عند $x \rightarrow \infty$

احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة

7-6 الدرس



:: لماذا؟

• يجري طلاب حصة الكيمياء
الثمانية عشر لدى المعلمة منى
سحبًا لتحديد من سيقدم عرضة
أولاً. ويأمل سلطان أن يُختار أولاً
ويريد صديقه صالح أن يكون
الثاني.

:: الحالي

1 إيجاد احتمالات
الأحداث المستقلة
وغير المستقلة وحل
تطبيقات عليها

2 إيجاد احتمالات
الأحداث علماً بوقوع
أحداث أخرى وحل
تطبيقات عليها
أحداث أخرى.

:: السابق

• تمكنت من إيجاد
احتمالات بسيطة

1 الأحداث المستقلة وغير المستقلة يتكون **الحدث المركب** من حدثين بسيطين أو أكثر. في المثال أعلاه، يُعد اختيار سلطان وصالح لتقديم عرضهم أولاً حدثاً مركباً، فهو يتكون من حادث اختيار سلطان وحادث اختيار صالح.

ويمكن أن تكون الأحداث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- الحدثان A و B **مستقلان** إذا كانت احتمال وقوع الحدث A لا تؤثر على احتمال وقوع الحدث B .
- الحدثان A و B **غير مستقلين** إذا كانت احتمال وقوع الحدث A تغير بطريقةٍ ما احتمال وقوع الحدث B .

عند اختيار بعض العناصر من مجموعة من الأشياء، إذا استبدلت العنصر في كل مرة، فإن عملية اختيار العناصر الجديدة هي أحداث مستقلة. وإذا لم تستبدل العنصر في كل مرة، فإن اختيار العناصر الجديدة هي أحداث غير مستقلة.

مثال 1 تحديد الأحداث المستقلة وغير المستقلة

حدد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أم غير مستقلة، ثم فسّر استنتاجك.

a. تم إلقاء قطعة نقد معدنية، ثم أُلقيت قطعة نقد معدنية أخرى.

لم تغير نتيجة إلقاء القطعة نقد المعدنية الأولى بأي شكل احتمال نتيجة إلقاء القطعة المعدنية الثانية، ومن ثم، فإن الحدثين مستقلان.

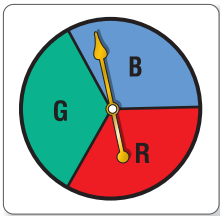
b. في مثال العرض في الصف الدراسي المذكور أعلاه، تم اختيار اسم طالب واحد ولم تتم إعادته، ثم جرى اختيار اسم طالب ثاني.

تم إزالة اسم الطالب الأول بعد اختياره ولا يمكن إعادة اختياره مجدداً. ويؤثر هذا على احتمال اختيار الشخص الثاني، ومن ثم يقل القضاء العيني باسم واحد. وهكذا، فإن الحدثين غير مستقلين.

تمرين موجّه

1A. أُختيرت بطاقة من مجموعة من البطاقات، ثم أُعيدت إلى مكانها مرة أخرى. وأُختيرت بعدئذٍ بطاقة ثانية.

1B. اختارت ياسمين قميصاً من خزانتها لترتديه يوم الاثنين، ثم اختارت قميصاً مختلفاً لترتديه يوم الثلاثاء.



على فرض أنه تم رمي قطعة نقد معدنية وتدوير القرص الدوار الموضح.
يكون القضاء العيني لهذه التجربة هو

$$\{(H, B), (H, R), (H, G), (T, B), (T, R), (T, G)\}$$

باستخدام القضاء العيني، احتمال الحدث المركب لسقوط
قطعة النقد المعدنية على الصورة وتوقف القرص الدوار على
اللون الأخضر هو $P(H \text{ and } G) = \frac{1}{6}$.

لاحظ أنه يمكن إيجاد الاحتمال ذاته عن طريق ضرب احتمالات

$$P(H) = \frac{1}{2} \quad P(G) = \frac{1}{3} \quad P(H \text{ و } G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

يوضح هذا المثال القاعدة الأولى من قاعدتي ضرب الاحتمالات.

المفردات الجديدة

الحدث المركب
compound event
الأحداث المستقلة
independent events
أحداث غير مستقلة
dependent events
احتمال مشروط
conditional probability
شجرة الاحتمال
probability tree

ممارسات في

الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية
وكمية.
استخدام نماذج الرياضيات.

الشرح احتمال وقوع كلا الحدثين المستقلين هو ناتج ضرب احتمالات كل حدث بمفرده.
الرموز إذا كان الحدثان A و B مستقلين، إذًا
 $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$

قراءة في الرياضيات

و حرف العطف و هو عنصر رئيسي في المعادلة يشير إلى ضرب الاحتمالات.

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

مثال 2 من الحياة اليومية احتمال وقوع الأحداث المستقلة



النقل مها وصديقاتها ستذهبن إلى حفل موسيقي. كتبت الفتيات أسماءهن في أوراق صغيرة ووضعتها داخل كيس. إذا سحبت الفتاة ورقة صفراء، فستذهب إلى الحفل في سيارة كبيرة، بينما إذا سحبت ورقة زرقاء، فستذهب إلى الحفل في سيارة عادية.

على فرض أن مها سحبت ورقة ولكن لم تعجبها النتيجة، وأعادت الورقة إلى الكيس وسحبت ورقة أخرى. ما احتمال أن تكون الورقة التي ستسحبها زرقاء؟

هذان الحدثان مستقلان، حيث استبدلت مها الورقة التي أخذتها. على فرض أن B تمثل ورقة زرقاء و Y تمثل ورقة صفراء.

$$P(B \text{ و } B) = P(B) \cdot P(B)$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \text{ أو } \frac{9}{64}$$

احتمال وقوع الأحداث المستقلة
 $P(B) = \frac{3}{8}$

إذًا، فاحتمال أن تسحب مها ورقتين زرقاوين هي $\frac{9}{64}$ أو حوالي 14%.

تمرين موجّه

جد الاحتمال في كل مما يلي.

2A. تم رمي قطعة نقد معدنية وحجر نرد. ما احتمال أن يظهر على الوجه العلوي لقطعة النقد صورة واستقرار النرد على العدد 6؟

2B. على فرض رمي قطعة النقد أربع مرات. ما احتمال أن تظهر الكتابة على القطع الأربعة؟

مثال 3

الصحة المهنية توضح الإحصاءات التي تم جمعها في إحدى مناطق تعدين فحم أن احتمال إصابة عامل منجم بمرض الرئة السوداء هي $\frac{5}{11}$. كما أن احتمال إصابته بالتهاب المفاصل هي $\frac{1}{5}$. وإذا لم تؤثر إحدى المشكلات الصحية على الأخرى، فما احتمال عدم إصابة عامل منجم تم اختياره عشوائيًا بمرض الرئة السوداء مع احتمال إصابته من ناحية أخرى بالتهاب المفاصل؟

الحدثان مستقلان لأن الإصابة بمرض الرئة السوداء لا يؤثر على الإصابة بالتهاب المفاصل.

(عدم الإصابة بمرض الرئة السوداء والتهاب المفاصل) $= p \cdot [1 - p]$ (التهاب المفاصل)

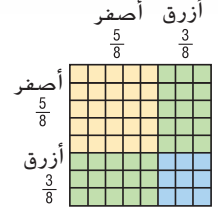
$$= \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{5}{11}\right) \text{ أو } \frac{6}{55}$$

احتمال عدم إصابة عامل منجم مختار عشوائيًا بمرض الرئة السوداء، مع احتمال إصابته من ناحية أخرى بمرض التهاب المفاصل هي $\frac{6}{55}$.

نصيحة دراسية

استخدام نموذج

المساحة يمكنك أيضًا استخدام نموذج المساحة الموضح أدناه لحساب احتمال أن تكون الورقتان زرقاوين. تمثل المنطقة الزرقاء احتمال سحب ورقتين زرقاوين متتاليتين. ومساحة هذه المنطقة تساوي $\frac{9}{64}$ من النموذج بأكمله.



مثال 4

الدواء ارجع إلى المثال التطبيقي أعلاه. ما احتمال نمو شعر الشخص الخاضع للاختبار، علمًا باستخدامه للدواء التجريبي؟
افترض أن H يمثل نمو الشعر و D يمثل استخدام الدواء التجريبي. من هذه المعطيات، نحتاج لإيجاد $P(HAD)$.

$$P(HAD) = \frac{\text{(استخدام الدواء التجريبي و نمو الشعر)} p}{\text{(استخدام الدواء التجريبي)} p}$$

$$P(HAD) = \frac{\frac{1600}{4000}}{\frac{2400}{4000}} \leftarrow \frac{1600}{4000} = p \text{ (استخدام الدواء التجريبي ونمو الشعر)}$$

$$P(HAD) = \frac{1600}{2400} = \frac{2}{3}$$

احتمال نمو شعر الشخص الخاضع للدراسة أو الاختبار، علمًا باستخدامه للدواء التجريبي هي $\frac{2}{3}$.

مثال 5

تلقي مثال عمليتين معدنيتين. فما احتمال حصولها على صورتين، علمًا بأنها قد حصلت من قبل على صورة واحدة على الأقل؟
افترض أن الحدث A هو ظهور صورتين عند إلقاء العملة.
افترض أن الحدث B هو ظهور صورة واحدة على الأقل.

$$P(B) = \frac{3}{4} \quad \text{ثلاثة نتائج من أصل أربعة تتمثل في ظهور صورة واحدة على الأقل.}$$

$$P(A \text{ and } B) = \frac{1}{4} \quad \text{نتيجة من أصل أربعة هي ظهور صورتين.}$$

$$P(AB) =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

احتمال ظهور صورتين عند إلقاء العملة، علمًا بظهور صورة مرة واحدة على الأقل هي $\frac{1}{3}$.

يمكن استخدام الفضاءات العينية (مجالات العينة) والفضاءات العينية المخفضة (مجالات العينة المخفضة) للمساعدة في تحديد النتائج التي تحقق شرطًا معينًا.

مثال 6

يُجري سلطان استقصاء عن الأسر التي لديها ثلاثة أطفال. فإذا تم اختيار أسرة عشوائيًا عشوائيًا، فما احتمال أن يكون للأسرة ولدان بالتحديد إذا كان الطفل الثاني ولدًا؟

الفضاء العيني هو $S = \{BBB, BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB, GGG\}$. ويشمل كل النتائج الممكنة لأسرة لديها ثلاثة أطفال.

حدد الفضاءات العينية المخفضة التي تحقق الشروط المذكورة المتمثلة في وجود ولدين تحديداً وكون الطفل الثاني ولداً. الشرط المتمثل في أن يكون هناك ولدان تحديداً يقلل الفضاء العيني لاستبعاد النتائج في حالة كان هناك ولد واحد أو ثلاثة أو عدم وجود أولاد.

افترض أن X يمثل الحدث المتعلق بوجود ولدين.

$$X = \{BBG, BGB, GBB\}$$

$$P(X) = \frac{3}{8}$$

الشرط الذي يفرض أن يكون الطفل الثاني ولداً يقلل الفضاء العيني لاستبعاد النتائج في حالة كان الطفل الثاني بنتاً.

افترض أن Y يمثل الحدث المتعلق بكون الطفل الثاني ولداً.

$$Y = \{BBB, BBG, GBB, GBG\}$$

$$P(Y) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$(X \text{ and } Y)$ هي تقاطع X و Y . إذن $(X \text{ and } Y) = \{BBG, GBB\}$.

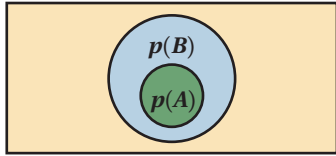
$$P(X \text{ and } Y) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X|Y) = \frac{P(X \text{ and } Y)}{P(Y)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

احتمال أن يكون لدى أسرة، تتكون من 3 أطفال ويتم اختيارها عشوائيًا، ولدان بالتحديد، علمًا بأن الطفل الثاني ولد، هي $\frac{1}{2}$.



في بعض الحالات، يكون الحدث A عبارة عن مجموعة جزئية من الحدث B . وعند حدوث ذلك، فإن احتمال وقوع كلا الحدثين A و B ، $P(A \text{ و } B)$ هي نفس احتمال وقوع الحدث A .

$$\text{لذلك، فإنه في مثل هذه المواقف، فإن } P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

الحدث A مجموعة جزئية من الحدث B .

مثال 7

يظهر على أوجه مجسم ذي الاثني عشر وجهًا الأعداد من 1 إلى 12. وإذا تم إلقاء حجر النرد مرة واحدة وتسجيل العدد الذي يظهر على الوجه العلوي، فما احتمال أن يكون هذا العدد هو مضاعف العدد 4 إذا كان من المعلوم أنه عدد زوجي؟

افترض أن A يمثل الحدث المتعلق بكون العدد الظاهر هو مضاعف العدد 4. إذًا، $A = \{4, 8, 12\}$.

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

افترض أن B يمثل الحدث المتعلق بكون العدد الظاهر زوجيًا. إذًا، $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

$$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

في هذه الحالة، A مجموعة جزئية من B .

$$P(A \text{ and } B) = P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

احتمال ظهور مضاعف للعدد 4، علمًا بأن هذا العدد زوجي هي $\frac{1}{2}$.

تناول قاعدة ضرب الاحتمالات الثانية احتمال وقوع حدثين غير مستقلين.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع حدثين غير مستقلين

الشرح احتمال وقوع كلا الحدثين غير مستقلين هو ناتج ضرب احتمال وقوع الحدث الأول، ثم احتمال وقوع الحدث الثاني بعد وقوع الحدث الأول بالفعل.

الرموز إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، إذاً
 $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B|A)$

انتبه!

الترميز المشروط يجب عدم تفسير الرمز "I" في الترميز $P(B|A)$ على أنه رمز قسمة.

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

يُقرأ الترميز $P(B|A)$ كالتالي: احتمال وقوع الحدث B علماً بوقوع الحدث A بالفعل. ويُسمى هذا **الاحتمال المشروط**.

مثال 8 احتمال وقوع الأحداث غير المستقلة

النقل بالرجوع إلى المثال 2، على فرض أن مها سحبت ورقة ولم تعدها. ثم سحب صديقتها موزة ورقة أخرى، فما احتمال أن تسحب الصديقتان ورقة صفراء؟
 هذان الحدثان غير مستقلين. فلم تعد مها الورقة التي أخذتها.

$$P(Y \text{ and } Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \text{ أو } \frac{5}{14}$$

احتمال وقوع الأحداث غير المستقلة
 يتبقى بعد اختيار الورقة الصفراء
 7 ورقات إجمالاً، 4 منها صفراء.

إذاً، فاحتمال أن تختار الصديقتان ورقة صفراء هي $\frac{5}{14}$ أو حوالي 36%.

التحقق يمكنك استخدام مخطط شجري للاحتتمالات يُسمى **شجرة الاحتمالات** للتحقق من هذه النتيجة. احسب احتمال كل حدث بسيط في المرحلة الأولى، وكل احتمال مشروط في المرحلة الثانية. ثم اضرب كل فرع لإيجاد احتمال كل نتيجة.

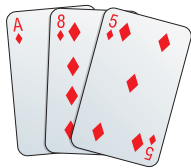
$$\begin{array}{l} \frac{5}{8} \begin{cases} Y \begin{cases} \frac{4}{7} \text{ } Y \text{ --- } P(Y \text{ and } Y) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} \\ \frac{3}{7} \text{ } B \text{ --- } P(Y \text{ and } B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} \end{cases} \\ B \begin{cases} \frac{5}{7} \text{ } Y \text{ --- } P(B \text{ and } Y) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} \\ \frac{2}{7} \text{ } B \text{ --- } P(B \text{ and } B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1.

$$\checkmark \frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1$$

تمرين موجّه

3. اختيرت ثلاث بطاقات من مجموعة أوراق اللعب وعددها 52 بطاقة.
 ما احتمال أن تكون البطاقات الثلاث بشكل الماسة إذا لم يتم استبدال البطاقة الأولى والثانية؟



الربط بالحياة اليومية

توصلت دراسة حديثة إلى أنه مع وجود ثلاثة ركاب مراهقين أو أكثر في السيارة، فإن 85% من الحوادث القاتلة لسيارات يقودها مراهقون نتجت عن خطأ من السائق، ومن بينها 50% تقريباً نتيجة السرعة الزائدة و 70% تقريباً تضمنت الحادثة سيارة واحدة.

المصدر: المجلس الوطني للسلامة

2 الاحتمال المشروط بالإضافة إلى استخدام الاحتمال المشروط في إيجاد احتمال وقوع حدثين مستقلين أو أكثر، فيمكن استخدامه أيضًا عند معرفة معلومات إضافية عن حدث ما.



على فرض أنه تم رمي حجر الترد وكان العدد فرديًا. ما احتمال أن يكون هذا العدد هو 5؟

يوجد ثلاثة أعداد فردية يمكن ظهورها، إذا فقد انخفض الفضاء العيني من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ إلى $\{1, 3, 5\}$. إذًا، فاحتمال أن يكون العدد هو 5 هي $\frac{1}{3} = P(5 | \text{فردى})$.

قراءة في الرياضيات

الاحتمال المشروط

(فردى | 5) تُقرأ كالتالي: احتمال أن يكون العدد الظاهر 5 علمًا بأن العدد الظاهر فردي.

مثال 9 على الاختبار المعياري الاحتمال المشروط

يعقد طلاب صف المعلمة مايسة مناظرةً. يسحب الطلاب الثمانية المشاركون في المناظرة بطاقات مرقمة بأعداد صحيحة متعاقبة من 1 إلى 8 عشوائيًا.

- ينضم الطلاب الذين يسحبون أعدادًا فردية إلى الفريق المدافع.
 - ينضم الطلاب الذين يسحبون أعدادًا زوجية إلى الفريق المعارض.
- إذا كان أيمن في الفريق المعارض، فما احتمال أن يسحب العدد 2؟

- A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

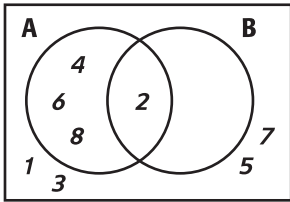
قراءة فقرة الاختبار

بما أن أيمن في فريق المعارض، فيجب أن يسحب عددًا زوجيًا. إذًا ينبغي إيجاد احتمال أن يكون العدد المسحوب هو 2. مع العلم بأن العدد المسحوب كان زوجيًا. هذه المسألة مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار

على فرض أن A هو حدث سحب عدد زوجي. وعلى فرض أن B هو حدث سحب العدد 2.

صمم مخطط فن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية فقط في الفضاء العيني، ويوجد عدد 2 واحد فقط. ومن ثم، فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. الإجابة هي B.



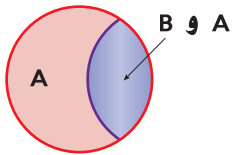
نصيحة عند حل الاختبار

استخدام مخطط فن استخدم مخطط فن لمساعدتك في تصور العلاقة بين نتائج حدثين.

تمرين موجّه

4. عند رمي حجري ترد، فما احتمال أن يظهر على أحدهما العدد 4. مع العلم أن مجموع حجري الترد هو 9؟

- F $\frac{1}{6}$ G $\frac{1}{4}$ H $\frac{1}{3}$ J $\frac{1}{2}$



بما أن الاحتمال المشروط يقلل الفضاء العيني، فيمكن تحويل مخطط فن في المثال 4 إلى أبسط صورة كما هو موضح، حيث يمثل تقاطع الحدثين تلك النتائج في A و B. ويدل ذلك على الصيغة التالية.

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(A)}$$

المفهوم الأساسي الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لـ B مع العلم بأن A تساوي $P(B|A) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$.

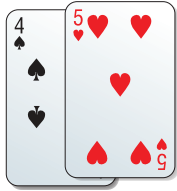
مثال 1

حدد ما إذا كانت الأحداث **مستقلة** أو **غير مستقلة**. فسّر.

1. أدى عبد الرحمن اختبار SAT يوم السبت وحصل على 1350 درجة. وأدى اختبار ACT في الأسبوع التالي وحصل على 23 درجة.
2. وصل فريق كرة السلة الذي تلعب له نبيلة إلى الدور النهائي لأربعة فرق، وإذا فازوا، فسيلعبون مباراة البطولة.

مثال 2

3. **أوراق اللعب** اختيرت بطاقة عشوائياً من مجموعة أوراق اللعب وعددها 52 بطاقة، وتمت إعادة تلك البطاقة واختيار بطاقة أخرى. ما احتمال اختيار البطاقتين الموضحتين على اليسار؟



مثال 3

4. **النقل** يستقل عبد الرحيم الحافلة للوصول إلى منزله بعد العمل، و تتكلف رحلته 40 AED. إذا كان معه في جيبه ثلاث أوراق نقدية من فئة 20 درهماً و ورقتين من فئة 5 دراهم و خمسة أوراق من فئة 10 دراهم. فجد احتمال أن يسحب من جيبه عشوائياً و على التوالي ورقتين نقديتين من فئة 20 درهماً، على فرض أن فرصة السحب متساوية لجميع الفئات النقدية.

مثال 4

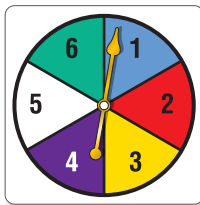
5. **إجابة شبكية** يلعب 10 أصدقاء لعبة الكرة الخادعة كل يوم سبت في متنزه محلي. لاختيار الفرق، يسحبون عشوائياً بطاقات مرقمة بأعداد صحيحة متعاقبة من 1 إلى 10. ينضم اللاعبون الذين يسحبون الأعداد الفردية إلى الفريق A، والذين يسحبون الأعداد الزوجية إلى الفريق B. ما احتمال أن يسحب لاعب في الفريق B البطاقة رقم 10؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3

التبرير حدد ما إذا كانت الأحداث **مستقلة** أم **غير مستقلة**. ثم جسد الاحتمال.

6. في لعبة، رمي حجر النرد على عدد زوجي، ثم لف القرص الدوار المرقم من 1 إلى 5 وتحصل على عدد فردي.
7. تُسحب بطاقة الملك من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة دون إعادتها، ثم تُسحب بعدئذ بطاقة ملك ثانية.
8. يوجد في حقيبة 3 كرات زجاجية خضراء و 6 كرات زجاجية زرقاء، تم سحب كرة زجاجية زرقاء ولم تُعد ثانية، وُسحبت بعدئذ كرة زجاجية زرقاء.
9. عند رمي حجري نرد والحصول على المجموع 5 في كل مرة.



10. **ألعاب** تم تدوير القرص الموضح يساراً في إحدى الألعاب وتم رمي عملة معدنية، ما احتمال الحصول على عدد زوجي على القرص الدوار وسقوط القطعة المعدنية على الكتابة؟

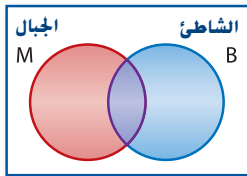
11. **الهدايا** يعقد صف نجاة حفلة لتبادل الهدايا. سحبت نجاة أولاً، وسحبت صديقتها نجلاء ثانياً. إذا شارك في السحب 18 طالبة، فما احتمال أن تسحب نجلاء و نجاة أسماء بعضهما البعض؟

12. **الإجازة** وجد استطلاع رأي أجري في العمل أن 8 من كل 10 موظفين حصلوا على إجازة في الصيف الماضي. إذا تم اختيار أسماء 3 موظفين عشوائياً، مع إعادة الأسماء مرة أخرى، فما احتمال أن يكون جميع الموظفين الثلاثة قد ذهبوا في إجازة الصيف الماضي؟

لون الشارة	الكمية
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

13. **الحمالات** يبين الجدول عدد كل لون من شارات حملة اتحاد الطلاب التي يجب أن توزعها نسرين. إذا وزعت نسرين الشارات عشوائياً، فما احتمال أن يكون لون الشارة التي وُزعت أولاً وثانياً كلاهما أحمر؟

14. تم اختيار كرة زجاجية حمراء عشوائيًا من كيس به كرتان زرقاوان. و 9 كرات زجاجية حمراء ولم يتم استبدالها. ما احتمال أن تكون الكرة الزجاجية الثانية التي سيتم اختيارها خضراء؟
15. تم رمي حجر نرد. إذا كان العدد الظاهر أكبر من 2، فجد احتمال أن يكون 6.
16. محيط الشكل الرباعي يساوي 12. وأطوال جميع الأضلاع أعدادًا صحيحة فردية. فما احتمال أن يكون الشكل الرباعي معينًا؟
17. تم تدوير قرص دوار مرقم من 1 إلى 12. جسد احتمال أن العدد الذي تم تدويره هو 11. علّم بأن العدد الذي تم تدويره كان عددًا فرديًا.
18. **الصفوف الدراسية** احتمال أن يختار الطالب في مدرسة نهلة مادتي الهندسة واللغة الفرنسية هي 0.064. واحتمال أن يختار الطالب مادة اللغة الفرنسية هي 0.45. ما احتمال أن يختار الطالب مادة الهندسة إذا اختار اللغة الفرنسية؟
19. **التقنية** في مدرسة خالد الثانوية. فاز 43% من الطلاب بـمشغل أقراص CD وفاز 28% بـمشغل أقراص CD ومُشغل MP3. ما احتمال أن يفوز الطالب بـمشغل MP3 إذا كان يملك أيضًا مُشغل CD؟
20. **البرهان** استخدم صيغة لاحتمال وقوع حدثين غير مستقلين ($P(A)$ و B) لاستخلاص قانون الاحتمال المشروط لوقوع ($P(B|A)$).
21. **التنس** يحدث الخطأ المزدوج في التنس عندما يفشل لاعب الإرسال في توجيه إرساله دون أن يدوس على خط الإرسال في محاولتين. كانت النسبة المئوية لإرسال نورا الأولى هي 40%. بينما كانت النسبة المئوية لإرسالها الثاني هي 70%.
- a. صمم شجرة الاحتمال التي تبين كل نتيجة.
- b. ما احتمال أن ترتكب نورا خطأً مزدوجًا؟
- c. صمّم نموذج محاكاة باستخدام برنامج مولد أعداد عشوائية يمكن استخدامه لتقدير احتمال ارتكاب نورا لأخطاء مزدوجة في إرسالها التالي.



22. **الإجازة** تم إجراء استطلاع رأي عشوائي لتحديد أين تقضي العائلات إجازاتها. وبينت النتائج أن $P(B) = 0.6$, $P(B \cap M) = 0.2$. واحتمال أن العائلة لم تقض الإجازة في أي وجهة هو 0.1.
- a. ما احتمال أن تقضي العائلة إجازتها وسط الجبال؟
- b. ما احتمال أن تزور الجبال أيضًا العائلة التي تزور الشاطي؟

23. **صناعة القرار** كنت تحاول أن تقرر ما إذا كنت ستوسع في عملك التجاري أم لا. إذا لم تتوسع وظلت الحالة الاقتصادية جيدة، فإنك تتوقع تحقيق أرباح قيمتها 2 مليون AED. وإذا كانت الحالة الاقتصادية سيئة، فإنك تتوقع تحقيق 0.5 مليون AED. وكانت تكلفة التوسع هي 1 مليون AED. ولكن ستكون الأرباح المتوقعة بعد التوسع هي 4 ملايين AED في ظل الحالة الاقتصادية الجيدة و 1 مليون AED في ظل الحالة الاقتصادية السيئة. وتفترض أن فرص الحالة الاقتصادية الجيدة والسيئة هي 30% و 70%. على التوالي. استخدم شجرة الاحتمال لتفسير ما ينبغي فعله.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

24. **الفرضيات** يوجد n أشياء مختلفة في حقيبة. إن احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون استبدال هي 2.4%. تقريبًا. ما قيمة n ؟ فسر.
25. **التبرير** إذا كان $P(A|B)$ يماثل $P(A)$ ، و $P(B|A)$ يماثل $P(B)$ ، فإذا يمكن أن يُقال عن العلاقة بين الحدثين A و B ؟
26. **مسألة غير محددة الإجابة** صف زوجًا من الأحداث المستقلة وزوجًا من الأحداث غير المستقلة. فسر استنتاجك.
27. **الكتابة في الرياضيات** يشير تقرير طبي إلى احتمال أن يعاني الشخص من مشكلات القلب إذا كان والده أو والدته يعانيان من مشكلات في القلب. فسر كيف يمكنك تحديد أن احتمال إصابة الشخص بمشكلات القلب وإصابة والديه بمشكلات القلب حدثان مستقلان.

30. إجابة شبكية بشتمل كيس حلوى الجيلي على 7 قطع حمراء، و 11 قطعة صفراء، و 13 قطعة خضراء. يختار جلال قطعتي جيلي من الكيس دون أن ينظر. ما احتمال اختيار جلال لقطع خضراء ثم قطعة حمراء، مع تقريب الاحتمال كنسبة مئوية إلى أقرب عشرة؟

- A $\frac{4}{9}$ B $\frac{9}{13}$ C $\frac{13}{9}$ D $\frac{13}{5}$ E $\frac{13}{4}$

31. SAT/ACT إذا كان احتمال سقوط الأمطار يوم الثلاثاء هو $\frac{4}{13}$. إذا فما احتمال أنها لن تمطر؟

28. الاحتمال سيتم عشوائيًا تخصيص حصص تربية رياضية للمعلم رياض بمعدل 1 من 6 على مدار اليوم، و 1 من 3 أوقات غداء. ما احتمال أن يحصل على حصة التربية الرياضية الثانية والغداء الأول؟

- A $\frac{1}{18}$ B $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{2}$

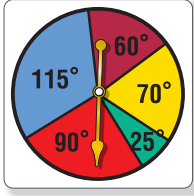
29. الجبر قام تيمور بتنزيل مقطعي فيديو و 7 أغان على مشغل الوسائط الرقمية بسعر AED 10.91. وقام محسن بتنزيل 3 مقاطع فيديو و 4 أغان بسعر AED 9.93. ما تكلفة كل فيديو؟

- F AED 0.99 HAED 1.42
G AED 1.21 J AED 1.99

مراجعة شاملة

32. كرة السوفتبول أخفقت مي في ضرب 10% من ضرباتها في الموسم الماضي. صمم ونفذ نموذج محاكاة لتقدير احتمال إخطاها في ضرباتها في هذا الموسم. (الدرس 4-7)

استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. ويتم تدوير القرص الدوار مجددًا إذا توقف على مستقيم. (الدرس 3-7)



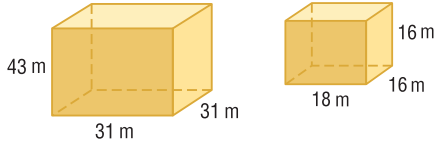
33. (المؤشر يتوقف على اللون الأحمر) P

34. (المؤشر يتوقف على اللون الأزرق) P

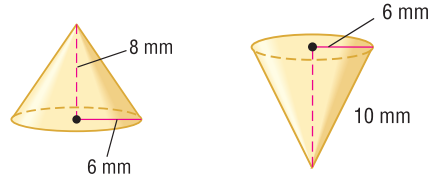
35. (المؤشر يتوقف على اللون الأخضر) P

حدد هل كل زوج من المجسمات متشابه، أم متطابق، أم ليس أيًا مما سبق. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

37.

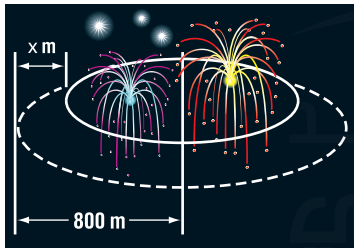


38.



39. الألعاب النارية أطلقت الألعاب النارية من منصة على النهر. وتوجد دائرة انفجار تنفجر داخلها جميع الألعاب النارية، بينما يجلس المشاهدون خارج دائرة أمان تبعد 800 m عن مركز عرض الألعاب النارية.

- a. جـد محيط دائرة الأمان التقريبي.
b. إذا كانت دائرة الأمان على بُعد 200 إلى 300 m من مركز دائرة الانفجار، فـجد مدى قيم نصف قطر دائرة الانفجار.
c. جـد أصغر محيط لدائرة الانفجار وأكبر محيط لها مقربًا إلى أقرب متر.



Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

تحتوي عبوة على 3 كرات زجاجية صغيرة خضراء و 5 كرات زجاجية صغيرة صفراء. ويتم سحب كرة واحدة عشوائيًا وطرحها. وبعد ذلك، يتم سحب كرة أخرى. جسد كل احتمال.

40. الكرة الزجاجية الثانية خضراء، علماً بأن الكرة الأولى كانت خضراء

41. الكرة الزجاجية الثانية صفراء، علماً بأن الكرة الأولى كانت خضراء

42. الكرة الزجاجية الثانية صفراء، علماً بأن الكرة الأولى كانت صفراء

تتم إزالة ثلاث سمكات عشوائيًا من حوض مائي يحتوي على سمكة تروثة وسمكة شبوط وسمكة فرخ وسمكة سلور وسمكة جاحظ وسمكة سلمون. جسد كل احتمال.

43. (سلمون، علماً بإزالة سمكة فاروس) p

44. (ليست سمكة جاحظ، علماً بإزالة سمكتي تروثة وفرخ) p

45. (شبوط وفرخ، علماً بعدم إزالة سمكة سلور) p

46. (فرخ وتروثة، علماً بعدم إزالة شبوط أو جاحظ) p

مراجعة المهارات

جسد عدد النتائج المحتملة لكل موقف.

47. تختار حورية من بين 5 نكهات آيس كريم مختلفة و 3 إضافات مختلفة.

48. يختار حسن من بين 6 ألوان وتصميمين للمقاعد من أجل دراجته الجبلية الجديدة.

49. محيط المستطيل 12 وأطوال أضلاعه بأعداد صحيحة.

50. رُميت ثلاثة مكعبات أعداد في آن واحد.

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

جداول التكرار ذات المدخلين

المعايير المحلية الأساسية المشتركة
معايير المحتوى

S.CP.4 أنشئ جدول تكرار ذا مدخلين للبيانات وفسره عندما تتعلق فئتان بكل عنصر يتم تصنيفه. استخدم الجدول ذا المدخلين باعتباره فضاء عينيًا لتحديد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أو لا. ولتقريب الاحتمالات الشرطية.

S.CP.5 جسد الاحتمال المشروط لوقوع A علمًا بوقوع B في صورة كسر لنتائج B التي تنتهي أيضًا إلى A . وفسر النتيجة باستخدام النموذج.

ممارسات في الرياضيات 5

يُستخدم **جدول التكرار بمدخلين** أو جدول التوافق لعرض تكرارات البيانات المشتقة من استطلاع رأي أو تجربة، وتُصنّف حسب متغيرين، ويحتوي الجدول على صفوف تشير إلى متغير واحد وأعمدة تشير إلى المتغير الآخر.

النشاط 1 جداول التكرار بمدخلين

حفل التخرج سأل مازن عينة عشوائية مكونة من 160 طالبًا في السنة الأخيرة وقبل الأخيرة في مدرسته الثانوية عما إذا كانوا يخططون لحضور حفل التخرج أم لا. وقد توصل إلى أن 44 طالبًا في السنة الأخيرة و 32 طالبًا في السنة قبل الأخيرة يخططون لحضور حفل التخرج. بينما هناك 25 طالبًا في السنة الأخيرة و 59 طالبًا في السنة قبل الأخيرة لا يخططون للحضور. رتبّ الإجابات في جدول بمدخلين.

الخطوة 1 حدد المتغيرات. يمكن تصنيف الطلاب الذين تم استطلاع رأيهم حسب الصف الدراسي والحضور. وبما أن استطلاع الرأي تضمن طلاب السنوات الأخيرة فقط. فإن المتغير الصف الدراسي يتضمن فئتين: طلاب السنة الأخيرة أو طلاب السنة قبل الأخيرة. ويتضمن المتغير الحضور أيضًا فئتين: حضور حفل التخرج أو عدم حضوره.

الصف الدراسي	حضور حفل التخرج	عدم حضور حفل التخرج	الإجمالي
السنة الأخيرة	44	25	76
السنة قبل الأخيرة	32	59	84
الإجمالي	69	91	160

الخطوة 2 قم بإنشاء جدول تكرار بمدخلين. اجعل الصفوف في الجدول تمثل الصف الدراسي والأعمدة تمثل الحضور. ومن ثم، املأ خلايا الجدول بالمعلومات المعطاة.

الخطوة 3 أضف صف إجمالي وعمود إجمالي إلى جدولك واملأ هذه الخلايا بالمجموع الصحيح.

يطلق على التكرارات المبينة في صف **الإجمالي** وأعمدة **الإجمالي** مصطلح **التكرارات الهامشية**. وتبين الخلية أقصى اليسار في الأسفل إجمالي عدد المشاهدات. وتسمى التكرارات المبينة في الجزء الداخلي من الجدول **التكرارات المشتركة**. وهي تعرض تكرارات كل التوافق المحتملة لفئات المتغير الأول مع فئات المتغير الثاني.

تحليل النتائج

1. كم عدد طلاب النسبة الأخيرة الذين تم استطلاع رأيهم؟

2. كم عدد الطلاب ممن تم استطلاع رأيهم الذين يخططون لحضور حفل التخرج؟

التكرار النسبي هو نسبة عدد المشاهدات في فئة ما مقابل إجمالي عدد المشاهدات.

النشاط 2 جداول التكرار النسبي بمدخلين

حفل التخرج حوّل الجدول من "نشاط 1" إلى جدول للتكرارات النسبية.

الخطوة 2 اكتب كل كسر في صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عشرة.

الصف الدراسي	حضور حفل التخرج	عدم حضور حفل التخرج	الإجمالي
السنة الأخيرة	27.5%	20%	47.5%
السنة قبل الأخيرة	15.6%	36.9%	52.5%
الإجمالي	43.1%	56.9%	100%

الخطوة 1 اقسّم التكرار المبين في كل خلية على إجمالي عدد المشاركين في الاستطلاع، 160 طالبًا.

الصف الدراسي	حضور حفل التخرج	عدم حضور حفل التخرج	الإجمالي
السنة الأخيرة	$\frac{44}{160}$	$\frac{32}{160}$	$\frac{76}{160}$
السنة قبل الأخيرة	$\frac{25}{160}$	$\frac{59}{160}$	$\frac{84}{160}$
الإجمالي	$\frac{69}{160}$	$\frac{91}{160}$	$\frac{160}{160}$

يمكنك استخدام التكرارات النسبية المشتركة والهامشية لتقريب الاحتمالات المشروطة.

النشاط 3 الاحتمالات المشروطة

حفل التخرج باستخدام الجدول من "نشاط 2"، جـد احتمال أن طالب في السنوات الأخيرة ممن تم استطلاع رأيهم يخطط لحضور حفل التخرج علمًا بأنه طالب في السنة قبل الأخيرة.

احتمال أن طالب في السنوات الأخيرة ممن تم استطلاع رأيهم يخطط لحضور حفل التخرج علمًا بأنه طالب في السنة قبل الأخيرة يُعرف بأنه احتمال مشروط (حضور حفل التخرج | طالب في السنة قبل الأخيرة) P .

$$P(\text{حضور حفل التخرج} | \text{طالب في السنة قبل الأخيرة}) = \frac{P(\text{طالب في السنة قبل الأخيرة ويحضر حفل التخرج})}{P(\text{طالب في السنة قبل الأخيرة})}$$

$$= \frac{0.156}{0.525} = 0.297 \approx 29.7\%$$

التحليل والتطبيق

راجع النشاطين 2 و 3.

- إذا كان هناك 285 طالبًا في السنة الأخيرة وقبل الأخيرة، فكم عدد الطلاب الذين تتوقع أنهم يخططون لحضور حفل التخرج؟
- جـد احتمال أن يكون الطالب الذي تم استطلاع رأيه في السنة قبل الأخيرة ولا يخطط لحضور حفل التخرج.
- جـد احتمال أن يكون الطالب الذي تم استطلاع رأيه في السنة الأخيرة علمًا بأنه يخطط لحضور حفل التخرج.
- ما التوجه المحتمل الذي تلاحظه في البيانات؟

عندما تُصنّف نتائج استطلاع الرأي حسب المتغيرات، فقد ترغب في تحديد ما إذا كانت هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها الآخر. يُعتبر المتغير A متغيرًا مستقلًا عن المتغير B إذا كان $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$. في جدول التكرار بمدخلين، يمكنك اختبار ما إذا كان المتغيران مستقلين عن طريق مقارنة التكرارات النسبية المشتركة بنواتج ضرب التكرارات النسبية الهامشية المقابلة.

النشاط 4 استقلال الأحداث

حفل التخرج استخدم جدول التكرار النسبيّ من "نشاط 2" لتحديد ما إذا كان حضور حفل التخرج مستقل عن الصف الدراسي.

الصف الدراسي	حضور حفل التخرج	عدم حضور حفل التخرج	الإجمالي
السنة الأخيرة	27.5% (20.5%)	20% (27%)	47.5%
السنة قبل الأخيرة	15.6% (22.6%)	36.9% (29.9%)	52.5%
الإجمالي	43.1%	56.9%	100%

ملحوظة: الأعداد بين الأقواس هي التكرارات النسبية المتوقعة.

احسب التكرارات النسبية المشتركة المتوقعة إذا كان الحدثان مستقلين. على سبيل المثال، إذا كان 47.5% من الذين خضعوا لاستطلاع الرأي طلاب في السنة الأخيرة و 43.1% من الذين خضعوا لاستطلاع الرأي يخططون لحضور حفل التخرج، إذاً من المتوقع أن $47.5\% \times 43.1\%$ أو حوالي 20.5% من الذين خضعوا لاستطلاع الرأي هم طلاب في السنة الأخيرة يخططون لحضور حفل التخرج.

بما أن التكرارات النسبية المشتركة المتوقعة والفعلية ليست واحدة، فإن حضور حفل التخرج لهؤلاء الذين خضعوا لاستطلاع الرأي غير مستقل عن الصف الدراسي.

تجميع البيانات صمّم استطلاع رأي للطلاب في مدرستك وقم بإجرائه. أنشئ جدول تكرار نسبي بمدخلين للبيانات. استخدم جدولك لتحديد ما إذا كانت البيانات التي جمعتها تشير إلى علاقة مستقلة بين المتغيرين. اشرح استنتاجك.

- نوع الطالب وما إذا كان هو من يدفع تأمين سيارته أو والديه
- نوع الطالب وما إذا كان يشتري وجبة الغداء لنفسه أو يجلبها معه

احتمالات الأحداث المنفصلة

7-7

الدرس

السابق ..

الحالي ..

لماذا؟ ..

● قمت بإيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.

1 إيجاد احتمالات الأحداث المنفصلة وغير المنفصلة وحل تطبيقات عليها.

2 إيجاد احتمالات المتممات وحل تطبيقات عليها.

● في مدرسة الأمل الثانوية، يمكن لطلاب السنوات الأولى والثانية وقبل الأخيرة والأخيرة التنافس على رئاسة اتحاد الطلبة. يأمل أيوب في أن يفوز بالانتخابات مرشح من السنة قبل الأخيرة أو الأخيرة. في حين يأمل سعيد في أن يفوز طالب من السنة الأولى أو ذكر. ولكنه يقول: إذا كان الفائز طالب السنة الثانية يوسف، فسأسعد كثيرًا!



1 **الأحداث المنفصلة** في الدرس 4-7، فحصت الاحتمالات التي تتضمن تقاطع حدثين أو أكثر. وفي هذا الدرس، ستفحص الاحتمالات التي تتضمن اتحاد حدثين أو أكثر.



لإيجاد احتمال وقوع حدث معين أو وقوع حدث آخر، يتعين عليك معرفة العلاقة التي تربط بين الحدثين. وإذا لم يكن من الممكن أن يقع الحدثان في الوقت ذاته، فيقال إنهما **منفصلان**. وهذا يعني أنه لا توجد نتائج مشتركة بين الحدثين.

المفردات الجديدة
أحداث منفصلة
mutually exclusive events
متممة complement

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام نماذج الرياضيات.

مثال 1 من الحياة اليومية التعرف على الأحداث المنفصلة

الانتخابات راجع التطبيق أعلاه. حدد ما إذا كانت الأحداث منفصلة أو غير منفصلة. وشرح استنتاجك.

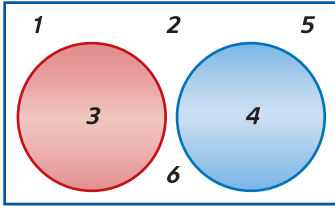
- فوز طالب في السنة قبل الأخيرة بالانتخابات أو فوز طالب في السنة الأخيرة هذان الحدثان منفصلان. لا توجد نتائج مشتركة-لا يمكن أن يكون الطالب في السنة قبل الأخيرة والأخيرة معًا.
- فوز طالب في السنة الأولى بالانتخابات أو فوز طالبة بالانتخابات هذان الحدثان غير منفصلين. طالبة فتاة وتدرس في السنة الأولى هي نتيجة مشتركة بين الحدثين.
- سحب بطاقة آس أو سباتي من مجموعة أوراق اللعب. بما أن بطاقة آس سباتي تمثل الحدثين، فهما ليسا متنافرين.

تمرين موجّه

- حدد ما إذا كانت الأحداث منفصلة أو غير منفصلة. وشرح استنتاجك.
- اختيار عدد عشوائيًا من مجموعة أعداد صحيحة من 1 إلى 100 والحصول على عدد قابل للقسمة على 5 أو عدد قابل للقسمة على 10
 - سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على 5 أو قلب
 - الحصول على المجموع 6 أو 7 عند رمي حجرين نرد



يعد فحص الفضاء العيني إحدى الطرق المستخدمة في إيجاد احتمال حدثين منفصلين يقعان.



عند رمي حجر نرد، ما احتمال ظهور العدد 3 أو 4؟ من مخطط فن. يمكنك رؤية أن هناك نتيجتين تحققان هذه الحالة، 3 و 4. إذًا.

$$P(3 \text{ and } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد الاحتمال نفسه عن طريق جمع احتمالات كل حدث بسيط.

$$P(3) = \frac{1}{6} \quad P(4) = \frac{1}{6} \quad P(3 \text{ and } 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

يوضح هذا المثال القاعدة الأولى من قاعدتي جمع الاحتمالات.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع الأحداث المنفصلة

إذا كان الحدثان A و B منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو مجموع احتمالات كل حدث بمفرده.

الشرح

إذا كان الحدثان A أو B منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$.

مثال

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

قراءة في الرياضيات

أو حرف العطف أو هو عنصر رئيسي يفيد بوقوع حدث واحد على الأقل. (A أو B) تُقرأ كالتالي احتمال وقوع الحدث A أو وقوع الحدث B .

مثال 2 من الحياة اليومية الأحداث المنفصلة



الألبوم	عدد الأغاني
1	10
2	12
3	13

الموسيقى أعد ناصر قائمة تشغيل تضم مجموعة أغاني من ثلاثة ألبومات مختلفة لمطربه المفضل. إذا جعل مُشغّل MP3 الخاص به يختار الأغاني من هذه القائمة عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الأغنية الأولى التي يتم تشغيلها من الألبوم 1 أو الألبوم 2؟
هذه أحداث منفصلة؛ حيث لا يمكن أن تكون الأغاني المختارة من الألبومين 1 و 2 معًا.

افتراض أن الحدث A_1 يمثل اختيار أغنية من الألبوم 1. وافترض أن الحدث A_2 يمثل اختيار أغنية من الألبوم 2. يوجد إجمالي $10 + 12 + 13$ أو 35 أغنية.

$$\begin{aligned} P(A_1 \text{ or } A_2) &= P(A_1) + P(A_2) \\ &= \frac{10}{35} + \frac{12}{35} \\ &= \frac{22}{35} \end{aligned}$$

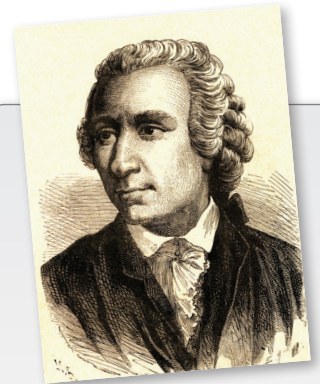
احتمال وقوع الأحداث المنفصلة
 $P(A_2) = \frac{12}{35}$ و $P(A_1) = \frac{10}{35}$
اجمع.

إذًا، احتمال أن تكون الأغنية الأولى التي يتم تشغيلها من الألبوم 1 أو الألبوم 2 هو $\frac{22}{35}$ أو حوالي 63%.

تمرين موجّه

2A. عند رمي حجري نرد، فما احتمال الحصول على عددين متطابقين أو عددين مجموعهما 9؟

2B. ألعاب الكرتال إذا ربح لعبة رمي الحلقات في الكرتال، فإنك تفوز بدمية محشوة. إذا تم اختيار الدمية المحشوة عشوائيًا من بين 15 مهرًا و 16 هرة صغيرة و 14 ضفدعة و 25 ثعبانًا و 10 وحيد القرن، فما احتمال أن يحصل الرابح على مهر أو هرة صغيرة أو وحيد القرن؟

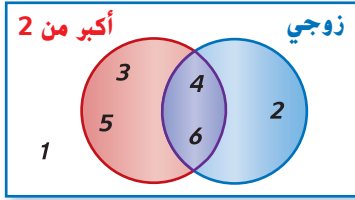


الربط بتاريخ الرياضيات

ليونهارت أويلر (1707-1783) قدّم أويلر نظرية التمثيل البياني عام 1736 في بحث بعنوان "جسور كونينغسبرغ السبعة".

Seven Bridges of Konigsburg

عبارة عن مسألة رياضيات محلولة ومشهورة مستوحاة من مكان وموقف حقيقي. علاوة على ذلك، يمثل قانون أويلر المرتبط بعدد حواف متعدد الوجوه المحدب وعدد الرؤوس والأوجه أساس نظرية التمثيل البياني. راجع "التوسع 3-6".



عند رمي حجر نرد، فما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ من مخطط فن. يمكنك رؤية أن هناك 5 أعداد إما أكبر من 2 أو عدد زوجي: 2 و 3 و 4 و 5 و 6. إذًا.

$$P(\text{أكبر من 2 or عدد زوجي}) = \frac{5}{6}$$

بما أنه من الممكن ظهور عدد أكبر من 2 وعدد زوجي، فهذه الأحداث غير منفصلة. وفكر في احتمالات كل حدث بمفرده.

$$\frac{4}{6} = P(\text{أكبر من 2}) \quad \frac{3}{6} = P(\text{فردية})$$

إذا تم جمع هذه الاحتمالات، فسيتم حساب احتمال النتيجتين. 4 و 6، مرتين-مرة لكونهما عددين أكبر من 2 ومرة أخرى لكونهما عددين زوجيين. يتعين عليك طرح احتمال هذه النتائج المشتركة.

$$P(\text{أكبر من 2 or عدد زوجي}) = P(\text{أكبر من 2 and عدد زوجي}) - P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{أكبر من 2})$$

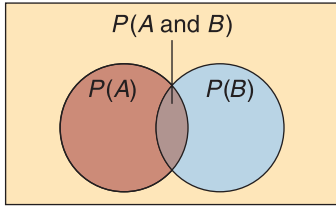
$$= \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

وهذا يقودنا إلى قاعدة جمع الاحتمالات الثانية.

عند إلقاء مكعبين أعداد، ما احتمال أن يظهر العدد 2 على المكعب الأول أو أن يكون مجموع العددين الظاهرين على المكعبين هو 6 أو 7؟ بما أنه من الممكن أن يظهر كل مكعب أعداد بمفرده على ستة أشكال أو طرق مختلفة، وحيث إنه تم إلقاء مكعب أعداد، فإنه يمكن تمثيل الفضاء العيني من خلال وضع مخطط. ويمكن تعريف **الفضاء العيني المخفض (مجال العينة المخفض)** بكونه المجموعة الفرعية لفضاء العينة التي لا تضم سوى تلك النتائج التي تحقق شرطاً معيّنًا.

مكعب الأعداد الثاني							مكعب الأعداد الأول
6	5	4	3	2	1		
(1, 5)	(1, 5)	(1, 4)	(1, 3)	(1, 2)	(1, 1)	1	
(2, 6)	(2, 5)	(2, 4)	(2, 3)	(2, 2)	(2, 1)	2	
(3, 6)	(3, 5)	(3, 4)	(3, 3)	(3, 2)	(3, 1)	3	
(4, 6)	(4, 5)	(4, 4)	(4, 3)	(4, 2)	(4, 1)	4	
(5, 6)	(5, 5)	(5, 4)	(5, 3)	(5, 2)	(5, 1)	5	
(6, 6)	(6, 5)	(6, 4)	(6, 3)	(6, 2)	(6, 1)	6	

من الممكن أن يظهر العدد 2 على أول مكعب أعداد وأن يكون مجموع العددين الظاهريين على مكعب الأعداد 6 أو 7. ومن ثم، لا يكون هذان الحدثان منفصلان. ويُطلق عليهما **حدثان متقاطعان**. وفي هذه الحالة، يتعين عليك تعديل صيغة الأحداث المنفصلة.



الحدثان A و B حدثان متقاطعان

لاحظ تداخل الدائرتين في مخطط فين. وتمثل هذه المنطقة احتمال وقوع كلا الحدثين في نفس الوقت. وعند جمع مساحتي الدائرتين، يتم حساب هذه المساحة المتداخلة مرتين. ولذلك، يجب طرحها لإيجاد الاحتمال الصحيحة للحدثين.

افتراض أن A يمثل حدث "ظهور العدد 2 على مكعب الأعداد الأول".

افتراض أن B يمثل حدث "كون مجموع الرقمين الظاهريين على مكعب الأعداد هو 6 أو 7".

$$P(A) = \frac{6}{36} \quad P(B) = \frac{11}{36}$$

لاحظ أنه يتم حساب (2, 4) و (2, 5) مرتين، ففي كليهما يظهر العدد 2 على مكعب الأعداد الأول ويكون مجموع العددين الظاهريين على مكعب الأعداد 6 أو 7. ولإيجاد الاحتمال الصحيحة، يتعين عليك طرح (2) وعددين مجموعهما 6 أو 7.

$$P(2) + \underbrace{P(2) + \text{عددان مجموعهما 6 أو 7}} - \underbrace{p(7 \text{ أو } 6)} = \frac{6}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

احتمال أن يظهر العدد 2 على مكعب الأعداد الأول أو أن يكون مجموع العددين الظاهريين على مكعب الأعداد 6 أو 7 هي $\frac{5}{12}$.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع الأحداث غير المنفصلة

الشرح إذا كان الحدثان A و B حدثين غير منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو ناتج جمع احتمالات كل منهما مطروحاً منه احتمال وقوع كل من A و B معاً.

الرموز إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.

مثال 3 من الحياة اليومية الأحداث غير المنفصلة

لوحات ياسمين			
اعلانية	طبيعة صامتة	لوحة لأشخاص	مناظر طبيعية
ألوان مائة	4	5	3
زيتية	1	3	2
أكريليك	3	2	1
باستيل	1	0	5

الفن يوضح الجدول عدد ونوع اللوحات التي رسمتها ياسمين. إذا اختارت لوحة عشوائيًا لتقديمها في مسابقة للرسم، فما احتمال أن تختار لوحة لشخص أو لوحة زيتية؟

بما أن بعض لوحات ياسمين تتضمن كلاً من لوحات لأشخاص ولوحات زيتية، فهذه الأحداث غير منفصلة. استخدم القاعدة لحدثين غير منفصلين. إجمالي عدد اللوحات التي تختار من بينها هو 30 لوحة.

$$P(\text{زيتية or لوحة لأشخاص}) = P(\text{زيتية}) + P(\text{لوحة لأشخاص}) - P(\text{زيتية and لوحة لأشخاص})$$

$$= \frac{1+3+2}{30} + \frac{5+3+2+0}{30} - \frac{3}{30} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{6}{30} + \frac{10}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30} \quad \text{بسط.}$$

احتمال أن تختار ياسمين لوحة لأشخاص أو لوحة زيتية هو $\frac{13}{30}$ أو حوالي 43%.

تمرين موجّه

3. ما احتمال سحب بطاقة الملك أو ديمين من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة؟



الربط بالحياة اليومية

العروض الفنية الخاضعة للتحكيم هي عروض يُطلب فيها من الرسامين إرسال لوحاتهم الفنية وتقرر لجنة من الحكام أي لوحة سيتم عرضها. وقد ظهرت هذه العروض في العقد الأول من القرن التاسع عشر لعرض أعمال الرسامين الحاليين وتثقيف الجمهور.

المصدر: Humanities Web

2 احتمالات المهمات تتكون **مهمة** الحدث A من جميع النتائج في الفضاء العيني غير المضمنة على أنها نتائج للحدث A.

عند رمي حجر نرد، فإن احتمال الحصول على 4 هو $\frac{1}{6}$. ما احتمال عدم الحصول على 4؟ توجد 5 نتائج محتملة لهذا الحدث: 1 أو 2 أو 3 أو 5 أو 6. إذا $\frac{5}{6} = P(4)$ (ليس 4). لاحظ أيضًا أن هذا الاحتمال هو

$$1 - \frac{1}{6} \quad \text{أو} \quad 1 - P(4).$$

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

المفهوم الأساسي احتمال متممة الحدث

الشرح احتمال عدم وقوع حدث ما يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحدث.

الرموز بالنسبة للحدث A , (ليس $P(A) = 1 - P(A)$).

مثال 4 الأحداث المتممة

بطاقات لاعبي كرة القدم اشترى طارق 20 بطاقة لاعبي كرة قدم. أملاً أن يحصل على البطاقة الوحيدة التي تحتوي على لاعبه المفضل. فإذا تم بيع إجمالي 300 بطاقة ولا يوجد بهم سوى بطاقة واحدة عليها اللاعب، فما احتمال ألا يحصل طارق على هذه البطاقة؟ افترض أن الحدث A يمثل بطاقات طارق التي تحتوي على اللاعب. ثم جد احتمال متممة A .

$$P(\text{ليس } A) = 1 - P(A) \\ = 1 - \frac{20}{300}$$

احتمال المتممة
بالتعويض

$$= \frac{280}{300} = \frac{14}{15}$$

اطرح وبسط.

احتمال ألا تحتوي بطاقات طارق على اللاعب هو $\frac{14}{15}$ أو حوالي 93%.

تمرين موجّه

4. إذا كانت فرص تساقط الأمطار هي 70%. فما احتمال ألا تتساقط الأمطار؟

قراءة في الرياضيات

المتهم متمم الحدث A يمكن أن يكتب أيضًا في صورة A^c .

ملخص المفهوم قواعد الاحتمالات

أنواع الأحداث	الشرح	قاعدة الاحتمال
أحداث مستقلة	نتيجة الحدث الأول لا تؤثر على نتيجة الحدث الثاني.	إذا كان الحدثان A و B مستقلين، فإن $P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B)$.
أحداث غير مستقلة	نتيجة الحدث الأول تؤثر على نتيجة الحدث الآخر.	إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، فإن $P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B A)$.
مشروطة	معلومات إضافية معروفة عن احتمال وقوع حدث.	الاحتمال المشروط لوقوع A علماً بوقوع B هو $P(A B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$.
أحداث منفصلة	لا توجد نتائج مشتركة بين الأحداث.	إذا كان الحدثان A أو B منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$.
أحداث غير منفصلة	توجد نتائج مشتركة بين الأحداث.	إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.
أحداث متممة	تتكون نتائج حدث واحد من كل النتائج في الفضاء العيني التي لا تمثل نتائج الحدث الآخر.	بالنسبة للحدث A . $P(\text{ليس } A) = 1 - P(A)$.

أحزمة الأمان راجع المعلومات المبينة في الجانب الأيمن. افترض أنه تم اختيار شخصين عشوائيًا من مجموعة تضم 100 قائد سيارة وراكب أمريكي. إذا كانت هذه المجموعة تمثل عينة من السكان، فما احتمال أن يكون واحد على الأقل منهم لا يضع حزام الأمان؟

- الفهم** أنت تعلم أن 81% من الأمريكيين يستخدمون حزام الأمان.
- عبارة واحد على الأقل تعني واحدًا أو أكثر. إذا، تحتاج إلى إيجاد احتمال أنه إما
- الشخص الأول المختار لا يستخدم حزام الأمان أو
 - الشخص الثاني المختار لا يستخدم حزام الأمان أو
 - كلا الشخصين المختارين لا يستخدمان حزام الأمان.



التخطيط متممة الحدث الموصوف أعلاه تمثل حدث أن كلا الشخصين المختارين يستخدمان حزام الأمان. جسد احتمال هذا الحدث، ثم جسد احتمال متممته.

افترض أن الحدث A يمثل اختيار شخص يستخدم حزام الأمان.

افترض أن الحدث B يمثل اختيار شخص يستخدم حزام الأمان بعد اختيار الشخص الأول بالفعل.

هذان حدثان غير مستقلين؛ حيث إن نتيجة الحدث الأول تؤثر على احتمال نتيجة الحدث الثاني.

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

$$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$$

$$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$$

الحل احتمال الأحداث غير المستقلة

$$P(A) = \frac{0.81(100)}{100} = \frac{81}{100}$$

اضرب.

$$P[(A \text{ and } B) \text{ ليس}] = 1 - P(A \text{ and } B)$$

$$= 1 - \frac{36}{55}$$

$$= \frac{19}{55}$$

احتمال المتممة

بالتعويض

اطرح.

إذًا، احتمال أن راكبًا واحدًا على الأقل لا يستخدم حزام الأمان هو $\frac{19}{55}$ أو حوالي 35%.

التحقق استخدم التفكير المنطقي للتحقق من صحة إجابتك.

احتمال اختيار شخص واحد من 100 لا يرتدي حزام الأمان هي $(100 - 81) \%$ أو 19%. ويجب أن يكون احتمال اختيار شخصين من 100 يرتدون حزام الأمان أكبر من 19%. حيث إن $35\% > 19\%$. فالإجابة منطقية.

تمرين موجّه

5. **الهواتف الخلوية** وفقًا لاستبيان إلكتروني، فإن 35% من سائقي السيارات الأمريكيين يستخدمون بانتظام هواتفهم الخلوية أثناء القيادة. وقد تم اختيار ثلاثة أشخاص عشوائيًا من مجموعة تضم 100 قائد سيارة. فما احتمال أن

A. يستخدم على الأقل اثنان منهم هواتفهم الخلوية أثناء القيادة؟

B. يستخدم واحد على الأكثر هاتفه الخلوي أثناء القيادة؟



الربط بالحياة اليومية

ما يقرب من 81% من قادة السيارات الأمريكيين ومن يجلسون على المقعد الأيمن بجوارهم يضعون حزام الأمان.

المصدر: National Highway Traffic Safety Administration

نصيحة دراسية

الكلمات الرئيسية الدالة

على الاحتمال عند تحديد نوع الاحتمال الذي تتعامل معه في موقف ما، فعليك البحث عن الكلمات الرئيسية وتفسير معانيها بالشكل الصحيح.

و ← أحداث مستقلة أو غير مستقلة

أو ← منفصلة أو غير منفصلة ليس ← أحداث متممة

وإذا ← مشروطة

n على الأقل ← n أو أكثر n على الأكثر ← n أو أقل

مثال 1

حدد ما إذا كانت الأحداث منفصلة أو غير منفصلة. وشرح استنتاجك.

1. سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على ولد أو سباتي
2. رعاية قطعة أو حصان

مثال 2

3. **الوظائف** هيام هي موظفة الشهر المثالية. وجائزتها هي الاختيار عشوائيًا من بين 4 بطاقات هدايا و 6 أقداح قهوة و 7 أسطوانات DVD و 10 أسطوانات مضغوطة و 3 سلال هدايا. ما احتمال أن تحصل على بطاقة هدايا أو قده قهوة أو أسطوانة مضغوطة؟

مثال 3

النادي	السنة الأولى	السنة قبل الأخيرة	السنة الأخيرة
التطوعي	12	14	8
المناظرة	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
الفرنسية	11	15	13

4. **النوادي** وفقًا للجدول، ما احتمال أن يكون الطالب في النادي في السنة قبل الأخيرة أو في فريق المناظرة؟

مثال 4

حدد احتمال وقوع كل حدث.

5. إذا كانت فرصة إسقاط الكرات في لعبة البولينج هي 2 من 10. فما احتمال أن تفوّت الضربة؟
6. إذا كانت فرصة الإقامة في مهجع بعينه هي 75%. فما احتمال الإقامة في مهجع آخر؟

مثال 5

7. **حفل التخرج** في صف خالد للطلاب في السنة الأخيرة الذي يضم 100 طالب، حضر 91 طالبًا حفل تخرج الدفعة. إذا تم اختيار طالبين عشوائيًا من الصف بأكمله، فما احتمال عدم حضور واحد على الأقل منهم حفل التخرج؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 3-1

حدد إذا ما كانت الأحداث منفصلة أم غير منفصلة. ثم جد الاحتمال. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة في المئة، إذا لزم الأمر.

- 8 سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على ولد أو ستة
- 9 رمي حجرين نرد والحصول على عددين متطابقين أو ما مجموعه 8
- 10 اختيار عدد عشوائيًا من مجموعة أعداد صحيحة من 1 إلى 20 والحصول على عدد زوجي أو عدد قابل للقسمة على 3
- 11 إلقاء قطعة نقد معدنية والحصول على صورة أو كتابة
- 12 سحب بطاقة آس أو قلب من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة
- 13 رمي حجرين نرد والحصول على ما مجموعه 6 أو 10
- 14 **الرياضة** يحتوي الجدول على كل البرامج المتاحة في المجمع الرياضي وعدد المشاركين الذين تتراوح أعمارهم بين 14-16. فما احتمال أن يكون سن اللاعب 14 عامًا أو يلعب كرة السلة؟

مجمع جريس لاند الرياضي			
العمر	كرة القدم	كرة القاعدة	كرة السلة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

15. **تمثيل النماذج** حان وقت عودة طالبة تبادل إلى إيطاليا، وترغب زميلاتها في الصف في تقديم هدية وداع لها. وقد أجرت المعلمة استطلاعًا للرأي في الصف المكون من 32 طالبة ووجدت أن 10 طالبات اخترن بطاقة و 12 طالبة اخترن قميصًا و 6 اخترن فيديو و 4 اخترن سوارًا. إذا اختارت المعلمة الهدية عشوائيًا، فما احتمال حصول طالبة التبادل على بطاقة أو سوار؟

هناك 5 قطع نقد معدنية فئة ربع درهم، و 7 فئة نصف درهم، و 9 فئة الدرهم في مجموعة أثرية من قطع النقد المعدنية. وفي حالة اختيار قطعتين عشوائياً دون إعادتهما، فجدد كل احتمال.

35. (القطعتان فئة ربع درهم) p

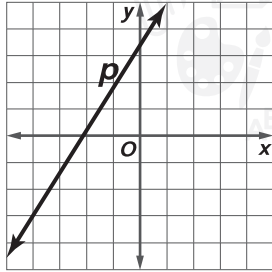
36. (القطعتان فئة النصف أو القطعتان لونهما فضي) p

37. (قطعة واحدة على الأقل فئة النصف) p

38. (القطعتان فئة الدرهم أو إحداها فئة الربع والأخرى فئة النصف) p

تدريب على الاختبار المعياري

41. الجبر ماذا سيحدث لميل الخط p إذا تم تغييره بحيث يظل التقاطع مع المحور الرأسى y كما هو ويقترب التقاطع مع المحور الأفقى x من نقطة الأصل؟



F سيصبح الميل سالبًا.

G سيصبح الميل صفرًا.

H سيقبل الميل.

J سيزيد الميل.

42. SAT/ACT احتمال اختيار حلوى النعناع من كيس

حلوى هو 0.25 واحتمال اختيار شوكولاتة هو 0.3.

يحتوي الكيس على 60 قطعة حلوى، مع العلم أن

أنواع الحلوى الوحيدة الموجودة في الكيس هي النعناع

والشوكولاتة والسكر البني مع الزبدة. كم عدد حلوى السكر

البني مع الزبدة في الكيس؟

A 25

D 33

B 27

E 45

C 30

39. الاحتمال يمكن أن يفوز الزبائن في صالون جديد بجوائز في يوم الافتتاح. يعرض الجدول نوع الجوائز وعددها. ما احتمال أن تفوز الزبونة الأولى بجلسة مانيكير أو تدليك؟

العدد	الجائزة
10	مانيكير
6	باديكير
3	تدليك
1	تجميل للوجه

A 0.075

C 0.5

B 0.35

D 0.65

40. إجابة قصيرة يظهر مكعب مرقم من 1 إلى 6.



إذا تم رمي المكعب مرة، فما احتمال أن يظهر عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه العلوي للمكعب؟

حدد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أم غير مستقلة. ثم جـد الاحتمال. (الدرس 7-5)

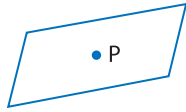
43. تُسحب بطاقة ملك، دون إعادتها، من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة. وبعد ذلك، تُسحب بطاقة ملك ثانية.

44. رُمي نردًا وتحصل على العدد 2. ورُمي نردًا آخر وتحصل على العدد 3.

45. الرياضة توصل استطلاع للرأي في مدرسة ثانوية أن 15% من الرياضيين بالمدرسة يلعبون الكرة الطائرة فقط، و 20% يلعبون كرة القدم الأمريكية فقط، و 30% يلعبون كرة السلة فقط، و 35% يلعبون كرة القدم فقط. صمّم نموذج المحاكاة الذي يمكن استخدامه لتقدير احتمال ممارسة الرياضي كل واحدة من تلك الرياضات. (الدرس 7-4)

انسخ الشكل إضافةً إلى النقطة P . ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل الذي مركزه P بعد تغيير الأبعاد وفق معامل القياس المحدد r .

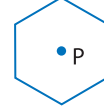
46. $r = \frac{1}{2}$



47. $r = 3$



48. $r = \frac{1}{5}$

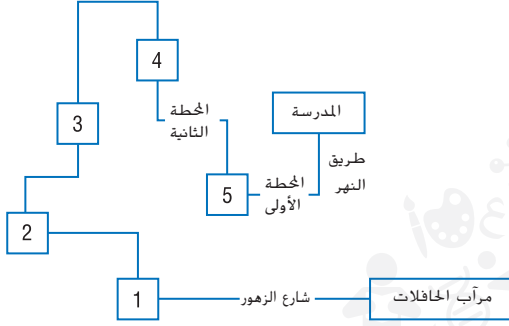




مختبر الهندسة نظرية التمثيل البياني

7-7

التوسيع

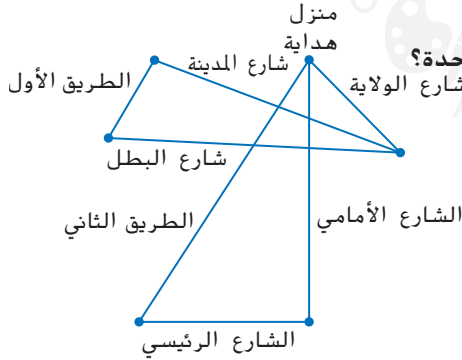


يمكن استخدام بنيات الرياضيات لإنشاء نموذج للعلاقات ضمن المجموعة. ويطلق على دراسة هذه التمثيلات البيانية نظرية التمثيل البياني. ولا تشبه هذه التمثيلات البيانية ذات الرؤوس والأطراف التمثيلات البيانية التي يمكن رؤيتها على المستوى الإحداثي. ويطلق على كل تمثيل بياني أيضًا **شبكة**. وهي عبارة عن مجموعة من الرؤوس التي يطلق عليها **عُقدًا** والقطع المستقيمة التي تربط العُقد ويطلق عليها **حواف**.

يعتبر مسار الحافلة الموضح في الشكل مثالاً على الشبكة. ويعتبر كل من المدرسة والمحطات والمرآب عُقدًا في الشبكة. بينما تعتبر الشوارع التي تصل بينهم مثل شارع الزهور الحواف.

إنه مثال **لشبكة يمكن تعقبها** حيث ترتبط جميع العُقد من خلال استخدام كل حافة لمرة واحدة فقط في الشبكة.

النشاط 1



يمثل التمثيل البياني الطريق إلى الجريدة التي تعمل بها هداية. لقطع هذا الطريق بأسرع وقت ممكن، كيف تستطيع هداية قيادة دراجتها بأن تقطع كل شارع مرة واحدة؟

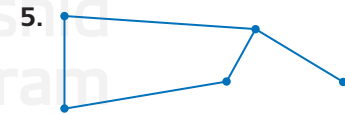
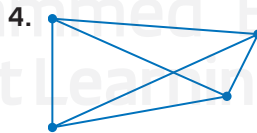
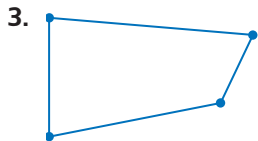
الخطوة 1 انسخ التمثيل البياني في ورقتك.

الخطوة 2 بالبدء من منزل هداية، تتبع طريقها دون أن ترفع قلمك الرصاص للحظة. وتذكر أن تتبع كل حافة مرة واحدة فقط.

الخطوة 3 صفّ طريق هداية.

التحليل

- هل هناك أكثر من طريق يمكن تتبعه يبدأ من منزل هداية؟ إذا كانت الإجابة نعم، فكم عدد الطريق؟
- إذا لم تكن نقطة البداية لهداية ذات أهمية، فكم طريقًا محتملاً يمكن تتبعه؟ هل يمكن تتبع كل التمثيلات البيانية؟ اكتب نعم أو لا. اشرح استنتاجك.



6. يحتوي حرم مدرسة الأمل الثانوية على خمسة مباني مقامة حول حافة فناء مستدير. ويوجد رصيف بين كل مبنيين.

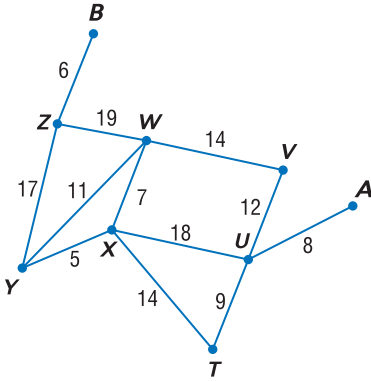
a. ارسم تمثيلًا بيانيًا للحرم المدرسي. وهل يمكن تتبع التمثيل البياني؟

b. افترض أن هناك رصيفًا بين كل مبنيين متجاورين. هل من الممكن الوصول إلى جميع المباني الخمسة دون المشي على أي رصيف أكثر من مرة واحدة؟

7. **التبرير** اكتب قاعدة تحدد ما إذا كان التمثيل البياني يمكن تتبعه.

في الشبكة، تسمى الطرق المؤدية من رأس إلى أخرى مسارات. **التمثيلات البيانية الموزونة للرؤوس والحواف** هي تمثيلات بيانية يتم فيها تعيين قيمة أو **وزن** لكل حافة. ويكون **وزن المسار** عبارة عن مجموع أوزان الحواف الموجودة على طول المسار. ويكون **المسار الفعال** هو المسار الأقل وزناً.

النشاط 2



لحواف الشبكة أوزان مختلفة. ابحث عن المسار الفعال من **A** إلى **B**.

الخطوة 1 اعثر على جميع المسارات الممكنة من **A** إلى **B**.
ضع على طول كل مسار أحرف التعداد.

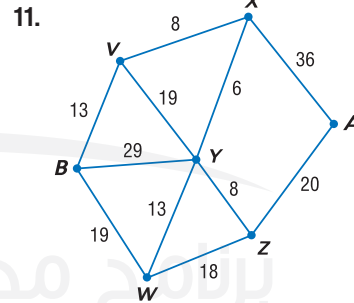
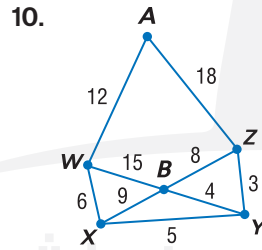
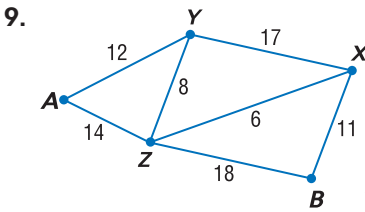
الخطوة 2 تتبع كل مسار وأضف أوزان كل حافة.
على أن يكون المسار الأقل وزناً هو المسار الفعال:
A-U-X-Y-Z-B الوزن هو 54.

انتبه إلى الأوزان عند تحديد المسار الفعال. ربما لا يكون المسار الأقل عدداً من حيث الحواف.

النموذج والتحليل

8. ما أطول مسار من **A** إلى **B** لا يغطي أي حافة أكثر من مرة واحدة؟

حدد المسار الفعال من **A** إلى **B** لكل شبكة.



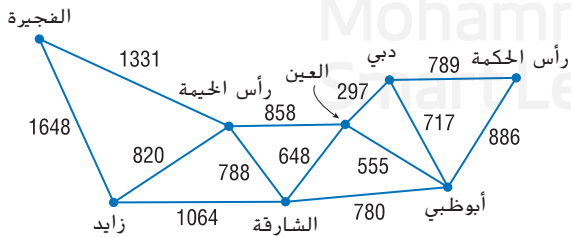
12. مسألة غير محددة الإجابة أنشئ شبكة بها 8 عُقد ومساراً فعالاً قيمته 25.

13. الكتابة في الرياضيات اشرح طريقتك لتحديد المسار الفعال للشبكة.

14. السفر استخدم التمثيل البياني الموجود إلى اليسار للعثور على جميع المسارات الفعالة.

a. من مدينة زايد إلى رأس الحكمة

b. من الفجيرة إلى أبوظبي



15. الدرجات الست من التباعد مثال شهير لنظرية التمثيل البياني. وفيها يمثل كل شخص عُقدة ويتصل الأشخاص بحافة إذا كانوا على معرفة ببعضهم البعض.

a. ضع تمثيلاً بيانياً للموقف. صلّ نفسك مباشرة بثلاثة أشخاص تعرفهم معرفة شخصية. ويمثل هذا أول درجة من التباعد.

b. اشرح التمثيل البياني لتوضيح الدرجات الثلاث الأولى من التباعد. اذكر اسم شخص على بُعد 3 درجات منك واسرد المسار.

دليل الدراسة

المفردات الأساسية

circular permutation	التباديل الدائرية
combination	توافيق
complement	متممة
compound events	أحداث مركبة
conditional probability	احتمال مشروط
dependent events	أحداث غير مستقلة
expected value	قيمة التوقع
factorial	مضروب
Fundamental Counting Principle	مبدأ العد الأساسي
geometric probability	الاحتمال الهندسي
independent events	الأحداث المستقلة
mutually exclusive events	أحداث منفصلة
permutation	تباديل
probability model	نموذج الاحتمال
probability tree	شجرة الاحتمال
random variable	متغير عشوائي
sample space	الفضاء العيني
simulation	المحاكاة
tree diagram	المخطط الشجري

المفاهيم الأساسية

تمثيل الفضاءات العينية (الدرس 1-7)

- الفضاء العيني للتجربة هو مجموعة جميع النتائج المحتملة. ويمكنك التحديد باستخدام قائمة منظمة أو جدول أو مخطط شجري.

التباديل والتوافيق (الدرس 2-7)

- التباديل لمجموعة مكونة من n من العناصر مأخوذ منها r في المرة هي ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- التوافيق لمجموعة مكونة من n من العناصر مأخوذ منها r في المرة هي ${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
- يجب استخدام التباديل عندما يكون الترتيب ذا أهمية وتستخدم التوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-3)

- إذا تضمنت المنطقة A المنطقة B وتم اختيار النقطة E في المنطقة A بشكل عشوائي. فإن احتمال أن تكون النقطة E في المنطقة B تساوي مساحة المنطقة B .
مساحة المنطقة A

المحاكاة (الدرس 3-4)

- تستخدم المحاكاة نموذج الاحتمال لإعادة موقف مرة بعد مرة بحيث يمكن تقدير احتمال حدوث النتائج المختلفة.

الاحتمال في الأحداث المركبة (الدرس 5-7 و 6-7)

- إذا لم يؤثر الحدث A على نتيجة الحدث B . فإن الأحداث مستقلة $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$
- إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين. فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- إذا كان الحدثان A و B يستحيل حدوثهما معًا في نفس الوقت، فإنهما منفصلان ويكون $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$
- إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين. فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خط لجعل الجملة صحيحة.

- يستخدم المخطط الشجري قطعًا مستقيمة لعرض النتائج الممكنة.
- التباديل هي ترتيب مجموعة من العناصر ليس لترتيبها أهمية.
- يتطلب تنظيم الأفراد حول مائدة مستديرة تباديل دائرية.
- إلقاء قطعة معدنية ثم إلقاء أخرى مثال للأحداث غير المستقلة.
- يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًا مثل الطول أو المساحة.
- $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. مثال على المضروب.
- يُطلق على المجموعة الكاملة للنتائج المحتملة الفضاء العيني.
- الجمع بين إلقاء قطعة معدنية ورمي الترد يصنع حدثًا بسيطًا.
- نقر حمد قطعة النقد بطرف إصبعه 200 مرة لإنشاء شجرة احتمال للتجربة
- يمثل سحب جوربين من الدرج دون إعادتهما أمثلة لأحداث منفصلة.



تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

مراجعة درس بدرس

7-1 تمثيل الفضاءات العينية

مثال 1

تم إلقاء قطعة نقد معدنية ثلاث مرات. مثل الفضاء العيني لهذه التجربة بعمل قائمة منظمة. اقرن كل نتيجة محتملة من الرمية الأولى مع النتائج المحتملة من الرمية الثانية والثالثة.
HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT

11. الفشار تتبع دار سينما فشار بالحجم الصغير (S) والوسط (M) والكبير (L) بخيار عدم إضافة زبد (NB) أو إضافة زبد (B) أو إضافة الكثير من الزبد (EB). مثل الفضاء العيني لطلبات الفشار بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.
12. الأحذية يتوفر زوج من الأحذية الرجالية بكل المقاسات من 5 إلى 13 بالألوان الكحلي والبني والأسود. كم عدد أزواج الأحذية المختلفة التي يمكن اختيارها؟

7-2 الاحتمالات باستخدام التباديل والتوافيق

مثال 2

تحتاج هالة إلى وضع مقاعد لأربعة أشخاص حول مائدة مستديرة لإقامة مأدبة طعام بالمشاركة. كم عدد التوافيق الممكنة؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية لإقامة المقاعد فهذه تباديل دائرية.

$$P_4 = (4 - 1)! \quad \text{قانون التباديل الدائرية}$$

$$= 3! = 6 \quad n = 4$$

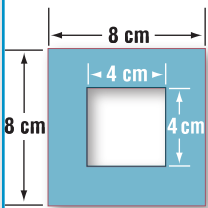
بسط.

إذا فهناك 6 طرق لتوزيع مقاعد لأربعة أشخاص حول المائدة المستديرة.

13. العشاء خرجت أسرة مكونة من ثلاث من الفتيات وثلاثة من الصبية لتناول الطعام في الخارج. ولا يحتوي المطعم إلا على الموائد المستديرة. لا يرغب زايد في جلوس أي من الأخوات إلى جوارها كما لا ترغب عبير في جلوس أي من إخوانها إلى جوارها. كم عدد الترتيبات الممكنة؟
14. الحفل تتكون لجنة الحفل من 10 طلاب. وستختار اللجنة ثلاثة أعضاء بشكل عشوائي. ما احتمال أن يتم اختيار ماجد وفهد وفالح؟
15. مسابقة سيتم بشكل عشوائي اختبار 4 طلاب من بين 32 طالباً لتكوين فريق للدخول في تحدٍ دراسي. فبكم طريقة يمكن القيام بذلك؟

7-3 الاحتمالات الهندسية

مثال 3



موضح في الشكل لعبة كرنفال. إذا ألقت نسرين 10 أكياس على اللوح، فما مدى احتمال أن يدخل الكيس في الفتحة؟

$$4 \cdot 4 = 16 = \text{مساحة الفتحة}$$

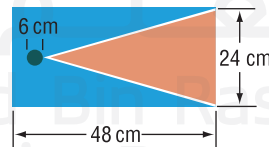
$$(8 \cdot 8) - 16 = 64 - 16 = 48 = \text{مساحة اللوح}$$

$$P(\text{بفتحة}) = \frac{16}{64} = \text{أو حوالي } 25\%$$

b. ما احتمال ألا يدخل الكيس في الفتحة؟

$$P(\text{بدون فتحة}) = \frac{48}{64} = \text{أو حوالي } 75\%$$

16. ألعاب موضح في الشكل قياسات للعبة أكياس القول. ما احتمال وقوع كل حدث؟



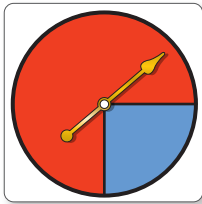
- a. (بفتحة) P
b. (بدون فتحة) P

17. حوض السباحة يجلس فارس وعيسى وعمر وعلي على جانب حوض السباحة بهذا الترتيب. يبعد فارس عن عيسى بـ 3 مترين. ويبعد عيسى عن عمر 4 متر. ويبعد عمر عن علي 3 متر. وانضم إليهم عدنان.
- a. جـد مدى احتمال أن يجلس عدنان بين فارس وعيسى.
b. جـد مدى احتمال أن يجلس عدنان بين عيسى وعلي.

7-4 المحاكاة

مثال 4

سدد عبد الله 75% من تصويبات الأهداف الموسم الماضي. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه في تقدير احتمال تصويبات الأهداف التي سيسددها في هذا الموسم.



استخدم القرص الدوار المقسم إلى جزأين. اجعل جزءاً منه أحمر اللون ويحتوي على 75% من مساحة القرص والآخر أزرق اللون ويحتوي على 25% من مساحة القرص. أدر القرص 50 مرة. تمثل كل دورة تصويب هدف. تتمثل المحاولة الناجحة في تصويب هدف والمحاولة الفاشلة في إضاعة هدف.

صفت كيف يمكنك استخدام نموذج الاحتمال الهندسي لتصميم نماذج محاكاة لكل مما يلي.

18. كرة الماء يسجل عبيد 35% من الأهداف التي يسجلها فريقه في كل مباراة لكرة الماء.

19. كتب طبياً لاستطلاع رأي، يشتري 30% من الأشخاص كتبهم خلال شهر أكتوبر ونوفمبر وديسمبر، و 22% منهم خلال شهر يناير وفبراير ومارس، و 23% منهم خلال شهر أبريل ومايو ويونيه، و 25% منهم خلال شهر يوليو وأغسطس وسبتمبر.

20. نفط تستهلك الولايات المتحدة 17.3 مليون برميل من النفط يومياً. يتم استخدام 63% منه للنقل، و 4.9% لتوليد الكهرباء، و 7.8% للتدفئة والطهي، و 24.3% للعمليات الصناعية.

7-5 الاحتمال والفرص

مثال 5

جد احتمال وقوع حدث.

جد احتمال اختيار 3 أقلام رصاص حمراء اللون بشكل عشوائي من صندوق به 5 أقلام رصاص حمراء و 3 أقلام زرقاء و 4 أقلام خضراء.

هناك $C(5, 3)$ طرق لاختيار 3 من 5 أقلام رصاص حمراء، و $C(12, 3)$ طرق لاختيار 3 أقلام رصاص من أصل 12.

$$P(3 \text{ أقلام رصاص حمراء}) = \frac{C(5,3)}{C(12,3)}$$

$$= \frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{12!}{9!3!}}$$

$$= \frac{12}{220} \text{ أو } \frac{1}{22}$$

مثال 6

جد فرص نجاح وفشل حدث ما.

جد فرص اختيار 3 أقلام رصاص حمراء اللون بشكل عشوائي من صندوق به 5 أقلام رصاص حمراء و 3 زرقاء و 4 خضراء.

$$P(3 \text{ أقلام رصاص حمراء}) = P(s) = \frac{1}{22}$$

$$P(3 \text{ أقلام رصاص ليست حمراء}) = P(f) = 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}$$

$$\frac{P(s)}{P(f)} = \frac{\frac{1}{22}}{\frac{21}{22}}$$

$$= \frac{1}{21} = 1:21$$

حقيبة تحتوي على 7 قطع نقد معدنية من فئة ربع درهم، و 4 قطع من فئة نصف درهم، و 5 قطع من فئة الدرهم. ويتم سحب ثلاث عملات بشكل عشوائي. فجد كل احتمال.

21. (3 قطع من فئة ربع درهم) $p = \frac{1}{16}$
22. (قطعتان من فئة ربع درهم وقطعة واحدة من فئة نصف درهم) $p = \frac{3}{20}$
23. (3 قطع من فئة نصف درهم) $p = \frac{1}{140}$
24. (قطعة واحدة من فئة نصف درهم وقطعتان من فئة الدرهم) $p = \frac{1}{14}$

راجع حقيبة القطع المستخدمة في التمارين 47-50. جد الفرص المتعلقة بوقوع كل حدث.

25. 3 قطع من فئة ربع درهم $\frac{1}{15}$
26. قطعتان من فئة ربع درهم وقطعة واحدة من فئة نصف درهم $\frac{3}{17}$
27. 3 قطع من فئة نصف درهم $\frac{1}{139}$
28. قطعة واحدة من فئة نصف درهم وقطعتان من فئة الدرهم $\frac{1}{13}$

7-6 احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة

مثال 5

تحتوي حقيبة على 3 من البلي الأحمر و 2 من الأبيض و 6 من الأزرق. ما احتمال سحب 2 من البلي الأحمر و 1 من الأزرق بالترتيب دون إعادتهم؟
بما أنه لم تتم إعادة البلي، فإن الأحداث هي أحداث غير مستقلة.

$$\begin{aligned} P(\text{أحمر}) \cdot P(\text{أحمر}) \cdot P(\text{أزرق}) &= P(\text{أحمر، أحمر، أزرق}) \\ &= \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{6}{9} \\ &= \frac{2}{55} = 3.6\% \text{ تقريبًا} \end{aligned}$$

29. البلي يحتوي صندوق على 3 من البلي الأبيض، و 4 من الأسود. ما احتمال سحب 2 من البلي الأسود و 1 من البلي الأبيض من صف دون إعادة أي منها؟ $\frac{6}{35}$

30. أوراق اللعب تم اختيار ورقتين بشكل عشوائي من مجموعة أوراق اللعب مع إعادتهما. ما احتمال النجاح في سحب ورقة الرقم ثلاثة ثم ورقة ملكة بالترتيب؟ $\frac{1}{169}$

31. بيتزا أوضح استطلاع للرأي أجري على مستوى الولايات المتحدة أن 72% من الأشخاص في البلد يحبون البيتزا. إذا تم اختيار 3 أشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون الثلاثة من محبي البيتزا؟ 37%

7-7 احتمالات الأحداث المنفصلة

مثال 6

عند رمي حجري نرد، ما احتمال أن يكون المجموع 5 أو الحصول على عددين متطابقين؟
هذه أحداث منفصلة لأن مجموع العددين المتطابقين يستحيل أن يساوي 5.

$$\begin{aligned} P(\text{المجموع 5}) + P(\text{العددان متطابقان}) &= P(\text{المجموع 5}) + P(\text{العددان متطابقان}) \\ &= \frac{4}{36} + \frac{6}{36} \\ &= \frac{5}{18} = 27.8\% \text{ تقريبًا} \end{aligned}$$

32. رمي حجر النرد عند رمي حجر نرد. فما احتمال الحصول على مجموع العددين 7 أو 11؟ $\frac{2}{9}$

33. أوراق اللعب تم سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب. جد احتمال سحب ورقة الرقم 10 أو ورقة ديمن. $\frac{4}{11}$

34. سباق حقيبة تحتوي على 40 تذكرة سباق مرقمة من 1 إلى 40.

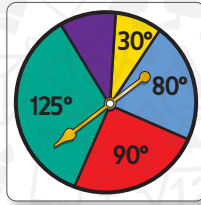
- a. ما احتمال أن تكون التذكرة المختارة عشوائيًا عددًا زوجيًا أو أقل من 5؟ $\frac{11}{20}$
- b. ما احتمال أن تكون التذكرة المختارة عشوائيًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟ $\frac{19}{40}$

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

حدد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أم غير مستقلة. ثم جسد الاحتمال.

12. مجموعة أوراق لعب بها 5 أوراق صفراء و 5 أوراق وردية و 5 أوراق برتقالية. تم اختيار ورقتين من المجموعة ثم إعادتهما. جسد P (الورقة الأولى وردية والثانية وردية).
13. يوجد في قبعة 6 من البلي الأخضر و 2 من الأحمر و 2 من البني و 4 من الكحلي و 2 من الأرجواني. اختار عدنان 2 كرة من القبعة دون إعادتهما. ما احتمال أن تكون البلية الأولى بنية والثانية ليست أرجوانية؟

استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. إذا توقف القرص الدوار عند خط، تتم إدارته مرة أخرى.



14. (يتوقف المؤشر على اللون الأرجواني) P
15. (يتوقف المؤشر على اللون الأحمر) P
16. (يتوقف المؤشر على اللون الأصفر) P

17. **كرة القدم** وفقًا لمعدل النجاح لفريق كرة القدم الأمريكية في الخطة الدفاعية، يجب على الفريق إسقاط الكرة وركلها 40% من الوقت، والتصويب في اتجاه المرمى 30% من الوقت وفقد الاستحواذ على الكرة 5% من الوقت، وتسجيل أهداف 25% من الوقت. صمّم نموذج محاكاة باستخدام برنامج مولد أعداد عشوائية. ثم اعرض النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

حدد ما إذا كانت الأحداث منفصلة أو غير منفصلة. اشرح استنتاجك.

18. شخص يملك سيارة وشاحنة
19. إلقاء زوج من النرد والحصول على مجموع 7 و 6 على وجه نرد واحد
20. ورقة لعب تكون البسوتي والإسباتي
21. **الصفوف الدراسية** حصل عامر في هذا الربع على درجة A في صفوفه الدراسية 45% من المرات. صمم نموذج محاكاة ونفذه باستخدام نموذج احتمال هندسي. ثم قدم النواتج باستخدام ملخصات عددية وبيانية مناسبة.

التحضير للاختبارات المعيارية



تنظيم البيانات

ربما تُعطى في بعض الأحيان مجموعة بيانات تحتاج إلى تحليلها لحل فقرات في الاختبار المعياري. استخدم هذا القسم للتدرب على تنظيم البيانات ومساعدتك في حل المسائل.

إستراتيجيات تنظيم البيانات

الخطوة 1

عند إعطائك نص مسألة يتضمن بيانات، فكّر فيما يلي:

- عمل قائمة بالبيانات.
- استخدام جدول لتنظيم البيانات.
- استخدام عرض البيانات (مثل تمثيل بياني بالأعمدة، رسم تخطيط فن، تمثيل بياني دائري، تمثيل بياني خطي، مخطط صندوق ذي عارضين، إلخ) لتنظيم البيانات.

الخطوة 2

تنظيم البيانات.

- أنشئ جدولاً أو قائمة أو عرض بيانات.
- إذا أمكن، فاكتب القيم الناقصة التي يمكن إيجادها بالحسابات الفورية.

الخطوة 3

تحليل البيانات لحل المسألة.

- أعد قراءة نص المسألة لتحديد الحل المطلوب.
- استخدم خصائص الهندسة والجبر للعمل مع البيانات المنظمة وحل المسألة.
- ارجع للتحقق من إجابتك إذا كان الوقت يسمح بهذا.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

من بين الطلاب المتحدثين بلغات أجنبية في مدرسة لميس، يتحدث 18 طالباً الإسبانية، و 14 طالباً الفرنسية، و 16 طالباً الألمانية. ويوجد 8 طلاب يتحدثون الإسبانية فقط، و 7 يتحدثون الألمانية فقط. و 3 يتحدثون الإسبانية والفرنسية و 2 يتحدثان الفرنسية والألمانية و 4 يتحدثون كل اللغات الثلاث. إذا تم اختيار طالب بشكل عشوائي، فما مدى احتمال أن يكون متحدثاً باللغة الإسبانية أو الألمانية وليس الفرنسية؟

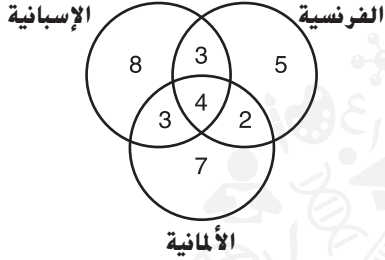
A $\frac{7}{12}$

B $\frac{9}{16}$

C $\frac{2}{5}$

D $\frac{5}{18}$

اقرأ المسألة بعناية. يصعب تحليل البيانات في صورتها المعطاة. استخدم مخطط فن لتنظيم البيانات وحل المسألة.



الخطوة 1 ارسم ثلاث دوائر كل منها تمثل لغة.

الخطوة 2 اكتب البيانات المعطاة في نص المسألة.

الخطوة 3 أكمل القيم الناقصة. تعرف مثلاً أن 18 طالبًا يتحدثون الإسبانية و 14 طالبًا يتحدثون الفرنسية.

$$18 - 8 - 3 - 4 = 3 \text{ (الإسبانية والفرنسية)}$$

$$14 - 3 - 4 - 2 = 5 \text{ (الفرنسية فقط)}$$

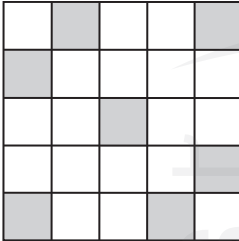
الخطوة 4 جسد حل المسألة. مطلوب منك إيجاد احتمال أن يتم عشوائيًا تحديد طالب يتحدث الإسبانية أو الألمانية وليس الفرنسية. من مخطط فن، يمكنك مشاهدة أن إجمالي عدد الطلاب 32 طالبًا. من بينهم $8 + 3 + 7$ أو 18 طالبًا يتحدثون الإسبانية أو الألمانية وليس الفرنسية. إذًا، الإجابة الصحيحة هي B. $\frac{9}{16}$ أو $\frac{18}{32}$.

الخطوة 4

التمارين

3. جسد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة.

- A 0.22 C 0.28
B 0.25 D 0.32



4. يوجد 10 طلاب من الصف الثاني و 8 من الصف قبل الأخير و 9 من الصف الأخير في اتحاد الطلاب. تم تكليف كل عضو بالمساعدة في التخطيط لنشاط مدرسي واحد خلال العام. هناك 4 طلاب من الصف الثاني يعملون على يوم النشاط الميداني و 6 يعملون على تجميع الطلاب التشجيعي. ومن بين طلاب الصف قبل الأخير، يعمل 2 من الطلاب على يوم النشاط الميداني و 5 على حفل التخرج. وهناك 2 من طلاب الصف الأخير يعملون على تجميع الطلاب التشجيعي. إذا كان إجمالي الطلاب الذين يساعدون في التخطيط لكل نشاط 9 طلاب، فما احتمال أن يكون عضو الاتحاد المختار عشوائيًا طالبًا من الصف قبل الأخير أو يعمل على يوم النشاط الميداني؟

- F $\frac{4}{21}$ H $\frac{5}{17}$
G $\frac{5}{21}$ J $\frac{17}{35}$

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم رتب البيانات لحل المسألة.

1 لدى لمياء مربعات الحروف A و H و M و T في حقيبة. إذا اختارت تبديل هذه المربعات بشكل عشوائي، فما مدى احتمال أن تكون الأحرف هجاء الكلمة "MATH"؟

- A $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{50}$
B $\frac{1}{12}$ D $\frac{1}{24}$

2 يوضح الجدول التالي عدد طلاب الصف الأول والثاني والصف قبل الأخير والصف الأخير المشاركين في كرة السلة وكرة القدم والكرة الطائرة. ما احتمال أن يكون طالبًا مختارًا بشكل عشوائي من الصف قبل الأخير أو يلعب الكرة الطائرة؟

الرياضة	الأول	الثاني	قبل الأخير	الأخير
كرة السلة	7	6	5	6
كرة القدم	6	4	8	7
الكرة الطائرة	9	2	4	6

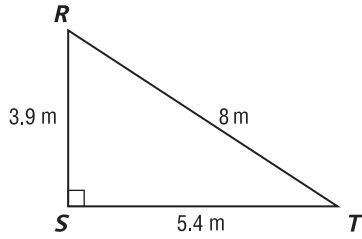
- F $\frac{4}{21}$ H $\frac{5}{17}$
G $\frac{5}{21}$ J $\frac{17}{35}$

الاختبار من متعدد

3. ما عدد المرات المتوقع حصول فوزية فيها على عددين متطابقين عند إلقاء حجري نرد في 90 محاولة؟ (يحدث العددان المتطابقان عندما يظهر نفس العدد على حجري النرد عند إلقائهما في محاولة.) **J**

- F 6
- G 9
- H 10
- J 15

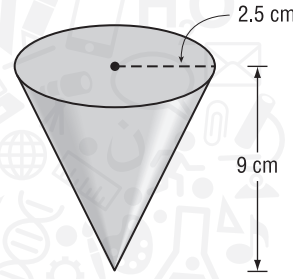
4. أي مما يلي يوضح بشكل صحيح العلاقة بين قياسات الزوايا للمثلث RST ؟ **J**



- F $m\angle S < m\angle R < m\angle T$
- G $m\angle T < m\angle S < m\angle R$
- H $m\angle R < m\angle S < m\angle T$
- J $m\angle T < m\angle R < m\angle S$

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. ما مقدار الورق اللازم لصناعة كوب الشرب الموضح أدناه؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. **F**



- F 73.4 cm²
- G 70.7 cm²
- H 67.9 cm²
- J 58.8 cm²

2. أي من الخصائص التالية للأعداد الحقيقية تبرر العبارة أدناه؟ **A**

$$\text{إذا كان } 3x - 2 = 7x + 12 \text{ فإن}$$

$$3x - 2 + 2 = 7x + 12 + 2$$

- A خاصية الجمع في المعادلة
- B خاصية الانعكاس في المعادلة
- C خاصية الطرح في المعادلة
- D خاصية التماثل في المعادلة

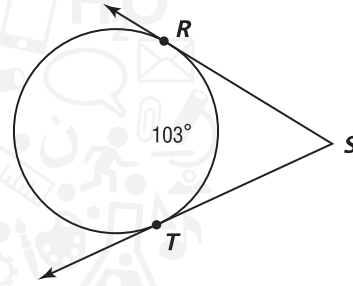
نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 3 ما مدى احتمال الحصول على عددين متطابقين عند إلقاء حجري نرد؟ اضرب الاحتمال في عدد المحاولات.

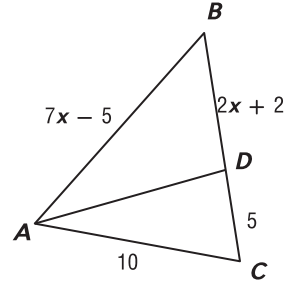
الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

5. إجابة شبكية ما قياس $m\angle S$ في الشكل أدناه؟ وضح إجابتك بالدرجات. **77**

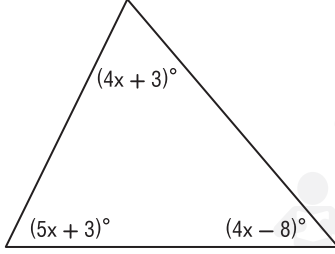


6. إجابة شبكية القطعة المستقيمة AD تنصف $\angle CAB$ في المثلث أدناه. ما قيمة x ? **3**



7. إجابة شبكية يسند فارس سلماً طوله 6 m على جانب منزله لينظف المزارب. وتبعد قاعدة السلم عن الجدار 1.5 m. ما الارتفاع الذي يصل إليه السلم على جانب المنزل؟ وضح إجابتك بالأمتار. قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **5.8 m**

8. جد x في المثلث أدناه. **14**



الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

9. حقيبة تحتوي على 3 شرائح حمراء و 5 شرائح خضراء و 2 شريحة صفراء و 4 شرائح بنية و 6 شرائح قرنفلية. بعد اختيار شريحة بشكل عشوائي، لوحظ لونها وعادت الشريحة إلى الحقيبة.

a. بفرض إجراء هذه التجربة مرتين. فهل هذه الأحداث مستقلة أم غير مستقلة؟ فسّر ذلك. **انظر الهامش.**

b. ما احتمال أن تكون الشريحتان قرنفليتي اللون؟ **0.09**

c. ما احتمال أن تكون الشريحة الأولى خضراء والثانية بنية؟ **0.05**

محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program