الوحدة 7

المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

السابق

قمت بحل التناسبات.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- استخدام نظرية فيثاغورس.
- استخدام خصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية.
- استخدام حساب المثلثات لإيجاد مقاييس المثلثات المفقودة.

لماذا؟

يمكن استخدام خصائص المثلثات في التخطيط والتحضير لفعاليات خاصة، بما في ذلك تحديد ارتفاع الديكورات.

الاستعداد للوحدة

خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة "التدريب السريع" التالية.
يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

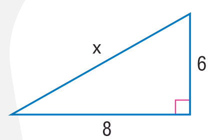
تدريب سريع

بسّـط.

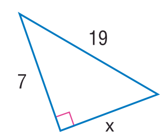
1. $\sqrt{112}$
2. $\dfrac{\sqrt{24}}{2\sqrt{3}}$
3. $\sqrt{15 \cdot 20}$
4. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$
5. $\sqrt{\dfrac{45}{80}}$
6. $\dfrac{8\sqrt{2}}{6-3\sqrt{8}}$

جـــد x.

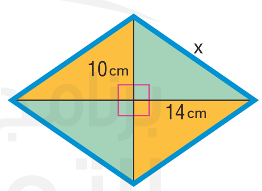
7.



8.



9. **الأعلام** تريد فاطمة تصميم عَلَم من 4 مثلثات متطابقة كما هو موضح أدناه. فما مقدار القِطَع الزرقاء التي ستحتاجها لكل جانب؟



وضح بيانيًا القطعة المستقيمة باستخدام نقاط النهاية المعطاة.

10. $G(3, -4)$ و $H(3, 4)$.
11. $E(-3, 5)$ و $F(4, -3)$

12. **الجامعة** يزور كمال إحدى الجامعات. لاحظ من خريطته أن العديد من المباني ذات الأهمية تقع حول منطقة عشبية يسميها الطلاب "المنطقة رباعية الأضلاع". إذا تم تمثيل المكتبة على الخريطة بواسطة $L(6, 8)$ والكافيتريا بواسطة $C(0, 0)$، فمثّل القطعة المستقيمة التي تمثّل المسار الأقصر بين المبنيين بيانيًا.

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّـط. $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$.

اضرب في $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

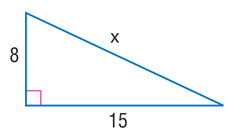
$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

بسّط.

$$= \frac{6\sqrt{3}}{3} \text{ أو } 2\sqrt{3}$$

مثال 2

جـــد x.

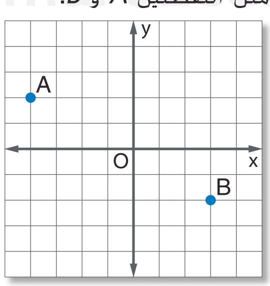


نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
$a = 8$ و $b = 15$	$8^2 + 15^2 = x^2$
بسّـط.	$289 = x^2$
خُذ الجذر التربيعي الموجب من كل طرف.	$\sqrt{289} = \sqrt{x^2}$
بسّـط.	$17 = x$

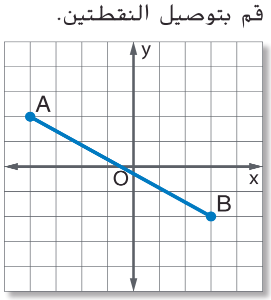
مثال 3

مثّل بيانيًا القطعة المستقيمة باستخدام نقاط النهاية $A(-4, 2)$ و $B(3, -2)$.

مَثِّل النقطتين A و B.



قم بتوصيل النقطتين.



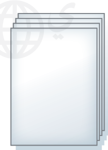
البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

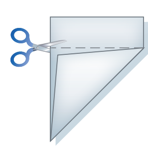
المطويات منظّم الدراسة

الزوايا القائمة وحساب المثلثات اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك على هذه الوحدة حول الزوايا القائمة وحساب المثلثات. ابدأ بثلاث صفحات من ورق الدفتر وصفحة واحدة من ورق سميك.

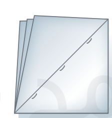
1 **ضع** ورقة الدفتر على الورقة السميكة.



2 **اطوِ** الورقة قُطريًا لتشكيل مثلث، ثم اقطع الزيادات.



3 **افتح** الورقة ودبّس الطية الداخلية لتشكيل كتيب.



4 **قم** بتسمية كل صفحة برقم وعنوان درس.

المفردات الجديدة

الوسط الهندسي geometric mean

ثلاثية فيثاغورس Pythagorean triple

حساب المثلثات trigonometry

النسبة المثلثية trigonometric ratio

جيب الزاوية sine

جيب التمام cosine

ظل الزاوية tangent

زاوية الارتفاع angle of elevation

زاوية الانخفاض angle of depression

قانون الجيب Law of Sines

قانون جيب التمام Law of Cosines

متجه vector

مقدار magnitude

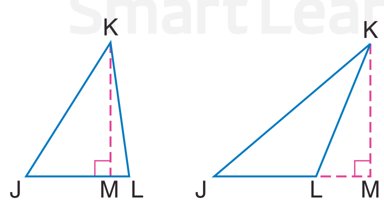
ناتج resultant

صورة مركبة component form

مراجعة المصطلحات

الارتفاع جزء ممتد من قمة رأس المثلث بشكل عمودي مع الخط الذي يحتوي على الجانب الآخر

نظرية فيثاغورس إذا كان a و b هما قياسي ساقي مثلث قائم الزاوية وكانت c قياس الوتر، فإن $a^2+b^2=c^2$.



$\overline{KM}$ هو ارتفاع $\triangle JKL$.

الدرس 7-1 الوسط الهندسي

السابق
استخدام علاقات التناسب بين منصفات الزوايا المتناظرة وارتفاعات ووسائط المثلثات المتشابهة.

الحالي
1 إيجاد الوسط الهندسي بين عددين.
2 حلّ مسائل تتضمن علاقات بين أجزاء مثلثٍ قائم الزاوية وبين الارتفاع المنشأ من وتره.

لماذا؟
تصوير العناصر الطويلة أو العريضة للغاية يمكن أن يمثل تحديًا. فمن الممكن أن يكون تضمين عنصر بالكامل في لقطة واحدة دون تشويه الصورة أمرًا صعبًا. إذا تم ضبط الكاميرا لزاوية عرض رأسية بمقدار 90° وكنت تعرف ارتفاع العنصر المراد تصويره، فبإمكانك استخدام وسط هندسي للمسافة من قمة العنصر إلى مستوى الكاميرا والمسافة من أسفل العنصر إلى مستوى الكاميرا.

مفردات جديدة
وسط هندسي
geometric mean

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 الوسط الهندسي عندما تكون أوساط التناسب هي العدد ذاته، فإن هذا العدد يسمى الوسط الهندسي للطرفين. **الوسط الهندسي** بين عددين هو الجذر التربيعي الموجب لناتج ضربهما.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

طرف ← a ، وسط ← x ، وسط ← x ، طرف ← b

المفهوم الأساسي الوسط الهندسي للعددين a و b

الشرح	الوسط الهندسي لعددين موجبين a هو العدد x مثل $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. إذًا، $x^2 = ba$ و $x = \sqrt{ab}$
مثال	الوسط الهندسي لكل من $a = 4, b = 9$ هو 6. لأن $\sqrt{9 \times 4} = 6$

مثال 1 الوسط الهندسي

جـد الوسط الهندسي بين 8 و 10.

تحديد الوسط الهندسي	$x = \sqrt{ab}$
$a = 8 = 10$	$= \sqrt{8 \cdot 10}$
عامل.	$= \sqrt{(4 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 5)}$
خاصية التجميع	$= \sqrt{16 \cdot 5}$
بسّط.	$= 4\sqrt{5}$

الوسط الهندسي بين 8 و 10 هو $4\sqrt{5}$ أو حوالي 9.8.

تمرين موجّه

جـد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

1A. 5 و45   1B. 12 و15

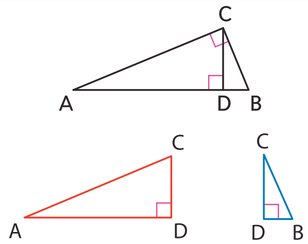
2 الأوساط الهندسية في المثلثات قائمة الزاوية في المثلث قائم الزاوية، ستجد أن الارتفاع المرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى الوتر يشكّل مثلثين إضافيين قائمي الزاوية. وتتشارك هذه المثلثات الثلاثة قائمة الزاوية في علاقة خاصة.

مراجعة المصطلحات

الارتفاع (للمثلث)
قطعة مستقيمة ممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم المحتوي على الضلع المقابل، كما أنها عمودية على المستقيم المحتوي على هذا الضلع

النظرية 7.1

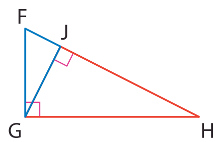
إذا رسمنا ارتفاعًا يمتدّ إلى وتر مثلث قائم الزاوية، فسيكون المثلثان المتشكلان مشابهين للمثلث الأصلي ولبعضهما البعض.



المثال إذا كان $\overline{CD}$ هو الارتفاع إلى الوتر $\overline{AB}$ الخاص بالمثلث قائم الزاوية $\triangle ABC$، فإن $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ و $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ و $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

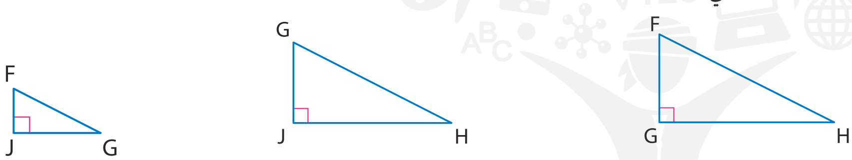
سوف تثبت النظرية 7.1 في التمرين 39.

مثال 2 تحديد المثلثات قائمة الزاوية المتشابهة



اكتب عبارة تَمَاثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة قائمة الزاوية المتماثلة في الشكل.

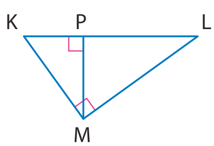
اقسم المثلث إلى مثلثين بطول الارتفاع. بعد ذلك، ارسم المثلثات الثلاثة مع تعديل المثلثين الأصغر بحيث تكون زواياها وأضلاعها المتناظرة في الأوضاع ذاتها مثل المثلث الأصلي.



إذًا، وفقًا للنظرية 7.1، فإن $\triangle FJG \sim \triangle GJH \sim \triangle FGH$.

تمرين موجّه

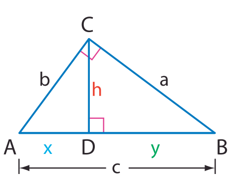
2A.



2B.

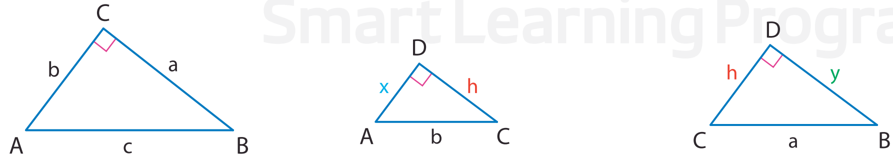
نصيحة دراسية

تعديل المثلثات
لتعديل المثلثات قائمة الزاوية في المثال 2، قم أولاً بمطابقة الزوايا اليمنى. ثم طابق الأضلاع الأقصر.



من النظرية 7.1، علمت أن ارتفاع $\overline{CD}$ المرسوم إلى وتر المثلث قائم الزاوية ABC يشكل ثلاثة مثلثات متشابهة: $\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$.

من خلال تحديد المضلعات المتشابهة، يمكنك كتابة التناسبات التالية لمقارنة أطوال أضلاع هذه المثلثات.

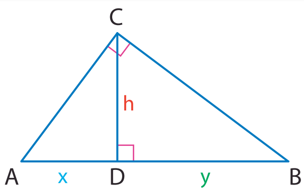


$$\frac{\text{الضلع الأقصر}}{\text{الساق الأطول}} = \frac{b}{a} = \frac{x}{h} = \frac{h}{y} \qquad \frac{\text{وتر المثلث}}{\text{الساق الأقصر}} = \frac{c}{b} = \frac{b}{x} = \frac{a}{h} \qquad \frac{\text{وتر المثلث}}{\text{الساق الأطول}} = \boxed{\frac{c}{a} = \frac{b}{h} = \frac{a}{y}}$$

لاحظ أن العلاقات المحاطة بدائرة تتضمن أوساطًا هندسية. وهذا يوصلنا إلى النظريات الموجودة أعلى الصفحة التالية.

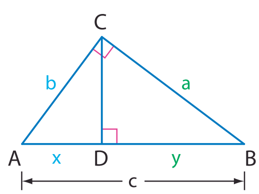
النظريات نظريات الوسط الهندسي للمثلثات قائمة الزاوية

7.2 نظرية الوسط الهندسي (الارتفاع) يَفصل الارتفاعُ الممتد إلى وتر المثلث قائم الزاوية الوتر إلى قطعتين مستقيمتين. ويساوي طول هذا الارتفاع الوسط الهندسي بين أطوال هذين الجزأين.



المثال إذا كان $\overline{CD}$ يمثل الارتفاع للوتر $\overline{AB}$ بالمثلث قائم الزاوية $\triangle ABC$، فإن $h = \sqrt{xy}$ أو $\frac{x}{h} = \frac{h}{y}$.

7.3 نظرية الوسط الهندسي (الساق) يَفصل الارتفاع الممتد إلى وتر المثلث قائم الزاوية الوتر إلى قطعتين مستقيمتين. وطول أحد ساقي هذا المثلث يُمثل الوسط الهندسي بين طول الوتر والقطعة المستقيمة الموجودة على الوتر المجاور لتلك الساق.

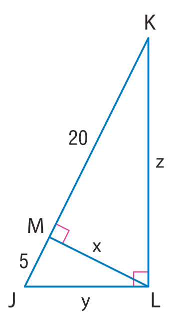


المثال إذا كان $\overline{CD}$ هو الارتفاع للوتر $\overline{AB}$ بالمثلث قائم الزاوية $\triangle ABC$ فإن $\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$ أو $b = \sqrt{xc}$ $\frac{c}{a} = \frac{a}{y}$ $a = \sqrt{yc}$

سوف تقوم بإثبات نظريتي 7.2 و1.3 من خلال التمرينين 40 و 41 على الترتيب.

مثال 3 استخدام الأوساط الهندسية في المثلثات قائمة الزاوية

جـد x و y و z.



بما أن x هو مقدار الارتفاع الممتد إلى وتر المثلث قائم الزاوية $\triangle JKL$، فإن x سيكون الوسط الهندسي لأطوال القطعتين التي يتألف منهما الوتر، JM .

$x = \sqrt{JM \times MK}$ نظرية الوسط الهندسي (الارتفاع)

$= \sqrt{5 \times 20}$ التعويض

$= \sqrt{100} = 10$ بسّط.

بما أن y يساوي طول الساق $\overline{JL}$، فإن y يعتبر الوسط الهندسي لـ $\overline{JM}$ ، وهما طول القطعة المجاورة لهذه الساق وطول الوتر JK.

$y = \sqrt{JM \cdot JK}$ نظرية الوسط الهندسي (الساق)

$= \sqrt{5 \cdot (20 + 5)}$ التعويض

$= \sqrt{125}$ أو حوالي 11.2 استخدم الآلة الحاسبة للتبسّيط.

بما أن z يساوي طول الساق $\overline{KL}$، فإن z هي الوسط الهندسي لـ $\overline{MK}$، وهما طول القطعة المجاورة لـ $\overline{KL}$ وطول الوتر JK.

$z = \sqrt{MK \cdot JK}$ نظرية الوسط الهندسي (الساق)

$= \sqrt{20 \cdot (20 + 5)}$ التعويض

$= \sqrt{500}$ أو حوالي 22.4 استخدم الآلة الحاسبة للتبسّيط

نصيحة دراسية

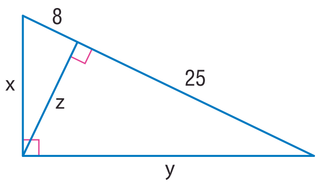
استخدام التناسب

في المثال 3، يمكن أيضًا إيجاد قيمة x بإيجاد حل للتناسب $\frac{5}{x} = \frac{x}{20}$

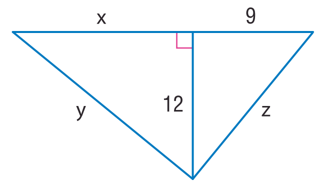
تمرين موجّه

جـــد x و y و z.

3A.



3B.



يمكنك استخدام الوسط الهندسي لقياس الارتفاع مباشرة.

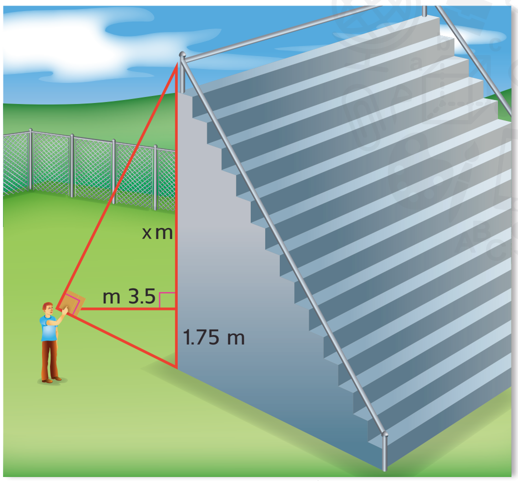
مهنة من الحياة اليومية

منظِّم الفعاليات

يقوم منظمو الفعاليات باختيار موقع محدد وتحضير الأطعمة ووضع خطة للعروض الترفيهية. ويقومون أيضًا بتنسيق خدمات مثل النقل والتصوير.

ومعظم المهارات المطلوبة لتنظيم الفعاليات غالبًا ما يتم اكتسابها من الخبرة العملية.

مثال 4 من الحياة اليومية القياس غير المباشر



ملاحظة: غير مرسوم وفقًا لمقياس رسم.

الدعاية والإعلان يريد خالد لوحة إعلانية لتعليقها يريد خالد تعليق لوحة إعلانية على جانب مدرّج المشجعين في ملعب البيسبول التابع لمدرسته الثانوية، بحيث تمتدّ اللوحة من أعلى المدرّج لتصل إلى مستوى سطح الأرض.

و لكي يعرف ارتفاع اللوحة، قام خالد باستخدام لوح مقوّى على شكل مربع لمحاذاة أعلى المدرّج و أسفله، ثم قام بقياس بعده عن المدرّج و البعد بين مستوى سطح الأرض و مستوى نظره. جـــد ارتفاع المدرّج؟

المسافة من خالد إلى المُدَرّج هي مسافة الارتفاع إلى وتر المثلث قائم الزاوية. ويساوي طول هذا الارتفاع الوسط الهندسي لهاتين القطعتين اللتين يتألف منهما الوتر. يبلغ قياس القطعة الأقصر 1.75 m. لنفترض أن القياس المجهول هو x بالمترات.

$3.5 = \sqrt{1.75 \cdot x}$ نظرية الوسط الهندسي (الارتفاع)

$2.25 = 1.75x$ قم بتربيع كل طرف.

$x = 7$ اقسِم كل طرف على 1.75.

ارتفاع المُدَرّج هو إجمالي طول الوتر، 1.75 + 7، أو حوالي 9 m.

تمرين موجّه

4. **الرياضة** يحتاج نادٍ ترفيهي اجتماعي تقدير تكلفة تركيب جدار تسلق صخور من خلال تقدير ارتفاع الجدار. لذا، حملتْ خديجة كتابًا أمام عينيها بحيث يتحاذى الجزآن العلوي والسفلي من الجدار مع الحافة السفلية وجزء التجليد بالغلاف. فإذا كان مستوى عينيها على ارتفاع 1.6 m أعلى الأرض وكانت تقف على بُعد 3 m من الجدار، فما مقدار ارتفاع الجدار؟ ارسم رسمًا تخطيطيًا واشرح استنتاجك.

التحقق من فهمك

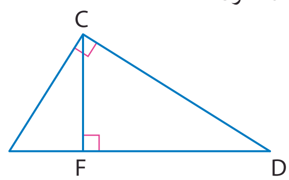
مثال 1

جــد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

.1 5 و20 **.2** 36 و 4 **.3** 40 و15

مثال 2

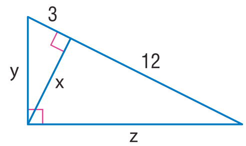
.4 اكتب عبارة تَمَاثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة المتماثلة في الشكل.



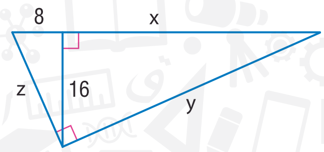
مثال 3

جــد x و y و z.

5.

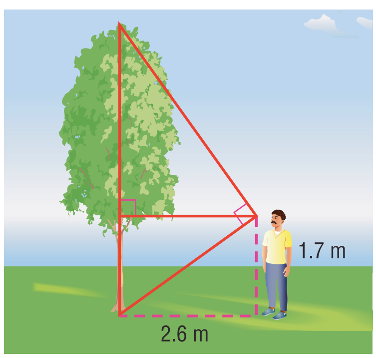


6.



مثال 4

.7 **استخدام النماذج** يزور وليد منتزهاً مع أسرته. ويريد تقدير ارتفاع احدى الشجرات. لذا وقف وليد بحيث يكون خط رؤيته لأعلى الشجرة وأسفلها مشكلاً زاوية قائمة كما هو موضح في الرسم التخطيطي. فما مقدار طول الشجرة تقريبًا؟



ملاحظة: غير مرسوم وفقاً لمقياس رسم.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

جــد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

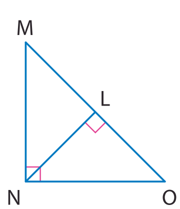
.8 81 و 4 **9** 25 و 16 **.10** 20 و 25

.11 36 و 24 **.12** 12 و 2.4 **.13** 18 و 1.5

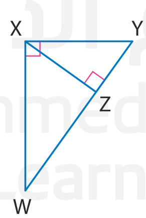
مثال 2

اكتب عبارة تَمَاثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة المتماثلة في الشكل.

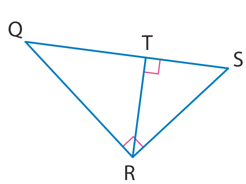
14.



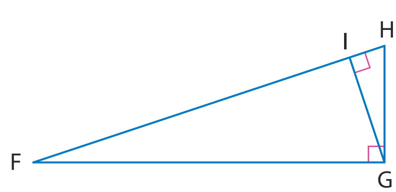
15.



16.

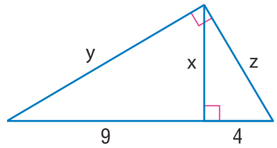


17.

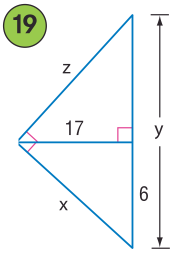


مثال 3 **جـــد x و y و z.**

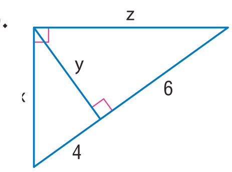
18.



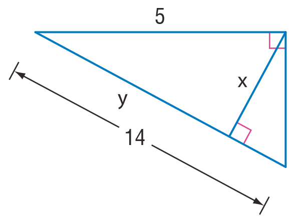
19.



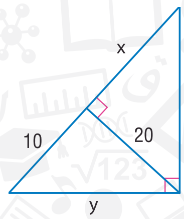
20.



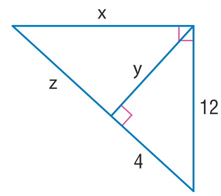
21.



22.

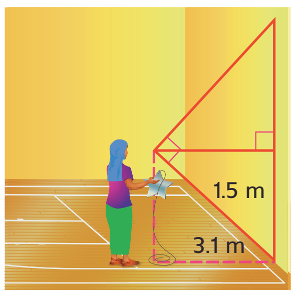


23.



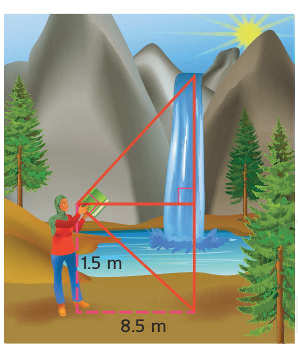
مثال 4

24. **استخدام النماذج** تعلّق خديجة نجومًا فضية في سقف صالة الألعاب الرياضية استعدادًا للاحتفال. وأرادت أن تكون أطراف الخيوط المربوط بها النجوم بارتفاع 2.2 m من الأرض. استخدِم الرسم التخطيطي لتحديد مقدار الطول اللازم تحديده للخيوط.



ملاحظة: غير مرسوم وفقًا لمقياس رسم.

25. **استخدام النماذج** تَستخدم أماني كتابًا لملاحظة مدى ارتفاع الشلال. ومستوى بصرها على ارتفاع 1.5 m من الأرض وأن المسافة الأفقية هي 8.5 m من الشلال. لذا جـــد ارتفاع الشلال إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.



ملاحظة: غير مرسوم وفقًا لمقياس رسم.

B **جـــد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.**

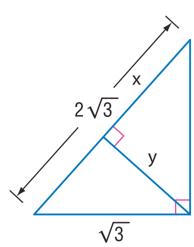
26. $\frac{1}{5}$ و 60

27. $\frac{3\sqrt{2}}{7}$ و $\frac{5\sqrt{2}}{7}$

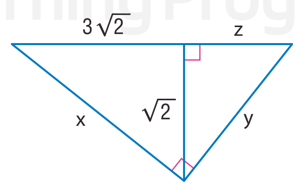
28. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ و $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

جـــد x و y و z.

29.



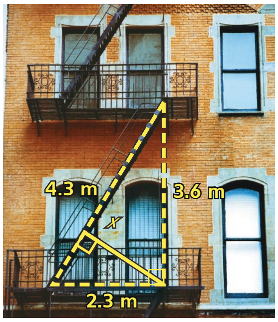
30.



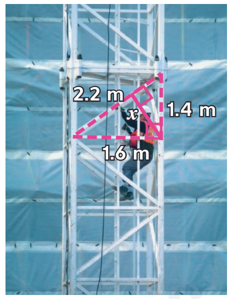
31. **الجبر** الوسط الهندسي لعدد ما وأربعة أضعاف العدد هو 22. فما العدد؟ 11

استخدم المثلثات المتشابهة لإيجاد قيمة x.

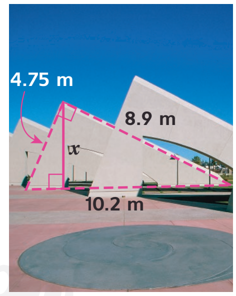
32.



33.

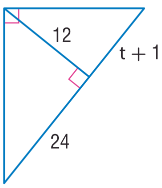


34.

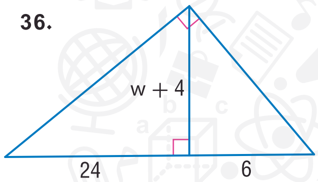


الجبر **جـد قيمة المتغير.**

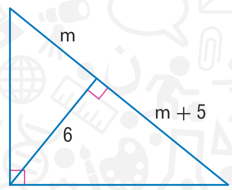
35.



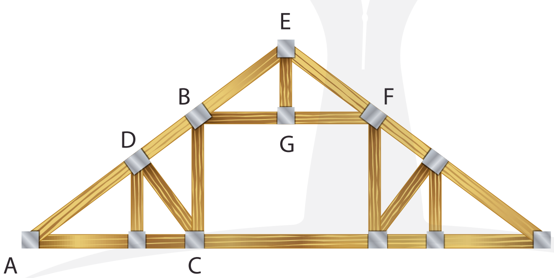
36.



37.



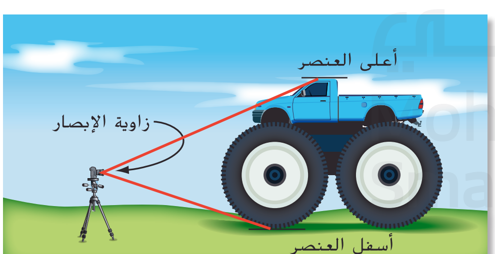
.38 **أعمال البناء** جمالون الغرفة العلوية عبارة عن تصميم دعامي يوفر الدعم لهذه الغرفة ويوفر مساحة خالية يمكن استخدامها كمنطقة معيشة. في الرسم التخطيطي، يمثّل $\triangle BCA$ و$\triangle EGB$ مثلثين بزاوية قائمة، والمثلث $\triangle BEF$ متساوي الساقين، ويمثل $\overline{CD}$ الارتفاع في $\triangle ABC$، ويُمثل $\overline{EG}$ مقدار الارتفاع في $\triangle BEF$. إذا كان طول $DB = 1.5$ m، $DC = 1.9$ m، $BF = 3.3$ m، $EG = 1.4$ m؟ ما هو الطول التقريبي للضلع AE ؟



بناء فرضيات **اكتب إثباتًا لكل نظرية.**

.39 النظرية 7.1 **.40** النظرية 7.2 **.41** النظرية 7.3

.42 **الشاحنات** في فن التصوير، تعرّف زاوية الرؤية بأنها الزاوية المحصورة بين كل من أعلى العنصر و الكاميرا و أسفل العنصر كما هو موضح بالشكل المجاور. تريد أمل التقاط صورة لشاحنة عملاقة يبلغ ارتفاعها 4.7 m . لذا وضعت كاميرتها على الحامل الذي يرتفع عن مستوى سطح الأرض بمقدار 1.5 m. ثم قامت بضبط زاوية الرؤية الرأسية للكاميرا على زاوية مقدارها 90 درجة

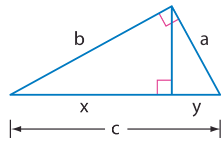


a. ارسم رسمًا تخطيطيًّا لهذه الحالة.

b. ما مقدار البُعد عن الشاحنة الواجب على أمل اتخاذه لتتمكن من احتواء ارتفاع الشاحنة بالكامل في لقطتها؟

43 **التمويل** يُمثل متوسطُ معدل العائد على استثمار ما على مدى عامين الوسط الهندسي للعائد السنوي لعامين. إذا بلغت عائدات الاستثمار 12% في سنة واحدة و7% في السنة التالية، فما نسبة متوسط معدل العائد على هذا الاستثمار على مدى فترة العامين؟

C **44. البرهان** اشتق نظرية فيثاغورس باستخدام الشكل الموضح على اليسار ونظرية الوسط الهندسي (الساق).



حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *دائمًا* أم *أحيانًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

45. الوسط الهندسي لأعداد صحيحة موجبة ومتتالية هو وسط العددين.

46. الوسط الهندسي لمربعين كاملين هو عدد صحيح موجب.

47. الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين هو عدد صحيح آخر.

48. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف الوسط الهندسي.

a. **جدوليًا** انسخ وأكمل الجدول المحتوى على خمسة أزواج مرتبة (x, y) مثل $\sqrt{xy} = 8$

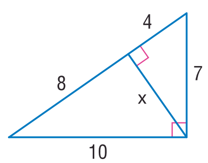
x	y	$\sqrt{xy}$
		8
		8
		8
		8
		8

b. **بيانيًا** مَثّل بيانيًا الأزواج المرتبة من الجدول في مخطط انتشار.

c. **لفظيًا** خمّن نوع التمثيل البياني الذي سيتم تشكيله في حالة توصيل النقاط من مخطط الانتشار. هل تعتقد أن التمثيل البياني لأي مجموعة أزواج مرتبة ناتجة في الوسط الهندسي ذاته سيكون له الشكل العام ذاته؟ اشرح استنتاجك.

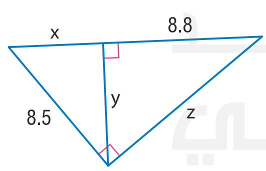
مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

49. تحليل الخطأ يحاول كل من إياد وعائشة إيجاد قيمة x في المثلث الموضح. فهل أيٌ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



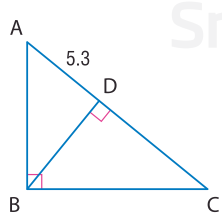
إياد	عائشة
$\frac{4}{x} = \frac{x}{7}$	$\frac{4}{x} = \frac{x}{10}$
$x \approx 5.3$	$x \approx 6.3$

50. تحدٍ راجع الشكل الموجود على اليمين. جد x و y و z.



51. مسألة غير محددة الإجابة جــد زوجين من أعداد كلية بوسط هندسي يكون أيضًا عددًا كليًا. ما الحالة الواجب استيفاؤها للحصول على وسط هندسي يتألف من عدد كلي ناتج عن زوج من الأعداد؟

52. التبرير راجع الشكل الموجود على اليمين. يقع ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ على بُعد 6.4 وحدات من النقطة D. جــد BC.



53. الكتابة في الرياضيات قارن وبيّن الفرق بين كل من الوسط الحسابي والهندسي لعددين. متى سيتساوى الوسطان؟ علل استنتاجك.

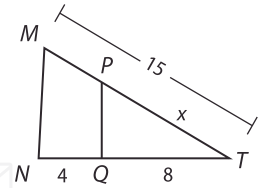
تمرين على الاختبار المعياري

54. ما الوسط الهندسي للعددين 8 و22 في أبسط صورة؟

A $4\sqrt{11}$ *C* $16\sqrt{11}$

B 15 *D* 176

55. إجابة مختصرة إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ فاستخدم التناسب لإيجاد قيمة **x**. اكتب الحل هنا.

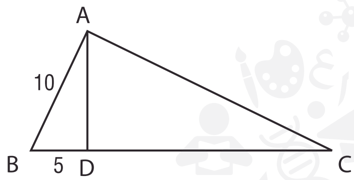


56. **الجبر** ما حلول المعادلة التربيعية $x^2 - 20 = 8x$؟

F 2، 10 **H** −1، 20

G 20، 1 **J** −2، 10

57. **SAT/ACT** في الشكل، تكون $\overline{AD}$ عمودية على $\overline{BC}$ وتكون $\overline{AB}$ عمودية على $\overline{AC}$. فما هو CB؟



A $5\sqrt{2}$

B $5\sqrt{3}$

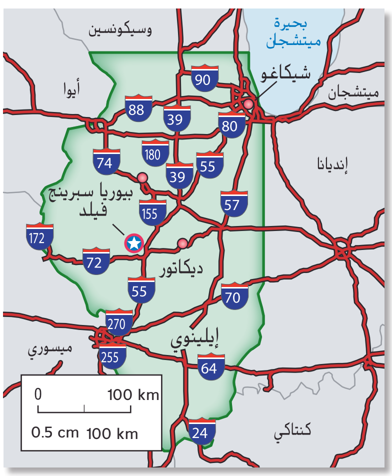
C 20

D 25

E 75

مراجعة شاملة

58. **الخرائط** استخدم الخريطة لتقدير المدة التي سيتم استغراقها للقيادة من شيكاغو إلى سبرينج فيلد إذا كان متوسط سرعة القيادة 65 km/h.



ارسم الشكل الأصلي والصورة المغيرة الأبعاد. ثم تحقق من أن تغيير الأبعاد هو تحويل تشابه

59. A(−1 ,3), B(7 ,9), C(3, −2); D(−1 ,1), E(3 ,3), F(0 ,1)

60. G(−4, −4), H(−2 ,1), J(2, −1); K(−3, −2), L(0 ,1)

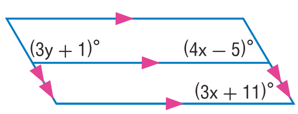
61. M(7, −4), N(5, −4), P(7, −1); Q(2, −8), R(6, −8), S(2, −2)

تعلمُ قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم. حدد شكل المضلع.

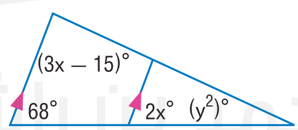
62. 108 **63.** 135

جـــد x و y في كل شكل.

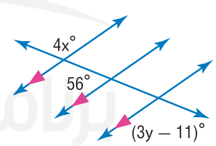
64.



65.

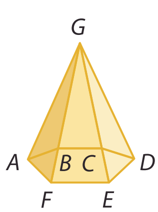


66.



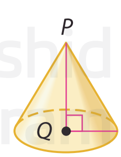
حدّد كل مجسّم. وسَمِّ القواعد والأوجه والحواف والرؤوس.

67.



68.

69.



مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير إلى أبسط صورة بإنطاق المقام.

70. $\frac{2}{\sqrt{2}}$ **71.** $\frac{16}{\sqrt{3}}$ **72.** $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$ **73.** $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ **74.** $\frac{21}{\sqrt{3}}$

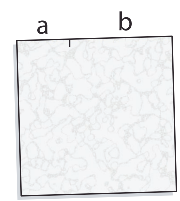
7-2 مختبر الهندسة
الإثباتات غير الكلامية

تعلمّتَ أن نظرية فيثاغورس تربط بين مقاييس الساقين والوتر في مثلث قائم الزاوية. يمكنك إثبات نظرية فيثاغورس باستخدام الرسوم التخطيطية ودون استخدام كلمات.

النشاط

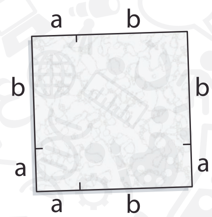
أثبت نظرية فيثاغورس باستخدام الورق والعمليات الجبرية.

الخطوة 1



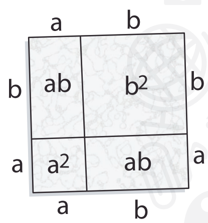
على قطعة واحدة من ورق استشفاف. اكتب a وb على أحد الجوانب كما هو موضح أعلاه.

الخطوة 2



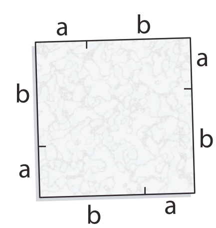
انسخ هذه القياسات على كل من الجوانب الأخرى.

الخطوة 3



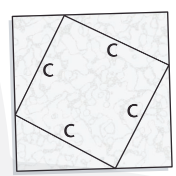
اطوِ الورقة إلى أربعة أقسام مع تسمية المنطقة الخاصة بكل جزء.

الخطوة 4



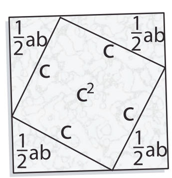
على قطعة أخرى من ورق الاستشفاف. اكتب a وb على كل جانب كما هو موضح أعلاه.

الخطوة 5

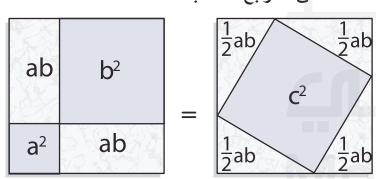


وصّل العلامات باستخدام مسطرة. افترض أن c يُمثل طول كل وتر من الأوتار.

الخطوة 6

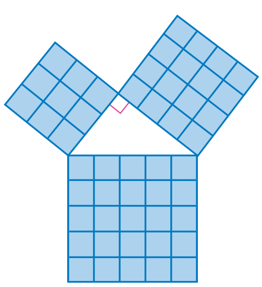


اكتب على مساحة كل مثلث $\frac{1}{2}ab$. وعلى مساحة كل مربع اكتب c^2.



الخطوة 7 ضع المربعات بجانب بعضها البعض مع تلوين المناطق المتناظرة التي لها المساحة ذاتها. على سبيل المثال، $ab = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab$. توضحُ الأجزاء غير المظللة أن $a^2 + b^2 = c^2$.

تحليل النتائج



1. استخدم مسطرة لقياس a وb وc. هل هذه المقاييس تؤكد على أن $a^2 + b^2 = c^2$؟ **نعم**
2. كرر النشاط بقيم a وb مختلفة. ما الذي تلاحظه؟ $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$
3. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يعتبر الرسم التخطيطي الموجود على اليمين توضيحًا لنظرية فيثاغورس. **3–4. انظر الهامش.**
4. **تحدٍ** ارسم رسمًا تخطيطيًا لتوضيح أنه لأي عددين موجبين a وb، فإن $a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$. اشرح.

الدرس 7-2 نظرية فيثاغورس وعكسها

السابق

استخدمنا نظرية فيثاغورس لإعداد قانون المسافة.

الحالي

1 استخدام نظرية فيثاغورس.

2 استخدام عكس نظرية فيثاغورس.

لماذا؟

تُستخدم الأحبال الشريطية لتثبيت رجل الثلج القابل للنفخ. افترض أنك تعرف مقدار ارتفاع الأحبال الشريطية الذي سيتم عنده ربط رجل الثلج ومقدار البُعد الذي تحتاج إليه لتثبيت الأحبال في الأرض. يمكنك استخدام عكس نظرية فيثاغورس لضبط أطوال الأحبال للحفاظ على بقاء رجل الثلج في وضع عمودي على الأرض.

مفردات جديدة

ثلاثية فيثاغورس
Pythagorean triple

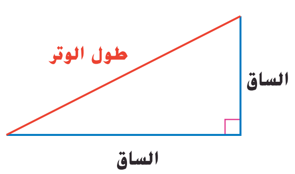
ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام نماذج الرياضيات.

1 نظرية فيثاغورس

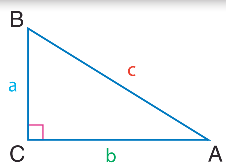
من المرجح أن نظرية فيثاغورس أحد أكثر النظريات شهرة في الرياضيات. فهي متعلقة بأطوال الوتر (الضلع المقابل للزاوية القائمة) وساقي المثلث (الضلعين المجاورين للزاوية القائمة) في المثلث قائم الزاوية.



النظرية 7.4 نظرية فيثاغورس

الشرح في مثلث قائم الزاوية، يكون مجموع مربعات أطوال ساقي المثلث مساويًا لمربع طول الوتر.

الرموز إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية والزاوية القائمة به هي C، فإن $a^2 + b^2 = c^2$.



يمكن استخدام الأوساط الهندسية لإثبات نظرية فيثاغورس.

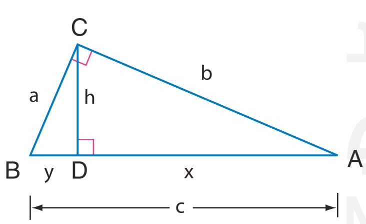
البرهان نظرية فيثاغورس

المعطيات: $\triangle ABC$ به الزاوية القائمة C

المطلوب: $a^2 + b^2 = c^2$

البرهان:

ارسم مثلثًا قائم الزاوية ABC بحيث تكون C هي الزاوية القائمة. ثم ارسم الارتفاع من C إلى $\overline{AB}$ فلنفترض أن $AB = c$ و $AD = x$, $AC = b$ و $BC = a$, $CD = h$.
لدينا الآن وسطان هندسيان.



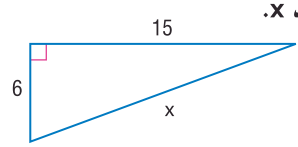
$\frac{c}{a} = \frac{a}{y}$ و $\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$	نظرية الوسط الهندسي (ساق المثلث)
$a^2 = cy$ $\quad$ $b^2 = cx$	الضرب التبادلي
$a^2 + b^2 = cy + cx$	اجمع المعادلات.
$a^2 + b^2 = c(y + x)$	عامل.
$a^2 + b^2 = c \times c$	نظرًا لأن $c = y + x$، قم بتعويض c مقابل $(y + x)$.
$a^2 + b^2 = c^2$	بسّط.

يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد طول أي ضلع من أضلاع مثلث قائم الزاوية مع العلم بطول الضلعين الآخرين.

مثال 1 إيجاد القياسات المفقودة باستخدام نظرية فيثاغورس

جـد x.

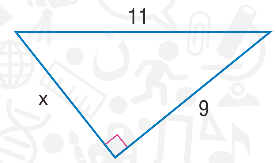
a.



الضلع المقابل للزاوية القائمة هو الوتر. إذًا $c = x$.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$6^2 + 15^2 = x^2$	$a = 6 = 15$
$261 = x^2$	بسّط.
$\sqrt{261} = x$	خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$3\sqrt{29} = x$	بسّط.

b.

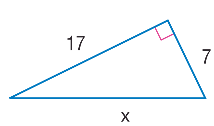


الوتر هو 11. إذًا $c = 11$.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 8^2 = 11^2$	$a = x = 9$
$x^2 + 81 = 121$	بسّط.
$x^2 = 40$	اطرح 18 من كل طرف.
$x = \sqrt{40}$ أو $2\sqrt{10}$	خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين وبسّط.

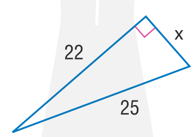
تمرين موجّه

1A.



$13\sqrt{2}$

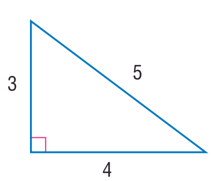
1B.



$\sqrt{141}$

نصيحة دراسية

الجذر التربيعي الموجب عند إيجاد طول أحد الأضلاع باستخدام نظرية فيثاغورس، لا تَستخدم سوى الجذر التربيعي الموجب وليس السالب، لأن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا.



ثلاثية فيثاغورس هي مجموعة مكوّنة من ثلاثة أعداد كاملة غير صفرية a, b, c، بحيث $a^2 + b^2 = c^2$. إحدى أشهر ثلاثيات فيثاغورس هي 5 ،4 ،3. ويقصد منها أن أضلاع المثلث قائم الزاوية هي بنسب 3:4:5. وموضح أدناه في الصف الأول أكثر ثلاثيات فيثاغورس شيوعًا. والثلاثيات الموجودة أدنى هذه الثلاثية يتم إيجادها من خلال ضرب كل عدد من الثلاثية في العامل ذاته.

المفهوم الأساسي ثلاثيات فيثاغورس الشائعة

3, 4, 5	5, 12, 13	8, 15, 17	7, 24, 25
6, 8, 10	10, 24, 26	16, 30, 34	14, 48, 50
9, 12, 15	15, 36, 39	24, 45, 51	21, 72, 75
$3x, 4x, 5x$	$5x, 12x, 13x$	$8x, 15x, 17x$	$7x, 24x, 25x$

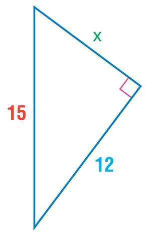
العدد الأكبر في كل ثلاثية هو طول الوتر.

نصيحة دراسية

ثلاثيات فيثاغورس إذا كانت أطوال أضلاع أي مثلث قائم الزاوية *ليست* أعدادًا كلية، فإن الأطوال لا تمثّل ثلاثية فيثاغورس.

مثال 2 استخدام ثلاثية فيثاغورس

استخدم ثلاثية فيثاغورس لإيجاد قيمة x. اشرح استنتاجك.

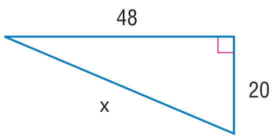


لاحظ أن 15 و 12 كلاهما مضاعف للعدد 3. لأن $15 = 3 \times 5$ و $12 = 3 \times 4$. بما أن "3، 4، 5" هي إحدى ثلاثيات فيثاغورس، فإن طول الساق المفقود x يكون 3×3 أو 9.

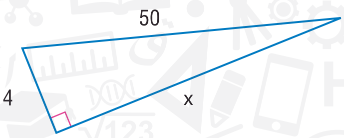
نظرية فيثاغورس	**تحقق** $12^2 + 8^2 \stackrel{?}{=} 15^2$
بسّط.	$225 = 225$ ✓

تمرين موجّه

2A.



2B.



قراءة في الرياضيات

3-4-5 يطلق على المثلث قائم الزاوية بأضلاع أطوالها 3 و 4 و 5 اسم مثلث قائم الزاوية *3-4-5* .

2A. 52; $20 = 4 \cdot 5$ و
$48 = 4 \cdot 12$
بما ان 5,12,13
هي ثلاثية فيثاغورس
$x = 4 \cdot 13$
او 52

2B. 48; $50 = 2 \cdot 25$ و
$14 = 2 \cdot 7$
بما ان 7,24,25
هي ثلاثية فيثاغورس
$x = 2 \cdot 24$
او 48

يمكن استخدام نظرية فيثاغورس لحل العديد من مسائل الحياة اليومية.

مثال 3 على الاختبار المعياري استخدام نظرية فيثاغورس

ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

لا يُمكِن لأيمن دخول شقته. والنافذة الوحيدة المفتوحة في الطابق الثاني الذي يرتفع 4 m عن سطح الأرض. لذا فهو يحتاج إلى اقتراض سلّم من جاره. إذا وجب عليه وضع السلّم على بعد 3 m من منزله لتجنّب بعض الشجيرات، فما طول السلّم الذي يحتاج إليه أيمن؟

A 7 m **C** 5 m

B 1 m **D** 8 m

الاجابة: C

قراءة فقرة الاختبار

إن كلاً من مقدار بُعد السلّم عن المنزل، والارتفاع الذي بلغه السلّم، وطول السلّم ذاته تُمثِّل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية. سيلزمك إيجاد طول السلّم، والذي يمثل الوتر.

حَل فقرة الاختبار

الطريقة 1 استخدم ثلاثية فيثاغورس.

طول ساقيّ المثلث هو 3 و 4. و لكن 3 و 4 و 5 تمثل ثلاثية فيثاغورس. إذاً طول السلّم هو 5 m .

الطريقة 2 استخدم نظرية فيثاغورس.

افترض أن x يمثل طول السلّم.

$3^2 + 4^2 = x^2$	نظرية فيثاغورس
$25 = x^2$	بسّط.
$\sqrt{25} = x$	خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$5 = x$	بسّط.

إذًا، الإجابة هي الخيار C.

نصيحة عند حل الاختبار

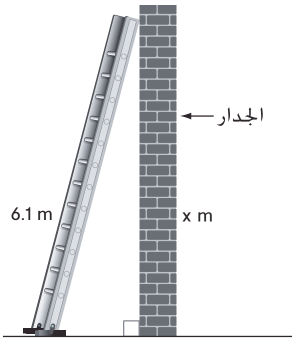
التفكير المنطقي بما أن وتر المثلث قائم الزاوية دائماً ما يكون الضلع الأطول، فإن طول السلّم في المثال 3 يجب أن يكون أكبر من 3 m أو 4 m . و بما أن 1 m أقل منهما. إذاً الاختيار B يمكن استبعاده.

تمرين موجّه

3. وفقًا للوائح السلامة الخاصة بالشركة، فإن المسافة من قاعدة السلّم إلى الجدار الذي تستند إليه يجب ألا تزيد عن ربع ارتفاع السلّم إجمالاً. وقد تم إعطاؤك سلّم ارتفاعه 6.1 m لوضعه مقابل أحد الجدران في موقع العمل. في حالة اتباع لوائح السلامة الخاصة بالشركة، فما الحد الأقصى للارتفاع x الذي سيصله السلّم على الجدار مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟ G

F 3.7 m　　H 6.3 m

G 5.9 m　　J 8.3 m



ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

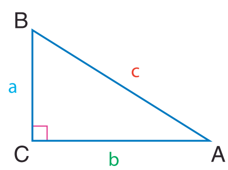
2 عكس نظرية فيثاغورس

عكس نظرية فيثاغورس ينطبق أيضًا. يمكنك استخدام هذه النظرية لتحديد ما إذا كان المثلثُ قائمَ الزاوية من خلال معرفة قياسات جميع أضلاعه الثلاثة.

النظرية 7.5 عكس نظرية فيثاغورس

الشرح إذا كان مجموع مربعات أطوال الضلعين الأقصر لأحد المثلثات مساويًا لمربع طول الضلع الأطول، فإن المثلث يكون قائم الزاوية.

الرموز إذا كان $c^2 = a^2 + b^2$، فإن $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية.



سوف تثبتُ النظرية 7.5 في التمرين 35.

يمكنك أيضًا استخدام الأطوال الطرفية لتصنيف مثلث على أنه حاد أو منفرج.

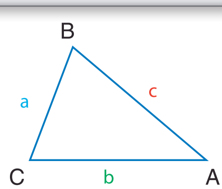
نصيحة دراسية

تحديد الضلع الأطول إذا تم التعبير عن مقاييس أي ضلع من أضلاع المثلث بصورة جذر، فربما ترغب في استخدام الآلة الحاسبة لتحديد الضلع الأطول.

نظريات متباينات فيثاغورس

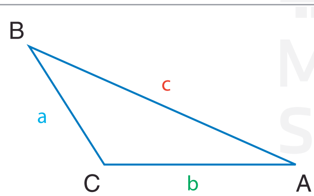
7.6 إذا كان مربع طول الضلع الأطول في أحد المثلثات أقل من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن المثلث يكون حاد الزاوية.

الرموز إذا كانت $c^2 < a^2 + b^2$، فإن $\triangle ABC$ يكون حاد الزاوية.



7.7 إذا كان مربع طول الضلع الأطول في أحد المثلثات أكبر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن المثلث يكون منفرج الزاوية.

الرموز إذا كان $c^2 > a^2 + b^2$، فإن $\triangle ABC$ منفرج الزاوية.



سوف تثبتُ نظريتي 7.6 و 7.7 من خلال التمرينين 36 و 37 على الترتيب.

مثال 4 تصنيف المثلثات

حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فقم بتصنيف المثلث على أنه حاد أو قائم أو منفرج الزاوية. علل إجابتك.

a. 7, 14, 16

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت القياسات يمكن أن تشكل مثلثًا باستخدام نظرية متباينة المثلث أم لا.

$7 + 16 > 14$ ✔ $14 + 16 > 7$ ✔ $7 + 14 > 16$ ✔

أطوال الأضلاع 7 و 14 و 16 يمكن أن تشكل مثلثًا.

الخطوة 2 صنّف المثلث بواسطة مقارنة مربع الضلع الأطول مع مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

قارن c^2 و $a^2 + b^2$. $c^2 \stackrel{?}{=} a^2 + b^2$

التعويض $16^2 \stackrel{?}{=} 7^2 + 14^2$

بسّط وقارن. $256 > 245$

بما أن $c^2 > a^2 + b^2$. إذًا المثلث منفرج الزاوية.

b. 9, 40, 41

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت القياسات يمكن أن تشكّل مثلثًا أم لا.

$9 + 41 > 40$ ✔ $40 + 41 > 9$ ✔ $9 + 40 > 41$ ✔

أطوال الأضلاع 9 و 40 و 41 يمكن أن تشكل مثلثًا.

الخطوة 2 صنّف المثلث.

قارن $c^2 + b^2$. $c^2 \stackrel{?}{=} a^2 + b^2$

التعويض $41^2 \stackrel{?}{=} 9^2 + 40^2$

بسّط وقارن. $1681 = 1681$

بما أن $c^2 = a^2 + b^2$. إذًا المثلث قائم الزاوية.

تمرين موجّه

4A. $11, 60, 61$ **4B.** $2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{5}$ **4C.** $6.2, 13.8, 20$

مراجعة المصطلحات

نظرية متباينة المثلث يجب أن يكون مجموع أطوال أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

4A. نعم؛ بما أن $11 + 60 > 61$ و $60 + 61 > 11$ و $11 + 61 > 60$؛ قائم، بما أن $11^2 + 60^2 = 61^2$.

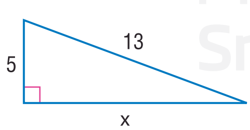
4B. نعم؛ بما أن $2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} > 3\sqrt{5}$ و $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} > 4\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$، $3\sqrt{5} > 2\sqrt{3}$. منفرج، بما أن $(3\sqrt{5})^2 > (2\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{2})^2$.

4C. لا؛ بما أن $6.2 + 13.8 \not> 20$، فإن أطوال الأضلاع لا يمكنها تشكيل مثلث.

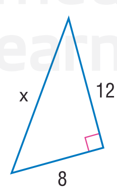
التحقق من فهمك

مثال 1 جـد x.

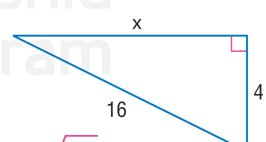
1.



2. 12



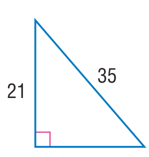
3 $4\sqrt{13} \approx 14.4$



$4\sqrt{15} \approx 15.5$

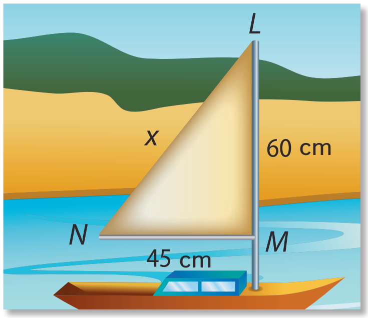
مثال 2

4. استخدم ثلاثية فيثاغورس لإيجاد قيمة x. اشرح استنتاجك.



28؛ بما أن $35 = 7 \times 5$ و $21 = 7 \times 3$ و 3-4-5 هي ثلاثية فيثاغورس، إذًا $x = 7 \times 4$ أو 28.

مثال 3 **5. الاختيار من متعدد** يوضح الشكل التالي الشراع الرئيسي لقارب لعبة.
ما طول $\overline{LN}$ بالسنتيمتر؟ **D**



A 52.5 **C** 72.5

B 65 **D** 75

مثال 4 **حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه حاد أو منفرج أو قائم الزاوية. علل إجابتك.**

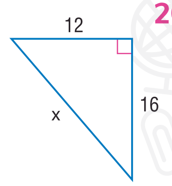
6. 15, 36, 39 **7.** 16, 18, 26 **8.** 15, 20, 24

6–8. انظر الهامش.

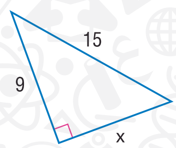
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **جـد *x*.**

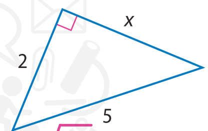
9. **20**



10. **12**

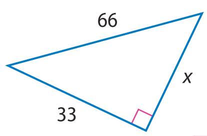


11.



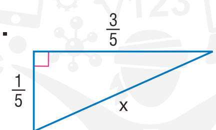
$\sqrt{21} \approx 4.6$

12.



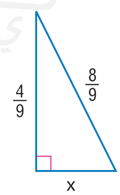
$33\sqrt{3} \approx 57.2$

13.



$\frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0.6$

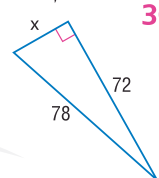
14.



$\frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0.8$

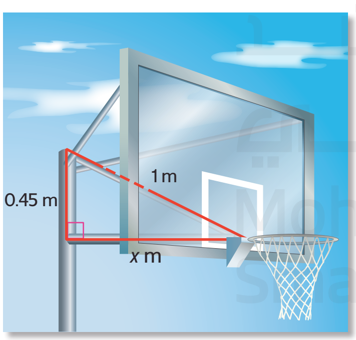
مثال 2 **المثابرة استخدم ثلاثية فيثاغورس لإيجاد قيمة *x*.**

30 **70** **50** **34**



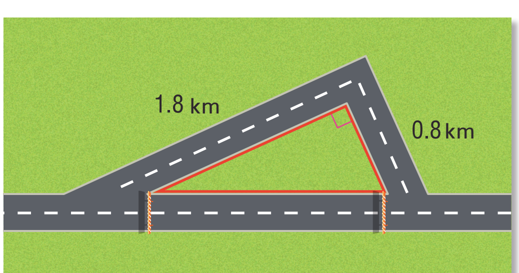
مثال 3 **19. كرة السلة** الجزء الذي يدعم مرمى كرة السلة يشكّل زاوية قائمة كما هو موضّح. فما طول *x* من الطرف الأفقي من ذلك الجزء الداعم؟

حوالي 0.9 m



20. قيادة المَركبات الشارع الذي تسلكه خديجة عادة للذهاب إلى المدرسة قيد الإنشاء. لذا، اتخذت تحويلة الطريق الموضحة. إذا بدأت منطقة الإنشاءات عند نقطة مغادرة خديجة للطريق الاعتيادي وانتهت عند نقطة دخولها مجددًا في هذا الطريق، فما مقدار المسافة الممتدة للطريق قيد الإنشاء؟

2 km تقريبًا



مثال 4 **حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه حاد أو منفرج أو قائم الزاوية. علل إجابتك.**

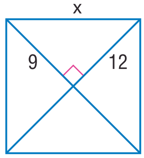
21–26. انظر الهامش.

21. 7, 15, 21 **22.** 10, 12, 23 **23.** 4.5, 20, 20.5

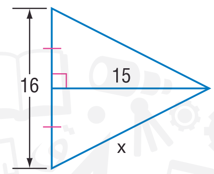
24. 44, 46, 91 **25.** 4.2, 6.4, 7.6 **26.** 4, 12, 14

جـد x.

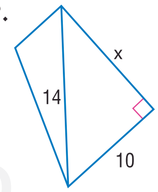
27. 15



28. 17



29. $4\sqrt{6} \approx 9.8$



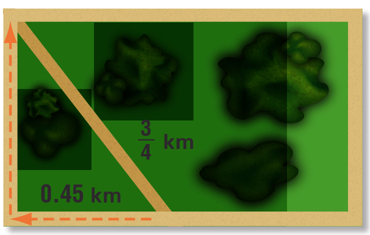
30–33. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

الهندسة الإحداثية حدد ما إذا كان $\triangle XYZ$ هو مثلث حاد أم قائم أم منفرج الزاوية بالنسبة للرؤوس المعطاة. اشرح.

30. $X(-3, -2), Y(-1, 0), Z(0, -1)$ **31.** $X(-7, -3), Y(-2, -5), Z(-4, -1)$

32. $X(1, 2), Y(4, 6), Z(6, 6)$ **33.** $X(3, 1), Y(3, 7), Z(11, 1)$

34. العَدْو يركض ماجد في المتنزه ثلاث مرات أسبوعيًا. وعادة، يسلك ممر $\frac{3}{4}$ km يمر بالمتنزه. واليوم، تم إغلاق الممر، إذًا سيسلك الطريق المظلل بالسهم البرتقالي. فما مقدار بُعد المسافة التي سيركضها على الطريق البديل عوضًا عما إذا سلك طريقه المعتاد؟ **0.3 km**



35. البرهان اكتب فقرة إثبات للنظرية 7.5. **35–37. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

البرهان اكتب فقرة إثبات من عمودين لكل نظرية.

36. النظرية 7.6 **37.** النظرية 7.7

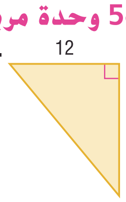
التبرير المنطقي جـد محيط ومساحة كل شكل.

38. P = 48 وحدة؛ A = 96 وحدة مربعة

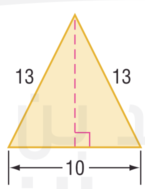
39. P = 36 وحدة؛ A = 60 وحدة مربعة

40. P = 32 وحدة؛ A = 56 وحدة مربعة

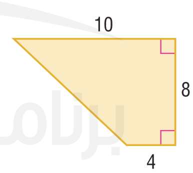
38.



39.



40.



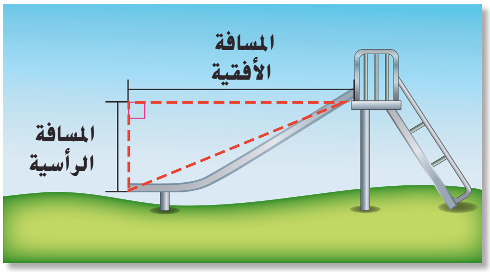
41. الجبر يبلغ أطوال أضلاع مثلث x و 5 و 25. فإذا كان طول الضلع الأطول 25. فما قيمة x التي تجعل المثلث قائم الزاوية؟ **15**

42. الجبر يبلغ أطوال أضلاع مثلث $2x$ و 8 و 12. إذا كان طول الضلع الأطول $2x$. فما قيمة x التي تجعل المثلث حاد الزاوية؟ $6 < x < 2\sqrt{13}$

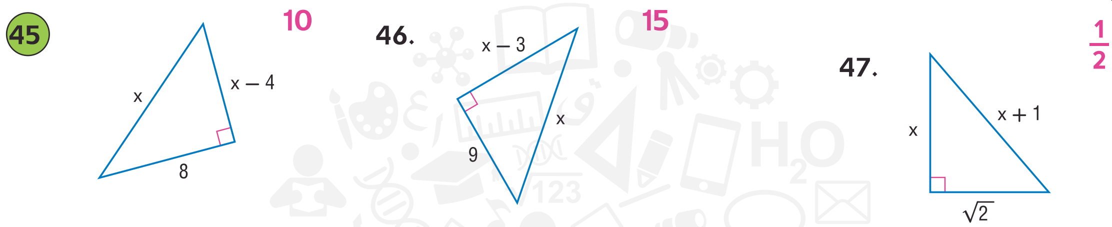
43. التليفزيون نسبة العرض إلى الارتفاع لشاشة التليفزيون عالي الوضوح (HDTV) هي 16:9. ويوضّح حجم التليفزيون بواسطة المسافة القُطرية عبر الشاشة. إذا كان تليفزيون HDTV عرضه 104 cm. فما مقدار حجم شاشته؟ **119.4 cm.**

44. **ساحات الألعاب** وفقًا لكتيب السلامة في ساحات الألعاب العامة، فإن نسبة المسافة الرأسية إلى المسافة الأفقية المغطاة بواسطة الزحليقة ينبغي ألا تزيد عن 4 إلى 7. إذا كانت المسافة الأفقية المخصصة في تصميم الزحليقة بمقدار 3.5 m. فما مقدار الطول المفترض للزحليقة كحد أقصى؟

حوالي 4 m



جد x.



48. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف مثلثات خاصة قائمة الزاوية.

a. **هندسيًا** ارسم ثلاثة مثلثات قائمة الزاوية متساوية الساقين تكون أطوال أضلاعها أعدادًا كلية. قم بتسمية المثلثات ABC، بحيث تكون الزاوية القائمة في الرأس A على الترتيب. حدد طول الساق لكل ضلع، ثم جد طول الوتر بالضبط. **انظر الهامش.**

b. **جدوليًا** انسخ الجدول التالي وأكمله.

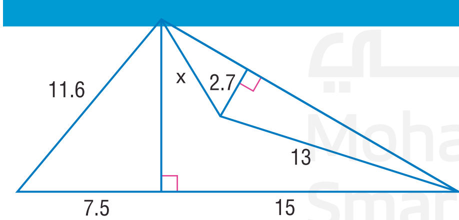
المثلث	الطول				النسبة	
ABC	BC	$2\sqrt{2}$	AB	2	$\frac{BC}{AB}$	$\sqrt{2}$
MNP	NP	$3\sqrt{2}$	MN	3	$\frac{NP}{MN}$	$\sqrt{2}$
XYZ	YZ	$\sqrt{2}$	XY	1	$\frac{YZ}{XY}$	$\sqrt{2}$

c. **بالكلمات** خمّن نسبة الوتر إلى الساق لزاوية قائمة في مثلث متساوي الساقين.

الإجابة النموذجية: نسبة الوتر إلى ساق مثلث قائم متساوي الساقين هي $\sqrt{2}$.

مسائل مهارات التفكير العليا
استخدام مهارات التفكير العليا

49. **تحدٍ** جـد قيمة x في الشكل الموجود على اليمين. **5.4**



50. **الفرضيات** صواب أم خطأ؟ أي مثلثين قائمي الزاوية يشتركان في الوتر ذاته يكون لهما المساحة ذاتها. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

51. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم مثلثًا قائم الزاوية بأطوال أضلاع تشكّل ثلاثية فيثاغورس. إذا ضاعفتَ طول كل ضلع، فهل ستكون النتيجة مثلثًا حاد أم قائم أم منفرج الزاوية إذا كنت تعلمُ طول كل ضلع؟ اشرح. **انظر الهامش.**

52. **الكتابة في الرياضيات** ابحث في المقادير غير القابلة للقياس، ثم أوضح مدى ارتباط هذه العبارة باستخدام الأعداد غير النسبية في الهندسة. واذكر مثالاً للأعداد غير النسبية المستخدمة في الهندسة. **انظر الهامش.**

تمرين على الاختبار المعياري

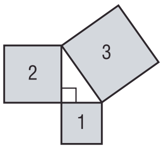
53. أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية لا يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث؟ **D**

A 10, 11, 20 | **C** 35, 45, 75
B 14, 16, 28 | **D** 41, 55, 98

54. متنزه على شكل مربع به ممر مشي مائل (قُطري) من أحد الأركان إلى الآخر. إذا كان طول الممر 120 m، فما المقدار التقريبي لكل ضلع في المتنزه؟ **G**

F 60 m | **H** 170 m
G 85 m | **J** 240 m

55. إجابة مختصرة إذا كان محيط المربع 2 هو 200 وحدة ومحيط المربع 1 هو 150 وحدة، فما محيط المربع 3؟
250 وحدة



56. SAT/ACT في $\triangle ABC$، تُعد $\angle B$ زاوية قائمة و $\angle A$ أكبر بمقدار $20°$ عن $\angle C$. ما قياس $\angle C$؟ **B**

A 30 | **C** 40 | **E** 70
B 35 | **D** 45

مراجعة شاملة

جـد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد. (الدرس 1-7)

57. 9 و 4 **6**

58. 45 و 5 **15**

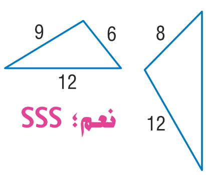
59. 12 و 15 **$6\sqrt{5} \approx 13.4$**

60. 36 و 48 **$24\sqrt{3} \approx 41.6$**

61. رسومات بقياسات نسبية يعمل بلال على تصميم نموذج بقياسات نسبية لمنحدر تزلج على ورقة تمثيل بياني مقاس 25.4 في 20.3 cm. إذا افترض أن المنحدر الفعلي سيكون 3.7 m في 2.4 m، فجـد القياس النسبي الملائم للرسم وحدد أبعاد المنحدر.

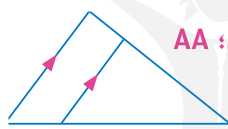
بيّن ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. إن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. وإن لم يكونا متشابهين، فما الشروط التي تكفي لإثبات تشابه المثلثين؟ اشرح استنتاجك. 1 cm =0.24 m, 15.24 cm x 10.2 cm

62.



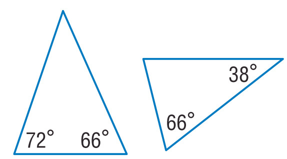
نعم؛ SSS

63.



نعم؛ AA

64.

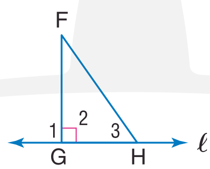


لا؛ الزوايا المتناظرة ليست متطابقة.

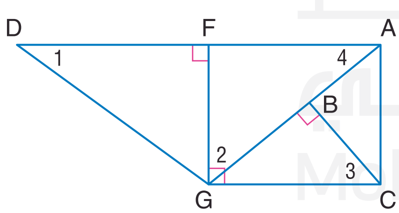
65. البرهان اكتب برهانًا من عمودين. انظر الهامش.

المعطيات $\overline{FG} \perp \ell$
$\overline{FH}$ هو أي قطعة غير عمودية من F إلى ℓ.

المطلوب: $FH > FG$



جـد كل قياس إذا كان $m\angle DGF = 53$ و $m\angle AGC = 40$.



66. $m\angle 1$ **37**

67. $m\angle 2$ **50**

68. $m\angle 3$ **50**

69. $m\angle 4$ **40**

جـد المسافة بين كل زوج من الخطوط المتوازية بمراعاة المعادلات المعطاة.

70. $y = 4x$
$y = 4x - 17$ **$\sqrt{17}$**

71. $y = 2x - 3$
$2x - y = -4$ **$\frac{7\sqrt{5}}{5}$**

72. $y = -0.75x - 1$
$3x + 4y = 20$ **$\frac{24}{5}$**

مراجعة المهارات

جـد قيمة x.

73. $18 = 3x\sqrt{3}$ **$2\sqrt{3}$**

74. $24 = 2x\sqrt{2}$ **$6\sqrt{2}$**

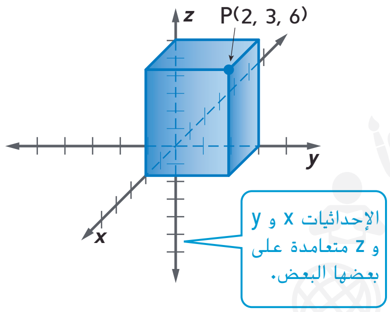
75. $9\sqrt{2} \cdot x = 18\sqrt{2}$ **2**

76. $2 = x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$ **$\frac{\sqrt{3}}{2}$**

التوسع 7-2 مختبر الهندسة
الإحداثيات في الفضاء

استخدام الأزواج المرتبة لإحداثيين لوصف موقع نقطة ما على المستوى الإحداثي. بما أن الفضاء له ثلاثة أبعاد، فسوف تتطلب النقطة ثلاثة أعداد أو إحداثيات لوصف موقعها في الفضاء.

وتُمثَّل النقطة في الفضاء **بمجموعة ثلاثية مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x و y و z). في الشكل الموضح على اليمين، تُحدّد الثلاثي المُرتب (6 ، 3 ، 2) النقطة P. لاحظ أنه تم استخدام منشور مستطيلي لعرض المنظور.



النشاط 1 التمثيل البياني لمجسم مستطيل الشكل

مثّل بيانيًا مجسمًا مستطيل الشكل له رأسان، $L(4, -5, 2)$، ونقطة الأصل. عين إحداثيات كل رأس.

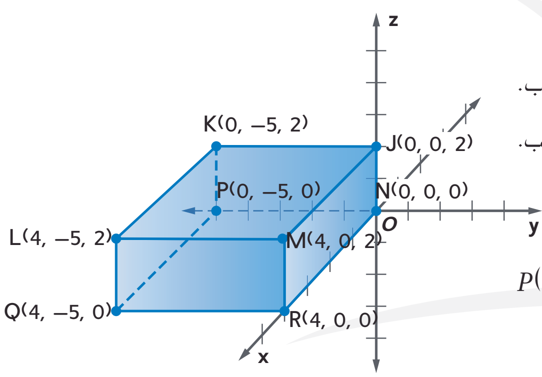
الخطوة 1 عيّن الإحداثي x أولاً. ارسم قطعة من الوحدات الـ 4 لنقطة الأصل في الاتجاه الموجب.

الخطوة 2 لتعيين الإحداثي y، ارسم الوحدات الخمس لقطعة في الاتجاه السالب.

الخطوة 3 بعد ذلك، لتعيين الإحداثي z، ارسم طول وحدتي قطعة في الاتجاه السالب.

الخطوة 4 سمِّ الإحداثي بالحرف L.

الخطوة 5 ارسم منشورًا مستطيلاً وسمِّ كل رأس من رؤوسه: $L(4, -5, 2)$ و $K(0, -5, 2)$ و $J(0, 0, 2)$ و $Q(4, -5, 0)$ و $M(4, 0, 2)$ و $P(0, -5, 0)$ و $N(0, 0, 0)$ و $R(4, 0, 0)$.



يعد إيجاد المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء مماثلاً لإيجاد المسافة ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

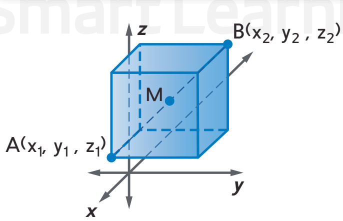
المفهوم الأساسي قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

إذا كان A له الإحداثيات $A(x_1, y_1, z_1)$ وB له الإحداثيات $B(x_2, y_2, z_2)$، فإن

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

نقطة منتصف M للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تكون لها الإحداثيات

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$



النشاط 2 قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

إذا كان $J(2, 4, 9)$ و $K(-4, -5, 11)$.

a. جد JK.

$$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ قانون المسافة في الفضاء

$$= \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-5 - 4)^2 + (11 - 9)^2}$$ التعويض

$$= \sqrt{121}$$ بسّط.

$$= 11$$ استخدم الحاسبة.

b. حدد إحداثيات نقطة منتصف M لـ $\overline{JK}$.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$ قانون نقطة المنتصف في الفضاء

$$= \left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{4 + (-5)}{2}, \frac{9 + 11}{2}\right)$$ التعويض

$$= \left(-1, -\frac{1}{2}, 10\right)$$ بسّط.

تمارين

مثّل بيانيًا مجسمًا مستطيل الشكل يحتوي على النقطة المعطاة ونقطة الأصل في صورة رأسين. حدد إحداثيات كل رأس. 1–9 انظر ملحق إجابات الوحدة 7 .

1. $A(2, 1, 5)$
2. $P(-1, 4, 2)$
3. $C(-2, 2, 2)$
4. $R(3, -4, 1)$
5. $P(4, 6, -3)$
6. $G(4, 1, -3)$
7. $K(-2, -4, -4)$
8. $W(-1, -3, -6)$
9. $W(3, 3, 4)$

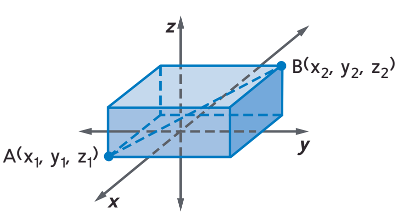
حدد المسافة بين كل زوجين من النقاط. بعد ذلك، حدد إحداثيات نقطة المنتصف M للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين. 10–19. انظر الهامش.

10. $D(0, 0, 0)$ و $E(1, 5, 7)$
11. $G(-3, -4, 6)$ و $H(5, -3, -5)$
12. $K(2, 2, 0)$ و $L(-2, -2, 0)$
13. $P(-2, -5, 8)$ و $Q(3, -2, -1)$
14. $A(4, 7, 9)$ و $B(-3, 8, -8)$
15. $W(-12, 8, 10)$ و $Z(-4v\ 1, -2)$
16. $F\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ و $G(0, 3, 0)$
17. $G(1, -1, 6)$ و $H\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 2\right)$
18. $B(\sqrt{3}, 2, 2\sqrt{2})$ و $C(-2\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{2})$
19. $S(6\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{2})$ و $T(4\sqrt{3}, 5, \sqrt{2})$

20. **البرهان** اكتب إثباتًا إحداثيًا لقانون المسافة في الفضاء. انظر الهامش.

المعطيات: A له الإحداثيات $A(x_1, y_1, z_1)$ وB له الإحداثيات $B(x_2, y_2, z_2)$.

المطلوب: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



21. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين قانون المسافة ونقطة المنتصف على المستوى الإحداثي وفي فضاء إحداثي ثلاثي الأبعاد. انظر الهامش.

7-3 المثلثات القائمة الخاصة

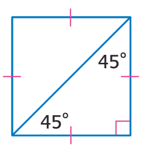
السابق
- استخدام خصائص المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع.

الحالي
1 استخدام خصائص المثلثات بزوايا °45 و°45 و°90.
2 استخدام خصائص المثلثات بزوايا °30 و°60 و°90.

لماذا؟
- ضمن مجموعة أدوات أُعدت للطلاب الحاضرين اجتماع اتحاد الطلاب الإقليمي، طلبت حصة أقلام تظليل مثلثة الشكل. وأرادت شراء صناديق مستطيلة لأقلام التظليل وغيرها من الأدوات، لكنها قلقة بشأن احتمالية عدم استيعاب الصندوق الذي اشترته لأقلام التظليل. فإذا كانت تعلمُ أطوال ضلع في شكل قلم التظليل، فسيكون بإمكانها استخدام خصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية لتحديد ما إذا كان الصندوق سيستوعب أقلام التظليل أم لا.

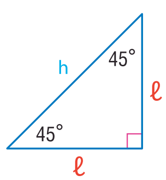
ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 خصائص المثلثات بزوايا °45 و°45 و°90



يشكل قُطر مربع مثلثين قائمي الزاوية متطابقين ومتساويي الأضلاع. بما أن زوايا القاعدة في مثلث متساوي الأضلاع متطابقة، فإن قياس كل زاوية حادة هو 2 ÷ 90 أو 45. وهذا المثلث يُسمى أيضًا بمثلث بزوايا °45 و°45 و°90.

يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد العلاقة بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية بزوايا °45 و°45 و°90.



$$\ell^2 + \ell^2 = h^2$$ نظرية فيثاغورس

$$2\ell^2 = h^2$$ بسّط.

$$\sqrt{2\ell^2} = \sqrt{h^2}$$ خُذ الجذر التربيعي للطرفين.

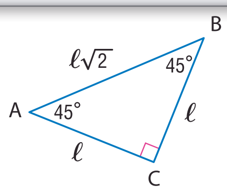
$$\ell\sqrt{2} = h$$ بسّط.

هذا البرهان الجبري يبرهن على تطبيق النظرية التالية.

نظرية 7.8 نظرية المثلثات بزوايا قياساتها °45 و°45 و°90

في مثلث بزوايا قياساتها °45 و°45 و°90، يكون الساقان ℓ متطابقين وطول الوتر h يساوي $\sqrt{2}$ ضعف طول أحد الساقين.

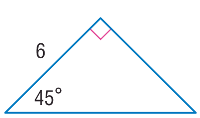
الرموز في المثلث بزوايا قياساتها °45 و°45 و°90، يكون $\ell = \ell$ و $h = \ell\sqrt{2}$.



مثال 1 إيجاد طول الوتر في مثلث بزوايا قياساتها °45 و°45 و°90

جد x.

a.

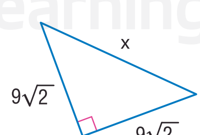


قياس ساقي هذا المثلث قائم الزاوية متماثل، إذا فهو مثلث متساوي الساقين. نظرًا لأن هذا مثلث بزوايا °45 و°45 و°90، فاستخدم النظرية 7.8.

$h = \ell\sqrt{2}$ النظرية 7.8

$x = 6\sqrt{2}$ التعويض

b.



الزاويتان الحادتان في مثلث قائم الزاوية متتامتان، إذًا قياس الزاوية الثالثة هو 45 – 90 أو 45. نظرًا لأن هذا مثلث بزوايا °45 و°45 و°90، فاستخدم النظرية 7.8.

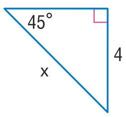
$h = \ell\sqrt{2}$ النظرية 7.8

$x = 9\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ التعويض

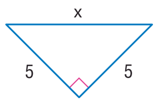
$x = 9 \times 2$ أو 18 $\quad \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

تمرين موجّه

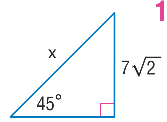
جــد x.

1A. 

$4\sqrt{2}$

1B. 

$5\sqrt{2}$

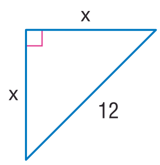
1C. 

14

يمكنك أيضًا الحل بترتيب عكسي مستخدمًا النظرية 7.8 لإيجاد أطوال سيقان مثلث بزوايا °45 و°45 و°90 مع معرفة طول وتره.

مثال 2 إيجاد أطوال الساقين في مثلث بزوايا °45 و°45 و°90

جــد x.

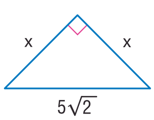


ساقا المثلث قائم الزاوية لهما القياس ذاته، x.
إذًا يحتوي المثلث على زوايا °45 و°45 و°90.
استخدم النظرية 7.8 لإيجاد x.

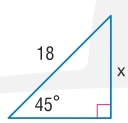
$h = \ell\sqrt{2}$	**نظرية المثلث بزوايا °45 و °45 و °90**
$12 = x\sqrt{2}$	**التعويض**
$\frac{12}{\sqrt{2}} = x$	**اقسم كل طرف على** $\sqrt{2}$.
$\frac{12}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = x$	**إنطاق المقام.**
$\frac{12\sqrt{2}}{2} = x$	**اضرب.**
$6\sqrt{2} = x$	**بسّط**

> **مراجعة المصطلحات**
> **إنطاق المقام** إحدى الطرق المستخدمة للتخلص من الجذور من مقام الكسر

تمرين موجّه

2A. 

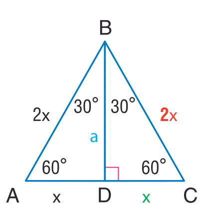
5

2B. 

$9\sqrt{2}$

2 خصائص المثلثات بزوايا °30 و °60 و °90

المثلث بزوايا °30 و°60 و°90 هو مثلث آخر *خاص* قائم الزاوية أو مثلث قائم الزاوية بأطوال أضلاع تتشارك في علاقة خاصة. يمكنك استخدام مثلث متساوي الأضلاع لإيجاد هذه العلاقة.عندما يمتد ارتفاع من أي رأس مثلث متساوي الأضلاع، فسيتكوّن منه مثلثان متطابقان بزوايا °30 و°60 و°90. في الشكل الموضح، $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.
إذًا $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. إذا كان $AD = x$، فإن $CD = x$ و $AC = 2x$.
بما أن $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع. إذًا $AB = 2x$ و $BC = 2x$.
استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد a – طول ارتفاع $\overline{BD}$ والذي يعتبر الساق الأطول في $\triangle BDC$.



$a^2 + x^2 = (2x)^2$	**نظرية فيثاغورس**
$a^2 + x^2 = 4x^2$	**بسّط.**
$a^2 = 3x^2$	**اطرح** x^2 **من كل طرف.**
$a = \sqrt{3x^2}$	**خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.**
$a = x\sqrt{3}$	**بسّط.**

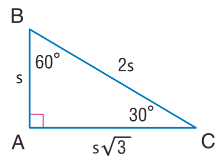
> **نصيحة دراسية**
> **ارتفاع المثلثات متساوية الساقين** لاحظ أن ارتفاع مثلث متساوي الساقين هو أيضًا متوسط المثلث. في الشكل الموجود على اليمين، إن $\overline{BD}$ يُنصف $\overline{AC}$.

نصيحة دراسية

استخدام النِّسب أطوال أضلاع مثلث بزوايا °30 و°60 و°90 موضحة بنسبة 1 إلى $\sqrt{3}$ إلى 2 أو $1:2:\sqrt{3}$.

نظرية 7.9 نظرية المثلثات بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90

في مثلث بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90. طول الوتر h يساوي ضعفي طول الساق الأقصر s. وطول الساق الأطول ℓ يساوي $\sqrt{3}$ ضعف طول الساق الأقصر.

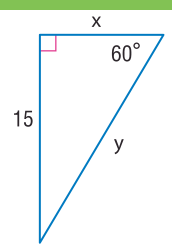


الرموز في مثلث بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90.
فإن $h = 2s$ و $\ell = s\sqrt{3}$.

تذكّر أن الضلع الأقصر في المثلث هو الضلع المقابل للزاوية الأصغر. إذًا الساق الأقصر في مثلث بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90 هو الضلع المقابل للزاوية °30. والساق الأطول مقابلة للزاوية °60.

مثال 3 إيجاد أطوال أضلاع مثلث بزوايا قياساتها °45 و°60 و°90

جد x و y.



الزوايتان الحادتان لمثلث قائم الزاوية متتامتان. إذًا قياس الزاوية الثالثة في هذا المثلث هو $90 - 60$ أو 30. هذا مثلث زواياه هي °30 و°60 و°90.

استخدم نظرية 7.9 لإيجاد x. طول الضلع الأقصر.

$\ell = s\sqrt{3}$ النظرية 7.9

$15 = x\sqrt{3}$ التعويض

$\dfrac{15}{\sqrt{3}} = x$ اقسم كل طرف على $\sqrt{3}$.

$\dfrac{15}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = x$ إنطاق المقام.

$\dfrac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = x$ اضرب.

$\dfrac{15\sqrt{3}}{3} = x$ $\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 3$

$5\sqrt{3} = x$ بسّط.

استخدم الآن نظرية 7.9 لإيجاد y. طول الوتر.

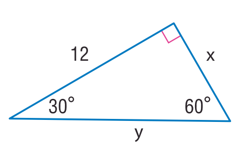
$h = 2s$ النظرية 7.9

$y = 2(5\sqrt{3})$ أو $10\sqrt{3}$ التعويض

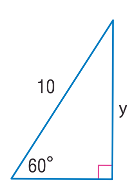
تمرين موجّه

جد x وy.

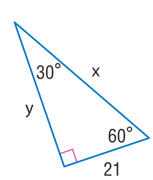
3A.



3B.



3C.



3A. $x = 4\sqrt{3}; y = 8\sqrt{3}$
3B. $x = 5; y = 5\sqrt{3}$
3C. $x = 42; y = 21\sqrt{3}$

يمكنك استخدام خصائص المثلثات بزوايا °30 و°60 و°90 والمثلثات بزوايا °45 و °45 و °90 لحل مسائل من الحياة اليومية.

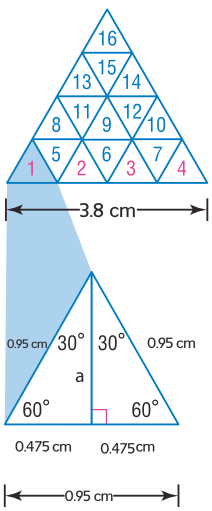
مثال 4 من الحياة اليومية استخدام خصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية

الاختراعات قامت إحدى الشركات بتصنيع أقلام تلوين "مقاومة للدحرجة" من خلال إعدادها بشكل مثلثي بقواعد متساوية الأضلاع. ويتناسب حجم ستة عشرة قلمًا من أقلام التلوين هذه مع حجم صندوق له شكل منشور ثلاثي يبلغ عرضه 3.8 cm. ترتكز أقلام التلوين على نهاية الصندوق، كما أن قاعدة الصندوق متساوية الأضلاع. ما أبعاد كل قلم من أقلام التلوين؟

الفهم تعلم أن 16 قلم تلوين لها قواعد بشكل مثلث متساوي الأضلاع تتناسب داخل الشكل المنشوري. لذا، يلزم إيجاد طول القاعدة وارتفاعها لكل قلم تلوين.

التخطيط خمّن وتحقق لتحديد الترتيب اللازم لوضع 16 قلم تلوين من أجل تعبئة الصندوق. جـد عرض قلم تلوين واحد واستخدم نظرية المثلث بزوايا °30 و°60 و°90 لإيجاد ارتفاعه.

الحل خمّن أن 4 أقلام تلوين متساوية الأضلاع سيتم استيعابها في قاعدة الصندوق. يُظهر الرسم أن إجمالي عدد أقلام التلوين اللازمة لتعبئة الصندوق بوضع 4 أقلام على القاعدة هو 16 قلمًا. ✓



عرض الصندوق هو 3.8 cm. إذًا عرض قلم واحد هو $3.8 \div 4$ أو 0.95 cm.

ارسم مثلثًا متساوي الأضلاع يمثل قلم تلوين واحدًا. هل الارتفاع يشكّل الساق الأطول لمثلثين بزوايا °30 و°60 و°90. استخدم نظرية 7.9 لإيجاد الطول التقريبي لارتفاع a.

طول الساق الأطول = **طول الساق الأقصر** $\times \sqrt{3}$

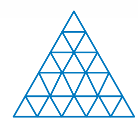
$a = 0.475 \times \sqrt{3}$ أو حوالي 0.82

مقاس كل قلم تلوين هو 0.95 cm أو حوالي 1 cm في حوالي 0.8 cm.

التحقق جـد ارتفاع الصندوق باستخدام نظرية المثلث بزوايا °30 و°60 و°90. ثم اقسم على أربعة، بما أن الصندوق يساوي ارتفاع أربعة أقلام تلوين. النتيجة هي أن ارتفاع قلم التلوين هو حوالي 0.82 cm. ✓

نصيحة في حل المسائل

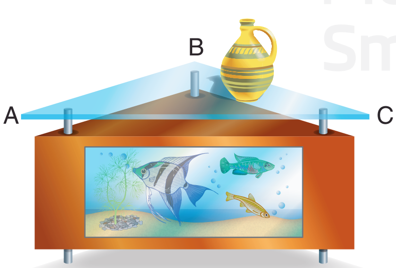
خمّن وتحقق عند استخدام إستراتيجية التخمين والتحقق، ربما يكون من المفيد الاحتفاظ بقائمة تضم تلك التخمينات التي اجتهدتَ بالفعل للحصول عليها وعرفت بأنها لا تجدي نفعًا. في المثال 4، افترض أن التخمين الأول هو أن الصندوق بعرض 5 أقلام تلوين.



يوضح الرسم الخاص بهذه الاحتمالية أن هذا يؤدي إلى وضع 25 قلم تلوين وليس 16 قلمًا.

تمرين موجّه

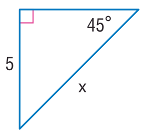
4. **الأثاث** يُمثل الجزء العلوي من طاولة القهوة المحتوية على حوض أسماك شكل مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين. مقاس الضلع الأطول في الطاولة، $\overline{AC}$، يبلغ 107 cm. ما المسافة من الرأس B إلى الضلع $\overline{AC}$؟ ما طول الضلعين الآخرين؟



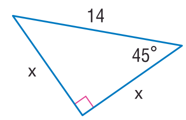
53.5 cm؛ 75.7 cm

التحقق من فهمك

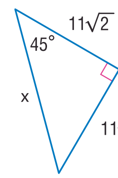
مثالان 1 و 2 جــد x.

1. 

$5\sqrt{2}$

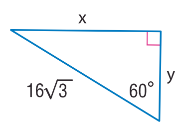
2. 

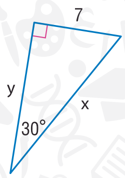
$7\sqrt{2}$

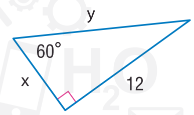
3. 

22

مثال 3 جــد قيمة x وy.

4. 

5. 

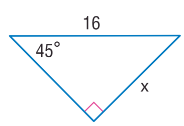
6. 

4. $x = 24; y = 8\sqrt{3}$
5. $x = 14; y = 7\sqrt{3}$
6. $x = 4\sqrt{3}; y = 8\sqrt{3}$

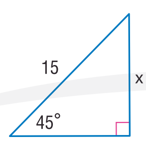
7. **الفن** يرسل جاسم بالبريد لوحة تقدير ارتفاعها $3\frac{1}{4}$ cm إلى الفائز في الشطرنج. كان لديه طرد بريدي على شكل منشور مثلثي بقاعدة مثلث متساوي الأضلاع مقاسه 4 cm كما هو موضح في الرسم التخطيطي. فهل ستتسع فتحة الطرد لدخول اللوحة؟ اشرح. **انظر الهامش.**

التمرين وحل المسائل

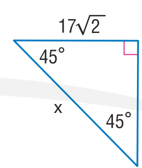
مثالان 1 و 2 **التفكير المنطقي** جــد x.

8. 

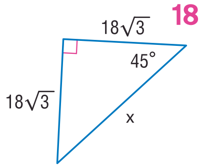
$8\sqrt{2}$

9. 

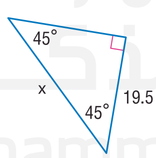
$\frac{15\sqrt{2}}{2}$ أو $7.5\sqrt{2}$

10. 

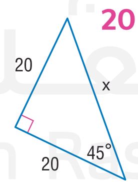
34

11. 

$18\sqrt{6}$

12. 

$18.5\sqrt{2}$

13. 

$20\sqrt{2}$

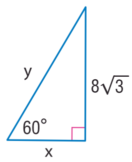
14. إذا كان مثلث بزوايا 45° و45° و90° به وتر بطول 9، فجــد طول الساق. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

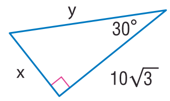
15. حدد طول ساق مثلث بزوايا 45° و45° و90° طول وتره 11. $\frac{11\sqrt{2}}{2}$

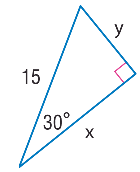
16. ما طول الوتر لمثلث بزوايا 45° و45° و90° إذا كان طول الساق 6 cm؟ $6\sqrt{2}$ أو 8.5 cm

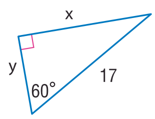
17. جــد طول الوتر لمثلث بزوايا 45° و45° و90° يبلغ طول الساق به 8 cm. $8\sqrt{2}$ أو 11.3 cm

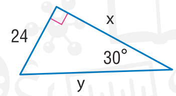
مثال 3 جـد قيمة x وy.

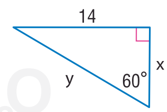
18. 

19. 

20. 

21. 

22. 

23. 

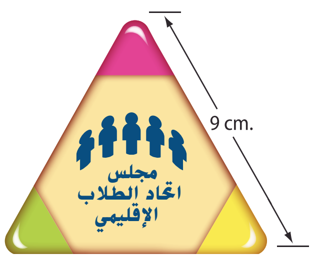
18. $x = 8; y = 16$
19. $x = 10; y = 20$
20. $x = \frac{15\sqrt{3}}{2}; y = \frac{15}{2}$
21. $x = \frac{17\sqrt{3}}{2}; y = \frac{17}{2}$
22. $x = 24\sqrt{3}; y = 48$
23. $x = \frac{14\sqrt{3}}{3}; y = \frac{28\sqrt{3}}{3}$

24. مثلث متساوي الأضلاع طول ارتفاعه 18 m. حدد طول أحد أضلاع المثلث. $12\sqrt{3}$ أو 20.8 m

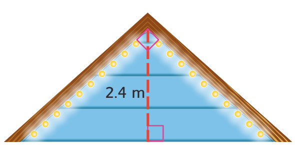
25. جـد طول ضلع مثلث متساوي الأضلاع طول ارتفاعه 24 m. $16\sqrt{3}$ أو 27.7 m

مثال 4

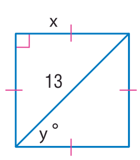
26. استخدام النماذج راجع بداية الدرس.
كل قلم تظليل هو عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع بأضلاع يبلغ طولها 9 cm. فهل سيتم استيعاب قلم التظليل في صندوق أبعاده 10 cm في 7 cm؟ اشرح.
لا؛ الإجابة النموذجية: ارتفاع الصندوق هو 7 cm فقط وارتفاع قلم التظليل هو 7.8 cm، إذا لن يستوعبه الصندوق.

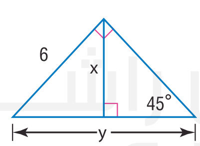


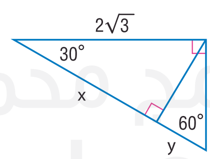
27. تنظم الفعاليات ستقيم فاطمة حفلة.
وتريد تزيين الجزء العلوي من المنزل كما هو موضح. الجزء العلوي عبارة عن مثلث قائم الزاوية ومتساوي الأضلاع، وهي تعلَم أن ارتفاع الجزء العلوي يبلغ 2.4 m. فما طول الأنوار التي ستحتاجها لتغطية الجزء العلوي أدنى مستوى السقف؟ **6.9 m**

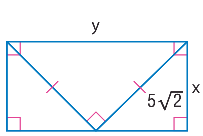


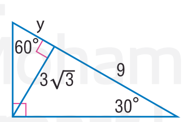
B جـد قيمة x و y.

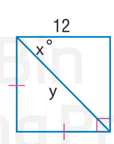
28. 

29. 

30. 

31. 

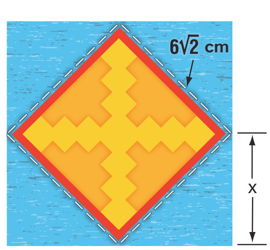
32. 

33. 

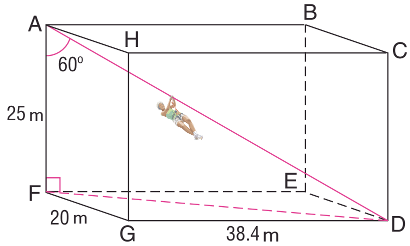
28. $x = \frac{13\sqrt{2}}{2}; y = 45$
29. $x = 3\sqrt{2}; y = 6\sqrt{2}$
30. $x = 3; y = 1$
31. $x = 5; y = 10$
32. $x = 6\sqrt{3}; y = 3$
33. $x = 45; y = 12\sqrt{2}$

34. الألحفة قطعة اللحاف الموضحة مصنوعة من قطعة بشكل مربع وأربعة قطع بشكل مثلثات قائمة الزاوية ومتساوية الساقين. فما قيمة x؟ ما طول ضلع قطعة اللحاف بالكامل؟

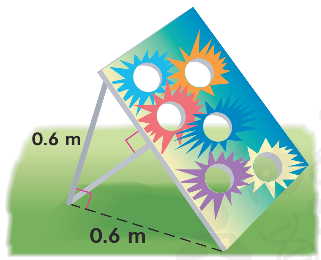
6 cm. ؛12 cm



35 **حبل الانزلاق** افترض أن حبل انزلاق مرتكز على أحد أركان مسار على شكل منشور مستطيلي. بينما يرتكز الطرف الآخر على الركن المقابل كما هو موضح. إذا كان حبل الانزلاق يشكل زاوية $60°$ مع العمود $\overline{AF}$ فجــد طول حبل الانزلاق AD. **50 m**

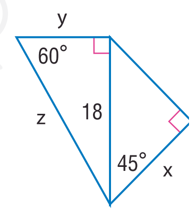


.36 الألعاب يُصمم وليد لعبة التصويب لاحتفالية المدرسة. حيث استخدم دعامتين خلفيتين ارتفاعهما 0.6 m في وضع عمودي على الأرض على بعد 0.6 m من مقدمة اللوحة. كما أراد استخدام وسيلة دعم عمودية على اللوحة كما هو موضح في الرسم التخطيطي. ما مقدار الطول الذي يجب إعداده للدعم؟ **0.43 m**

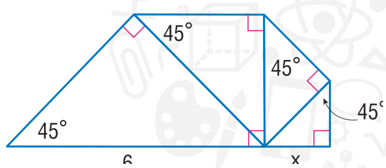


.37 جد x وy وz.

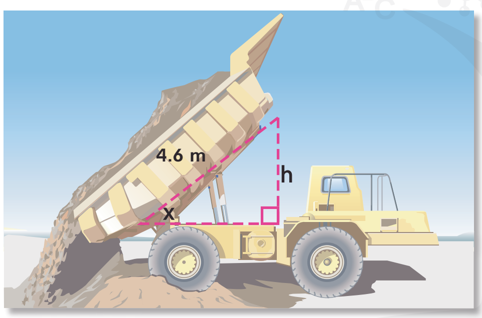
$x = 9\sqrt{2}$; $y = 6\sqrt{3}$; $z = 12\sqrt{3}$



.38 كل مثلث في الشكل هو مثلث بزوايا $45°$ و$45°$ و$90°$. جــد x. $\frac{3}{2}$

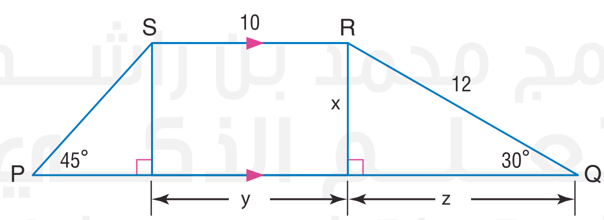


.39 إعداد نموذج يبلغ طول السيارة القلابة الموضحة 4.6 m. فما ارتفاع الحاوية h عندما تكون الزاوية x مقدارها $30°$، $45°$، $60°$؟
3.98 m ؛2.3 m ؛ 3.3 m



.40 C جــد x وy وz ومحيط شبه المنحرف $PQRS$.

$x = 6; y = 10; z = 6\sqrt{3}$;
$38 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$ or ≈ 56.9 **وحدة**

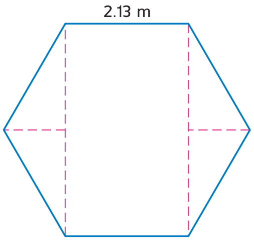


.41 الهندسة الإحداثية $\triangle XYZ$ هو مثلث بزوايا $45°$ و$45°$ و$90°$ بزاوية قائمة Z. جــد إحداثيات X في الربع الأول لكل من Y(-1, 2) و Z(6, 2). **(6، 9)**

.42 الهندسة الإحداثية $\triangle EFG$ هو مثلث بزوايا $30°$ و$60°$ و$90°$ وفيه $m\angle F = 90$. جــد إحداثيات E في الربع الثالث لصالح F(-3, -4) و $G(-3, 2)$. $\overline{FG}$ هي الساق الأطول. $(-3 - 2\sqrt{3}, -4)$

.43 الهندسة الإحداثية $\triangle JKL$ هو مثلث بزوايا $45°$ و$45°$ و$90°$ بزاوية قائمة K. جــد إحداثيات L في الربع الرابع لصالح $J(-3, 5)$ و $K(-3, -2)$. **(4، −2)**

44. نعم؛ الإجابة النموذجية: مساحة مقصورة الحديقة هي حوالي $127\ ft^2$ وستتسع لعدد 16 فردًا. وبما أن هند وصديقاتها يمثلن 13 فردًا إجمالاً في الحفلة، فسيتسع المكان لهن جميعًا.



44. تنظيم الفعاليات حجزت هند مقصورة في حديقة عامة لإقامة حفلة. وتريد التأكد من توفر مساحة كافية لعدد 12 ضيفًا داخل الشرفة في الوقت ذاته. حيث ترغب في توفير مساحة 0.74 m مربع لكل ضيف. فإذا كانت أرضية الغرفة على شكل سداسي منتظم وكانت مساحة كل شكل منهما 2.13 m، فهل ستتوفر مساحة كافية لهند وصديقاتها؟ اشرح. (*إرشاد:* استخدم نظرية مجموع زوايا المضلع الداخلية وخصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية.)

45. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف النِّسب في مثلثات قائمة الزاوية.

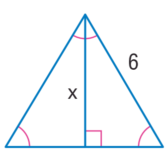
a. هندسيًا ارسم ثلاثة مثلثات قائمة الزاوية ومتشابهة تتضمن زاوية مقدارها $50°$. سمّ أحد المثلثات بالأحرف *ABC* بحيث تكون الزاوية *A* هي الزاوية القائمة وتكون الزاوية *B* بقياس $50°$. وسمّ المثلث الثاني بالأحرف *MNP* بحيث تكون الزاوية *M* هي الزاوية القائمة وتكون الزاوية *N* بقياس $50°$. وسمّ المثلث الثالث بالأحرف *XYZ* بحيث تكون الزاوية *X* هي الزاوية القائمة وتكون الزاوية *Y* بقياس $50°$. انظر الهامش.

b. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله. تتوفر إجابات نموذجية.

المثلث	الطول				النسبة	
ABC	*AC*	2.4 cm	*BC*	3.2 cm	$\frac{AC}{BC}$	1.3
MNP	*MP*	1.7 cm	*NP*	2.2 cm	$\frac{MP}{NP}$	1.3
XYZ	*XZ*	3.0 cm	*YZ*	3.9 cm	$\frac{XZ}{YZ}$	1.3

c. بالكلمات خمّن نسبة الساق المقابلة للزاوية $50°$ إلى الوتر في أي مثلث قائم الزاوية به زاوية بقياس $50°$. انظر الهامش.

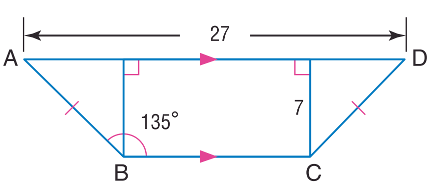
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



46. التفكير النقدي تريد مها ومروة إيجاد *x* في المثلث الموضح. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح. انظر الهامش.

مروة	مها
$x = \frac{6\sqrt{2}}{2}$ $x = 3\sqrt{2}$	$x = \frac{6\sqrt{3}}{2}$ $x = 3\sqrt{3}$

47. مسألة غير محددة الإجابة ارسم مستطيلاً له قطر يبلغ طوله ضعف عرضه. ثم اكتب معادلة لإيجاد طول المستطيل. انظر الهامش.



48. تحدٍ جد قطر الشكل رباعي الأضلاع *ABCD*. 58.8

49. التبرير النسبة بين قياسات الزوايا في مثلث هي 1:2:3. وطول الضلع الأقصر هو 8. فما محيط المثلث؟ 37.9

50. الكتابة في الرياضيات لماذا تُعتبر بعض المثلثات قائمة الزاوية مثلثات خاصة؟ انظر الهامش.

تمرين على الاختبار المعياري

51. إذا كان طول الساق الأطول في مثلث بزوايا °30 و°60 و°90 هو $5\sqrt{3}$ ، فما طول الساق الأقصر؟ **B**

A 3 C $5\sqrt{2}$

B 5 D 10

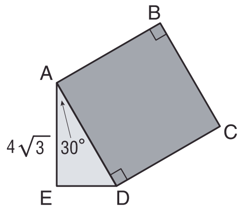
52. الجبر جـد حل $\sqrt{5-4x}-6=7$. **G**

F -44 H 41

G -41 J 44

53. إجابة مختصرة الشكل $\triangle XYZ$ هو مثلث بزوايا قياساتها °45 و°45 و°90 به زاوية قائمة متمثلة في Y. جـد إحداثيات X في الربع الثالث لكل من $Y(-3, -3)$ و $Z(-3, 7)$. **$(-13, -3)$**

54. SAT/ACT في الشكل، أدناه، المربع $ABCD$ متصل بالشكل $\triangle ADE$ كما هو موضح. إذا كان قياس $m\angle EAD$ هو °30 وكانت AE تساوي $4\sqrt{3}$ ، فما مساحة المربع $ABCD$؟ **C**



A $8\sqrt{3}$

B 16

C 64

D 72

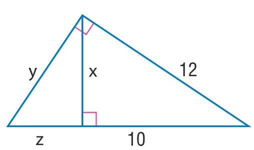
E $64\sqrt{2}$

مراجعة شاملة

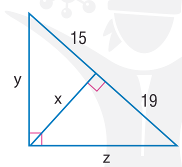
55. الرياضة قام أحمد بإعداد منحدر للقفز بالدراجة. وجزء تدعيم المنحدر يُشكّل زاوية قائمة. ويبلغ طول القاعدة 3.6 m. وارتفاعها 2.7 m. فما طول الخشب الرقائقي الذي سيحتاجه أحمد لإعداد المنحدر؟ (الدرس 7-2) **4.5 m**

جـد x و y و z. (الدرس 7-1) **56–58. انظر الهامش.**

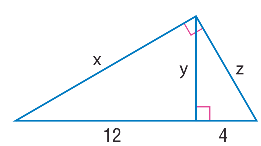
56.



57.



58.



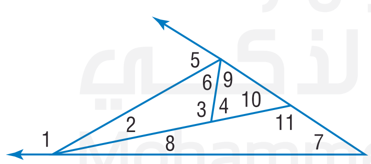
جـد قياسات زوايا كل مثلث.

59. نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 2:5:3. **54, 90, 36**

60. نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 6:8:10. **72, 64.8, 43.2**

61. نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 5:7:8. **72, 63, 45**

استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المتوافقة للشرط المذكور.



62. قياسها أقل من $m\angle 5$ **$\angle 2, \angle 7, \angle 8, \angle 10$**

63. قياسها أكبر من $m\angle 6$ **$\angle 1, \angle 4, \angle 11$**

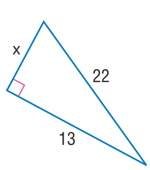
64 قياسها أكبر من $m\angle 10$ **$\angle 1, \angle 3, \angle 5$**

65. قياسها أقل من $m\angle 11$ **$\angle 2, \angle 6, \angle 9, \angle 8, \angle 7$**

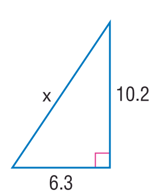
مراجعة المهارات

جـد x.

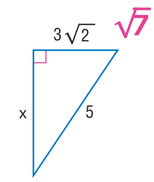
66. **17.7**



67. **12.0**



68. **$\sqrt{7}$**



الاستكشاف

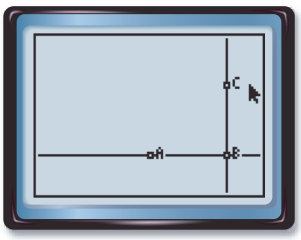
7-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
حساب المثلثات

استكشفتَ أنماطًا محددة في قياسات مثلثات خاصة قائمة الزاوية.
حساب المثلثات هو دراسة الأنماط الموجودة في جميع المثلثات قائمة الزاوية. يمكنك استخدام تطبيق Cabri™ Jr. على حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف هذه الأنماط.

النشاط استكشاف النّسب المثلثية

الخطوة 1 استخدم أداة الخط المستقيم على قائمة F2 لرسم خط مستقيم أفقي. حدد النقاط على الخط المستقيم A و B.

الخطوة 2 اضغط على F2 ثم اختر أداة **Perpendicular (التعامد)** لإنشاء خط مستقيم متعامد من خلال النقطة B. ارسم النقطة C وحددها على المستقيم المتعامد.



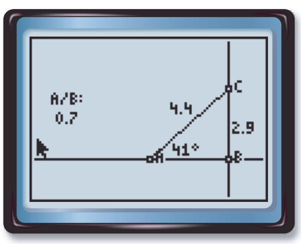
الخطوتان 1 و 2

الخطوة 3 استخدم أداة **Segment (القطعة المستقيمة)** من القائمة F2 لرسم $\overline{AC}$.

الخطوة 4 جد قياس $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ وحددهما على أداة **Distance (المسافة)** و **Length (الطول)** ضمن **قياس** في القائمة **F5**. استخدم الأداة **Angle (الزاوية)** لإيجاد قياس $\angle A$.

الخطوة 5 احسب وأوضح نسبة $\frac{BC}{AC}$ باستخدام الأداة **Calculate (احتساب)** من القائمة **F5**. اكتب النسبة بصيغة A/B.

الخطوة 6 اضغط على CLEAR. ثم استخدم مفتاحي الأسهم لتحريك المؤشر بالقرب من النقطة B. وعندما يصبح السهم واضحًا، اضغط مع الاستمرار على المفتاح ALPHA. اسحب B ولاحظ النسبة.



الخطوات من 3 إلى 5

تحليل النتائج

1. ناقش التأثير الحاصل على $\frac{BC}{AC}$ من خلال سحب النقطة B على $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ و $\angle A$. **1-3. انظر الهامش.**

2. استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد نسب $\frac{AB}{AC}$ و $\frac{BC}{AB}$. ثم اسحب B ولاحظ النسب.

3. **التخمين** دوال *sine* و *cosine* و *tangent* *الزاوية* هي دوال مثلثية مستندة إلى قياسات الزاوية. دوّن $m\angle A$. اخرج من التطبيق واستخدم SIN و COS و TAN على الحاسبة لإيجاد *sine* و *cosine* و *tangent* *الزاوية* لـ $m\angle A$. قارن النتائج بالنِّسب التي وجدتها في النشاط. ثم خمّن تعريفات *sine* و *cosine* و *tangent* الزاوية.

الدرس 7-4 حساب المثلثات

.. السابق

- لقد استخدمتَ نظرية فيثاغورس لإيجاد الأطوال المفقودة في المثلثات القائمة.

.. الحالي

1. إيجاد النسب المثلثية باستخدام مثلثات قائمة الزاوية.
2. استخدام النسب المثلثية لإيجاد قياسات زوايا في مثلثات قائمة الزاوية.

.. لماذا؟

- يتم التعبير عن انحدار مسار رياضة المشي باسم *النسبة المئوية لدرجة الانحدار*. يبلغ انحدار الجزء الأكثر انحدارًا من مسار برايت أنجيل في متنزه جراند كانيون الوطني 15.7%. وهذا يعني أن مسار المشي يرتفع أو يهبط بمقدار 15.7 m عبر مسافة أفقية مقدارها 100 m. يمكنك استخدام نسب مثلثية لتحديد أن هذا الانحدار مكافئ لزاوية بقياس 9° تقريبًا.

مفردات جديدة

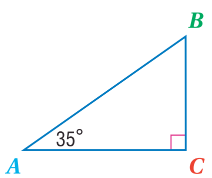
حساب المثلثات
trigonometry
النسبة المثلثية
trigonometric ratio
جيب الزاوية sine
جيب التمام cosine
ظل الزاوية tangent
معكوس الجيب inverse sine
معكوس جيب التمام
inverse cosine
معكوس ظل الزاوية
inverse tangent

ممارسات في الرياضيات

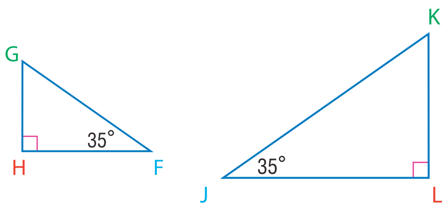
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

1 النسب المثلثية

كلمة **حساب المثلثات** مشتقة من مصطلحين إغريقيين هما *trigon* ومعناها مثلث، وكلمة *metron* ومعناها قياس. تتضمن دراسة حساب المثلثات قياس المثلثات. **النسبة المثلثية** هي نسبة أطوال ضلعين من مثلث قائم الزاوية. فنسبة مثلث واحد $\triangle ABC$ هي $\frac{AC}{AB}$.



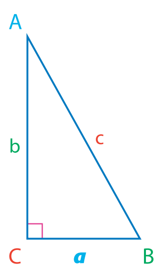
استنادًا إلى تماثل AA، فإن المثلث قائم الزاوية بقياس زاوية حادة معيّنة يتشابه مع كل مثلث آخر قائم له قياس الزاوية الحادة ذاتها. إذًا، تُعد النسب المثلثية ثابتة لقياس زاوية معينة.



$$\triangle ABC \sim \triangle FGH \sim \triangle JKL, \text{ so } \frac{AC}{AB} = \frac{FH}{FG} = \frac{JL}{JK}$$

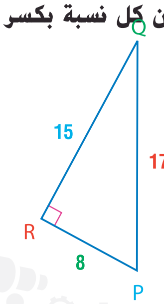
أسماء أكثر النسب المثلثية شيوعًا موضحة أدناه.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية

الشرح	الرموز	
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية وكانت الزاوية $\angle A$ حادة، إذًا **الزاوية sine** $\angle A$ (يُكتب $\sin A$) يُمثل نسبة طول الساق المقابل $\angle A$ (opp) لطول الوتر (hyp).	$\sin A = \frac{opp}{hyp}$ أو $\frac{a}{c}$ $\sin B = \frac{opp}{hyp}$ أو $\frac{b}{c}$	
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية وكانت الزاوية $\angle A$ حادة، إذًا **cosine** $\angle A$ (يُكتب $\cos A$) يُمثل نسبة طول الساق المشترك $\angle A$ (adj) لطول الوتر (hyp).	$\cos A = \frac{adj}{hyp}$ أو $\frac{b}{c}$ $\cos B = \frac{adj}{hyp}$ أو $\frac{a}{c}$	
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية وكانت الزاوية $\angle A$ حادة، إذًا **tan** $\angle A$ (يُكتب $\tan A$) يُمثل نسبة طول الساق المقابل $\angle A$ (opp) لطول الساق المجاور $\angle A$ (adj).	$\tan A = \frac{opp}{adj}$ أو $\frac{a}{b}$ $\tan B = \frac{opp}{adj}$ أو $\frac{b}{a}$	

مثال 1 إيجاد النسب الخاصة بـ sine و Cosine و tan

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



a. sin P

$\sin P = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$= \dfrac{15}{17} = 0.88$

b. cos P

$\cos P = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$= \dfrac{8}{17} = 0.47$

c. tan P

$\tan P = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}}$

$= \dfrac{15}{8} = 1.88$

d. sin Q

$\sin Q = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$= \dfrac{8}{17} = 0.47$

e. cos Q

$\cos Q = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$= \dfrac{15}{15} = 0.88$

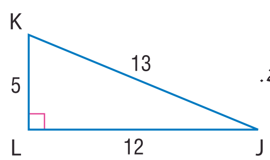
f. tan Q

$\tan Q = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}}$

$= \dfrac{8}{17} = 0.53$

تمرين موجّه

1. جــد sin J و cos J و tan J و sin K و cos K و tan K.
عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



$\sin J = \dfrac{5}{13} \approx 0.38,$

$\cos J = \dfrac{12}{13} \approx 0.92,$

$\tan J = \dfrac{5}{12} \approx 0.42,$

$\sin K = \dfrac{12}{13} \approx 0.92,$

$\cos K = \dfrac{5}{13} \approx 0.38,$

$\tan K = \dfrac{12}{5} \approx 2.4$

نصيحة دراسية

تذكّر النسب المثلثية

SOH-CAH-TOA هي أداة مساعدة لمعرفة نسب sine و cosine و tan باستخدام الحرف الأول من كل كلمة في النِّسب.

$\sin A = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

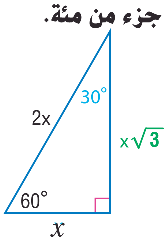
$\cos A = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\tan A = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}}$

يمكن استخدام مثلثات خاصة قائمة الزاوية لتحديد sine و cosine و tan لزوايا 30° و60° و45°.

مثال 2 استخدام مثلثات خاصة قائمة الزاوية لإيجاد نسب مثلثية

استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن tan 30° بصيغة كسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



ارسم أطوال الأضلاع لمثلث قائم الزاوية به الزوايا 30° و 60° و 90° واكتب بيانات الأضلاع على المثلث، مع اعتبار أن x هو طول الساق الأقصر.

الضلع المقابل للزاوية 30° يساوي قياس x.

الضلع المجاور للزاوية 30° يساوي قياس $x\sqrt{3}$.

$\tan 30° = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}}$ تحديد نسبة الـ tan

$= \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{3}}$ التعويض

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ بسّط لإنطاق المقام.

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ أو حوالي 0.58 بسّط واستخدام الآلة الحاسبة.

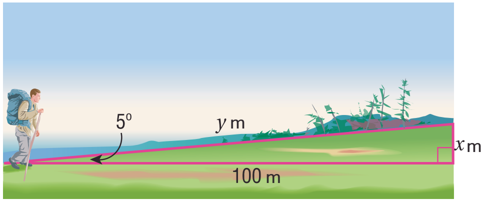
تمرين موجّه

2. استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن للزاوية cos 45° بصيغة كسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$

مثال 3 من الحياة اليومية تقدير القياسات باستخدام حساب المثلثات

التجول سيرًا على الأقدام ينحدر أحد أجزاء منطقة المشي لأعلى بزاوية مقدارها 5°. وبعد السفر لمسافة أفقية مقدارها 100 m بطول هذا الجزء من منطقة المشي، فما مقدار التغيير في الوضع الرأسي لأحد المتجولين؟ وما مقدار المسافة التي قطعها المتجول بطول الطريق؟



لنفترض أن $m\angle A = 5$. إذًا التغيّر الرأسي في وضع المتجول هو x. وقياس الساق المقابلة $\angle A$. المسافة الأفقية المقطوعة هي 100 m وتُمثل قياس الساق المجاورة لـ $\angle A$. بما أنه تم إيجاد طول الساق المقابلة والساق المجاورة لزاوية محددة، اكتب معادلة باستخدام نسبة ظل الزاوية.

$$\tan A = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$ تحديد نسبة الـ tan

$$\tan 5° = \frac{x}{100}$$ التعويض

$$100 \times \tan 5° = x$$ اضرب كل طرف في 100.

استخدم الحاسبة لإيجاد x.

100 [TAN] 5 [ENTER] 8.748866353

ازداد ارتفاع المتجول بمقدار 8.75 m عن نقطة بدء السير.

المسافة y المقطوعة بطول المسار هي طول الوتر. إذًا يمكنك استخدام نسبة cosine لإيجاد هذه المسافة.

$$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$ تحديد نسبة الـ cosine

$$\cos 5° = \frac{100}{y}$$ التعويض

$$y \times \cos 5° = 100$$ اضرب كل طرف في y.

$$y = \frac{100}{\cos 5°}$$ اقسم كل طرف على 5°.

استخدم الحاسبة لإيجاد y.

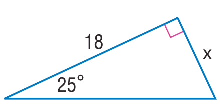
100 [÷] [COS] 5 [ENTER] 100.3818838

قَطع المتجوّل مسافة 100.38 m تقريبًا بطول المسار.

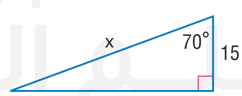
تمرين موجّه

جـد x إلى أقرب جزء من مئة.

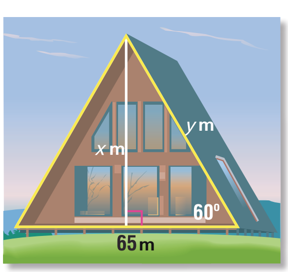
3A. 8.39



3B. 43.86



3C. **الهندسة المعمارية** تتخذ واجهة المتحف شكل مثلث متساوي الساقين. ما ارتفاع x للمتحف أعلى القاعدة الأساسية؟ ما طول y للسقف؟ اشرح استنتاجك.



x = about 56 m لأن $x = 32.5 \tan 60°$؛ بما أن جميع زوايا الشاليه تبلغ 60° فسيكون هذا مثلثًا متساوي الأضلاع، إذًا $y = 65$ m

الربط بالحياة اليومية

يتغير انحدار مسار الجري عدة مرات غالبًا. متوسط الانحدار هو متوسط عدة انحدارات متتابعة للمسار. والانحدار الأقصى هو القسم الأصغر من المسار الذي يتجاوز انحدار المسار القياسي. وغالبًا ما تتضمن المسارات انحدارات قصوى تكون أكثر انحدارًا من متوسط انحدار المسار.

الإدارة الفيدرالية للطرق السريعة

نصيحة دراسية

حاسبة التمثيل البياني تأكد من أن حاسبة التمثيل البياني في وضع الدرجات بدلاً من وضع الراديان.

2 استخدام معكوس النسب المثلثية

في المثال 2، وجدت أن $\tan 30° \approx 0.58$. يترتب على ذلك أنه إذا كان tan زاوية حادة هو 0.58، فإن قياس الزاوية هو 30 تقريبًا.

إذا كنت تعرف sine أو cosine أو tan الخاص بزاوية حادة، يمكنك استخدام آلة حاسبة لإيجاد قياس الزاوية، وهذا يُمثل معكوس النسبة المثلثية.

قراءة في الرياضيات

معكوس النسب المثلثية التعبير $\sin^{-1} x$ يتم تفسيره بأنه الزاوية $\sin x$. احرص على ألا تخلط هذه الصيغة بالصيغة الخاصة بالأسس السالبة

$$\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$$

بدلاً من ذلك، هذه الصيغة تُشبه الصيغ الخاصة بمعكوس دالة $f^{-1}(x)$.

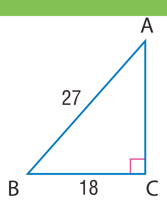
المفهوم الأساسي معكوس النسب المثلثية

الشرح	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و$\sin A$ هو x، فإن **$\sin^{-1} x$** هو قياس $\angle A$.
الرموز	إذا كان $\sin A = x$، فإن $\sin^{-1} x = m\angle A$.
الشرح	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و$\cos A$ هو x، فإن **$\cos^{-1} x$** هو قياس $\angle A$.
الرموز	إذا كان $\cos A = x$، فإن $\cos^{-1} x = m\angle A$.
الشرح	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وtan الزاوية A هو x، فإن **$\tan^{-1} x$** هو قياس $\angle A$.
الرموز	إذا كان $\tan A = x$، فإن $\tan^{-1} x = m\angle A$.

لذا، إذا كان $\tan 30° \approx 0.58$، فإن $\tan^{-1} 0.58 \approx 30°$.

مثال 4 إيجاد قياسات الزاوية باستخدام معكوس النسب المثلثية

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle A$ مقربًا لأقرب جزء من عشرة.



موضح قياسات الساق المقابلة $\angle A$ والوتر في مثلث، فاكتب معادلة باستخدام نسبة sin الزاوية.

$$\sin A = \frac{opp}{hyp} \qquad \sin A = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

إذا كان $\sin A = \frac{2}{3}$، فإن $\sin^{-1} \frac{2}{3} = m\angle A$. استخدم الآلة الحاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [SIN⁻¹] (2 ÷ 3) ENTER 41.8103149

إذًا، $m\angle A \approx 41.8°$.

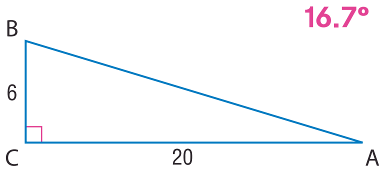
نصيحة دراسية

الأدوات استخدم حاسبة التمثيل البياني. الدوال الثانية للمفاتيح SIN و COS و TAN عادة ما تكون المعكوسات.

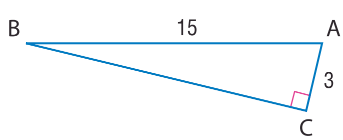
تمرين موجّه

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle A$ مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

4A. 16.7°



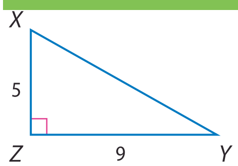
4B. 78.5°



عند استخدام القياسات المعطاة لإيجاد الزاوية المجهولة وقياسات الأضلاع للزاوية القائمة. فإن هذا يُعرف باسم *حل المثلث القائم الزاوية*. لحل مثلث قائم، يلزم معرفة

- أطوال ضلعين أو
- طول ضلع واحد وقياس زاوية واحدة حادة.

مثال 5 حل مثلث قائم الزاوية



حُـلّ المثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب عدد عشري وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 جـــد $m\angle X$ باستخدام نسبة الظل.

$$\tan X = \frac{adj}{hyp} \qquad \tan X = \frac{9}{5}$$

$$\text{تحديد } \tan^{-1} \qquad \tan^{-1}\frac{9}{5} = m\angle X$$

$$\text{استخدم آلة حاسبة.} \qquad 60.8453859 \approx m\angle X$$

إذًا، $m\angle X \approx 61$.

الخطوة 2 جـــد $m\angle Y$ باستخدام النتيجة **7.1**، والتي تثبت أن الزوايا الحادة للمثلث قائم الزاوية هي زوايا متتامة.

$$\text{النتيجة 7.1} \qquad m\angle X + m\angle Y = 90$$

$$m\angle X \approx 61 \qquad 61 + m\angle Y \approx 90$$

$$\text{اطرح 61 من كل طرف.} \qquad m\angle Y \approx 29$$

إذًا، $m\angle Y \approx 29$.

الخطوة 3 جـــد XY باستخدام نظرية فيثاغورس.

$$\text{نظرية فيثاغورس} \qquad (XZ)^2 + (ZY)^2 = (XY)^2$$

$$\text{التعويض} \qquad 5^2 + 8^2 = (XY)^2$$

$$\text{بسّط.} \qquad 106 = (XY)^2$$

$$\text{خذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.} \qquad \sqrt{106} = XY$$

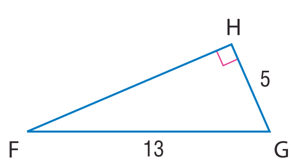
$$\text{استخدم آلة حاسبة.} \qquad 10.3 \approx XY$$

إذًا، $XY \approx 10.3$.

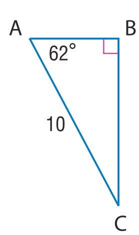
تمرين موجّه

حُـلّ كل مثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. **5A–5C. انظر الهامش.**

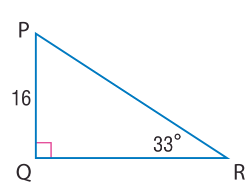
5A.



5B.



5C.



نصيحة دراسية

وسائل بديلة يمكن حل الزوايا القائمة غالبًا بعدة وسائل مختلفة. في المثال 5، يمكن إيجاد $m\angle Y$ باستخدام نسبة الظل. كما يمكن استخدام $m\angle X$ ونسبة جيب زاوية لإيجاد XY.

انتبه!

التقريب في حالة استخدام المقاييس المحسوبة لإيجاد مقاييس أخرى في مثلث قائم، فاحرص على عدم تقريب القيم وتأجيلها إلى الخطوة الأخيرة. إذًا، في المعادلة التالية، استخدم $\tan^{-1}\frac{9}{5}$ بدلاً من قيمته التقريبية، 61°.

$$XY = \frac{9}{\sin X}$$

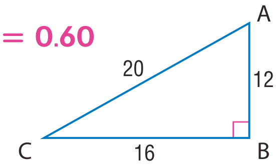
$$= \frac{9}{\sin\left(\tan^{-1}\frac{9}{5}\right)}$$

$$\approx 10.3$$

التحقق من فهمك

مثال 1 عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو جزء من عشرة وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.

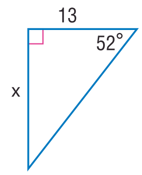
1. $\sin A$ $\frac{16}{20} = 0.80$
2. $\tan C$ $\frac{12}{16} = 0.75$
3. $\cos A$ $\frac{12}{20} = 0.60$
4. $\tan A$
5. $\cos C$
6. $\sin C$



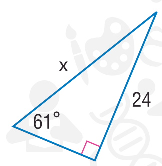
مثال 2 7. استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن $\sin 60°$ بصيغة كسر وكسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة. **انظر الهامش.**

مثال 3 جـد x. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

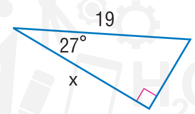
8. 16.64



9. 27.44

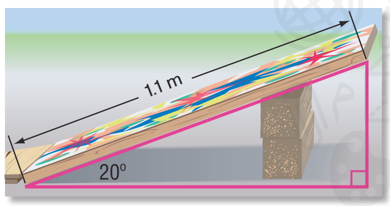


10. 16.93



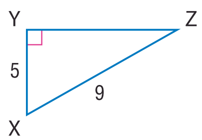
4. $\frac{16}{12} \approx 1.33$
5. $\frac{16}{20} = 0.80$
6. $\frac{12}{20} = 0.60$

11. **الألعاب الرياضية** يقوم خالد ببناء مجرى منحدر للدراجات. ويريد أن تكون الزاوية التي يحدثها المجرى المنحدر مع الأرض بقياس 20°. إذا كان طول اللوحة التي يريد استخدامها لإعداد مجرى المنحدر 1.1 m، فكم سيبلغ الارتفاع اللازم لمجرى المنحدر عند أعلى نقطة؟ **حوالي 0.36 m**

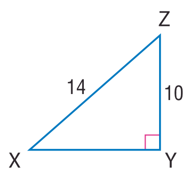


مثال 4 **الأدوات** استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle Z$ إلى أقرب جزء من عشرة.

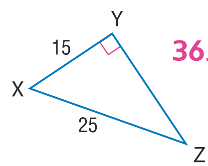
12. 33.7



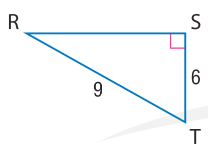
13. 44.4



14. 36.9



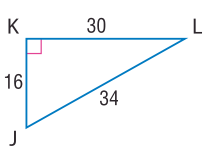
مثال 5 15. حل مثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. **انظر الهامش.**



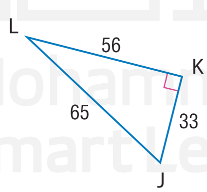
التمرين وحل المسائل

مثال 1 جـد $\sin J$ و$\cos J$ و$\tan J$ و$\sin L$ و$\cos L$ و$\tan L$. عبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة. **16–21. انظر الهامش.**

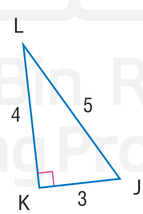
16.



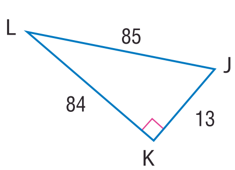
17.



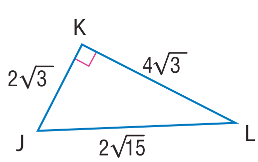
18.



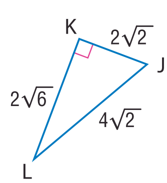
19.



20.



21.



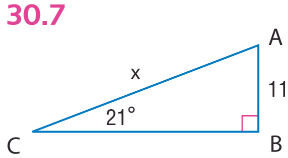
مثال 2 **استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن كل نسبة مثلثية بكسر أو كسر عشري وقرّبه لأقرب جزء من مئة.**

22. $\tan 60°$ $\sqrt{3} \approx 1.73$ **23.** $\cos 30°$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$ **24.** $\sin 45°$ $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$

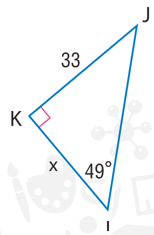
25. $\sin 30°$ $\frac{1}{2}$ 0.5 **26.** $\tan 45°$ 1 **27.** $\cos 60°$ $\frac{1}{2}$ 0.5

مثال 3 **جـد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.**

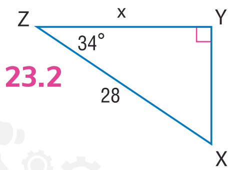
28. 30.7



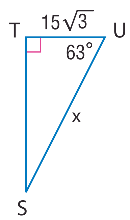
29. 28.7



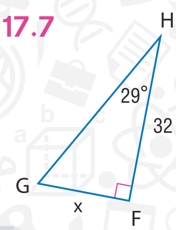
30. 23.2



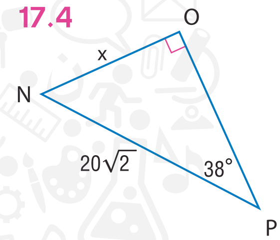
31. 57.2

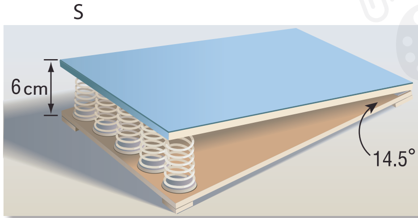


32. 17.7

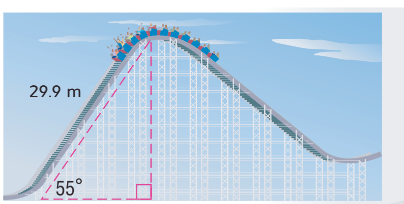


33. 17.4





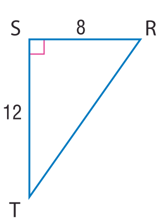
34. الجمباز منصة الوثب التي يستخدمها وليد في صف التدريب على الجمباز تتضمن ملفات طولها 6 cm وتشكل زاوية مقدارها 14.5° مع القاعدة. فما مقدار طول منصة الوثب؟ **حوالي 24 cm**



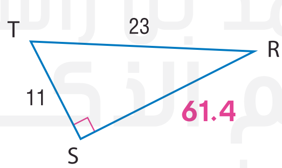
35 قطارات الملاهي تبلغ زاوية صعود أول مرتفَع لقطار الملاهي 55°. إذا كان طول المسار من بداية المرتفع إلى أعلى نقطة هو 29.9 m. فما ارتفاع قطار الملاهي عندما يصل إلى قمة أول مرتفع؟ 24.5 m

مثال 4 **الأدوات استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle T$ إلى أقرب جزء من عشرة.**

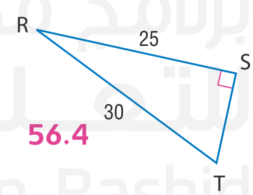
36. 33.7



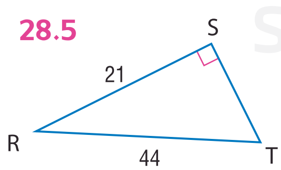
37. 61.4



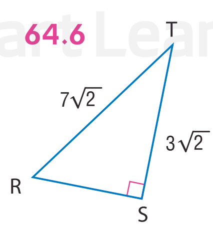
38. 56.4



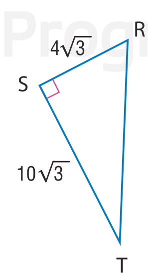
39. 28.5



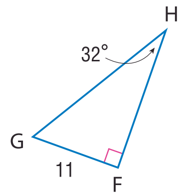
40. 64.6

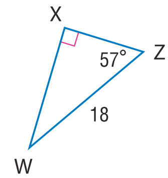


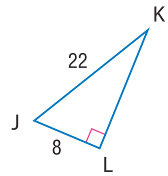
41. 21.8

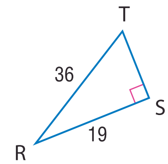


مثال 5 **حُـلّ كل مثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

42. 

43. 

44. 

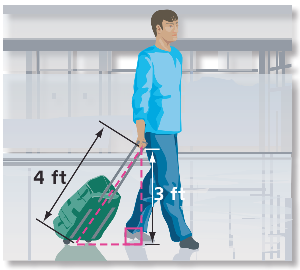
45. 

42. $HF = 17.6$; $GH = 20.8$; $m\angle G =$

43. $WX = 15.1$; $XZ = 9.8$; $m\angle W = 33$

44. $LK = 20.5$; $m\angle J = 69$; $m\angle K = 21$

45. $ST = 30.6$; $m\angle R = 58$; $m\angle T =$



46. **حقائب الظهر** لدى سلطان حقيبة ظهر ذات عجلات يبلغ طولها 4 ft عند تمديد يد الحقيبة. عند سحب حقيبة الظهر، فإن يد سلطان تكون مرتفعة بمقدار 3 ft من الأرض. ما الزاوية التي تحدثها حقيبته مع الأرض؟ قرّب إلى أقرب درجة. **49°**

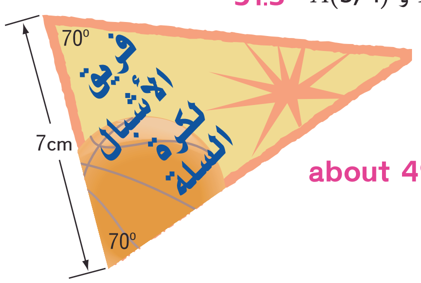
B

الهندسة الإحداثية **جـــد قياس كل زاوية إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة باستخدام قانون المسافة ومعكوس النسب المثلثية.**

47 $\angle K$ في المثلث قائم الزاوية JKL بالرؤوس $J(-2, -3)$ و $K(-7, -3)$ و $L(-2, 4)$ **54.5**

48. $\angle Y$ في المثلث قائم الزاوية XYZ بالرؤوس $X(4, 1)$ و $Y(-6, 3)$ و $Z(-2, 7)$ **56.3**

49. $\angle A$ في المثلث قائم الزاوية ABC بالرؤوس $A(3, 1)$ و $B(3, -3)$ و $C(8, -3)$ **51.3**



50. **روح الدعم بالمدارس** تقوم هنا بإعداد عَلَم مثلث لكل فتاة من 18 فتاة في فريق كرة السلة لديها. ستَستخدم شريطًا مقاس $\frac{1}{2}$ cm لإضفاء اللمسات النهائية لحواف العلم المثلث.

a. فما طول الشريط اللازم للمسات النهائية للعلم المثلث إجمالاً؟ **about 494 cm**

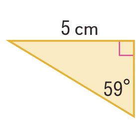
b. إذا كان الشريط يُباع في مجموعات طولها 2.7 m بسعر AED 6.57. فكم ستبلغ التكلفة؟ **AED 32.87**

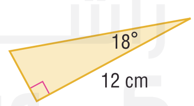
51. 13.83 cm; 7.50 cm^2

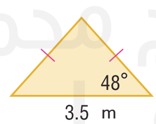
52. 28.53 cm; 23.46 cm^2

53. 8.74 m; 3.41 m^2

الاستنتاج المنطقي **جـــد محيط ومساحة كل مثلث. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.**

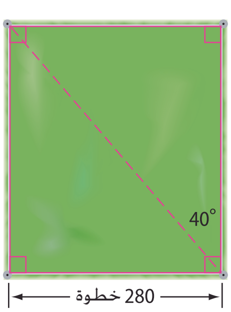
51. 

52. 

53. 

54. جـــد **tan** الزاوية الحادة الأكبر في مثلث أطوال أضلاعه 3 cm و 4 cm و 5 cm **1.33**

55. جـــد **cosine** الزاوية الحادة الأصغر في مثلث أطوال أضلاعه 10 cm و 24 cm و 26 cm. **0.92**

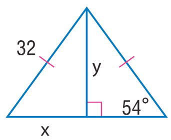


56. **التقدير** يريد وليد وطارق تقدير منطقة الملعب الذي سيستخدمه فريقهما للتدريب على كرة القدم. ويعلمان بأن الملعب مستطيل الشكل، وقاسا عرض الملعب بالقدم كما هو موضح. حيث استخدما أعمدة سياج عند أركان الملعب لتقدير أن الزاوية الواقعة بين طول الملعب وبين الخط القُطري تبلغ حوالي 40°. إذا قاما بافتراض أن كل خطوة من خطواتهما تبلغ حوالي 45.7 cm. فما مساحة ملعب التدريب بالمتر المربع؟ قرّب إلى أقرب جزء من المتر المربع. **19,514 m^2**

C جــد قيمة x و y. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

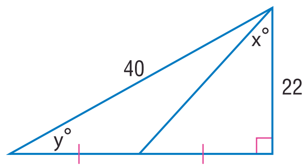
58. = 37.2; = 33.4

57

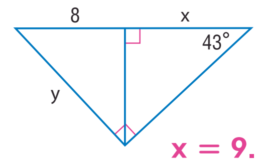


$x = 18.8;\ y = 25.9$

58.

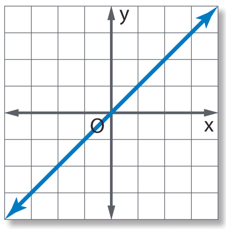


59.



$x = 9.2;\ y = 11.7$

.60 الهندسة الإحداثية وضّح أن ميل أحد الخطوط عند °225 من المحور x مساويًا لظل الزاوية °225. **انظر الهامش.**



.61 التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سنبحث في العلاقة الجبرية بين نسب **sine** و**cosine**.

a. التمثيل الهندسي ارسم ثلاثة مثلثات قائمة لا يشبه أحدها الآخر. قم بتسمية المثلثات ABC و MNP و XYZ. بحيث تكون الزوايا القائمة في الرأس B و N و Y على الترتيب. قم بقياس وتسمية كل ضلع من المثلثات الثلاثة. **انظر الهامش.**

b. التمثيل الجدولي انسخ الجدول التالي وأكمله. **تتوفر إجابات نموذجية.**

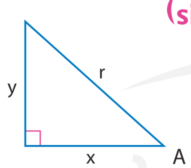
المثلث	النسب المثلثية				مجموع النسب المربعة	
ABC	cos A	0.677	sin A	0.742	$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 =$	1
	cos C	0.742	sin C	0.677	$(\cos C)^2 + (\sin C)^2 =$	1
MNP	cos M	0.406	sin M	0.906	$(\cos M)^2 + (\sin M)^2 =$	1
	cos P	0.906	sin P	0.406	$(\cos P)^2 + (\sin P)^2 =$	1
XYZ	cos X	0.667	sin X	0.75	$(\cos X)^2 + (\sin X)^2 =$	1
	cos Z	0.75	sin Z	0.667	$(\cos Z)^2 + (\sin Z)^2 =$	1

c. التمثيل اللفظي خمّن فرضية عن مجموع مربع **sine** و **cosine** لزاوية حادة بمثلث قائم الزاوية. **انظر الهامش.**

d. التمثيل الجبري عبّر عن تخمينك للزاوية X جبريًا.

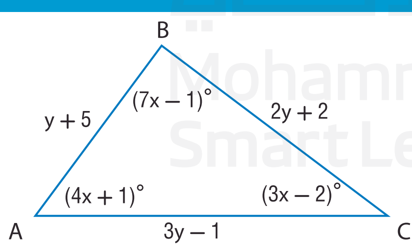
$(\sin X)^2 + (\cos X)^2 = 1$

e. التمثيل التحليلي وضّح أن التخمين صالح للزاوية A في الشكل الموضّح على اليمين باستخدام دوال مثلثية ونظرية فيثاغورس. **انظر الهامش.**



.63 الإجابة النموذجية: نعم؛ بما أن قيمة جيب الزاوية وجيب التمام كلاهما تم احتسابهما بواسطة قسمة أحد ساقي مثلث قائم الزاوية على الوتر، مع كون الوتر دائمًا الضلع الأكبر في المثلث قائم الزاوية، فإن القيمة ستكون دائمًا أقل من 1، وستقوم دائمًا بقسمة العدد الأصغر على العدد الأكبر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



.62 تحدٍ حُــلّ $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب عدد كلي.

.63 التبرير هل قيم **sine** و **cosine** لزاوية حادة من مثلث قائم الزاوية تكون دائمًا أقل من 1؟ اشرح.

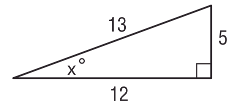
.64 التبرير ما العلاقة بين **sine** و **cosine** للزوايا المتتامة؟ اشرح استنتاجك واستخدم العلاقة لإيجاد cos 50 إذا كان $\sin 40 \approx 0.64$. **انظر الهامش.**

62. $m\angle A = 53$, $m\angle B = 90$, $m\angle C = 37$, $AB = 12$, $BC = 16$, $AC = 20$

.65 الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكنك استخدام نسب أطوال الأضلاع لإيجاد قياسات الزاوية الخاصة بزوايا حادة لمثلث قائم الزاوية. **انظر الهامش.**

تمرين على الاختبار المعياري

66. ما قيمة $\tan x$؟ **D**



A $\tan x = \frac{13}{5}$ **C** $\tan x = \frac{5}{13}$

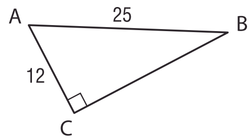
B $\tan x = \frac{12}{5}$ **D** $\tan x = \frac{5}{12}$

67. **الجبر** أيًا مما يلي له القيمة ذاتها مثل $2^{-12} \times 2^3$؟ **H**

F 2^{-36} **H** 2^{-9}

G 4^{-9} **J** 2^{-4}

68. **إجابة شبكية** إذا كان $AC = 12$ و $AB = 25$، فما قياس $\angle B$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة؟ **28.7**



69. **SAT/ACT** تبلغ مساحة مثلث قائم الزاوية 240 in^2. إذا كان طول القاعدة 30 in. فما مقدار طول الوتر بالبوصة؟ **E**

A 5 **D** $2\sqrt{241}$

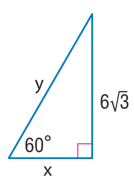
B 8 **E** 34

C 16

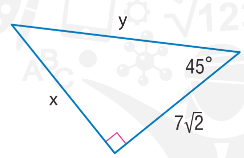
مراجعة شاملة

جـد x و y. (الدرس 3-7)

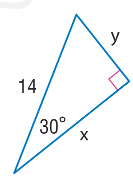
70. $x = 6;\ y = 12$



71. $x = 7\sqrt{2};\ y = 14$



72. $x = 7\sqrt{3};\ y = 7$



حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه حاد أو منفرج أو قائم الزاوية. علل إجابتك. (الدرس 2-7) **73–78. انظر الهامش.**

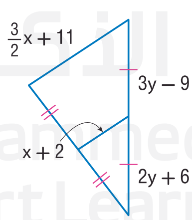
73. 8, 15, 17 **74.** 11, 12, 24 **75.** 13, 30, 35

76. 18, 24, 30 **77.** 3.2, 5.3, 8.6 **78.** $6\sqrt{3}$, 14, 17

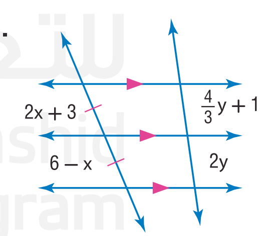
79. **الخرائط** يُقدّر القياس على خريطة نيو مكسيكو بأن كل 2 cm = 160 mi. يبلغ عرض نيو مكسيكو عبر ألبوكيرك على الخريطة 4.1 cm. فما المدة اللازمة لاجتياز نيو مكسيكو إذا كنت تقود بسرعة 60 mi/h؟ **انظر الهامش.**

الجبر جـد قيمة x و y.

80. $x = 14$، $y = 15$



81. $x = 1$، $y = \frac{3}{2}$



مراجعة المهارات

حُـلّ كلاً من التناسبات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

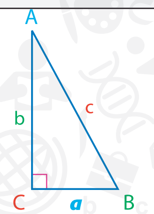
82. $2.14 = \frac{x}{12}$ **25.7** **83.** $0.05x = 13$ **260** **84.** $0.37 = \frac{32}{x}$ **86.5**

85. $0.74 = \frac{14}{x}$ **18.9** **86.** $1.66 = \frac{x}{23}$ **38.2** **87.** $0.21 = \frac{33}{x}$ **157.1**

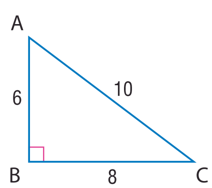
مختبر تقنية التمثيل البياني
القاطع وقاطع التمام وظل التمام

في الدرس السابق، استخدمنا Sine و Cosine و tan للدوال المثلثية لإيجاد العلاقات بين الزوايا في الزوايا في الزوايا القائمة. في هذا النشاط، سنستخدم المعكوسات الضربية لهذه الدوال Secant و Cosecant و Cotangent لاستكشاف الزوايا وعلاقات الأضلع في الزوايا القائمة.

المفهوم الأساسي نسب معكوسات الضرب المثلثية

الشرح	الرموز	
$\angle A$ **Cosecant** (تُكتب بصيغة $\csc A$) هو المعكوس الضربي لـ $\sin A$.	$\csc A = \dfrac{1}{\sin A}$ أو $\dfrac{c}{a}$	
$\angle A$ **Secant** (يُكتب بصيغة $\sec A$) هو المعكوس الضربي لـ $\cos A$.	$\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ أو $\dfrac{c}{b}$	
$\angle A$ **Cotangent** (يُكتب بالصيغة $\cot A$) هو المعكوس الضربي لـ $\tan A$.	$\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$ أو $\dfrac{b}{a}$	

إيجاد القيم المثلثية المجهولة



الخطوة 1 ارسم وحدد زاوية قائمة بالأبعاد الموضحة على اليمين.

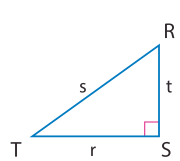
الخطوة 2 استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيم $\sin A$ و $\cos A$ و $\tan A$.

الخطوة 3 بعد ذلك، جد قِيَمة A بقسمة 1 على A SIN.
كرر الخطوة رقم 3 لإيجاد قيمة $\sec A$ و $\cot A$.

الخطوة 4 انسخ الجدول أدناه وسجل نتائجك. بعد ذلك، جد قِيَم كل دالة مثلثة للزاوية C.

الزاوية	sin	cos	tan	csc	sec	cot
A						
C						

تمارين



1. جد قِيَم الست دوال المثلثية لزاوية 45° في مثلث زواياه 90°–45°–45°, وساقاه 4 cm.

2. في $\triangle FGH$, $\tan F = \dfrac{5}{12}$. جـد قيمة $\cot F$ و$\sin F$ إذا كانت $\angle G$ زاوية قائمة.

3. جـد قِيم الدوال المثلثية الست للزاوية T في $\triangle RST$ إذا كانت $m\angle R = 36°$.
قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

الوحدة 7

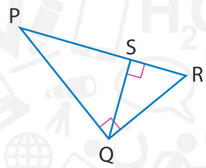
اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 7-1 إلى 7-4

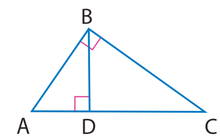
جـد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد. (الدرس 7-1)

1. 12 و 3 — 6
2. 63 و 7 — 21
3. 45 و 20 — 30
4. 50 و 10 — $10\sqrt{5}$

اكتب عبارة تَماثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة المتماثلة في كل شكل. (الدرس 7-1)

5. 

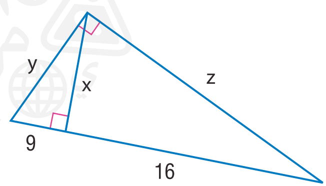
$\triangle PRQ \sim \triangle QRS \sim \triangle PQS$

6. 

$\triangle ABD \sim \triangle BCD \sim \triangle ACB$

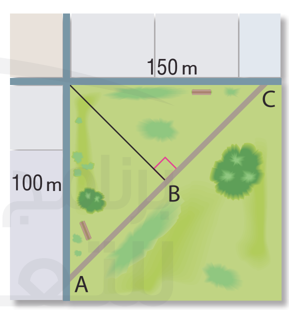
7. جد x وy وz. (الدرس 7-1)

$x = 12,\ y = 15,\ z = 20$

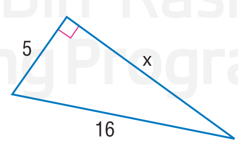


8. **ساحات الانتظار** هناك ساحة انتظار صغيرة عند زاوية شارعين متقاطعين. أبعاد ساحة الانتظار 100 m في 150 m بمسار مائل (قُطري) كما هو مُوضح أدناه. ما طول المسار $\overline{AC}$؟ (الدرس 7-2)

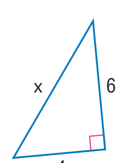
180.3 m



جـد x. قرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 7-2)

9. 

$\sqrt{231} \approx 15.20$

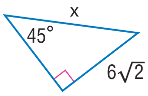
10. 

$2\sqrt{13} \approx 7.21$

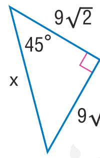
11. **الاختيار من متعدد** أيٌّ من مجموعات الأعداد التالية لا يتوافق مع ثلاثية فيثاغورس؟ (الدرس 7-2) D

A 9, 12, 15
B 21, 72, 75
C 15, 36, 39
D 8, 13, 15

جـد x. (الدرس 7-3)

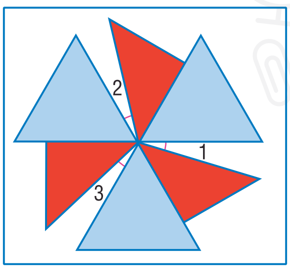
12. 

12

13. 

18

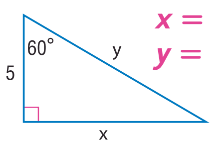
14. **تصميمات** صممتْ سهى مروحة لوضعها في حديقتها. المثلثات الزرقاء في المروحة متساوية الأضلاع ومتطابقة وارتفاع كل منها 4 cm. المثلثات الحمراء مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة بزوايا قائمة. وتر المثلث الأحمر متطابق مع أحد أضلاع المثلث الأزرق. (الدرس 7-3)



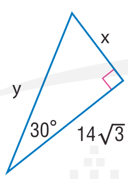
a. إذا كانت الزوايا 1 و 2 و 3 متطابقة، فجد قياس كل زاوية. 15

b. جد محيط المروحة. 55 in.

جـد x و y. (الدرس 3-3)

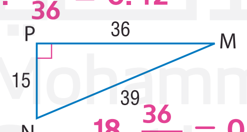
15. 

$x = 5\sqrt{3};\ y = 10$

16. 

$x = 14;\ y = 28$

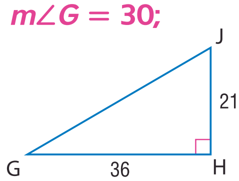
عَبِّر عن كل نسبة بكسر وكسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة. (الدرس 7-4)



17. $\tan M$ — 17. $\frac{15}{36} = 0.42$
18. $\cos M$ — 18. $\frac{36}{39} = 0.92$
19. $\cos N$ — $\frac{15}{39} = 0.38$
20. $\sin N$ — $\frac{36}{39} = 0.92$

21. حُـلّ المثلث قائم الزاوية. قَرِّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة. (الدرس 7-4)

$JG = 41.7;\ m\angle G = 30;$
$m\angle J = 60$



الدرس 7-5 زوايا الارتفاع والانخفاض

:: السابق

- استخدمت مثلثات متماثلة لقياس المسافات بطريقة غير مباشرة.

:: الحالي

1. حل المسائل التي تتضمن زوايا ارتفاع وانخفاض.
2. استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض لإيجاد المسافة بين جسمين.

:: لماذا

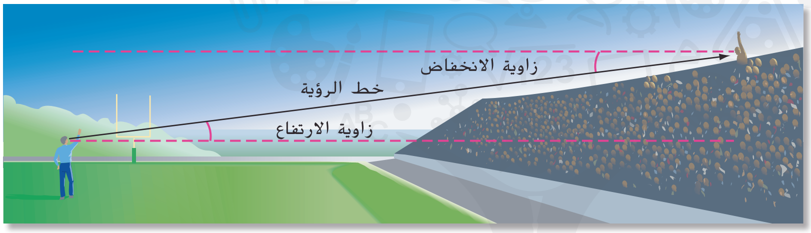
- لتسجيل هدف في المرمى، لا بد أن يركل اللاعب الكرة بقوة كافية وزاوية ارتفاع مناسبة للتأكد من أن الكرة ستصل لعارضة المرمى بمستوى مرتفع بما يكفي حتى تمر فوق العارضة الأفقية ويتم تسجيل الهدف. لا بد من أن تتغير هذه الزاوية اعتمادًا على الوضع المبدئي للكرة من حيث بعدها عن قاعدة العارضة.

مفردات جديدة
زاوية الارتفاع
angle of elevation
زاوية الانخفاض
angle of depression

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 زوايا الارتفاع والانخفاض

زاوية الارتفاع هي الزاوية التي تتكون من خط أفقي وخط (مسار) الرؤية للمُراقب تجاه هدف فوق الخط الأفقي.
زاوية الانخفاض هي زاوية تتكون من خط أفقي وخط رؤية المراقب تجاه هدف أدنى من الخط الأفقي.

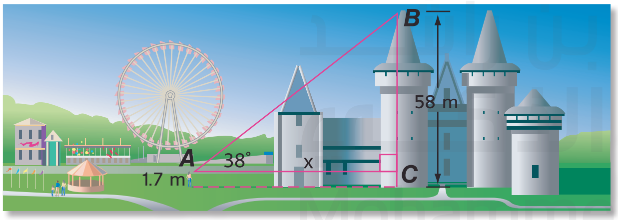


الخطوط الأفقية متوازية، لذا فإن زاويتي الارتفاع والانخفاض في الرسم التخطيطي ستكونان متطابقتين بنظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.

مثال 1 زاوية الارتفاع

العطلة تريد سالي رؤية القلعة في مدينة الملاهي. وترى قمة القلعة بزاوية ارتفاع تبلغ 38°. وتعلمُ أن القلعة ارتفاعها 58 m. فإذا كان طول سالي 1.7 m، فكم تبعد عن القلعة لأقرب m؟

ارسم رسمًا تصوريًّا لهذه الحالة.



نظرًا لأن طول سالي 1.7 m، فإن $BC = 57 - 1.7$ أو 55.3 m. افترض أن x تمثل المسافة بين سالي والقلعة AC.

$\tan A = \dfrac{BC}{AC}$	$\tan = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$
$\tan 38° = \dfrac{55.3}{x}$	$m\angle A = 38,\ BC = 184.5,\ AC = x$
$x = \dfrac{55.3}{\tan 38°}$	جد قيمة x
$x \approx 71$	استخدم الحاسبة

تبعد سالي بحوالي 71 m عن القلعة.

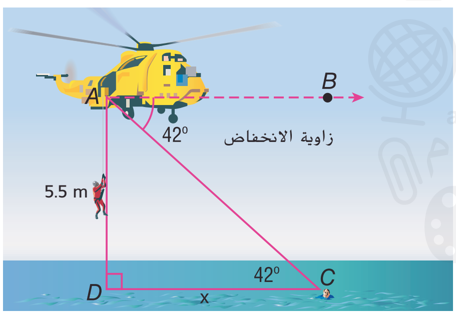
تمرين موجّه

1. **كرة القدم** العارضة الأفقية للمرمى ارتفاعها 10 ft. إذا تمت محاولة التهديف من مسافة 22.9 ft من قاعدة عارضة المرمى وأخطأت الهدف بمسافة قدم واحد، فما أصغر زاوية ارتفاع كان يمكن أن تُركل منها الكرة لأقرب درجة؟ **8°**

مثال 2 زاوية الانخفاض

الطوارئ **ينتشل فريق البحث والإنقاذ بالطائرة أشخاصًا من موقع حادثة قارب عند ملاحظة شخص آخر في حاجة للمساعدة. إذا كانت زاوية انخفاض ذلك الشخص الآخر هي 42° والطائرة على ارتفاع 5.5 m فوق سطح الماء، فما المسافة الأفقية بدءًا من فريق الإنقاذ حتى هذا الشخص لأقرب m؟**

ارسم رسمًا تصوريًّا لهذه الحالة.



ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

نظرًا لأن $\overrightarrow{AB}$ و $\overline{DC}$ متوازيان، فإن $m\angle BAC = m\angle ACD$ حسب نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.

افترض أن x تُمثل المسافة الأفقية من فريق الإنقاذ إلى الشخص DC.

$\tan C = \dfrac{AD}{DC}$ $\tan = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

$\tan 42° = \dfrac{55}{x}$ $C = 42$ و $AD = 5.5$ و $DC = x$

$x \tan 42° = 5.5$ اضرب كل ضلع في x

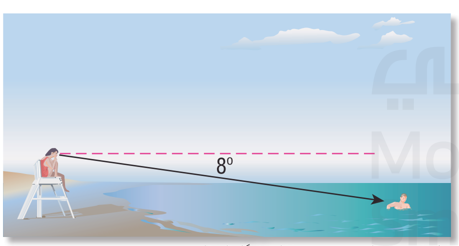
$x = \dfrac{5.5}{\tan 42°}$ اقسم كل من الطرفين على $\tan 42°$

$x \approx 6.1$ استخدم الحاسبة

إذًا، فالمسافة الأفقية بين الشخص والطائرة تبلغ حوالي 6 m.

تمرين موجّه

2. **الإنقاذ** يراقب أحد المنقذين الشاطئ من مسار رؤية بمسافة 1.8 m فوق سطح الأرض. ويرى أحد الأشخاص يسبح في الماء بزاوية انخفاض قدرها 8°. فكم يبعد ذلك الشخص من برج المراقبة؟ **حوالي 13.1 m**



ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

انتبه!

زوايا الارتفاع والانخفاض لتفادي الخطأ، تذكر أن زوايا الارتفاع والانخفاض تتشكل دائمًا بخط أفقي وليس رأسي على الإطلاق.

الربط بتاريخ الرياضيات

إراتوستينس (194–276ق.م)

كان إراتوستينس عالم رياضيات وفلك، وولد في قوريني وهي الآن ليبيا. استخدمَ زاوية ارتفاع الشمس في وقت الظهر في مدينتي الإسكندرية وأسوان (في مصر) لقياس محيط الأرض.

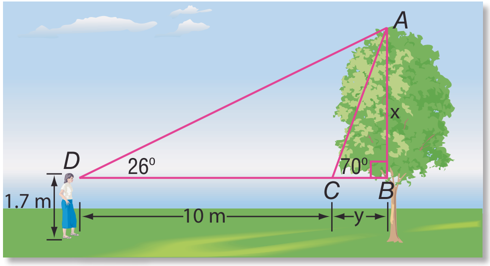
المصدر: *موسوعة بريتانيكا*

2 زاويتا الارتفاع والانخفاض

زاويتا الارتفاع والانخفاض يمكن استخدام زوايا الارتفاع أو الانخفاض لجِسمين مختلفين لتحديد المسافة بين هذين الجسمين. وبالمثل، يمكن استخدام الزوايا من موقعين مختلفين لملاحظة نفس الجسم لتحديد ارتفاع الشيء.

مثال 3 استخدام زاويتي ارتفاع أو انخفاض

اقتلاع الأشجار لكي تُحدد سهى ارتفاع شجرة تريد اقتلاعها، ترى أن قمة الشجرة بزاوية ارتفاع 70°. ثم تراجعت 10 m للخلف ورأت القمة بزاوية 26°. إذا كان خط رؤية سهى يرتفع عن الأرض بمقدار 1.7 m، فما طول الشجرة لأقرب m؟



الفهم $\triangle ABC$ و$\triangle ABD$ مثلثان بزاوية قائمة. ارتفاع الشجرة هو مجموع طول سهى و AB.

التخطيط نظرًا لأن المسافة المبدئية بينها وبين الشجرة غير معروفة، فاكتب وحل نظام معادلات باستخدام كلا المثلثين. افترض أن $AB = x$ و$CB = y$.
لذا $DB = y + 10$ وارتفاع الشجرة $x + 1.7$.

الحل استخدم $\triangle ABC$.

$$\tan 70° = \frac{x}{y} \qquad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}};\ m\angle ACB = 70$$

$$y \tan 70° = x \qquad \text{اضرب كل طرف في } y$$

استخدم $\triangle ABD$.

$$\tan 26° = \frac{x}{y+10} \qquad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}};\ m\angle D = 26$$

$$(y + 10) \tan 26° = x \qquad \text{اضرب كل ضلع في } y + 10$$

عوّض عن قيمة x من $\triangle ABD$ في المعادلة لـ $\triangle ABC$ وحل لإيجاد قيمة y.

$$y \tan = x$$

$$y \tan 70° = (y + 10) \tan 26°$$

$$y \tan 70° = y \tan 26° + 10 \tan 26°$$

$$y \tan 70° - y \tan 26° = 10 \tan 26°$$

$$y(\tan 70° - \tan 26°) = 10 \tan 26°$$

$$y = \frac{10 \tan 26°}{\tan 70° - \tan 26°}$$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد أن $y \approx 2.16$. باستخدام المعادلة من $\triangle ABC$، فإن $x = 2.16 \tan 70°$ أو حوالي 5.9.

ارتفاع الشجرة يساوي 5.9 + 1.7 أو 7.6، أي حوالي 8 m.

التحقق عوّض قيمة y في المعادلة من $\triangle ABD$.

$x = (2.16 + 10) \tan 26°$ أو حوالي 5.9. هذه هي نفس القيمة الناتجة عن استخدام المعادلة من $\triangle ABC$. ✓

تمرين موجّه

3. ناطحات السحاب مبنيان مرئيان من أعلى ناطحة سحاب ارتفاعها 200 m. المبنى "أ" يُرى من زاوية انخفاض 35° والمبنى "ب" يُرى من زاوية انخفاض 36°. فكم يبعد المبنيان عن بعضهما لأقرب m؟ **10 m**

الربط بالحياة اليومية

في الولايات المتحدة، تُقاس كمية الخشب بالقدم اللوحي. وهي قطعة خشب تشتمل على قياس 2360 cm مكعبة. غالبًا ما يُقدّر أصحاب مزارع أشجار الخشب كمية خشب الأشجار لديهم لتحديد الكمية التي يريدون قطعها وبيعها.

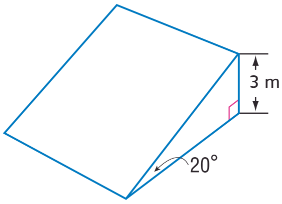
المصدر: كلية الموارد الطبيعية بجامعة ولاية أوهايو

نصيحة دراسية

القياس غير المباشر عند استخدام زوايا الانخفاض لجسمين مختلفين لحساب المسافة بينهما، من المهم أن تتذكر أن الجسمين يجب أن يكونا على نفس المستوى الأفقي. بمعنى آخر، لا يجوز أن يكون أحدهما أعلى أو أسفل الآخر.

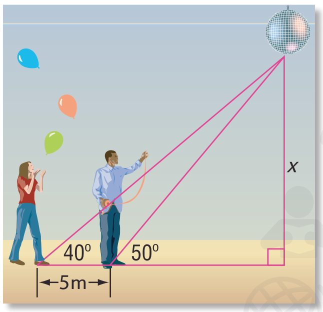
التحقق من فهمك

مثال 1 **1.** **ركوب الدراجات** تريد شيماء أن تبني منحدر الدراجات الموضح هنا. جد طول قاعدة المنحدر. **8.2 m**



مثال 2 **2.** **كرة القدم** يجلس مُشَجِّع في المنصة العلوية من الاستاد على بعد 61 m من القاعدة الرئيسية. إذا كانت زاوية الانخفاض للملعب هي 62°، فما ارتفاع مكان المُشجع؟ **53.9 m**

مثال 3 **3.** **استخدام النماذج** تعمل رنا وزوجها أحمد على تعليق الزينة للحفل المدرسي. ويقف أحمد على بعد 5 m أمام رنا وتحت كرة الزينة مباشرة. فإذا كانت زاوية الارتفاع من رنا للكرة 40° ومن أحمد للكرة 50° فما ارتفاع كرة الزينة؟ **14.2 m**



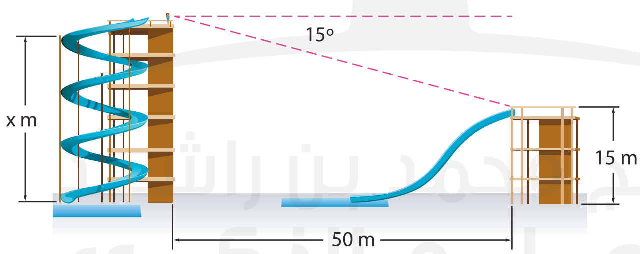
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **4.** **الهوكي** يضرب لاعب هوكي القرص من على بُعد 6 m باتجاه مرمى بارتفاع 1.5 m. إذا تم ضرب القرص بزاوية ارتفاع 15° باتجاه منتصف المرمى، فهل سيسجل اللاعب هدفًا؟

لا؛ 1.6 > 1.5

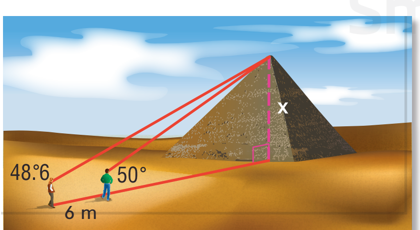
5 **الجبال** جد زاوية ارتفاع قمة جبل يراها المشاهد من بعد 155 m من الجبل إذا كان المشاهد يقف على ارتفاع 1.5 m من الأرض علمًا بأن ارتفاع الجبل هو 350 m. **66°**

مثال 2 **6.** **الملاهي المائية** منحدرا تزحلق مائيتان يبعدان عن بعضهما 50 m على مستوى الأرض. من قمة منحدر التزحلق الأعلى، تستطيع رؤية قمة منحدر التزحلق الأقل ارتفاعًا بزاوية انخفاض 15°. إذا علمتَ أن ارتفاع منحدر التزلق الأخرى حوالي 15 m من سطح الأرض فما ارتفاعك تقريبًا من سطح الأرض؟ قرّب إلى أقرب عُشْر m. **28.4 m**

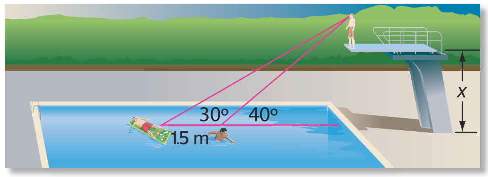


7. **الطيران** بسبب عاصفة، يطير طيَّار على ارتفاع 528 m ولا بد من أن يهبط بالطائرة. إذا كان ما زالت لديه مسافة أفقية 2000 m حتى الهبوط. فبأي زاوية انخفاض يجب أن يهبط؟ **14.8°**

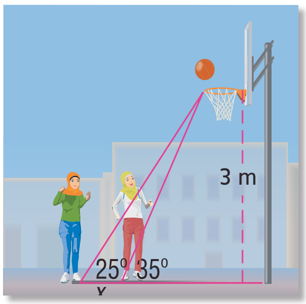
مثال 3 **8.** **الأهرامات** يزور كل من أحمد وعلي الهرم الأكبر في مصر. بدءًا من مكان أحمد، تبلغ زاوية الارتفاع لقمة الهرم 48.6°. ومن مكان علي، تبلغ زاوية الارتفاع 50°. فإذا كانا يقفان على بعد 6 m من بعضهما، وكلاهما طوله 1.7 m. فما ارتفاع الهرم؟ **حوالي 142 m**



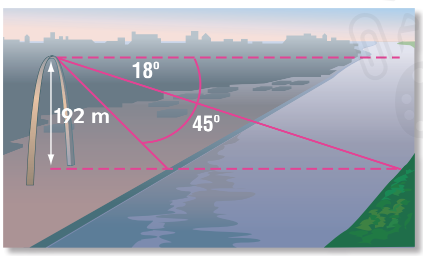
9 **رياضة الغوص** يقف محمد على لوح القفز الأعلى في حمام السباحة المحلي. وفي الماء، يوجد اثنان من أصدقائه كما هو مُوَضَّح. فإذا كانت زاوية الانخفاض لأحد أصدقائه هي 40° وللآخر 30° الذي يبعد عن الأول بمسافة 1.5 m للوراء، فما ارتفاع لوح القفز؟ **2.83 m**



.10 **كرة السلة** تنتظر رنا وحصة ارتدادًا في مباراة كرة سلة. فإذا كان ارتفاع الحلقة 3 m وزاوية الارتفاع بين رنا والمرمى 35° وزاوية الارتفاع بين حصة والمرمى 25°، فما المسافة بينهما؟ **2.1 m**



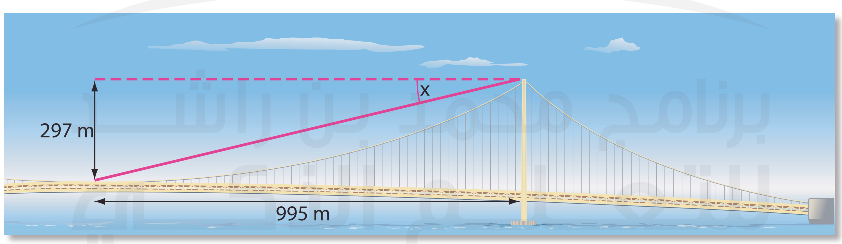
.11 **الأنهار** يقف محمد على قمة قوس سانت لويس وينظر للأسفل على نهر المسيسيبي. وتبلغ زاوية الانخفاض تجاه ضفة النهر الأقرب 45° وزاوية انخفاض الضفة الأبعد 18°. ويبلغ ارتفاع القوس 192 m. قَدِّر عرض النهر في تلك النقطة. **399 m**



B

.12 **استخدام النماذج** يشتمل بركان أونزن باليابان على حوض حمم على بعد 15 km أسفل خليج تشيجيوا الذي يقع شرق البركان. وترتفع قناة الحمم التي تصل بين البركان وحوض الحمم بزاوية ارتفاع 40° باتجاه البركان. فما طول قناة الحمم تحت مستوى سطح البحر؟ **23.3 km**

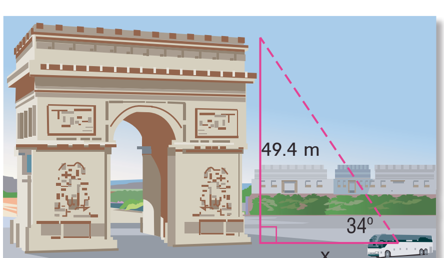
.13 **الجسور** افترض أنك تقف في منتصف منصة جسر أكاشي كايكو الذي يُعد أطول جسر مُعلّق في العالم. فإذا كان الارتفاع من قمة المنصة الحاملة لكابلات التعليق هو 297 m، والمسافة من المنصة إلى منتصف الجسر 895 m، فما زاوية الانخفاض من منتصف الجسر إلى المنصة؟ **16.6°**



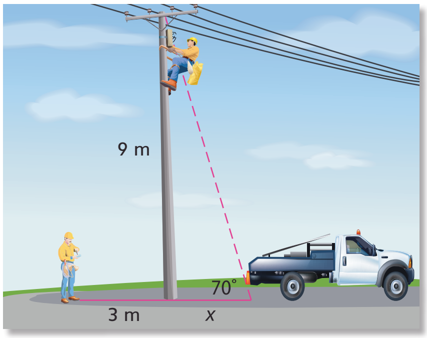
14. يمتد ضوء فنارة جزيرة النورس الصغيرة لمسافة 264 m ويمتد ضوء فنارة جزيرة بلوم لمسافة 296.9 m. لذا، سيصل ضوء فنارة جزيرة بلوم للمركب.

.14 **الفنارات** يشع ضوء فنارة جزيرة النورس الصغيرة من ارتفاع 27.7 m بزاوية انخفاض 6°. ويشع ضوء فنارة جزيرة بلُوم من على بُعد 548.6 m من ارتفاع 10.4 m وبزاوية انخفاض 2°. أيُّ ضوء فنارة سيصل للمركب الراسي بالدقة ما بين فنارة جزيرة النورس الصغيرة وفنارة جزيرة بلوم؟

.15 **السياحة** من موقع الحافلة على الطريق، تبلغ زاوية ارتفاع قوس النصر 34°. فإذا كان ارتفاع القوس 48.4 m، فكم تبعد الحافلة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. **73.2 m**

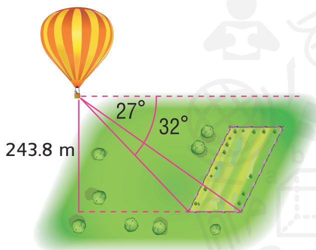


16. **الصيانة** وصَلَ عاملا إصلاح خطوط هواتف إلى أحد المواقع لاستعادة خط الاتصال بعد انقطاعه. تسلق أحدهما عمود خطوط الهواتف، بينما وقف الآخر على مسافة 3 m من العمود. إذا كان صندوق التحكم يرتفع 9 m عن الأرض على العمود بزاوية ارتفاع من الشاحنة لعامل الإصلاح تبلغ 70°، فكم يبعد العامل الواقف على الأرض عن الشاحنة؟ **6.3 m**



17. **التصوير الفوتوغرافي** تتميز كاميرا رقمية مزودة بانورامية بإمكانية عرض بزاوية ارتفاع 38°. إذا كانت الكاميرا محمولة على حامل ثلاثي موجَّه مباشرة لمبنى أثري ارتفاعه 37.8 m، فما المسافة من المبنى التي يجب أن تضع الحامل عندها لترى المبنى كله في الصورة؟ **47.2 m**

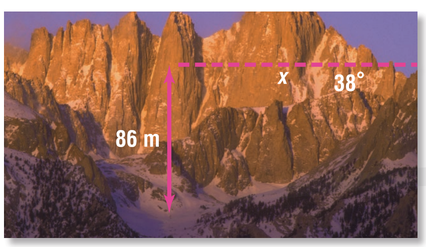
18. **استخدام النماذج** ضمن دراسات وحدة الطقس، رَكِب صف سالم الدراسي منطادًا يعمل بالهواء الساخن. وأثناء طيرانهم فوق حقل مسيَّج، كانت زاوية انخفاض الجزء الأقرب من السياج هي 32° وزاوية انخفاض الجزء الأبعد 27°. إذا كان ارتفاع المنطاد 243.8 m، فقدّر عرض الحقل؟ **88.3 m**

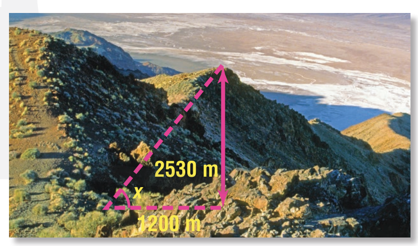


19. **سباقات الماراثون** سباق بادووتر هو سباق يبدأ عند أدنى نقطة في ولاية كاليفورنيا – "وادي الموت" – وينتهي عند أعلى نقطة في الولاية – "جبل ويتني". يبدأ السباق عند عُمق 86 m تحت مستوى سطح البحر وينتهي عند ارتفاع 2530 m فوق مستوى سطح البحر.

a. حدد زاوية الارتفاع لجبل ويتني إذا كانت المسافة الأفقية من القاعدة للقمة 1200 m **≈64.6°**

b. إذا كانت زاوية الانخفاض لوادي الموت 38°، فما المسافة الأفقية من مستوى سطح؟ **≈110.1 m**

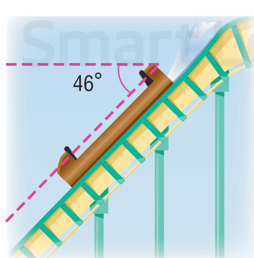


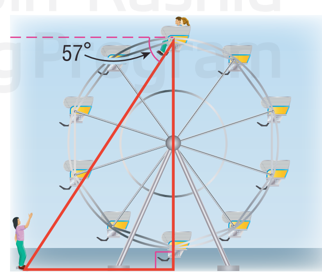


20. **مدن الملاهي** ذهب رنا وريهام وسهى لمدينة الملاهي أثناء زيارتهم لليابان. وركبوا عجلة دوارة قطرها 100 m وزحلوقة ارتفاعها 80 m.

a. عندما تكون ريهام وسهى على أقصى ارتفاع للعجلة كما هو مُوضح، فما مسافة بعدهما عن رنا؟ **119.2 m**

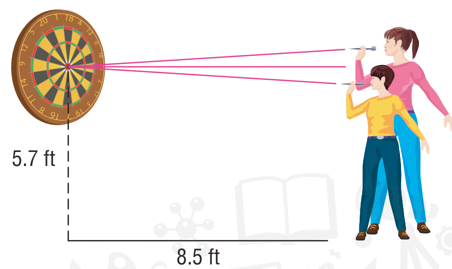
b. إذا كانت زاوية انخفاض الزحلوقة 46°. فما طول الزحلوقة؟ **111.2 m**





21 **رميُ السهام** ترمي شيماء وحصة السهام من مسافة 2.6 m. يرتفع مركز نقطة الهدف على اللوحة بمقدار 1.7 m من الأرض. رمت حصة السهم من ارتفاع 1.8 m ورمت شيماء السهم من ارتفاع 1.5 m. ما زوايا الارتفاع أو الانخفاض التي يجب أن ترمي عندها كل منهما ليصيب نقطة الهدف؟ تجاهَل العوامل الأخرى، مثل مقاومة الهواء والسرعة والجاذبية الأرضية.

رَمَت شيماء بزاوية انخفاض 4.40°. ورمى حصة بزاوية ارتفاع قدرها 2.20°.



.22 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سنبحث في العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات.

a. **هندسيًا** ارسم رسمًا هندسيًا لثلاثة مثلثات. ارسم أحدها حاد الزاوية وآخر منفرج الزاوية والثالث بزاوية قائمة. سمّ أحدها ABC والثاني MNP والثالث XYZ. جد أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية لكل مثلث. **انظر الهامش.**

b. **جدوليًا** انسخ الجدول التالي وأكمله. **تتوفر إجابات نموذجية.**

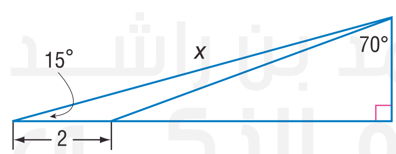
المثلث	النِسب		
ABC	$\frac{\sin A}{BC} = 0.3$	$\frac{\sin B}{CA} = 0.3$	$\frac{\sin C}{AB} = 0.3$
MNP	$\frac{\sin M}{NP} = 0.2$	$\frac{\sin N}{PM} = 0.2$	$\frac{\sin P}{MN} = 0.2$
XYZ	$\frac{\sin X}{YZ} = 0.3$	$\frac{\sin Y}{ZX} = 0.3$	$\frac{\sin Z}{XY} = 0.3$

c. **الكلمات** خمّن نسبة الـ sin زاوية لطول الضلع المقابل لتلك الزاوية بأحد المثلثات. **انظر الهامش.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.23 **تحليل الخطأ** يحاول محمد ومحمود تحديد العلاقة بين زوايا الارتفاع والانخفاض. يقول محمد إنك إذا كنت تنظر لأعلى لشخص بزاوية ارتفاع تبلغ 35°، إذًا فهو ينظر إليك بزاوية انخفاض 55°، وهي الزاوية المتممة للزاوية 35°. لا يوافق محمود ويقول أن الشخص الآخر ينظر بزاوية انخفاض مساوية لزاوية ارتفاعك أو 35°. فهل أيٌ منهما على صواب؟ اشرح. **انظر الهامش.**

.24 **تحدٍ** جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. **7.9**



.26 الإجابة النموذجية: ما العلاقة بين زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض؟

.25 **التبرير** هل ما قاله صواب أم خطأ. اشرح. **انظر الهامش.**

عندما يتحرك شخص باتجاه شيء وينظر إليه فإن زاوية الارتفاع تزيد.

.26 **اكتب سؤالاً** وجدتْ زميلة بالصف الدراسي زاوية ارتفاع شيء ما، ولكنها تحاول أن تجد زاوية الانخفاض. اكتب سؤالاً لتساعدها على حل المسألة.

.27 **الكتابة في الرياضيات** صِف طريقة يمكنك من خلالها تحديد ارتفاع الشيء دون استخدام حساب المثلثات عن طريق اختيار زاوية ارتفاعك. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

تمرين على الاختبار المعياري

.28 يريد محمد أن يعرف ارتفاع برج إرسال إشارة شبكة الهاتف النقّال بجوار منزله. مشى محمد 24.4 m من قاعدة البرج وقاس زاوية الارتفاع لأعلى البرج بزاوية °54. إذا كان طول محمد 1.5 m، فما ارتفاع البرج؟ **D**

A 15.8 m
B 18.2 m
C 33.5 m
D 35 m

.29 إجابة قصيرة يبعد ضوء كشاف عن محطة الطقس بمسافة 1981.2 m. إذا كانت زاوية الارتفاع إلى موقع الضوء على السُحب أعلى المحطة هي °45، فما أقصى ارتفاع للسُحب؟ **1981 m**

.30 الجبر ما حل نظام المعادلات؟ **G**

$$2x - 4y = -12$$
$$-x + 4y = 8$$

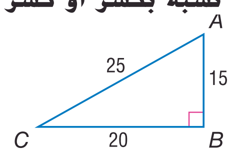
F $(4, 4)$
G $(-4, 1)$
H $(-4, -4)$
J $(1, -4)$

.31 SAT/ACT مُثلث تتمثل أضلاعه بِنِسَب 5:12:13. فما قياس الزاوية الصغرى للمثلث؟ **B**

A 13.34
B 22.62
C 34.14
D 42.71
E 67.83

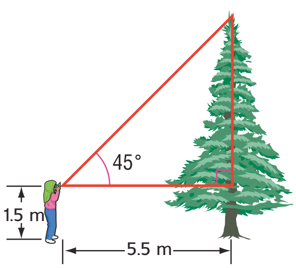
مراجعة شاملة

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة. (الدروس 4-7)



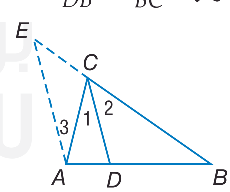
32. sin C $\frac{15}{25} = 0.60$
33. tan A $\frac{20}{15} = 1.33$
34. cos C $\frac{20}{25} = 0.80$
35. tan C $\frac{15}{25} = 0.75$
36. cos A $\frac{20}{25} = 0.60$
37. sin A $\frac{20}{25} = 0.80$

.38 المناظر الطبيعية تريد إيمان قياس ارتفاع شجرة. وأمسكتْ مثلث تخطيط بزاوية °45 بحيث تكون إحدى ساقيه أفقية، ولاحظتْ قمة الشجرة بمحاذاة وتر المثلث كما هو مُوضّح على اليمين. إذا كانت تبعد 5.5 m من الشجرة وعيناها على ارتفاع 1.5 m من الأرض، فجد ارتفاع الشجرة. (الدروس 3-7) **7 m**

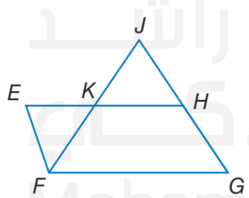


البرهان **اكتب برهانًا من عمودين.** **39–40. انظر الهامش.**

.39 المعطيات: $\overline{CD}$ bisects $\angle ACB$.
حسب معطيات الشكل، فإن $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$.
المطلوب: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$



.40 المعطيات: $\overline{JF}$ تُنصّف $\angle EFG$.
$\overline{EH} \parallel \overline{FG}$, $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$
المطلوب: $\frac{EK}{KF} = \frac{GJ}{JF}$



الهندسة الإحداثية **حدّد إحداثيات النقطة المركزية لكل مثلث.**

41. $A(2, 2)$, $B(7, 8)$, $C(12, 2)$ **(7, 4)**
42. $X(-3, -2)$, $Y(1, -12)$, $Z(-7, -7)$ **(−3, −7)**
43. $A(-1, 11)$, $B(3, 1)$, $C(9, 6)$ **(−5, 6)**
44. $X(4, 0)$, $Y(-2, 4)$, $Z(0, 6)$ $\left(\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}\right)$

مراجعة المهارات

حل كلاً من التناسبات التالية.

45. $\frac{1}{5} = \frac{x}{10}$ **2**
46. $\frac{2x}{11} = \frac{3}{8}$ **2.1**
47. $\frac{4x}{16} = \frac{62}{118}$ **2.1**
48. $\frac{12}{21} = \frac{45}{10x}$ **7.9**

الوحدة 7 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

أوساط هندسية (الدرس 7-1)

- بالنسبة إلى العددين الموجبين a وb، الوسط الهندسي هو العدد الموجب x حيث $a : x = x : b$ صواب.

نظرية فيثاغورس (الدرس 7-2)

- افترض أن $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية زاويته القائمة هي C. إذًا $a^2 + b^2 = c^2$.

مثلثات خاصة قائمة الزاوية (الدرس 7-3)

- قياسات أضلاع مثلث زواياه 90° و 45° و 45° هي x و x و $x\sqrt{2}$.
- قياسات أضلاع مثلث زواياه 90° و 60° و 30° هي x و $2x$ و $x\sqrt{3}$.

حساب المثلثات (الدرس 7-4)

- $\sin A = \dfrac{\text{الساق المقابلة}}{\text{الوتر}}$
- $\cos A = \dfrac{\text{الساق المجاورة}}{\text{الوتر}}$
- $\tan A = \dfrac{\text{الساق المقابلة}}{\text{الساق المجاورة}}$

زوايا الارتفاع والانخفاض (الدرس 7-5)

- زاوية الارتفاع هي زاوية تتكون من مستقيم أفقي مع خط الرؤية تجاه هدف في مستوى أعلى.
- زاوية الانخفاض هي زاوية تتكون من مستقيم أفقي مع خط الرؤية تجاه هدف في مستوى أدنى.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

- زاوية الانخفاض angle of depression
- زاوية الارتفاع angle of elevation
- جيب التمام cosine
- وسط هندسي geometric mean
- معكوس جيب التمام inverse cosine
- معكوس الجيب inverse sine
- معكوس ظل الزاوية inverse tangent
- ثلاثية فيثاغورس Pythagorean triple
- جيب الزاوية sine
- ظل الزاوية tangent
- النسبة المثلثية trigonometric ratio
- حساب المثلثات trigonometry

مراجعة المصطلحات

حدد ما إذا كانت كل عبارة *صحيحة* أم *خاطئة*. فإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط لصياغة جملة صحيحة.

1. الوسط <u>الحسابي</u> لعددين هو الجذر التربيعي الموجب لناتج ضرب العددين.
2. <u>النسب الموسّعة</u> يُمكن استخدامها للمقارنة بين ثلاث كميات أو أكثر.
   خطأ، هندسي
3. لإيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية، احذف الجذر التربيعي <u>لفارق</u> تربيع الساقين
   صواب
4. زاوية <u>الارتفاع</u> هي زاوية تتكون من مستقيم أفقي مع خط رؤية المراقب تجاه هدف أدنى من الأفق.
   خطأ، المجموع

مراجعة درس بدرس

7-1 الوسط الهندسي

جـد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

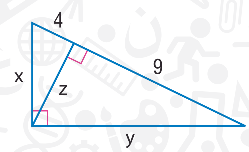
.11 9 و 4 6

.12 $\sqrt{20}$ و $\sqrt{80}$ $\sqrt{40}$

.13 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ و $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ $\frac{8}{3}$

.14 جـد x و y و z.

$x = 2\sqrt{13}$, $y = 3\sqrt{13}$, $z = 6$



.15 **الاحتفالات** يعلّق راشد سلسلة من الأضواء فوق جزء من حديقته لتجهيز منطقة للاحتفال. باستخدام كتاب لرؤية أعلى وأسفل جزء الحديقة، يمكنه رؤية أنه على بُعد 4.6 m من ذلك الجزء. فإذا كان مستوى ارتفاع عينيه 1.5 m عن الأرض، فما ارتفاع جزء الاحتفال؟ 15.2 m

مثال 1

جـد الوسط الهندسي بين 10 و 15.

$x = \sqrt{ab}$	تحديد الوسط الهندسي
$= \sqrt{10 \times 15}$	$a = 10$ و $b = 15$
$= \sqrt{(5 \times 2) \times (3 \times 5)}$	عامل.
$= \sqrt{25 \times 6}$	خاصية التجميع
$= 5\sqrt{6}$	بسّط

.18 نعم؛ قائم
$25^2 \stackrel{?}{=} 7^2 + 24^2$
$625 = 49 + 576$

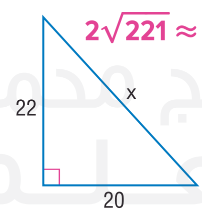
.19 نعم؛ حاد
$16^2 \stackrel{?}{=} 13^2 + 15^2$
$256 < 169 + 225$

.20 نعم؛ حاد
$88^2 \stackrel{?}{=} 65^2 + 72^2$
$7744 < 4225 + 5184$

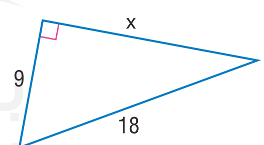
7-2 نظرية فيثاغورس وعكسها

جـد x.

16. $2\sqrt{221} \approx 29.7$



17. $9\sqrt{3} \approx 15.6$



حدد هل من الممكن أن تكون أي مجموعة من الأعداد قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه *حاد* أو *منفرج* أو *قائم*. علل إجابتك.

18. 7, 24, 25

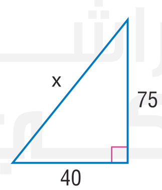
19. 13, 15, 16

20. 65, 72, 88

.21 **السباحة** تسير نهى 27 m باتجاه الجنوب و 38 m باتجاه الشرق للدوران حول البحيرة. وتسبح أختها مباشرة عبر البحيرة. كم عدد الأمتار بالتقريب لأقرب جزء من عشرة التي وفرّتها أخت نهى من خلال السباحة؟ 18.4 m

مثال 2

جـد x.



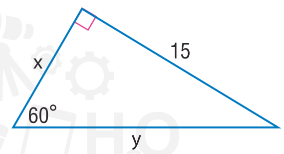
الضلع المقابل للزاوية القائمة هو الوتر. إذًا $x = c$.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$40^2 + 75^2 = x^2$	$a = 40$ و $b = 75$
$7225 = x^2$	بسّط.
$\sqrt{7225} = x$	اخُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$85 = x$	بسّط.

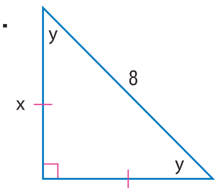
دليل الدراسة والمراجعة متابعة

7-3 مثلثات خاصة قائمة الزاوية

جـد x و y.

22. 

$x = 5\sqrt{3}, y = 10\sqrt{3}$

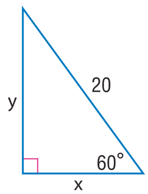
23. 

$x = 4\sqrt{2}, y = 45°$

24. **التسلق** يضيف جاسم جدارًا للتسلق إلى مجموعة ألعاب التأرجح لأخيه الصغير. إذا بدأ ببناء 1.5 m من الهيكل الحالي، ويرغب في الحصول على زاوية 60°، فما الطول الذي يجب أن يكون عليه الجدار؟ **انظر الهامش.**

مثال 3

جـد x و y.



قياس الزاوية الثالثة في هذا المثلث هو 60 – 90 أو 30. هذا مثلث زواياه هي 30° و60° و90°.

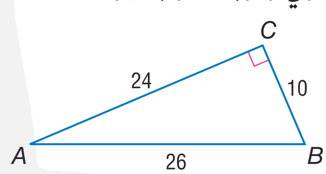
$h = 2s$	نظرية المثلث بزوايا 30° و 60° و 90°
$20 = 2x$	استخدم التعويض.
$10 = x$	جـد ناتج القسمة.

جـد الآن y، طول الساق الأطول.

$\ell = s\sqrt{3}$	نظرية المثلث بزوايا 30° و 60° و 90°
$y = 10\sqrt{3}$	استخدم التعويض.

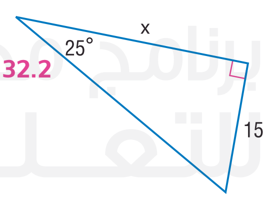
7-4 حساب المثلثات

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.

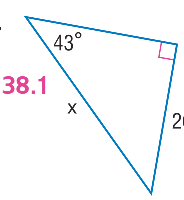


25. $\sin A$
26. $\tan B$
27. $\sin B$
28. $\cos A$
29. $\tan A$
30. $\cos B$

جـد x.

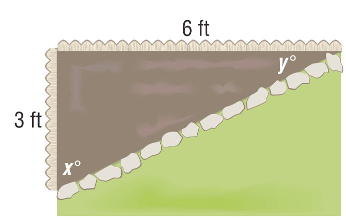
31. 

32.2

32. 

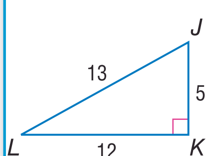
38.1

33. **تجهيز الحدائق** تريد فاطمة وضع حوض للزهور في زاوية حديقة منزلها من خلال وضع حد حجري يبدأ من مسافة 3 ft من زاوية سياج بالحديقة وينتهي على مسافة 6 ft من زاوية السياج الآخر. جـد مقياس الزاويتين، x و y، اللتين يكونهما السياج مع الحد. **26.6° و 63.4°**



مثال 4

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



a. $\sin L$

$\sin L = \frac{5}{13}$ أو حوالي 0.38 — $\sin L = \frac{opp}{hyp}$

b. $\cos L$

$\cos L = \frac{12}{13}$ أو حوالي 0.92 — $\cos L = \frac{adj}{hyp}$

c. $\tan L$

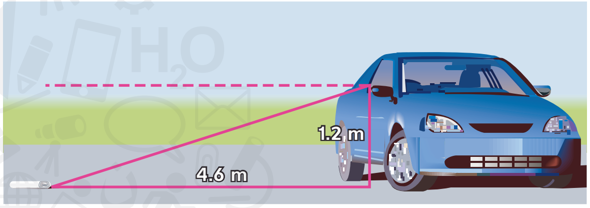
$\tan L = \frac{5}{12}$ أو 0.42 — $\tan L = \frac{opp}{adj}$

25. $\frac{5}{13}, 0.38$ **28.** $\frac{12}{13}, 0.92$

26. $\frac{12}{5}, 2.40$ **29.** $\frac{5}{12}, 0.42$

27. $\frac{12}{13}, 0.92$ **30.** $\frac{5}{13}, 0.38$

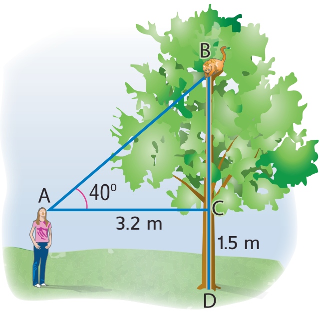
34. الوظائف يسلّم إبراهيم أوراقًا عند مروره بطريق ريفي من سيارته. إذا كان يقذف الأوراق من ارتفاع 1.2 m، وتسقط على بُعد 4.6 m من سيارته، فما زاوية الانخفاض التي قُذف من خلالها الورق إلى أقرب درجة؟ **15°**



35. أبراج الهاتف الخلوي يوجد برج هاتف خلوي في الحقل المقابل لبيت مايسة. إذا سارت مايسة 15.2 m من البرج، ووجدت أن زاوية الارتفاع من موضعها إلى أعلى البرج هي 60°. فما ارتفاع البرج؟ **26.4 m**

مثال 5

تسلقت قطة نجاة شجرة. إذا نظرت إلى قطتها بزاوية ارتفاع 40°، وترتفع عيناها 1.5 m عن الأرض، فكم يبلغ ارتفاع قطتها عن الأرض؟



لإيجاد قياس ارتفاع القطة عن الأرض، جـــد CB.

$\tan 40 = \frac{CB}{3.2}$ — $\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$3.2(\tan 40) = CB$ — اضرب كل طرف في 1.5.

$2.7 = CB$ — بسّط.

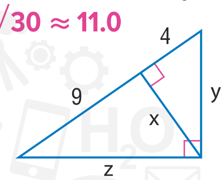
نظرا لأن عيني نجاة ترتفع1.5 m عن الأرض فاجمع 1.5 الى 2.7. قطة نجاة على ارتفاع 4.2 m

تدريب على الاختبار

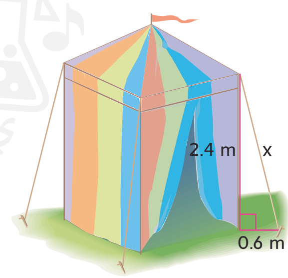
جـد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

1. 7 و 11 $\sqrt{77} \approx 8.8$
2. 12 و 9 $6\sqrt{3} \approx 10.4$
3. 14 و 21 $7\sqrt{6} \approx 17.1$
4. $4\sqrt{3}$ و $10\sqrt{3}$ $2\sqrt{30} \approx 11.0$

5. جـد x و y و z.
$x = 6, y = 2\sqrt{13},$
$z = 3\sqrt{13}$

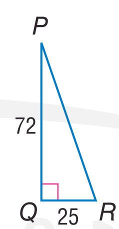


6. **المَعَارض** يجهّز بلال خيمته في معرض النهضة. إذا كان طول الخيمة هو 2.4 m، ولا يُمكن تثبيت الحبل لمسافة أكثر 0.6 m عن الخيمة، فما الطول الذي يجب أن يكون عليه الحبل؟ 2.5 m

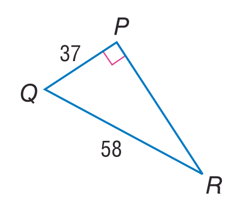


استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle R$ مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

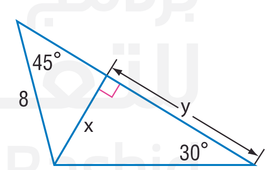
7. 70.9



8. 38.6

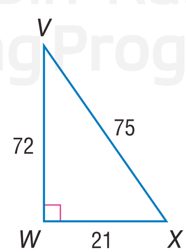


9. جـد x و y.
$x = 4\sqrt{2}, y = 4\sqrt{6}$



عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقرِّبه لأقرب جزء من مئة.

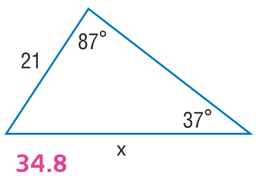
10. $\cos X$ 10–13. انظر الهامش.
11. $\tan X$
12. $\tan V$
13. $\sin V$



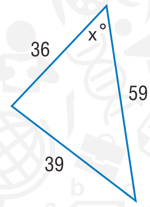
14. **الفضاء** تشاهد إيمان إطلاق مكوك فضائي على بعد 6 km من رأس كانافيرال في فلوريدا. إذا كانت زاوية الارتفاع من نقطة رؤيتها إلى المكوك °80، فكم يبلغ ارتفاع المكوك إذا تم إطلاقه بشكل مستقيم لأعلى؟ 34 km

جـد x. قَرِّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.

15. 34.8



16. 40

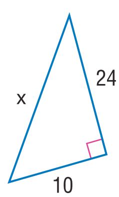


17. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي هو طول ساق المثلث الذي زواياه °45 و °45 و °90 وله وتر بقياس 20؟ B

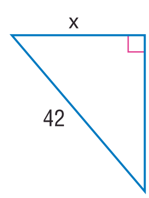
A 10
B $10\sqrt{2}$
C 20
D $20\sqrt{2}$

جـد x.

18. 26



19. $\sqrt{320} \approx 17.9$



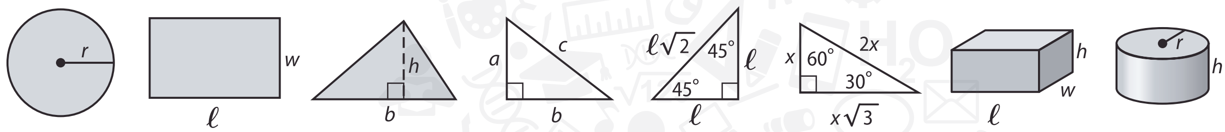
20. **جولات مشاهدة الحيتان** خلال جولة لمشاهدة الحيتان، كان ينظر أسامة من نظارته المعظّمة عندما لاحظ ثعلب الماء في الأفق البعيد. إذا كان أسامة على ارتفاع 6.1 m فوق مستوى سطح البحر في القارب، وكانت زاوية الانخفاض °30، فما مقدار بُعد ثعلب الماء عن أقرب قدم للقارب؟ 10.7 m

التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام قانون

في بعض الأحيان، يكون استخدام قانون ما لحل المسائل أمرًا ضروريًا في الاختبارات المعيارية.
وفي بعض الحالات، قد يتم إعطاؤك ورقة بها القوانين التي يسمح لك بمراجعتها أثناء حل الاختبار.

القوانين



$V = \pi r^2 h$ | $V = \ell wh$ | مثلثات خاصة قائمة الزاوية | $a^2 + b^2 = c^2$ | $A = \frac{1}{2}bh$ | $A = \ell w$ | $C = 2\pi r$, $A = \pi r^2$

توجد 360 درجة في دائرة.
يبلغ مجموع قياسات زوايا المثلث 180 درجة.

إستراتيجيات استخدام القوانين

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب مني حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- هل هناك أي قوانين يمكنني استخدامها لتساعدني في حل المسألة؟

الخطوة 2

حل المسألة.

- عوّض عن الكميات المعروفة والمذكورة في نص المسألة في القانون.
- بسّط الحل بإيجاد القيم المجهولة في القانون.

الخطوة 3

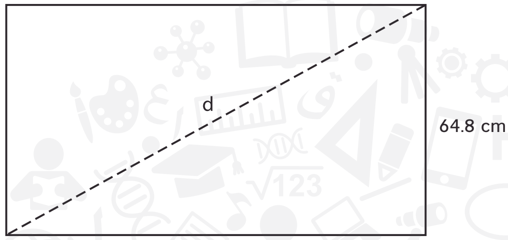
تحقق من حلك.

- حدد المدى المعقول لقيم الإجابة.
- تحقق لتتأكد من أن الإجابة منطقية.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من الإجابة.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

نسبة العرض إلى الارتفاع للتليفزيون عالي الوضوح هي 16:9. وهذا يسمى أيضًا نسبة أبعاد التليفزيون. يتم تحديد حجم التليفزيون من حيث المسافة القطرية عبر عرض الشاشة. إذا كان عرض تليفزيون عالي الوضوح هو 64.8 m، فما مقدار حجم شاشته؟



A 122 cm　　**C** 128.5 cm

B 127 cm　　**D** 132 cm

اقرأ المسألة بعناية. تعلمُ ارتفاع الشاشة ونسبة العرض إلى الارتفاع. ويُطلب منك إيجاد المسافة القطرية للشاشة. يمكنك استخدام **نظرية فيثاغورس** لحل المسألة.

جـد عرض الشاشة. حدد وحل تناسبًا باستخدام نسبة العرض إلى الارتفاع 16:9.

$\frac{16}{9} = \frac{w}{64.8}$ ← عرض الشاشة / ← ارتفاع الشاشة

$9w = 1036.8$ خاصية الضرب التبادلي

$w = 115.2$ اقسم كل طرف على 9.

إذًا، عرض الشاشة هو 115.2 cm. استخدم نظرية فيثاغورس لحل المسافة القطرية.

$c^2 = a^2 + b^2$ نظرية فيثاغورس

$c^2 = (64.8)^2 + (115.2)^2$ عوّض عن a و b.

$c \approx 132.1$ بسّط. وخُذ الجذر التربيعي للطرفين لحل c.

تبلغ المسافة القطرية للشاشة 132 cm تقريبًا. إذًا، الإجابة هي الخيار D.

تمارين

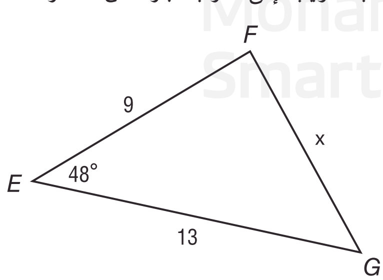
اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

1. تُطيّر صفاء طائرة ورقية مربوطة بحبل مشدود. تُحلق الطائرة الورقية على ارتفاع 53.4 m فوق الأرض، وتبلغ المسافة الأفقية من المكان الذي تقف فيه صفاء 38.6 m. فما طول حبل الطائرة الذي حررته صفاء للطائرة؟ قرّب إلى أقرب m. B

A 62 m　　**C** 68 m

B 66 m　　**D** 72 m

2. ما قيمة x أدناه بالتقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟ F



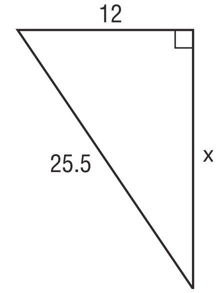
F 8.7　　**G** 10.2　　**H** 10.5　　**J** 11.1

تدريب على الاختبارات المعيارية

اختيار من متعدّد

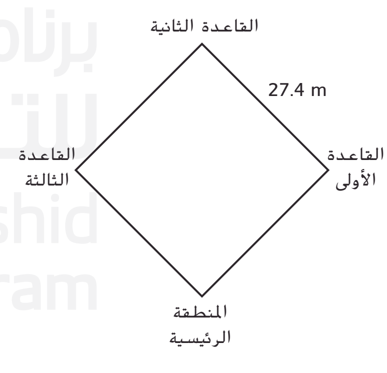
اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. ما قيمة x في الشكل أدناه؟ A



A 22.5
B 23
C 23.5
D 24

2.ملعب البيسبول عبارة عن مربع تبلغ مساحة أضلاعه **27.4 m** ما طول المسافة من القاعدة الثالثة إلى القاعدة الأولى؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. H



F 47.5 m
G 43.2 m
H 38.8 m
J 36 m

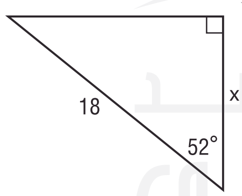
نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 1 تحتاج بعض فقرات الاختبار إلى استخدام قانون محدد لحلها. استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة x.

3. يبلغ القياس النسبي للخريطة 4.5 cm = 1 km. كم تبلغ المسافة بين مدينتين تبعدان 2.4 cm على الخريطة؟ A

A 10.8 km
B 11.1 km
C 11.4 km
D 11.5 km

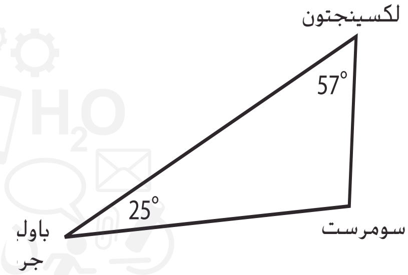
4. ما قيمة x في الشكل أدناه؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. G



F 10.5
G 11.1
H 13.6
J 14.2

5. ما نوع المثلث الذي يتكوّن من مواقع مدن لكسينجتون وسومرست وباولينج جرين؟

C



A حاد الزاوية
B متساوي الزوايا
C منفرج الزاوية
D قائم الزاوية

6. يُطيّر حمد طائرة ورقية مثبتة في طرف خيط يمتد لمسافة 106.7 m. تبلغ زاوية الارتفاع بين حمد والطائرة الورقية 74°. كم يبلغ ارتفاع الطائرة الورقية عن الأرض؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

F

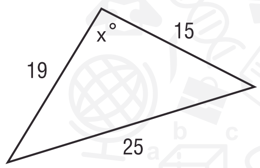
F 102.5 m
G 90.1 m
H 43 m
J 28.4 m

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

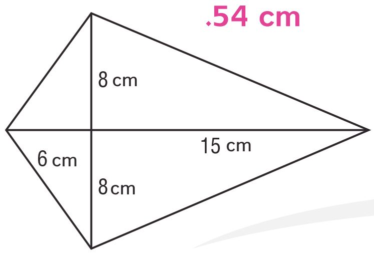
7. **إجابة شبكية** جـد قيمة x في الشكل أدناه. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

93.9



8. تَستخدم جميلة عمود تثبيت طوله 16 cm وعمود تثبيت آخر طوله 21 cm لتصميم هيكل كما هو موضح أدناه. ما محيط الهيكل الخاص بها؟

54 cm.

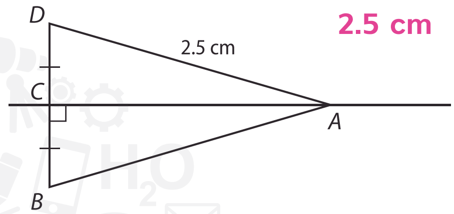


9. **إجابة شبكية** يقلع نموذج طائرة بزاوية ارتفاع 30°. كم سيبلغ ارتفاع الطائرة بعد قطع مسافة 100 m أفقيًا؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. اكتب الحل هنا.

57.7 m

.10 وفقًا لنظرية المنصف العمودي، ما طول القطعة المستقيمة AB أدناه؟

2.5 cm



.11 جـــد ميل المستقيم الذي يحتوي على النقاط $(7, 2)$ و $(3, 4)$.

$-\frac{1}{2}$

.12 إذا كان $EG = 15$ m، فما طول القطعة المستقيمة FG؟

6 m

.13 ما المعاكس الإيجابي للعبارة أدناه؟

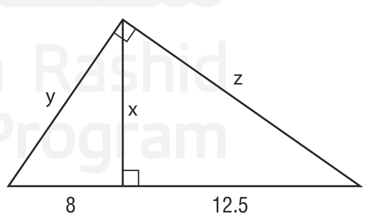
إذا كان الشكل الرباعي مستطيل، فإنه متوازي الأضلاع.

إذا لم يكن رباعي الأضلاع متوازي أضلاع، فإذًا لن يكون مستطيلاً.

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة.
اكتب الحل هنا.

.14 ارجع إلى المثلث المبيّن أدناه.



.a جـــد قيمة x مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة. **10**

.b جـــد قيمة y مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة. **12.8**

.c جـــد قيمة z مع التقريب لأقرب جزء من عشرة. **16.0**